RADU MICULESCU

# ANALIZĂ FUNCȚIONALĂ
# NOȚIUNI ELEMENTARE

Editura Universității din București

RADU MICULESCU

# ANALIZĂ FUNCȚIONALĂ
# NOȚIUNI ELEMENTARE

(prima parte)



EDITURA UNIVERSITĂȚII DIN BUCUREȘTI
2002

Referenți științifici: Prof. dr. Ion Chițescu
Conf. dr. Gheorghe Grigore



# ANALIZĂ FUNCȚIONALĂ
# TEORIE, EXEMPLE, APLICAȚII
# NOȚIUNI ELEMENTARE

(prima parte)




Șos. Panduri, 90-92, București - 76235; Telefon/Fax: 410.23.84
E-mail: editura@unibuc.ro
Internet: www.editura.unibuc.ro

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale
MICULESCU, RADU
Analiza funcțională: noțiuni elementare / Radu Miculescu
– București: Editura Universității din București, 2002
p.
Bibliografie
ISBN 973-575-700-1

517.98

# CUPRINS

# INTRODUCERE

În această lucrare vom prezenta principalele spaţii de şiruri ($l^p$, $c$, $c_0$ şi $l_0$) şi de funcţii ( $\mathcal{M}(X)$, $\mathcal{B}(X)$, $\mathcal{C}_\infty(X)$, $\mathcal{C}_0(X)$, $\mathcal{V}([0,1])$, $\mathcal{R}([a,b])$, $\mathcal{C}^n([a,b])$ şi $L^p$) şi vom studia completitudinea, separabilitatea, reflexivitatea şi dualul lor. Menţionăm că o listă mult mai cuprinzătoare a spaţiilor concrete din analiza funcţională împreună cu proprietăţile lor se poate găsi în [5].

Studiul acestor spaţii concrete este important, în primul rînd, deoarece orice teorie se înţelege prin exemple concrete.

În al doilea rînd, spaţiile de mai sus sunt extrem de utile în caracterizarea spaţiilor abstracte din analiza funcţională şi au anumite proprietăţi de universalitate. Iată cîteva rezulatate care susţin această afirmaţie.

**Teoremă**. *Dacă $(V, \|.\|)$ este un spaţiu vectorial normat, atunci există un spaţiu topologic compact separat $X$ şi o aplicaţie liniară $f : V \to C(X)$ astfel ca*

$$\|f(x)\| = \|x\|,$$

*pentru orice $x \in V$.*

**Teoremă**. *Dacă $(H, <.,.>)$ este un spaţiu Hilbert separabil, atunci există o bijecţie $h : H \to l^2$ astfel ca*

$$\|h(x)\| = \|x\|,$$

*pentru orice $x \in H$.*

**Teoremă (Banach-Mazur)** *Pentru orice spaţiu Banach separabil $X$, există o aplicaţie liniară, surjectivă şi continuă $f : l^1 \to X$ (adică spaţiu Banach separabil este un cît al lui $l^1$).*

**Teoremă (L. Nachbin, D. Goodner, J.L. Kelley, M. Hasumi)** *Un spaţiu Banach $X$ are proprietatea că pentru orice spaţiu vectorial normat $Y$, cu $X \subseteq Y$, există o proiecţie $p : Y \to X$ de normă 1, dacă şi numai dacă el este izometric izomorf cu $C(K)$, unde $K$ este un spaţiu separat compact extrem disconect.*

**Teoremă** *Fie $X$ un spaţiu Banach. Atunci pentru ca orice serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ din $X$, cu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x^* x_n|$ convergentă pentru orice $x^* \in X^*$, să fie necondiţionat convergentă, este necesar şi suficient ca $X$ să nu "conţină" $c_0$.*

**Teoremă** *Fie $X$ un spaţiu Banach. Atunci pentru ca orice serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^*$ din $X^*$, cu $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n^* x|$ convergentă pentru orice $x \in X$, să fie necondiţionat convergentă, este necesar şi suficient ca $X^*$ să nu "conţină" $l^\infty$.*

Ultimele patru teoreme se găsesc enunţate şi demonstrate în "Sequences and Series in Banach Spaces", de Joseph Diestel.

Lucrarea conţine de asemenea prezentarea teoremei Hahn-Banach, a convergenţei slabe şi a convergenţei slabe*, precum şi a celor trei principii fundamentale ale analizei funcţionale, anume, principul mărginirii uniforme, teorema graficului închis şi teorema aplicaţiei deschise.

Nu am inclus aici demonstraţiile rezultatelor clasice, preferînd să prezentăm aplicaţiile lor şi exemplificări.

# CAPITOLUL I

## COMPLETITUDINEA UNOR SPAŢII CONCRETE

## DIN ANALIZA FUNCŢIONALĂ

### BREVIAR TEORETIC

**Definiţie.** *Fie $X$ o mulţime nevidă. Se numeşte topologie pe $X$ o familie de submulţimi ale lui $X$ notată $\tau$ care verifică următoarele trei axiome:*
*1) $\emptyset$, $X \in \tau$*
*2) $D_1$, $D_1 \in \tau$ implică $D_1 \cap D_1 \in \tau$*
*3) Dacă $D_i \in \tau$ pentru orice $i \in I$, atunci $\bigcup_{i \in I} D_i \in \tau$.*

**Definiţie.** *Se numeşte spaţiu topologic un dublet $(X, \tau)$, unde $\tau$ este o topologie pe mulţimea $X$. Cînd nu va fi pericol de confuzie, vom omite $\tau$ din această definiţie.*

**Definiţie.** *Se numeşte metrică pe mulţimea $X$ o funcţie $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ care satisface următoarele condiţii:*
*1) $d(x, y) = 0$ dacă şi numai dacă $x = y$.*
*2) $d(x, y) = d(y, x)$ pentru orice $x, y \in X$.*
*3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ pentru orice $x, y, z \in X$.*

**Definiţie.** *Se numeşte spaţiu metric un dublet $(X, d)$, unde $d$ este o metrică pe mulţimea $X$. Cînd nu va fi pericol de confuzie, vom omite $d$ din această definiţie.*

**Definiţie.** *Şirul $(x_n)_{n \geq 1}$ din spaţiul metric $(X, d)$ se numeşte Cauchy dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, $n_\varepsilon \geq 1$ astfel încît $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n \geq n_\varepsilon$ implică $d(x_m, x_n) < \varepsilon$.*

**Definiţie.** *Un spaţiu metric se numeşte complet dacă orice şir Cauchy de elemente din spaţiul respectiv este convergent.*

**Propoziţie**. *Dacă şirul* $(x_n)_{n\geq 1}$ *din spaţiul metric* $(X, d)$ *este Cauchy atunci el este mărginit.*

**Propoziţie**. *Dacă* $(X, d)$ *este un spaţiu metric complet, atunci o submulţime* $A$ *a lui* $X$ *este închisă dacă şi numai dacă este completă (i.e. spaţiul metric* $(A, d_A)$ *este complet).*

**Definiţie**. *Fie* $X$ *un spaţiu vectorial peste corpul* $K$. *Se numeşte normă pe* $X$ *o funcţie* $p : X \to \mathbb{R}_+$ *care satisface următoarele condiţii:*
*1)* $p(x) = 0$ *dacă şi numai dacă* $x = 0$.
*2)* $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$ *pentru orice* $\alpha \in K$ *şi orice* $x \in X$.
*3)* $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ *pentru orice* $x, y \in X$.

**Definiţie**. *Fie* $X$ *un spaţiu vectorial peste corpul* $K$. *Se numeşte spaţiu vectorial normat un dublet* $(X, p)$ *unde* $p$ *este o normă pe* $X$. *În cele ce urmează vom nota* $p(x) = \|x\|$ *pentru orice* $x \in X$, *iar cînd nu este pericol de confuzie vom spune că* $X$ *este un spaţiu normat (în loc de* $(X, \|.\|$ *este un spaţiu normat).*

**Definiţie**. *Fie* $X$ *un spaţiu vectorial normat peste corpul* $K$. *Definim distanţa dintre elementele* $x, y \in X$ *prin* $d(x, y) = \|x - y\|$. *Funcţia* $d$ *astfel definită este o metrică pe* $X$ *numită metrica canonică. Prin urmare, oricărui spaţiu vectorial normat îi sunt asociate în mod canonic o structură metrică şi o structură topologică.*

**Definiţie**. *O normă* $\|.\|$ *definită pe un spaţiu vectorial se numeşte completă dacă metrica asociată ei este completă.*

**Definiţie**. *Un spaţiu vectorial normat se numeşte spaţiu Banach dacă norma sa este completă.*

**Notă istorică**. *Stefan Banach* s-a născut într-un mic sat numit Ostrowsko la 50 de kilometri în sudul oraşului Cracowia, din Polonia, la 30 martie 1892. A urmat cursurile şcolii primare din Cracowia iar in 1902 începe studiile la gimnaziul Henryk Sienkiewicz din Cracovia. Printr-o întîmplare fericită unul dintre colegii lui Banach a fost Witold Wilkosz care de asemenea se pregătea să devină profesor de matematică. Gimnaziul respectiv nu era unul dintre cele mai bune şi drept urmare Wilkosz s-a mutat la un altul. Banach însă rămîne la Henryk Sienkiewicz dar va avea în continuare strînse legături cu Wilkosz. De-a lungul primilor ani la acest gimnaziu Banach primeşte note excelente la matematică. Totuşi trece examenul de final fără strălucire. La terminarea gimnaziului atît Banach cît şi Wilkosz doreau sa studieze matematica dar amîndoi au simţit că nimic nou nu mai este cu putinţă în matematică, aşa că au ales să studieze alte domenii: Banach ingineria, iar Wilkosz limbile orientale. Faptul că doi viitori extraordinari matematicieni au luat această decizie arată că nu a existat nimeni care să-i îndrume în mod adecvat. Banach părăseşte Cracovia şi se mută la Liov unde devine student la Universitatea Tehnică. Este aproape sigur că, fără nici un ajutor material din partea familei, Banach s-a întreţinut din lecţii particulare. Acest fapt trebuie că i-a solicitat foarte mult timp căci i-a fost necesar mai mult timp decît în mod normal pentru a absolvi aceste studii. Banach nu era apt din punct de vedere fizic pentru satisfacerea stagiului militar datorită unor grave probleme de vedere ce i-au afectat ochiul stîng. În timpul primului război mondial a contribuit la construcţia de drumuri şi a predat la diverse şcoli din Cracovia. De asemenea a audiat diverse cursuri de matematică la Universitatea din acest oraş. O întîmplare neobişnuită avea să aibă un efect major asupra carierei sale. Steinhaus, care îşi satisfăcea serviciul militar, era pe cale să ocupe un post la Universitatea Jan Kazimierz din Liov dar locuia încă la Cracovia aşteptînd numirea. Obişnuia să se plimbe pe străzile Cracoviei pe înserate. Iată ce relatează el însuşi în memoriile sale: " În timpul unei astfel de plimbări am auzit cuvintele " măsura Lebesgue". M-am apropiat de banca din parc şi m-am prezentat celor doi tineri ucenici în matematică. Cei doi erau Stefan Banach şi Otto Nikodym. De atunci ne-am întîlnit regulat şi am decis să înfiinţăm o societate de matematică". Steinhaus i-a comunicat lui Banach o problemă la care se gîndise fără succes. După cîteva zile Banach a avut ideea principală pentru problema respectivă iar cei doi au scris un articol pe această temă. Războiul a întîrziat publicarea acestui prim articol al lui Banach care a apărut în Buletinul Academiei din Cracovia în 1918. Din acest moment Banach a publicat articole importante de matematică într-un ritm susţinut. Lui Banach i s-a oferit o poziţie de către Lomnicki la Universitatea Tehnică din Liov. Aici şi-a susţinut teza de doctorat sub îndrumarea lui Lomnicki în 1920 (teză care este considerată uneori ca marcînd naşterea analizei funcţionale) iar în 1922 Universitatea Jan Kazimierz din Liov i-a acordat "habilitation" pentru o teză în teoria măsurii. În 1924 Banach a fost promovat ca profesor plin şi a petrecut anul academic 1925 la Paris. Anii dintre cele două războaie mondiale au fost extrem de plini pentru Banach. În 1929 împreună cu Steinhaus a înfiinţat Studia Mathematica (a cărei politică editorială era concentrarea pe cercetările de analiză funcţională şi alte domenii conexe). În 1931 împreună cu Steinhaus, Knaster, Kuratowski, Mazurkiewicz şi Sierpinski a înfiinţat a serie de Monografii Matematice. Primul volum din această serie, intitulat "Teoria operatorilor liniari", a fost scris de Banach şi a apărut în 1932. În 1927 Kuratowski a ocupat o poziţie la Universitatea Tehnică din Liov unde a lucrat pînă în 1934. Împreună cu Banach a scris în acestă perioadă cîteva articole. Modul în care Banach lucra era total neconvenţional. Îi plăcea să facă matematică împreună cu colegii săi într-o cafenea din Liov. Iată ce spunea Ulam: " Era dificil să stai în cafenea sau să bei mai mult decît Banach. Discutam probleme propuse chiar acolo, adeseori cu nici un rezultat chiar după cîteva ore de gîndire. A doua zi Banach apărea cu cîteva mici foi de hîrtie conţinînd schema demonstraţiei pe care o găsise". În 1939 Banach a fost ales preşedintele Societăţii Poloneze de Matematică. La începutul celui de al doilea război mondial Liovul a fost ocupat de către trupele sovietice. Banach era în relaţii bune cu matematicienii sovietici, vizitînd Moscova de cîteva ori. A fost bine tratat de către noua administraţie sovietică şi chiar numit decanul Facultăţii de Ştiinţe al Universităţii, acum renumită Ivan Franko. După ocuparea Liovului de către trupele naziste în iunie 1941 Banach a trăit în condiţii dificile. A fost arestat sub învinuirea de trafic de valuta germană pentru cîteva săptămîni. A supravieţuit unei perioade în care membrii Academiei Poloneze erau omorîţi (conducătorul său de doctorat, Lomnicki a murit în tragica noapte de 3 iulie 1941). Se îmbolnăveşte şi moare la Liov la data de 31 august 1945.

Banach a fondat analiza funcţională modernă şi a avut contribuţii majore la dezvoltarea teoriei spaţiilor vectoriale topologice. În teza sa de doctorat din 1920 a definit axiomatic ceea ce astăzi numim spaţii Banach. Această idee a fost introdusă şi de către alţi matematicieni aproape în acelaşi timp (de exemplu de către Wiener) dar aceştia nu au dezvoltat teoria. Numele de spaţii Banach se datorează lui Fréchet. Importanţa operei lui Banach constă în faptul că a dezvoltat o teorie sistematică a analizei funcţionale avînd drept bază lucrările lui Volterra, Fredholm şi Hilbert în domeniul ecuaţiilor integrale.

Banach este autorul unor rezultate fundamentale privind spaţiile vectoriale normate (teorema Hahn-Banach, principiul mărginirii uniforme (Banach-Steinhaus), teorema aplicaţiei deschise, etc). Paradoxul Banach-Tarski (o sferă poate fi împărţită în două submulţimi care pot fi combinate astfel încît să rezulte două sfere, fiecare identică cu cea iniţială), a cărui demonstraţie foloseşte axioma alegerii, a determinat mulţi matematicieni să se întrebe dacă utilizarea amintitei axiome este legitimă, fiind o contribuţie majoră la dezvoltarea teoriei axiomatice a mulţimilor.

**Exemple fundamentale**: *Spaţiile vectoriale* $\mathbb{R}$ *şi* $\mathbb{C}$ *înzestrate cu norma modul sunt spaţii Banach. În cele ce urmează, vom nota prin* $K$ *oricare dintre aceste două spaţii vectoriale normate.*

**Propoziţie**. *Dacă* $(X, \|.\|)$ *este un spaţiu Banach, atunci un subspaţiu* $Y$ *a lui* $X$ *este închis dacă şi numai dacă este Banach.*

**Definiţie**. *Fie* $(x_n)_{n\geq 1}$ *un şir de numere reale. Numărul* $x \in \overline{\mathbb{R}}$ *se numeşte punct limită al şirului* $(x_n)_{n\geq 1}$ *dacă există un subşir* $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ *al şirului* $(x_n)_{n\geq 1}$ *care are limita* $x$. *Vom nota cu* $L((x_n)_{n\geq 1})$ *mulţimea tuturor punctelor limită ale şirului* $(x_n)_{n\geq 1}$.

**Definiţie**. *Fie* $(x_n)_{n\geq 1}$ *un şir de numere reale şi* $l^* \in \overline{\mathbb{R}}$. *Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

*a)* $l^* = \inf\limits_{n\geq 1} \sup\limits_{k\geq n} x_k$.

