

Stefan Antohe  
Emil Barna  
Andrei Belea  
Tiberius Cheche  
Petrica Cristea  
Adrian Dafinei  
Mircea Fronescu  
Voicu Greco  
Andrei Ionescu  
Andrei Petrescu  
Vlad Popa-Nita  
Corneliu Stanescu

Fizică  
prietenosă  
rezolvând  
probleme nu  
tocmai simple

Friendly  
physics -  
through not  
so easy questions

EDITURA UNIVERSITĂȚII DIN BUCUREȘTI

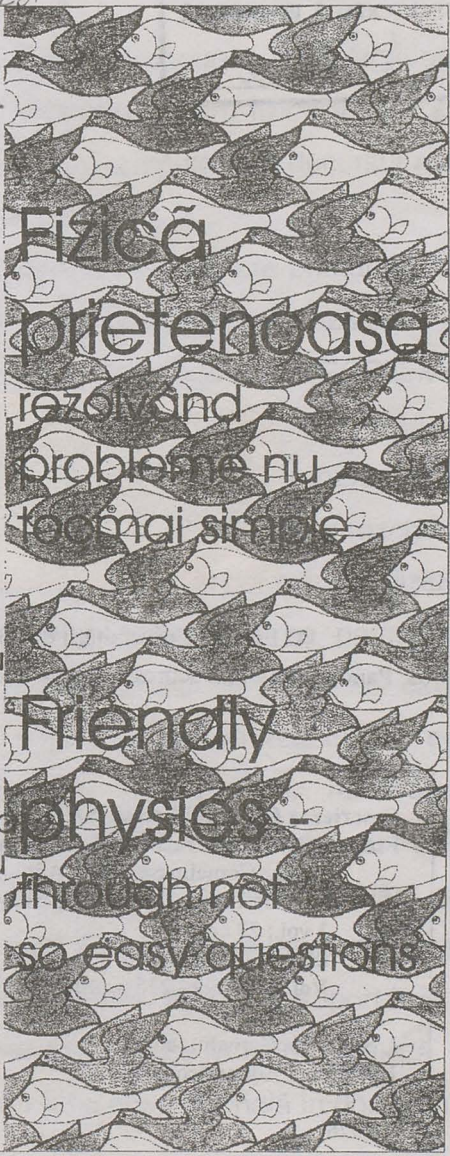


BIBLIOTECA CENTRALĂ  
UNIVERSITARĂ  
București

Cota 11 302 562

Inventar Q198904876

Ad. III 2024/13.  
S 202231



Fizică  
prietenoasă  
rezolvând  
probleme nu  
tocmai simple

Friendly  
physics -  
through not  
so easy questions

Stefan Antohe  
Emil Barna  
Andrei Belea  
Tiberius Cheche  
Petrica Cristea  
Adrian Dafinei  
Mircea Fronescu  
Voicu Greu  
Andrei Ionescu  
Andrei Petrescu  
Vlad Popa-Nita  
Corneliu Stanescu

BIBLIOTECA CENTRALĂ UNIVERSITARĂ

BUCUREȘTI

DATA 11 302562

5251  
20

**B.C.U. București**



C199904876

© Editura Universității din București

Șos. Panduri, 90-92, București - 76235; Telefon/Fax 410.23.84

**Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale**

**Fizica prietenoasă: rezolvând probleme nu tocmai simple /**

coord.: Corneliu Stănescu, Adrian Dafinei - București:

Editura Universității din București, 1999

3 vol.; 23 cm.

ISBN 973-575-328-6

Vol. 1. - 1999 - 236 p. ISBN 973-575-329-4

I. Stănescu, Corneliu (coord.)

II. Dafinei, Adrian (coord.)

53(076)

Un grup de profesori preocupați de pregătirea elevilor cu aptitudini deosebite pentru fizică a dorit să pună în valoare experiența acumulată în decursul mai multor decenii de activitate.

Din această intenție, a luat naștere primul volum - dintr-o serie ce se vrea cât mai cuprinzătoare - *FIZICĂ PRIETENOASĂ - REZOLVÂND PROBLEME NU TOCMAI SIMPLE*.

Particularitatea acestei noi cărți de probleme de fizică este aceea că aduce rezolvări detaliate; rezolvări pe parcursul cărora se insistă asupra temeiurilor fizice care conduc la alegerea soluției sau pe parcursul cărora se fac referiri clare și directe la teoremele care permit soluția. De asemeni adeseori rezolvarea se construiește din aproape în aproape, rezolvând variante ori chiar noi probleme. Autorii au dorit să demitizeze unele opțiuni "clasice" în rezolvări și enunțuri de probleme de fizică, opțiuni care de prea multe ori s-au dovedit nejustificate și fără suport fizic.

Adăugând textele enunțurilor în limba engleză - principala limbă de circulație internațională în domeniul

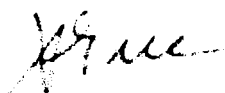
fizicii - s-a căutat o anumită familiarizare a cititorilor cu termeni și sintagme specifice programelor școlare. În acest mod - poate - pe parcursul a câteva volume se va crea un mic lexic la îndemâna elevilor și profesorilor lor. Dacă acest punct de vedere va fi împărtășit de cititori, autorii promet să insiste.

Lucrarea se adresează atât profesorilor cu preocupări în aria curriculară a fizicii școlare, cât și elevilor cu afinități către această disciplină fără a exclude dintre cititori adulții care încă mai vor să fie la zi. Autorii speră ca , în timp, să realizeze un ciclu de lucrări cuprinzând probleme noi și să impună o “școală” de rezolvări - mai aproape de cititor, mai aproape de profesor, mai aproape de părinți.

Coordonatorul seriei,

Profesor universitar doctor Voicu V. Grecu

Decan al Facultății de Fizică - Universitatea București



# CUPRINS

<b>CAPITOLUL 1. MECANICA. ....</b>	<b>1</b>
Rostogolire cu și fără alunecare. Rolling with and without slipping. © CORNELIU APOSTOL STANESCU, 1999	
<b>CAPITOLUL 2 MECANICA. ....</b>	<b>25</b>
Mecanica solidului rigid. Mișcarea plan-paralelă. Mechanics of rigid body. Plan parallel motion. © TIBERIUS OVIDIUS CHECHE, 1999	
<b>CAPITOLUL 3 MECANICĂ. ....</b>	<b>41</b>
Trei cazuri cinematice remarcabile. Kinematics of three remarkable cases. © EMIL BARNA, 1999	
<b>CAPITOLUL 4 CĂLDURĂ. ....</b>	<b>57</b>
Aplicații ale noțiunii de entropie. Entropy applications. © VLAD POPA-NIȚĂ, 1999	
<b>CAPITOLUL 5. CĂLDURĂ. ....</b>	<b>69</b>
Funcții de distribuție. Distribution functions. © ANDREI PETRESCU, MIRCEA FRONESCU 1999	
<b>CAPITOLUL VI ELECTRICITATE. ....</b>	<b>83</b>
Acțiuni mecanice produse de forțe de natură electrică. Electrically produced mechanical actions. © ADRIAN S. DAFINEI, 1999	

**CAPITOLUL 7. ELECTRICITATE. . . . . 119**

**Câmpul electric în dielectrics**

**Electric Field In Dielectrics. A macroscopic approach.**

**© ȘTEFAN ANTOHE, 1999**

**CAPITOLUL 8. ELECTRICITATE . . . . . 147**

**Electrostatica. Sisteme de conductori.**

**Electrostatics. Interacting conductors.**

**© CRISTEA PETRICĂ, 1999**

**CAPITOLUL 9 OPTICĂ. . . . . 175**

**Viteza de fază și viteza de grup; Interferența pachetelor de undă**

**Phase velocity and group velocity ; Interference of wave packets.**

**© ANDREI BELEA, 1999**

**CAPITOLUL 10\_ FIZICĂ ATOMICĂ ȘI NUCLEARĂ. . 201**

**© ANDREI IONESCU, 1999**



# **CAPITOLUL 1. MECANICA**

**Rostogolire cu și fără alunecare.**

**Rolling with and without slipping.**

**© CORNELIU APOSTOL STANESCU, 1999**

**1.1** Two homogenous cylinders of identical dimensions, made from the same bulk material but presenting different surface roughness, are initially set in contact and can roll on a ramp. Investigate their possible motions.

**1.1** Doi cilindrii - inițial în contact - din același material, plini, omogeni, cu aceleași dimensiuni dar cu o prelucrare a suprafețelor diferită, se pot rostogoli pe un plan înclinat. Să se studieze mișcarea celor doi cilindrii

## REZOLVARE

Vom nota, în mod uzual, cu  $\alpha$  unghiul de înclinare al planului.

1. Un prim caz, banal pentru problemele celor doi cilindrii dar existent pentru rezolvarea completă, este acela când cilindrul din față, cilindrul aflat mai jos, se rostogolește mai repede (ca celălalt).

2. Poate că, înainte chiar de studiul mișcării s-ar putea pune problema unei posibile poziții (sau condiții) de echilibru, care, dacă este evident că nu se poate

realiza în cazul unui singur cilindru, nu mai este atât de evident imposibilă în problemă. În sprijinul acestei abordări se poate aduce imaginea a două roțițe dințate, angrenate și aflate pe o cremalieră (șină dințată) înclinată - modelare care poate duce cu gândul la existența unei poziții de echilibru.

3. O altă discuție va trebui făcută în legătură cu alunecarea, rostogolirea fără alunecare respectiv rostogolirea cu alunecare a celor doi cilindri, separat sau în tandem.

4. În sfârșit, trebuie să ne punem problema ce mărimi fizice ar caracteriza răspunsul la întrebarea, cum se mișcă cilindrii? În mod sigur, fiind vorba de o rostogolire, deci rotație și translație, trebuie să aflăm accelerațiile celor doi cilindri și accelerațiile lor unghiulare. Alte mărimi interesante se vor contura, poate, pe parcursul rezolvării.

5. În continuare va trebui să examinăm cazurile în care cei doi cilindri se mișcă în contact, cu toate variantele care se întrevăd deja, respectiv amândoi nu alunecă, unul alunecă iar celălalt nu și cazul când alunecă

amândoi. Am considerat cunoscută rezolvarea unor probleme de rostogolire cu și fără alunecare sau cel puțin am anticipat-o.

6. În cazul că acest echilibru (de la punctul 2) se dovedește imposibil, merită să apreciem de ce imaginea propusă a fost eronată.

Deoarece problema presupune mai multe cazuri - neenunțate explicit - este necesar să fie alcătuit de la început un plan al abordării situațiilor previzibile, urmând ca alte cazuri, care se conturează pe parcursul rezolvării, să fie examinate ulterior.

Deoarece prelucrarea mecanică, desigur, a suprafețelor laterale - căci numai acestea intervin în decursul rostogolirii, este diferită vom avea trei coeficienți de frecare diferiți :  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ ,  $\mu$  pentru frecarea dintre fiecare cilindru și planul înclinat respectiv pentru frecarea dintre cilindri.

7. Dece atât de multe precauții? Pentru că problema are câteva variante de evoluție a mișcărilor cilindrilor și este preferabil să le luăm în seamă **întâi gândind și apoi muncind**.

Să rezolvăm cazul mișcării separate a celor doi cilindri, adică să studiem mișcarea unui cilindru pe un plan înclinat - în așezarea unei posibile rostogoliri, după cum precizează enunțul. (Nu exagerăm cu analiza dincolo de mențiunile enunțului, nefiind nici necesar și nici o notă bună.) Cei doi cilindri se deplasează separat. În acest caz este suficient să studiem mișcarea unui singur cilindru. Deoarece este o mișcare de translație și de rotație simultan, vom aplica teoremele lui Euler pentru mișcarea rigidului.

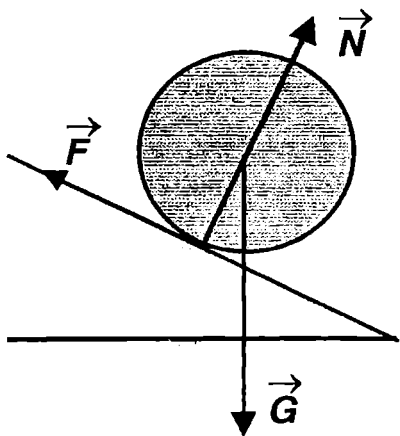


Fig.1.1. Rostogolirea unui cilindru pe planul înclinat

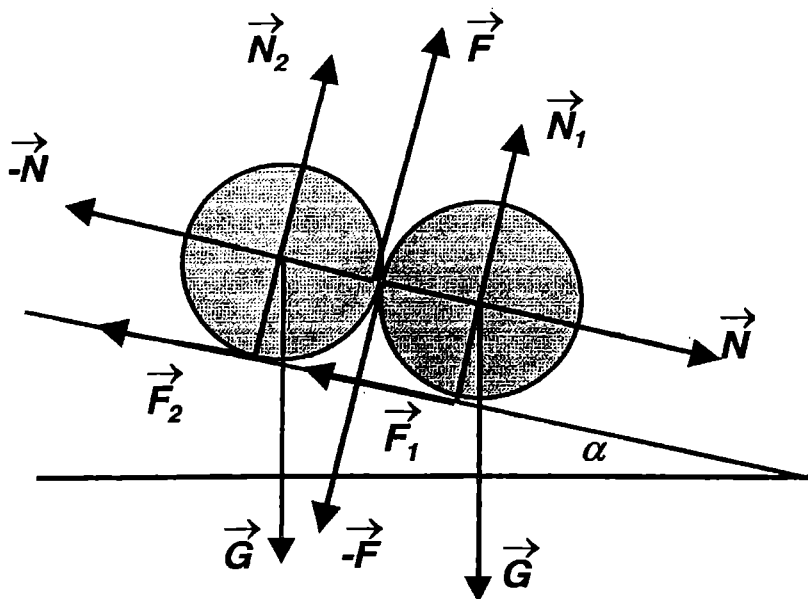


Fig.1.2 Rostogolirea solidară a doi cilindri aflați în contact

Prima teoremă, prea adesea confundată cu legea a doua a dinamicii - a lui Newton, spune că accelerația centrului de masă a corpului (rigid sau nu - dar și a unui sistem de puncte materiale ori de puncte materiale și corpuri) este dată de suma vectorială a forțelor externe. După cum se știe suma vectorială a forțelor interne este nulă.

Cea de a doua teoremă, restrânsă la mișcarea de rototranslație a unui rigid, respectiv a unui corp al cărui

moment de inerție nu se schimbă în timpul acestei mișcări, mișcare denumită și mișcare plan paralelă, ne dă accelerația unghiulară - a rigidului - prin suma momentelor forțelor externe. Suma vectorială a momentelor forțelor interne este, de asemenea, zero.

Factorul de proporționalitate, în prima teoremă, este masa corpului sau a sistemului. Era necesar să insistăm asupra cărei accelerații se aplică teorema, deoarece un corp în rotație are mai multe accelerații (un câmp, vectorial, al accelerațiilor).

În cea de a doua teoremă, pentru rigid, factorul de proporționalitate este momentul de inerție al corpului. În acest caz, accelerația unghiulară  $\vec{\alpha}$  este un invariant al mișcării, adică avem o singură valoare pentru tot corpul. Viteza unghiulară  $\vec{\omega}$  este, de asemenea, un invariant. În schimb, să remarcăm că atât momentele forțelor cât și momentul de inerție depind de punctul (polul) respectiv prin care trece axa față de care sunt calculate. Pentru a evita alte teoreme și pentru că nu există un câștig major în evoluția calculelor, vom

prefera să luăm ca referință centrul de masă și axa care trece prin centrul de masă.

Deci, produsul dintre masă și accelerația centrului de masă este dat de rezultanta forțelor iar produsul dintre momentul de inerție și accelerația unghiulară este egal cu momentul resultant. Din respect pentru Newton vom scrie egalitățile în ordine inversă.

$$\begin{cases} \sum \vec{F}_i = m\vec{a}_{CM} \\ \sum \vec{M}_i = I\vec{\varepsilon} \end{cases} \quad (1.1a)$$

sau respectiv

$$\begin{cases} \vec{F}_{REZ} = m\vec{a}_{CM} \\ \vec{M}_{REZ} = I\vec{\varepsilon} \end{cases} \quad (1.1b)$$

Presupunerea noastră implicită - prin relația dintre accelerația centrului de masă și accelerația tangențială dar și indirect prin relația cu accelerația unghiulară - a fost că nu avem alunecare sau altfel spus, cilindrul înaintează pe măsură ce se rostogolește, întocmai ca o roată dințată pe o șină dințată (pe o cremalieră).

$$\vec{a}_{tang} = \vec{a}_{CM} = R\vec{\varepsilon} \quad (1.2)$$



Acest tip de abordare implică, prin inexistența oricărei alunecări, că nici forța de frecare introdusă nu este produsă de o frecare de alunecare. Dacă facem apel, din nou, la imaginea cu roata dințată pe cremalieră - simțim că totul este ca și cum roata se proptește în dinții (în asperitățile suprafeței) cremalierii, care împing roata (cilindrul). Această forță este deseori numită impropriu dar sugestiv, frecare statică și o regăsim ca forță de tracțiune la propulsarea vehiculelor cu roți. ***De fapt nu este decât banala reacțiune definită de legea a treia a dinamicii !***

Dar pentru ca această forță să nu devină forța de frecare la alunecare este necesar să fie mai mică decât  $\mu N$ , valoarea forței de frecare la alunecare. Cu condiția aceasta avem, în cazul cilindrului pe plan înclinat,

$$\begin{cases} G \sin \alpha - F_1 = ma_{CM} \\ RF_1 = I\varepsilon \end{cases} \quad (1.3)$$

sau

$$\left\{ \begin{aligned} F_1 &= \frac{I\varepsilon}{R} = \frac{I a_{CM}}{R^2} \\ a_{CM} &= \frac{mg \sin \alpha}{m + \frac{I}{R^2}} \end{aligned} \right.$$

Deoarece pentru un cilindru plin  $I = \frac{mR^2}{2}$ , găsim

$$\left\{ \begin{aligned} \varepsilon &= \frac{2g \sin \alpha}{3R} \\ F_1 &= \frac{1}{3} mg \sin \alpha \end{aligned} \right.$$

Comparând cu

$$F_{1alunecare} = \mu_1 N_1 = \mu_1 mg \cos \alpha$$

deducem

$$\frac{1}{3} \sin \alpha \leq \mu_1 \cos \alpha \Rightarrow \mathbf{tg \alpha \leq 3\mu_1}$$

sau să nu existe o înclinare prea mare a planului. În caz contrar, rostogolirea nu mai este solidară cu înaintarea și apare o alunecare.

În general, depășind cadrul problemei pe care o rezolvăm, cilindrul se poate roti mai repede decît înaintează - este cazul roților de mașină iarna pe gheață, sau se poate roti mai lent ori de loc - cum se

petrece la o frânare prea bruscă, atunci când un automobil patinează.

Dacă în cazul nealunecării forța de frecare este o necunoscută, inclusiv sensul ei, la alunecare sensul forței de frecare este opus mișcării relative a celor două suprafețe în contact. În același timp, valoarea forței este dată de relația lui Coulomb (Amonton)

$$F = \mu_x N.$$

Această relație este necesară, deoarece s-a pierdut o ecuație, aceea care stabilea legătura dintre accelerația tangențială și accelerația unghiulară. În acest fel, în locul necunoscutei  $F$  apare  $\varepsilon$  - accelerația unghiulară, celelalte relații rămânând practic aceleași.

Ecuațiile devin:

$$\begin{cases} G \sin \alpha - F_1 = G \sin \alpha - \mu_1 N_1 = ma_{cm} \\ RF_1 = I\varepsilon \end{cases}$$

cu

$$F_1 = \mu_1 mg \cos \alpha$$

găsim

$$\varepsilon = \frac{\mu_1 R N_1}{l} = \frac{2g \cos \alpha}{3R} \quad (1.4)$$

$$a_{CM} = g(\sin \alpha - \mu_1 \cos \alpha)$$

Este important să verificăm dacă sensul forței de frecare a fost bine propus, chiar dacă în acest caz nu există prea mari îndoieli. Ne mai propunem să vedem valoarea raportului dintre accelerația liniară și cea unghiulară, raport care ne va spune cine alunecă mai repede. De asemenea, vom calcula valorile (maxime ale) necunoscutelor, la limita trecerii în alunecare.

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{0, \max} = \frac{2g \operatorname{tg} \alpha}{3\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{2g\mu_1}{3\sqrt{1 + 9\mu_1^2}} \\ \varepsilon_{0, \max} = \frac{2g \operatorname{tg} \alpha}{3R\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{2g\mu_1}{3R\sqrt{1 + 9\mu_1^2}} \\ F_{1,0, \max(\text{alunecare})} = \frac{2mg \operatorname{tg} \alpha}{3\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{2mg\mu_1}{3\sqrt{1 + 9\mu_1^2}} \end{array} \right. \quad (1.5)$$

și deoarece în acest caz  $\operatorname{tg} \alpha \geq 3\mu_1$

$$\begin{aligned} \frac{a_{CM}}{R\varepsilon} &= \frac{\sin \alpha - \mu_1 \cos \alpha}{\frac{2}{3} \mu_1 \cos \alpha} \\ &= \frac{3\operatorname{tg} \alpha}{2\mu_1} - \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \left( \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\mu_1} - 1 \right) \geq 1 \end{aligned} \quad (1.6)$$

Cea ce confirmă sensul forței de frecare. O relație  $R\varepsilon > a$ , ar fi însemnat o rotație rapidă, "în loc", cu frecarea spre înainte.

Deoarece accelerația centrului de masă este mai mare decât accelerația tangențială ( $\varepsilon R$ ) rezultă, clar sensul forței de frecare - spre în sus, adică cilindrul alunecă la vale, mai mult decât se rostogolește, ceace era oarecum previzibil deoarece odată cu o mai mare înclinare a planului apare alunecarea.

Chiar dacă va părea evident după rezolvare că echilibrul nu este posibil, merită să verificăm acest detaliu, mai ales că impresia este aceea a unei șanse ca cele două corpuri să rămână în repaus, dacă înclinarea nu este prea mare !

Ecuțiile în acest caz sunt mai simple, respectiv condiția pentru echilibrul forțelor și cea pentru echilibrul momentelor, cu restricția ca cele trei (patru) forțe de frecare să fie mărginite de valorile respective de alunecare. Vom avea șase necunoscute, trei normale și trei forțe de frecare.

$$\begin{cases} G \cos \alpha + F - N_1 = 0 & F < \mu N \\ G \sin \alpha - F_1 + N = 0 & F_1 < \mu_1 N_1 \quad (1.7) \\ R(F_1 - F) = 0 \end{cases}$$

și similar pentru al doilea cilindru.

$$\begin{cases} G \cos \alpha - F - N_2 = 0 \\ G \cos \alpha - F_2 - N = 0 & F_2 < \mu_2 N_2 \quad (1.8) \\ R(F_2 - F) = 0 \end{cases}$$

$$F = F_1 = F_2 \quad (1.9)$$

Se observă destul de ușor că cele trei  $F$ -uri (forțele de frecare) sunt egale – din relațiile privind momentele - și

$$\begin{cases} N_1 = G \cos \alpha + F \\ N_2 = G \cos \alpha - F \end{cases} \quad (1.10)$$

găsim

$$\begin{cases} G \sin \alpha - F + N = 0 \\ G \sin \alpha - F - N = 0 \end{cases} \Rightarrow N = 0 \Rightarrow F = 0$$

dar  $G \sin \alpha = 0$ , presupune o înclinare zero. Deci, o poziție de echilibru nu există pe planul înclinat.

Impresia, să spunem experimentală, provine din, pe de o parte, idealizarea acestei frecări statice împreună cu presupunerea unei totale nedeformabilități a celor două suprafețe în contact, presupunție ireală, căci

implică un contact - pe o linie fără grosime - pe o suprafață zero deci cu o apăsare de presiune (efort unitar sau tensiune) infinită (!) iar pe de altă parte desconsiderarea frecării tehnice la rostogolire, bazată tocmai pe deformabilitatea suprafețelor în contact.

Dacă cilindrii se rostogolesc astfel încât rămân în contact - dar fără alunecare, față de plan desigur, căci între ei avem neapărat alunecare -, se impune evaluarea valorii normalei dintre cilindri care condiționează și existența unei forțe de frecare, asociată acestei apăsări.

Să remarcăm că avem o singură accelerație liniară, comună și, datorită nealunecării o singură accelerație unghiulară. Deoarece  $I = \frac{mR^2}{2}$  și  $a_{CM} = \varepsilon R$

$$\begin{aligned}
 N + G \sin \alpha + F_1 &= ma_{CM} \\
 -N + G \sin \alpha + F_2 &= ma_{CM} \\
 R(F_1 - F) &= R(F_1 - \mu N) = I\varepsilon \\
 &= \frac{mR^2}{2} \varepsilon = \frac{ma_{CM} R}{2}
 \end{aligned} \tag{1.11}$$

$$\begin{aligned}
 R(F_2 - F) &= R(F_2 - \mu N) = I\varepsilon \\
 &= \frac{mR^2}{2} \varepsilon = \frac{ma_{CM} R}{2}
 \end{aligned}$$

și rezolvând în continuare găsim:

$$\begin{cases} F_1 = F_2 \\ N = -\frac{F_1}{\mu} - \frac{ma_{CM}}{2\mu} \end{cases} \tag{1.12a}$$

$$\begin{cases} F_1 \left(1 - \frac{1}{\mu}\right) + G \sin \alpha = ma_{CM} \left(1 + \frac{1}{2\mu}\right) \\ F_2 \left(1 + \frac{1}{\mu}\right) + G \sin \varepsilon = ma \left(1 - \frac{1}{2\mu}\right) \end{cases} \tag{1.12b}$$

$$\begin{cases} G \cos \alpha - F + N_1 = 0 \\ G \cos \alpha + F + N_2 = 0 \end{cases} \tag{1.12c}$$

din care deducem:



$$F_1 = F_2 = \frac{\frac{2}{3} - \frac{2}{6\mu} - 1}{1 + \frac{1}{\mu}} mg \sin \alpha$$

$$= \frac{1 + \frac{1}{\mu}}{1 + \frac{1}{\mu}} mg \sin \alpha \left( -\frac{1}{3} \right) = -\frac{mg \sin \alpha}{3} \quad (1.13)$$

$$N = -\left( \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \right) \frac{1}{\mu} mg \sin \alpha = 0$$

dar mai ales că această constatare se putea reține și din observația că într-una din relații accelerația avea un coeficient (factor) care conține un semn minus, deci care s-ar fi putut anula, ceace este absurd.

$$a = \frac{2}{3} g \sin \alpha \quad (1.14)$$

constatare care se întvedea fie din egalitatea accelerațiilor cu valoarea de la rostogolirea unui singur cilindru, fie din ultima pereche de relații. Deci cei doi cilindrii nu se jenează, reciproc, de loc.

Dacă amândoi cilindrii alunecă în timpul rostogolirii, din examinarea soluțiilor obținute deja, se remarcă necesitatea ca cilindrul înaintaș să fie cel care prezintă o frecare mai mare. Intradevăr, accelerația mai mare apare la corpul cu frecare mai mică, deci numai așa vor rămâne în contact.

Reluând ecuațiile, cu o normală, ca interacțiune între cilindri, vom avea drept necunoscute o accelerație și două accelerații unghiulare

$$\begin{cases} G \cos \alpha + F - N_1 = 0 \\ G \cos \alpha - F + N_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} G \sin \alpha - F_1 + N = ma_{CM} \\ G \sin \alpha - F_2 - N = ma_{CM} \\ R(F_1 - F) = I\varepsilon_1 \\ R(F_2 - F) = I\varepsilon_2 \end{cases} \quad (1.14')$$

care ne dau valorile normalelor

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{2 + \mu(\mu_1 + \mu_2)}{2 - \mu(\mu_1 - \mu_2)} G \cos \alpha \\ N_2 &= \frac{-2 + \mu(\mu_1 + \mu_2)}{2 - \mu(\mu_1 - \mu_2)} G \cos \alpha \end{aligned} \quad (1.15)$$

și după înlocuiri succesive, folosind :

$$\begin{aligned} R(F_1 - F) &= I\varepsilon_1 \\ R(F_2 - F) &= I\varepsilon_2 \end{aligned} \tag{1.16}$$

vom avea

$$N = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2 - \mu(\mu_1 - \mu_2)} G \cos \alpha$$

$$F = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2 - \mu(\mu_1 - \mu_2)} \mu G \cos \alpha$$

$$\varepsilon_1 = \frac{g}{2R} \cos \alpha \frac{2\mu_1 + \mu\mu_1(\mu_1 + \mu_2) - \mu(\mu_1 + \mu_2)}{2 - \mu(\mu_1 - \mu_2)}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{g}{2R} \cos \alpha \frac{-2\mu_2 + \mu\mu_2(\mu_1 + \mu_2) - \mu(\mu_1 + \mu_2)}{2 - \mu(\mu_1 - \mu_2)}$$

$$a = g \sin \varepsilon \left( \frac{2}{\mu(\mu_1 - \mu_2)} - 1 \right) - \frac{\cos \varepsilon}{\mu}$$

Se remarcă unele dificultăți, care fac problema, oarecum, neliniară, în sensul mai modern al fizicii neliniare (dinamică neliniară) - căci aceste expresii de la numitor care se pot anula, din jocul valorilor coeficienților de frecare, obligă la reluarea problemei. De fapt, regăsim soluțiile dela cazurile în care cei doi cilindrii se mișcau la fel.

în încheiere ar mai trebui examinate cazurile când numai unul din cilindri alunecă - și celălalt nu - sau cazurile în care mișcarea cilindrilor este de natură să schimbe sensul vre-uneia din forțele de frecare. În aparență cca 20 cazuri, în fapt mult mai puține!

Câteva observații finale: la alunecare, centrul instantaneu de rotație - centrul vitezelor ar putea să nu mai fie în punctul de contact.

Deoarece factorul accelerației conține un minus la numitor, puteam anticipa că normala dintre cilindri este nulă la o rostogolire identică a acestora.

S-ar putea pune și întrebarea dacă al doilea  $\epsilon$  ar putea să fie negativ - dar să remarcăm că în această situație sensul forțelor de frecare nu se schimbă!

În concluzie, cazurile care trebuie discutate succesiv, chiar dacă unele pot apărea direct ca imposibile, sunt:

1. Rostogolirea unui singur cilindru:

1.1 Fără alunecare;

1.2 Cu alunecare:

1.1.1 Rostogolirea mai rapidă decât alunecarea;

1.1.2 Rostogolirea mai lentă decât alunecarea;

- 1.3 Echilibrul;
2. Rostogolirea a doi cilindri fără alunecare:
  - 2.1 Al doilea mai lent;
  - 2.2 Ambii fără alunecare:
  - 2.3 Echilibrul;
3. Rostogolirea cu alunecare
  - 3.1 Primul fără alunecare, al doilea cu alunecare:
    - 3.1.1. Rostogolire mai rapidă decât alunecarea
    - 3.1.2. Alunecare mai rapidă decât rostogolirea
  - 3.2 Al doilea fără alunecare, primul cu alunecare:
    - 3.2.1. Rostogolire mai rapidă decât alunecarea
    - 3.2.2. Alunecare mai rapidă decât rostogolirea
  - 3.3 Ambii cu alunecare:
    - 3.3.1.1 Primul mai rapid, al doilea mai rapid;
    - 3.3.1.2 Primul mai rapid, al doilea mai lent;
    - 3.3.1.3 Primul mai lent, al doilea mai rapid;
    - 3.3.1.4 Primul mai lent, al doilea mai lent.

dar relativ la forțele de frecare dintre cilindrii putem avea pentru fiecare din cazurile 3.3.1-3.3.4 câte două situații ale vitezei relative la contactul celor doi

cilindrii (sensul forțelor " $\vec{F}$ "), în total 8 cazuri la care adăugăm cele 2x2 cazuri (3.1.1, 3.1.2, 3.2.1, 3.2.2).

Dacă la rostogolirea fără alunecare forța de frecare este o necunoscută (forța de frecare de la contactul cu planul înclinat, desigur), inclusiv semnul ei (semnul) algebric, în cazul frecării de alunecare trebuie să anticipăm (sau să discutăm dezvoltând în două cazuri) sensul forței de frecare la alunecare, respectiv sensul vitezei relative la contactul respectiv.

Datorită graficului cu derivată discontinuă, forța de frecare introduce o problemă de tip "fizică neliniară" sau "dinamică neliniară". Fără a dezvolta acest subiect acum, menționăm că sintagma "neliniară" aici nu se referă la o dependență funcțională alta decât polinom de gradul I, ci la acest tip de comportări la care se schimbă funcția însăși (diode semiconductoare, dioda Zenner, - exemple mai la îndemână dar și curgerea laminară/curgere turbulentă etc., etc., etc). Începând cu aceste exemple "banale" cu frecări, remarcăm posibila complexitate a unor astfel de probleme sau de comportări !

Fără îndoială că din cele – aparent – 20 de “cazuri” cele mai multe se pot exclude pe baza unor considerații/raționamente logice, dar este tot atât de adevărat că excluderea din pornire (ab initio) a unor cazuri, fără a pătrunde într-o problemă poate pierde unele rezolvări corecte sau unele aspecte. Este preferabil – în intimitatea rezolvitorului să “taie – repețe – firul în patru” decât să nu perceapă unele aspecte ale soluției.

La un concurs – în funcție de exercițiul avut – se iau decizii optime în relația timp/punctaj. Însă este păcat să existe timpul necesar rezolvării dar nu și uzanța de a analiza cerințele problemei/problemelor.

O schematizare a celor “20” de cazuri, pornind de la sensul forțelor  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F$  și în paralel de la relația  $\frac{a_{CM}}{\varepsilon R}$  ar putea arăta ca în Tabelul 1: Pentru o mai bună evidențiere au fost puse în evidență numai coloanele “de interes”.

$F < 0$  desemnează o forță stabilită de la început în sens invers decât în Fig.1.2.

# Tabelul 1

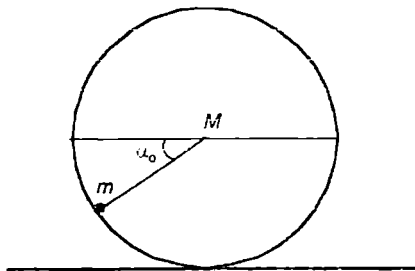
Codul	$a_{1CM}$	$a_{2CM}$	$\varepsilon_1$	$\varepsilon_2$	$\frac{a_{1CM}}{\varepsilon_1 R}$	$\frac{a_{2CM}}{\varepsilon_2 R}$	$F_1$	$F_2$	$F$
							vezi Fig.1.2		
1.1	$\varepsilon_1 R$	-		-		-	$< \mu_1 N_1$	-	-
1.3.1		-		-	$< 1$	-	$< 0$	-	-
1.3.2		-		-	$> 1$	-	$> 0$	-	-
1.2	0	-	0	-		-	?	-	-
2.1	$> a_{2CM}$	$< a_{1CM}$							
2.3	0	0	0	0					
2.2.1									$> 0$
2.2.2									$< 0$
3.1.1									$> 0$
3.1.2									$< 0$
3.2.1									$> 0$
3.2.2									$< 0$
					$> 1$	$> 1$			$< 0$
									$> 0$
					$> 1$	$< 1$			$> 0$
									$< 0$
					$< 1$	$> 1$			$> 0$
									$< 0$



## **CAPITOLUL 2 MECANICA**

**Mecanica solidului rigid. Mișcarea plan-paralelă.  
Mechanics of rigid body. Plan parallel motion.**

© TIBERIUS OVIDIUS CHECHE, 1999



**Fig.2.1.1** Un corp mic aflat pe suprafața interioară a unei sfere subțiri.

2.1. A small body of mass  $m$  is initially released from rest on the inside surface of a uniform thin sphere of radius  $R$  and mass  $M$ , at an angle  $\alpha_0$ , as shown in Fig.2.1.1 The sphere is put on a horizontal plane.

Neglecting any friction determine the velocity of the sphere and the force acting on the horizontal plane as function of angle  $\alpha$ .

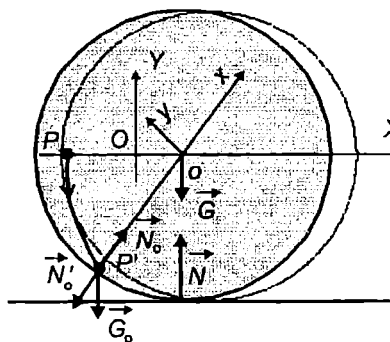
2.1. Un corp mic de masă  $m$  se află inițial în repaus pe suprafața interioară a unei sfere subțiri de rază  $R$  și masă  $M$ , la un unghi  $\alpha_0$ , ca în Fig.2.1.1. Sfera este așezată pe un plan orizontal. Neglijând frecările determinați viteza sferei și forța care acționează asupra planului orizontal, în funcție de  $\alpha$ .