*b)* $l^* = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} x_k$.

*c) (pentru orice* $c > l^*$ *există* $n_c \in \mathbb{N}$, $n_c \geq 1$ *astfel ca pentru orice* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_c$ *avem* $x_n \leq c$*) şi (pentru orice* $c < l^*$ *şi orice* $n' \in \mathbb{N}$, $n' \geq 1$ *există* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n'$ *astfel ca* $x_n > c$*).*

*d)* $l^* = \sup L((x_n)_{n\geq 1})$.

$l^*$ *se numeşte limita superioară a şirului* $(x_n)_{n\geq 1}$ *şi se notează* $\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n$ *sau lim sup* $x_n$.

**Definiţie**. *Fie* $(x_n)_{n\geq 1}$ *un şir de numere reale şi* $l_* \in \overline{\mathbb{R}}$. *Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

*a)* $l_* = \sup_{n\geq 1} \inf_{k\geq n} x_k$.

*b)* $l_* = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} x_k$.

*c) (pentru orice* $c < l_*$ *există* $n_c \in \mathbb{N}$, $n_c \geq 1$ *astfel ca pentru orice* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_c$ *avem* $x_n > c$*) şi (pentru orice* $c > l_*$ *şi orice* $n' \in \mathbb{N}$, $n' \geq 1$ *există* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n'$ *astfel ca* $x_n < c$*).*

*d)* $l_* = \inf L((x_n)_{n\geq 1})$.

$l_*$ *se numeşte limita inferioară a şirului* $(x_n)_{n\geq 1}$ *şi se notează* $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n$ *sau lim inf* $x_n$.

**Remarcă**.

$$\liminf x_n \leq \limsup x_n$$

**Propoziţie**. *Fie* $(x_n)_{n\geq 1}$ *un şir de numere reale. Atunci* $\lim_{n\to\infty} x_n$ *există dacă şi numai dacă lim inf* $x_n$ = *lim sup* $x_n$. *În acest caz cele trei limite coincid.*

**Propoziţie**. *Fie* $\sum_{n\geq 1} x_n$ *o serie convergentă de numere reale. Atunci şirurile* $(x_n)_{n\geq 1}$ *şi* $(r_n)_{n\geq 1}$, *unde* $r_n = \sum_{k\geq n} x_k$, *sunt convergente către* 0.

**Definiţie**. *Fie* $X$ *o mulţime,* $(Y, d)$ *un spaţiu metric,* $f : X \to Y$ *o funcţie şi* $(f_n)_{n\geq 1}$ *un şir de funcţii definite pe* $X$ *cu valori în* $Y$. *Spunem că şirul* $(f_n)_{n\geq 1}$

*converge uniform către funcţia $f$ dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel ca pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$ şi orice $x \in X$ avem*

$$d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon.$$

**Remarcă**. *Dacă spaţiul metric $(Y, d)$ este $\mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$ cu distanţa euclidiană, faptul că şirul $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniform către funcţia $f$ este echivalent cu $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$, unde $\|F\| = \sup\limits_{x\in X} |F(x)|$.*

**Propoziţie**. *Fie un $X$ spaţiu topologic, $(Y, d)$ un spaţiu metric, $f : X \to Y$ o funcţie şi $(f_n)_{n\geq 1}$ un şir de funcţii definite pe $X$ cu valori în $Y$ care converge uniform către $f$. Dacă toate funcţiile $f_n$ sunt continue în punctul $x_0 \in X$, atunci $f$ este continuă în punctul $x_0$. În particular, dacă toate funcţiile $f_n$ sunt continue, atunci $f$ este continuă.*

**Propoziţie**. *Fie $X$ o mulţime, $(Y, d)$ un spaţiu metric, $f : X \to Y$ o funcţie şi $(f_n)_{n\geq 1}$ un şir de funcţii definite pe $X$ cu valori în $Y$ care converge uniform către $f$. Dacă toate funcţiile $f_n$ sunt mărginite, atunci $f$ este mărginită.*

**Propoziţie**. *Fie $f, g : I \to \mathbb{R}$ două funcţii, unde $I$ este un interval mărginit din $\mathbb{R}$ şi $(f_n)_{n\geq 1}$ un şir de funcţii definite pe $I$ cu valori în $\mathbb{R}$ care converge uniform către $f$. Dacă toate funcţiile $f_n$ sunt derivabile şi $(f_n')_{n\geq 1}$converge uniform către $g$, atunci $f$ este derivabilă şi $f' = g$.*

**Propoziţie**. *Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie şi $(f_n)_{n\geq 1}$ un şir de funcţii definite pe $[a, b]$ cu valori în $\mathbb{R}$ care converge uniform către $f$. Dacă toate funcţiile $f_n$ sunt integrabile Riemann atunci $f$ este integrabilă Riemann şi în plus $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)dx$.*

**Definiţie**. *O mulţime $A$ dintr-un spaţiu topologic $X$ se numeşte mulţime rară dacă $\overset{\circ}{\overline{A}} = \emptyset$.*

**Definiţie**. *O mulţime $A$ dintr-un spaţiu topologic $X$ se numeşte mulţime de prima categorie dacă se poate reprezenta ca reuniune cel mult numărabilă de mulţimi rare.*

**Definiţie.** *O mulţime A dintr-un spaţiu topologic X se numeşte mulţime de categoria a doua dacă nu este de categoria întîi.*

**Teoremă** *(Baire). Orice spaţiu metric complet este de categoria a doua.*

**Notă istorică.** *René-Louis Baire* s-a născut la 21 Ianuarie 1874 la Paris. În 1886 pe cînd avea 12 ani a cîştigat o bursă care i-a permis să capete o bună educaţie, în ciuda condiţiilor materiale precare oferite de familia sa. A fost un student eminent al liceului Lakanal. În 1890 studiază timp de un an la secţia specială de matematică a liceului Henri IV. Apoi trece admiterea atît la Ecole Polytechnique cît şi la Ecole Normale Supérieure. Alege să studieze la cea din urmă. Aici audiază cursurile lui Goursat şi pe cele ale lui Hermite, Picard şi Poincaré la Sorbona. La un examen, avînd să demonstreze continuitatea funcţiei exponenţiale, în mijlocul demonstraţiei îşi dă seama că "demonstraţia pe care o învăţase la liceul Henri IV era pur şi simplu un artificiu deoarece nu se sprijinea suficient pe definiţia funcţiei". Ca rezultat imediat a urmat o notă ce nu l-a mulţumit pe Baire şi decizia de a studia din nou mai atent cursul de analiză matematică cu accent pe conceptul de continuitate al unei funcţii generale. A obţinut un post la un liceu din Bar-le-Duc care, deşi îi asigura securitatea financiară, nu-l mulţumea căci nu avea ocazia să fie în contact cu lumea universitară. Aici lucrează în teoria funcţiilor şi asupra conceptului de limită elaborînd o teză despre funcţii discontinue pe care o va susţine în 1899, din comisie făcînd parte Darboux şi Picard. A studiat şi în Italia unde a legat o strînsă prietenie cu Volterra. Chiar înainte de a-şi susţine doctoratul, sănătatea îi era zdruncinată. După aceea nu a mai putut contribui la progresul matematicii decît foarte scurte perioade. A continuat să predea la diverse licee, iar în 1901 devine conferenţiar la Universitatea din Montpellier. În 1904 primeşte o bursă Peccot care îi permite să predea la Collège de France. În 1905 se mută la Universitatea din Dijon, unde în 1907 este numit profesor. Datorită stării mai mult decît precare a sănătăţii sale, cere un concediu pentru a se reface. Nefiind în stare să-şi reia activitatea, se retrage la Geneva, unde i se şi acordă titlul de Cavaler al Legiunii de Onoare şi de membru al Academiei de Ştiinţe. Se pensionează în 1925 şi moare la 5 Iulie 1932.

Baire a făcut un pas decisiv în fundamentarea riguroasă a conceptului de funcţie şi continuitate. A văzut cu claritate că o teorie a mulţimilor infinite era fundamentală pentru analiza reală. Denjoy a fost cel mai faimos student al lui Baire.

## SPAŢII DE ŞIRURI

### Spaţiul $l^\infty$ al şirurilor mărginite

**Definiţie.** *Mulţimea*

$$l^\infty = \{x = (\zeta_n)_{n\geq 1} \subseteq K \mid (\zeta_n)_{n\geq 1} \text{ este mărginit}\},$$

*înzestrată cu adunarea uzuală a şirurilor şi înmulţirea uzuală a şirurilor cu scalari, este un spaţiu vectorial.*

*Acest spaţiu vectorial poate fi înzestrat cu următoarea normă (se verifică cu uşurinţă axiomele normei)*

$$\|x\| = \|(\zeta_n)_{n\geq 1}\| = \sup_{n\geq 1} |\zeta_n| \,.$$

**Propoziţie.** *Spaţiul normat* $(l^\infty, \|.\|)$ *este spaţiu Banach.*

*Demonstraţie.* Pentru a demonstra că $(l^\infty, \|.\|)$ este spaţiu Banach vom considera $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir Cauchy arbitrar de elemente din $l^\infty$ şi vom arăta că există $x \in l^\infty$ astfel ca $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ (în norma descrisă mai sus).

*Existenţa şirului x.* Justificare. $x_n$ fiind un element al lui $l^\infty$, este un şir; să-l notăm $x_n = (\zeta_k^n)_{k\geq 1}$.

Deoarece şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este Cauchy

$$(\forall)\ \varepsilon > 0 \quad (\exists)\ n_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ astfel ca } (\forall)\ m,n \in \mathbb{N},\ m,n \geq n_\varepsilon \text{ avem } \|x_n - x_m\| < \varepsilon.$$

Drept urmare, întrucît, în conformitate cu definiţia normei unui şir din $l^\infty$, avem

$$|\zeta_k^n - \zeta_k^m| \leq \|x_n - x_m\| \,,$$

pentru orice $k \in \mathbb{N}$ şi orice $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n \geq n_\varepsilon$, deducem că următoarea relaţie este adevărată

$$(\forall)\ \varepsilon > 0 \quad (\exists)\ n_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ astfel ca } (\forall)\ m,n \in \mathbb{N},\ m,n \geq n_\varepsilon \text{ avem } |\zeta_k^n - \zeta_k^m| < \varepsilon, \tag{*}$$

pentru orice $k \in \mathbb{N}$.

Aşadar, pentru orice $k \in \mathbb{N}$, şirul $(\zeta_k^n)_{n\geq 1}$ este Cauchy.

Cum $K$ este spaţiu Banach, deducem că există limita $\lim\limits_{n\to\infty} \zeta_k^n$ care va fi notată cu $\zeta_k$.

Deci

$$\lim_{n\to\infty} \zeta_k^n = \zeta_k,$$

pentru orice $k \in \mathbb{N}$.

Fie $x = (\zeta_k)_{k\geq 1}$.

*Afirmaţie.* $x = (\zeta_k)_{k\geq 1} \in l^\infty$. Justificare. Deoarece şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este Cauchy, el este mărginit. Aşadar există $M$, număr real, astfel ca

$$\|x_n\| \leq M,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Avînd în vedere faptul că $\|x_n\| = \|(\zeta_k^n)_{k\geq 1}\| = \sup_{k\geq 1} |\zeta_k^n|$ deducem că

$$|\zeta_k^n| \leq M,$$

pentru orice $k, n \in \mathbb{N}$.

Drept urmare, pentru orice $k \in \mathbb{N}$, avem

$$|\zeta_k| = \left|\lim_{n\to\infty} \zeta_k^n\right| = \lim_{n\to\infty} |\zeta_k^n| \leq M.$$

Aşadar, $x = (\zeta_k)_{k\geq 1} \in l^\infty$.

*Afirmaţie.* $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Justificare. Din relaţia (*) avem, prin trecere la limită după $m$, că

$$(\forall)\ \varepsilon > 0 \quad (\exists)\ n_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ astfel ca } (\forall)\ n \in \mathbb{N},\ n \geq n_\varepsilon \text{ avem } |\zeta_k^n - \zeta_k| < \varepsilon,$$

pentru orice $k \in \mathbb{N}$, de unde,

$$(\forall)\ \varepsilon > 0 \quad (\exists)\ n_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ astfel ca } (\forall)\ n \in \mathbb{N},\ n \geq n_\varepsilon \text{ avem } \|x_n - x\| < \varepsilon.$$

Această ultimă relaţie arată că $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\|$, adică $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

## Spaţiul $c$ al şirurilor convergente

**Definiţie**. *Mulţimea*

$$c = \{x = (\zeta_n)_{n\geq 1} \subseteq K \mid (\zeta_n)_{n\geq 1} \textit{este convergent}\},$$

*înzestrată cu adunarea uzuală a şirurilor şi înmulţirea uzuală a şirurilor cu scalari, este un spaţiu vectorial.*

*Acest spaţiu vectorial poate fi înzestrat cu următoarea normă (se verifică cu uşurinţă axiomele normei)*

$$\|x\| = \|(\zeta_n)_{n\geq 1}\| = \sup_{n\geq 1} |\zeta_n|.$$

**Remarcă**. *$c$ este un subspaţiu al lui $l^\infty$* (căci orice şir convergent este mărginit).

**Propoziţie**. *Spaţiul normat $(c, \|.\|)$ este spaţiu Banach.*

*Demostraţie.* Vom arăta că $c$ este închis.
Dorim deci să arătăm că $\overline{c} = c$.

După cum se cunoaşte, este suficient să demonstrăm incluziunea $\overline{c} \subseteq c$ (cealaltă incluziune fiind valabilă întotdeauna datorită definiţiei închiderii unei mulţimi).

În acest scop vom considera $x = (\zeta_k)_{k\geq 1} \in \overline{c}$ şi vom arăta că $x \in c$.

Din caracterizarea închiderii unei mulţimi în spaţii metrice, decurge existenţa unui şir $(x_n)_{n\geq 1}$ de elemente din $c$, astfel ca $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ (în norma lui $c$).

Dacă $x_n = (\zeta_k^n)_{k\geq 1}$, atunci faptul că $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ se scrie astfel

$$(\forall)\ \varepsilon > 0 \quad (\exists)\ n_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ astfel ca } (\forall)\ n \in \mathbb{N},\ n \geq n_\varepsilon \text{ avem } \|x_n - x\| < \varepsilon.$$

Drept urmare, întrucît, în conformitate cu definiţia normei unui şir din $c$, avem că pentru orice $n \geq n_\varepsilon$ şi pentru orice $k \in \mathbb{N}$

$$|\zeta_k^n - \zeta_k| \leq \|x_n - x\|,$$

obţinem relaţia

$$(\forall)\ \varepsilon > 0 \quad (\exists)\ n_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ astfel ca } (\forall)\ n \in \mathbb{N},\ n \geq n_\varepsilon \text{ avem } |\zeta_k^n - \zeta_k| < \varepsilon,$$

pentru orice $k \in \mathbb{N}$.

Pe de altă parte, şirul $x_{n_\varepsilon} = (\zeta_k^{n_\varepsilon})_{k\geq 1}$ fiind din $c$, este convergent, deci este Cauchy.

Aşadar

$$(\forall)\ \varepsilon > 0 \quad (\exists)\ k_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ astfel ca } (\forall)\ k,l \in \mathbb{N},\ k,l \geq k_\varepsilon \text{ avem } |\zeta_k^{n_\varepsilon} - \zeta_l^{n_\varepsilon}| < \varepsilon.$$

Atunci, pentru orice $k, l \in \mathbb{N}$, $k, l \geq k_\varepsilon$ avem

$$|\zeta_l - \zeta_k| \leq |\zeta_k - \zeta_k^{n_\varepsilon}| + |\zeta_k^{n_\varepsilon} - \zeta_l^{n_\varepsilon}| + |\zeta_l^{n_\varepsilon} - \zeta_l| < 3\varepsilon.$$

Această ultimă relaţie arată că şirul $x = (\zeta_k)_{k\geq 1}$ este Cauchy, deci, $K$ fiind spaţiu Banach, este convergent, i.e. $x \in c$.

## Spaţiul $c_0$ al şirurilor convergente către zero

**Definiţie.** *Mulţimea*

$$c_0 = \{x = (\zeta_n)_{n\geq 1} \subseteq K \mid (\zeta_n)_{n\geq 1} \textit{ este convergent către zero}\}$$

*înzestrată cu adunarea uzuală a şirurilor şi înmulţirea uzuală a şirurilor cu scalari este un spaţiu vectorial.*

*Acest spaţiu vectorial poate fi înzestrat cu următoarea normă (se verifică cu uşurinţă axiomele normei)*

$$\|x\| = \|(\zeta_n)_{n\geq 1}\| = \sup_{n\geq 1} |\zeta_n|.$$

**Remarcă**. *$c_0$ este un subspaţiu al lui $c$.*

**Propoziţie**. *Spaţiul normat $(c_0, \|.\|)$ este spaţiu Banach.*

*Demostraţie*. Vom arăta că $c_0$ este închis.