## REZOLVARE:

### I. Metoda dinamică

Forțele care acționează asupra sistemului format din sferă și corp se află toate într-un plan vertical. Ca o consecință a faptului că inițial toate punctele sistemului se află în repaus, mișcarea corpului și a centrului de masă al sferei se execută în acest plan (mișcare plan paralelă).

Conform Fig.2.1.2, într-un sistem de referință inerțial (SRI), aflat în repaus față de planul orizontal,



**Fig.2.1.2** Reprezentarea diagramei de forțe (cazul neglijării frecărilor).

asupra sferei acționează greutatea  $\vec{G}$ , reacțiunea planului orizontal  $\vec{N}$  și forța de acțiune din partea corpului,  $\vec{N}_0'$ , iar asupra corpului acționează greutatea  $\vec{G}_0$  și reacțiunea din

partea sferei  $\vec{N}_o = -\vec{N}_o'$ . SRP este notat *oxy*. Pentru sferă, legea întâi a lui Euler, de mișcare a centrului de masă față de SRI, se scrie:

$$\vec{G} + \vec{N} + \vec{N}_o' = M \vec{a} \quad (2.1.1)$$

unde  $\vec{a}$  este accelerația centrului de masă al sferei. Ecuația de mișcare a corpului față de SRI, se scrie:

$$\vec{G}_o + \vec{N}_o = m \vec{a}_o \quad (2.1.2)$$

unde  $\vec{a}_o$  este accelerația corpului.

Pentru sferă, notând cu  $I$  momentul de inerție al acesteia față de centrul ei și cu  $\Omega$  viteza unghiulară de rotație față de SRI, legea a doua a lui Euler în raport cu centrul ei de masă se scrie:

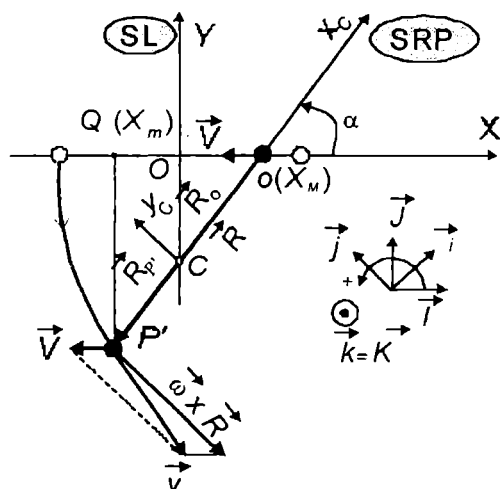
$$I\dot{\Omega} \vec{k} = \vec{M}_{N_o'} + \vec{M}_N + \vec{M}_G = 0 \quad (2.1.3)$$

Obținem,  $\Omega = \mathbf{ct} = \Omega(0) = 0$ , deci *sfera nu se rotește*, neexistând nici o forță care să nu treacă prin centrul ei.

Să considerăm SL ortogonal ca în Fig.2.1.3, cu axa  $OY$  trecând prin centrul de masă  $C$  al sistemului la momentul inițial și axa  $OX$  paralelă cu planul orizontal

trecând prin centrul sferei. Notând cu  $V$  și  $v_x$  viteza centrului sferei, respectiv componenta vitezei corpului pe  $OX$ , legea de conservare a impulsului pe axa  $OX$ , pentru ansamblul sferă-corp, se scrie:

$$MV + mv_x = 0 \quad (2.1.4)$$



**Fig.2.1.3** Reprezentarea marilor cinematice pentru cele doua sisteme de referinta.

Relația (2.1.4) este valabilă deoarece forțele  $\bar{N}_o$ ,  $\bar{N}_o'$  sunt forțe interne care nu pot modifica impulsul sistemului, iar forțele externe acționează pe verticală; în consecință pe  $OX$  impulsul se conservă și cum

inițial este nul (inițial sistemul se află în repaus) poziția centrului de masă  $C$  nu se modifică pe orizontală. În SL ales  $X_C = 0$ , adică:

$$MX_M + mX_m = (M + m)X_C = 0 \quad (2.1.5)$$

unde  $X_M, X_m$  sunt coordonata centrului sferei,  $o(X_M)$ , respectiv a corpului,  $Q(X_m)$ , ca în Fig.2.1.3.

Să considerăm sistemul format din centrul de masă al ansamblului sferă+corp (SC), un sistem format din două puncte materiale cu masele  $M$ , respectiv  $m$ . Asupra acestuia acționează  $\vec{G}$ ,  $\vec{G}_o$ ,  $\vec{N}$  (translatată în centrul sferei) și forțele interne  $\vec{N}_o'$  (translatată în centrul sferei) și  $\vec{N}_o$ . Acesta este ca un solid rigid deoarece distanța dintre cele două puncte este o constantă egală cu  $R$ . Vom asocia sistemului SC astfel definit, un SRP notat  $Cx_Cy_C$ , similar celui din Fig.2.1.2, dar cu originea în  $C$ , ca în Fig.2.1.3. Axa  $z_C$  este perpendiculară pe planul  $Cx_Cy_C$  și trece prin  $C$ . Pentru SC legile lui Euler se scriu astfel.

Legea întâi:

$$\vec{G} + \vec{N} + \vec{G}_o = (M + m) \vec{a}_c \quad (2.1.6)$$

Legea a doua, față de  $Cx_Cy_C$ :

$$I_C \varepsilon \vec{k} = \vec{R}_o \times (\vec{G} + \vec{N}) + \vec{R}_{p'} \times \vec{G}_o \quad (2.1.7)$$

unde  $\vec{R} = \vec{R}_{p'} - \vec{R}_o$ , vezi Fig.2.1.3.

Momentul de inerție  $I_{z_C z_C} \equiv I_C$  față de axa  $z_C$ , se scrie:

$$I_C = Mp^2 + mq^2 \quad (2.1.8)$$

unde  $p = |\vec{R}_{p'}|$  și  $q = |\vec{R}_o|$ . Considerente de simetrie duc la anularea altor momente de inerție (centrifugale)

$I_{x_C z_C}, I_{y_C z_C}$ . ținând cont că

$$Y_C(t) = -q \sin \alpha(t),$$

relația de legătură se scrie:

$$\vec{a}_c = \vec{a}_c \vec{J} = \ddot{Y}_c \vec{J} = \frac{d^2[-q \sin \alpha(t)]}{dt^2} \vec{J} = q(\ddot{\alpha}^2 \sin \alpha - \ddot{\alpha} \cos \alpha) \vec{J} \quad (2.1.9)$$

Conform ec.(2.1.5) scriind :  $X_m = -p \cos \alpha$ ,

$X_M = q \cos \alpha$  se obține:

$$Mp - mq = 0 \quad (2.1.10)$$

În plus:

$$p + q = R \quad (2.1.11)$$

Reunind relațiile utile se obține sistemul:

$$\begin{cases} -G + N - G_o = (M + m) a_c \\ (Mp^2 + mq^2) \varepsilon = \\ q(-G + N) \cos \alpha + pG_o \cos \alpha \\ a_c = q(\dot{\alpha}^2 \sin \alpha - \ddot{\alpha} \cos \alpha) \\ Mp - mq = 0 \\ p + q = R \\ \varepsilon = \ddot{\alpha} \end{cases} \quad (2.1.12)$$

Pentru a aduce sistemul (2.1.12) într-o formă mai accesibilă să considerăm cazul  $m = M$ . Substituțiile duc în final la următoarea ecuație diferențială de ordinul doi, neliniară și neomogenă:

$$2\ddot{\alpha} (1 + \cos^2 \alpha) - \dot{\alpha}^2 \sin 2\alpha = \frac{4g \cos \alpha}{R} \quad (2.1.13)$$

Variația  $\alpha(t)$  se poate găsi printr-o metodă numerică. Analitic putem găsi  $\dot{\alpha}(\alpha)$ . Pentru aceasta să facem substituția  $\dot{\alpha}^2 = z$ . Observăm că:

$$\frac{dz}{d\alpha} = \frac{d\dot{\alpha}^2}{d\alpha} = \frac{d\dot{\alpha}^2}{d\dot{\alpha}} \frac{d\dot{\alpha}}{dt} \frac{dt}{d\alpha} = 2\ddot{\alpha} \quad (2.1.14)$$



Cu ec.(2.1.14), ec.(2.1.13) se transformă într-o o ecuație diferențială de ordinul întâi neomogenă:

$$\frac{dz}{d\alpha} (1 + \cos^2 \alpha) - z \sin 2\alpha = \frac{4g \cos \alpha}{R} \quad (2.1.15)$$

Rezolvarea se poate face cu metoda variației constantelor. Să considerăm ecuația omogenă:

$$\frac{dz}{d\alpha} (1 + \cos^2 \alpha) - z \sin 2\alpha = 0 \quad (2.1.16)$$

Obținem:

$$\frac{dz}{z} = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{(1 + \cos^2 \alpha)} d\alpha = -\frac{d(\cos^2 \alpha)}{(1 + \cos^2 \alpha)} \quad (2.1.17)$$

Prin integrare rezultă:

$$z = \frac{Ct}{(1 + \cos^2 \alpha)} \quad (2.1.18)$$

Considerăm  $Ct = Ct(\alpha)$  și introducem ec.(2.1.18) în ec.(2.1.16). Se obține:

$$\frac{dCt}{d\alpha} = \frac{4g \cos \alpha}{R} \quad (2.1.19) \text{ adică:}$$

$$C(\alpha) = C_0 + \frac{4g \sin \alpha}{R} \quad (2.1.20)$$

Constanta  $C_0$  se găsește din condițiile inițiale ale

problemei,  $\dot{\alpha}(\alpha_o) = 0$ , deoarece inițial sistemul se află în repaus. Se obține:

$$C_o = \frac{-4g \sin \alpha}{R} \quad (2.1.21)$$

Înlocuind ec.(2.1.20) și (2.1.21) în ec.(2.1.18) se obține:

$$z = \dot{\alpha}^2 = \frac{4g \sin \alpha - \sin \alpha_o}{R \quad 1 + \cos^2 \alpha} \quad (2.1.22)$$

Pentru  $\alpha \in (\alpha_o, \pi - \alpha_o)$ , deoarece  $\alpha$  crește în timp, se obține:

$$\omega = \dot{\alpha} = \sqrt{\frac{4g \sin \alpha - \sin \alpha_o}{R \quad 1 + \cos^2 \alpha}} \quad (2.1.23)$$

Sistemul SC execută o mișcare de oscilație, punctul C păstrându-și poziția pe orizontală  $X = 0$  și oscilând pe verticală între  $R(1 - \sin \alpha_o/2)$  și  $R/2$  față de planul orizontal. Mișcarea poate fi astfel complet caracterizată, din ec.(2.1.12) obținându-se  $N$  și  $a_C$ .

Relația dintre vitezele celor două puncte ale SC:

$$\vec{v} = \vec{V} + \dot{\alpha} \vec{k} \times \vec{R} = \vec{V} + \omega \vec{k} \times \vec{R} \quad (2.1.24)$$

este sugerată în Fig.2.2.3, unde  $\vec{v}$  este tangentă la traiectoria corpului în SL. Relația dintre accelerații se scrie:

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \vec{a}_o + \ddot{\alpha} \vec{k} \times \vec{R} - \dot{\alpha}^2 \vec{R} \\ &= \vec{a}_o + \varepsilon \vec{k} \times \vec{R} - \omega^2 \vec{R}\end{aligned}\quad (2.1.25)$$

Ec.(2.1.25), (2.1.1), (2.1.2), împreună cu ec.(2.1.23) și derivata temporală a lui (2.1.23) permit calculul mărimilor  $\vec{a}$ ,  $\vec{a}_o$ ,  $\vec{N}_o$ .

Să răspundem însă la întrebările din textul problemei. Conform ec.(2.1.24), scriind

$\vec{j} = -\vec{I} \sin \alpha + \vec{J} \cos \alpha$ , se obține:

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \vec{V} + \omega \vec{k} \times \vec{R} = V \vec{I} - \dot{\alpha} R \vec{j} = \\ &= (V + \dot{\alpha} R \sin \alpha) \vec{I} - \dot{\alpha} R \cos \alpha \vec{J}\end{aligned}\quad (2.1.26)$$

cu:

$$v_x = V + \dot{\alpha} R \sin \alpha \quad (2.1.27a)$$

$$v_y = -\dot{\alpha} R \cos \alpha \quad (2.1.27b)$$

Din ecuația de conservare a impulsului (2.1.4) și ec.(2.1.27b) se obține:

$$V = -\frac{mv_x}{M} = -\frac{m}{M+m} \dot{\alpha} R \sin \alpha = \quad (2.1.28)$$

$$-\sqrt{gR} \sin \alpha \sqrt{\frac{\sin \alpha - \sin \alpha_0}{1 + \cos^2 \alpha}}$$

ultima egalitate fiind valabilă în ipoteza  $m = M$ . Pe o altă cale vitezele pot fi găsite prin derivarea la timp a coordonatelor:  $X_M(t) = (R \cos \alpha)/2$ ,  $Y_M(t) = 0$ ,  $X_C = 0$ ,  $Y_C(t) = -(R \sin \alpha)/2$ ,  $X_m(t) = -(R \cos \alpha)/2$ ,  $Y_m(t) = -R \sin \alpha$ . Folosind prima și a treia ecuație a sistemului (2.1.12), ec.(2.1.23) și derivata ei temporală, pentru  $m = M$ , se obține:

$$N = 2m(g + a_c) =$$

$$2m \left[ g + \frac{R}{2} (\dot{\alpha}^2 \sin \alpha - \ddot{\alpha} \cos \alpha) a_c \right] = \quad (2.1.29)$$

$$2mg \frac{3 - \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \sin \alpha_0}{1 + 2 \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha}$$

Pentru  $\alpha = \alpha_0 = \pi/2$ , corpul se află în punctul cel mai coborât, în repaus și  $N(\pi/2) = 2mg$ , așa cum este firesc. Metoda de rezolvare dinamică a căutat să aplice conceptele de natură teoretică în scopul ilustrării cât mai clare a acestora. Ecuațiile lui Euler permit, în principiu, descrierea completă a mișcării

unui solid rigid. Informații asupra mișcării (mai puțin complete) pot fi obținute însă și printr-o abordare energetică.

### **b) Metoda energetică**

În ipoteza neglijării frecărilor, deoarece câmpul gravitațional este un câmp conservativ energia mecanică a sistemului, cinetică și potențială gravitațională, se conservă. Energia inițială a sistemului este numai potențială gravitațională. Luând ca referință de zero a energiei potențiale gravitaționale planul orizontal, energia potențială gravitațională a corpului este  $mgR(1 - \sin \alpha_0)$ . Energia potențială gravitațională a sferei se poate găsi însumând energiile a două zone sferice (calote la extremități) infinitesimale, simetrice față de planul orizontal care trece prin centrul sferei, fiecare de masă  $dM$ . Centrul de masă al celor două sectoare se află în centrul sferei și dau energia  $2gRdM$ . Extinzând suma pe întreaga sferă se obține că energia potențială are valoarea  $MgR$ . În consecință energia inițială se scrie:

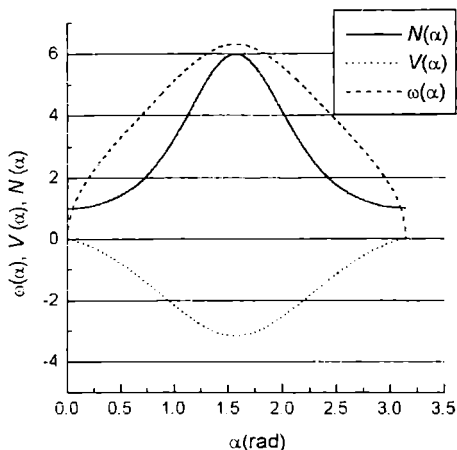
$$E_i = MgR + mgR(1 - \sin \alpha_0) \quad (2.1.30)$$

Pentru o poziție oarecare, în SRI, avem următoarele energii:

$$MgR - \text{energia pot. gravitațională a sferei} \quad (2.1.31a)$$

$$mgR(1 - \sin \alpha) - \quad (2.1.31.b)$$

energia pot. gravitațională a corpului



**Fig. 2.1.4** Variațiile unor marimi care caracterizează mișcarea analizată pentru datele numerice din text.

$$\frac{1}{2}mv^2 - \text{energia cinetică a corpului} \quad (2.1.31.c)$$

$$\frac{1}{2}MV^2 - \text{energia cinetică a lui } C \quad (2.1.31.d)$$

$$\frac{1}{2}I\Omega^2 = 0 \text{ în SCM} \quad (2.1.31.e)$$

conform ec.(2.1.3)- energia cinetică a sferei

Însumând relațiile (2.1.31a-e) și conform principiului conservării energiei egalând suma cu energia inițială obținută în ec.(2.1.30) se obține:

$$mgR(1 - \sin \alpha_o) = mgR(1 - \sin \alpha) + \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}mv^2 \quad (2.1.32)$$

Din ec.(2.1.4) și (2.1.27a) se obțin:

$$V = -\frac{m}{M+m} \dot{\alpha} R \sin \alpha \quad (2.1.33a)$$

$$v_x = -\frac{MV}{m} \quad (2.1.33b)$$

Folosind  $v^2 = v_x^2 + v_y^2$  și introducând ec.(2.1.33a, b), (2.1.27b) în ec.(2.1.32) se obține din nou relația (2.1.28). În concluzie, metoda energetică nu oferă în mod direct informații referitoare la forțele care apar în mișcare, spre deosebire de metoda dinamică, dar necesită un calcul accesibil elevilor de liceu. În

Fig.2.1.4 sunt reprezentate graficele de variație  $V(\alpha)$ ,  $N(\alpha)$  și  $\omega(\alpha)$  pentru:  $\alpha_o = 0$  și  $m = M = 0.1$ ,  $R = 1$ ,  $g = 10$ . Ele relevă mișcarea oscilatorie descrisă analitic.



## **CAPITOLUL 3 MECANICĂ**

**Trei cazuri cinematice remarcabile.**

**Kinematics of three remarkable cases.**

**© EMIL BARNA, 1999**

**3.1** A rigid rod of length  $l$  rests vertically in contact with a wall (the rod lies along the  $Oy$  axis of co-ordinates). Suddenly, the lower end of the rod begins to slide on the floor (along the  $Ox$  axis of co-ordinates) with a constant velocity  $v_0$ . Specify the trajectory described by the center of the rod and find its velocity as a function of time.

**3.1** O bară de lungime  $l$  stă în poziție verticală lângă un perete vertical (axa  $Y$ ). La un moment dat capătul de jos începe să alunece pe podea (axa  $X$ ) cu viteza constantă  $v_0$ . Determinați traiectoria descrisă de centrul barei și stabiliți viteza acestuia în funcție de timp.

## REZOLVARE

Textul problemei sugerează o rezolvare pe cale cinematică. Întrădevăr, dacă perechile de coordonate  $(x,0)$  și  $(0,y)$  precizează pozițiile capetelor  $A$  și  $B$  ale

barei, atunci centrul C al barei (vezi Fig.3.1.1) va avea

coordonatele  $x_1 = \frac{x}{2}$  și  $y_1 = \frac{y}{2}$ , iar relația

$$x^2 + y^2 = l^2 \quad (3.1.1)$$

permite obținerea imediată a traiectoriei punctului C

$$x_1^2 + y_1^2 = \frac{l^2}{4} \quad (3.1.2)$$

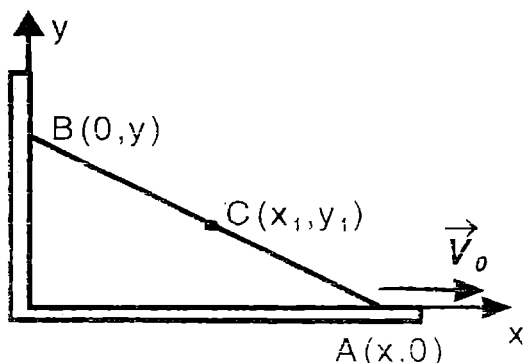


Fig. 3.1.1 Geometria pentru studiul alunecării barei

adică punctul C descrie un arc de cerc de rază  $\frac{l}{2}$ .

Pentru determinarea vitezei punctului C vom folosi relația de definiție a vitezei

$$\left\{ \begin{aligned} v_{1x} &= \frac{dx_1}{dt} = \frac{1}{2} \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} v_0 \\ v_{1y} &= \frac{dy_1}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \sqrt{\frac{l^2}{4} - v_0^2 t^2} \right) \\ &= - \frac{2v_0^2 t}{\sqrt{\frac{l^2}{4} - v_0^2 t^2}} \end{aligned} \right. \quad (3.1.3)$$

încât

$$v_1 = \sqrt{v_{1x}^2 + v_{1y}^2} = \frac{v_0 l}{2\sqrt{l^2 - v_0^2 t^2}} \quad (3.1.4)$$

Din păcate rigurozitatea matematică a descrierii unei probleme cinematice nu poate servi ca argument în favoarea realității ei fizice; soluția matematică strictă a problemei cinematice poate duce la o situație lipsită de sens din punct de vedere fizic.

Dacă dorim să calculăm viteza centrului barei în momentul  $t^*$  când ea devine orizontală (punctul C atinge axa Ox) vom avea surpriza să constatăm că  $v_1(t^*) = \infty$  unde  $t^* = \frac{l}{v_0}$ . Pentru clarificarea cauzelor

nonsensului fizic al rezultatului obținut trebuie făcută o analiză dinamică a mișcării barei.

Asupra barei acționează greutatea  $\vec{G}$  aplicată în

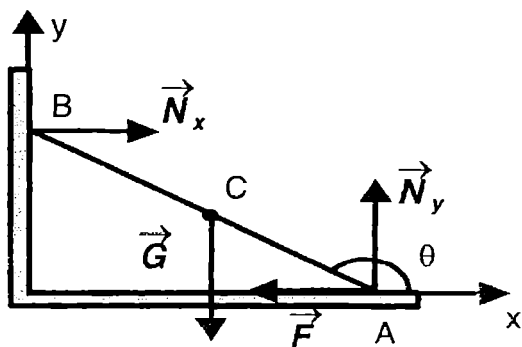


Fig.3.1.2 Geometria pentru studiul dinamic

punctul C (dacă bara este omogenă), forțele de reacțiune a peretelui și podelei  $\vec{N}_x$ , respectiv  $\vec{N}_y$ , precum și forța  $\vec{F}$ , aplicată capătului de jos al barei, care asigură viteza uniformă de deplasare a acestui capăt.

Ecuțiile ce descriu translația sunt

$$\begin{cases} O_x : N_x - F = 0 \\ O_y : N_y - G = 0 \end{cases} \quad (3.1.5)$$

Ecuția momentelor în raport cu capătul de jos al barei, luat ca origine a sistemului de coordonate inerțial este

$$I \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{1}{2} mgl \cos \theta - N_x l \sin \theta \quad (3.1.6)$$

unde  $m$  este masa barei iar  $I = \frac{ml^2}{3}$  exprimă momentul de inerție al barei în raport cu capătul A.

Conform condițiilor problemei

$$\begin{cases} v_0 = -\frac{d(l \cos \theta)}{dt} \\ \frac{dv_0}{dt} = 0 \end{cases} \quad (3.1.7)$$

rezultând

$$\begin{cases} v_0 = l \sin \theta \frac{d\theta}{dt} \\ \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{v_0 \operatorname{ctg} \theta}{l^2 \sin^2 \theta} \end{cases} \quad (3.1.8)$$

astfel încât din relația (3.1.6) se obține

$$N_x = -\frac{1}{2} \left( 1 - \frac{2v_0^2}{3gl \sin^3 \theta} \right) mg \operatorname{ctg} \theta \quad (3.1.9)$$

Dacă  $N_x > 0$ , adică  $\frac{2v_0^2}{3gl \sin^3 \theta} < 1$ , atunci capătul

de sus rămâne lipit de perete.

Deoarece la momentul inițial ( $t = 0$ )  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , pentru ca problema să aibă sens fizic trebuie satisfăcută condiția

$$v_0 < v_{0max} = \sqrt{\frac{3gl}{2}} \quad (3.1.10)$$

Dacă  $v_0 > v_{0max}$ , atunci capătul de sus al barei pierde contactul cu peretele vertical de la bun început.

Dacă  $v_0 < v_{0max}$ , atunci contactul dintre bară și peretele vertical continuă până la atingerea unui unghi critic

$$\theta_c = \arcsin \left\{ \left[ \frac{2v_0^2}{3gl} \right]^{\frac{1}{3}} \right\} \text{ cu } \frac{\pi}{2} < \theta < \pi \quad (3.1.11)$$

În limitele  $\frac{\pi}{2} < \theta < \theta_c$ , descrierea cinematică a alunecării barei este corectă. Centrul de masă al barei descrie în acest interval un arc de cerc de rază  $\frac{l}{2}$ .

Este ușor de transpus intervalul de unghi în interval de timp.

Începând cu unghiul critic  $\theta_c$  mișcarea este descrisă de ecuația (3.1.6) în care  $\mathbf{N}_x = 0$ , în condițiile inițiale ce corespund unghiului critic.

**3.2** *A mobile A tracks a mobile B that moves at constant speed  $\bar{v}_0$  along a strait line. The speed of A is also constant but keeps reorienting itself towards B ( $|\bar{\mathbf{v}}| > |\bar{\mathbf{v}}_0|$ ). Initially the distance between A and B is  $l$ , while their velocities are orthogonal ( $\bar{\mathbf{v}} \perp \bar{\mathbf{v}}_0$ ). Find the time lapse needed by A in order to catch B.*

**3.2** *Un mobil A urmărește un mobil B care se deplasează pe o dreapta cu viteza constantă  $\bar{v}_0$ . Viteza mobilului A este constantă în modul ( $|\bar{\mathbf{v}}| > |\bar{\mathbf{v}}_0|$ ) și orientată în permanență spre mobilul B. La momentul inițial:  $\bar{\mathbf{v}} \perp \bar{\mathbf{v}}_0$ , iar distanța dintre mobile este*



1. Determinați timpul după care mobilul A ajunge mobilul B (problema ogarului).

## REZOLVARE

Figura 3.2.1 prezintă situația la un moment  $t$ . Pentru rezolvarea problemei vom apela la un sistem de coordonate polare cu originea în punctul A.

Vom nota distanța dintre mobile cu  $r$  și unghiul făcut de către vitezele celor două mobile cu  $\theta$ .

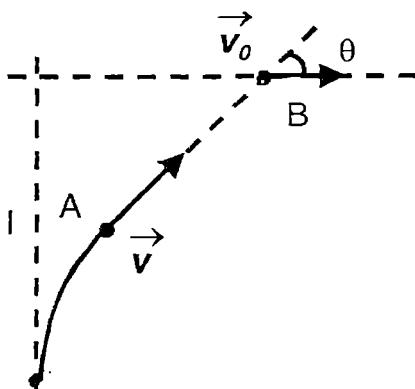


Fig.3.2.1 Mobilul A urmărește mobilul B

Folosind expresia vitezei în coordonate polare obținem

$$\begin{cases} \mathbf{v}_r = \frac{dr}{dt} = \dot{r} \\ \mathbf{v}_r = -v + v_0 \cos \theta \end{cases} \quad (3.2.1)$$

$$\begin{cases} \mathbf{v}_\theta = r \frac{d\theta}{dt} = r \dot{\theta} \\ \mathbf{v}_\theta = -v_0 \sin \theta \end{cases} \quad (3.2.2)$$

Ne interesează obținerea unei relații de legătură  $r = r(t)$ . Pentru aceasta înmulțim relația (3.2.1) cu  $v + v_0 \cos \theta$ , relația (3.2.2) cu  $-v_0 \sin \theta$ , după care adunăm noile forme. Obținem

$$\begin{aligned} \dot{r}(v_0 \cos \theta + v) - r \dot{\theta} v_0 \sin \theta \\ = v_0^2 - v^2 \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

sau

$$\frac{d}{dt} [r(v_0 \cos \theta + v)] = v_0^2 - v^2 \quad (3.2.4)$$

Prin integrare se obține

$$\dot{r}(v_0 \cos \theta + v) - vl = (v_0^2 - v^2)t \quad (3.2.5)$$

unde am folosit faptul că  $r(0) = l, \theta(0) = \frac{\pi}{2}$ .

Condiția de întâlnire a mobilelor cere  $r(\mathbf{t}^*) = 0$ , ceea ce conduce la valoarea

$$\mathbf{t}^* = \frac{l\mathbf{v}}{\mathbf{v}^2 - \mathbf{v}_0^2} \quad (3.2.6)$$

Folosirea altor coordonate în abordarea problemei complică foarte mult calculul matematic.

**3.3** *A particle A (projectile) of mass  $m_1$  having a momentum  $\bar{\mathbf{p}}_1$  elastically collides with a particle B (target) of mass  $m_2$  that is at rest. Show that the process can be represented by means of a graphical construction that contains all the significant features of the collision.*

**3.3** *O particulă A (proiectil), de masă  $m_1$  și având impulsul  $\bar{\mathbf{p}}_1$  ciocnește perfect elastic o particulă B (țintă), de masă  $m_2$  aflată în repaus. Arătați că rezultatul ciocnirii se poate ilustra printr-o construcție geometrică interesantă (și intuitivă).*

## REZOLVARE

Considerăm situațiile prezentate în figura 3.3.1.

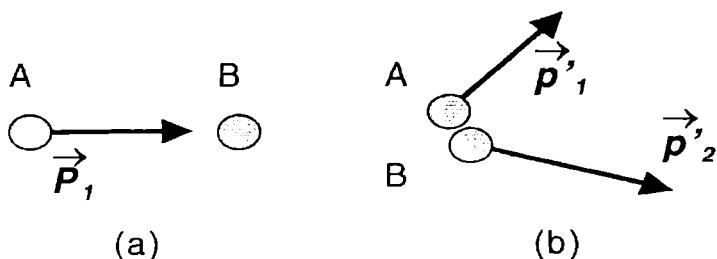


Fig.3.3.1 Geometria ciocnirii particulelor A și B:  
(a)inițial; (b) final.

Legile conservării energiei cinetice și impulsului sunt

$$\frac{p_1^2}{2m_1} = \frac{p_1'^2}{2m_1} + \frac{p_2'^2}{2m_2} \quad (3.3.1)$$

$$\vec{p}_1 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2' \quad (3.3.2)$$

Substituind valoarea  $\vec{p}_1' = \vec{p}_1 - \vec{p}_2'$  în ecuația (3.3.1) se obține

$$\vec{p}_1 \vec{p}_2' = \vec{p}_2' \frac{m_1 + m_2}{2m_2} \quad (3.3.3)$$

$\overline{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}'_2} = \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \cos \theta$ , obținem

$$\mathbf{p}'_2 = \frac{2m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{p}_1 \cos \theta \quad (3.3.4)$$

Forma analitică obținută pentru impulsul particulei țintă sugerează următoarea construcție grafică.

Dintr-un punct arbitrar O ducem vectorul  $\overline{\mathbf{p}_1}$  care reprezintă impulsul particulei incidente. Construim un cerc de rază  $\frac{m_2 \mathbf{p}_1}{m_1 + m_2}$  cu centrul pe dreapta suport a

vectorului  $\overline{\mathbf{p}_1}$  astfel încât punctul O să aparțină cercului. Deoarece valoarea unghiului triunghiului înscris în cerc care se sprijină pe diametru este egal cu  $\frac{\pi}{2}$ , toate segmentele duse din O la punctele cercului satisfac relația (3.3.4).

Segmentele dau de fapt impulsul particulei țintă după ciocnire. Unghiul făcut între impulsurile  $\overline{\mathbf{p}_1}$  și  $\overline{\mathbf{p}_2}$  este notat cu  $\alpha$  (unghi de împrăștiere), iar unghiul de

deviație a particulei proiectil este notat cu  $\beta$ . Pot fi discutate două cazuri:

1. Masa particulei proiectil mai mare decât masa particulei țintă ( $m_1 > m_2$ ). În acest caz

$$\frac{2m_2}{m_1 + m_2} < 1 \text{ și construcția grafică este data în}$$

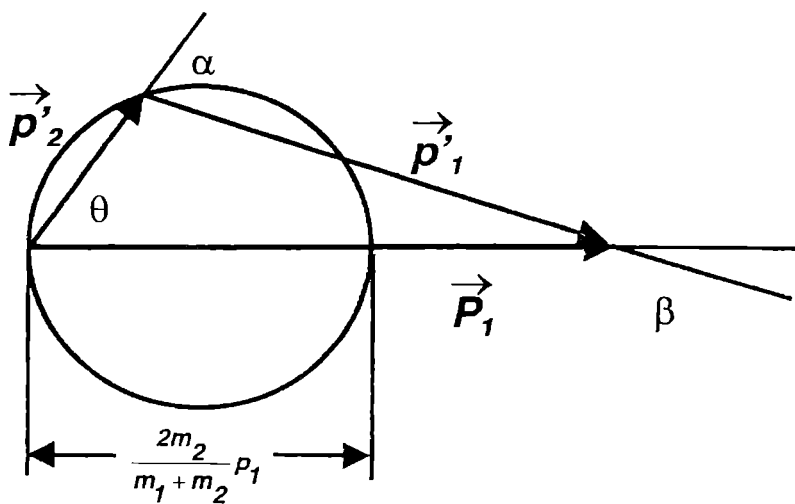


Fig.3.3.2 Geometria ciocnirii în cazul  $m_1 > m_2$

figura (3.3.2).

- unghiul de împrăștiere  $\alpha$  variază de la 0 la  $\frac{\pi}{2}$ ;
  - unghiul  $\beta$  maxim se obtine când vectorul  $\vec{p}'_1$  este tangent la cerc;
  - impulsul  $\vec{p}'_1$  tinde către valoarea maximă atunci când după ciocnire ținta se mișcă cât mai aproape de direcția perpendiculară.
2. Masa particulei proiectil mai mică decât masa particulei țintă ( $m_1 < m_2$ ). În acest caz

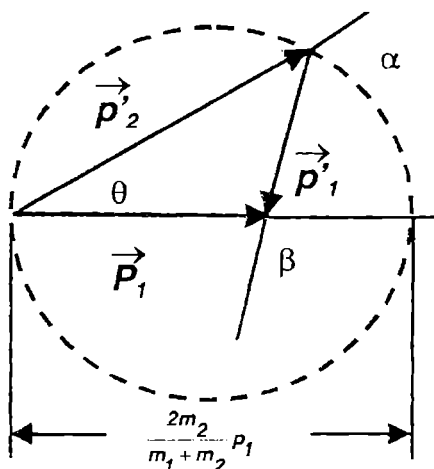


Fig.3.3.3 Geometria ciocnirii în cazul  $m_1 < m_2$

$\frac{2m_2}{m_1 + m_2} > 1$  și construcția grafică este dată în

figura (3.3.3)

- unghiul de împrăștiere variază între limitele

$$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi;$$

- unghiul de deviere  $\beta$  al particulei proiectil variază între 0 și  $\pi$ .

În cele două cazuri studiate discuția a fost făcută după parametrul  $\theta$ ; valoarea concretă a acestuia nu poate fi obținută însă din legile de conservare.

Legile de conservare nu fac posibilă rezolvarea problemei ciocnirilor, dar permit analiza particularităților fundamentale ale procesului.



## **CAPITOLUL 4 CĂLDURĂ.**

**Aplicații ale noțiunii de entropie.**

**Entropy applications.**

**© Vlad Popa-Niță**

**4.1.** Show the Clausius equality for a system obeying the equations of state:  $p = \frac{1}{3}\sigma T^4$  and  $U = \sigma T^4 V$  ( $\sigma$  is a positive constant).

*Demonstrați egalitatea Clausius pentru un sistem termodinamic cu ecuația de stare:  $p = \frac{1}{3}\sigma T^4$  și  $U = \sigma T^4 V$  ( $\sigma$  fiind o constantă pozitivă).*

## **REZOLVARE**

Entropia - scurtă prezentare.

Constatările experimentale au generat formularea primară a principiului doi: într-o transformare ciclică monotermă nu este posibil decât:

$Q = L = 0$  dacă transformarea este reversibilă și

$Q = L < 0$  dacă transformarea este ireversibilă.

Extinzând în cazul transformărilor ciclice biterme se obține relația Clausius (independentă de natura sistemului termodinamic):

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} \leq 0 \quad (4.1)$$

unde  $Q_1, Q_2$  reprezintă căldurile schimbate de sistem cu cele doua termostate de temperaturi  $T_1$  si respectiv

$T_2$ . Egalitatea are loc în cazul transformărilor reversibile, iar inegalitatea pentru transformarea ireversibilă.

Generalizând relația Clausius în cazul transformărilor ciclice oarecare obținem pentru o transformare ciclică reversibilă:

$$\oint \frac{\delta Q_{rev}}{T} = 0 \quad (4.2)$$

iar pentru una ireversibilă:

$$\oint \frac{\delta Q_{irev}}{T} < 0 \quad (4.3)$$

Rezultatul (4.2) face posibilă definirea unei funcții de stare  $S$  (numita entropia sistemului) a cărei diferențiala exactă este:

$$dS = \frac{\delta Q_{rev}}{T} \quad (4.4)$$

Variația de entropie depinde numai de stările inițială și finală și nu de stările intermediare:

$$S_f - S_i = \int_i^f \frac{\delta Q_{rev}}{T} \quad (4.5)$$

Consecința directă a rezultatului (4.5) este constanța entropiei într-o transformare adiabatică

reversibilă. Considerând relația (4.4) pentru un mol de gaz ideal, obținem succesiv:

$$ds = \frac{\delta q}{T} = \frac{du + pdv}{T} = C_V \frac{dT}{T} + R \frac{dv}{v} \quad (4.6)$$

iar prin integrare:

$$s(T, v) = C_V \ln T + R \ln v + s_0 \quad (4.7)$$

unde prin litere mici am notat mărimile molare. Pentru  $\nu$  moli de gaz ideal, relația (4.7) devine:

$$S(T, V) = \nu(C_V \ln T + R \ln V - R \ln \nu + s_0) \quad (4.8)$$

Subliniem faptul că termenul  $-\nu R \ln \nu$  nu joacă nici un rol într-un proces în care  $\nu$  este constant, dar devine esențial într-un proces în care se modifică  $\nu$ . De fapt acest termen determină omogenitatea entropiei ( $\alpha S(\nu, V) = S(\alpha \nu, \alpha V)$ ) absența lui conducând la paradoxul Gibbs.

Rezultatul important care decurge din relația (4.3) este:

$$\int_i^f \frac{\delta Q_{\text{irrev}}}{T} < S_f = S_i \quad (4.9)$$

cea ce implică faptul că într-o transformare adiabatică ireversibilă entropia crește, astfel încât

enunțul principiului 2 în formularea entropiei este următorul: într-o transformare adiabatică entropia nu poate decât să crească sau să rămână constantă.

Pentru rezolvarea problemei enunțate, trebuie avut în vedere că o transformare ciclică, bitermă, reversibilă (ciclul Carnot) este alcătuită din două izoterme (1-2) și (3-4) și două adiabate (2-3) și (4-1). Pentru a determina căldura schimbată de sistem cu exteriorul procedăm astfel:

$$\delta Q = dU + \delta L = dU + pdV = 4\sigma T^3 V dT + \frac{4}{3}\sigma T^4 dV \quad (4.10)$$

Pentru o transformare izotermă  $dT = 0$  astfel încât

$$\delta Q = \frac{4}{3}\sigma T^4 dV \text{ ceea ce implică:}$$

$$\begin{cases} Q_1 = \frac{4}{3}\sigma T_1^4 (V_2 - V_1) \\ Q_2 = \frac{4}{3}\sigma T_1^4 (V_4 - V_3) \end{cases} \quad (4.11)$$

Din relația (4.10) punând condiția  $\delta Q = 0$  obținem ecuația diferențială a adiabatei :

$$3\frac{dT}{T} + \frac{dV}{V} = 0 \quad (4.12)$$

iar prin integrare:

$$T^3V = \text{const.} \quad (4.13)$$

Cu ajutorul relațiilor (4.11) și (4.13) relația Clausius este imediată.

**4.2.** *A thermodynamic system goes through two cycles represented in figure,  $T$  is the absolute temperature and  $S$  the entropy. During each cycle the absolute temperature varies  $n$ -fold. Find the efficiency of each cycle and compare with the efficiency of the reversible Carnot cycle between the same extreme temperatures.*

*Un sistem termodinamic efectuează două procese ciclice reprezentate în figura 4.1.  $T$  este temperatura absolută și  $S$  este entropia. În cursul fiecărui ciclu temperatura se modifică de  $n$  ori. Să se determine randamentul fiecărui ciclu și să se compare cu randamentul ciclului Carnot reversibil efectuat de sistem între aceleași temperaturi extreme.*

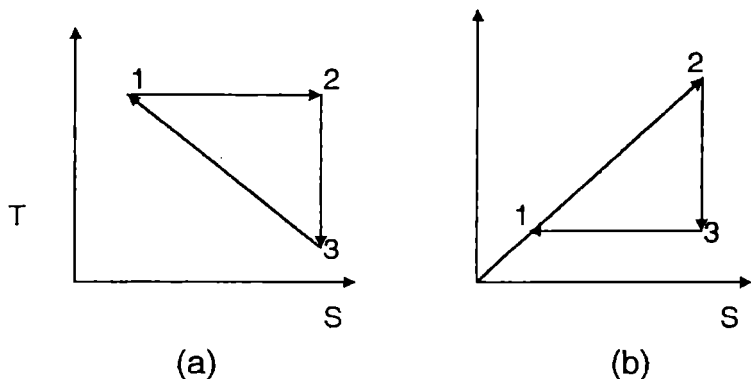


Figura 4.1.

## REZOLVARE

Interpretarea geometrică a relației (4.4) este următoarea: în diagrama  $T$ - $S$ , căldura schimbată de sistem cu exteriorul într-o transformare reversibilă  $i \rightarrow f$  este dată de aria marginită de graficul transformării, axa  $S$  și dreptele  $S = S_i$  și  $S = S_f$ . În cazul ciclului reprezentat în figura 4.1 (a) sistemul primește căldura  $Q_p = Q_{12} = T_1(S_2 - S_1)$  și cedează căldura  $Q_c = Q_{31} = (1/2)(T_1 + T_3)(S_1 - S_2)$ . Deoarece  $T_1/T_3 = n$  rezultă imediat:

$$\eta = 1 - \frac{|Q_{ced}|}{Q_p} = \frac{n-1}{2n} \quad (4.14)$$

Analog în cazul transformării ciclice din figura 4.1. (b), sistemul primește căldura  $Q_p = Q_{12} = (1/2)(T_1 + T_2)(S_2 - S_1)$

și cedează căldura  $Q_c = Q_{31} = T_1(S_1 - S_3)$  astfel încât randamentul ciclului are valoarea:

$$\eta = \frac{n-1}{n+1} \quad (4.15)$$

Randamentul ciclului Carnot care ar funcționa între temperaturile  $T_1$  și  $nT_1$ , ar fi evident cel mai mare având valoarea :

$$\eta = \frac{n-1}{n} \quad (4.16)$$

**4.3.** Find the maximal work that can be obtained putting together two vessels which contain identical ideal gases with the adiabatic exponent  $\gamma$ , at the same temperature  $T_0$ , with the same number of moles  $\nu$ , but with different volumes  $V_1$  and  $V_2$ .

Determinați lucrul mecanic maxim care poate fi obținut reunind două recipiente care conțin gaze ideale identice cu exponent adiabatic  $\gamma$ , la aceeași temperatură  $T_0$ , având același număr de moli  $\nu$ , dar ocupând volume diferite  $V_1$  și  $V_2$ .



## REZOLVARE

Rezolvarea problemei are la baza următoarele două observații:

- i) lucrul mecanic maxim se efectuează într-o transformare reversibilă și
- ii) deoarece în cursul procesului numărul de moli nu este constant, termenul  $-vR \ln v$  din expresia (4.8) devine esențial.

Lucrul mecanic maxim se obține într-o transformare adiabatică, reversibilă, transformare definită de constanța entropiei. Considerând expresia (4.8) precum și faptul că entropia este funcție aditivă de stare, entropia stării inițiale este dată de :

$$S_i = v \left( \frac{2R}{\gamma - 1} \ln T_0 + R \ln V_1 V_2 - 2R \ln v + 2s_0 \right) \quad (4.17)$$

Deoarece în starea finală sistemul are temperatura  $T$ , numărul de moli  $2v$  și volumul  $V_1 + V_2$ , entropia are expresia:

$$S_f = 2v \left[ \frac{R}{\gamma - 1} \ln T + R \ln(V_1 + V_2) - R \ln v + s_0 \right] \quad (4.18)$$

Egalând expresiile (4.17) și (4.18) obținem noua temperatură de echilibru:

$$T = T_0 \left[ \frac{4V_1V_2}{(V_1 + V_2)^2} \right]^{\frac{\gamma-1}{2}} \quad (4.19)$$

iar

$$L_{\max} = 2\nu C_V (T_0 - T) = \frac{2\nu RT_0}{\gamma - 1} \left\{ 1 - \left[ \frac{4V_1V_2}{(V_1 + V_2)^2} \right]^{\frac{\gamma-1}{2}} \right\} \quad (4.20)$$

**4.4.** *In the two halves of an adiabatic isolated vessel, there are  $\nu$  moles of different ideal gases at same temperature  $T$ .*

*a) What is the entropy change ideal gases allowed to mixe?*

*b) Same question if the gases are identical.*

*În cele două jumătăți ale unui vas izolat adiabatic de mediul exterior se găsesc câte  $\nu$  moli de gaze ideale diferite aflate la aceeași temperatură  $T$ .*

*a) Determinați variația de entropie la îndepărtarea peretelui despărțitor.*

*b) Aceiași întrebare dacă gazele sunt identice.*

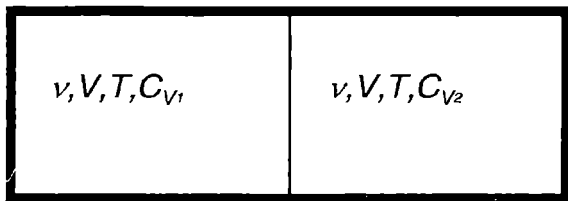


Figura 4.2.

## REZOLVARE

Problema constituie o aplicație a expresiei (4.8) pentru entropie. Lăsând calculele ca exercițiu, menționăm numai că în cazul punctului (a) al problemei  $\Delta S = S_f - S_i = 2\nu R \ln 2 > 0$  ceea ce este adevărat deoarece transformarea este adiabatică ireversibilă, în timp ce în cazul (b)  $\Delta S = S_f - S_i = 0$ , evident deoarece procesul este adiabatic reversibil.

**4.5.** *Calculate the change in entropy when one mole of an ideal gas is allowed to expand freely into double its original volume.*

*Determinați variația de entropie la dublarea volumului unui mol de gaz ideal în urma unei destinderi adiabatică, în vid.*

## REZOLVARE

Destinderea adiabatică în vid (procesul Joule) este un proces ireversibil. În cazul gazului ideal  $T_i = T_f$ . Folosind expresia (4.8) obținem:

$$\Delta S = S_f - S_i = \nu \left( C_V \ln \frac{T_f}{T_i} + R \ln \frac{V_f}{V_i} \right) = R \ln 2 > 0 \quad (4.21)$$

rezultat în concordanță cu principiul doi în formularea entropiei.

Mentionăm următoarea observație: relația (4.4) permite calculul variației entropiei numai în cazul unui proces reversibil. Pentru calculul variației entropiei în cazul unui proces ireversibil, imaginăm un proces reversibil care decurge între aceleași stări inițială și finală ca cel ireversibil și calculăm variația de entropie pentru acest proces. În virtutea faptului că entropia este funcție de stare, variația ei nu depinde de proces ci numai de starea inițială și cea finală.

## **CAPITOLUL 5. CĂLDURĂ**

**Funcții de distribuție.**

**Distribution functions.**

**© ANDREI PETRESCU, MIRCEA FRONESCU 1999**

**5.1.** An amount of gas contains  $N$  molecules. Let  $\Delta N$  be the number of gas molecules with the speed in the interval  $(v, v + \Delta v)$ . In the figure, the dependence on speed is presented as a histogram of the function

$$f(v) = \frac{1}{N} \frac{\Delta N}{\Delta v}.$$

a) Specify the meaning of the area between the graph of function  $f(v)$ , the axis of speeds, and the lines  $v = v_1$ ,  $v = v_2$ .

b) Estimate the mean speed  $v_{med}$  and the quadratic mean speed  $v_{p.m.}$ ; calculate the ratio  $(v_{p.m.}/v_{med})$ .

c) Represent the dependence on  $v$  of the number of molecules having the speed  $\geq v$  as a histogram.

O cantitate de gaz conține  $N$  molecule. Fie  $\Delta N$  numărul moleculelor gazului cu viteza cuprinsă în intervalul  $(v, v + \Delta v)$ . În grafic, (Fig.5.1.), este reprezentată histograma dependenței de viteză a

funcției  $f(v) = \frac{1}{N} \frac{\Delta N}{\Delta v}$ .

a) Precizați semnificația ariei cuprinse între graficul funcției, axa absciselor și dreptele de ecuații  $v = v_1$ ,  $v = v_2$  (discuție: după valorile  $v_1$ ,  $v_2$ ).

b) Estimați viteza medie și viteza medie pătratică a moleculelor gazului; calculați raportul acestora ( $v_{p.m.}/v_{med}$ ).

c) Reprezentați grafic histograma dependenței de viteza  $v$  a fracțiunii din numărul total de molecule cu viteza  $\geq v$ .

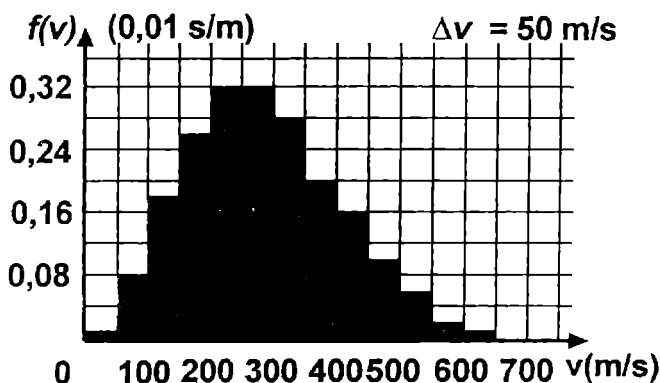


Figura 5.1.

## REZOLVARE

a) Aria cuprinsă între graficul funcției, axa absciselor și dreptele de ecuații  $v = v_1$ ,  $v = v_2$  reprezintă fracțiunea din numărul total al moleculelor având viteza cuprinsă

În intervalul  $(v_1, v_2)$ , funcția  $f(v)$  fiind normată la unitate. Dacă  $v_1 = 0$  și  $v_2$  este finită, aria precizată va reprezenta fracțiunea din numărul total al moleculelor având viteza mai mică decât  $v_2$ .

Dacă  $v_1$  este finită și  $v_2 \rightarrow \infty$ , aria precizată va reprezenta fracțiunea din numărul total al moleculelor având viteza mai mare decât  $v_1$ .

Considerând  $v_1 = 0$  și  $v_2 \rightarrow \infty$ , rezultă că aria cuprinsă sub graficul funcției trebuie să aibă valoarea 1, fapt ce poate fi verificat prin măsurarea ariei.

**b)** Viteza medie și viteza pătratică medie se calculează folosind relațiile următoare:

$$v_{med} = \sum_{k=1}^{13} f(v_k) v_k \Delta v_k; v_{p.m.} = \sum_{k=1}^{13} f(v_k) v_k^2 \Delta v_k \quad (5.1)$$

Conform histogramei, putem alege pentru valoarea vitezei ( $v$ ) fie extremitatea stângă a intervalului de 50 m/s, fie extremitatea lui dreaptă, fie un punct intermediar, de exemplu mijlocul intervalului (Tabelul 5.1.)

Se observă că raportul  $v_{p.m.}/v_{med}$  este supraunitar.

**c)** Graficul este o funcție descrescătoare în scară, ale cărei valori se pot calcula; Astfel de rezultate sunt prezentate de exemplu în Tabelul 5.2 și Figura 5.2.



Tabelul 5.1

Nr.	$f(v)\delta v$	$v$	$v f(v)\delta v$	$v^2 f(v)\delta v$	$v$	$v f(v)\delta v$	$v^2 f(v)\delta v$	$v$	$v f(v)\delta v$	$v^2 f(v)\delta v$
1.	0,005	0	0	0	25	0,125	3,125	50	0,25	12,5
2.	0,040	50	2	100	75	3	225	100	4	400
3.	0,090	100	9	900	125	11,25	1406,25	150	13,5	2025
4.	0,130	150	19,5	2925	175	22,75	3981,25	200	26	5200
5.	0,160	200	32	6400	225	36	8100	250	40	10000
6.	0,160	250	40	10000	275	44	12100	300	48	14400
7.	0,140	300	42	12600	325	45,5	14787,5	350	49	17150
8.	0,100	350	35	12250	375	37,5	14062,5	400	40	16000
9.	0,080	400	32	12800	425	34	14450	450	36	16200
10.	0,050	450	22,5	10125	475	23,75	11281,25	500	25	12500
11.	0,030	500	15	7500	525	15,75	8268,75	550	16,5	9075
12.	0,010	550	5,5	3025	575	5,75	3306,25	600	6	3600
13.	0,005	600	3	1800	625	3,125	1953,125	650	3,25	2112,5
$\Sigma$	1,000		257,5	80425		282,5	93925		307,5	108675
$v_{med}$ (m/s)			257,5			282,5			307,5	
$v_{p.m.}$ (m/s)				283,6			306,5			329,7
$\frac{v_{p.m.}}{v_{med}}$			1,101			1,085			1,072	

Tabelul 5.2.

1,000; 0,995; 0,955; 0,865; 0,735; 0,575; 0,415;  
0,275; 0,175; 0,095; 0,045; 0,015; 0,005; 0,000.

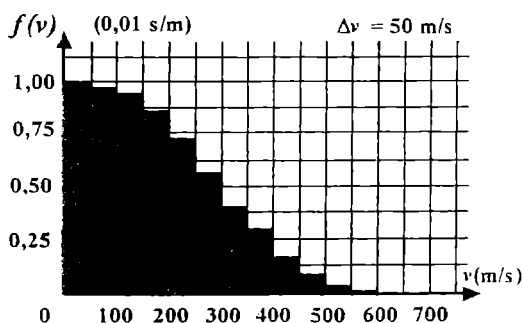


Figura 5.2.

**5.2.** *There is one mole of ideal gas, having the adiabatic exponent  $\gamma = 1.5$ , in normal conditions. The gas goes through the following transformations (as in the figure): a compression at constant pressure ( $1 \rightarrow 2$ ), an adiabatic reversible compression ( $2 \rightarrow 3$ ), a heating at constant pressure  $3 \rightarrow 4$  and a free adiabatic expansion in an empty vessel  $4 \rightarrow 1$ ; during this last transformation the gas makes a turbine turn.*

**a)** *Calculate the values of the parameters ( $p, V, T$ ) in the states 1, 2, 3 and 4; put the results in the table.*

**b)** *Calculate the work, the variation of the internal energy and the heat in the transformations  $1 \rightarrow 2$ ,  $2 \rightarrow 3$ ,  $3 \rightarrow 4$  and  $4 \rightarrow 1$ ; put the results in the table.*

**c)** *Suppose that during the adiabatic expansion, the turbine rotor is blocked; after the gas reaches an equilibrium state (5), it is cooled until it turns back to the initial state. Calculate the thermodynamic efficiency of the cycle  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 1$ .*

*Un mol de gaz ideal (având  $\gamma = 1,5$ ) se află în condiții normale de presiune și temperatură. Gazul efectuează*

următoarea succesiune de transformări: comprimarea izobară  $1 \rightarrow 2$ , comprimarea adiabatică reversibilă  $2 \rightarrow 3$ , încălzirea izobară  $3 \rightarrow 4$  și destinderea adiabatică într-un recipient vidat  $4 \rightarrow 1$ , în cursul căreia pune în mișcare rotorul unei turbine (puteți identifica stările indicate urmărind diagrama următoare).

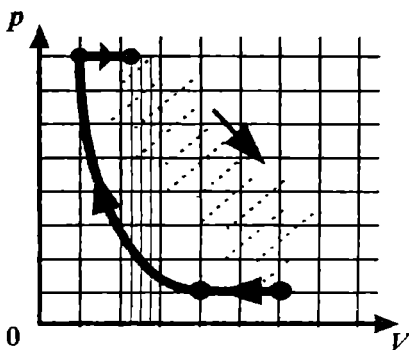


Figura 5.3.

a) Calculați valorile parametrilor ( $p$ ,  $V$ ,  $T$ ) în stările 1, 2, 3 și 4; treceți rezultatele într-un tabel de forma următoare:

Tabelul 5.3.

	$p$ (kPa)	$V$ (L)	$T$ (K)
1.	...	...	...
...	...	...	...

**b)** Calculați lucrul mecanic, variația energiei interne și căldura în transformările  $1 \rightarrow 2$ ,  $2 \rightarrow 3$ ,  $3 \rightarrow 4$  și  $4 \rightarrow 1$ ; treceți rezultatele într-un tabel de forma:

Tabelul 5.4.

	$L$ (kJ)	$\Delta U$ (kJ)	$Q$ (kJ)
$1 \rightarrow 2$	...	...	...
...	...	...	...

**c)** Presupunem acum că, în cursul destinderii adiabate, rotorul turbinei este blocat; după atingerea unei stări de echilibru (5) gazul este lăsat să se răcească până când revine în starea inițială.

Calculați randamentul termodinamic al ciclului  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 1$ .

## REZOLVARE

a), b) Reprezentarea ciclului este indicată în figura 5.4:

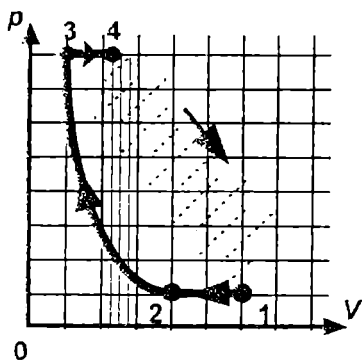


Figura 5.4.

Valorile cerute sunt indicate în tabelele 5.5 – 5.8

**Tabelul 5.5**

	$p/p_1$	$V/V_1$	$T/T_1$
1	1	1	1
2	1	2/3	2/3
3	8	1/6	4/3
4	8	3/8	3

**Tabelul 5.6.**

	$p$ (kPa)	$V$ (L)	$T$ (K)
1	101,3	22,42	273,15
2	101,3	14,95	182,10
3	810,4	3,736	364,20
4	810,4	8,408	819,45

**Tabelul 5.7.**

	$L/p_1V_1$	$\Delta U/p_1V_1$	$Q/p_1V_1$
1→2	-1/3	-2/3	-1
2→3	-4/3	4/3	0
3→4	5/3	10/3	5
4→1	4	-4	0

**Tabelul 5.8.**

	$L$ (kJ)	$\Delta U$ (kJ)	$Q$ (kJ)
1→2	-0,757	-1,514	-2,271
2→3	-3,028	3,028	0
3→4	3,785	7,570	11,36
4→1	9,085	-9,085	0

c) Reprezentarea noului ciclu este arătată în figura alăturată, în care:

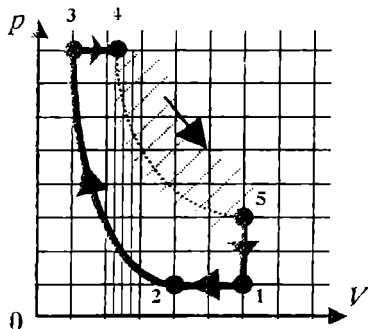
$$T_5 = T_4 = 3T_0, \quad V_5 = V_1, \quad p_5$$

$$= 3 p_1. \text{ Se observă că } L_{12}$$

$$+ L_{23} + L_{34} + L_{45} + L_{51} = 0,$$

deci randamentul va fi nul

$$(\eta = 0).$$

**Figura 5.5.**

**5.3..** A molecular beam contains molecules having the mass  $m_1, m_2, m_3$  and the speeds  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$  and  $\vec{v}_3$ ; all the molecules move in the same direction. The concentration of molecules for each type is respectively  $n_1, n_2,$  and  $n_3$ . The beam moves towards a piston in motion; the angle between the direction of beam and the perpendicular at the surface of piston is  $\alpha$ . The piston moves with the speed  $\vec{u}$ , making the angle  $\beta$  with the perpendicular at the surface of piston. After the interaction with the piston a fraction  $f$  of molecules of each kind remain stucked on the piston; the others collide the piston perfectly elastic.

**a)** Calculate the speeds of the molecules after the collision, knowing the values of the speeds and the angles.

**b)** Calculate the expression of the pressure over the piston due by the beam

Un fascicul molecular conține molecule cu masele  $m_1, m_2$  și  $m_3$ , care au vitezele respectiv  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$  și  $\vec{v}_3$  de valori constante și orientare comună. Concentrațiile

moleculelor de fiecare tip sunt, respectiv,  $n_1$ ,  $n_2$  și  $n_3$ . Moleculele fasciculului se îndreaptă spre un piston mobil sub unghiul  $\alpha$  față de direcția normalei la suprafața acestuia. Pistonul se deplasează spre molecule cu viteza  $\bar{u}$  care face unghiul  $\beta$  cu direcția normalei la suprafața pistonului. În urma interacției cu pistonul mobil, o aceeași fracțiune  $f$  din numărul moleculelor de fiecare tip aderă la suprafața sa, restul ciocnindu-se perfect elastic cu acesta.

a) Calculați mărimea și orientarea vitezelor moleculelor după interacțiunea cu pistonul mobil, cunoscând  $v_1 = 250 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ,  $v_2 = 300 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ,  $v_3 = 350 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ,  $u = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ,  $\alpha = 60^\circ$  și  $\beta = 30^\circ$ .

b) Stabiliți expresia presiunii exercitate de fasciculul molecular asupra pistonului mobil.

**REZOLVARE:**

b) Pentru moleculele care s-au ciocnit elastic, componenta tangențială a vitezei finale va fi

$$v'_{j,TANG} = v_j \sin \alpha, \quad (5.2)$$

iar componenta normală a vitezei finale va fi

$$v'_{j,NORM} = v_j \cos \alpha + 2u \cos \beta, \text{ cu } j = 1, 2, 3. \quad (5.3)$$

Valoarea vitezei finale a acestor molecule va fi:

$$v'_j = \sqrt{v_j^2 + 4u^2 \cos^2 \beta + 4uv_j \cos \beta \cos \alpha}. \quad (5.4)$$

Expresia este:

$$\operatorname{tg} \alpha'_j = \frac{v_j \sin \alpha}{v_j \cos \alpha + 2u \cos \beta} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{1 + \frac{2u \cos \beta}{v_j \cos \alpha}}. \quad (5.5)$$

Pentru aplicația numerică:

- componentele normale ale vitezelor finale au, respectiv, valorile:  $142,3 \text{ m/s}$ ;  $167,3 \text{ m/s}$ ;  $192,3 \text{ m/s}$ ,

- componentele tangențiale ale vitezelor finale au, respectiv, valorile:  $216,5 \text{ m/s}$ ;  $259,8 \text{ m/s}$ ;  $303,1 \text{ m/s}$ ,

- mărimile vitezelor finale au, respectiv, valorile:  $259 \text{ m/s}$ ;  $309 \text{ m/s}$ ;  $359 \text{ m/s}$ .

- tangentele unghiurilor dintre viteza finală și normala la suprafața pistonului au, respectiv, valorile:  $1,521$ ;  $1,553$ ;  $1,576$ , corespunzând, respectiv, unghiurilor:  $56^{\circ}41'$ ;  $57^{\circ}13'$ ;  $57^{\circ}36'$ .



Pentru moleculele care aderă la piston

vitezele finale vor fi:  $\vec{v}_j = \vec{u}$ .

**b)** Pentru stabilirea expresiei presiunii exercitate de fasciculul molecular asupra peretelui mobil ne vom situa în referențialul în care pistonul este în repaus.

Variația impulsului moleculelor care se ciocnesc elastic are expresia:

$$\left| \overline{\Delta p_j^{elastic}} \right| = 2m_{0j}(v_j \cos \alpha + u \cos \beta), \quad (5.6)$$

în timp ce variația impulsului moleculelor care aderă la perete reprezintă jumătate din valoarea precedentă.

Numărul moleculelor care ciocnesc pistonul pe o suprafață de arie  $S$  într-o durată  $\Delta t$  va fi, pentru moleculele ce se ciocnesc elastic:

$$(1-f)n_j S(v_j \cos \alpha + u \cos \beta) \Delta t \quad (5.7)$$

și

$$fn_j S(v_j \cos \alpha + u \cos \beta) \Delta t, \quad (5.8)$$

pentru moleculele care aderă la perete.

Calculând forța din principiul fundamental al

mecanicii  $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$  și ținând seama că presiunea este

dată de expresia  $P = \frac{F_n}{S}$ , obținem în final:

$$P = (2 - f) \sum_{j=1}^3 n_j m_{oj} (v_j \cos \alpha + u \cos \beta)^2. \quad (5.9)$$

## **CAPITOLUL VI ELECTRICITATE.**

**Acțiuni mecanice produse de forțe de natură electrică.**

**Electrically produced mechanical actions.**

**© ADRIAN S. DAFINEI, 1999**

**6.1.** *A point body of mass  $m$  electrically charged with  $q$  is launched with the speed  $v$  towards a very far ring of mass  $m$  uniformly charged with  $q$ ; the launching direction is normal on the plan of ring in his center. Determine the littlest distance between the point body and the ring. Can be neglected the gravitational interaction?*

*Un corp punctiform de masă  $m$  și sarcină  $q$  este lansat cu viteza  $v$  de la o distanță foarte mare spre un inel de masa  $m$  încărcat uniform cu sarcina  $q$ ; direcția de lansare este perpendiculară pe planul inelului în centrul acestuia. Să se determine distanța minimă dintre inel și corpul punctiform. Se poate neglija interacția gravitațională?*

## **REZOLVARE**

Anumite situații reale sau imaginabile rațional nu pot fi descrise prin încadrarea într-un singur capitol de fizică.

Atunci când mai multe fenomene pot avea loc simultan înrâurind evoluția unui sistem, trebuie considerat raportul în care se află diversele acțiuni și - dacă este cazul - fenomenele care produc acțiuni mai slabe pot fi neglijate. Problema enunțată mai sus, este în egală măsură o problemă de electricitate și de mecanică; în rezolvarea ei se ivește ocazia unei discuții referitoare la tipurile forțelor care acționează între corpuri.

Din experiența cotidiană sunt cunoscute o mare varietate de forțe; gravitația - prin care pământul atrage toate obiectele care ne înconjoară, forțele care apar la contactul solidelor și care le împiedică să interpenetreză, forțele elastice, forțele datorate presiunii gazelor sau lichidelor, forțele de adeziune apărute între corpurile lipite, forțele de frecare care produc rezistențe la deplasările reciproce, forțele electrostatice, forțele magnetice, etc. În afara acestor forțe care acționează la nivel macroscopic, există altele care acționează la nivelul microscopic al atomilor și nucleelor. Astfel există forțe atractive și repulsive intermoleculare, forțe atomice care rețin la un

loc părțile constitutive ale atomilor, forțe nucleare care mențin stabilitatea nucleului. Există și forțe care acționează la nivelul particulelor subnucleare atunci când acestea suferă coliziuni (când sunt accelerate la energii foarte mari).

În mod fundamental toate forțele pot fi grupate în patru categorii:

1. Forța gravitațională. Aceasta este o forță de atracție între mase. Dacă am clasifica tăria forțelor în funcție de acțiunile lor asupra particulelor elementare, forța gravitațională este cea mai slabă. Forța de atracție gravitațională între doi protoni este de aproximativ  $10^{-34}\text{N}$ , ceea ce este complet nesemnificativ. Pe suprafața Pământului se simte acțiunea gravitației deoarece masa Pământului este foarte mare.

2. Forța electromagnetică este o forță atractivă sau repulsivă care acționează între sarcinile electrice. Forțele electrice și cele magnetice considerate cândva ca fiind distincte, sunt actualmente grupate; forța magnetică nu este altceva decât o forță legată de mișcarea sarcinilor electrice. În sensul stabilit anterior,

forța electrică este o forță de tărie medie. Între doi protoni vecini, forța electrică este de circa 90N. Dintre toate forțele , cele electrice joaca rolul cel mai important în lumea care ne înconjoară. Cu excepția atracției gravitaționale dintre Pământ și toate celelalte obiecte (dar nu între obiecte), toate forțele care determină acțiunile în lumea imediat înconjurătoare sunt de natură electrică. Forțele de contact între solidele rigide, forțele elastice, forțele de frecare, forțele de presiune, forțele de adeziune, etc. nu sunt decât forțe de interacție electrică între sarcinile electrice care intră în structura atomilor.

3.Forțele tari acționează în interiorul nucleelor atomice; ele sunt atractive sau repulsive. Aceste forțe reprezintă liantul nuclear împiedicând componentele nucleare să se apropie sau să se depărteze excesiv. Acest tip de forțe se numesc tari pentru că sunt cele mai tari forțe dintre cele patru tipuri. Pentru doi protoni din nucleu, forța tare are o valoare de aproximativ 10000N.

4. Forțele slabe se manifestă în unele dintre reacțiile dintre particulele elementare. Multe dintre reacțiile datorate forțelor slabe sunt reacții de dezintegrare radioactivă; ele sunt scindări spontane ale unei particule în alte câteva. Forțele de acest tip sunt numite slabe pentru că ele au - de exemplu- valori de tipul  $10^{-2}N$  pentru protoni. Tabelul 6.1 cuprinde o descriere a tăriei și a distanței pe care acționează pentru cele patru tipuri de forțe .

Tabelul 6.1

	Forță	Acțiune	Tărie	Domeniu
1	Gravitațională	Între mase	$10^{-34}N$	Infinit
2	Slabă	Între particule elementare	$10^{-2}N$	$<10^{-17}m$
3	Electromagnetică	Între sarcini electrice	$10^2N$	Infinit
4	Tare	Între particule nucleare	$10^4N$	$10^{-15}m$

Atât forța gravitațională cât și cea electromagnetică acționează chiar și la distanțe foarte mari. Un exemplu spectaculos este interacția dintre Pământ și Soare care sunt separate prin sute de milioane de kilometri. Ambele tipuri de forțe sunt responsabile de acțiuni la distanță prin apariția de câmpuri. Desigur, și forțele tari



acționează la distanță; domeniul de acțiune al acestui tip de forță este însă foarte mic. Cele patru tipuri de forțe explică "structurarea" materiei.

Chiar înainte de rezolvarea problemei propuse trebuie făcută o analiză a raportului celor două forțe de interacție (atracția gravitațională și respingerea electrostatică) apărute între inel și corpul punctiform.

Admițând că interacțiile ar fi analoge celor apărute între două corpuri având mase  $m=1kg$  și sarcini electrice  $q=1\mu C$ , (ceea ce în condițiile enunțului pare rezonabil), raportul  $\eta$  dintre forța de respingere

electrostatică  $F_e = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$  și forța de atracție

gravitațională  $F_g = k \frac{m^2}{r^2}$  este pentru orice distanță  $r$  dat

de :

$$\eta = \frac{F_e}{F_g} = \frac{q^2}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot k \cdot m^2} ; \eta = 1,348 \cdot 10^8 \quad (6.1)$$

Acest rezultat justifică neglijarea interacției gravitaționale față de interacția electrică în problema considerată - chiar admițând că cele două corpuri ar avea mase mult mai mari și încărcări electrice mult mai

mici decât cele luate în considerare în estimarea de mai sus.

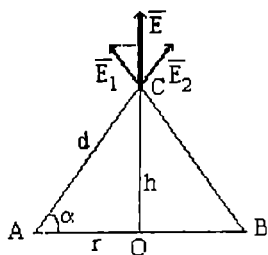


Fig.6.1.

ținând cont că, pentru două sarcini egale  $Q$  dispuse în punctele  $A$  și  $B$  ca în fig.6.1. intensitatea  $\vec{E}$  a câmpului electric într-un punct  $C$  aflat pe mediatoarea segmentului  $AB$  este rezultanta intensității câmpurilor electrice generate de cele două sarcini  $\vec{E}_1$  și  $\vec{E}_2$ .