Dorim deci să arătăm că $\overline{c_0} = c_0$.

După cum se cunoaşte, este suficient să demonstrăm incluziunea $\overline{c_0} \subseteq c_0$ (cealaltă incluziune fiind valabilă întotdeauna datorită definiţiei închiderii unei mulţimi).

În acest scop vom considera $x = (\zeta_k)_{k\geq 1} \in \overline{c_0}$ şi vom arăta că $x \in c_0$.

Din caracterizarea închiderii unei mulţimi în spaţii metrice, decurge existenţa unui şir $(x_n)_{n\geq 1}$de elemente din $c_0$ astfel ca $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ (în norma lui $c_0$).

Dacă $x_n = (\zeta_k^n)_{k\geq 1}$, atunci faptul că $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ se scrie astfel

$$(\forall)\ \varepsilon > 0 \quad (\exists)\ n_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ astfel ca } (\forall)\ n \in \mathbb{N},\ n \geq n_\varepsilon \text{ avem } \|x_n - x\| < \varepsilon.$$

Drept urmare, întrucît, în conformitate cu definiţia normei unui şir din $c$, avem că pentru orice $n \geq n_\varepsilon$ şi pentru orice $k \in \mathbb{N}$

$$|\zeta_k^n - \zeta_k| \leq \|x_n - x\|,$$

obţinem relaţia

$$(\forall)\ \varepsilon > 0 \quad (\exists)\ n_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ astfel ca } (\forall)\ n \in \mathbb{N},\ n \geq n_\varepsilon \text{ avem } |\zeta_k^n - \zeta_k| < \varepsilon,$$

pentru orice $k \in \mathbb{N}$.

Pe de altă parte, şirul $x_{n_\varepsilon} = (\zeta_k^{n_\varepsilon})_{k\geq 1}$, fiind din $c_0$, converge către 0.

Aşadar

$$(\forall)\ \varepsilon > 0 \quad (\exists)\ k_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ astfel ca } (\forall)\ k \in \mathbb{N},\ k \geq k_\varepsilon \text{ avem } |\zeta_k^{n_\varepsilon}| < \varepsilon.$$

Atunci, pentru orice $k \in \mathbb{N}$, $k \geq k_\varepsilon$ avem

$$|\zeta_k| \leq |\zeta_k^{n_\varepsilon} - \zeta_k| + |\zeta_k^{n_\varepsilon}| < 2\varepsilon.$$

Această ultimă relaţie arată că şirul $x_n = (\zeta_k)_{k\geq 1}$ converge către 0, i.e. $x \in c_0$.

### Spaţiul $l_0$ al şirurilor cu suport finit

**Definiţie**. *Mulţimea*

$$l_0 = \{x = (\zeta_n)_{n\geq 1} \subseteq K \mid \textit{există } n_0 \in \mathbb{N}$$

$$\textit{astfel ca pentru orice } n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \textit{avem } \zeta_n = 0\},$$

*înzestrată cu adunarea uzuală a şirurilor şi înmulţirea uzuală a şirurilor cu scalari, este un spaţiu vectorial.*

*Acest spaţiu vectorial poate fi înzestrat cu următoarea normă (se verifică cu uşurinţă axiomele normei)*

$$\|x\| = \|(\zeta_n)_{n\geq 1}\| = \sup_{n\geq 1} |\zeta_n| .$$

**Remarcă**. *$l_0$ este un subspaţiu al lui $c_0$.*

**Propoziţie**. *Spaţiul normat $(l_0, \|.\|)$ nu este spaţiu Banach.*

*Demostraţie.* Vom arăta că $l_0$ nu este închis.
Mai precis, vom arăta că $\overline{l_0} = c_0$.
Cum $l_0 \subset c_0$ deducem că $l_0$ nu este închis, deci nu este spaţiu Banach.
Deoarece $l_0 \subset c_0$ deducem că

$$\overline{l_0} \subseteq \overline{c_0} = c_0. \tag{*}$$

Pe de altă parte dacă considerăm $x = (\zeta_k)_{k\geq 1} \in c_0$ atunci

$$(\forall)\ \varepsilon > 0 \quad (\exists)\ k_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ astfel ca } (\forall)\ k \in \mathbb{N},\ k \geq k_\varepsilon \text{ avem } |\zeta_k| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Atunci şirul $x_\varepsilon = (\zeta_1, ..., \zeta_{k_\varepsilon}, 0, ..., 0, ...) \in l_0$ şi

$$\|x - x_\varepsilon\| = \|(0, ..., 0, \zeta_{k_\varepsilon+1}, \zeta_{k_\varepsilon+2}, ..., \zeta_k, ...)\| = \sup_{k\geq k_\varepsilon} |\zeta_k| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Aşadar, pentru orice $\varepsilon > 0$ există $x_\varepsilon \in l_0$ astfel ca $\|x - x_\varepsilon\| < \varepsilon$.
Altfel spus, $x \in \overline{l_0}$.
Drept urmare, cum $x$ a fost ales arbitrar în $c_0$, avem că

$$c_0 \subseteq \overline{l_0}. \tag{**}$$

Din (*) şi (**) rezultă că $\overline{l_0} = c_0$.

**Remarcă**. *Un alt mod de a justifica faptul că $l_0$ nu este spaţiu Banach este de a construi un şir Cauchy de elemente din $l_0$ care nu este convergent.*

Spre exemplu şirul $(x_n)_{n\geq 1}$, unde $x_n = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, ..., \frac{1}{2^n}, 0, 0, ..., 0, ...) \in l_0$ are proprietatea că pentru orice $n, p \in \mathbb{N}$,

$$\|x_{n+p} - x_n\| = \left\|(0, 0, ...., 0, \frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^{n+2}}, ..., \frac{1}{2^{n+p}}, 0, ..., 0, ..)\right\| = \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = 0$ deducem că

$$(\forall)\ \varepsilon > 0 \quad (\exists)\ n_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ astfel ca } (\forall)\ n \in \mathbb{N},\ n \geq n_\varepsilon \text{ avem } \frac{1}{2^{n+1}} < \varepsilon.$$

Drept urmare

$$(\forall)\ \varepsilon > 0 \quad (\exists)\ n_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ astfel ca } (\forall)\ n, p \in \mathbb{N},\ n \geq n_\varepsilon \text{ avem } \|x_{n+p} - x_n\| < \varepsilon.$$

Deci şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este Cauchy.

Pe de altă parte, nu există $x = (\zeta_1, ..., \zeta_k, 0, ..., 0, ...) \in l_0$ astfel ca $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, adică astfel ca $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$.

Într-adevăr, în caz contrar se ajunge la următoarea contradicţie: pentru $n > k$, avem

$$\|x_n - x\| = \left\|(\frac{1}{2} - \zeta_1, \frac{1}{2^2} - \zeta_2, ..., \frac{1}{2^k} - \zeta_k, \frac{1}{2^{k+1}}, \frac{1}{2^{k+2}}, ..., \frac{1}{2^n}, 0, ..., 0, ..)\right\| \geq \frac{1}{2^{k+1}}.$$

Prin trecere la limită în această ultimă relaţie obţinem următoarea contradicţie

$$0 = \lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| \geq \frac{1}{2^{k+1}}.$$

## Spaţiul $l^p$

**Definiţie**. *Pentru* $1 \leq p < \infty$, *mulţimea*

$$l^p = \{x = (\zeta_n)_{n\geq 1} \subseteq K \mid \sum_{n=1}^{\infty} |\zeta_n|^p < \infty\},$$

*înzestrată cu adunarea uzuală a şirurilor şi înmulţirea uzuală a şirurilor cu scalari, este un spaţiu vectorial.*

*Acest spaţiu vectorial poate fi înzestrat cu următoarea normă*

$$\|x\|_p = \|(\zeta_n)_{n\geq 1}\|_p = (\sum_{n=1}^{\infty} |\zeta_n|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

*Se verifica cu uşurinţă primele două axiome ale normei. Cea de a treia axiomă decurge îndată (prin trecere la limită) din următoarea inegalitate cunoscută sub numele de inegalitatea lui Minkowski:*

$$(\sum_{j=1}^{n} |\zeta_j|^p + |\gamma_j|^p)^{\frac{1}{p}} \leq (\sum_{j=1}^{n} |\zeta_j|^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{j=1}^{n} |\gamma_j|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

**Remarcă**. $l^p$ *este o submulţime al lui* $c_0$ *căci dacă* $x = (\zeta_n)_{n\geq 1} \in l^p$ *atunci, cum* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\zeta_n|^p < \infty$ *rezultă că* $(\zeta_n)_{n\geq 1}$ *este convergent către zero.*

**Propoziţie**. *Spaţiul normat* $(l^p, \|.\|_p)$ *este spaţiu Banach.*

*Demonstraţie.* Pentru a demonstra că este $(l^p, \|.\|_p)$ spaţiu Banach, vom considera $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir Cauchy arbitrar de elemente din $l^p$ şi vom arăta că există $x \in l^p$ astfel ca $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ (în norma $\|.\|_p$).

*Existenţa şirului x. Justificare.* $x_n$ fiind un element al lui $l^p$, este un şir; să-l notăm $x_n = (\zeta_k^n)_{k\geq 1}$.

Deoarece şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este Cauchy

$(\forall)\ \varepsilon > 0\ \ (\exists)\ n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel ca $(\forall)\ m, n \in \mathbb{N},\ m, n \geq n_\varepsilon$ avem $\|x_n - x_m\|_p < \varepsilon.$

Drept urmare, întrucît, în conformitate cu definiţia normei unui şir din $l^p$, avem

$$|\zeta_k^n - \zeta_k^m|^p \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\zeta_k^n - \zeta_k^m|^p = (\|x_n - x_m\|_p)^p,$$

pentru orice $k \in \mathbb{N}$ şi orice $m, n \geq n_\varepsilon$, obţinem următoarea relaţie

$(\forall)\ \varepsilon > 0\ \ (\exists)\ n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel ca $(\forall)\ m, n \in \mathbb{N},\ m, n \geq n_\varepsilon$ avem

$$|\zeta_k^n - \zeta_k^m|^p \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\zeta_k^n - \zeta_k^m|^p = (\|x_n - x_m\|_p)^p < \varepsilon^p, \qquad (*)$$

pentru orice $k \in \mathbb{N}$, de unde

$(\forall)\ \varepsilon > 0\ \ (\exists)\ n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel ca $(\forall)\ m, n \in \mathbb{N},\ m, n \geq n_\varepsilon$ avem $|\zeta_k^n - \zeta_k^m| < \varepsilon.$

pentru orice $k \in \mathbb{N}$.

Aşadar, pentru orice $k \in \mathbb{N}$, şirul $(\zeta_k^n)_{n\geq 1}$ este Cauchy.

Cum $K$ este spaţiu Banach, deducem că există $\lim\limits_{n\to\infty} \zeta_k^n$ care va fi notată cu $\zeta_k$.

Deci

$$\lim_{n\to\infty} \zeta_k^n = \zeta_k,$$

pentru orice $k \in \mathbb{N}$.

Fie $x = (\zeta_k)_{k\geq 1}$.

*Afirmaţie.* $x = (\zeta_k)_{k\geq 1} \in l^p$. Justificare. Din (*), fixînd $n = n_\varepsilon$, prin trecere la limită după $m$ obţinem că

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\zeta_k^{n_\varepsilon} - \zeta_k|^p < \varepsilon^p,$$

deci $x_{n_\varepsilon} - x \in l^p$.

Pe de altă parte $x_{n_\varepsilon} \in l^p$.

Cum $l^p$ este spaţiu vectorial, rezultă că $x_{n_\varepsilon} + (x_{n_\varepsilon} - x) = -x \in l^p$, deci $x \in l^p$.

*Afirmaţie.* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Justificare. Din relaţia (*) avem, prin trecere la limită după $m$, că

$$(\forall)\ \varepsilon > 0 \quad (\exists)\ n_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ astfel ca } (\forall)\ n \in \mathbb{N},\ n \geq n_\varepsilon \text{ avem}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\zeta_k^n - \zeta_k|^p = (\|x_n - x\|_p)^p < \varepsilon^p,$$

pentru orice $k \in \mathbb{N}$, de unde,

$$(\forall)\ \varepsilon > 0 \quad (\exists)\ n_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ astfel ca } (\forall)\ n \in \mathbb{N},\ n \geq n_\varepsilon \text{ avem } \quad \|x_n - x\|_p < \varepsilon.$$

Această ultimă relaţie arată că $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x\|_p = 0$, adică $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

## Diverse

**1**. *Dacă $p \leq q$ atunci $l^p \subseteq l^q$.*

*Demonstraţie.* Într-adevăr, dacă $x = (x_n)_{n\geq 1} \in l^p$ atunci, cum $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$ rezultă că $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent către zero.

Drept urmare există $n_1 \in \mathbb{N}$ astfel ca pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_1$ să avem $|x_n| \leq 1$.

Atunci pentru $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_1$ avem

$$|x_n|^q \leq |x_n|^p.$$

Conform criteriilor de comparaţie pentru serii de numere reale gasim că $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^q < \infty$, deci $x \in l^q$.

Cum $x$ a fost ales arbitrar în $l^p$ afirmaţia este demonstrată.

**2**. *Fie $p \geq 1$ şi $x \in l^p$. Atunci*

$$\lim_{q\to\infty} \|x\|_q = \|x\|,$$

*ultima normă fiind norma în $l^\infty$.*

*Demonstraţie.* Fie $x = (x_n)_{n\geq 1}$.

Dacă $\|x\| = 0$ concluzia este imediată.

Să presupunem deci că $\|x\| > 0$.

Atunci, pentru orice $\alpha > 0$ astfel ca $\alpha < \|x\| = \sup\limits_{n\geq 1} |x_n|$, mulţimea

$$S_\alpha = \{n \in \mathbb{N}^* \mid |x_n| \geq \alpha\} \neq \emptyset.$$

În plus, cum $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ (căci seria $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$) deducem că există $n_\alpha \in \mathbb{N}$ astfel ca pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\alpha$ să avem

$$x_n \notin S_\alpha.$$

Aşadar $S_\alpha$ este nevidă şi finită.

Atunci

$$\|x\|_q^q = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^q \geq \alpha^p card S_\alpha,$$

deci

$$\|x\|_q \geq \alpha(card S_\alpha)^{\frac{1}{q}},$$

de unde

$$\liminf \|x\|_q \geq \liminf \alpha(card S_\alpha)^{\frac{1}{q}} = \alpha.$$

Cum $\alpha$ a fost ales arbitrar cu propritatea că $\alpha < \|x\|$, deducem următoarea inegalitate

$$\liminf \|x\|_q \geq \|x\|. \tag{1}$$

Pe de altă parte, să presupunem că $\|x\| = 1$.

Întrucît $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$, $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$, unde $r_n = \sum_{k\geq n}^{\infty} |x_n|^p$, deci pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_0 \in \mathbb{N}^*$ astfel ca

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} |x_n|^p < \varepsilon$$

şi

$$|x_n| \leq 1,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$.

Cum $|x_n|^q \leq |x_n|^p$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, deducem că

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} |x_n|^q < \varepsilon.$$

Atunci

$$\|x\|_q = (\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^q)^{\frac{1}{q}} \leq (\sum_{k=1}^{n_0} |x_k|^q + \varepsilon)^{\frac{1}{q}} \leq (n_0 \|x\|^q + \varepsilon)^{\frac{1}{q}} \leq (n_0 + \varepsilon)^{\frac{1}{q}},$$

de unde

$$\limsup \|x\|_q \leq \limsup (n_0+\varepsilon)^{\frac{1}{q}} = 1,$$

adică

$$\limsup \|x\|_q \leq 1.$$

Pentru $x$ oarecare, cum $\frac{x}{\|x\|}$ are norma 1, avem că

$$\limsup \left\| \frac{x}{\|x\|} \right\|_q \leq 1,$$

deci

$$\limsup \|x\|_q \leq \|x\| . \tag{2}$$

Din (1) şi (2) găsim concluzia, anume că

$$\lim_{q \to \infty} \|x\|_q = \|x\| .$$

**3.**
**a**) *$l^p \subseteq l^\infty$.*
**b**) *$\overline{l^p} = c_0$, unde închiderea lui $l^p$ este considerată în norma din $l^\infty$.*
*Demonstraţie.*

a) Dacă $x = (x_n)_{n\geq 1} \in l^p$ atunci $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, adică $x \in c_0 \subseteq l^\infty$.