Cum din motive evidente  $E_1 = E_2$ ,  $\vec{E}$  este colinear cu mediatoarea segmentului  $AB$ . Componentele paralele cu  $AB$  ale intensităților  $\vec{E}_1$  și  $\vec{E}_2$  se anulează reciproc astfel încât:

$$E = 2 \cdot \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot d^2} \cdot \sin \alpha = \frac{Q \cdot h}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot (h^2 + r^2)^{3/2}} \quad (6.2)$$

Potențialul electric al punctului C este:

$$V = \frac{2 \cdot Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot d} \quad (6.3)$$

Dacă se divide mental inelul în  $2n$  porțiuni identice, pe fiecare din acestea se află sarcina  $q/2n$ ; fiecare dintre « perechile » de sarcini diametral opuse generează câmpul:

$$E_{\text{pereche}} = \frac{2 \cdot \frac{q}{2 \cdot n} \cdot h}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 (h^2 + r^2)^{3/2}} \quad (6.4)$$

Sumând intensitățile colineare ale câmpurilor produse de fiecare din cele  $n$  perechi, în punctul aflat pe perpendiculara pe planul inelului în centrul acestuia, la distanța  $h$  de plan, intensitatea câmpului electric este:

$$E_{\text{inel}} = \frac{q \cdot h}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot (h^2 + r^2)^{3/2}} \quad (6.5)$$

În același punct, potențialul câmpului electrostatic creat de inel este:

$$V(h) = \frac{2 \cdot \frac{q}{2 \cdot n} \cdot n}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \sqrt{h^2 + r^2}} = \frac{q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \sqrt{h^2 + r^2}} \quad (6.6)$$

Întrucât viteza inițială și forța de interacție sunt colineare cu perpendiculara pe planul inelului în centrul acestuia, mișcarea corpului punctiform se va desfășura de-a lungul acestei drepte.

Atunci când corpul și inelul se află la distanță foarte mare unul de altul, energia totală a sistemului este dată de energia cinetică a corpului punctiform

$$W_{\text{cinetic}} = \frac{m \cdot v^2}{2} \quad (\text{energia potențială de interacție}$$

electrostatică este nulă). Pe măsură ce corpul se apropie de planul inelului intensitatea câmpului și forța de interacție cresc ; viteza corpului scade iar viteza inelului - inițial nulă - crește. Câtă vreme viteza corpului este mai mare decât a inelului distanța dintre obiecte scade; când viteza inelului este mai mare distanța dintre acesta și corp crește. Minimul distanei dintre cele două obiecte se atinge atunci când viteza relativă a celor doua obiecte este nulă (cele două obiecte au viteze absolute egale). Legea de conservare a impulsului scrisă pentru situația în care

cele două obiecte au viteze  $v'$  egale se scrie sub forma:

$$m \cdot v = 2 \cdot m \cdot v' \quad (6.7)$$

$$\text{\u015fi deci : } v' = \frac{v}{2} \quad (6.8)$$

\u00c2n pozi\u021bia \u00een care s-a realizat distan\u021ba minim\u0103,  $h_{\text{minim}}$  energia total\u0103  $W(h_{\text{minim}})$  a sistemului, alc\u0102tuit\u0103 din energiile cinetice ale obiectelor \u015fi energia de respingere electrostatic\u0103 are expresia:

$$W(h_{\text{minim}}) = V(h_{\text{minim}}) \cdot q + 2 \cdot \frac{m \cdot \left(\frac{v}{2}\right)^2}{2} \quad (6.9)$$

\u021cin\u0102nd cont de rela\u021biile (6.6) \u015fi (6.9) \u015fi de conservarea energiei \u00een sistemul considerat, se g\u0103se\u015fte c\u0103:

$$h_{\text{minim}} = \sqrt{\left(\frac{q^2}{\pi \cdot \epsilon_0 \cdot m \cdot v^2}\right)^2 - r^2} \quad (6.10)$$

Dac\u0103  $\frac{q^2}{\pi \epsilon_0 m v^2} > r$  distan\u021ba minim\u0103 ap\u0103rut\u0103 din rela\u021bia (6.10) se realizeaz\u0103 de fapt. Dup\u0103 atingerea distan\u021bei minime, inelul se deplaseaz\u0103 cu vitez\u0103 mai mare dec\u0103t corpul; \u00een continuare, viteza inelului cre\u015fte iar a

corpului scade. După un timp suficient de lung, corpul va avea viteză nulă iar inelul se va deplasa cu viteza  $v$ .

Dacă  $\frac{q^2}{\pi\epsilon_0 m v^2} = r$ , corpul capătă viteză egală cu inelul

chiar în situația în care se află în planul acestuia, în centrul său. Ansamblul se va deplasa cu viteza  $v/2$  un timp indefinit; situația are semnificația unei ciocniri plastice.

Dacă  $\frac{q^2}{\pi\epsilon_0 m v^2} < r$ , distanța minimă dată de relația

(6.10) nu are sens; corpul trece prin centrul inelului și situația vitezelor egale nu se realizează. După trecerea prin centrul inelului, viteza corpului - care a scăzut până când corpul a atins planul inelului - începe să crească datorită respingerii electrostatice. În același timp viteza inelului care a crescut până în momentul în care particula a trecut prin planul inelului, începe să scadă. După un timp suficient de mare, când distanța dintre inel și corp este din nou infinită, viteza corpului este din nou  $v$  iar inelul este din nou în repaus.

**6.2.** *A very small spherical body A of mass  $m$ , electrically charged with  $q$ , hangs on an insulating thread of length  $l = 1\text{m}$ . An other very small body electrically charged with  $-q$  is slowly brought nearer to A so that the centers of A and B remain on the same horizontal. When the distance between the bodies is  $d = 4\text{cm}$  and A is  $s \ll l$  apart of his initial position, the body B suddenly attracts A.*

*a) Determine the limits of stable equilibrium for the body A.*

*b) The body A is put in a vertical glass tube closed at the bottom; then, on top of the body A, is placed an identical body C. Determine the distance between A and C bodies at equilibrium. The friction between bodies C and the tube is negligible.*

*Un corp A de dimensiuni foarte mici, de masă  $m$  și sarcină  $q$  este suspendat în centrul său de masă de un fir inextensibil și izolator având lungimea  $l = 1\text{m}$ . Un*

*alt corp B având de asemenea dimensiuni foarte mici și sarcină  $-q$  este apropiat foarte lent de A astfel încât centrele celor două corpuri sunt tot timpul pe aceeași orizontală. În situația în care distanța dintre corpuri este  $d = 4\text{cm}$  și corpul A s-a deplasat față de poziția sa inițială de echilibru cu  $s \ll l$ , corpul A este atras brusc de corpul B.*

*A.Să se determine limitele echilibrului stabil pentru corpul A.*

*B, Corpul A este introdus într-un tub de sticlă așezat vertical și închis în partea interioară ; apoi se introduce deasupra corpului A un corp identic C. La ce înălțime  $h$  se va afla corpul C față de A la echilibru. Se neglijează frecarea dintre corpul C și tub.*

## **REZOLVARE**

Există numeroase probleme de electricitate în care se vorbește despre pendule electrostatice ; în enunțuri se presupune – de regulă – că pendulul este în echilibru. Situația de echilibru nu poate fi însă postulată pentru orice situație imaginabilă. Oricine a



făcut un experiment de atracție electrostatică, chiar și unul simplu de atracție a unei mici bucățele de hârtie de către un obiect de plastic electrizat prin frecare, a constatat că există situații de interacție cu echilibru și situații în care atracția este « explozivă », obiectele electrizate lipindu-se brusc unul de altul.

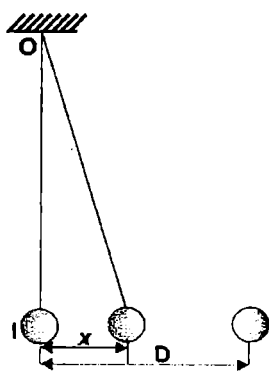


Fig.6.2.

Pentru situația descrisă în enunț, atunci când particula B se afla la distanță fixă  $D$  față de verticala punctului de suspensie al pendulului și pe orizontala punctului A (de exemplu dacă particula B poate culisa fără frecare pe un suport vertical) asupra particulei A aflată la o distanță variabilă  $x \in (0, D)$  față de

OI (Figura 6.2) acționează forța de greutate și forța electrică determinând momentul total față de O:

$$M(x) = mgx - \frac{q^2 \sqrt{l^2 - x^2}}{4\pi\epsilon(D-x)^2} \quad (6.11)$$

În cazul în care - conform enunțului -  $D \ll l$ , (5.1) devine:

$$M(x) = \frac{q^2}{4\pi\epsilon} \left[ \frac{4\pi\epsilon mg}{q^2} x - \frac{l}{(D-x)^2} \right] \quad (6.12)$$

Momentul care acționează asupra pendulului pentru  $x$  variind în domeniul  $0 < x < D$  este negativ atât pentru  $x \rightarrow 0$  cât și pentru  $x \rightarrow D$ ; momentul atracției electrostatice domină momentul greutatei în ambele zone. Situația de echilibru se poate realiza numai dacă există poziții în care  $M(x) = 0$ . Funcția

$$f(x) = Kx - \frac{l}{(D-x)^2}; K = \frac{4\pi mg \epsilon}{q^2} \text{ are un unic extrem}$$

(maxim) pentru:

$$x_E = D - \sqrt[3]{\frac{2l}{K}} \quad (6.13)$$

Valoarea funcției  $f(x)$  în acest punct este:

$$f_E = f(x_E) = \frac{KD}{\sqrt[3]{\left(\frac{2l}{K}\right)^2}} \left( \sqrt[3]{\left(\frac{2l}{K}\right)} - \frac{3l}{KD} \right) \quad (6.14)$$

Dacă valoarea maximă,  $f_E$ , a funcției  $f(x)$  este negativă, momentul (6.12) este negativ pentru orice

valoare permisă a distanței  $x$  și nu există poziție de echilibru pentru distanța  $D$  considerată. Dependența momentului de poziție este reprezentată pentru acest caz de curba (a) din Figura 6.3.

Dacă valoarea maximă  $f_E$  a funcției  $f(x)$  este pozitivă, există două poziții  $x_1 \in (0, x_E)$  și respectiv  $x_2 \in (x_E, D)$  în

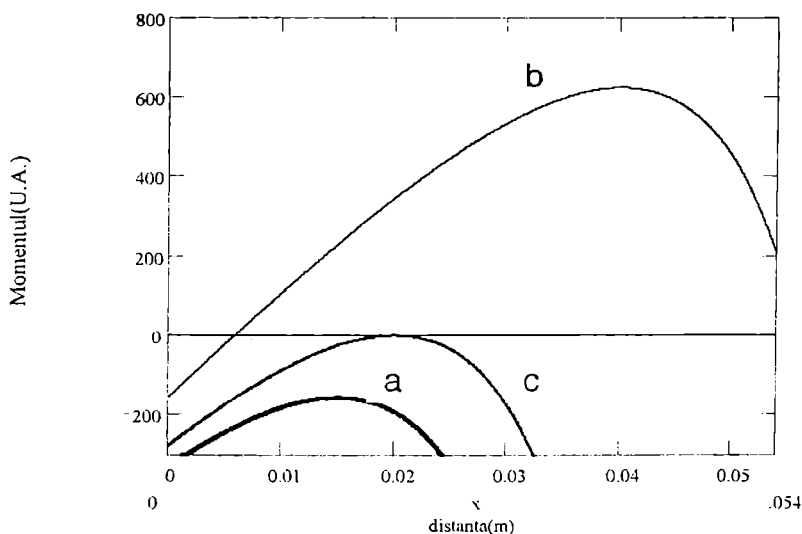


Figura 6.3.

care momentul se anulează. Situația este reprezentată de curba (b) din Figura 6.3. În cazul în care  $f_E = 0$ , există o unică poziție,  $x = x_E$  pentru care momentul se

anulează. Situația, reprezentată de curba (c) din Figura 6.3., se realizează pentru  $D_0 = \frac{3I}{K} \sqrt[3]{\frac{2I}{K}}$ . Dacă în (6.13)  $x_E < 0$  și deci  $f(x)$  este monoton descrescătoare cum  $f(0) < 0$  pentru orice distanță inițială, momentul forței electrice va fi dominant.

În concluzie, pentru distanțe  $D$  suficient de mari  $D > D_0$ , există două poziții de echilibru dintre care aceea care se realizează pentru distanța mai mică este o poziție de echilibru stabil (deplasând corpul A din poziția de echilibru, momentul apărut tinde să-l readucă în poziția de plecare). Pentru distanța  $D = D_0$  există o unică poziție de echilibru; delăsarea oricât de mică față de această poziție produce deplasarea « explozivă » a corpului A spre corpul B. Pentru distanțe  $D < D_0$  nu este posibilă realizarea situației de echilibru a pendulului datorită tăriei interacției electrostatice. Atunci când, plecând de la infinit, corpul B este apropiat foarte lent de corpul A, pendulul ia - pentru distanțe  $D < D_0$  - poziții de echilibru stabil. Ultima poziție de echilibru posibilă se realizează pentru  $D = D_0$ ; la

distanțe mai mici echilibrul este imposibil. Situația descrisă în problemă se referă la această poziție pentru care simultan, momentul și derivata sa se anulează. Impunând aceste două condiții și folosind notațiile din enunț:  $x = s$ ,  $d = D_0 - s = 4\text{cm}$  rezultă:

$$M(s) = mgs - \frac{q^2}{4\pi\epsilon d^2} = 0 \quad (6.15)$$

$$\text{și deci } K = \frac{l}{d^2 s}. \quad (6.16)$$

$$\text{Din relația (6.13) rezultă } K = \frac{2l}{d^3} \quad (6.17)$$

Comparând relațiile (6.16) și (6.17) pot fi determinate valorile  $s = 2\text{cm}$  și  $K = (1/32)10^6\text{m}^{-2}$ .

Domeniul de stabilitate a echilibrului sistemului de particule A,B având geometria, masele și sarcinile descrise în problemă se realizează pentru distanțe mai mari de  $6\text{cm}$  între particula B și dreapta Ol. Problema se poate rezolva și prin analiza energiei potențiale a sistemului :

$$W(x) = mg\left[l - \sqrt{l^2 - x^2}\right] - \frac{q^2}{4\pi\epsilon(D-x)} \quad (6.18)$$

care devine - în condițiile enunțului :

$$\dot{W}(x) = \frac{q^2}{4\pi\epsilon} \left( K \frac{x^2}{2l} - \frac{1}{D-x} \right) \quad (6.19)$$

Situația « explozivă » descrisă în problemă se realizează pentru cazul în care cele două derivate ale energiei se anulează pentru aceeași distanță adică pentru cazul în care energia ca funcție de distanță are un punct de inflexiune pe orizontală.

b) La înălțimea  $h$  condiția de echilibru înseamnă:

$$mg = \frac{q^2}{4\pi\epsilon h^2} \quad (6.20)$$

$$\text{din care rezultă: } h = \frac{1}{\sqrt{K}} = 4 \cdot \sqrt{2} \text{ mm.} \quad (6.21)$$

**6.3.** *A very small magnet of mass  $m$  hangs on a thread of length  $l = 1\text{m}$ . An other very small magnet  $B$  is slowly brought nearer to  $A$  so that the axes of magnets  $A$  and  $B$  remain on the same horizontal. When the distance between the magnets is  $d = 4\text{cm}$ , and the magnet  $A$  is  $s = 1\text{cm}$  apart of his initial position, the magnet  $A$  is suddenly attracted by the magnet  $B$ .*

a) The dependence on distance of the force of interaction between the magnets is given by the relation  $f(x) = -K/x^n$ . Determine the condition of equilibrium for the magnet A. Determine the limits of the stable equilibrium for the magnet A. Using the given data, determine the value of exponent  $n$ .

b) The magnet B is put in a vertical glass tube closed at the bottom ; then on top of the magnet B is placed the magnet A so that the magnets repulse. Determine the distance between the magnets at equilibrium. The friction between the magnet A and the tube is negligible ; the magnet A cannot turn inside of tube.

Un magnet A de dimensiuni foarte mici și de masă  $m$  este atârnat în centrul său de masă de un fir având lungimea  $l=1m$ . Apoi, un alt magnet B având de asemenea dimensiuni foarte mici este apropiat foarte lent astfel încât axele celor doi magneți sunt tot timpul pe aceeași orizontală. În poziția în care distanța dintre magneții A și B este  $d = 4cm$  și magnetul A s-a

deplasat față de poziția inițială cu  $s=1\text{ cm}$ , magnetul A este atras brusc de magnetul B.

a) Se știe că forța de interacție dintre magneți depinde de distanța dintre aceștia după relația :  $f(x)=-K/x^n$ . Să se scrie condiția de echilibru pentru magnetul A. Să se determine limitele existenței echilibrului stabil pentru magnetul A. Utilizând datele din enunț, să se determine valoarea exponentului  $n$ .

b) Magnetul B este introdus într-un tub de sticlă așezat vertical și închis în partea inferioară, iar apoi se introduce magnetul A deasupra magnetului B astfel încât magneții să se respingă. La ce înălțime  $h$  se va afla magnetul A deasupra magnetului B în situația de echilibru?(Se neglijează frecarea dintre magnet și tub; magneții nu se pot răsuci în tub).

## REZOLVARE

Dacă magnetul B se află la distanță fixă  $D \ll l$  față de verticala punctului de suspensie al pendulului (Figura 6.4)., momentul care acționează asupra pendulului este ( vezi și problema anterioară):



$$M(x) = mgx - \frac{K}{(D-x)^n} \quad (6.22)$$

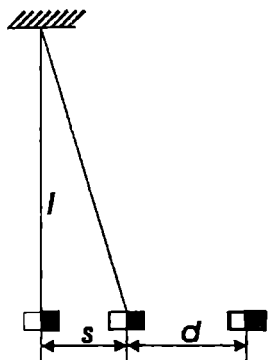


Figura 6.4.

Interacția magnetică este dominantă atâta la valori mici cât și la valori mari ale distanței corpului A față de verticala punctului de suspensie al firului;

$$M(x \rightarrow 0) < 0, M(x \rightarrow D) < 0$$

Existența pozițiilor de echilibru este posibilă numai dacă  $M(x)=0$ .

Întrucât derivata momentului:

$$M'(x) = mg - \frac{Kln}{(D-x)^{n+1}} \quad (6.23)$$

are o unică soluție pozitivă:

$$x_E = D - \left( \frac{Kln}{mg} \right)^{\frac{1}{n+1}} \quad (6.24)$$

existența poziției de echilibru este posibilă numai dacă  $M(x_E) \geq 0$ . Ca și în problema anterioară în cazul în care  $M(x_E) > 0$  există două poziții de echilibru,  $x_1$  și  $x_2$  din care, în condițiile problemei, aceea care se realizează corespunde unei distanțe  $x$  mai mici față de verticala

punctului de suspensie. Dacă distanța  $D$  este mică și  $M(x_E) < 0$ , nu există poziție de echilibru a sistemului. Situația de atracție « explozivă » din problemă se referă la situația în care  $M(x_E) = 0$ , caz în care deplasarea oricât de mică în orice direcție a corpului A produce atracția spre B. În condițiile enunțului,  $x = s$ ,  $D = s + d$  iar relațiile (6.22) și (6.23) devin:

$$\begin{cases} mgs - l \frac{K}{d^n} = 0 \\ mg - \frac{Kln}{d^{n+1}} = 0 \end{cases} \quad (6.25)$$

din care rezulta prin împărțire  $n = d/s = 4$

b) În situația din problemă:

$$mg = \frac{K}{h^4}, h = \sqrt[4]{\frac{K}{mg}} = d \sqrt[4]{\frac{s}{l}} = \frac{4}{\sqrt{10}} \text{ cm}. \quad (6.26)$$

**6.4.A.** *A body of mass  $m$  and charge  $q$  is suspended at the end of an insulating thread of length  $l$ ; the other end of the thread is fixed. The assembly is placed in a uniform electrical field of strength  $E$ , having a vertical direction. Determine the period of the conic pendulum built this way as a function of: the distance  $x$  between*

*the rotation plane of the body and the fixing point and the quantities  $m$ ,  $q$ ,  $E$  and  $g$ .*

**B.** *The dielectric properties of the substance are related to the presence of permanent or induced electrical dipoles - these being pairs of charges  $+q$ ,  $-q$  separated by distance  $x$ . For each dipole we define the dipole moment as a vector  $\vec{p}$ ,  $p = q \cdot x$ , oriented from the charge  $-q$  to the charge  $+q$ . The dipole moment of the volume unit is called polarization  $\vec{P}$ . Applying an electrical field of strength  $E$  on a material in which appears the polarization  $P$ , between its characteristic quantities there will be the relation:  $\varepsilon E = \varepsilon_0 E + P$   $\varepsilon$  and  $\varepsilon_0$  being the dielectric constants of the material and of the vacuum, respectively. Determine the light speed in the atomic hydrogen in normal conditions of pressure ( $p_0$ ) and temperature ( $T_0$ ). Consider that the electron trajectory around the nucleus is circular of radius  $a_B$ , and that the application of the electrical field  $E$  doesn't change this radius. Also consider that under the action of the electrical field the separation  $x$  of the centers of positive and negative charges are very small, so that*

$(x/a_B)^2 \approx 0$ . The relative magnetic permeability of the hydrogen  $\mu_r = 1$ . There are known:  $T_0 = 273\text{K}$ ,  $p_0 = 10^5 \text{ N/m}^2$ ,  $k_B = 1,38062 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$ ,  $a_B = 0,52917 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ ,  $c = 2,99792 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ .

A. Un corp de masă  $m$  și sarcină  $q$  este legat la un capăt al unui fir de lungime  $l$ ; celălalt capăt al firului este fixat. Ansamblul este situat într-un câmp electric uniform de intensitate  $E$ , având direcție verticală. Să se determine perioada pendulului conic astfel construit în funcție de : distanța  $x$  dintre planul de rotație al corpului și punctul de fixare, mărimile  $m$ ,  $q$ ,  $E$  și  $g$ .

B. Proprietățile dielectrice ale substanței sunt legate de prezența dipolilor electrici permanenți sau induși - aceștia fiind perechi de sarcini  $+q$ ,  $-q$  separate printr-o distanță  $x$ . Pentru fiecare dipol se definește momentul dipolar ca fiind un vector orientat de la sarcina  $-q$  la sarcina  $+q$  de modul  $p = qx$ . Momentul dipolar al unității de volum se numește polarizare  $\vec{P}$ . La aplicarea unui câmp electric de intensitate  $E$  asupra unui material în care apare polarizarea  $P$ , între

mărimile care îl caracterizează se stabilește relația :  
 $\varepsilon E = \varepsilon_0 E + P$ ,  $\varepsilon$  și  $\varepsilon_0$  fiind respectiv constantele  
dielectrice ale materialului și vidului.

Să se determine viteza luminii în hidrogenul atomic aflat în condiții normale de presiune ( $p_0$ ) și temperatură ( $T_0$ ). Se va considera că electronul descrie o traiectorie circulară de rază  $a_B$  în jurul nucleului și că raza acestei traiectorii nu se modifică la aplicarea câmpului electric  $E$ . Se va considera de asemenea că, sub acțiunea câmpului electric separarea  $x$  a centrelor sarcinilor pozitive și negative este foarte mică, astfel încât  $(x/a_B)^2 \approx 0$ . Pentru hidrogenul atomic, permeabilitatea magnetică relativă este  $\mu_r = 1$ . Se consideră cunoscute:  $T_0 = 273K$ ,  $p_0 = 10^5 N/m^2$ ,  $k_B = 1,38062 \cdot 10^{-23} J/K$ ,  $a_B = 0,52917 \cdot 10^{-10} m$ ,  $c = 2,99792 \cdot 10^8 m/s$ .

## REZOLVARE

Într-o modelare foarte simplă, se propune calculul indicelui de refracție și a vitezei luminii în hidrogen; Atomul de hidrogen, văzut în modelul Bohr, este alcătuit din nucleu și un electron care gravitează în

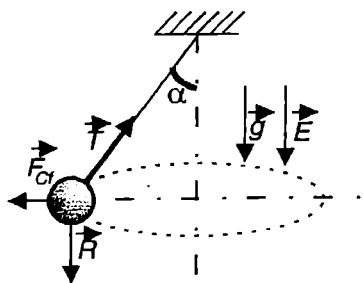


Figura 6.5.

jurul nucleului pe o traiectorie circulară ; la aplicarea unui câmp electric exterior planul traiectoriei electronului se deplasează astfel încât

nucleul nu mai este conținut

în acest plan. Dacă - de exemplu - câmpul electric exterior este pulsant, planul traiectoriei oscilează de o parte și de alta a nucleului rămânând perpendicular pe direcția câmpului electric; aceasta este modalitatea în care se produce interacția dintre materie și câmpul electromagnetic. Dipolii electrici apăruiți datorită deplasării planului traiectoriei electronului față de nucleu sunt responsabili de proprietățile dielectrice ale materialului.

**A.** Pentru înțelegerea comportamentului dipolilor induși, se începe cu o modelare mecanică simplă. Corpul de masă  $m$  și sarcină  $q$  este supus acțiunii a patru forțe : tensiunea din fir  $\vec{T}$ , forța centrifugă  $\vec{F}$ , greutatea  $\vec{G}$ ,  $G=mg$  și forța electrică  $\vec{F}_E$ ,  $F_E = qE$  -

ultimile două acționând pe aceeași direcție. În funcție de sensul și modulul rezultantei  $\vec{R} = \vec{G} + \vec{F}_E$  a acestor două forțe mișcarea circulară a corpului se desfășoară într-un plan care conține capătul fix P al firului (dacă  $R_1 = 0$ ), într-un plan aflat sub punctul P dacă  $R_2 = G + F_E$ , sau  $R_2 = G - F_E$  ( $G > F_E$ ) și respectiv într-un plan aflat peste punctul P dacă  $R_3 = F_E - G$  ( $G < F_E$ ).

Dacă  $r$  este raza traiectoriei circulare descrise de corp iar  $x$  este distanța dintre planul traiectoriei și punctul P, condiția de staționaritate a mișcării pendulului conic este :

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{r}{x} = \frac{m\omega^2 r}{R} \quad (6.27)$$

Perioada mișcării pendulului conic este dată de expresia generală:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{mx}{R}} \quad (6.28)$$

Valorile explicite ale perioadei sunt date respectiv de:

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{mx}{mg + qE}} \quad (6.29)$$

pentru cazul forței electrice îndreptate în jos,

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{mx}{mg - qE}} \quad (6.30)$$

pentru forță electrică îndreptată în sus dar mai mică în modul decât greutatea și

$$T_3 = 2\pi \sqrt{\frac{mx}{-mg + qE}} \quad (6.31)$$

pentru cazul în care forța electrică îndreptată în sus este mai mare decât greutatea (caz în care pânza pendulului conic are vârful în jos).

Dacă  $G = F_E$  mișcarea este circulară pentru orice  $\omega$ , perioada mișcării fiind deci oarecare.

**B.** Când se aplică un câmp electric extern de intensitate  $\vec{E}$ , planul orbitei electronului din atomul de hidrogen se deplasează pe o distanță  $x$  pe direcția liniilor de câmp; traiectoria nu-și modifică forma. Analogia cu

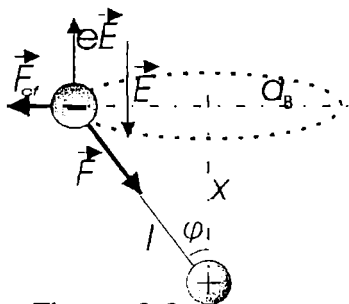


Figura 6.6.

pendulul conic de la punctul anterior al problemei se



poate face prin punerea în corespondență a tensiunii din fir cu forța de interacție electrostatică dintre nucleu și electron. Staționaritatea sistemului se realizează dacă :

$$\begin{cases} \cos \varphi = \frac{x}{l} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a_B^2}} = \frac{x}{a_B \sqrt{(x/a_B)^2 + 1}} \cong \frac{x}{a_B} \\ \cos \varphi = \frac{eE}{(e^2 / 4\pi\epsilon_0 l^2)} = \frac{4\pi\epsilon_0 E a_B^2}{e} \end{cases} \quad (6.31)$$

momentul dipolar apărut datorită deplasării planului orbitei electronului este dat de :

$$p = xe = 4\pi\epsilon_0 a_B^3 E \quad (6.32)$$

Ținând cont de ecuația de stare pentru gaz,  $p_0 V = N k_B T_0$  ( $N$  fiind numărul de atomi ), polarizarea are expresia :

$$P = \frac{p_0}{k_B T_0} \cdot 4\pi\epsilon_0 E a_B^3 \quad (6.33)$$

Cum pe de altă parte, așa cum rezultă din enunț:

$$P = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) E \quad (6.34)$$

rezultă pentru permitivitatea dielectrică relativă a gazului expresia:

$$\epsilon_r = \frac{p_0}{k_B T_0} \cdot 4\pi a_B^3 + 1 \quad (6.35)$$

Hidrogenul nu are proprietăți magnetice speciale ( $\mu_r = 1$ ), astfel că , pentru datele numerice din enunț,

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}} = \frac{c}{\sqrt{1 + \frac{4\pi a_B^3 \rho_0}{k_B T_0}}} \cong c \left( 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi a_B^3 \rho_0}{k_B T_0} \right) \quad (6.36)$$

Rezultatul numeric rezultând din formula (6.36),  $v = 2,99785 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ , este într-o concordanță remarcabil de bună cu măsurările de indice de refracție pentru hidrogen, certificând faptul că modelul simplu propus și utilizat în problemă este corect.

*6.5. A metallic ring of radius  $a$ , made by a wire of diameter  $b$ ,  $b \ll a$ , rotates about an axis perpendicular to an uniform magnetic field having the magnetical induction  $\vec{B}$ . The angular speed decrease slowly only because of thermal dissipation of energy. Knowing the density of ring material  $d$ , his electrical resistivity  $\rho$  and the induction  $B$  of magnetic field, determine the time it takes the angular speed to decrease to  $1/e$  of its original value.*

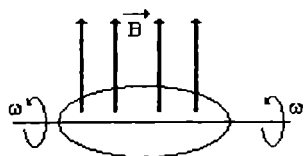


Figura 6.7.

Un inel metalic de rază  $a$ , făcut din sârmă subțire de diametru  $b$ ,  $b \ll a$ , se rotește în jurul unui diametru într-un câmp magnetic uniform de inducție  $\vec{B}$  perpendicular pe

axa de rotație. Viteza unghiulară scade foarte lent exclusiv datorită disipării energiei prin efect Joule. Dacă se cunosc densitatea materialului inelului  $d$  și rezistivitatea lui electrică  $\rho$  precum și valoarea inducției câmpului magnetic  $B$ , să se determine timpul în care viteza unghiulară a inelului scade de  $e$  ori.

## REZOLVARE

Dacă viteza unghiulară scade lent, se poate considera că în cursul unei rotații ea este constantă. În aceste condiții și dacă  $\varphi$  este unghiul dintre normala la planul inelului și direcția câmpului magnetic în poziția inițială, fluxul magnetic prin inel ca funcție de timpul  $t$  are expresia:

$$\Phi(t) = \vec{B} \cdot \vec{S} = \pi \cdot a^2 \cdot B \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi) \quad (6.37)$$

Tensiunea electromotoare apărută în inel va fi:

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = \pi \cdot a^2 \cdot B \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) \quad (6.38)$$

Cum rezistența firului inelului este:

$$R = \rho \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot a}{\pi \cdot \frac{b^2}{4}} \quad (6.39)$$

rezultă succesiv pentru cantitatea de căldură  $Q$  apărută în inel în unitatea de timp (puterea termică medie disipată, ca modul) expresiile:

$$\left\{ \begin{aligned} Q &= \frac{1}{T} \cdot \int_0^T \frac{e^2}{R} \cdot dt = \frac{\pi}{16} \cdot \frac{a^3 \cdot b^2 \cdot B^2 \cdot \omega^3}{\rho} \cdot \int_0^T \sin^2(\omega \cdot t + \varphi) dt \\ Q &= \frac{\pi}{32} \cdot \frac{a^3 \cdot b^2 \cdot B^2 \cdot \omega^3}{\rho} \cdot \int_0^T (1 - \cos 2(\omega \cdot t + \varphi)) dt = \\ &= \frac{\pi}{32} \cdot \frac{a^3 \cdot b^2 \cdot B^2 \cdot \omega^3}{\rho} \cdot T \\ Q &= \frac{\pi^2}{16} \cdot \frac{a^3 \cdot b^2 \cdot B^2 \cdot \omega^2}{\rho} = K \cdot \omega^2 \end{aligned} \right. \quad (6.40)$$

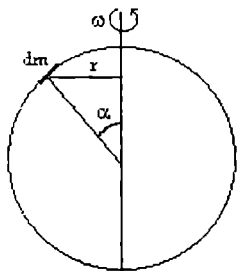


Figura 6.8.

Pentru calculul energiei cinetice de rotație a inelului (care este disipată prin apariția căldurii Joule) este necesară cunoașterea

momentului de inerție  $J$  al inelului care se rotește în jurul unui diametru. Așa cum rezultă din Fig.6.8, pentru porțiunea de masă  $dm = \frac{\pi \cdot b^2}{4} \cdot d \cdot a \cdot d\alpha$  din inel, aflată la distanță  $r = a \sin(\alpha)$  de axa de rotație, momentul de inerție este dat de  $dJ = a^2 \sin^2(\alpha) dm$  astfel că momentul de inerție al inelului este:

$$J = \frac{\pi \cdot a^3 \cdot b^2 \cdot d}{4} \int_0^{2\pi} \sin^2(\alpha) d\alpha = \frac{\pi \cdot a^3 \cdot b^2 \cdot d}{8} \int_0^{2\pi} (1 - \cos(2 \cdot \alpha)) d\alpha \quad (6.41)$$

$$J = \frac{\pi^2 \cdot b^2 \cdot a^3 \cdot d}{4} = \frac{m \cdot a^2}{2}$$

unde  $m$  este masa inelului.

Întrucât scăderea energiei cinetice de rotație se face lent, prin apariția de căldură, se poate scrie că:

$$\Delta E_{cin} = -Q \cdot \Delta t \quad (6.42)$$

sau,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{J \cdot \omega^2}{2} \right) = -Q = -K \cdot \omega^2 \quad (6.43)$$

care este o ecuație diferențială cu variabile separabile.

Din relația (5.33) rezultă:

$$\frac{d\omega}{\omega} = -\frac{K}{J} dt \text{ sau } \frac{d\omega}{\omega} = -\frac{dt}{\tau} \text{ unde } \tau = \frac{J}{K} \quad (6.44)$$

Dacă  $\omega_0$  este valoarea vitezei unghiulare a inelului la momentul inițial, din integrarea ecuației (5.34) rezultă legea de variație a vitezei unghiulare:

$$\omega(t) = \omega_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (6.45)$$

Timpul în care viteza unghiulară a inelului scade de e ori este chiar  $\tau$ , expresia timpului cerut este :

$$\tau = -\frac{\pi^2 \cdot b^2 \cdot a^3 \cdot d}{4} \cdot \frac{16 \cdot \rho}{\pi^2 \cdot b^2 \cdot a^3 \cdot B^2} = \frac{4 \cdot d \cdot \rho}{B^2} \quad (6.46)$$

Pentru o situație fizică imaginabilă, de exemplu un inel de cupru pentru care  $d = 8890 \text{ kg/m}^3$  și  $\rho = 1,7 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot m$  dispus într-un câmp magnetic cu  $B=0,02T$ , rezultă pentru timpul cerut valoarea  $\tau=1,5 \text{ s}$ . Pentru ca situația din problemă să se realizeze practic, ar trebui ca perioada de rotație  $T$  a inelului să fie cu 2-3 ordine de mărime mai mică, adică  $T \approx 10 \text{ ms}$ ; o astfel de perioadă conduce la o turație de circa  $100 \text{ rotații/s}$  - valoare realizabilă practic (turația unui motor de mașină accelerat).

## **CAPITOLUL 7. ELECTRICITATE**

**Câmpul electric în dielectrici.**

**Electric Field in Dielectrics.  
approach.**

**A macroscopic**

**© ȘTEFAN ANTOHE, 1999**

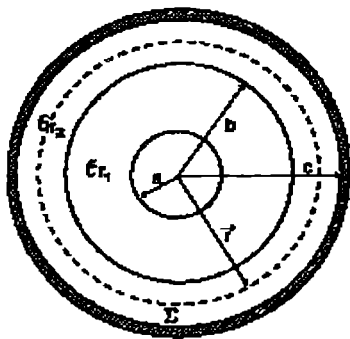


Fig.7.1 Secțiune transversală printr-un cablu coaxial cu dielectricul stratificat

7.1. A coaxial cable having the length  $l$  and the radius of inner and outer electrodes  $a$  and  $c$ , respectively, has the insulator formed from two cylindrical sleeves of dielectric whose relative permittivity are  $\epsilon_{r_1}$  and  $\epsilon_{r_2}$ , respectively. The

radius of cylindrical interface between them is  $b$ . a) Find the capacitance per unit length; b) If the potential difference between the electrodes is  $U$ , find the surface density of polarization charge on the interface between the two dielectrics.

7.1. Un cablu coaxial de lungime  $l$  are dielectricul format din două straturi cilindrice coaxiale cu permitivitățile  $\epsilon_{r_1}$  și  $\epsilon_{r_2}$  așa cum se arată în Fig.7.1. Electroful central este de forma unui cilindru de rază  $a$  iar cel exterior este de asemenea un cilindru coaxial cu primul de rază  $c$ . Interfața dintre cei doi dielectrici este de forma cilindrică de raza  $b$ . Să se determine capacitatea pe unitatea de lungime a cablului. Dacă între electrozi este aplicată tensiunea  $U$  să se afle



*densitatea de sarcină de polarizare prezentă la interfața dintre cele două straturi dielectrice.*

## REZOLVARE

Conductorul central de rază  $a$  și cămașa metalică coaxială de rază  $c$  constituie armăturile unui condensator cilindric cu dielectric stratificat. Când între armături se aplică o diferență de potențial  $V_1 - V_2$ , pe armătura interioară există sarcina  $Q$  distribuită uniform pe suprafața cu densitatea  $\sigma$  astfel încât  $Q = 2\pi a\sigma$  pe fiecare metru de lungime. La o distanța  $r$ , oarecare de axul condensatorului se determină inducția câmpului electric, apelând la legea Gauss:

$$\int_{\Sigma} \vec{D} d\vec{S} = Q_{\text{liber}} \Rightarrow D 2\pi r = 2\pi a\sigma \Rightarrow D(r) = \frac{\sigma a}{r} \quad (7.1)$$

evident cu simetrie radială.

$D(r)$  fiind legat numai de sarcina liberă  $\sigma$ , rezultă pentru cele două medii dielectrice ecuațiile:

$$\varepsilon_0 \varepsilon_{r_1} E_1 = \varepsilon_0 \varepsilon_{r_2} E_2 = D(r) = \frac{\sigma a}{r} \Rightarrow$$

$$E_1(r) = \frac{\sigma a}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r_1} r} \text{ si } E_2(r) = \frac{\sigma a}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r_2} r} \quad (7.2)$$

Deci fără a se cunoaște distribuția sarcinii de polarizare în cele două medii dielectrice se poate calcula câmpul electric în fiecare dintre ele.

Diferența de potențial între armături va fi:

$$V_1 - V_2 = \int_a^c \vec{E} d\vec{r} = \int_a^b \vec{E}_1 d\vec{r} + \int_b^c \vec{E}_2 d\vec{r} = \frac{\sigma a}{\varepsilon_0} \left[ \frac{1}{\varepsilon_{r_1}} \ln \frac{b}{a} + \frac{1}{\varepsilon_{r_2}} \ln \frac{c}{b} \right] \quad (7.3)$$

ca umare capacitatea pe unitatea de lungime a cablului devine:

$$C/l = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{2\pi\sigma\epsilon_0}{\sigma\alpha \left[ \frac{1}{\epsilon_{r_1}} \ln \frac{b}{a} + \frac{1}{\epsilon_{r_2}} \ln \frac{c}{b} \right]} = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_{r_1}\epsilon_{r_2}}{\epsilon_{r_1} \ln \frac{b}{a} + \epsilon_{r_2} \ln \frac{c}{b}} \quad (7.4)$$

parametru foarte important de cunoscut atunci când se discută performanțele cablului folosit la transmisia semnalelor de frecvență înaltă.

b) Dacă tensiunea dintre electrozi este  $U$ , electrodul central poartă sarcina  $CU$  și atunci intensitatea câmpului electric în fiecare strat va fi:

$$\vec{E}_1(r) = \frac{CU}{2\pi\epsilon_0\epsilon_{r_1}lr^2} \vec{r} \text{ respectiv } \vec{E}_2(r) = \frac{CU}{2\pi\epsilon_0\epsilon_{r_2}lr^2} \vec{r} \quad (7.5)$$

În mod corespunzător intensitatea de polarizare în fiecare strat va fi:

$$\vec{P}_1(r) = \frac{(\epsilon_{r_1} - 1)CU}{2\pi\epsilon_{r_1}lr^2} \vec{r} \text{ respectiv } \vec{P}_2(r) = \frac{(\epsilon_{r_2} - 1)CU}{2\pi\epsilon_{r_2}lr^2} \vec{r} \quad (7.6)$$

Cu acestea densitatea de sarcină de polarizare de la interfața dintre cele două straturi dielectrice este:

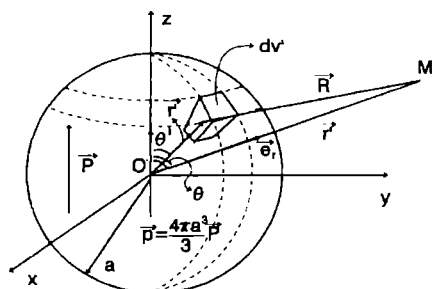
$$\sigma_{P_{12}} = -\vec{n}_{12} \cdot (\vec{P}_2(r) - \vec{P}_1(r)) \Big|_{r=b} = \frac{CU}{2\pi b} \left( \frac{\epsilon_{r_1} - 1}{\epsilon_{r_1}} - \frac{\epsilon_{r_2} - 1}{\epsilon_{r_2}} \right) =$$

$$\frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_{r_1}\epsilon_{r_2}}{\epsilon_{r_1} \ln \frac{b}{a} + \epsilon_{r_2} \ln \frac{c}{b}} \frac{U}{2b} \left( \frac{\epsilon_{r_1} - 1}{\epsilon_{r_1}} - \frac{\epsilon_{r_2} - 1}{\epsilon_{r_2}} \right) = \frac{\epsilon_0(\epsilon_{r_1} - \epsilon_{r_2})}{\epsilon_{r_1} \ln \frac{b}{a} + \epsilon_{r_2} \ln \frac{c}{b}} \frac{U}{b} \quad (7.7)$$

**7.2.** A solid dielectric sphere of radius  $a$  is uniformly polarized having the polarization  $\vec{P}$ . Find the electric field strength and the displacement vector, both inside and outside the sphere.

**7.2.** O sferă dielectrică, de rază  $a$  este uniform polarizată, având intensitatea de polarizare  $\vec{P}$ . Sa se determine intensitatea câmpului electric și inducția câmpului electric în interiorul și exteriorul sferei.

## REZOLVARE



Considerăm o sferă de rază  $a$ , uniform polarizată intensitatea de polarizare fiind  $\vec{P}$ , orientată de-a lungul axei  $Oz$ , Fig.7.2. Calculul câmpului electric într-un punct din

Fig.7.2 Sferă uniform polarizată exteriorul ei la o distanță  $r \gg a$  se poate face apelând la relația:  $\vec{E} = -\text{grad}V_p$ , iar pentru calculul potențialului în exterior se apelează la *principiul superpoziției*. Elementul de volum  $dv'$  centrat pe punctul  $\vec{r}'$  are momentul electric  $d\vec{p} = \vec{P}dv'$  și conform teoremei de echivalență dintre un mic corp polarizat și un dipol electric, el va crea în punctul  $M$  un potențial dat de:

$$dV_p(M) = \frac{d\bar{p} \cdot \bar{R}}{4\pi\epsilon_0 R^3} = \frac{\bar{P}dv' \bar{R}}{4\pi\epsilon_0 R^3} \quad (7.8)$$

În condițiile  $r \gg a \Rightarrow r \gg r'$  și deci  $\bar{R} \approx \bar{r}$  rezultă:

$$dV_p(M) = \frac{\bar{P}dv' \bar{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{\bar{P}dv'}{4\pi\epsilon_0 r^2} \bar{e}_r \quad (7.9)$$

Potențialul în M creat de sfera polarizată va fi:

$$V_p(M) = \int_v \frac{\bar{P}dv' \bar{e}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \bar{P} \int_v \frac{dv' \bar{e}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (7.10)$$

În ecuația (7.10),  $\bar{P}$  se scoate în afara integralei, fiind constant, iar integrala după  $dv'$  conduce la:

$$V_p(M) = \frac{\bar{P} \cdot \frac{4\pi a^3}{3} \bar{e}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\bar{p} \cdot \bar{e}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\bar{P}a^3}{3\epsilon_0 r^2} \bar{e}_r \quad (7.11)$$

unde  $\bar{p} = \bar{P} \frac{4\pi a^3}{3}$  este momentul electric al sferei uniform polarizată. Cu acesta, câmpul electric în punctul M va fi:

$$\begin{aligned} \bar{E}(M) &= -grad V_p = -grad \left( \frac{\bar{p} \cdot \bar{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \right) = -grad \left( \frac{\bar{p} \cdot \bar{e}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right) = \\ &= -grad \left( \frac{\bar{p} \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right) = \frac{2p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \bar{e}_r + \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \bar{e}_\theta = E_r \bar{e}_r + E_\theta \bar{e}_\theta \end{aligned} \quad (7.11)$$

deci în exterior sfera polarizată crează un câmp electric similar cu cel al unui dipol de moment  $\bar{p}$ , plasat în centrul sferei. Imaginea liniilor de câmp în exterior este arătată în Fig. 7.3 a), ele având comportarea identică cu cea a liniilor de câmp electric ale unui dipol plasat în centru sferei, nu numai la distanța mare de centrul sferei ci chiar până la suprafața sferei, microscopic vorbind. Calculul câmpului în interiorul sferei polarizate se face pe baza aceluiași raționament

și anume: se calculează mai întâi potențialul și apoi câmpul.

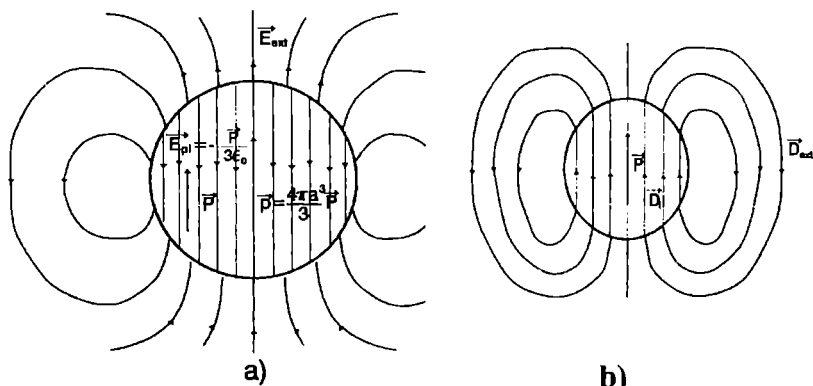


Fig.7.3 Spécurel liniilor de câmp în cazul unei sfere dielectrice uniform polarizată, pentru: a) intensitatea câmpului electric  $\vec{E}$ ; b) pentru inducția câmpului electric  $\vec{D}$ .

Calculul potențialului se face apelând la ecuația Laplace  $\Delta V_{p_i} = 0$ , pentru că în interior nu există sarcini (polarizare uniformă și constantă, deci  $\rho_p = -\text{div}\vec{P} = 0$ ).

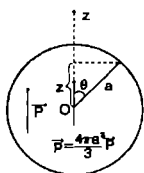


Fig.7.4 Potențialul pe su-prafața unei sfere dielectrice uniform polarizată

Evident rezolvarea ecuației Laplace se face ținând seama de condițiile la limită și anume faptul că în toate punctele de pe suprafața sferei cunoaștem potențialul și câmpul exterior. Potențialul pe suprafața sferei este:

$$V_p(a) = \left. \frac{\bar{p} \cdot \bar{e}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right|_{r=a} = \frac{\bar{p} \cdot \frac{4\pi a^3}{3} \bar{e}_r}{4\pi\epsilon_0 a^2} = \frac{P \cos a}{3\epsilon_0} = \frac{Pz}{3\epsilon_0} \quad (7.12)$$

În cazul acesta potențialul într-un punct de pe suprafața sferei nu depinde decât de coordonata  $z$ , a aceluși punct, Fig.7.4:

$$V_p(a) = \frac{Pz}{3\epsilon_0} \quad (7.13)$$

Conform teoremei unicității, ecuația Laplace în interiorul suprafeței sferice, are o singură soluție pentru potențialul din interiorul ei și aceasta este dată de:

$$\frac{d^2 V_p}{dz^2} = 0 \Rightarrow \frac{dV_p}{dz} = C \Rightarrow V_p = Cz + C'$$

Constantele  $C$  și  $C'$  se determină ținând seama că pentru  $z = 0$  și pe suprafața sferei, (la  $z = \pm a$ ):

$$\begin{cases} V_p(0) = 0 & V_p(0) = 0 = C \cdot 0 + C' \Rightarrow C' = 0 \\ V_p(a) = \frac{Pz}{3\epsilon_0} \Rightarrow V_p(a) = C \cdot a = \frac{Pa}{3\epsilon_0} \Rightarrow C = \frac{P}{3\epsilon_0} \end{cases} \quad (7.14)$$

Deci potențialul în interiorul sferei polarizate uniform este:

$$V_{p_i}(z) = \frac{Pz}{3\epsilon_0} \quad (7.15)$$

Din aceasta rezultă:

$$\vec{E}_{p_i} = -\nabla V_{p_i} = -\frac{\partial V_{p_i}}{\partial z} \vec{e}_z = -\frac{P}{3\epsilon_0} \vec{e}_z = -\frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} \quad (7.16)$$

Deci câmpul electric în interiorul unei sfere uniform polarizate cu  $\vec{P}$  este:

$$\vec{E}_{p_i} = -\frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} \quad (7.17)$$

adică este și el un câmp uniform dacă  $\vec{P}$  este uniformă, și este orientat în sens opus lui  $\vec{P}$ , ca în Fig.7.3 a).

Ecuțiile de trecere sunt pe deplin verificate în acest caz. De exemplu la polul de sus al sferei, intensitatea câmpului în exterior este dată de componenta radială a câmpului de dipol conform ecuației (7.11):

$$E_{p_r}(a) \Big|_{r=a} = \frac{2p \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \Big|_{r=a} = \frac{2p}{4\pi\epsilon_0 a^3} = \frac{2P \frac{4\pi a^3}{3}}{4\pi\epsilon_0 a^3} = \frac{2P}{3\epsilon_0}$$

iar componenta tangențială este:

$$E_{p_r}(r) = \frac{p \sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \Big|_{\theta=0}^{r=a} = 0$$

În interiorul sferei câmpul este de sens opus lui  $P$  și are numai componenta radială fiind:

$$\vec{E}_{p_i} \Big|_{r=a} = -\frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} \quad (7.18)$$

iar componenta tangențială este nulă. Așa cum sugerau ecuațiile de trecere, componenta tangențială a câmpului este continuă, în timp ce componenta normală a câmpului este discontinuă. Pe suprafață componenta câmpului este mai mare decât în interior

și orientată invers așa încât există un salt al componentei normale de:

$$\Delta \vec{E} = \vec{E}_{\rho_r}(a) - \vec{E}_{\rho_r}(a) = \frac{2\vec{P}}{3\epsilon_0} - \left( -\frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} \right) = \frac{\vec{P}}{\epsilon_0} \quad (7.19)$$

salt dat de prezența sarcinii de polarizare pe suprafața sferei, sarcină de polarizare având densitatea  $\sigma_p = \vec{P}\vec{n} = P_n$ .

În ceea ce privește componenta normală a inducției câmpului electric, aceasta este continuă la suprafața sferei.

Într-adevăr:

$$\begin{aligned} \vec{D}_{\text{int}} &= \epsilon_0 \vec{E}_{\text{int}} + \vec{P} = \epsilon_0 \left( -\frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} \right) + \vec{P} = \frac{2\vec{P}}{3} \\ \vec{D}_{\text{ext}} &= \epsilon_0 \vec{E}_{\text{ext}} + \vec{P}_{\text{ext}} = \epsilon_0 \left( \frac{2\vec{P}}{3\epsilon_0} \right) = \frac{2\vec{P}}{3} \end{aligned} \quad (7.20)$$

Componenta normală a inducției câmpului electric la suprafața sferei, uniform polarizată este continuă, spectrul liniilor de câmp fiind arătat în Fig.7.3 b).

**7.3.** *A sphere of radius  $a$ , from a dielectric material characterized by dielectric constant  $\epsilon_r$ , is placed in an uniform electric field  $\vec{E}_0$ . Find the electric field strength,  $\vec{E}$  and the displacement vector  $\vec{D}$ , both inside and outside the sphere.*

**7.3.** *A sfera de rază  $a$ , confecționată dintr-un material dielectric cu permitivitatea  $\epsilon_r$ , este plasată într-un câmp electric uniform de intensitate  $\vec{E}_0$ . Să se determine intensitatea câmpului electric  $\vec{E}$  și inducția electrică  $\vec{D}$  în interiorul și exteriorul sferei dielectrice.*



## REZOLVARE

Să considerăm o sferă dielectrică de permitivitate relativă  $\epsilon_r$  plasată într-un câmp electric uniform de intensitate  $\vec{E}_0$ , câmpul creat de exemplu între plăcile unui condensator plan având ca dielectric vidul Fig.

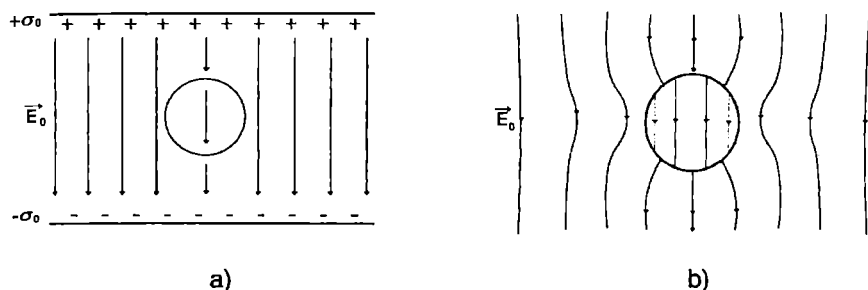


Fig.7.5 Sferă dielectrică plasată într-un câmp electric uniform a); Spectrul liniilor de câmp electric în interiorul și exteriorul unei sfere dielectrice aflată într-un câmp electric uniform b).

7.5 a),b). Sursele acestui câmp adică sarcinile de pe plăci trebuie să fie situate departe de sfera astfel încât ele să nu se deplaseze când introducem sfera dielectrică. Atunci oricare ar fi câmpul din vecinătatea sferei, el va rămâne practic  $\vec{E}_0$  la distanțe mari. Câmpul  $\vec{E}$  nu mai este uniform în vecinătatea sferei deoarece el este suma câmpului uniform  $\vec{E}_0$  al surselor depărtate și câmpul vectorial  $\vec{E}_p$  generat de sfera polarizată:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_{P_i} \quad (7.21)$$

Câmpul  $\vec{E}_p$  așa cum am arătat anterior depinde de polarizarea  $\vec{P}$  a sferei, care la rândul ei depinde de un câmp efectiv  $E$  din interiorul ei în care se află. Deci  $\vec{P}$  va depinde de acest câmp după relația:

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_c \vec{E} = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \vec{E} \quad (7.22)$$

Încă nu știm care este câmpul total  $\vec{E}$ , știm doar că ecuația (7.22) trebuie să se verifice în orice punct din interiorul sferei. Dar dacă polarizarea sferei în câmpul  $\vec{E}$  este  $\vec{P}$ , atunci câmpul creat de polarizarea  $\vec{P}$ , presupusă uniformă în interiorul sferei este: Vezi problema anterioară)

$$\vec{E}_{P_i} = -\frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} \quad (7.23)$$

Din ecuațiile (7.3.1), (7.3.2), (7.3.3) se obține:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 - \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} = \vec{E}_0 - \frac{\epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \vec{E}}{3\epsilon_0} \Rightarrow \vec{E} = \frac{3}{\epsilon_r + 2} \vec{E}_0 \quad (7.24)$$

S-a obținut astfel câmpul total din interiorul sferei în funcție de câmpul  $\vec{E}_0$  care a produs polarizarea ei. Deoarece:

$$\epsilon_r > 1 \Rightarrow \frac{3}{\epsilon_r + 2} < 1$$

adică:  $\vec{E} < \vec{E}_0$ , deci sfera dielectrică a modificat starea de câmp electric în spațiul pe care-l ocupă. Acum polarizarea sferei produsă chiar de acest câmp este:

$$\vec{P} = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \vec{E} = 3\epsilon_0 \left( \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \right) \vec{E}_0 \quad (7.25)$$

Câmpul total în exteriorul sferei se va obține prin însumarea vectorială a câmpului  $\vec{E}_0$  cu câmpul unui

dipol de moment  $\vec{p} = \vec{P} \frac{4\pi a^3}{3}$  plasat în centrul sferei. Deci:

$$\vec{E}_{\text{ext}} = \vec{E}_0 + \frac{2p \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{e}_r + \frac{p \sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{e}_\theta$$

De exemplu, în punctul de jos al sferei din Fig. 7.5. b), ( $r = a$  și  $\theta = 0$ ) se obține:

$$\vec{E}_{\text{ext}, r=a} = \vec{E}_0 + \frac{2p}{4\pi\epsilon_0 a^3} \vec{e}_r = \vec{E}_0 + \frac{2\vec{P} \frac{4\pi a^3}{3}}{4\pi\epsilon_0 a^3} = \vec{E}_0 + \frac{2\vec{P}}{3\epsilon_0}$$

iar  $\vec{P}$  fiind dat de (7.23), rezultă:

$$\vec{E}_{\text{ext}, r=a} = \vec{E}_0 + \frac{2}{3\epsilon_0} 3\epsilon_0 \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \vec{E}_0 = \frac{3\epsilon_r}{\epsilon_r + 2} \vec{E}_0 > \vec{E}_0 \text{ pentru } \epsilon_r > 1$$

În apropierea sferei în exteriorul ei câmpul total este chiar mai mare decât  $\vec{E}_0$  pentru  $\epsilon_r > 1$ . Evident pentru distanțe mari față de sferă ( $r \gg a$ ), câmpul de dipol scade rapid cu distanța și câmpul total se reduce la  $\vec{E}_0$  adică rămâne un câmp uniform așa cum s-a cerut. Fig.7.5. b), arată spectrul liniilor de câmp în acest caz. Și aici se poate constata ușor continuitatea componentei tangențiale a lui  $\vec{E}$  pe suprafața sferei și discontinuitatea componentei normale. De exemplu componenta normală a câmpului chiar în punctul de jos al sferei este:

$$\vec{E}_{\text{ext}, r=a} = \frac{3\epsilon_r}{\epsilon_r + 2} \vec{E}_0$$

în timp ce în interior era:

$$\vec{E} = \frac{3\vec{E}_0}{\epsilon_r + 2}$$

deci există o discontinuitate:

$$\vec{E}_{\text{ext}} - \vec{E}_{\text{int}} = \frac{3(\epsilon_r - 1)}{\epsilon_r + 2} \vec{E}_0$$

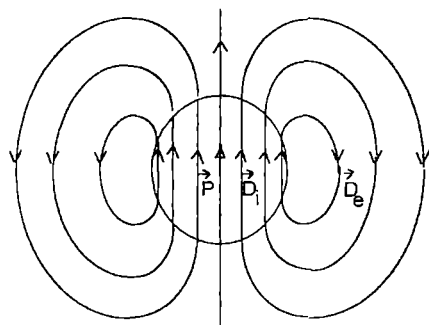


Fig.7.6 Spectrul liniilor de câmp pentru inducția electrică polarizată într-un câmp electric uniform

care este tocmai:  $\frac{\vec{P}}{\epsilon_0}$   
conform relației (7.25).

Discontinuitatea câmpului electric este dată de prezența sarcinilor de polarizare de pe suprafața sferei.

Componenta normală a inducției electrice la suprafața sferei rămâne constantă, Fig.7.6. În interior:

$$\vec{D}_{\text{int}} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 \frac{3}{\epsilon_r + 2} \vec{E}_0 + \frac{3\epsilon_0(\epsilon_r - 1)}{\epsilon_r + 2} \vec{E}_0 = \frac{3\epsilon_0\epsilon_r}{\epsilon_r + 2} \vec{E}_0 = \epsilon_0\epsilon_r \vec{E} = \epsilon \vec{E}$$

În exterior,  $\vec{D}_{\text{ext}} = \epsilon_0 \vec{E}_{\text{ext}} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} = \epsilon \vec{E}$ , pentru  $r = a$  (pe suprafața sferei). Se poate trasa și aici spectrul liniilor de câmp pentru  $\vec{D}$ .

7.4. Into a dielectric sphere of radius  $a$ , is uniformly distributed the charge  $q$  having the volume charge density  $\rho_0$ . Find the energy stored in the electric field of sphere

7.4. Într-o sferă de rază  $a$  se află sarcina  $q$ , distribuită uniform cu densitatea de sarcină volumică  $\rho_0$ . Să se calculeze energia stocată în câmpul electric al acestei distribuții.

## REZOLVARE

Intensitatea câmpului electric în interiorul sferei, este conform teoremei Gauss:

$$\vec{E}_i = \frac{\rho_0 \vec{r}}{3\epsilon_0 \epsilon_r} \quad \text{iar în exteriorul ei}$$

$$\vec{E}_e = \frac{\rho_0 a^3 \vec{r}}{3\epsilon_0 r^3} \tag{7.26}$$

Deci:

$$w_r = \frac{1}{2} \epsilon E^2 = \begin{cases} \frac{\rho_0^2 r^2}{18\epsilon_0 \epsilon_r} & \text{pt. } r < a \\ \frac{\rho_0^2 a^6}{18\epsilon_0 r^4} & \text{pt. } r > a \end{cases} \tag{7.27}$$

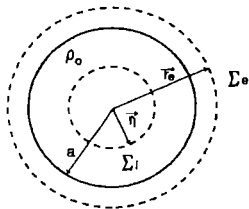


Fig.7.7 Sferă dielectrică uniform încărcată cu densitatea de sarcină volumică  $\rho_0$

Energia stocată în câmpul electric va fi:

$$W = \int_{\text{tot spatiul in care e camp}} w_e dv =$$

$$\int_0^a \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\rho_0^2 r^2}{18\epsilon_0 \epsilon_r} r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi +$$

$$\int_a^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\rho_0^2 a^6}{18\epsilon_0 r^4} r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi =$$

$$= \frac{4\pi\rho_0^2}{18\epsilon_0} \left[ \frac{1}{\epsilon_r} \int_0^a r^4 dr + a^6 \int_a^\infty \frac{dr}{r^2} \right] =$$

$$\frac{2\pi\rho_0^2 a^5}{9\epsilon_0} \left( 1 + \frac{1}{5\epsilon_r} \right) = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 a} \left( 1 + \frac{1}{5\epsilon_r} \right)$$

**7.5.** A sphere of radius  $a$  is filled with a dielectric of relative permittivity  $\epsilon_r$ . Supposing that the sphere is uniformly charged in volume with the charge  $q$  find: a) the volume density of polarization charge  $\rho_p$ ; b) the surface density of polarization charge  $\sigma_p$  at any point on the surface; c) the total polarization charge  $Q_p$ .

**7.5.** O sferă de rază  $a$ , confecționată dintr-un material dielectric omogen cu permitivitatea relativă  $\epsilon_r$ , este uniform încărcată în volum cu sarcina electrică  $q$ . Să se calculeze: a) densitatea de sarcină de polarizare din volumul sferei  $\rho_p$ ; b) densitatea de sarcină de polarizare de pe suprafața sferei  $\sigma_p$ ; c) sarcina totală de polarizare  $Q_p$ .

## REZOLVARE

Intensitatea câmpului electric în interiorul sferei, la distanța  $r$  de centrul ei, este conform teoremei Gauss:

$$\vec{E}_i = \frac{\rho_0 \vec{r}}{3\epsilon_0 \epsilon_r} \quad (7.28)$$

unde  $\rho_0$  este densitatea de sarcină volumică având valoarea:

$$\rho_0 = \frac{3q}{4\pi a^3} \quad (7.29)$$

Intensitatea de polarizare este:

$$\vec{P} = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)\vec{E}_i = \frac{\rho_0(\epsilon_r - 1)}{3\epsilon_r} \vec{r} \quad (7.30)$$

Densitatea de sarcină de polarizare în volumul sferei este:

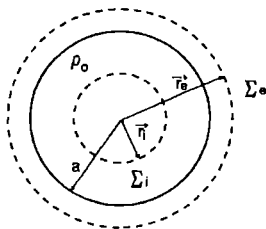


Fig.7.8 Sferă dielectrică încărcată uniform în volum cu densitatea de sarcină volumică  $\rho_0$

$$\begin{aligned} \rho_p &= -\operatorname{div}\vec{P} = \\ &= \rho_0 \frac{1 - \epsilon_r}{3\epsilon_r} \operatorname{div}\vec{r} = \\ &= \rho_0 \frac{1 - \epsilon_r}{\epsilon_r} = \frac{3q}{4\pi a^3} \frac{1 - \epsilon_r}{\epsilon_r} \end{aligned}$$

(7.31)

Densitatea de sarcină de polarizare de pe suprafața sferei este:

$$\sigma_p = \vec{P}\vec{n}|_{r=a} = \rho_0 \frac{\varepsilon_r - 1}{3\varepsilon_r} a = \frac{q}{4\pi a^2} \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} \quad (7.32)$$

Sarcina totală de polarizare din sferă este:

$$Q_p = \int_{V_{sfera}} \rho_p dv + \int_{S_{sfera}} \sigma_p ds = \frac{3q}{4\pi a^3} \frac{1 - \varepsilon_r}{\varepsilon_r} \frac{4\pi a^3}{3} + \frac{q}{4\pi a^2} \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} 4\pi a^2 = 0 \quad (7.33)$$

**7.6.** *At the center of a dielectric sphere of radius  $a$  is placed a point charge  $q$ . The sphere is formed from a homogeneous dielectric with the relative permittivity  $\varepsilon_r$ . Find: a) the volume density of polarization charge  $\rho_p$ ; b) the surface density of polarization charge  $\sigma_p$  at any point on the surface; c) the total polarization charge  $Q_p$ .*

**7.6.** *In centrul unei sfere de raza  $a$ , confecționată dintr-un material dielectric omogen cu permitivitatea relativă  $\varepsilon_r$ , se află sarcina punctiformă  $q$ . Să se calculeze: a) densitatea de sarcină de polarizare din volumul sferei  $\rho_p$ ; b) densitatea de sarcină de polarizare de pe suprafața sferei  $\sigma_p$ ; c) sarcina totală de polarizare  $Q_p$ .*

## REZOLVARE

Intensitatea câmpului electric în interiorul sferei, la distanța  $r$  de centrul ei, este conform teoremei Gauss:



$$\vec{E}_i = \frac{q\vec{r}}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r^3} \quad (7.34)$$

Intensitatea de polarizare este:

$$\vec{P} = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)\vec{E}_i = \frac{q(\epsilon_r - 1)}{4\pi\epsilon_r r^3} \vec{r} \quad (7.35)$$

Densitatea de sarcină de polarizare în volumul sferei este:

$$\begin{aligned} \rho_p &= -\operatorname{div}\vec{P} = q \frac{1-\epsilon_r}{4\pi\epsilon_r} \operatorname{div}\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = \\ &= q \frac{1-\epsilon_r}{4\pi\epsilon_r} \left( \frac{\operatorname{div}\vec{r}}{r^3} + \vec{r} \operatorname{grad}\left(\frac{1}{r^3}\right) \right) = 0 \end{aligned} \quad (7.36)$$

Densitatea de sarcină de polarizare de pe suprafața sferei este:

$$\sigma_p = \vec{P}\vec{n}\Big|_{r=a} = q \frac{\epsilon_r - 1}{4\pi\epsilon_r a^2} \quad (7.37)$$

Sarcina totală de polarizare din sferă este:

$$Q_p = \int_{V_{sferă}} \rho_p dv + \int_{S_{sferă}} \sigma_p ds + Q_{p_{incarcare}} = q \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} + q \frac{1 - \epsilon_r}{\epsilon_r} = 0 \quad (7.38)$$

În centrul sferei se află o sarcină de polarizare egală și de semn opus cu cea de pe suprafața sferei.

**7.7.** *The plane surface boundary from one homogeneous dielectric of electric permittivity  $\epsilon_1$ , to a second with  $\epsilon_2$ , carry the free charge uniformly*

distributed with the surface density  $\sigma$ . The electric field strength in the first dielectric is  $E_1$  and forms with the normal to surface the angle  $\alpha_1$  (Fig.7.9). Find the magnitude of electric field  $E_2$ , in second dielectric and its angle  $\alpha_2$  with the normal to interface.

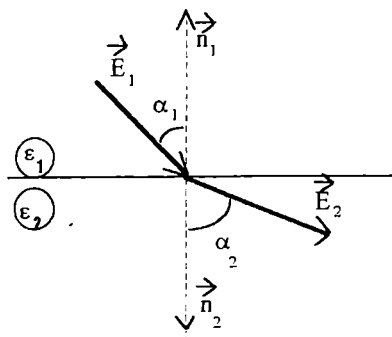


Fig.7.9 Suprafața de separare dintre două medii dielectrice

7.7. Suprafața de separare plană, dintre doi dielectri de permitivități electrice  $\epsilon_1$  și  $\epsilon_2$ , poartă o sarcină electrică uniform distribuită cu densitatea de sarcină superficială  $\sigma$ . Intensitatea câmpului electric de o parte a suprafeței este  $E_1$  și formează cu normala la suprafață unghiul  $\alpha_1$

(Fig.7.9). Să se determine intensitatea câmpului electric  $E_2$  în dielectricul 2 și unghiul  $\alpha_2$  pe care acesta îl formează cu normala al suprafață.

## REZOLVARE

Folosind ecuațiile de trecere pentru componenta normală a inducției câmpului electric și pentru componenta tangențială a intensității câmpului electric rezultă:

$$\epsilon_2 E_2 \cos \alpha_2 = \epsilon_1 E_1 \cos \alpha_1 + \sigma$$

$$E_2 \sin \alpha_2 = E_1 \sin \alpha_1$$

(7.39)

Rezolvând sistemul se obține:

$$\alpha_2 = \operatorname{arccctg} \left( \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \operatorname{ctg} \alpha_1 + \frac{\sigma}{\varepsilon_2 E_1 \sin \alpha_1} \right)$$

$$E_2 = E_1 \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} \quad (7.40)$$

**7.8.** The plates of a parallel-plate capacitor are of area  $S$ , distance apart  $d$  and are at a potential difference  $U$ . The space between the plates is then completely filled with a dielectric whose relative permittivity increases linearly from  $\varepsilon_{r1}$ , near a plate to  $\varepsilon_{r2}$  near the second one. Find: a) the capacitance of the capacitor; b) the volume density of polarization charge  $\rho_p$  and the surface densities of polarization charge  $\sigma_{P12}$  and  $\sigma_{P23}$  at any point on the faces of dielectric Fig.7.10; c) the total polarization charge  $Q_p$ .

**7.8.** Spațiul dintre armăturile unui condensator plan, având aria armăturilor  $S$ , este umplut cu un dielectric a cărui constantă dielectrică variază liniar de la  $\varepsilon_{r1}$  lângă una din armături la  $\varepsilon_{r2}$ , lângă cealaltă armătură. Distanța dintre armături fiind  $d$ , să se afle: a) capacitatea condensatorului; b) densitatea de sarcină de polarizare volumică,  $\rho_p$ , și densitățile de sarcină de polarizare  $\sigma_{P12}$  respectiv  $\sigma_{P23}$ , de pe fețele dielectricului paralele cu armăturile, când între armături se aplică tensiunea  $U$ ; c) sarcina totală de polarizare a dielectricului.