Deci

$$l^p \subseteq c_0 \subseteq l^\infty.$$

b) Drept urmare

$$\overline{l^p} \subseteq \overline{c_0} = c_0. \tag{1}$$

Pe de altă parte, dacă $x = (x_n)_{n\geq 1} \in c_0$ putem considera şirul $x_k = (x_n^k)_{n\geq 1} = (x_1, x_2, ..., x_{k-1}, 0, 0, ..., 0, ..) \in l^p$.
Atunci

$$\|x - x_k\| = \sup_{n\geq k} |x_n| ,$$

deci

$$\lim_{k\to\infty} \|x - x_k\| = \lim_{k\to\infty} \sup_{n\geq k} |x_n| = \limsup |x_n| = \lim |x_n| = 0.$$

Drept urmare

$$\lim_{k \to \infty} x_k = x,$$

deci $x \in \overline{l^p}$.

Aşadar

$$c_0 \subseteq \overline{l^p}. \tag{2}$$

Din (1) şi (2) rezultă concluzia.

**Remarcă.** *$l^p$ nu este închis (cu privire la norma din $l^\infty$) în $l^\infty$.*

*Justificare.* $l^p \neq c_0$ căci şirul $(1, \frac{1}{2^{\frac{1}{p}}}, \frac{1}{3^{\frac{1}{p}}}, ..., \frac{1}{n^{\frac{1}{p}}}, ...) \in c_0 - l^p$ deoarece seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ este divergentă.

# SPAŢII DE FUNCŢII

## SPAŢII DE FUNCŢII MĂRGINITE

În cele ce urmează vom considera că $X$ este un spaţiu topologic local compact (faptul că $X$ este local compact va fi folosit numai în studiul lui $\mathcal{C}_0(X)$).

### Spaţiul $\mathcal{M}(X)$ al funcţiilor mărginite

**Definiţie.** *Mulţimea*

$$\mathcal{M}(X) = \{f : X \to K \mid f \text{ este mărginită}\},$$

*înzestrată cu adunarea uzuală a funcţiilor şi înmulţirea uzuală a funcţiilor cu scalari, este un spaţiu vectorial.*

*Acest spaţiu vectorial poate fi înzestrat cu următoarea normă (se verifică cu uşurinţă axiomele normei)*

$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)| .$$

**Remarcă.** *Norma de mai sus se mai notează $\|f\|_\infty$.*

**Propoziţie**. *Spaţiul normat* $(\mathcal{M}(X), \|.\|)$ *este spaţiu Banach.*

*Demonstraţie.* Pentru a demonstra că $(\mathcal{M}(X), \|.\|)$ este spaţiu Banach, vom considera $(f_n)_{n\geq 1}$ un şir Cauchy arbitrar de elemente din $\mathcal{M}(X)$ şi vom arăta că există $f \in \mathcal{M}(X)$ astfel ca $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ (în norma descrisă mai sus).

*Existenţa funcţiei* $f$. Justificare. Deoarece şirul $(f_n)_{n\geq 1}$ este Cauchy

$$(\forall)\ \varepsilon > 0 \quad (\exists)\ n_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ astfel ca } (\forall)\ m, n \in \mathbb{N},\ m, n \geq n_\varepsilon \text{ avem } \|f_n - f_m\| < \varepsilon.$$

Drept urmare, întrucît, în conformitate cu definiţia normei unei funcţii din $\mathcal{M}(X)$, avem

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|$$

pentru orice $x \in X$ şi orice $m, n \geq n_\varepsilon$, deducem că următoarea relaţie este adevărată

$$(\forall)\ \varepsilon > 0 \quad (\exists)\ n_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ astfel ca } (\forall)\ m, n \in \mathbb{N},\ m, n \geq n_\varepsilon$$

avem

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon, \tag{*}$$

pentru orice $x \in X$.

Aşadar, pentru orice $x \in X$, şirul $(f_n(x))_{n\geq 1}$ este Cauchy.

Cum $K$ este spaţiu Banach, deducem că există $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ care va fi notată cu $f(x)$.

Deci

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x),$$

pentru orice $x \in X$.

Fie $f : X \to K$, definită de relaţia de mai sus.

*Afirmaţie.* $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$. Justificare. Din relaţia (*) avem, prin trecere la limită după $m$, că

$$(\forall)\ \varepsilon > 0 \quad (\exists)\ n_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ astfel ca } (\forall)\ n \in \mathbb{N},\ n \geq n_\varepsilon \text{ avem } |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

pentru orice $x \in X$, de unde

$$(\forall)\ \varepsilon > 0 \quad (\exists)\ n_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ astfel ca } (\forall)\ n \in \mathbb{N},\ n \geq n_\varepsilon \text{ avem } \|f_n - f\| < \varepsilon.$$

Această ultimă relaţie arată că $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$, adică $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$.

*Afirmaţie.* $f \in \mathcal{M}(X)$. Justificare. $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$ exprimă exact faptul că şirul $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniform către $f$. Atunci, cum $f_n$ este mărginită pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $f$ este mărginită.

**Definiţie**. *Mulţimea*

$$\mathcal{B}(X) = \{f : X \to K \mid f \textit{ este mărginită şi continuă}\},$$

*înzestrată cu adunarea uzuală a funcţiilor şi înmulţirea uzuală a funcţiilor cu scalari, este un spaţiu vectorial.*

*Acest spaţiu vectorial poate fi înzestrat cu următoarea normă (se verifică cu uşurinţă axiomele normei)*

$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)| .$$

**Remarcă**. $\mathcal{B}([a,b])$ *se mai notează* $\mathcal{C}([a,b])$.

**Remarcă**. $\mathcal{B}(X)$ *este un subspaţiu al lui* $\mathcal{M}(X)$.

**Propoziţie**. *Spaţiul normat* $(\mathcal{B}(X), \|.\|)$ *este spaţiu Banach.*

*Demostraţie.* Vom arăta că $\mathcal{B}(X)$ este închis.

Dorim deci să arătăm că $\overline{\mathcal{B}(X)} = \mathcal{B}(X)$.

După cum se cunoaşte este suficient să demonstrăm incluziunea $\overline{\mathcal{B}(X)} \subseteq \mathcal{B}(X)$ (cealaltă incluziune fiind valabilă întotdeauna datorită definiţiei închiderii unei mulţimi).

În acest scop vom considera $f \in \overline{\mathcal{B}(X)}$ şi vom arăta că $f \in \mathcal{B}(X)$.

Din caracterizarea închiderii unei mulţimi în spaţii metrice, decurge existenţa unui şir $(f_n)_{n \geq 1}$, de elemente din $\mathcal{B}(X)$, astfel ca $\lim\limits_{n \to \infty} f_n = f$ (în norma lui $\mathcal{B}(X)$).

Aşadar

$$(\forall)\ \varepsilon > 0 \quad (\exists)\ n_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ astfel ca } (\forall)\ n \in \mathbb{N},\ n \geq n_\varepsilon \text{ avem } \quad \|f_n - f\| < \varepsilon.$$

Drept urmare, întrucît, în conformitate cu definiţia normei unei funcţii din $\mathcal{B}(X)$, avem

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\|$$

pentru orice $x \in X$ şi orice $n \geq n_\varepsilon$, obţinem următoarea relaţie

$$(\forall)\ \varepsilon > 0 \quad (\exists)\ n_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ astfel ca } (\forall)\ n \in \mathbb{N},\ n \geq n_\varepsilon \text{ avem } |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

pentru orice $x \in X$, ceea ce exprimă exact faptul că şirul $(f_n)_{n \geq 1}$ converge uniform către $f$.

Atunci, cum pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $f_n$ este mărginită şi continuă, $f$ este mărginită şi continuă, adică $f \in \mathcal{B}(X)$.

## Spaţiul $\mathcal{C}_{\infty}(X)$ al funcţiilor continue şi nule la infinit

**Definiţie**. *Mulţimea*

$$\mathcal{C}_{\infty}(X) = \{f : X \to K \mid f \textit{ este continuă şi nulă la infinit, i.e.}$$

$$(\forall)\ \varepsilon > 0 \textit{ există } A_{\varepsilon} \textit{ o submulţime compactă a lui } X \textit{ astfel ca}$$

$$|f(x)| < \varepsilon \textit{ pentru orice } x \notin A_{\varepsilon}\},$$

*înzestrată cu adunarea uzuală a funcţiilor şi înmulţirea uzuală a funcţiilor cu scalari, este un spaţiu vectorial.*

*Acest spaţiu vectorial poate fi înzestrat cu următoarea normă (se verifică cu uşurinţă axiomele normei)*

$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

**Remarcă**. $\mathcal{C}_{\infty}(X)$ *este un subspaţiu al lui* $\mathcal{B}(X)$ *căci* $f$ *este mărginită atît pe* $X - A_{\varepsilon}$ *(din definiţie) cît şi pe* $A_{\varepsilon}$ *(fiind continuă pe această mulţime compactă).*

**Propoziţie**. *Spaţiul normat* $(\mathcal{C}_{\infty}(X), \|.\|)$ *este spaţiu Banach.*

*Demostraţie*. Vom arăta că $\mathcal{C}_{\infty}(X)$ este închis.

Dorim deci să arătăm că $\overline{\mathcal{C}_{\infty}(X)} = \mathcal{C}_{\infty}(X)$.

După cum se cunoaşte este suficient să demonstrăm incluziunea $\overline{\mathcal{C}_{\infty}(X)} \subseteq \mathcal{C}_{\infty}(X)$ (cealaltă incluziune fiind valabilă întotdeauna datorită definiţiei închiderii unei mulţimi).

În acest scop vom considera $f \in \overline{\mathcal{C}_{\infty}(X)}$ şi vom arăta că $f \in \mathcal{C}_{\infty}(X)$.

Din caracterizarea închiderii unei mulţimi în spaţii metrice, decurge existenţa unui şir $(f_n)_{n \geq 1}$ de elemente din $\mathcal{C}_{\infty}(X)$ astfel ca $\lim\limits_{n \to \infty} f_n = f$ (în norma lui $\mathcal{C}_{\infty}(X)$).

Cum $\mathcal{C}_{\infty}(X) \subseteq \mathcal{B}(X)$ deducem (folosind din nou caracterizarea închiderii unei mulţimi în spaţii metrice) că $f \in \overline{\mathcal{B}(X)} = \mathcal{B}(X)$, aşa cum am văzut mai sus.

Drept urmare rămîne să arătăm că $f$ este nulă la infinit.

Fie $\varepsilon > 0$.

Atunci, cum $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$, rezultă că

$$(\forall)\ \varepsilon > 0 \quad (\exists)\ n_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ astfel ca } \|f_{n_\varepsilon} - f\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pe de altă parte, cum $f_{n_\varepsilon} \in \mathcal{C}_\infty(X)$, există $A_\varepsilon$ o submulţime compactă a lui $X$ astfel ca

$$|f_{n_\varepsilon}(x)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

pentru orice $x \notin A_\varepsilon$.

Atunci, pentru orice $x \notin A_\varepsilon$ avem

$$|f(x)| \leq |f(x) - f_{n_\varepsilon}(x)| + |f_{n_\varepsilon}(x)| \leq \|f_{n_\varepsilon} - f\| + |f_{n_\varepsilon}(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

În concluzie $f \in \mathcal{C}_\infty(X)$.

## Spaţiul $\mathcal{C}_0(X)$ al funcţiilor continue şi cu suport compact

**Definiţie**. *Mulţimea*

$$\mathcal{C}_0(X) = \{f : X \to K \mid f \textit{ este continuă şi cu suport compact,}$$

$$\textit{i.e. există } A \textit{ o submulţime compactă a lui } X \textit{ astfel ca}$$

$$|f(x)| = 0 \textit{ pentru orice } x \notin A\},$$

*înzestrată cu adunarea uzuală a funcţiilor şi înmulţirea uzuală a funcţiilor cu scalari este un spaţiu vectorial.*

*Acest spaţiu vectorial poate fi înzestrat cu următoarea normă (se verifică cu uşurinţă axiomele normei)*

$$\|f\| = \sup_{x\in X} |f(x)|.$$

**Remarcă**. *$\mathcal{C}_0(X)$ este un subspaţiu al lui $\mathcal{C}_\infty(X)$.*

**Propoziţie**. *Spaţiul normat $(\mathcal{C}_0(X), \|\|)$ nu este spaţiu Banach.*

*Demostraţie.* Vom arăta că $\mathcal{C}_0(X)$ nu este închis.

Mai precis, vom arăta că $\overline{\mathcal{C}_0(X)} = \mathcal{C}_\infty(X)$.

Cum $\mathcal{C}_0(X) \subset \mathcal{C}_\infty(X)$ deducem că $\mathcal{C}_0(X)$ nu este închis, deci nu este spaţiu Banach.

Deoarece $\mathcal{C}_0(X) \subseteq \mathcal{C}_\infty(X)$ deducem că

$$\overline{\mathcal{C}_0(X)} \subseteq \overline{\mathcal{C}_\infty(X)} = \mathcal{C}_\infty(X). \qquad (*)$$

Pe de altă parte, fie $f \in \mathcal{C}_\infty(X)$.

Atunci pentru $\varepsilon > 0$ există $A_\varepsilon$ (pe care, pentru simplitate o vom nota cu $A$) o submulţime compactă a lui $X$ astfel ca

$$|f(x)| < \varepsilon,$$

pentru orice $x \notin A$.

Deoarece $X$ este local compact, orice punct $a \in A$ are o vecinătate compactă, pe care o vom nota cu $U_a$.

Deoarece familia $(\overset{\circ}{U}_a)_{a \in A}$ constituie o acoperire cu mulţimi deschise a mulţimii compacte $A$, deducem că există $p \in \mathbb{N}$ şi $a_1$, ..., $a_p \in A$ astfel ca

$$A \subseteq \overset{\circ}{U}_{a_1} \cup \ldots \cup \overset{\circ}{U}_{a_p}.$$

Să notăm $U = \overset{\circ}{U}_{a_1} \cup \ldots \cup \overset{\circ}{U}_{a_p}$ şi $C = U_{a_1} \cup \ldots \cup U_{a_p}$.

$U$ este mulţime deschisă iar $C$ este mulţime compactă.

Evident $A \subseteq U \subseteq C$.

În continuare vom folosi următorul rezultat (vezi Marius Rădulescu şi Sorin Rădulescu, Teoreme şi Probleme de Analiză Matematică):

*Fie $X$ un spaţiu topologic local compact, $K$ o mulţime compactă şi $V$ o mulţime deschisă astfel ca $K \subseteq V \subseteq X$. Atunci există o funcţie continuă $f : X \to [0,1]$ astfel ca $f_{|K} \equiv 1$ şi $f_{|X-V} \equiv 0$.*

Atunci, conform cu rezultatul menţionat, există o funcţie continuă $h : X \to [0,1]$ astfel ca $h_{|A} \equiv 1$ *şi* $h_{|X-U} \equiv 0$.

Fie acum funcţia $g = hf$.

Evident funcţia $g$ este continuă.

Mai mult, dacă $x \notin C$ atunci $x \notin U$ deci $h(x) = 0$, de unde $g(x) = 0$.

Aşadar $g \in \mathcal{C}_0(X)$.

Pe de altă parte

$$|f(x) - g(x)| = |f(x)|\,|1 - h(x)| = \begin{cases} 0, \text{ dacă } x \in A. \\ \leq |f(x)| < \varepsilon, \text{ dacă } x \notin A. \end{cases}$$

Drept urmare

$$|f(x) - g(x)| < \varepsilon,$$

pentru orice $x \in X$, de unde

$$\sup_{x \in X} |f(x) - g(x)| = \|f - g\| < \varepsilon.$$

Deci $f \in \overline{\mathcal{C}_0(X)}$.

Aşadar

$$\mathcal{C}_\infty(X) \subseteq \overline{\mathcal{C}_0(X)},$$

de unde

$$\mathcal{C}_\infty(X) = \overline{\mathcal{C}_0(X)}.$$

## Spaţiul $\mathcal{V}([0,1])$ al funcţiilor cu variaţie mărginită

**Definiţie.** *Mulţimea*

$$\mathcal{V}([0,1]) = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ este cu variaţie mărginită}\},$$

*înzestrată cu adunarea uzuală a funcţiilor şi înmulţirea uzuală a funcţiilor cu scalari, este un spaţiu vectorial.*

*Acest spaţiu vectorial poate fi înzestrat cu următoarea normă (vom verifica imediat că într-adevăr este normă)*

$$\|f\| = |f(0)| + \overset{1}{\underset{0}{V}}(f).$$

**Remarcă.**

**1.** *Să ne reamintim că* $\overset{1}{\underset{0}{V}}(f) = \sup\limits_{\Delta \in \mathcal{D}([0,1])} \{\sum\limits_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| \mid$ *unde* $\Delta$ *este* $0 = x_0 < x_1 < ... < x_n = 1\}$.