## REZOLVARE

a) Capacitatea condensatorului este, prin definiție:

$$C = \frac{Q}{U} \quad (7.41)$$

unde:

$$U = \int_0^d E(x) dx \quad (7.42)$$

Dar intensitatea câmpului electric la distanța  $x$  de prima armătură a condensatorului este, Fig.7.10:

$$E(x) = \frac{\sigma_{\text{liber}}}{\epsilon_0 \epsilon_r(x)} = \frac{\sigma_{\text{liber}}}{\epsilon_0 \left( \epsilon_{r1} + \frac{\epsilon_{r2} - \epsilon_{r1}}{d} x \right)} \quad (7.43)$$

ca urmare tensiunea  $U$  pe condensator este:

$$U = \int_0^d \frac{Q}{\epsilon_0 S} \frac{dx}{\epsilon_{r1} + \frac{\epsilon_{r2} - \epsilon_{r1}}{d} x} = \frac{Q}{\epsilon_0 S} \frac{d}{\epsilon_{r2} - \epsilon_{r1}} \ln \frac{\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1}}$$

Ținând seama de relațiile 7.41 și 7.42, capacitatea condensatorului este:

$$C = \frac{\epsilon_0 S (\epsilon_{r2} - \epsilon_{r1})}{d \ln \frac{\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1}}} \quad (7.44)$$

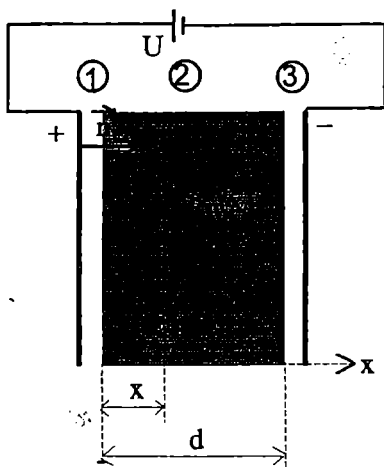


Fig.7.10 Dielectric in câmpul electric al unui condensator plan

b) Dacă tensiunea la care se încarcă condensatorul este  $U$ , sarcina de pe

armăturile condensatorului este  $Q = CU$  și atunci intensitatea câmpului electric dintre armăturile condensatorului este:

$$E(x) = \frac{\sigma_{\text{liber}}}{\epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{CU}{\epsilon_0 S \left( \epsilon_{r1} + \frac{\epsilon_{r2} - \epsilon_{r1}}{d} x \right)} \quad (7.45)$$

Cu aceasta intensitatea de polarizare  $P$ , devine:

$$\bar{P} = \epsilon_0 (\epsilon_r(x) - 1) \bar{E}(x) = \epsilon_0 (\epsilon_r(x) - 1) \frac{CU}{\epsilon_0 S \epsilon_r(x)} = \frac{CU}{S} \left( 1 - \frac{1}{\epsilon_r(x)} \right) \quad (7.46)$$

Densitatea de sarcină de polarizare în volumul dielectricului, este:

$$\rho_p = -\text{div} \bar{P} = \frac{CU}{S} \frac{\epsilon_{r2} - \epsilon_{r1}}{d} \frac{1}{\epsilon_r^2(x)} = \frac{\epsilon_0 U (\epsilon_{r2} - \epsilon_{r1})^2}{d^2 \ln \left( \frac{\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1}} \right) \left( \epsilon_{r1} + \frac{\epsilon_{r2} - \epsilon_{r1}}{d} x \right)^2} \quad (7.47)$$

Densitățile de sarcină de polarizare de pe fețele dielectricului sunt:

$$\sigma_{P_{12}} = -\bar{n}_{12} (\bar{P}_2 - \bar{P}_1) \Big|_{x=0} = -P_{2n} \Big|_{x=0} = -\epsilon_0 \frac{\epsilon_{r1} - 1}{\epsilon_{r1}} \frac{U (\epsilon_{r2} - \epsilon_{r1})}{d \ln \left( \frac{\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1}} \right)}$$

$$\sigma_{P_{23}} = -\bar{n}_{23} (\bar{P}_3 - \bar{P}_2) \Big|_{x=d} = P_{2n} \Big|_{x=d} = \epsilon_0 \frac{\epsilon_{r2} - 1}{\epsilon_{r2}} \frac{U (\epsilon_{r2} - \epsilon_{r1})}{d \ln \left( \frac{\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1}} \right)} \quad (7.48)$$

Având densitățile de sarcină de polarizare în volum și pe fețele dielectricului, ecuațiile 7.47 și 7.48, sarcina totală de polarizare va fi:

$$Q_p = \int_V \rho_p dv + \int_S (\sigma_{p_{12}} + \sigma_{p_{23}}) ds = \int_0^d \frac{\epsilon_0 U (\epsilon_{r_2} - \epsilon_{r_1})^2}{d^2 \ln\left(\frac{\epsilon_{r_2}}{\epsilon_{r_1}}\right) \left(\epsilon_{r_1} + \frac{\epsilon_{r_2} - \epsilon_{r_1}}{d} x\right)^2} dx +$$

$$S \epsilon_0 \frac{U (\epsilon_{r_2} - \epsilon_{r_1})}{d \ln\left(\frac{\epsilon_{r_2}}{\epsilon_{r_1}}\right)} \left(\frac{\epsilon_{r_2} - 1}{\epsilon_{r_2}} - \frac{\epsilon_{r_1} - 1}{\epsilon_{r_1}}\right) = - \frac{\epsilon_0 U S (\epsilon_{r_2} - \epsilon_{r_1})^2}{d \epsilon_{r_2} \epsilon_{r_1} \ln\left(\frac{\epsilon_{r_2}}{\epsilon_{r_1}}\right)} + \frac{\epsilon_0 U S (\epsilon_{r_2} - \epsilon_{r_1})^2}{d \epsilon_{r_2} \epsilon_{r_1} \ln\left(\frac{\epsilon_{r_2}}{\epsilon_{r_1}}\right)} =$$

## **CAPITOLUL 8. ELECTRICITATE**

**Electrostatica. Sisteme de conductori.  
Electrostatics. Interacting conductors.**

**© CRISTEA PETRICĂ, 1999**

## 8.1.Charge densities. Some explanations

### Densități de sarcină. Precizări

*Generally, in electricity and magnetism we are concerned with the generation of and with interactions between charge densities and electric currents. In this section, our aim is to establish what is meant by these terms. Once we know what we are talking about, we are recognizing charge densities by the effects they produce. **This is an important aspect, because just such effects are to be used to make physical measurements.***

*Densitățile macroscopice de sarcină (liniare, superficiale sau de volum) sunt funcții de poziție și de timp (notate de obicei  $\lambda(\vec{r}, t)$ ,  $\sigma(\vec{r}, t)$ ,  $\rho(\vec{r}, t)$ ) care caracterizează, într-un sistem de referință dat și la un moment de timp precizat, distribuția, la scară macroscopică, a sarcinii electrice. Ele sunt, prin urmare, mărimi locale, definite în mod "natural" ca:*

$$\lambda(\vec{r}, t) = \frac{\Delta Q}{\Delta l}, \sigma(\vec{r}, t) = \frac{\Delta Q}{\Delta S}, \rho(\vec{r}, t) = \frac{\Delta Q}{\Delta V} \quad (8.1)$$

unde  $\Delta Q$  este sarcina electrică distribuită pe elementul de curbă  $\Delta l$ , respectiv pe elementul de suprafață  $\Delta S$ , sau în elementul de volum  $\Delta V$ , reperate prin vectorul de poziție. Dacă  $\Delta l$ ,  $\Delta S$ ,  $\Delta V$  au valori mult mai mici decât lungimea, suprafața, respectiv volumul



sistemului macroscopic analizat, atunci vom obține o descriere

rezonabilă a distribuției sarcinii electrice utilizând relațiile (8.1). *Cînd densitățile de sarcină nu depind de timp ele se numesc staționare.*

Acum, dorind să mărim acuratețea descrierii, ne putem întreba dacă are sens să considerăm densitățile de sarcină ca limită a rapoartelor (8.1), când  $\Delta l$ ,  $\Delta S$ ,  $\Delta V$  tind către zero. Sarcina electrică este cuantificată (modulul cuantei de electricitate fiind egal cu sarcina  $e$ , asociată protonului), așa că, cel puțin la prima vedere, ar urma că densitățile de sarcină obținute în urma *procesului matematic* de trecere la limită au valori infinit de mari. Acest impas nu este unul matematic; *în fizică el comportă dificultăți conceptuale a căror sursă este tendința de a localiza (intuitiv, clasic) sarcinile.* În realitate *putem discuta numai despre probabilitatea ca, la un anumit moment, o cuantă de sarcină electrică să ocupe un anumit domeniu spațial.* Acesta este un fapt experimental, care trebuie acceptat, și ale cărui semnificații au fost revelate prin analiza cuantică a fenomenelor. Fără a intra în detalii, *admițând că această probabilitate este o funcție continuă de poziție și de timp, proporțională cu măsura domeniului spațial,* putem înțelege, intuitiv, densitățile *microscopice* de sarcină, ca funcții de poziție și de timp, definite prin limita rapoartelor (8.1), limită care, în această accepțiune, are valori finite.

## 8.2. Surface charge density. Avoiding the ambiguities.

### Densități superficiale de sarcină. Evitarea ambiguităților

O sursă frecventă de erori în rezolvarea problemelor care implică densități superficiale de sarcină, o reprezintă abaterea (mai mult, sau mai puțin sesizabilă) de la definiția acestora. În continuare, vom prezenta câteva dificultăți introduse de unele definiții "originale" ale densității superficiale de sarcină.

*8.1. Suppose we have an ideal conductor, with an inner cavity, in electrostatic equilibrium. The cavity contains a point charge at rest. In these conditions, we also have two surface charge densities: one of them on the inner surface and another on the outer surface of the conductor. The discussion below shows that some deviations from the correct definition of the surface charge density, not only produce confusion, but lead to meaningless problems.*

Să considerăm, ca prim exemplu, un conductor aflat în echilibru electrostatic. Conductorul conține o cavitate în care se găsește o sarcină punctiformă  $Q$  (Fig. 8.1). În aceste condiții, *sunt generate două distribuții superficiale de sarcină*: una pe fața interioară ( $\sigma_i$ ), alta pe suprafața exterioară ( $\sigma_e$ ). A defini o sumă de tipul  $\sigma = \sigma_i + \sigma_e$  este ceva fără noimă, pentru că *această sumă nu este o densitate superficială de*

sarcină (suma de mai sus nu este, în general, o mărime locală).

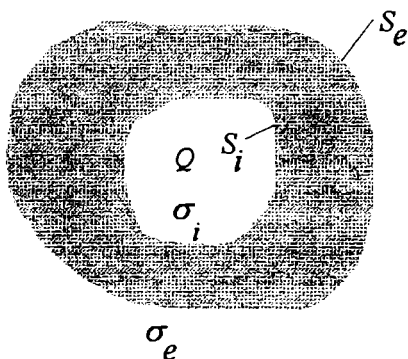


Fig. 8.1 Sarcina punctiformă  $Q$ , în repaus în interiorul cavității unui corp conductor (neutru), aflat în echilibru electrostatic, generează pe suprafața interioară ( $S_i$ ) și exterioară ( $S_e$ ) densitățile superficiale de sarcină  $\sigma_i$  și  $\sigma_e$ , dependente de poziția elementului de suprafață. Sarcina totală distribuită pe fața interioară este  $-Q$ , iar cea de pe fața exterioară  $Q$ .

În orice punct al suprafeței interioare și exterioare câmpul electric este calculat cu relațiile

$$\vec{E}_i(\vec{r}) = \frac{\sigma_i(\vec{r})}{\epsilon_0} \vec{n}_i(\vec{r}), \quad \vec{E}_e(\vec{r}) = \frac{\sigma_e(\vec{r})}{\epsilon_0} \vec{n}_e(\vec{r}),$$

unde  $\vec{n}_i$  și

$\vec{n}_e$  sunt versorii normalelor locale la suprafața interioară și exterioară (dirijate către interiorul cavității, respectiv spre exteriorul conductorului). Dacă expresiile analitice care descriu forma suprafețelor sunt cunoscute și poziția sarcinii este precizată, legile electrostaticii permit calculul densităților superficiale și deci al câmpurilor electrice în fiecare punct al

suprafețelor. Nu este deci necesară introducerea unei densități *totale* de sarcină superficială.

**8.2.** *We are considering now an endlessly extended conducting plate (but with finite thickness !), in electrostatic equilibrium. The left and right surface charge densities are related to the electric field in the left and right regions. Generally, these two densities are different. Therefore, any question seeking for the electric field, calculated with the "total charge density"  $\sigma_S + \sigma_D$ , without making additional assumptions, is a meaningless question.*

Dificultăți similare apar și atunci când, aparent, introducerea unei densități superficiale totale de sarcină nu contravine caracterului local rezultat din definiția corectă. Să considerăm o placă metalică, plană, extinsă infinit, aflată în echilibru electrostatic (Fig. 8.2). În cele ce urmează este important să ne concentrăm atenția asupra modului în care sunt modificate raționamentele uzuale, datorită grosimii nenule a plăcii conductoare. Acest sistem electrostatic are de asemenea *două* suprafețe pe care, în general, densitățile superficiale de sarcină ( $\sigma_S$  și  $\sigma_D$ ) au valori diferite.

Unii autori de probleme, și uneori de manuale, formulează enunțuri (*incorecte* !) de forma:

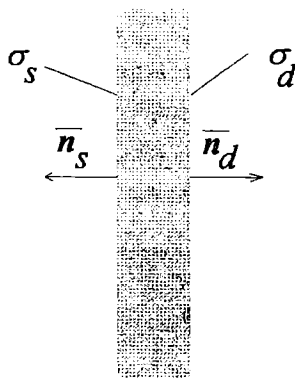


Fig. 8.2 O placă metalică, plană, infinită, are două suprafețe. Spațiul este împărțit în trei regiuni: cea din stânga, cea interioară (unde câmpul electric este nul) și cea din dreapta.

*"...știind că placa metalică este încărcată uniform cu densitatea superficială de sarcină  $\sigma$ , să se determine câmpul electric în regiunea din stânga și din dreapta".*

Are placa grosime nulă? Dacă nu, prin densitate superficială de sarcină începem să bănuim, la "îndemnul" autorilor, că ar trebui să înțelegem o sumă de tipul  $\sigma_s + \sigma_d$ . Chiar și așa, această problemă simplă nu se poate rezolva decât făcând ipoteza suplimentară că  $\sigma_s = \sigma_d = \sigma/2$ . Precizarea că placa este încărcată uniform nu justifică însă o asemenea presupunere, pentru că  $\sigma_s + \sigma_d = \text{const.}$ , nu implică în general  $\sigma_s = \sigma_d$ . Mai departe, utilizând teorema lui Gauss, autorii obțin expresiile pentru câmpuri:

$$\vec{E}_{s,d} = \mp \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{n}_d.$$

Conchidem că singura presupunere acceptabilă (compatibilă cu rezultatul final obținut de autori) este aceea că sarcina electrică este riguros distribuită într-un plan (caz în care placa nu mai este metalică !).

### 8.3. A fundamental principle: The principle of superposition

Un principiu fundamental: *principiul superpoziției liniare*

În cele ce urmează, vom ilustra puterea acestui principiu fundamental, cu ajutorul unui exemplu simplu, important prin aplicațiile sale.

*8.3. A physical law is usually established experimentally, and only over a limited range of situations. Because of this, a fair physicist always exerts caution when a law is to be applied outside this range. Even when we expect a law to be a good one, we must have "an open eye" for the disagreements with experiment which might, in some cases, indicate its breakdown. Fortunately, even for high density of electromagnetic energy, the principle of superposition still applies, and there are little doubts about its correctness. This principle states that, when more than two point charges interact, to find the resultant of the forces on any one charge, the vector sum of all the individual forces due to all the others must be taken into account.*

*In the next, with the help of the example just completed (8.2), an important application of the superposition principle is presented. This example deals with a system of two conducting parallel plates. When applied, the principle of superposition shows that the fields can be cancelled in regions outside the plates, but reinforced between them.*

Să considerăm o placă metalică, plană, infinit extinsă, plasată în vid, în afara influenței unor câmpuri electrice exterioare. Presupunem că placa este în echilibru electrostatic și este încărcată electric. În asemenea condiții, densitățile superficiale de sarcină pe cele două fețe nu depind de poziție și vor fi egale, adică  $\sigma_S = \sigma_D$ . Câmpul electric în exteriorul plăcii este, în fiecare regiune, uniform și are valoarea

$$\vec{E}_{S,D} = \mp \frac{\sigma_D}{\epsilon_0} \vec{n}_D.$$

Șurapunem, peste câmpul produs

de placă, un câmp electrostatic exterior  $\vec{E}_{ext}$ , uniform, a cărui direcție este perpendiculară pe planul plăcii. După stabilirea stării de echilibru electrostatic, câmpul electric, în fiecare regiune, este obținut, conform *principiului superpoziției liniare*, prin adunarea celor două contribuții, adică:

$$\vec{E}'_{S,D} = \vec{E}_{ext} \mp \frac{\sigma_D}{\epsilon_0} \vec{n}_D \quad (8.2a)$$

Aceasta înseamnă că noile densități superficiale de sarcină  $\sigma'_{s,d}$  satisfac relațiile:

$$\bar{E}'_{s,d} = \mp \frac{\sigma'_{s,d}}{\epsilon_0} \bar{n}_d \quad (8.2b)$$

Analizând ecuațiile (8.2a) și (8.2b), constatăm că  $\bar{E}'_{s,d} = 0$  atunci când

$$\bar{E}_{ext} = \pm \frac{\sigma_d}{\epsilon_0} \bar{n}_d \quad (8.2c)$$

În asemenea condiții, densitatea superficială de sarcină a feței din stânga, sau a celei din dreapta, după caz, se anulează (ecuația 8.2b), iar densitatea de sarcină a feței din dreapta (sau din stânga, după caz) devine (datorită conservării sarcinii electrice):

$$\sigma'_{d,s} = 2\sigma_d \quad (8.2d)$$

Un câmp exterior de forma (8.2c) poate fi produs introducând o nouă placă metalică, paralelă cu prima, încărcată electric, având pe cele două fețe, în absența celei dintâi, densități egale de sarcină egale cu  $-\sigma_d$  (Fig. 8.3). Sistemul astfel format este numit *condensator cu plăci plan-paralele*. Repetând raționamentul pentru a doua placă, ajungem, cum era de așteptat, la concluzia că între armăturile condensatorului câmpul electric este uniform și are



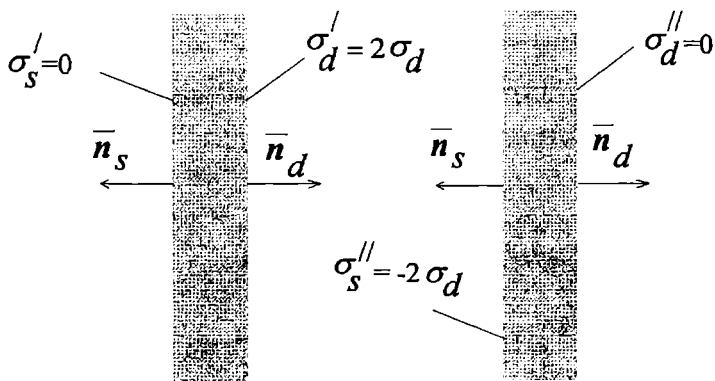


Fig. 8.3 Densitățile superficiale de sarcină asociate fețelor unui condensator ideal, cu plăci plan-paralele, încărcat electric.

valoarea  $2 \frac{\sigma_d}{\epsilon_0} \bar{n}_d$ , iar în exteriorul condensatorului câmpul electric este zero.

#### 8.4. A reciprocity theorem

##### O teoremă de reciprocitate

Să considerăm un sistem format din  $N$  sarcini electrice punctiforme, aflate în repaus, în vid, distanța între două sarcini  $Q_i$ ,  $Q_j$ , fiind notată  $R_{ij}$ . Înlocuim sarcina  $Q_1$  cu o sarcină punctiformă, arbitrară,  $Q'_1$ , plasată în aceeași poziție și calculăm energia electrostatică de interacție a sarcinii  $Q'_1$  cu restul sarcinilor din sistem. Obținem:

$$K \frac{Q'_1 Q_2}{R_{12}} + K \frac{Q'_1 Q_3}{R_{13}} + \dots + K \frac{Q'_1 Q_N}{R_{1N}} = Q'_1 V_1 \quad (8.3a)$$

unde  $K = 1/4\pi\epsilon_0$  iar  $V_1$  reprezintă, potrivit principiului superpoziției liniare, potențialul punctului 1, sumă a potențialelor parțiale  $KQ_i/R_{1i}$  ( $i \neq 1$ ), generate în același punct 1, de restul sarcinilor din sistem. Dacă am fi înlocuit sarcina  $Q_2$  cu o sarcină punctiformă, arbitrară,  $Q'_2$ , plasată în același punct, am fi obținut:

$$K \frac{Q'_2 Q_1}{R_{21}} + K \frac{Q'_2 Q_3}{R_{23}} + \dots + K \frac{Q'_2 Q_N}{R_{2N}} = Q'_2 V_2 \quad (8.3b)$$

Repetând raționamentul pentru fiecare sarcină  $Q_j$  a sistemului inițial, înlocuită cu o sarcină punctiformă, arbitrară,  $Q'_j$ , plasată în același loc, obținem câte o ecuație de forma (8.3). Suma tuturor termenilor din

membrul drept al egalităților are valoarea  $\sum_{i=1}^N Q'_i V_i$ .

Pe de altă parte, suma tuturor termenilor din membrul stâng al egalităților, poate fi scrisă, după cum se poate verifica ușor prin calcul direct (grupând convenabil termenii și folosind principiul superpoziției liniare a potențialelor), sub forma  $\sum_{i=1}^N Q_i V'_i$ . Așadar, trebuie

să aibă loc egalitatea:

$$\sum_{i=1}^N Q_i V'_i = \sum_{i=1}^N Q'_i V_i \quad (8.4)$$

cunoscută și sub numele de *teorema de reciprocitate a lui Green*.

Deși deosebit de simplă, această teoremă importantă are consecințe interesante. Mai întâi, vom arăta că valabilitatea teoremei poate fi extinsă la cazul echilibrului electrostatic al unui sistem de  $N$  conductori care interacționează electric (Fig. 8.4).

Vom analiza două stări de echilibru electrostatic ale acestui sistem: în prima dintre ele, sarcinile conductorilor sunt  $Q_i$  și potențialele asociate  $V_i$ , iar în cea de-a doua, sarcinile sunt  $Q'_i$ ; iar potențialele corespunzătoare  $V'_i$ . (atenție: odată precizate sarcinile, potențialele sunt determinate; reciproc, odată precizate potențialele, sarcinile sunt determinate). Considerăm pe suprafața fiecărui conductor "i" o suprafață infinitezimală  $dS_i$ , sarcina de pe această suprafață fiind  $dQ_i$  (în prima stare), sau  $dQ'_i$  (în a doua stare). Pentru aceste sarcini infinitezimale (punctiforme) este valabilă teorema de reciprocitate, adică:

$$\sum_{i=1}^N V'_i dQ_i = \sum_{i=1}^N V_i dQ'_i \quad (8.5)$$

În oricare dintre cele două stări de echilibru electrostatic, punctele aparținând unui conductor arbitrar sunt echipotențiale și, prin urmare, poziția pe suprafața a elementelor infinitezimale de sarcină este irelevantă. Aceasta înseamnă că putem integra termen cu termen în membrul stâng și în cel drept al egalității (8.5), rezultatul final fiind, evident, o egalitate formal identică cu egalitatea (8.4).

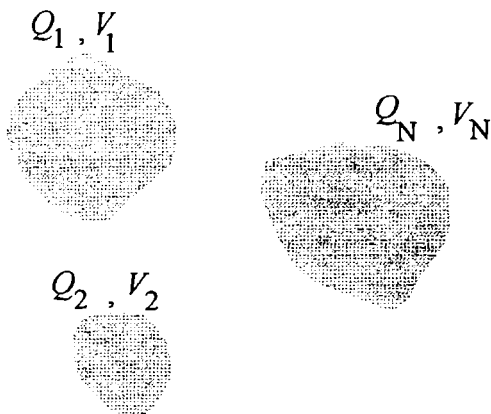


Fig. 8.4 Sistem de  $N$  conductori care interacționează electric, aflați în echilibru electrostatic.

Acesta este însă un rezultat mai puternic, pentru că el se extinde asupra unor sisteme arbitrare de conductori aflați în echilibru electrostatic. În continuare, vom utiliza această teoremă și vă vom arăta cum puteți obține, pe o cale foarte simplă, rezultate relevante în multe situații electrostatice de interes experimental (și nu numai!)

*Consequences. Capacitance of a conductor without interaction with other bodies*

*Consecințe. Capacitatea electrică a conductorului izolat*

Primul exemplu se referă la noțiunea de *capacitate electrică* a unui conductor izolat.

**8.4.** *When an uncharged finite conductor remote from other bodies is given a charge  $Q$ , its potential is raised from zero to a certain value,  $V$  (we consider that the potential vanishes at infinity). Prove that, for a given conducting body, the value of the ratio  $Q/V$  is a constant. This constant depends only on the geometry and is called the capacitance of the conductor.*

Considerăm un singur conductor, izolat de influențe electrice exterioare (prin aceasta înțelegem că potențialul conductorului depinde numai de sarcina sa electrică). Fie două stări de echilibru electrostatic, caracterizate prin sarcinile și potențialele  $Q, V$ , respectiv  $Q', V'$ . Conform teoremei de reciprocitate, are loc egalitatea:

$$QV' = Q'V \quad (8.6)$$

Cum sarcinile în cele două stări sunt arbitrare, rezultă că, *pentru un conductor izolat, aflat în echilibru electrostatic, raportul  $Q/V$  este o constantă specifică sistemului.* Această constantă, notată, de obicei,  $C$ , poartă numele de *capacitate electrică a conductorului izolat.*

Observație: *Întrucât potențialul electric este determinat până la o constantă arbitrară (potențialul punctului de referință), definiția  $C=Q/V$  este aplicabilă doar dacă ne referim la situația în care  $V=0$  corespunde unei sarcini nule pe conductor. În caz contrar, cu o altă alegere a referinței potențialului, vom avea  $C=dQ/dV$ , adică*

*variația sarcinii conductorului este direct proporțională cu variația potențialului acestuia.*

**8.5.** *We know, in practice conductors are rarely isolated, but are influenced by other systems which could be of either conducting or insulating material. Therefore, charges on any one of the bodies will affect the charge distribution on all the others. In this case we have a very complicated set of equations describing how the potential and the polarization are influenced.*

*Although the results of this application will not be used until application 8.9, it is convenient to consider them here for didactical purposes. We consider the important situation where only one other conductor is near enough to influence the original conductor. A charge  $Q$  is given to the first conductor. Let, in this situation,  $V_2$  be the potential of the second conductor. Suppose now we remove the charge from the first conductor and transfer it to the second. In this new situation, find the potential of the first conductor.*

Fie doi conductori care interacționează electric. Într-o primă situație de echilibru electrostatic, primul conductor are sarcina  $Q$ , al doilea este neutru. Potențialul primului conductor este  $V_1$ , al celui de-al doilea  $V_2$ . Într-o altă situație de echilibru electrostatic, primul conductor este neutru iar al doilea poartă sarcina  $Q$  (aceeași cu cea pe care, în prima situație, o

purta primul conductor). Potențialele sunt  $V'_1$ , respectiv  $V'_2$ . Teorema de reciprocitate afirmă că are loc egalitatea  $QV'_1 + 0 \cdot V'_2 = 0 \cdot V_1 + QV_2$ , adică:

$$V'_1 = V_2 \quad (8.7)$$

Acesta este un rezultat foarte interesant. El nu poate fi ușor intuit și, aspect deosebit de important, este independent de forma conductorilor.

**8.6.** *Let us take  $N$  earthed, interacting conductors in vacuum. A point charge  $q$  is placed between the conductors. Find the induced charge on any one of the conductors.*

Considerăm  $N$  conductori care interacționează electric, legați la pământ. Într-un punct  $P$  al spațiului dintre conductori, este plasată o sarcină punctiformă  $q$ . Ce sarcini sunt induse pe fiecare din cei  $N$  conductori?

Ne concentrăm atenția asupra unuia dintre conductori, de exemplu conductorul  $j$  ( $j=1, 2, \dots, N$ ). Fie o a doua situație electrostatică, în care doar conductorul în cauză este deconectat de la pământ, iar sarcina  $q$  este îndepărtată. Folosim teorema de reciprocitate și deducem egalitatea:

$$\begin{aligned} Q'_1 \cdot 0 + Q'_2 \cdot 0 + \dots + Q'_N \cdot 0 + 0 \cdot V_P &= \\ = Q_1 \cdot 0 + Q_2 \cdot 0 + \dots + Q_j V'_j + q V'_P & \end{aligned} \quad (8.8)$$

Din această egalitate se obține imediat că sarcina indusă pe conductorul  $j$  are valoarea:

$$Q_j = -\frac{V_P'}{V_j'} q \quad (8.9)$$

Pentru sisteme generale de conductori, acest raport se calculează dificil (prin utilizarea metodelor numerice). Însă, în unele cazuri particulare, calculul este cu totul elementar. De exemplu, dacă o sarcină punctiformă  $q$  se află la distanța  $r$  de centrul unei sfere conductoare, de rază  $R$ , legată la pământ,  $V_P' = KQ'/r$ ,  $V_j' = KQ'/R$ , și prin urmare, conform cu (8.9):

$$Q = -\frac{R}{r} q \quad (8.10)$$

Relația (8.10) ne arată că sarcina indusă pe sfera conductoare, legată la pământ, este dependentă de raza de curbură a suprafeței și are semn opus celui al sarcinii inductoare. Modulul celor două sarcini este același numai dacă toate liniile de câmp emergente din sarcina inductoare întâlnesc suprafața sferei conductoare, adică atunci când  $q$  este în interiorul suprafeței care delimitează corpul conductor (*ce puteți spune despre cazul în care  $q$  este localizată chiar pe suprafața exterioară a sferei conductoare?*). Vă propunem să vă gândiți la situația în care în punctul  $P$  se găsește un electron, sau un proton. Nu este recomandabil să lucrăm cu alte particule elementare cu sarcină electrică, pentru că, după cunoștințele



noastre actuale, ele sunt singurele particule, cu sarcină electrică, stabile. Orice altă particulă plasată în  $P$  se dezintegrează după un timp foarte scurt și nu mai putem vorbi de echilibru electrostatic. Cum putem interpreta rezultatul (8.10)?

**8.8.** *Now let us apply the above method to some special situations concerning two earthed conductors where the induced charges  $Q_j$  satisfy  $\sum_j Q_j = -q$ . For a parallel-plate capacitor, a cylindrical capacitor or a spherical capacitor the full calculation of  $Q_1, Q_2$  is a matter of straightforward algebra.*

O situație interesantă este generată de sistemele cu doi conductori, în care, de exemplu, sarcinile  $Q_1, Q_2$ , induse pe cei doi conductori legați la pământ ( $V_1=0, V_2=0$ ), în prezența unei sarcini inductoare  $q$ , satisfac relația  $Q_1+Q_2= -q$  (Fig. 8.5). Imaginăm o a doua situație de echilibru electrostatic a acestui sistem, situație în care conductorii nu mai sunt legați la pământ, dar au sarcinile  $Q'_1, Q'_2$ , iar în punctul  $P$  sarcina este nulă, adică  $q'=0$ . Conform teoremei de reciprocitate, are loc egalitatea:

$$Q_1 V'_1 + Q_2 V'_2 + q V'_P = Q'_1 \cdot 0 + Q'_2 \cdot 0 + 0 \cdot V_P = 0 \quad (8.11a)$$

Împreună cu ecuația:

$$Q_1 + Q_2 = -q \quad (8.11b)$$

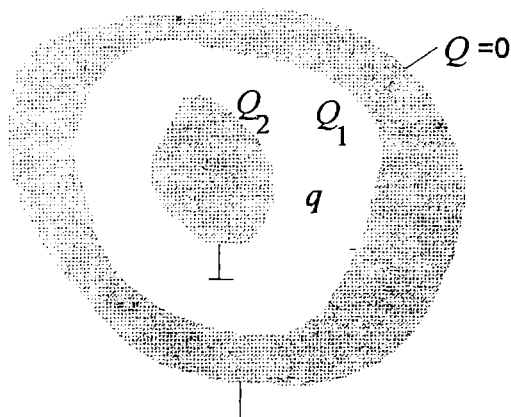


Fig. 8.5 În cazul în care sarcina inductoare se află în interiorul regiunii delimitată de suprafața exterioară a conductorului 2 și suprafața interioară a conductorului 1, orice linie de câmp emergentă din  $q$  va intersecta fie suprafața conductorului 1, fie pe aceea a conductorului 2. Astfel, totdeauna,  $q = -(Q_1 + Q_2)$ .

obținem un sistem de două ecuații cu două necunoscute,  $Q_1, Q_2$ . Soluția sistemului se obține prin calcule elementare. Pentru  $Q_1$  obținem:

$$Q_1 = -q \frac{V'_P - V'_2}{V'_1 - V'_2} \quad (8.12a)$$

iar pentru  $Q_2$ :

$$Q_2 = -q \frac{V'_P - V'_1}{V'_2 - V'_1} \quad (8.12b)$$

În cazuri particulare, relevante în aplicații practice, potențialele  $V'_1, V'_2, V'_P$ , în cea de-a doua

situație electrostatică, se calculează simplu. Această situație intervine ori de câte ori sistemul generat de cei doi conductori are un grad înalt de simetrie spațială. În asemenea cazuri, teorema lui Gauss permite calculul comod al dependenței câmpului electric de vectorul de poziție, dependență din care se obține imediat dependența potențialului de poziție. Exemple de asemenea sisteme sunt: sarcină plasată între: a) două plăci metalice, plan-paralele, legate la pământ; b) doi cilindri metalici, infiniți, coaxiali, legați la pământ; c) două sfere metalice, concentrice, legate la pământ. În aceste cazuri obținem:

a) distanța între plăci fiind  $d$ , iar distanța de la sarcina  $q$  la prima placă  $x$ :

$$Q_1 = -q \frac{d-x}{d}, \quad Q_2 = -q \frac{x}{d} \quad (8.13a)$$

b) razele cilindrilor fiind  $R_1$ , respectiv  $R_2$  ( $R_1 < R_2$ ), iar  $q$  plasată la distanța  $r$  de axa comună:

$$Q_1 = -q \frac{\ln(R_2/r)}{\ln(R_2/R_1)}, \quad Q_2 = -q \frac{\ln(R_1/r)}{\ln(R_1/R_2)} \quad (8.13b)$$

c) razele sferelor fiind  $R_1$ , respectiv  $R_2$  ( $R_1 < R_2$ ), iar  $q$  la distanța  $r$  de centrul comun:

$$Q_1 = -q \frac{R_1(R_2 - r)}{r(R_2 - R_1)}, \quad Q_2 = -q \frac{R_2(r - R_1)}{r(R_2 - R_1)} \quad (8.13c)$$

Dacă în egalitatea (8.5) se adună  $\sum Q_j V_j$  în ambii membri, se obține:

$$\sum_{i=1}^N Q_i (V_i + V_i') = \sum_{i=1}^N (Q_i + Q_i') V_i \quad (8.14)$$

Așadar, dacă sarcinile  $Q_1, Q_2, \dots, Q_N$ , generează o situație în care potențialele conductorilor sunt  $V_1, V_2, \dots, V_N$ , atunci sarcinile  $Q_1+Q_1', Q_2+Q_2', \dots, Q_N+Q_N'$ , vor genera o situație în care noile potențiale vor fi  $V_1+V_1', V_2+V_2', \dots, V_N+V_N'$ . *Această situație decurge din valabilitatea principiului superpoziției liniare.* Rezolvarea multor probleme, aparent complicate, devine deci deosebit de simplă în acele cazuri în care se cunosc soluțiile pentru stările care, prin superpoziție, generează starea analizată.

**8.9.** *We now return to a consideration of  $N$  conductors interacting in vacuum. When applied, the principle of superposition through potential coefficients (elastances) or mutual capacitances completely describes how the charges on any one of the bodies are related with the potential of conductors.*

Considerăm din nou un sistem de  $N$  conductori cu formă fixă, inițial neutri, care interacționează electric. Presupunem fixată configurația spațială a sistemului.

Dacă, într-un mod oarecare, unul dintre conductori,  $j$ , primește o anumită sarcină electrică, aceasta va afecta, într-un mod bine precizat (dependent de configurația geometrică a sistemului și forma suprafeței conductorilor), potențialele  $V_j$  ale tuturor celorlalți conductori. O asemenea schimbare a

stării electrostatice a conductorilor este măsurată de limita ( $\Delta Q_j \rightarrow 0$ ) raportului  $\Delta V_i / \Delta Q_j$  între variația  $\Delta V_i$  a potențialului conductorului  $i$ , produsă de variația  $\Delta Q_j$  a sarcinii conductorului  $j$ . Această limită are dimensiunile (capacitate electrică)<sup>-1</sup> și se numește *coeficient de potențial*  $S_{ij}$  asociat perechii  $(i, j)$ , sau *elastanță mutuală*. Potrivit aplicației **8.5**, elastanțele mutuale satisfac egalitatea importantă  $S_{ij} = S_{ji}$ .

Folosind *principiul superpoziției liniare* (în forma 8.14), deducem că:

$$\begin{aligned} V_1 &= S_{11}Q_1 + S_{21}Q_2 + \dots + S_{N1}Q_N \\ V_2 &= S_{12}Q_1 + S_{22}Q_2 + \dots + S_{N2}Q_N \\ &\dots\dots\dots \\ V_N &= S_{1N}Q_1 + S_{2N}Q_2 + \dots + S_{NN}Q_N \end{aligned} \tag{8.15a}$$

*Elastanțele mutuale sunt mărimi pozitive.* Acest fapt poate fi înțeles, observând că, de exemplu, o sarcină pozitivă, arbitrară, plasată pe oricare dintre conductori, va conduce la mărirea potențialelor celorlalți conductori. Putem inversa problema, considerând ca necunoscute în sistemul de ecuații (8.15), nu potențialele, ci sarcinile conductorilor. În asemenea condiții, obținem:

$$\begin{aligned} Q_1 &= C_{11}V_1 + C_{21}V_2 + \dots + C_{N1}V_N \\ Q_2 &= C_{12}V_1 + C_{22}V_2 + \dots + C_{N2}V_N \\ &\dots\dots\dots \\ Q_N &= C_{1N}V_1 + C_{2N}V_2 + \dots + C_{NN}V_N \end{aligned} \tag{8.15b}$$

Cantitățile  $C_{ij}$  au dimensiunea de capacitate electrică. Când  $i=j$ , aceste constante se numesc *coeficienți de capacitate, sau self-capacități*.

Astfel,  $C_{ij}$  ( $i=1\dots N$ ) este definită ca raportul dintre sarcina  $Q_j$  și potențialul  $V_j$  al conductorului "i", atunci când ceilalți conductori sunt prezenți, dar au potențial nul (sunt legați la pământ). Din această definiție decurge că  $C_{ij} > 0$ . Dacă  $i \neq j$ , coeficienții  $C_{ij}$  se numesc *coeficienți de inducție sau capacități mutuale*.

Din ecuațiile sistemului (8.15b) se observă că mărimile  $C_{ij}$  reprezintă raportul dintre sarcina  $Q_j$  indusă pe conductorul  $j$  și potențialul  $V_j$  al conductorului  $i$ , când toți ceilalți conductori, cu excepția lui  $i$ , sunt legați la pământ. Sarcina indusă are totdeauna semn opus sarcinii inductoare, astfel că, totdeauna,  $C_{ij} \leq 0$ . Tot din (8.15a) și (8.15b), deducem că  $C_{ij}$  sunt, în determinantul  $\Delta$  al sistemului (8.15a), cofactorii mărimilor  $S_{ij}$ , divizați prin valoarea lui  $\Delta$ , adică, de exemplu:

$$C_{11} = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} S_{22} & S_{32} & S_{N2} \\ S_{23} & S_{33} & S_{N3} \\ \dots & \dots & \dots \\ S_{2N} & S_{3N} & \dots & S_{NN} \end{vmatrix}$$

(8.16.a)

$$C_{12} = C_{21} = -\frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} S_{21} & S_{31} & \dots & S_{N1} \\ S_{23} & S_{33} & \dots & S_{N3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{2N} & S_{3N} & \dots & S_{NN} \end{vmatrix}$$

unde:

$$\Delta = \begin{vmatrix} S_{11} & S_{21} & \dots & S_{N1} \\ S_{12} & S_{22} & \dots & S_{N2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{1N} & S_{2N} & \dots & S_{NN} \end{vmatrix} \quad (8.16b)$$

**8.10.** Consider the situation where only one other conductor is near enough to influence the first conductor. Suppose that the charges on the two conductors are equal (in magnitude) and opposite. Such an arrangement is known as a capacitor or condenser. Show that there is a constant  $C$ , so that  $Q=C(V_1-V_2)$  where  $Q=Q_1$ . This constant also depends only on the geometry and is called the capacitance for a given pair of conductors. Describe  $C$  in terms of self-capacitances and mutual capacitances.

Note that an experiment in which  $Q$  is measured by a ballistic galvanometer and  $V_1-V_2$  by a potentiometer can easily be performed in the laboratory. Their proportionality, and thus the constancy of  $C$  can be verified with high accuracy.

În continuare vom studia un sistem de doi conductori care interacționează electrostatic, sistem pe

care îl numim *condensator electric*. Vom considera că primul conductor poartă sarcina  $Q$ , iar al doilea o sarcină egală în modul, dar de semn contrar,  $-Q$ . Sistemul (8.15b) este format în acest caz din două ecuații:

$$\begin{aligned} Q &= C_{11}V_1 + C_{21}V_2 \\ -Q &= C_{12}V_1 + C_{22}V_2 \end{aligned} \quad (8.17)$$

Ne întrebăm dacă există o constantă  $C$ , specifică sistemului format de cei doi conductori, astfel încât  $Q=C(V_1-V_2)$ . Înlocuind în ecuațiile (8.17), obținem un sistem liniar și omogen în necunoscutele  $V_1, V_2$ :

$$\begin{cases} (C_{11}-C)V_1 + (C_{12}+C)V_2 = 0 \\ (C_{21}+C)V_1 + (C_{22}-C)V_2 = 0 \end{cases} \quad (8.18)$$

Sistemul (8.18) are o soluție diferită de cea banală ( $V_1=0, V_2=0$ ), numai dacă determinantul sistemului este nul, adică  $\Delta=0$ . Această condiție este satisfăcută când constanta  $C$  are valoarea:

$$C = \frac{C_{11}C_{22} - C_{12}^2}{C_{11} + C_{22} + 2C_{12}} \quad (8.19)$$

Dacă, în plus, conductorii sunt identici, atunci  $C_{11}=C_{22}$ . Obținem:

$$C = \frac{C_{11} - C_{12}}{2} \quad (8.20)$$

Dacă al doilea conductor este legat la pământ, atunci  $V_2=0$ . În asemenea condiții, din (VII.18), deducem că  $C_{11} = -C_{21}$ . Din (8.20) rezultă imediat că  $C=C_{11}$ .



**8.11. Making an estimate of elastances.** In principle, we can find the value of  $C$  for a given pair of conductors by imagining a charge  $Q$  transferred from 1 to 2, and calculating the resultant potential difference. However, in practice it is possible to carry out accurate theoretical calculations only for some simple geometry. Suppose we have two conducting spheres of radii  $R_1$  and  $R_2$ . The distance  $r$  between their centers satisfies  $r \gg R_{1,2}$ . In these conditions, estimate the elastances.

Există cazuri în care distanța între conductorii care interacționează electric este mult mai mare decât propriile lor dimensiuni. În asemenea circumstanțe, elastanțele și coeficienții de capacitate se pot evalua ușor, cu precizie destul de mare, fără a apela la metode numerice. Un asemenea exemplu este oferit de două sfere metalice, cu distanța  $r$  între centre, mult mai mare decât razele lor  $R_{1,2}$ . Neglijând contribuțiile dipolare la valoarea potențialului (acestea sunt proporționale cu  $r^2$ ), potențialele sferelor încărcate cu sarcinile  $Q_1, Q_2$ , vor fi:

$$V_1 \cong K \frac{Q_1}{R_1} + K \frac{Q_2}{r} \tag{8.21}$$

$$V_2 \cong K \frac{Q_1}{r} + K \frac{Q_2}{R_2}$$

Comparând cu (8.14a), deducem că elastanțele au următoarele expresii:

$$S_{11} \cong K \frac{1}{R_1} = \frac{1}{C_1}$$

$$S_{12} = S_{21} \cong K \frac{1}{r} \quad (8.22)$$

$$S_{22} \cong K \frac{1}{R_2} = \frac{1}{C_2}$$

Înlocuind egalitățile (8.21) în (8.15a), se calculează coeficienții de capacitate și de influență:

$$C_{11} \cong \frac{\frac{1}{K^2} r^2 C_1}{\frac{1}{K^2} r^2 - C_1 C_2}$$

$$C_{12} = C_{21} \cong -K \frac{1}{r} C_1 C_2$$

(8.23)

$$C_{22} \cong \frac{\frac{1}{K^2} r^2 C_2}{\frac{1}{K^2} r^2 - C_1 C_2}$$

În aceste condiții, relațiile (8.19) pot fi utilizate pentru a evalua capacitatea  $C$  a sistemului format de cei doi conductori.

Trebuie să observăm că, *în general, un asemenea sistem nu reprezintă un condensator cu influență totală.*

## **CAPITOLUL 9 OPTICĂ**

**Viteza de fază și viteza de grup; Interferența  
pachetelor de undă**

**Phase velocity and group velocity ; Interference of  
wave packets.**

**© ANDREI BELEA, 1999**

**9.1.A** *The propagation of a polychromatic wave (a wave packet) in a dispersive medium illustrates the difference between the group and wave velocity concepts. Hereafter we shall symbolise them by  $U$  and  $V$  respectively. Using  $\omega$  and  $k$  to mean the angular velocity and the wave vector modulus, we note the following definitions:*

$$\begin{cases} U = \frac{d\omega}{dk} \\ V = \frac{\omega}{k} \end{cases} \quad (9.1)$$

*If  $n$  represents the absolute refractive index of a dispersive medium ( $n = c/V$ ,  $c$  being the speed of light in vacuum) where a wave of wavelength  $\lambda$  propagates, show that the following relations hold*

$$\begin{cases} U = V \left( 1 + \frac{\lambda}{n} \frac{dn}{d\lambda} \right) \\ \frac{1}{U} = \frac{1}{V} - \frac{\lambda_0}{c} \frac{dn}{d\lambda_0} \end{cases} \quad (9.2)$$

$\lambda_0$  meaning the absolute (in vacuum) wavelength of wave involved.

**B.** A point source emitting a polychromatic radiation is used as primary source in a Young interferometer. Let  $m$  specify the order of interference. We get a state of interference independent of  $\lambda$  (an achromatic fringe) for those orders of interference that satisfy the following (achromatic) condition

$$\frac{\partial m}{\partial \lambda} = 0 \quad (9.3)$$

The initial fringe system will undergo a displacement when we cover one hole of the device by a plane-parallel plate. Suppose that  $g$  means the thickness of the plate, while  $n(\lambda)$  describes its dispersion properties. Show that one can manipulate the expression obtained for the displacement of an achromatic fringe, so as to emphasise on the fact that the interference of wave packets cannot take place unless there is simultaneous arrival of both participants on the spot of interaction (one can speak of space and time superposition).

9.1.A. *Propagarea unei radiații policromatice (pachet de undă) într-un mediu dispersiv evidențiază deosebirea între viteza de grup  $U$  și viteza de fază  $V$ . Folosind pulsația  $\omega$  și modulul vectorului de undă  $k$ , sunt valabile următoarele definiții:*

$$\begin{cases} U = \frac{d\omega}{dk} \\ V = \frac{\omega}{k} \end{cases} \quad (9.4)$$

*Dacă  $c$  exprimă viteza luminii în vid,  $n$  este indicele de refracție absolut ( $n = c/V$ ) al unui mediu dispersiv în care lungimea de undă este simbolizată prin  $\lambda$ , iar  $\lambda_0$  reprezintă lungimea de undă în vid, demonstrați că au loc relațiile*

$$\begin{cases} U = V \left( 1 + \frac{\lambda}{n} \frac{dn}{d\lambda} \right) \\ \frac{1}{U} = \frac{1}{V} - \frac{\lambda_0}{c} \frac{dn}{d\lambda_0} \end{cases} \quad (9.5)$$

**B.** *Un izvor punctiform, plasat în planul de simetrie al unui dispozitiv Young, emite o radiație policromatică. Fie  $m$  un ordin arbitrar de interferență. Vom obține o*

*stare de interferență independentă de  $\lambda$  (franje acromate) pentru toate ordinele  $m$  care satisfac condiția de acromatism*

$$\frac{\partial m}{\partial \lambda} = 0 \quad (9.6)$$

*Dacă acoperim una dintre fantele dispozitivului cu o lamă transparentă de grosime  $e$ , confecționată dintr-un material dispersiv având  $n = n(\lambda)$ , sistemul de franje va suferi o deplasare. Arătați că expresia deplasării unei franje acromate poate fi folosită pentru a evidenția că interferența grupurilor de undă nu poate avea loc decât dacă acestea ajung simultan în același punct (suferă o suprapunere spațio-temporală).*

## REZOLVARE

Pornind de la conținutul conceptelor desemnate prin viteza de grup și viteza de fază, lectura întregului text al problemei propuse ne conduce la ideea că între cele două părți (notate A și B) există o corelație. Astfel, prima parte avansează forma unor relații clasice (care trebuie demonstrate), în timp ce a doua parte,

invocând propagarea grupurilor de undă, va implica folosirea uneia dintre aceste legături.

**9.1.A.** Rezolvarea se bazează pe combinația a trei elemente: procedura de schimbare a variabilelor, tehnica derivării funcțiilor compuse și utilizarea unor relații fundamentale din optica fizică.

i) Demonstrația primei relații propuse are loc în două etape:

- Începem prin a schimba variabilele  $(k, \omega)$ , din definiția lui  $U$ , în  $(\lambda, V)$  care reprezintă variabilele expresiei (finale) care trebuie demonstrată. Vom folosi următoarele relații fundamentale

$$\begin{cases} \omega = kV \\ k = \frac{2\pi}{\lambda} \end{cases} \quad (9.7)$$

De aici, avem succesiv

$$\begin{aligned} U &= \frac{d}{dk} \omega = \frac{d}{dk} (Vk) = V + k \frac{d}{dk} (V) \\ &= V + \frac{2\pi}{\lambda} \frac{d}{2\pi d(\frac{1}{\lambda})} (V) = V - \lambda \frac{d}{d\lambda} V \end{aligned} \quad (9.8)$$



- În ultima expresie, forma relației la care trebuie să ajungem sugerează evidențierea apariției vitezei de fază  $V$  ca factor comun. Apoi, în paranteza care rezultă, trebuie să ținem seama de definiția indicelui de refracție,  $n=c/V$ . Astfel, găsim

$$\begin{aligned}
 U &= V \left( 1 - \frac{\lambda}{V} \frac{d}{d\lambda} V \right) = V \left[ 1 - \lambda \left( \frac{c}{V} \right) \frac{d}{d\lambda} \left( \frac{V}{c} \right) \right] \\
 &= V \left[ 1 - \lambda n \frac{d}{d\lambda} \left( \frac{1}{n} \right) \right] \quad (9.9)
 \end{aligned}$$

În sfârșit, efectuând derivarea lui  $n^{-1}$ , ajungem la următoarea relație finală

$$U = V \left( 1 + \frac{\lambda}{n} \frac{dn}{d\lambda} \right) \quad (9.10)$$

*Acest rezultat scoate în evidență două aspecte:*

- În medii nedispersive ( $n = \text{const.} \Rightarrow \frac{dn}{d\lambda} = 0$ ), viteza de grup este egală cu viteza de fază. O consecință importantă este că orice grup de undă își păstrează indefinit de mult timp forma inițială (cu alte cuvinte, în medii nedispersive, grupurile de undă nu se “destramă”).

- În medii cu dispersie normală (caz în care  $\frac{dn}{d\lambda} < 0$ )

viteza de grup este întotdeauna mai mică decât viteza de fază ( $U < V$ ).

ii) Pornim de la relația  $k = \omega/V$ , pentru a scrie

$$\frac{1}{U} = \frac{dk}{d\omega} = \frac{d}{d\omega} \left( \frac{\omega}{V} \right) = \frac{1}{V} + \frac{\omega}{c} \frac{d}{d\omega} (n) \quad (9.11)$$

unde am implicat și definiția  $n = c/V$ .

Pentru spațiul vid, notând prin  $k_0$  modulul vectorului de undă asociat pulsației  $\omega$ , avem

$$\omega = ck_0 = \frac{2\pi c}{\lambda_0} \quad (9.12)$$

de aici

$$\frac{d}{d\omega} = -\frac{2\pi c}{\omega^2} \frac{d}{d\lambda_0} = -\frac{\lambda_0}{\omega} \frac{d}{d\lambda_0} \quad (9.13)$$

încât, în final

$$\frac{1}{U} = \frac{1}{V} - \frac{\lambda_0}{c} \frac{dn}{d\lambda_0} \quad (9.14)$$

**b)** Situația descrisă în enunțul problemei este ilustrată în desenul următor. Potrivit teoriei ondulatorii, urmând principiul lui Huygens, în prezența sursei primare  $I$ ,

fantele  $I_1$  și  $I_2$  ale interferometrului Young devin sursele unor unde sferice secundare. Acestea repetă comportarea temporală a emisiei izvorului  $I$ . În cazul problemei, deoarece sursa  $I$  este policromatică urmează că izvoarele  $I_1$  și  $I_2$  vor emite la rândul lor câte un pachet de undă. Ecranul  $E$  permite observarea rezultatului produs de suprapunerea (coincidența spațială) undelor provenite de la  $I_1$  și  $I_2$ .

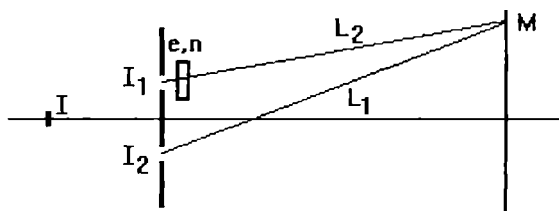


Fig.9.1 Interferometrul Young

Comentariu:

În aranjamentul ideal (clasic) al interferometrului Young, se folosește ca sursă primară  $I$  un izvor monocromatic. Din acest motiv și sursele secundare  $I_1$  și  $I_2$  vor emite radiații monocromatice. Potrivit analizei armonice (Fourier), *implicația monocromaticității este*

*aceea că cele trei izvoare emit unde care trebuie să dureze nelimitat în timp.* Cu alte cuvinte, atunci când sursele  $I$ ,  $I_1$  și  $I_2$  sunt monocromatice, emisia lor constă din trenuri de undă infinit lungi (sursele se află în regim de emisie permanentă). Este deci intuitiv că undele care ajung în punctul  $M$  (sau în oricare alt punct al ecranului  $E$ ) vor coexista (adică, vor coincide spațio-temporal) fără intervenția nici unei condiții speciale. În concluzie, pentru undele monocromatice coincidența spațio-temporală a undelor în  $M$  se realizează în mod automat.

În mod opus situației standard, *atunci când sursa  $I$  este policromatică, emisia ei constă în trenuri de undă cu lungime finită.* Același lucru este avut în vedere atunci când se spune că emisia unui izvor policromatic constă în pachete de undă (expresie care sugerează la rândul ei durata finită a procesului de emisie). Analiza armonică poate fi din nou invocată pentru a susține existența unei legături stricte între policromaticitate și durata finită în timp a semnalelor. Urmând caracteristicile sursei primare  $I$ , sursele  $I_1$  și  $I_2$

vor emite pachete de undă. Pentru ca aceste pachete să aibă șansa de a interacționa (prin interferență) în punctul  $M$  al ecranului  $E$ , este evident că ele trebuie să se “suprapună”. Din acest motiv studiul explicit al condiției de coincidență spațio-temporală a pachetelor de undă este semnificativ pentru caracterizarea procesului de interferență în care acestea ar putea fi implicate. Este interesant să remarcăm faptul că, atunci când este vorba despre procese de interferență între pachete de undă, avem la dispoziție două căi distincte pentru a analiza situația fizică. Una dintre acestea se sprijină pe conceptul de *sistem de franje acromate*, și (în mod evident) se dezvoltă în “interiorul” teoriei ondulatorii. A doua reprezentare este de tip “mecanicist”, apropiindu-se de stilul interpretării teoriei corpusculare a luminii. Din această perspectivă, procesul de interferență poate avea loc numai acolo unde se realizează *coincidența spațio-temporală a pachetelor de undă*. Așadar, partea a doua a problemei pe care o analizăm ne propune să

demonstrăm echivalența celor două interpretări la care ne-am referit.

Pentru a fixa ideile, să admitem că punctul  $M$  este astfel situat pe ecranul  $E$  încât diferența drumurilor optice ale celor două pachete de undă corespunde unui maxim. Astfel

$$\delta = L_1 - (L_2 - e) - n(\lambda)e = m\lambda \quad (9.15)$$

Din această relație găsim că ordinul de interferență  $m$  se poate scrie ca

$$m = \frac{L_1 - L_2 + e(1 - n)}{\lambda} \quad (9.16)$$

În punctul  $M$ , condiția de interferență acromatică cere

$$\frac{dm}{d\lambda} = -\frac{1}{\lambda^2} [L_1 - L_2 + e(1 - n)] - \frac{1}{\lambda} e \frac{dn}{d\lambda} = 0 \quad (9.17)$$

Observații:

- Potrivit expresiei anterioare, în medii dispersive ( $n = n(\lambda)$ ) nu există o *franșă perfect acromată* (a cărei existență este legată de verificarea condiției

$(\frac{dm}{d\lambda} = 0; \forall \lambda)$ . Totuși, dacă folosim în mod explicit

funcția de dispersie (de exemplu prin intermediul relației Cauchy  $n = A + b/\lambda^2$ ), atunci condiția  $dm/d\lambda = 0$  produce o valoare concretă a lungimii de undă  $\lambda_a$ . Spunem că franja acromată se realizează în jurul acestei lungimi de undă.

- Notând cu  $[g]$  partea întreagă a expresiei  $g$  și folosind forma explicită a lui  $m$  găsim

$$m = \left[ e \frac{dn}{d\lambda} \right] \quad (9.18)$$

Mediile de interes optic prezintă o dispersie mică. Din acest motiv, relația precedentă implică  $m = 0$ . Așadar, franja acromată este cea de ordinul zero.

Pentru ca perechile de pachete de undă, emise de către fantele Young  $I_1$  și  $I_2$ , să coincidă spațio-temporal în  $M$ , trebuie ca "timpii de zbor" pe distanțele  $L_1$  și  $L_2$  să fie egali.

Expresia lui  $dm/d\lambda$  se poate pune sub forma

$$\begin{aligned}
\frac{L_1}{c} &= \frac{L_2 - e}{c} + \frac{en(\lambda)}{c} - \frac{\lambda e}{c} \frac{dn}{d\lambda} \\
&= \frac{L_2 - e}{c} + \frac{n(\lambda)}{c} e \left(1 - \frac{\lambda}{n} \frac{dn}{d\lambda}\right) \\
&= \frac{L_2 - e}{c} + \frac{e}{U}
\end{aligned} \tag{9.19}$$

Or, așa cum am demonstrat anterior, în vid (mediu nedispersiv) pachetul de undă se deplasează păstrându-și forma, cu viteza de grup  $U_{vid}$ . Trebuie deci să avem

$$U_{vid} = V_{vid} = c \tag{9.20}$$

În consecință, relația dedusă din ecuația  $dm/d\lambda = 0$  devine

$$\frac{L_1}{U_{vid}} = \frac{L_2 - e}{U_{vid}} + \frac{e}{U} \tag{9.21}$$

cea ce exprimă în mod exact condiția de egalitate a timpilor de zbor pentru pachetele de undă care se propagă pe cele două căi ale interferometrului specificate prin  $L_1$  și  $L_2$ . Punând acest rezultat sub o formă succintă, scriem

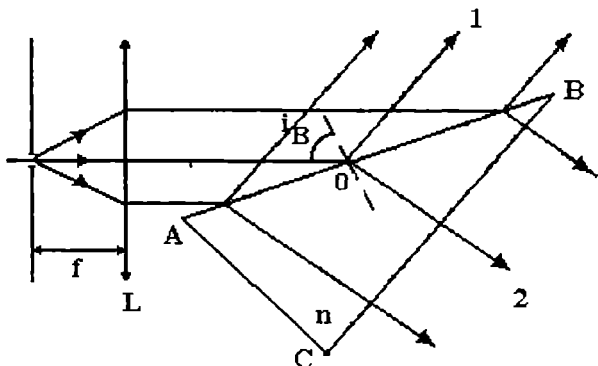
$$t_{L_1} = t_{L_2} \tag{9.22}$$

*corespunzător interpretării propuse în enunț.*



## Amestecuri de lumină polarizată; Interferența în lumină polarizată

9.2. A parallel monochromatic light beam, produced as



shown in the above figure, falls under an Brewsterian angle of incidence, on the optic prism ABC.

a) Let  $n$  mean the absolute refractive index of the optic prism. Find the required value for the angle  $B$  so that the transmitted beam crosses  $BC$  at right angle;

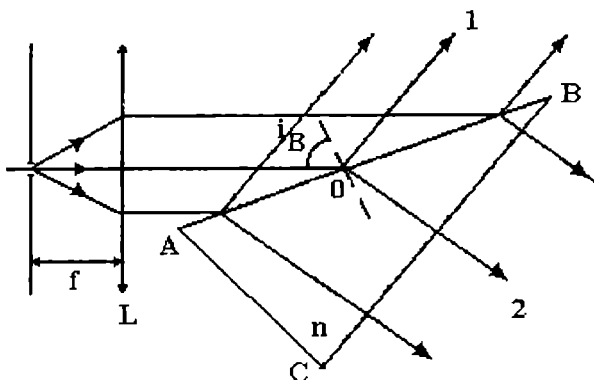
b) Indicate a possible completion of the arrangement in order to bring the two beams, marked as 1 and 2, to superposition and interference;

c) Using, in a symbolic manner only, the reflection and refractive coefficients (Fresnel's coefficients) for the

amplitudes, write down the intensity ratio of the two emerging beams  $I_1/I_2$ ;

d) Indicate the supplementary optical elements required to be used in the initial arrangement, in order to make the two emerging beams interfere with modulation factor equal to unity (nil minima).

**9.2. Fascicolul paralel monocromatic obținut așa cum**



este ilustrat în figura alăturată, cade sub incidența Brewster pe prisma optică ABC.

a) Considerând cunoscut indicele de refracție  $n$ , determinați unghiul  $B$  pentru ca fascicolul transmis să străbată perpendicular fața  $BC$ ;

- b) *Arătați cum trebuie continuat aranjamentul pentru ca fasciculele 1 și 2 să se suprapună și să interfere;*
- c) *Folosind formal coeficienții Fresnel de reflexie și transmisie pentru amplitudini, scrieți raportul de intensitate între cele două fascicule  $I_1/I_2$ ;*
- d) *Arătați ce suplimentări trebuie aduse schemei experimentale pentru a obține interferența cu grad de modulare unitar (minime nule).*

## **Rezolvare**

Sursele uzuale de lumină emit unde policromatice, incoerente și nepolarizate (lumină naturală). În aceste condiții, problema pune în discuție o schemă experimentală care permite obținerea unor fascicule coerente (prin diviziune de amplitudine) capabile de a produce fenomenul de interferență.

După cum este știut, în cazul radiației luminoase, pentru obținerea fenomenelor de interferență, nu este suficient să dispunem de două (sau mai multe) fascicule coerente (fascicule care prezintă o diferență de fază constantă în timp). Urmare a structurii vectoriale a câmpurilor optice (în care vectorii de câmp

electric și magnetic transportați de undele luminoase “vibrează” într-un plan perpendicular direcției de propagare a undei), coerența trebuie să se asocieze unor stări de polarizare identice pentru undele implicate (în acord cu observațiile experimentale ale lui Fresnel și Arago).

Dacă ne referim la interferența a două unde coerente, care au aceeași stare de polarizare, dar prezintă intensități distincte,  $I_1$  și  $I_2$ , atunci variația intensității în câmpul de interferență este dată de următoarea relație

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\delta) \quad (9.23)$$

în care  $\delta$  exprimă diferența de fază existentă între cele două unde în punctul de suprapunere (punctul de calcul). Cazul cel mai favorabil pentru observarea interferenței se realizează atunci când cele două unde coerente, polarizate similar, au intensități egale. În acest caz dacă notăm cu  $A$  amplitudinea uneia dintre unde atunci intensitatea în câmpul de interferență variază de la 0 la  $4A^2$  (respectiv de la 0 la  $4I_1$  pe scara intensităților).

Distribuția intensității în câmpul de interferență poate fi prezentată și sub forma

$$I = (I_1 + I_2)(1 + m \cos(\delta)) \quad (9.24)$$

unde

$$m = 2 \frac{\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2} \quad (9.25)$$

*definește gradul de modulare al franjelor.*

După cum observăm, vizibilitatea cea mai bună a câmpului interferențial se obține atunci când  $m = 1$  (minimele sunt nule). Această valoare a lui  $m$  exprimă modularea totală sau unitară a franjelor și la acest fenomen se referă ultimul punct al problemei.

Incidența brewsteriană pe suprafața de separare a două medii optice distincte are loc atunci când are loc relația (legea lui Brewster)

$$\tan(i_b) = \frac{n_2}{n_1} \quad (9.26)$$

în care  $n_1$  și  $n_2$  desemnează indicele de refracție al mediului de incidență, respectiv al celui de emergență, iar  $i_b$  exprimă valoarea unghiului Brewster.

Experimental (și în acord cu formulele lui Fresnel), reflexia brewsteriană conduce la obținerea unui fascicol reflectat care este total polarizat. Starea de polarizare este liniară. Vectorul electric al undei reflectate oscilează după o direcție perpendiculară pe planul de incidență. Din această cauză, reflexia brewsteriană constituie una dintre modalitățile experimentale de obținere a unei radiații total polarizate în mod liniar.

a) Asociind invariantul Descartes  $n \cdot \sin(i) = \text{const.}$  cu legea reflexiei brewsteriene putem arăta că în acest caz, raza transmisă este perpendiculară pe raza reflectată.

Potrivit indicațiilor figurii precedente, putem scrie

$$\tan(i_b) = \frac{n_2}{n_1} = \frac{\sin(i_b)}{\sin(t)} \quad (9.27)$$

sau, deoarece  $v + i_b = \pi/2$

$$\frac{\cos(v)}{\sin(v)} = \frac{\cos(v)}{\sin(t)} \quad (9.28)$$

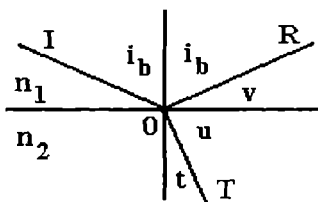


Fig.9.2 Geometria reflexiei la unghi Brewster

încât unghiurile  $t$  și  $v$  trebuie să fie egale. Aceasta impune  $u = i_b$ . Reconsiderând relația  $v + i_b = \pi/2$ , urmează ca și  $u + v = \pi/2$ , așa încât  $TO$  este perpendicular pe  $OR$ . Să exploatăm acest rezultat în legătură cu prisma  $ABC$ , unde  $OR$  se confundă cu direcția fascicolului 1 iar  $OT$  cu cea a fascicolului 2. Pentru ca fascicolul 2 să traverseze perpendicular fața  $BC$  a prisme trebuie ca unghiul  $B$  să fie complementar unghiului  $BO_2$ , care potrivit discuției precedente coincide cu  $u$ . Astfel, fascicolul 2 iese perpendicular pe fața  $BC$  dacă unghiul  $B$  este egal cu  $v$ , ceea ce revine la a afirma paralelismul feței  $BC$  cu direcția razei reflectate  $OR$ .

b) Fasciculele 1 și 2 sunt obținute prin divizarea amplitudinii fascicolului care cade pe fața  $AB$  a prismei optice. În mod suplimentar, fasciculele obținute suferă și fenomene de polarizare (mai corect spus, suferă o "filtrare" a stărilor de polarizare prin intermediul fenomenului de reflexie la unghi Brewster). Ca urmare, este suficient să realizăm o suprapunere spațială a celor două fascicule emergente pentru a obține fenomene de interferență. Una dintre modalitățile de a realiza suprapunerea spațială, este aceea de a folosi două oglinzi plane dispuse așa cum este ilustrat în figura de mai jos.

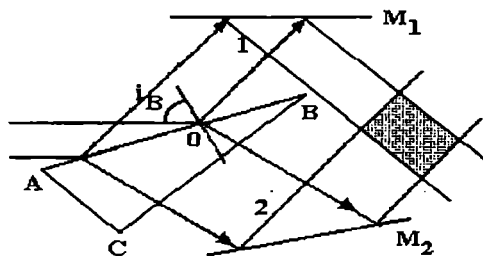


Fig.9.3.Completarea geometriei de interferență



Spațiul hașurat cuprinde zona de interferență care este limitată de extensia laterală (deschiderea) fasciculelor.

c) Fasciculele care ajung în zona de interferență provin dintr-un fascicol primar de lumină nepolarizată (este vorba despre fascicolul care cade pe fața  $AB$  a prisme). Or, este știut că lumina nepolarizată poate fi reprezentată ca suprapunere a două componente ortogonal polarizate și incoerente între ele. Să desemnăm prin  $\sigma$  și  $\pi$  componentele radiației incidente pe fața  $AB$  care sunt polarizate în planul de incidență respectiv, perpendicular pe acesta.

Structura energetică a radiației nepolarizate provine în părți egale din cele două componente la care ne-am referit mai sus. Drept urmare putem scrie

$$I_{\sigma} = I_{\pi} = I / 2 \quad . \quad (9.29)$$

Prin natura mărimilor conținute, relația precedentă favorizează continuarea discuției cu referire la coeficienții Fresnel energetici. Desemnând prin  $R$  și  $T$  acești coeficienți pentru reflexie și transmisie, vom utiliza indicii  $\sigma$  și  $\pi$  pentru a identifica o anumită componentă de polarizare.

În cazul incidenței brewsteriene, fascicolul emergent 1 este format în întregime de radiație polarizată  $\pi$ . Cantitativ, această fascicol emergent nu preia totuși decât o parte din componenta  $\pi$ , anume

$$I_1 = R_\pi(i_b)I_\pi = \frac{1}{2}R_\pi(i_b)I \quad (9.30)$$

Cealaltă parte, adică

$$I_{1\pi} = \frac{1}{2}[1 - R_\pi(i_b)]I = \frac{1}{2}T_\pi(i_b)I \quad (9.31)$$

ajunge pe fața  $BC$  (în ipoteza unei prisme fără absorbție), pe care o străbate în proporția (energetică)

$$I_{2\pi} = T'_\pi(0)I_{1\pi} = \frac{1}{2}T'_\pi(0)T_\pi(i_b)I \quad (9.32)$$

La incidența Brewster, componenta  $\sigma$  a radiației incidente trece în întregime prin interfața  $AB$ , încât avem

$$I_{1\sigma} = \frac{1}{2}T_\sigma(i_b)I = \frac{I}{2} \quad (9.33)$$

în timp ce prin  $BC$  nu străbate decât procentul

$$I_{2\sigma} = T'_\sigma(0)I_{1\sigma} = \frac{1}{2}T'_\sigma(0)I \quad (9.34)$$

În acest fel deducem că fascicolul 2, format energetic din contribuția aditivă a celor două componente de polarizare, va avea intensitatea

$$I_2 = I_{2\sigma} + I_{2\pi} = \frac{1}{2} [T'_\sigma(0) + T'_\pi(0)T_\pi(i_b)]I \quad (9.35)$$

Raportul de intensități  $I_1/I_2$  se exprimă mai întâi ca

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_\pi(i_b)}{T'_\sigma(0) + T'_\pi(0)T_\pi(i_b)} \quad (9.36)$$

iar apoi se aduc la o formă finală folosind

$$\begin{cases} R(i) = r(i)r^*(i) \\ T(i) = \frac{n_2 \cos(t)}{n_1 \cos(i)} t(i)t^*(i) \end{cases} \quad (9.37)$$

în care  $r$  și  $t$  sunt coeficienții Fresnel pentru amplitudini, iar (\*) desemnează conjugarea complexă, se ajunge ușor la forma finală a raportului  $I_1/I_2$ .

d) Discuția anterioară ne ajută să identificăm elementele care, în cadrul aranjamentului propus de textul problemei, se opun obținerii a două fascicule emergente a căror interferență să prezinte un grad unitar de modulare. Pentru fixarea ideilor, să presupunem că am realizat montajul descris la punctul (b). Potrivit comentariilor de la punctul (c) este clar că în structura fasciculelor 1 și 2, polarizare de același tip

și coerență nu prezintă decât componentele  $I_1 = R_\pi (i_b)I_\pi$  și  $I_{2\pi} = T_\pi'(0) T_\pi (i_b)I/2$ . Prin suprapunerea fasciculelor 1 și 2, componentele menționate, având intensități inegale, vor forma franje cu o vizibilitate mai mică decât cea optimă. În plus, contrastul tabloului interferențial va fi diminuat în continuare prin iluminarea uniformă produsă de către componenta incoerentă și polarizată ortogonal, care are intensitatea  $I_{2\sigma} = T_\sigma'(0) I/2$ . Astfel, pentru a obține interferența cu grad de modulare unitar putem spre exemplu să intercalăm un polarizor imediat după lentila L. În acest fel, pierdem jumătate din intensitatea luminoasă care ajunge pe fața AB a prisme, dar câștigăm coerența fasciculelor emergente 1 și 2. Aceste două fascicule trebuie aduse la aceeași stare de polarizare și la aceeași intensitate, ceea ce se poate realiza obligându-le să treacă printr-o pereche de polarizori cu axele paralele și având înclinări convenabile pentru a compensa diferențele de intensitate (legea Malus).