**2.** *Evident, faptul că am ales intervalul* $[0,1]$ *nu este esenţial; se poate considera mai general spaţiul funcţiilor cu variaţie mărginită pe intervalul* $[a,b]$.

**3.** $\mathcal{V}([0,1])$ *este o submulţime a lui* $\mathcal{M}([0,1])$

**Propoziţie.** *Spaţiul normat* $(\mathcal{V}([0,1]), \|.\|)$ *este spaţiu Banach.*

*Demostraţie.* Pentru început să arătăm că $\|.\|$ este o normă.

**A1)** *Dacă* $\|f\| = 0$ *atunci* $f = 0$.

Într-adevăr, dacă $\|f\| = 0$ atunci $|f(0)| + \overset{1}{\underset{0}{V}}(f) = 0$, deci $f(0) = 0$ şi $\overset{1}{\underset{0}{V}}(f) = 0$.

Dar, pentru orice $t \in [0,1]$,

$$|f(t) - f(0)| = |f(t)| \leq |f(t) - f(0)| + |f(1) - f(t)| \leq \overset{1}{\underset{0}{V}}(f) = 0$$

căci $0 = x_0 \leq x_1 = t \leq x_2 = 1$ este o diviziune particulară a lui $[0,1]$.

Aşadar $f(t) = 0$ pentru orice $t \in [0,1]$, i.e. $f = 0$.

**A2)** *Dacă* $\alpha \in \mathbb{R}$ *atunci* $\|\alpha f\| = |\alpha|\,\|f\|$.

Într-adevăr,

$$\|\alpha f\| = |\alpha f(0)| + \overset{1}{\underset{0}{V}}(\alpha f) = |\alpha|\,|f(0)| + |\alpha|\overset{1}{\underset{0}{V}}(f) = |\alpha|\,(|f(0)| + \overset{1}{\underset{0}{V}}(f)) = |\alpha|\,\|f\|,$$

unde am folosit proprietăţile modulului şi ale variaţiei unei funcţii.

**A3)** $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$.

Această inegalitate decurge îndată din inegalitatea triunghiului pentru modul şi din următoarea inegalitate referitoare la variaţia sumei a două funcţii

$$\overset{1}{\underset{0}{V}}(f+g) \leq \overset{1}{\underset{0}{V}}(f) + \overset{1}{\underset{0}{V}}(f).$$

Pentru a demonstra că $(\mathcal{V}([0,1]), \|.\|)$ este spaţiu Banach vom considera $(f_n)_{n\geq 1}$ un şir Cauchy arbitrar de elemente din $\mathcal{V}([0,1])$ şi vom arăta că există $f \in \mathcal{V}([0,1])$ astfel ca $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ (în norma descrisă mai sus).

*Existenţa funcţiei* $f$. Justificare. Deoarece şirul $(f_n)_{n\geq 1}$ este Cauchy

$$(\forall)\ \varepsilon > 0 \quad (\exists)\ n_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ astfel ca } (\forall)\ m,n \in \mathbb{N},\ m,n \geq n_\varepsilon \text{ avem } \|f_n - f_m\| < \varepsilon.$$

Drept urmare, întrucît, în conformitate cu definiţia normei unei funcţii din $V([0,1])$, avem

$$|f_n(t) - f_m(t)| \leq |f_n(0) - f_m(0)| + |(f_n(t) - f_m(t)) - (f_n(0) - f_m(0))| \leq$$

$$\leq |f_n(0) - f_m(0)| + \overset{1}{\underset{0}{V}}(f_n - f_m) = \|f_n - f_m\|,$$

pentru orice $t \in [0,1]$ şi orice $m,n \geq n_\varepsilon$, deducem că pentru orice $t \in [0,1]$, următoarea relaţie este adevărată

$$(\forall)\ \varepsilon > 0 \quad (\exists)\ n_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ astfel ca } (\forall)\ m,n \in \mathbb{N},\ m,n \geq n_\varepsilon \text{ avem } |f_n(t) - f_m(t)| < \varepsilon.$$

Aşadar, pentru orice $t \in [0,1]$, şirul $(f_n(t))_{n\geq 1}$ este Cauchy.

Cum $\mathbb{R}$ este spaţiu Banach, deducem că există $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ care va fi notată cu $f(x)$.

Deci

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x),$$

pentru orice $t \in [0,1]$.

Fie $f : X \to \mathbb{R}$, definită de relaţia de mai sus.

*Afirmaţie.* $\lim_{n\to\infty} f_n = f$. Justificare. Deoarece şirul $(f_n)_{n\geq 1}$ este Cauchy

$$(\forall)\ \varepsilon > 0 \quad (\exists)\ n_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ astfel ca } (\forall)\ m,n \in \mathbb{N},\ m,n \geq n_\varepsilon \text{ avem } \|f_n - f_m\| < \varepsilon,$$

de unde, în conformitate cu definiţia normei unei funcţii din $\mathcal{V}([0,1])$,

$$(\forall)\ \varepsilon > 0 \quad (\exists)\ n_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ astfel ca } (\forall)\ n,m \in \mathbb{N},\ n,m \geq n_\varepsilon \text{ avem}$$

$$|f_n(0) - f_m(0)| + \sum_{i=0}^{r-1} |(f_n(x_{i+1}) - f_m(x_{i+1})) - (f_n(x_i) - f_m(x_i))| < \varepsilon,$$

pentru orice diviziune $\Delta \in \mathcal{D}([0,1])$, unde $\Delta$ este $0 = x_0 < x_1 < ... < x_r = 1$.

Din această ultimă relaţie, prin trecere la limită după $n$, obţinem

$$(\forall)\ \varepsilon > 0 \quad (\exists)\ n_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ astfel ca } (\forall)\ m \in \mathbb{N},\ m \geq n_\varepsilon \text{ avem}$$

$$|f(0) - f_m(0)| + \sum_{i=0}^{r-1} |(f(x_{i+1}) - f_m(x_{i+1})) - (f(x_i) - f_m(x_i))| < \varepsilon,$$

pentru orice diviziune $\Delta \in \mathcal{D}([0,1])$, unde $\Delta$ este $0 = x_0 < x_1 < ... < x_r = 1$.

Drept urmare

$$(\forall)\ \varepsilon > 0 \quad (\exists)\ n_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ astfel ca } (\forall)\ m \in \mathbb{N},\ m \geq n_\varepsilon \text{ avem}$$

$$|f(0) - f_m(0)| + \bigvee_0^1 (f - f_m) = \|f - f_m\| < \varepsilon. \qquad (*)$$

Această ultimă relaţie arată că $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$, adică $\lim_{n\to\infty} f_n = f$.

*Afirmaţie.* $f \in \mathcal{V}([0,1])$. Justificare. Din (*) decurge că

$$\bigvee_0^1 (f - f_{n_\varepsilon}) < \varepsilon - |f(0) - f_{n_\varepsilon}(0)|,$$

deci funcţia $f - f_{n_\varepsilon} \in \mathcal{V}([0,1])$.

Cum $f_{n_\varepsilon} \in \mathcal{V}([0,1])$ şi $\mathcal{V}([0,1])$ este spaţiu vectorial, deducem că $f \in \mathcal{V}([0,1])$.

**Remarcă**. *Consideraţiile de mai sus sunt valabile şi în cazul în care* $[0,1]$ *este înlocuit cu un interval arbitrar* $[a,b]$, *situaţie în care* $\mathcal{V}([a,b])$ *se mai notează cu* $BV([a,b])$.

## Spaţiul $\mathcal{R}([a,b])$ al funcţiilor integrabile Riemann

**Definiţie**. *Mulţimea*

$$\mathcal{R}([a,b]) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f \textit{ este integrabilă Riemann}\},$$

*înzestrată cu adunarea uzuală a funcţiilor şi înmulţirea uzuală a funcţiilor cu scalari, este un spaţiu vectorial.*

*Acest spaţiu vectorial poate fi înzestrat cu următoarea normă (se verifică cu uşurinţă axiomele normei)*

$$\|f\| = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|.$$

**Remarcă**. $\mathcal{R}([a,b])$ *este un subspaţiu al lui* $\mathcal{M}([a,b])$.

**Propoziţie**. *Spaţiul normat* $(\mathcal{R}([a,b]), \|.\|)$ *este spaţiu Banach.*

*Demonstraţie.* Pentru a demonstra că $(\mathcal{R}([a,b]), \|.\|)$ este spaţiu Banach vom considera $(f_n)_{n\geq 1}$ un şir Cauchy arbitrar de elemente din $(\mathcal{R}([a,b]), \|.\|)$ şi vom arăta că există $f \in \mathcal{R}([a,b])$ astfel ca $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ (în norma descrisă mai sus).

*Existenţa funcţiei* $f$. Justificare. Deoarece şirul $(f_n)_{n\geq 1}$ este Cauchy

$$(\forall)\ \varepsilon > 0 \quad (\exists)\ n_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ astfel ca } (\forall)\ m,n \in \mathbb{N},\ m,n \geq n_\varepsilon \text{ avem } \|f_n - f_m\| < \varepsilon.$$

Drept urmare, întrucît, în conformitate cu definiţia normei unei funcţii din $\mathcal{R}([a,b])$, avem

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|$$

pentru orice $x \in [a,b]$ şi orice $m,n \geq n_\varepsilon$, deducem că următoarea relaţie este adevărată

$$(\forall)\ \varepsilon > 0 \quad (\exists)\ n_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ astfel ca } (\forall)\ m,n \in \mathbb{N},\ m,n \geq n_\varepsilon \text{ avem } |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon, \tag{*}$$

pentru orice $x \in [a,b]$.

Aşadar, pentru orice $x \in [a,b]$, şirul $(f_n(x))_{n\geq 1}$ este Cauchy.

Cum $\mathbb{R}$ este spaţiu Banach, deducem că există $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ care va fi notată cu $f(x)$.

Deci

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x),$$

pentru orice $x \in [a,b]$.

Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, definită de relaţia de mai sus.

*Afirmaţie.* $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$. Justificare. Din relaţia (*) avem, prin trecere la limită după $m$, că

$$(\forall)\ \varepsilon > 0 \quad (\exists)\ n_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ astfel ca } (\forall)\ n \in \mathbb{N},\ n \geq n_\varepsilon \text{ avem } |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

pentru orice $x \in [a,b]$, de unde,

$$(\forall)\ \varepsilon > 0 \quad (\exists)\ n_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ astfel ca } (\forall)\ n \in \mathbb{N},\ n \geq n_\varepsilon \text{ avem } \quad \|f_n - f\| < \varepsilon.$$

Această ultimă relaţie arată că $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$, adică $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$.

*Afirmaţie.* $f \in \mathcal{R}([a,b])$. Justificare. $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$ exprimă exact faptul că şirul $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniform către $f$. Atunci $f$ este integrabilă Riemann.

## Spaţiul $C^n([a,b])$ al funcţiilor de clasă $C^n$

**Definiţie.** *Mulţimea*

$$C^n([a,b]) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f \textit{ este de clasă } C^n\},$$

*înzestrată cu adunarea uzuală a funcţiilor şi înmulţirea uzuală a funcţiilor cu scalari, este un spaţiu vectorial.*

*Acest spaţiu vectorial poate fi înzestrat cu următoarea normă (se verifică cu uşurinţă axiomele normei)* ·

$$\|f\| = \max_{0\leq i\leq n} \sup_{x\in[a,b]} \left|f^{(i)}(x)\right|.$$

**Propoziţie.** *Spaţiul normat* $(C^n([a,b]), \|.\|)$ *este spaţiu Banach.*

*Demonstraţie.* Pentru a demonstra că $(C^n([a,b]), \|.\|)$ este spaţiu Banach vom considera $(f_n)_{n\geq 1}$ un şir Cauchy arbitrar de elemente din $C^n([a,b])$ şi vom arăta că există $f \in C^n([a,b])$ astfel ca $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ (în norma descrisă mai sus).

*Existenţa funcţiei $f$.* Justificare. Deoarece şirul $(f_n)_{n\geq 1}$ este Cauchy

$$(\forall)\ \varepsilon > 0 \quad (\exists)\ n_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ astfel ca } (\forall)\ m,n \in \mathbb{N},\ m,n \geq n_\varepsilon \text{ avem } \|f_n - f_m\| < \varepsilon.$$

Drept urmare, întrucît, în conformitate cu definiţia normei unei funcţii din $C^n([a,b])$, avem

$$\left|f_n^{(i)}(x) - f_m^{(i)}(x)\right| \leq \|f_n - f_m\|$$

pentru orice $x \in [a,b]$, orice $i \in \{0,1,2,...,n\}$ şi orice $m,n \geq n_\varepsilon$, obţinem următoarea relaţie

$$(\forall)\ \varepsilon > 0 \quad (\exists)\ n_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ astfel ca } (\forall)\ m,n \in \mathbb{N},\ m,n \geq n_\varepsilon \text{ avem } \left|f_n^{(i)}(x) - f_m^{(i)}(x)\right| < \varepsilon, \tag{*}$$

pentru orice $x \in [a, b]$.

Aşadar, pentru orice $x \in [a, b]$ şi orice $i \in \{1, 2, ..., n\}$, şirul $(f_n^{(i)}(x))_{n \geq 1}$ este Cauchy.

Cum $\mathbb{R}$ este spaţiu Banach, deducem că există limita $\lim_{n \to \infty} f_n^{(i)}(x)$ care va fi notată cu $g_i(x)$.

Deci

$$\lim_{n \to \infty} f_n^{(i)}(x) = g_i(x),$$

pentru orice $x \in [a, b]$.

Fie $f = g_0 = \lim_{n \to \infty} f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$.

*Afirmaţie.* $\lim_{n \to \infty} f_n = f$. Justificare: Din relaţia (*) avem, prin trecere la limită după $m$, că

$$(\forall)\ \varepsilon > 0 \quad (\exists)\ n_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ astfel ca } (\forall)\ n \in \mathbb{N},\ n \geq n_\varepsilon \text{ avem } \left| f_n^{(i)}(x) - g_i(x) \right| < \varepsilon,$$

pentru orice $x \in [a, b]$ şi orice $i \in \{0, 1, 2, ..., n\}$, de unde, pentru orice $i \in \{0, 1, 2, ..., n\}$

$$(\forall)\ \varepsilon > 0 \quad (\exists)\ n_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ astfel ca } (\forall)\ n \in \mathbb{N},\ n \geq n_\varepsilon \text{ avem } \sup_{x \in [a,b]} \left\| f_n^{(i)} - g_i \right\| < \varepsilon. \tag{**}$$

Această ultimă relaţie arată că $\lim_{n \to \infty} \left\| f_n^{(i)} - g_i \right\| = 0$, adică şirul $(f_n)_{n \geq 1}$ converge uniform către $g_i$, pentru orice $i \in \{0, 1, 2, ..., n\}$.

Atunci funcţiile $g_i$ sunt derivabile şi $g_i' = g_{i+1}$ pentru orice $i \in \{0, 1, 2, ..., n-1\}$.

Aşadar $f$ este de $n$ ori derivabilă şi $f^{(i)} = g_i$ pentru orice $i \in \{0, 1, 2, ..., n-1\}$.

Mai mult, deoarece $f_m^{(n)}$ este funcţie continuă pentru orice $m \in \mathbb{N}$ deducem că $f^{(n)}$ este funcţie continuă, deci $f \in C^n([a, b])$.

Relaţia (**) arată că $\lim_{n \to \infty} \|f_n - f\| = 0$.

## Spaţiul $C_0^\infty(\mathbb{R})$ al funcţiilor indefinit derivabile cu suport compact

**Definiţie.** *Mulţimea*

$$C_0^\infty(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \textit{ este de clasă } C^\infty \textit{ şi cu suport compact}\},$$

*înzestrată cu adunarea uzuală a funcţiilor şi înmulţirea uzuală a funcţiilor cu scalari, este un spaţiu vectorial.*

*Acest spaţiu vectorial poate fi înzestrat cu următoarea normă (se verifică cu uşurinţă axiomele normei)*

$$\|f\| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|.$$

**Propoziţie**. *Spaţiul normat $(C_0^\infty(\mathbb{R}), \|.\|)$ nu este spaţiu Banach.*

*Demonstraţie.* Fie, pentru orice $n \in \mathbb{N}$,

$$E_n = \{f \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \mid \text{supp } (f) \subseteq [-n, n]\}.$$

$E_n$ este un subspaţiu închis al lui $C_0^\infty(\mathbb{R})$ căci dacă $f \in \overline{C_0^\infty(\mathbb{R})}$ atunci conform cu caracterizarea închiderii unei mulţimi în spaţii metrice, există $(f_m)_{m\geq 1}$ un şir de elemente din $C_0^\infty(\mathbb{R})$ astfel ca $\lim\limits_{m\to\infty} \|f_m - f\| = 0$, deci $(f_m)_{m\geq 1}$ converge uniform către $f$, deci $f \in C^\infty(\mathbb{R})$

Mai mult

$$\text{supp}(f) \subseteq \bigcup_{m\geq 1} \text{supp}(f_m) \subseteq [-n, n],$$

adică $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.

Este clar că

$$C_0^\infty(\mathbb{R}) = \bigcup_{n\geq 1} E_n.$$

Să presupunem acum că $(C_0^\infty(\mathbb{R}), \|.\|)$ este spaţiu Banach.

Conform teoremei lui Baire există $m_0 \in \mathbb{N}$ astfel ca

$$\overset{\circ}{\overline{E_{m_0}}} \neq \emptyset.$$

Cum $E_{m_0}$ este mulţime închisă, deci $E_{m_0} = \overline{E_{m_0}}$, obţinem că

$$\overset{\circ}{E}_{m_0} \neq \emptyset.$$

Deci există $f_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ şi $r > 0$ astfel ca

$$B_r(f_0) \subseteq E_{m_0}.$$

Deoarece $E_{m_0}$ este un subspaţiu al lui $C_0^\infty(\mathbb{R})$ rezultă că

$$B_r(f_0) - f_0 = B_r(0) \subseteq E_{m_0}$$

şi deci

$$\frac{r'}{r} B_r(0) = B_{r'}(0) \subseteq E_{m_0},$$

pentru orice $r' > 0$.

Drept urmare

$$\underset{r^{\cdot}>0}{\cup} B_{r^{\cdot}}(0) = C_0^\infty(\mathbb{R}) \subseteq E_{m_0}.$$

Aşadar

$$C_0^\infty(\mathbb{R}) \subseteq E_{m_0},$$

ceea ce, evident, este o contradicţie.

În concluzie $(C_0^\infty(\mathbb{R}), \|.\|)$ nu este spaţiu Banach.

## SPAŢIILE $L^p(\Omega)$, $p \geq 1$

*Fie $\Omega$ un domeniu din $\mathbb{R}^n$ şi $p \geq 1$.*

*În cele ce urmează vom lucra cu integrala Lebesgue.*

**Definiţie.** *Mulţimea*

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{K} \mid f \textit{ este măsurabilă şi } \int_\Omega |f(x)|^p\, dx < \infty\},$$

*înzestrată cu adunarea uzuală a funcţiilor şi înmulţirea uzuală a funcţiilor cu scalari, este un spaţiu vectorial.*

*De fapt, pentru a fi riguroşi, trebuie să menţionăm că elementele lui $L^p(\Omega)$ sunt clase de echivalenţă de funcţii safisfăcînd relaţia de mai sus, două funcţii fiind echivalente dacă sunt egale aproape peste tot.*

*Acest spaţiu vectorial poate fi înzestrat cu următoarea normă*

$$\|f\|_p = \{\int_\Omega |f(x)|^p\, dx\}^{\frac{1}{p}}.$$

*Mulţimea*

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{K} \mid f \textit{ este măsurabilă şi esenţial mărginită,}$$

$$\textit{i.e. există } M \in \mathbb{R} \textit{astfel ca } |f(x)| \leq M \textit{pentru aproape toţi } x \in \Omega\},$$

*înzestrată cu adunarea uzuală a funcţiilor şi înmulţirea uzuală a funcţiilor cu scalari, este un spaţiu vectorial.*

*Din nou, pentru a fi riguroşi, trebuie să menţionăm că elementele lui $L^\infty(\Omega)$ sunt clase de echivalenţă de funcţii safisfăcînd relaţia de mai sus, două funcţii fiind echivalente dacă sunt egale aproape peste tot.*

*Acest spaţiu vectorial poate fi înzestrat cu următoarea normă*

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \Omega} |f(x)| = \inf\{M \in \mathbb{R} \mid |f(x)| \leq M \textit{pentru aproape toţi } x \in \Omega\}.$$

**Propoziţie**. *Spaţiul normat* $(L^p(\Omega), \|.\|_p)$, *unde* $1 \leq p \leq \infty$, *este spaţiu Banach.*

**Propoziţie**. *Pentru* $1 \leq p < \infty$, $C_0(\Omega)$ *este densă în* $(L^p(\Omega), \|.\|_p)$.

**Remarcă**. *Se constată astfel, întrucît* $C_0(\Omega) \subset L^p(\Omega)$, *că* $C_0(\Omega)$ *nu este un subspaţiu închis al lui* $(L^p(\Omega), \|.\|_p)$, *deci* $(C_0(\Omega), \|.\|_p)$ *nu este spaţiu Banach.*

# CAPITOLUL II

## TEOREMA HAHN-BANACH

Unul dintre cele mai importante rezultate din analiza funcţională se referă la extinderea unei funcţionale liniare şi continue $g : Y \to K$, unde $Y$ este un subspaţiu al unui spaţiu vectorial normat $X$, la o aplicaţie $f : X \to K$ care să fie de asemenea liniară şi continuă şi care să aibă aceeaşi normă ca şi $g$. Aplicaţia $g$ poate fi uşor extinsă la o aplicaţie liniară pe $X$. De asemenea, datorită continuităţii uniforme a lui $g$ pe $Y$ o putem extinde la o aplicaţie continuă pe $\overline{Y}$ iar apoi la $X$ folosind teorema lui Tietze. Nu este însă deloc evident că se poate obţine o extensie care să fie simultan liniară şi continuă. Acest lucru este afirmat de teorema Hahn-Banach.

Forme echivalente ale teoremei Hahn-Banach sunt date de următoarea

**Propoziţie**. *Fie $X$ un spaţiu vectorial (real).*
*Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

*a) Teorema Hahn-Banach, adică: Fie $p : X \to \mathbb{R}$ funcţională subliniară (i.e. pentru orice $x, y \in X$ şi orice $t \in \mathbb{R}_+$ avem*

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y)$$

*şi*

$$p(tx) = tp(x) \text{ )}$$

*şi $f : X_0 \to \mathbb{R}$ o funcţională liniară, unde $X_0$ este un subspaţiu vectorial al lui $X$, astfel ca*

$$f(x) \leq p(x)$$

*pentru orice $x \in X_0$.*

*Atunci există o funcţională liniară $F : X \to \mathbb{R}$ astfel ca*

$$F_{|X_0} = f$$

*şi*

$$F(x) \leq p(x)$$

*pentru orice $x \in X$.*

*b) Pentru orice $p_1$, $p_2 : X \to \mathbb{R}$ funcţionale subliniare şi orice $f : X \to \mathbb{R}$ funcţională liniară astfel ca*

$$f \leq p_1 + p_2,$$

*există $f_1$, $f_2 : X \to \mathbb{R}$ funcţionale liniare astfel ca*

$$f = f_1 + f_2$$

*şi*

$$f_1 \leq p_1, \ f_2 \leq p_2.$$

*c) Pentru orice $p$, $q : X \to \mathbb{R}$, $q$ funcţională supraliniară (i.e. pentru orice $x, y \in X$ şi orice $t \in \mathbb{R}_+$ avem*

$$q(x) + q(y) \leq q(x + y)$$

*şi*

$$q(tx) = tq(x) \ )$$

*iar $p$ subliniară astfel ca*

$$q \leq p,$$

*există $f : X \to \mathbb{R}$, funcţională liniară astfel ca*

$$q \leq f \leq p.$$

*Demonstraţie:*

*a)* $\Rightarrow$ *b)* Fie funcţionala subliniară $p : X \times X \to \mathbb{R}$ dată de

$$p(x_1, x_2) = p_1(x_1) + p_2(x_2)$$

pentru orice $(x_1, x_2) \in X \times X$.

Să considerăm următorul subspaţiu al lui $X \times X$:

$$X_0 = \{(x, x) \mid x \in X\}$$

şi funcţionala liniară $f_0 : X_0 \to \mathbb{R}$ dată de

$$f_0(x, x) = f(x)$$

pentru orice $x \in X$.

Din teorema Hahn-Banach rezultă existenţa unei funcţionale liniare $g : X \times X \to \mathbb{R}$ astfel ca

$$g \leq p$$

şi

$$g_{|X_0} = f_0.$$

Atunci vom considera funcţionalele liniare $f_1,\ f_2 : X \to \mathbb{R}$ date astfel:

$$f_1(x) = g(x, 0)$$

şi

$$f_2(x) = g(0, x)$$

pentru orice $x \in X$.

Avem

$$g(x, y) = g((x, 0) + (0, y)) = g(x, 0) + g(0, y) = f_1(x) + f_2(y)$$

pentru orice $(x, y) \in X \times X$.

Deoarece $g_{|X_0} = f_0$ şi $g \leq p$, avem pentru orice $x \in X$:

$$g(x, x) = f_0(x, x) = f(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

$$g(x, 0) = f_1(x) + f_2(0) = f_1(x) \leq p(x, 0) = p_1(x) + p_2(0) = p_1(x)$$

şi

$$g(0, x) = f_1(0) + f_2(x) = f_2(x) \leq p(0, x) = p_1(0) + p_2(x) = p_2(x),$$

deci

$$f = f_1 + f_2$$

şi

$$f \leq p_1,\ f \leq p_2.$$

$b) \Rightarrow c)$

Fie $p_1$ şi $p_2$ funcţionalele subliniare date de $p_1 = -q$, $p_2 = p$.

Atunci

$$f \equiv 0 \leq p_1 + p_2,$$

deci, conform cu ipoteza, există $f_1,\ f_2 : X \to \mathbb{R}$ funcţionale liniare astfel ca

$$0 \equiv f = f_1 + f_2$$

şi

$$f_1 = -f_2 \leq p_1,\ f_2 \leq p_2,$$

de unde

$$q = -p_1 \le f_2 \le p_2 = p$$

şi alegem $f = f_2$.

$c) \Rightarrow a)$

Fie $X$ un spaţiu vectorial real, $X_0$ un subspaţiu al său, $f : X_0 \to \mathbb{R}$ o funcţională liniară şi $p : X \to \mathbb{R}$ o funcţională subliniară astfel ca

$$f \le p$$

pe $X_0$.

Construim $r, s : X \to \mathbb{R}$ astfel:

$$r(x) = \inf_{y \in X_0} \{p(x+y) - f(y)\}$$

şi

$$s(x) = \sup_{y \in X_0} \{f(y) - p(y-x)\}$$

pentru orice $x \in X$.

Aplicaţiile $r$ şi $s$ sunt pozitiv omogene, căci pentru orice $\alpha \ge 0$ şi $x \in X$ avem:

$$r(\alpha x) = \inf_{y \in X_0} \{p(\alpha x + y) - f(y)\} =$$

$$= \inf_{y \in X_0} \alpha \{p(x + \frac{y}{\alpha}) - f(\frac{y}{\alpha})\} = \alpha \inf_{y \in X_0} \{p(x + \frac{y}{\alpha}) - f(\frac{y}{\alpha})\} = \alpha r(x).$$

Aplicaţia $s$ este supraaditivă deoarece avem:

$$f(y) - p(y - x_1) + f(z) - p(z - x_2) = f(y+z) - p(y - x_1) - p(z - x_2) \le$$

$$\le f(y+z) - p(y + z - (x_1 + x_2)) \le s(x_1 + x_2)$$

pentru orice $x_1, x_2 \in X$ şi $y, z \in X_0$, de unde

$$s(x_1) + s(x_2) \le s(x_1 + x_2)$$

pentru orice $x_1, x_2 \in X$.

Aplicaţia $r$ este subaditivă deoarece avem:

$$r(x_1 + x_2) \le p(x_1 + x_2 + y + z) - f(y + z) \le$$

$$\le p(x_1 + y) - f(y) + p(x_2 + z) - f(z)$$

pentru orice $x_1, x_2 \in X$ şi $y, z \in X_0$, de unde

$$r(x_1 + x_2) \leq r(x_1) + r(x_2)$$

pentru orice $x_1, x_2 \in X$.

În plus, $s \leq r$ deoarece

$$p(x+y) - f(y) - (f(z) - p(z-x)) \geq p(z+y) - f(y+z) \geq 0,$$

deci

$$p(x+y) - f(y) \geq f(z) - p(z-x)$$

pentru orice $y, z \in X_0$, deci

$$\sup_{z \in X_0} \{f(z) - p(z-x)\} \leq \inf_{y \in X_0} \{p(x+y) - f(y)\},$$

de unde

$$s(x) \leq r(x)$$

pentru orice $x \in X$.

Atunci există $F : X \to \mathbb{R}$ funcţională liniară astfel ca

$$s \leq F \leq r$$

şi avem

$$F(x) \leq r(x) \leq p(x)$$

pentru orice $x \in X$ şi

$$f(x) = f(x) - p(0) \leq \sup_{y \in X_0} \{f(y) - p(y-x)\} = s(x) \leq F(x) \leq$$

$$\leq r(x) = \inf_{y \in X_0} \{p(x+y) - f(y)\} \leq p(x-x) - f(-x) = f(x)$$

pentru orice $x \in X_0$, deci

$$F_{|X_0} = f.$$

**Remarcă.** *Teorema Hahn-Banach este validă şi în cazul complex, adică avem:*

*Fie $X$ un spaţiu vectorial complex, $p$ o seminormă pe $X$ şi $f_0$ o funcţională liniară, definită pe un subspaţiu vectorial $X_0$ al lui $X$, care satisface condiţia*

$$|f_0(x)| \leq p(x),$$

*pentru orice* $x \in X_0$.

*Atunci* $f_0$ *se poate prelungi, pe tot spaţiul* $X$, *la o funcţională liniară* $f$ *satisfăcînd condiţia*

$$|f(x)| \leq p(x),$$

*pentru orice* $x \in X_0$.

**Definiţie.** *Fie* $X$ *un spaţiu vectorial normat peste* $K$. *Atunci* $X^* = \{f : X \to K \mid f$ *este liniară şi continuă*$\}$ *cu norma*

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| \mid \|x\| \leq 1\}$$

*este un spaţiu vectorial normat complet, numit dualul lui* $X$.

**Teoremă.** *Fie* $X$ *un spaţiu vectorial normat peste* $\mathbb{R}$, $E$ *o submulţime nevidă deschisă şi convexă a lui* $X$ *iar* $Y$ *un subspaţiu al lui* $X$ *astfel ca* $E \cap Y = \emptyset$. *Atunci există* $H$ *un subspaţiu maximal propriu închis al lui* $X$ *astfel ca* $Y \subseteq H$ *şi* $E \cap H = \emptyset$. *Altfel spus, există* $f \in X^*$, *astfel ca* $f_{|Y} = 0$ *dar* $f(x) \neq 0$ *pentru orice* $x \in E$.

**Teorema Hahn-Banach (de separare).** *Fie* $X$ *un spaţiu vectorial normat peste* $K$ *iar* $E_1$ *şi* $E_2$ *două submulţimi ale lui* $X$ *nevide, convexe cu* $E_1$ *deschisă. Atunci există* $f \in X^*$ *şi* $\alpha \in \mathbb{R}$ *astfel ca*

$$\operatorname{Re} f(x_1) < \alpha \leq \operatorname{Re} f(x_2),$$

*pentru orice* $x_1 \in E_1$ *şi* $x_2 \in E_2$.

**Teorema Hahn-Banach (de extindere).** *Fie* $X$ *un spaţiu vectorial normat, peste* $K$, *şi* $Y$ *un subspaţiu al lui* $X$. *Atunci pentru orice* $g \in Y^*$ *există* $f \in X^*$ *astfel ca*

$$f_{|Y} = g$$

*şi*

$$\|f\| = \|g\|.$$

**Remarcă.** *Nu există nici un operator liniar* $V : c \to c_0$ *astfel ca*

$$V(x) = x$$

*pentru orice* $x \in c_0$ *şi*

$$\|V(x)\| \leq \|x\|$$

*pentru orice* $x \in c$, *adică teorema Hahn-Banach nu este valabilă pentru operatori liniari (în acest caz prelungirea se poate face, dar fără păstrarea normei).*

Într-adevăr, să presupunem că există un operator liniar $V : c \to c_0$ astfel ca

$$V(x) = x$$

pentru orice $x \in c_0$ şi

$$\|V(x)\| \leq \|x\|$$

pentru orice $x \in c$.