# **CAPITOLUL 10\_ FIZICĂ ATOMICĂ ȘI NUCLEARĂ**

**© ANDREI IONESCU, 1999**

**10.1.** Atomic hydrogen in gas state, forming a layer of thickness  $d = 1$  cm, is irradiated at normal incidence with a flux of homogeneous and monochromatic radiation with the frequency  $\nu = 2.46609 \times 10^{15}$  Hz and energetic illumination  $E = 10$  kW/m<sup>2</sup>. The coefficient of linear attenuation in hydrogen is  $k = 100$  m<sup>-1</sup> and the average lifetime of the excited state of atomic hydrogen is  $\tau = 10^{-8}$  s. One can ignore: electron spin and the diffusion of light. The electromagnetic wave is given by the equation

$$\vec{E}(z, t) = E_0 \left[ \vec{i} \cos\left(\omega t - \frac{2\pi z}{\lambda}\right) + \vec{j} \cos\left(\omega t - \frac{2\pi z}{\lambda} - \frac{\pi}{2}\right) \right]$$

Find out the direction and the value of the magnetic dipole moment per unit volume of hydrogen.

10.1. Hidrogenul atomic în stare gazoasă sub forma unui strat cu grosimea  $d = 1$  cm este iradiat la incidență normală cu un flux omogen de radiație monocromatică cu frecvența  $\nu = 2,46609 \times 10^{15}$  Hz și iluminarea energetică  $E = 10$  kW/m<sup>2</sup>. Coeficientul de atenuare liniară prin hidrogen este  $k = 100$  m<sup>-1</sup>, iar

timpul mediu de viață al stării excitate a hidrogenului atomic este  $\tau = 10^{-8}$  s. Se pot ignora: spinul electronului și difuzia luminii. Unda electromagnetică este descrisă de

$$\vec{E}(z, t) = E_0 \left[ \vec{i} \cos\left(\omega t - \frac{2\pi z}{\lambda}\right) + \vec{j} \cos\left(\omega t - \frac{2\pi z}{\lambda} - \frac{\pi}{2}\right) \right]$$

Să se determine direcția, sensul și mărimea momentului de dipol magnetic pe unitatea de volum al hidrogenului.

$$R_H = 109677 \text{ cm}^{-1}$$

$$\mu_B = 9,273 \times 10^{-24} \text{ J/T}$$

$$h = 6,625 \times 10^{-34} \text{ J.s}$$

$$c = 2,998 \times 10^8 \text{ m/s}$$

$$e = 2,71828 \dots$$

$$|e| = 1,6 \times 10^{19} \text{ C}$$

$$m_0 = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$$

## REZOLVARE

Unda electromagnetică descrisă de

$$\vec{E}(z, t) = E_0 \left[ \vec{i} \cos\left(\omega t - \frac{2\pi z}{\lambda}\right) + \vec{j} \cos\left(\omega t - \frac{2\pi z}{\lambda} - \frac{\pi}{2}\right) \right]$$

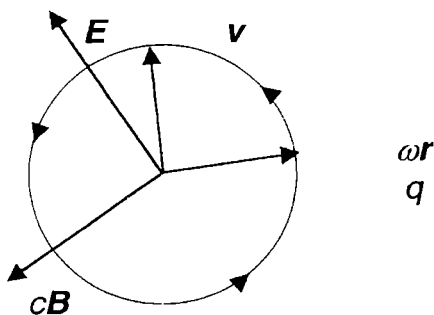
este o undă circular polarizată. Dacă este absorbită de purtătorii de sarcină ea transferă acestora energie, impuls și moment cinetic. Transferul de energie este bine cunoscut; transferul de impuls explică fenomenul de presiune a radiației. Să arătăm că unda circular polarizată transferă moment cinetic unei particule de sarcină  $q$ .

Inducția  $\vec{B}$  este legată de  $\vec{E}$  prin relația  $c\vec{B} = \hat{z} \times \vec{E}$ , unde  $\hat{z}$  iese din planul hârtiei.

Asupra particulei acționează forța  $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ .

Sub acțiunea acestei forțe particula se va

roti în planul  $x,y$ . Ea se va deplasa puțin și în direcția  $+z$  din cauza presiunii radiației. Pe noi ne interesează momentul forței,  $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ . Fie





$$\omega \vec{\tau} = \omega \vec{r} \times \vec{F} = \omega \vec{r} \times q \vec{E} + \omega \vec{r} \times q (\vec{v} \times \vec{B}).$$

$\vec{v}$  fiind tangent la traiectorie, este perpendicular pe rază iar  $v = \omega r$ . Se vede că  $\vec{v} \times \vec{B}$  are direcția lui  $\vec{z}$  și deci  $\vec{v} \times (\vec{v} \times \vec{B})$  are direcția lui  $\vec{r}$  dar sensul opus. Cum  $\vec{r}$  se rotește, și direcția lui  $\omega \vec{r} \times q (\vec{v} \times \vec{B})$  se va roti. Media sa pe un ciclu va fi zero. Mărimea  $\omega \vec{r} \times q \vec{E}$  are direcția și sensul lui  $\vec{z}$  și rămâne constantă în timpul rotației, iar modulul său este  $\omega r E$  sau  $\vec{v} \cdot \vec{E}$ .

Astfel, media în timp a momentului forței va fi

$$\langle \vec{\tau} \rangle = \left\langle \frac{d\vec{L}}{dt} \right\rangle = \frac{\vec{z}}{\omega} \langle q \vec{v} \cdot \vec{E} \rangle = \frac{\vec{z}}{\omega} \langle \vec{v} \cdot \vec{F}_e \rangle = \frac{\vec{z}}{\omega} \left\langle \frac{dW}{dt} \right\rangle$$

Produsul scalar  $\vec{v} \cdot \vec{F}_e$  este puterea pe care unda o cedează particulei  $q$ . De remarcat faptul că numai câmpul electric poate contribui la lucru mecanic, forța magnetică Lorentz fiind perpendiculară pe viteză. Deci, particula cu sarcină  $q$  care absoarbe energia  $W$  de la o undă plană progresivă, circular polarizată, absoarbe și momentul cinetic  $\vec{L}$  dat de

$$\vec{L} = \vec{\omega} \frac{W}{\omega}$$

unde  $\vec{\omega} = \pm \vec{z}$ , după cum polarizarea este în sensul burghiului drept sau în sens contrar.

Considerând că absorbția luminii se face pe sisteme cuantice, adică transferul de energie se face în porții  $\Delta W = \hbar\omega$ , odată cu absorbția cuantei se va absorbi

(transfera) și un moment cinetic  $\frac{\Delta W}{\omega} = \frac{\hbar\omega}{\omega} = \hbar$ . Putem

spune că fotonii descriși de unda circular polarizată poartă fiecare un moment cinetic  $\hbar$  ( $=h/2\pi$ ). Reamintim

că energia fotonului este  $\hbar\omega = h\nu$ , iar impulsul său

$$\frac{\hbar\omega}{c} = \frac{h}{\lambda}.$$

Radiația cu iluminarea energetică  $E = 10 \text{ kW/m}^2$  corespunde unui flux incident de fotoni

$$\Phi_0 = \frac{E}{h\nu}.$$

La ieșirea din mediul de hidrogen regăsim un flux mai mic

$$\Phi = \Phi_0 e^{-kd}$$

Diferența

$$\Delta\Phi = \Phi_0(1 - e^{-kd}) = \frac{E}{h\nu}(1 - e^{-kd})$$

reprezintă numărul de fotoni pe unitatea de timp și pe unitatea de suprafață care se absorb în hidrogen. Remarcăm că frecvența undei  $\nu$  este egală cu frecvența tranziției între stările cu  $n=1$  și  $n=2$  ale atomului de hidrogen. Starea fundamentală este caracterizată de  $n_1=1$  și  $l_1=0$  (stare s); starea cu  $n_2=2$  poate avea atât  $l=0$  cât și  $l=1$  dar, pentru a conserva momentul cinetic,  $\Delta l$  trebuie să fie egal cu 1 întrucât fotonul transferă momentul cinetic  $\hbar$ .

Deci, populația atomilor pe nivelul  $2p$  crește în fiecare secundă cu  $\Delta\Phi \cdot S$  în volumul  $S \times d$ . O parte însă din acești atomi se dezexcită, timpul mediu de viață fiind  $\tau$ . Fie  $dN_1$  creșterea în intervalul  $dt$  a populației nivelului  $2p$  datorită absorbției radiației, iar  $dN_2$  descreșterea datorită dezexcitării. Atunci

$$dN_1 = \Delta\Phi S dt,$$

$$dN_2 = -\frac{N(t)}{\tau} dt,$$

unde  $dN_2 = -\frac{N(t)}{\tau} dt$  se obține diferențind expresia care exprimă evoluția în timp a populației nivelului  $2p$ , dacă n-ar exista absorbția de radiație:

$$N(t) = N_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Dar,

$$dN = dN_1 + dN_2 = \left( \Delta\Phi S - \frac{N(t)}{\tau} \right) dt .$$

În stare staționară  $\frac{dN}{dt} = 0$ , adică  $N = \Delta\Phi \tau S$ . Numărul de atomi în starea  $2p$  în unitatea de volum va fi

$$\frac{N}{V} = \frac{\Delta\Phi}{d} \tau = \frac{E}{h\nu} \frac{\tau}{d} (1 - e^{-kd}) .$$

Cum fotonii transferă momentul cinetic pe direcția de propagare a undei, atomii din starea  $2p$  vor avea momentele cinetice orientate în aceeași direcție. Starea cu momentul cinetic orbital  $l=1$  are și un moment magnetic egal cu un magneton Bohr,  $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_0}$ , unde  $m_0$  este masa de repaus a electronului.

Momentul dipolar magnetic pe unitatea de volum, adică magnetizarea, va fi

$$M = \frac{N}{V} \mu_B = \frac{E}{h\nu} \frac{\tau}{d} (1 - e^{-kd}) \mu_B = \frac{E}{\omega} \frac{e}{2m_0} \frac{\tau}{d} (1 - e^{-kd}) .$$

$$M = 3,5864 \times 10^8 \text{ A/m.}$$

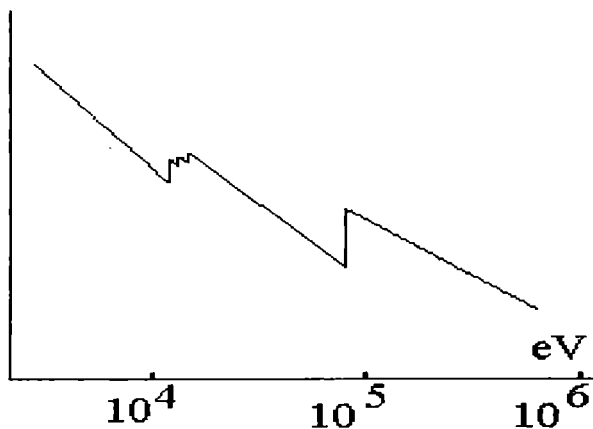
**10.2.** *It is suspected that the cobalt is very poorly mixed with the iron in a block of alloy. To see regions of high cobalt concentration, an x-ray is taken of the block.*

a) *Predict the energies of the K absorption edges of its constituents.*

b) *Then determine an x-ray photon energy that would give good contrast. That is, determine an energy of the photon for which the probability of absorption by a cobalt atom would be very different from the probability of absorption by an iron atom.*

**10.2.** *Se crede că într-o piesă confecționată dintr-un aliaj de fier cu cobalt acesta din urmă nu s-a amestecat bine cu fierul. Pentru a vedea zonele cu*

concentrație mai mare de cobalt s-a efectuat, în raze X, o radiografie a piesei.



- Preziceți energiile creștelor K de absorbție pentru fiecare din cei doi constituenți.
- Determinați apoi energia fotonului X care va conduce la contrastul cel mai bun, adică determinați energia fotonului pentru care probabilitatea de absorbție pentru atomul de cobalt este mult diferită de probabilitatea de absorbție pentru atomul de fier.

## REZOLVARE

După cum se știe, energia electronilor în atom este cuantificată. În cazul electronilor de pe păturile

superioare, corespunzând numerelor cuantice principale mari, prin tranziții între stări pot avea loc emisii sau absorbții ale radiației electromagnetice sub formă de fotoni în spectrul vizibil sau ultraviolet. În ceea ce privește păturile interne cele mai apropiate de nucleu corespunzând numerelor cuantice mici, tranzițiile dintre ele dau naștere fotonilor  $X$ . Emisia fotonilor  $X$  conduce la un spectru de linii, numit și spectrul caracteristic. Absorbția fotonilor  $X$  duce la crestele de absorbție.

Atunci când fotonii  $X$  sunt trimiși pe un material, o parte din ei trec prin material, o parte vor fi absorbiți direct și o altă parte vor fi împrăștiați Compton în mai multe procese, până la absorbția completă. Să considerăm cazul unor fotoni  $X$  cu energia foarte mare, adică lungime de undă foarte mică. Aceștia pot suferi două tipuri de interacții cu atomii materialului, difuzia Compton și efectul fotoelectric. Dacă energia fotonilor este mai mare decât energia de legătură de pe prima pătură (pătura  $K$ ) se poate produce efect fotoelectric prin scoaterea unui electron din această pătură.

Probabilitatea de a produce efect fotoelectric depinde slab de energia fotonului în acest domeniu, în schimb probabilitatea efectului Compton crește cu scăderea energiei fotonului. Am avea astfel, la energii descrescânde (de la dreapta la stânga) o creștere a probabilității de absorbție. Când însă energia fotonilor scade sub energia electronilor de pe pătura  $K$ , probabilitatea de absorbție scade brusc, întrucât efectul fotoelectric pe pătura  $K$  nu mai este acum posibil. Prin scăderea în continuare a energiei se observă din nou o creștere a absorbției până la un prag ce corespunde energiei electronilor de pe pătura  $L$ , și așa mai departe. După cum se vede în figură, avem niște creste de absorbție. În cazul creștelor  $K$ , energia electronilor de pe această pătură este similară celei a atomilor hidrogenoizi, considerând însă că o parte a sarcinii nucleului este ecranată. O aproximație rezonabilă ne spune că în locul sarcinii nucleare  $+Ze$  se poate considera  $+(Z-2)e$ .

În acest caz, energia păturii  $K$  va fi



$$E_K \approx 13,6 \frac{(Z-2)^2}{n^2} \text{ eV} = 13,6(Z-2)^2 \text{ eV} ,$$

unde 13,6 eV este energia de ionizare a atomului de hidrogen.

Este atunci nevoie, pentru a avea un contrast bun, să alegem energia fotonilor între energiile creștelor  $K$  pentru cele două tipuri de atomi, adică de fier și de cobalt. Fierul are  $Z=26$ , iar cobaltul  $Z=27$ . Deci,

$$E_K(\text{Fe})=13,6 \times (26-2)^2=7,83 \times 10^4 \text{ eV},$$

$$E_K(\text{Co})=13,6 \times (27-2)^2=8,50 \times 10^4 \text{ eV}.$$

Deci, cel mai bun contrast se va obține cu energia fotonilor în jurul valorii de  $8,2 \times 10^4$  eV, corespunzând unei lungimi de undă de  $1,5 \text{ \AA}$ . În acest caz, concentrațiile mai mari de cobalt din aliaj vor apărea în nuanțe de gri mai închise. Să nu uităm că o radiografie  $X$  este o imagine negativă, adică transmisiei mari îi va corespunde o impresiune (înnegrire) mai puternică a filmului.

**10.3.** *A beam of hydrogen atoms, emitted from an oven running at a temperature  $T=400 \text{ K}$ , is sent*

through a Stern-Gerlach magnet of length  $X=1$  m. The atoms experience a magnetic field with the gradient of  $10$  T/m. Calculate the transverse deflection of a typical atom in each component of the beam, due to the force exerted on its spin magnetic dipole moment, at the point where the beam leaves the magnet.

**10.3.** Un fascicul de atomi de hidrogen, emiși de un cuptor încălzit la  $400$  K, este trimis printr-un magnet Stern-Gerlach cu lungimea de  $1$  m. Atomii simt acțiunea unui câmp magnetic cu gradientul de  $10$  T/m. Calculați deflexia transversală medie a atomilor din fiecare subfascicul ce apare datorită forței exercitate asupra momentelor magnetice de spin, în locul unde fasciculul părăsește magnetul.

## REZOLVARE

Într-un câmp magnetic extern de inducție  $\vec{B}$  energia potențială a unui moment magnetic este

$$E_p = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} .$$

Ea va depinde de orientarea momentului magnetic  $\vec{\mu}$  față de direcția lui  $\vec{B}$ . Fie această direcție  $+z$ . În cazul

particulelor cuantice, energia are un spectru discret și, de asemenea, orientările momentului magnetic vor avea un spectru discret. Energia va fi  $E_p = -\mu_z B$ , unde  $\mu_z$  poate avea mai multe valori discrete.

Dupa cum se știe, între energia potențială și forță există relația

$$F_z = -\frac{dE_p}{dz}.$$

Dacă  $B$  este omogen (nu depinde de  $z$ ), nici energia potențială nu va depinde de  $z$ , iar asupra corpului nu va acționa nici o forță netă.

În caz contrar, apare forța

$$F_z = \mu_z \frac{dB_z(z)}{dz}$$

Termenul  $\frac{dB_z(z)}{dz}$  reprezintă gradientul pe direcția  $z$  a lui  $B$ . Asupra particulei de moment magnetic  $\vec{\mu}$  va acționa o forță ce depinde direct de gradientul lui  $B$ , dar și de orientarea lui  $\vec{\mu}$  față de  $\vec{B}$  prin intermediul lui  $\mu_z$ .

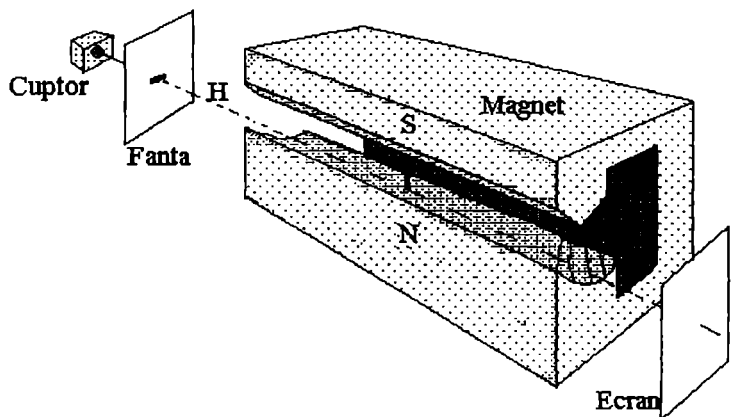
Un magnet Stern-Gerlach este un electromagnet în care piesele polare au un profil special, în așa fel încât să se obțină un câmp magnetic neomogen pe direcția  $z$  (vezi desenul).

Atomii de hidrogen în starea fundamentală au moment cinetic orbital zero, iar momentul magnetic orbital este tot zero. Singurul moment magnetic al atomului de hidrogen în starea fundamentală este cel dat de spinul electronic care are două proiecții pe direcția  $z$  (a câmpului  $\vec{B}$ ), și anume,  $\pm\mu_B$  ( $\mu_B$  este magnetonul Bohr). Pot apărea, astfel, două forțe egale și opuse ca sens:

$$F_z = \pm\mu_B \frac{dB(z)}{dz} .$$

Fiindcă diferența energetică între cele două stări este foarte mică (în comparație cu  $kT$  la temperatura de 400 K) cele două poziții ale spinului sunt egal probabile și fasciculul ce tece prin magnet se va despica în două subfascicule.

Viteza longitudinală tipică a unui atom de masă  $M$  ce traversează magnetul este



$$\frac{1}{2} M v_x^2 = \frac{3}{2} kT$$

Astfel

$$v_x = \sqrt{\frac{3kT}{M}}$$

timpul petrecut de atom la trecerea prin magnetul de lungime  $X$  este

$$t = \frac{X}{v_x} = \frac{X}{\sqrt{\frac{3kT}{M}}} = X \sqrt{\frac{M}{3kT}}$$

În acest timp însă, datorită forței  $F_z$ , apare o accelerație transversală  $a_z = F_z/M$ , astfel încât atomul va suferi o deflexie

$$Z = \frac{1}{2} a_x t^2 = \frac{1}{2} \frac{F_z}{M} \frac{X^2 M}{3kT} = \pm \frac{\frac{dB_z}{dz} \mu_B X^2}{6kT} =$$

$$= \pm \frac{10 \text{ T/m} \times 0,927 \times 10^{-23} \text{ A.m}^2 \times 1 \text{ m}^2}{6 \times 1,38 \times 10^{-23} \text{ J/K} \times 400 \text{ K}} = \pm 2,8 \times 10^{-3} \text{ m}$$

Separarea dintre cele două componente este mai mare de o jumătate de centimetru, deci este foarte ușor de observat.

**10.4.** *A beam of hydrogen atoms in their ground state is sent through a Stern-Gerlach magnet, which splits it into two components according to the two spin orientations. One component is stopped by a diaphragm at the end of the magnet, and the other continues into a second Stern-Gerlach magnet which is coaxial with the beam leaving the first magnet, but is rotated relative to the first magnet about their approximately common axes through an angle  $\alpha$ . There is a second diaphragm fixed on the end of the second magnet which also allows only one component to pass. Describe qualitatively how the intensity of the*

*beam passing through the second diaphragm depends on  $\alpha$*

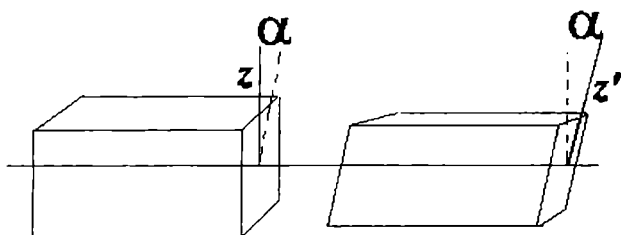
**10.4.** *Un fascicul de atomi de hidrogen în starea lor fundamentală sunt trimiși printr-un magnet Stern-Gerlach care îl despică în două subfascicule după cele două orientări ale spinului. La ieșirea din magnet unul dintre subfascicule este blocat de o diafragmă iar celălalt intră într-un al doilea magnet Stern-Gerlach care este coaxial cu fasciculul ce părăsește primul magnet, dar este rotit față de acesta cu un unghi  $\alpha$  în jurul axei, practic, comune. O a doua diafragmă este fixată la capătul celui de al doilea magnet care lasă să iasă, iarăși, numai un subfascicul.*

*Descrieți, calitativ, cum va depinde de  $\alpha$  fasciculul care trece de cea de a doua diafragmă.*

## **REZOLVARE**

Primul magnet Stern-Gerlach împreună cu diafragma a reușit să prepare un fascicul în care toți atomii au spinii electronilor cu aceeași proiecție pe axa  $z$ . Fie ea  $+\mu_B$ .

Axa  $z'$  a celui de al doilea magnet face unghiul  $\alpha$  cu primul. Dacă  $\alpha$  ar fi zero, și diafragma celui de al



doilea magnet ar avea aceeași orientare cu a primului, toți atomii care ies din primul magnet vor ieși și din al doilea. Fie  $I_0$  intensitatea fasciculului de atomi care intră în primul magnet.  $I_1 = I_0/2$  va fi intensitatea fasciculului care iese din primul magnet. Dacă notăm cu  $I_2(\alpha)$  intensitatea fasciculului de atomi ce ies din cel de al doilea magnet, rotit cu unghiul  $\alpha$  față de primul, vom avea

$$I_2(\alpha=0) = I_1 = I_0/2$$

Fie  $\alpha = \pi$  În acest caz orientarea momentelor magnetice față de direcția câmpului magnetic din cel



de al doilea magnet va fi inversată. Deflexia va fi contrară (față de sistemul laboratorului) celei de la unghiul  $\alpha=0$ . Fasciul emergent din cel de al doilea magnet va avea intensitatea

$$I_2(\alpha=\pi)=I_1=I_0/2,$$

întrucât, acum, și poziția diafragmei este inversată.

Fie, acum,  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ . În acest caz, direcția momentelor magnetice față de cea a câmpului magnetic este  $90^\circ$ . Dar, față de axa  $z'$ , care este noua axă de cuantificare, fiind singura care introduce o direcție privilegiată în spațiul, altfel, izotrop, pot exista doar două orientări: fie de-a lungul lui  $+z'$ , fie orientarea opusă,  $-z'$ . Trebuie să admitem că, în acest caz, în medie, jumătate din atomi vor avea proiecția spinului în sensul  $+z'$  și jumătate în sensul  $-z'$ .

Deci, prin diafragmă vor trece  $I_1/2$  atomi,

$$I_2(\alpha = \pi/2) = \frac{I_1}{2} = \frac{I_0}{4}.$$

Evident, pentru  $\alpha=2\pi$  vom găsi situația de la  $\alpha=0$ , iar pentru  $\alpha=3\pi/2$  găsim situația de la  $\alpha=\pi/2$ .

Este ușor de văzut că se verifică relația

$$I_2(\alpha) = I_1 \cdot \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

**10.5.** Consider a body rotating freely about a fixed axis. Apply the Wilson-Sommerfeld quantization rules, and show that the possible values of the total energy are predicted to be

$$E = \frac{\hbar^2 n^2}{2I}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

where  $I$  is the rotational inertia, or moment of inertia, about the axis of rotation.

**10.5.** Să considerăm un corp rigid ce se rotește liber în jurul unei axe fixe. Aplicându-se regulile de cuantificare Wilson-Sommerfeld, să se arate că valorile posibile ale energiei totale vor fi

$$E = \frac{\hbar^2 n^2}{2I}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

unde  $I$  este momentul de inerție (inerția de rotație) în jurul axei de rotație.

## REZOLVARE

Generalizând condițiile de cuantificare ale lui Planck și Bohr, în 1916 Wilson și Sommerfeld au stabilit *regulile de cuantificare*. Ele se referă la sisteme fizice ale căror coordonate sunt funcții periodice de timp. Pentru fiecare astfel de coordonată,  $q$ , există câte o condiție

$$\oint p_q dq = n_q h,$$

unde  $p_q$  este impulsul asociat coordonatei respective (de exemplu, pentru coordonata  $x$ , impulsul este tocmai  $p_x$ , pentru coordonata  $\theta$ , impulsul va fi de fapt momentul cinetic de-a lungul axei rotației în raport cu  $\theta$ ),  $n_q$  este un număr cuantic ce ia valori întregi, iar  $\oint$  înseamnă că integrala se efectuează pe o perioadă a coordonatei  $q$ .

Să verificăm această relație în două cazuri.

- Fie oscilatorul armonic liniar. Energia totală scrisă în funcție de poziție și impuls este

$$E = E_c + E_p = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{kx^2}{2},$$

care se poate scrie și sub forma

$$\frac{p_x^2}{2mE} + \frac{x^2}{2E/k} = 1.$$

În sistemul de coordonate  $(x, p_x)$  aceasta expresie este o elipsă cu semiaxele  $a$  și  $b$  date de relațiile

$$a = \sqrt{2E/k} \quad , \quad b = \sqrt{2mE}.$$

$\oint p_x dx$  va reprezenta atunci aria elipsei care, exprimată în funcție de semiaxe, este  $\pi ab$ . Deci,

$$\pi ab = \pi \sqrt{\frac{2E}{k}} \sqrt{2mE} = 2\pi E \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Dar  $\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$  este frecvența de oscilație  $\nu$ , deci

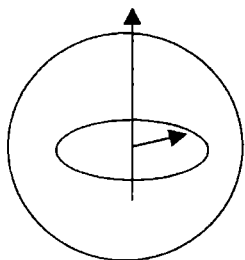
$$E/\nu = n_x h \quad \text{sau} \quad E = n_x h \nu.$$

- În cazul modelului Bohr, coordonata periodică este unghiul  $\theta$  ce descrie mișcarea pe orbita circulară. Asociat ei, impulsul generalizat este momentul cinetic  $L = mvr$ , care este constant. Atunci,

$$\oint Ldq = \int_0^{2\pi} Ld\theta = L \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi L .$$

Deci,  $2\pi L = nh$  sau  $L = n h/2\pi = n \hbar$ , sau tocmai regula de cuantificare a lui Bohr.

În cazul unui corp rigid care se rotește uniform față de o axă fixă, momentul cinetic este constant și se poate aplica tocmai regula lui Bohr de mai sus.



Să considerăm corpul constituit din  $N$  puncte materiale de mase  $m_i$ . Energia cinetică de rotație

$$\text{va fi } \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum_i \frac{m_i \omega_i^2 r_i^2}{2} .$$

Dar  $\omega_i$  este același pentru

toate particulele. Deci, energia se poate scrie

$$E = \frac{\omega^2}{2} \sum_i m_i r_i^2 \quad \text{Mărima } \sum_i m_i r_i^2 = I \quad \text{este o}$$

caracteristică a corpului și se numește momentul de inerție (sau inerția de rotație). El joacă față de mișcarea de rotație același rol pe care masa îl joacă

față de mișcarea de translație. Momentul cinetic al corpului va fi  $L = \sum m_i \omega r_i^2 = \omega I$ .

Deci,

$$E = \frac{I}{2} \omega^2 = \frac{L^2}{2I}$$

Aplicând regula de cuantificare, obținem expresia energiei

$$E_n = \frac{n^2 \hbar^2}{2I}, n = 0, 1, 2, \dots$$

**10.6.** *The energy of a linear harmonic oscillator is*

$$E = \frac{p^2}{2m} + k \frac{x^2}{2}.$$

a) *Show, using the uncertainty relation, that this can be written as*

$$E = \frac{h^2}{32\pi^2 m x^2} + k \frac{x^2}{2}.$$

b) *Then show that the minimum energy of the oscillator is  $h\nu$  where*

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} .$$

is the oscillatory frequency.

**10.6..** *Energia unui oscilator armonic liniar este*

$$E = \frac{p^2}{2m} + k \frac{x^2}{2} .$$

a) *Să se arate, folosindu-se relația de nedeterminare, că aceasta se poate scrie sub forma*

$$E = \frac{h^2}{32\pi^2 m x^2} + k \frac{x^2}{2} .$$

b) *Arătați apoi că energia minimă a oscilatorului este  $h\nu$ , unde*

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} .$$

## REZOLVARE

Relația de nedeterminare a lui Heisenberg este

$$\Delta p \Delta x \geq \frac{\hbar}{2} = \frac{h}{4\pi} .$$

Fie  $\Delta x \sim \frac{\lambda}{\sqrt{4\pi}}$ , unde  $\lambda$  este lungimea de undă de

Broglie,  $\lambda = \frac{h}{p}$ . Atunci

$$\Delta p \frac{\lambda}{\sqrt{4\pi}} \geq \frac{h}{4\pi} \Rightarrow \Delta p \geq \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \frac{h}{\lambda} = \frac{p}{\sqrt{4\pi}}.$$

Pentru o particulă liberă, lui  $\Delta x \sim \frac{\lambda}{\sqrt{4\pi}}$  îi corespunde

cel puțin o abatere  $\Delta p \sim \frac{p}{\sqrt{4\pi}}$ .

a) În cazul oscilatorului armonic liniar cuantic, amplitudinea  $x$  este de ordinul lungimii de undă de Broglie. Putem lua  $\Delta x \sim x$  și  $\Delta p \sim p$ , pentru că atât

$x > \frac{\lambda}{\sqrt{4\pi}}$  cât și  $p > \frac{p}{\sqrt{4\pi}}$ . Atunci,  $p = \frac{h}{4\pi x}$  și

$$E = \frac{h^2}{32\pi^2 m x^2} + k \frac{x^2}{2}.$$

b) Energia din cazul a) corespunde unei anumite alegeri a nedeterminării  $\Delta x \sim x$ . Să găsim acea valoare a lui  $x$  pentru care energia ia cea mai mică valoare. În acest caz, variația lui  $E$  în raport cu  $x$  trebuie să se anuleze,



$$\frac{dE}{dx} = 0 = -\frac{h^2}{16\pi^2 mx^3} + kx \Rightarrow 16\pi^2 kmx^4 = h^2 ,$$

sau  $x^2 = \frac{h}{4\pi\sqrt{km}}$  . Valoarea minimă a energiei va fi

$$E = \frac{h^2 4\pi\sqrt{km}}{32\pi^2 mh} + \frac{kh}{8\pi\sqrt{km}} = \frac{h}{8\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} + \frac{h}{8\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{h}{2} \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{h\nu}{2}$$

De remarcat, că în cazul clasic, atât  $p$  cât și  $x$  pot lua valorile exacte  $p=0$  și  $x=0$  , deci cu  $\Delta x=0$  și  $\Delta p=0$  . În acest caz, valoarea minimă a energiei este  $0$  și nu  $\frac{h\nu}{2}$  .

**10.7. a)** Show that the smallest possible uncertainty in the position of an electron whose speed is given by  $\beta=v/c$  is

$$\Delta x_{\min} = \frac{h}{4\pi m_0 c} (1 - \beta^2)^{3/2} = \frac{\Lambda_c}{4\pi} \left( \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right)^3 ,$$

where  $\Lambda_c$  is the Compton wavelength  $h/m_0c$  .

b) What is the meaning of this equation for  $\beta=0$  , for  $\beta=1$ ?

**10.7. a)** Arătați că cea mai mică nedeterminare posibilă a poziției unui electron a cărei viteză este  $\beta=v/c$  este

$$\Delta x_{\min} = \frac{h}{4\pi m_0 c} (1 - \beta^2)^{3/2} = \frac{\Lambda_c}{4\pi} \left( \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right)^3,$$

unde  $\Lambda_c$  este lungimea de undă Compton  $h/m_0c$ .

c) Ce semnificație are această relație pentru  $\beta=0$ , dar pentru  $\beta=1$ ?

## Rezolvare

Impulsul relativist este

$$p = mv = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \beta^2}} = m_0 c \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Cu relația lui Heisenberg,

$$\Delta x_{\min} = \frac{h}{4\pi \Delta p_{\max}},$$

dar

$$\Delta p_{\max} = m_0 c \Delta \left( \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) = \frac{m_0 c}{(1 - \beta^2)^{3/2}} \Delta \beta_{\max}.$$

Dar  $\Delta \beta_{\max} = 1$  și  $\Delta p_{\max} = \frac{m_0 c}{(1 - \beta^2)^{3/2}}.$

Regăsim relația

$$\Delta x_{\min} = \frac{h}{4\pi m_0 c} (1 - \beta^2)^{3/2} = \frac{\Lambda_c}{4\pi} \left( \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right)^3,$$

Dacă  $\beta \rightarrow 0$  atunci  $\Delta x_{\min} = \frac{\lambda_c}{4\pi}$ .

Dacă  $\beta \rightarrow 1$  atunci  $\Delta x_{\min} \rightarrow 0$ , dar și energia electronului tinde la infinit, iar nedeterminarea impulsului infinit va fi și ea infinită.

**10.8.** *The highest achievable resolving power of a microscope is limited only by the wavelength used; that is, the smallest detail that can be separated is about equal to the wavelength. Suppose we wish to “see” inside an atom. Assuming the atom to have a diameter of  $1.0 \text{ \AA}$ , this means that we wish to resolve details of separation about  $0.1 \text{ \AA}$ .*

- If an electron microscope is used, what minimum energy of electrons is needed?*
- If a photon microscope is used, what energy of photons is needed?*
- Which microscope seems more practical for this purpose? Explain.*

**10.8.** *Puterea de rezoluție a unui microscop este limitată numai de lungimea de undă folosită, adică detaliile cele mai mici pe care le putem separa sunt*

*aproximativ egale cu lungimea de undă. Dorim să “vedem” în interiorul atomului. Considerând că atomul are diametrul de  $1,0 \text{ \AA}$ , de exemplu, avem nevoie de o putere de separare de cel puțin  $0,1 \text{ \AA}$*

*a) Pentru a putea folosi un microscop electronic care va fi energia minimă a electronilor?*

*b) Dacă folosim un microscop cu fotoni, de ce energie a fotonilor avem nevoie?*

*c) Ce microscop pare mai ușor de construit?*

## **Rezolvare**

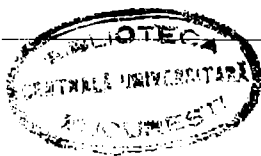
a) Energia electronului care ar avea lungimea de undă asociată (de Broglie) este

$$E_{\min} = \frac{p^2}{2m} = \frac{h^2}{2m\lambda^2} = 2,41 \times 10^{-15} \text{ J} = 15,1 \text{ keV}$$

b) Energia fotonului trebuie să fie

$$E = \frac{hc}{\lambda} = 2,0 \times 10^{-14} \text{ J} = 124,3 \text{ keV} .$$

c) Desigur că este mai ușor de accelerat electroni la 15 keV decât de accelerat tot electroni, dar la 125 keV, pentru a produce radiații X-rază cu lungime de undă de  $0,1 \text{ \AA}$ .





---

Tiparul s-a executat sub c-da nr. 560/1999,  
la Tipografia Editurii Universității din București

---



**ISBN: 973-575-328-6**  
**-329-4**  
**-330-8**

**Preț: 38.000 lei**