Atunci, pentru orice $x = (x_n)_{n\geq 1} \in c$, notînd $\mathbf{1} = (1, 1, 1, ..., 1, ...)$ avem, deoarece $x - (\lim_{n\to\infty} x_n)\mathbf{1} \in c_0$,

$$V(x) = x - (\lim_{n\to\infty} x_n)\mathbf{1} + (\lim_{n\to\infty} x_n)V(\mathbf{1}).$$

Deoarece $V(\mathbf{1}) = (\alpha_n)_{n\geq 1} \in c_0$ există $n_1 \in \mathbb{N}^*$ astfel ca

$$|\alpha_{n_1}| < \frac{1}{2}.$$

Fie $y = (0, 0, ..., 0, \frac{2}{1} - 1, \frac{2}{2} - 1, \frac{2}{3} - 1, ...)$ unde $\frac{2}{1} - 1$ este pe poziţia $n_1$.
Avem evident $\lim_{n\to\infty} y_n = -1$, deci $y \in c$ şi $\|y\| = 1$.
Prin urmare

$$V(y) = y + \mathbf{1} - V(\mathbf{1}) =$$

$$= (1, 1, ..., 1, \frac{2}{1}, \frac{2}{2}, \frac{2}{3}, ...) - (\alpha_n)_{n\geq 1},$$

deci

$$\|V(y)\| = \sup_{n\geq 1} |(V(y))_n| \geq |(V(y))_{n_1}| = 2 - \alpha_{n_1} > 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2},$$

de unde

$$\|V(y)\| > \frac{3}{2} > 1 = \|y\|.$$

Prezentăm în continuare cîteva consecinţe ale teoremei Hahn-Banach (de extindere).

**Corolar.** *Fie $X$ un spaţiu vectorial normat peste $K$ şi $a \in X - \{0\}$. Atunci există $f \in X^*$ astfel ca*

$$f(a) = \|a\|$$

*şi*

$$\|f\| = 1.$$

**Corolar.** *Fie $X$ un spaţiu vectorial normat peste $K$.*

*a) Fie $Y$ un subspaţiu al lui $X$ şi $a \in X$. Atunci $a \in \overline{Y}$ dacă şi numai dacă pentru orice $f \in X^*$ astfel ca $f_{|Y} = 0$ avem $f(a) = 0$.*

*b) Fie $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ o mulţime liniar independentă din $X$. Atunci există $f_1^*, f_2^*, ..., f_n^*$ elemente din $X^*$ astfel ca*

$$f_j^*(x_i) = \begin{cases} 1, & \text{pentru } j = i \\ 0, & \text{pentru } j \neq i \end{cases}.$$

**Remarcă.** *Primul punct al corolarului de mai sus este important în teoria aproximării în spaţii vectoriale normate. El afirmă că pentru a justifica aproximarea unui element $a \in X$ cu elemente dintr-un subspaţiu $Y$ al lui $X$, este suficient să se arate că orice orice $f \in X^*$ se anulează în $a$, dacă se anulează pe $Y$.*

Vom exemplifica remarca de mai sus cu următoarea:

**Teoremă.** *Fie $\{t_1, t_2, ..., t_n, ...\}$ o mulţime densă în $[0,1]$ şi, pentru fiecare $j \in \mathbb{N}^*$, fie*

$$f_j(t) = \begin{cases} 1, & \text{pentru } 0 \leq t \leq t_j \\ 0, & \text{pentru } t_j \leq t \leq 1 \end{cases}.$$

*Atunci orice $f \in L^2([0,1])$ poate fi aproximat cu combinaţii liniare de $f_1$, $f_2$, ..., $f_n$, ... .*

*Demonstraţie.* Fie $X = L^2([0,1])$ şi $F \in X^*$.

Fie $g \in X$ astfel ca

$$F(f) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

pentru orice $f \in X$.

Dacă $F(f_j) = 0$ pentru orice $j \in \mathbb{N}^*$, adică $\int_0^{t_j} g(x)dx = 0$, atunci considerăm funcţia

$$z(t) = \int_0^t g(x)dx.$$

Funcţia $z$ este continuă şi $z(t_j) = 0$ pentru orice $j \in \mathbb{N}^*$.

Deoarece $\{t_1, t_2, ..., t_n, ...\}$ este o mulţime densă în $[0,1]$, rezultă că $z \equiv 0$, de unde $g = 0$ a.p.t., deci $F = 0$.

Conform cu corolarul de mai sus, orice element al lui $X = L^2([0,1])$ este din închiderea spaţiului generat de $f_1, f_2, ..., f_n, ...$ .

În continuare dorim să studiem cînd are loc unicitatea în teorema Hahn-Banach. Pentru aceasta avem nevoie de următorul concept:

**Definiţie.** *Un spaţiu vectorial normat se numeşte strict convex dacă pentru orice $x, y \in X$ astfel ca $\|x\| = \|y\| = 1$ şi $x \neq y$ avem*

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\| < 1.$$

**Remarcă.** *Din punct de vedere geometric, $X$ este strict convex dacă mijlocul oricărui segment ce uneşte două puncte distincte de pe sfera unitate din $X$ nu se află pe aceasta.*

**Remarcă.** *$K^n$ şi $(l^p, \|.\|_p)$, pentru $p \in (1, \infty)$, sunt strict convexe. Pentru $p = 1$ sau $p = \infty$, $(l^p, \|.\|_p)$ nu este strict convex.*

**Teoremă (Taylor-Foguel, 1958).** *Fie $X$ un spaţiu vectorial normat. Atunci orice aplicaţie liniară şi continuă de la un subspaţiu al lui $X$ în $\mathbb{R}$ are o unică prelungire liniară şi continuă la $X$, care păstrează norma, dacă şi numai dacă $X^*$ este strict convex.*

*Demonstraţie.* Dacă $X^*$ este strict convex, $Y$ este un subspaţiu al lui $X$ iar $g \in Y^*$, să considerăm $f_1, f_2 \in X^*$ astfel ca $f_{i|Y} = g$ şi $\|f_i\| = \|g\|$ pentru orice $i \in \{1, 2\}$.

Atunci $\frac{f_1+f_2}{2} \in X^*$ şi $\frac{f_1+f_2}{2}_{|Y} = g$, deci

$$\|g\| \leq \left\| \frac{f_1+f_2}{2} \right\|.$$

Pe de altă parte

$$\left\| \frac{f_1+f_2}{2} \right\| \leq \frac{\|f_1\| + \|f_2\|}{2} = \|g\|.$$

Prin urmare

$$\|g\| = \left\| \frac{f_1+f_2}{2} \right\|.$$

Faptul că $X^*$ este strict convex ne asigură că $f_1 = f_2$.

Reciproc, să presupunem că orice aplicaţie liniară şi continuă, de la un subspaţiu al lui $X$ în $\mathbb{R}$, are o unică prelungire liniară. Presupunem prin reducere la absurd că există $f_1, f_2 \in X^*$ astfel ca $f_1 \neq f_2$ şi

$$\|f_1\| = \|f_2\| = \left\| \frac{f_1+f_2}{2} \right\| = 1.$$

Fie

$$Y = \{x \in X \mid f_1(x) = f_2(x)\}.$$

Vom arăta că $\|f_{1|Y}\| = \|f_{2|Y}\| = 1$, ceea ce constituie o contradicţie, deci $X^*$ este strict convex.

Deoarece $f_1 \neq f_2$ există $a \in X$ astfel ca $f_1(a) = 1 \neq f_2(a)$.

Deoarece $\left\|\frac{f_1+f_2}{2}\right\| = 1$ există un şir $(x_n)_{n\geq 1}$ de elemente din $X$ astfel ca

$$\|x_n\| = 1,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, şi

$$\lim_{n\to\infty} |f_1(x_n) + f_2(x_n)| = 2.$$

Cum $|f_1(x_n)| \leq 1$ şi $|f_2(x_n)| \leq 1$, putem presupune, trecînd la un subşir al lui $(x_n)_{n\geq 1}$ şi multiplicînd cu un scalar corespunzător, că

$$\lim_{n\to\infty} f_1(x_n) = \lim_{n\to\infty} f_2(x_n) = 1.$$

Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ considerăm

$$k_n = \frac{f_1(x_n) - f_2(x_n)}{1 - f_2(a)}.$$

Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} k_n = 0$ şi există $n_0 \in \mathbb{N}^*$ astfel ca pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ să avem

$$\|x_n - k_n a\| \neq 0.$$

Pentru $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ fie

$$y_n = \frac{x_n - k_n a}{\|x_n - k_n a\|}.$$

Avem

$$f_1(y_n) = \frac{f_1(x_n) - k_n}{\|x_n - k_n a\|} = \frac{\frac{f_2(x_n) - f_2(a) f_1(x_n)}{1 - f_2(a)}}{\|x_n - k_n a\|} =$$

$$= \frac{f_2(x_n) - k_n f_2(a)}{\|x_n - k_n a\|} = f_2(y_n),$$

deci $y_n \in Y$ şi $\|y_n\| = 1$, pentru $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$.

De asemenea, deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} k_n = 0$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} f_1(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} f_2(x_n) = 1$, deducem că

$$\lim_{n\to\infty} f_1(y_n) = \lim_{n\to\infty} f_2(y_n) = 1,$$

deci $\|f_{1|Y}\| = \|f_{2|Y}\| = 1$.

**Remarcă**. *Din teorema de mai sus rezultă că pentru* $X = (K^n, \|.\|_p)$ *sau* $X = (l^p, \|.\|_p)$, $p \in (1, \infty)$, *orice aplicaţie liniară şi continuă, de la un subspaţiu al lui* $X$ *în* $\mathbb{R}$, *are o unică prelungire la* $X$, *liniară şi continuă, care păstrează norma.*

**Remarcă**. *Pentru* $p = 1$ *sau* $p = \infty$ *acest fapt nu mai este valabil.*

Fie $X = \mathbb{R}^2$ .

Pentru $p = 1$ considerăm

$$Y = \{(x_1, 0) \mid x_1 \in K\}$$

şi $g : Y \to \mathbb{R}$ dată de

$$g((y_1, 0)) = y_1,$$

pentru orice $(y_1, 0) \in Y$.
Atunci $f_1, f_2 : X \to \mathbb{R}$, date de

$$f_1((y_1, y_2)) = y_1 + y_2$$

şi

$$f_1((y_1, y_2)) = y_1 - y_2$$

pentru orice $(y_1, y_2) \in X$, sunt extinderi continue ale lui $g$, ce conservă norma lui $g$.

Pentru $p = \infty$ considerăm

$$Y = \{(x_1, x_1) \mid x_1 \in K\}$$

şi $g : Y \to \mathbb{R}$ dată de

$$g((y_1, y_1)) = y_1,$$

pentru orice $(y_1, y_1) \in Y$.
Atunci $f_1, f_2 : X \to \mathbb{R}$, date de

$$f_1((y_1, y_2)) = y_1$$

şi

$$f_2((y_1, y_2)) = y_2$$

pentru orice $(y_{1,}y_1) \in X$, sunt extinderi continue ale lui $g$ ce conservă norma lui $g$.

**Remarcă**. *Pot exista o infinitate de extinderi continue care conservă norma.*

De exemplu, pentru $X = \mathcal{C}([0,1])$, $Y$ subspaţiul lui $X$ care constă în funcţiile constante şi $g : Y \to \mathbb{R}$ dată de

$$g(f) = f(0),$$

pentru orice $g \in Y$, pentru orice $t \in [0,1]$, aplicaţia $F_t : X \to \mathbb{R}$ dată de

$$F_t(f) = f(t),$$

pentru orice $f \in X$, este o extindere continuă a lui $g$, care conservă norma lui $g$.

Iată un alt rezultat în această direcţie:

**Propoziţie**. *Fie $X$ un spaţiu vectorial (real), $X_0$ un subspaţiu al său, $p : X \to \mathbb{R}$ funcţională subliniară şi $f : X_0 \to \mathbb{R}$ funcţională liniară astfel ca*

$$f \leq p$$

*pe $X_0$.*

*Atunci sunt echivalente:*

*a) Există o unică funcţională liniară $F : X \to \mathbb{R}$ astfel ca*

$$F \leq p$$

*şi*

$$F_{|X_0} = f.$$

*b) Funcţionala $g : X \to \mathbb{R}$ dată de*

$$g(x) = \inf_{y \in X_0} \{p(x+y) - f(y)\},$$

*pentru orice $x \in X$, este liniară.*

*Demonstraţie.* Să observăm pentru început că

$$g(x) \leq p(x-x) - f(-x) = f(x)$$

pentru orice $x \in X_0$ şi că $g$ este subliniară.

$a) \Rightarrow b)$

Pentru $x_0 \in X$ definim funcţionala liniară $f^{x_0} : \mathbb{R}x_0 \to \mathbb{R}$ dată, pentru orice $\lambda \in \mathbb{R}$, de

$$f^{x_0}(\lambda x_0) = \lambda g(x_0),$$

care are proprietatea că, pentru orice $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$f^{x_0}(\lambda x_0) = \lambda g(x_0) \leq g(\lambda x_0),$$

deci există o funcţională liniară $F_{x_0} : X \to \mathbb{R}$ astfel ca

$$F_{x_0} \leq g$$

şi

$$F_{x_0|\mathbb{R}x_0} = f^{x_0},$$

deci

$$F_{x_0}(x_0) = g(x_0).$$

· În plus, pentru orice $y \in X_0$, avem

$$F_{x_0}(y) \leq g(y) \leq f(y),$$

de unde

$$0 \leq f - F_{x_0},$$

pe $X_0$.

Atunci $f = F_{x_0}$, căci altminteri ar exista $u \in X_0$, astfel ca

$$0 < (f - F_{x_0})(u),$$

de unde

$$(f - F_{x_0})(\lambda u) = \lambda(f - F_{x_0})(u) < 0,$$

pentru $\lambda < 0$, deci $\lambda u \notin X_0$, ceea ce contrazice faptul că $X_0$ este un subspaţiu al lui $X$.

Conform ipotezei avem

$$F_{x_0} = F_{x_1}$$

pentru orice $x_0, x_1 \in X$.

Atunci

$$g(\alpha x + \beta y) = F_{\alpha x+\beta y}(\alpha x + \beta y) = \alpha F_{\alpha x+\beta y}(x) + \beta F_{\alpha x+\beta y}(y) =$$

$$= \alpha g(x) + \beta g(y),$$

pentru orice $x, y \in X$ şi orice $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, deci $g$ este liniară.

$b) \Rightarrow a)$

Fie o funcţională liniară $F : X \to \mathbb{R}$ astfel ca

$$F \leq p$$

şi

$$F_{|X_0} = f.$$

Atunci, pentru orice $x \in X$ şi $y \in X_0$ avem

$$F(x) = F(x+y) - F(y) = F(x+y) - f(y) \leq p(x+y) - f(y),$$

deci

$$F(x) \leq \inf_{y \in X_0} \{p(x+y) - f(y)\} = g(x),$$

de unde, ca mai sus, se arată că $g = F$, deci $g$ este unică.

Prezentăm în continuare cîteva aplicaţii ale Teoremei Hahn-Banach.

## LIMITE BANACH

Prezentăm o generalizare a conceptului de limită a unui şir de numere reale datorată lui Banach.

Deoarece aplicaţia **lim** : $c \to \mathbb{R}$ dată de

$$\mathbf{lim}\ (x_n)_{n\geq 1} = \lim_{n\to\infty} x_n,$$

pentru orice $(x_n)_{n\geq 1} \in c$, are următoarele proprietăţi:

i) $\mathbf{lim}(1,1,1...,1,...) = 1$.

ii) $\mathbf{lim}\ (x_n)_{n\geq 1} \geq 0$ pentru orice şir $(x_n)_{n\geq 1}$ cu $x_n \geq 0$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

iii) $\mathbf{lim}\ (x_1, x_2, ..., x_n, ...) = \mathbf{lim}\ (x_2, x_3, ..., x_n, ...)$, pentru orice $(x_n)_{n\geq 1} \in c$, este naturală următoarea:

**Definiţie**. *O limită Banach este o aplicaţie liniară $f : l^\infty \to \mathbb{R}$ avînd proprietăţile:*

*i)* $f(1,1,1...,1,...) = 1$.

*ii)* $f\ ((x_n)_{n\geq 1}) \geq 0$, *pentru orice şir* $(x_n)_{n\geq 1}$, *cu* $x_n \geq 0$, *pentru orice* $n \in \mathbb{N}^*$.

*iii)* $f\ (x_1, x_2, ..., x_n, ...) = f\ (x_2, x_3, ..., x_n, ...)$, *pentru orice* $(x_n)_{n\geq 1} \in l^\infty$.

**Remarcă**. $\|f\| = 1$.

Într-adevăr, deoarece pentru orice şir $(x_n)_{n\geq 1} \in l^\infty$, şirul

$$\|(x_n)_{n\geq 1}\|\,(1,1,1...,1,...) - (x_n)_{n\geq 1}$$

are toate elementele pozitive, de unde, folosind i) şi ii) avem

$$|f((x_n)_{n\geq 1})| \leq \|(x_n)_{n\geq 1}\|.$$

Folosind iarăşi i) rezultă că $\|f\| = 1$.

**Remarcă**. *$f(x_n)_{n\geq 1} = \lim_{n\to\infty} x_n$ pentru orice $(x_n)_{n\geq 1} \in c$, deci într-adevăr $f$ este o generalizare a limitei.*

Într-adevăr,

$$f((x_n)_{n\geq 1}) = f((x_n)_{n\geq 1} - (\lim_{n\to\infty} x_n)(1,1,1...,1,...) + (\lim_{n\to\infty} x_n)(1,1,1...,1,...)) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} x_n + f((x_n)_{n\geq 1} - (\lim_{n\to\infty} x_n)(1,1,1...,1,...)) = \lim_{n\to\infty} x_n,$$

deoarece

$$0 \leq \left\| f((x_n)_{n\geq 1} - (\lim_{n\to\infty} x_n)(1,1,1...,1,...)) \right\| \leq$$

$$\leq \left\| (x_n)_{n\geq 1} - (\lim_{n\to\infty} x_n)(1,1,1...,1,...) \right\| = 0.$$

**Teoremă**. *Există o limită Banach.*

*Demonstraţie.* Fie următoarea mulţime nevidă, convexă şi deschisă a lui $l^\infty$:

$$E = \{(x_n)_{n\geq 1} \in l^\infty \mid \text{există } \varepsilon > 0 \text{ astfel ca } \varepsilon < x_n \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}^*\}.$$

Fie următorul subspaţiu al lui $l^\infty$:

$$Y = \{(x_1 - x_2, x_2 - x_3, ..., x_n - x_{n+1}, ...) \mid (x_n)_{n\geq 1} \in l^\infty\}.$$

Atunci $E \cap Y = \emptyset$.

Drept urmare, există $f \in (l^\infty)^*$ astfel ca $f_{|Y} = 0$ dar $f(x) \neq 0$ pentru orice $x \in E$.

Împărţind eventual pe $f$ cu o constantă, putem presupune că

$$f(1,1,1...,1,...) = 1.$$

Deoarece $f_{|Y} = 0$ rezultă că

$$f(x_1, x_2, ..., x_n, ...) = f(x_2, x_3, ..., x_n, ...),$$

pentru orice $(x_n)_{n\geq 1} \in l^\infty$.

Fie $(x_n)_{n\geq 1} \in l^\infty$ cu $x_n \geq 0$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Dacă $f((x_n)_{n\geq 1}) < 0$, am avea

$$(x_n)_{n\geq 1} - f((x_n)_{n\geq 1})(1,1,1...,1,...) \in E,$$

deci am obţine contradicţia

$$0 = f((x_n)_{n\geq 1} - f((x_n)_{n\geq 1})(1,1,1...,1,...)) \neq 0.$$

**Definiţie.** *Un şir* $(x_n)_{n\geq 1} \in l^\infty$ *se numeşte aproape convergent dacă toate limitele Banach iau aceeaşi valoare în* $(x_n)_{n\geq 1}$.

**Exemplu.** *Şirul* $(1,0,1,0,...)$ *este aproape convergent (toate limitele Banach luînd valoarea* $\frac{1}{2}$ *în* $(1,0,1,0,...)$*) dar nu este convergent.*

## EXISTENŢA FUNCŢIILOR GREEN

Fie $D$ un domeniu mărginit din $\mathbb{R}^2$ avînd frontiera $T$ formată dintr-o reuniune finită de curbe simple netede închise, ce nu se intersectează. Se ştie că, dacă $u$ este armonică pe $D$ (i.e. $\triangle u = 0$ în $D$) şi are o extindere continuă la $D \cup T$, atunci ea îşi atinge maximul şi minimul pe $T$.

**Definiţie.** *Fie* $D$ *un domeniu mărginit din* $\mathbb{R}^2$ *avînd frontiera* $T$ *formată dintr-o reuniune finită de curbe simple netede închise, ce nu se intersectează şi* $w \in D$. *O funcţie Green pentru* $D$, *cu singularitate în* $w$, *este o funcţie* $G(.,w)$ *continuă pe* $D \cup T - \{w\}$, *care se anulează pe* $T$ *şi care are proprietatea că aplicaţia* $z \to G(z,w) + \frac{\log|z-w|}{2\pi}$ *are o prelungire armonică în* $D$.

**Remarcă.** *Dacă există o funcţie Green pentru* $D$ *cu singularitate în* $w$ *atunci ea este unică datorită proprietăţilor de maxim şi minim ale funcţiilor armonice.*

**Exemplu.** *Pentru* $D$ *discul unitate din* $\mathbb{R}^2$ *şi* $w = 0$ *avem* $G(z,0) = -\frac{\log|z|}{2\pi}$.

**Notă istorică.** *George Green* s-a născut în 1793 la Nottingham, în Anglia. A studiat matematicile pe cont propriu în timp ce lucra la moara deţinută de familia sa. În 1827 publică lucrarea intitulată "An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism" care conţine rezultatul cunoscut astăzi sub numele de teorema lui Green şi a cărei imensă importanţă nu a fost recunoscută imediat. Prin intermediul unui prieten, Bromhead, Green va publica alte două articole despre electricitate în Cambridge Philosophical Society (în 1833 şi 1834) şi unul despre hidrodinamică în Royal Society of Edinburgh (în 1836) iar la îndemnul acestuia, la vîrsta de 40 de ani, devine student la Cambridge şi continuă să publice în Cambridge Philosophical Society articole despre reflecţia şi refracţia luminii şi sunetelor. A murit în 1841.

**Teoremă (Lax, 1952).** *Pentru orice domeniu* $D$ *ca cel descris mai sus, există o funcţie Green, cu singularitate în* $w$.

*Demonstraţie.* Fie $K = \mathbb{R}$, $X = C(T)$ şi

$$Y = \{f \in X \mid f \text{ are o extensie continuă } \tilde{f} \text{ la } D \cup T \text{ care este armonică pe } D\}.$$

Dacă $f \in Y$, o astfel de extensie $\tilde{f}$ este unică.
Fixăm $w \in D$ şi considerăm $g_w : Y \to R$ dată de

$$g_w(f) = \tilde{f}(w).$$

Aplicaţia $g_w$ este liniară şi continuă, cu $\|g_w\| = 1$.
Cu teorema Hahn-Banach de extindere găsim $F_w \in X^*$ astfel ca

$$F_{w|Y} = g_w$$

şi

$$\|F_w\| = \|g_w\|.$$

Fie $z \in \mathbb{R}^2 - T$.
Pentru $t \in T$ considerăm

$$f_z(t) = \frac{\log|z-t|}{2\pi}.$$

Atunci $f_z \in X$.
Dacă $z \notin D$ atunci

$$g_w(f_z) = \tilde{f}_z(w) = \frac{\log|z-w|}{2\pi}.$$

Dacă $z \in D$ atunci definim

$$H(z,w) = F_w(f_z)$$

şi

$$G(z,w) = H(z,w) - \frac{\log|z-w|}{2\pi}.$$

Vom arăta că $G(.,w)$ este funcţia Green pentru $D$ cu singularitate în $w$.
Pentru aceasta este suficient să arătăm că $H(.,w)$ este armonică în $D$ şi că pentru $t_0 \in T$

$$\lim_{z \to t_0} H(z,w) = \frac{\log|z-w|}{2\pi}.$$

Deoarece $F_w$ este liniară şi continuă iar $\lim_{h\to 0} \frac{\log|z+h-t|-\log|z-t|}{h}$ există uniform în raport cu $t$, avem

$$(\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2)H(z,w) = (\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2)F_w(f_z) =$$

$$= F_w((\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2)(f_z)) = F_w(0) = 0,$$

deoarece $f_z$ este armonică pe $D$.

Fie $t_0 \in T$ şi $z \in D$.

Fie $t \in T$ cel mai apropiat de $z$ iar $z'$ simetricul lui $z$ faţă de tangenta în $t$ la $T$.

Dacă $z$ este suficient de aproape de $t_0$, atunci $z' \notin D$ şi $z'$ este aproape de $t_0$.

Avem deci

$$F_w(f_{z'}) = g_w(f_{z'}) = \frac{\log\left|z' - w\right|}{2\pi},$$

de unde

$$\lim_{z \to t_0} F_w(f_{z'}) = \frac{\log|t_0 - w|}{2\pi}.$$

Pe de altă parte

$$|F_w(f_z) - F_w(f_{z'})| \leq \|f_z - f_{z'}\|_\infty$$

şi

$$\lim_{z \to t_0} \|f_z - f_{z'}\|_\infty = 0,$$

deci

$$\lim_{z \to t_0} F_w(f_z) = \frac{\log|t_0 - w|}{2\pi}.$$

## TEOREMA LUI NAKANO

**Teoremă**. *Fie $X$ un spaţiu vectorial normat peste $\mathbb{R}$, $X_0$ un subspaţiu al său, $f_0 : X_0 \to \mathbb{R}$ liniară şi $p : X \to \mathbb{R}_+$ subaditivă, astfel ca*

$$f_0 \leq p$$

*pe $X_0$ şi pentru orice $x \in X$ avem*

$$\lim_{\lambda \searrow 0} p(\lambda x) = 0.$$

*Atunci există o funcţională liniară $f : X \to \mathbb{R}$ astfel ca*

$$f \leq p$$

*şi*

$$f_{|X_0} = f_0.$$

*Demonstrație.* Fie $q : X \to \mathbb{R}_+$ dată de

$$q(x) = \inf_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{p(nx)}{n},$$

pentru orice $x \in X$.

Avem, pentru orice $x \in X_0$ şi orice $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f_0(x) = \frac{f_0(nx)}{n} \leq \frac{p(nx)}{n},$$

deci

$$f_0(x) \leq \inf_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{p(nx)}{n} = q(x).$$

Aşadar

$$f_0 \leq q$$

pe $X_0$.

În continuare vom arăta că $q$ este subliniară, de unde, folosind teorema Hahn-Banach, se deduce concluzia.

Să arătăm pentru început că

$$q(x+y) \leq q(x) + q(y),$$

pentru orice $x, y \in X$.

Într-adevăr

$$q(x+y) = \inf_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{p(n(x+y))}{n} = \lim_{n \to \infty} \frac{p(n(x+y))}{n} \leq$$

$$\leq \lim_{n \to \infty} \frac{p(nx)}{n} + \lim_{n \to \infty} \frac{p(ny)}{n} = \inf_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{p(nx)}{n} + \inf_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{p(ny)}{n} = q(x) + q(y),$$

unde am folosit faptul că dacă şirul de numere reale pozitive $(x_n)_{n \geq 1}$ satisface relaţia

$$x_{n+m} \leq x_n + x_m,$$

pentru orice $n, m \in \mathbb{N}^*$, atunci are limită şi

$$\lim_{n \to \infty} \frac{x_n}{n} = \inf_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{x_n}{n}.$$

Să arătăm acum că

$$q(\alpha x) = \alpha q(x),$$

pentru orice $x \in X$ şi orice $\alpha \in \mathbb{R}_+$.

Într-o primă etapă vom arăta că

$$q(mx) = mq(x),$$

pentru orice $x \in X$ şi orice $m \in \mathbb{N}$.

Într-adevăr

$$q(mx) = \inf_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{p(nmx)}{n} = \lim_{n \to \infty} \frac{p(nmx)}{n} =$$

$$= m \lim_{n \to \infty} \frac{p(nmx)}{nm} = m \lim_{l \to \infty} \frac{p(lx)}{l} = m \inf_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{p(nx)}{n} = mq(x).$$

Vom arăta acum că

$$q(rx) = rq(x),$$

pentru orice $x \in X$ şi orice $r \in \mathbb{Q}_+$.

Fie $r = \frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$.

Avem

$$q(rx) = q(\frac{m}{n}x) = mq(\frac{x}{n}) = \frac{m}{n}nq(\frac{x}{n}) = rnq(\frac{x}{n}) = rq(x).$$

Ca un ultim pas arătăm că

$$q(\alpha x) = \alpha q(x),$$

pentru orice $x \in X$ şi orice $\alpha \in \mathbb{R}_+$.

Există $(r_n)_{n \geq 1}$, $(s_n)_{n \geq 1}$ şiruri de numere raţionale astfel ca

$$s_n < \alpha < r_n$$

şi

$$\lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} r_n = \alpha.$$

Avem

$$q(\alpha x) = q(\alpha x - s_n x + s_n x) \leq q(x(\alpha - s_n)) + q(s_n x) \leq$$

$$\leq p(x(\alpha - s_n)) + s_n q(x),$$

de unde, prin trecere la limită,

$$q(\alpha x) \leq \alpha q(x)$$

şi

$$r_n q(x) = q(r_n x) = q((r_n - \alpha)x + \alpha x) \leq q((r_n - \alpha)x) + q(\alpha x),$$

de unde, prin trecere la limită,

$$q(\alpha x) \geq \alpha q(x).$$

Aşadar

$$q(\alpha x) = \alpha q(x).$$

Prezentăm acum o condiţie suficientă ca o funcţională liniară să fie combinaţie liniară a unui număr finit de funcţionale liniare.

**Propoziţie**. *Fie $X$ un spaţiu vectorial normat peste $K$, $f$, $g_1$, $g_2$, ..., $g_n$ : $X \to K$ aplicaţii liniare astfel ca*

$$\bigcap_{i=1}^{n} Ker\ g_i \subseteq Ker\ f.$$

*Atunci există $\alpha_1$, ...,$\alpha_n \in K$ astfel ca*

$$f = \alpha_1 g_1 + ... + \alpha_n g_n.$$

*Demonstraţie.* Fie $g : X \to K^n$ dată, pentru orice $x \in X$, de

$$g(x) = (g_1(x), ..., g_n(x))$$

şi $X_0 = g(X)$ subspaţiu al lui $K^n$.

Aplicaţia $h : X_0 \to K$ dată, pentru orice $x \in X_0$, de

$$h((g_1(x), ..., g_n(x))) = f(x)$$

este liniară şi bine definită, deoarece $\bigcap\limits_{i=1}^{n} Ker\ g_i \subseteq Ker\ f$.

Conform teoremei Hahn-Banach există o aplicaţie liniară $H : K^n \to K$ astfel ca $H_{|X_0} = h$.

Atunci, pentru orice $x \in X$,

$$f(x) = h((g_1(x), ..., g_n(x))) = H((g_1(x), ..., g_n(x))) =$$

$$H(g_1(x)e_1 + ... + g_n(x)e_n) = g_1(x)H(e_1) + ... + g_n(x)H(e_n),$$

de unde, notînd $\alpha_1 = H(e_1)$,..., $\alpha_n = H(e_n)$, găsim concluzia.

## ALTE REZULTATE

**1**. *Fie $X$ un spaţiu vectorial normat, $Y$ un subspaţiu al său şi $g \in Y^*$. Fie $f \in X^*$ o extindere a lui $g$ a cărei existenţă este asigurată de teorema*

*Hahn-Banach. Dacă pentru orice* $a \notin \overline{Y}$, *există* $h_a \in X^*$, *astfel ca* $h_{a|Y} = 0$ *şi* $h_a(a) \neq 0$, *atunci* $f + h_a \in X^*$, $(f + h_a)_{|Y} = g$, *dar este posibil ca* $\|f + h_a\| \neq \|g\|$.

**2. Lema de renormare a lui Clarkson**: *Fie* $X$ *un spaţiu vectorial normat separabil cu norma* $\|.\|$. *Atunci există o normă echivalentă pe* $X$ *cu care acesta devine strict convex. Mai precis, dacă* $(x_n)_{n\geq 1}$ *este o mulţime densă în* $\{x \in X \mid \|x\| = 1\}$, *atunci, pentru orice* $n \in \mathbb{N}^*$ *există* $f_n \in X^*$ *astfel ca* $\|f_n\| = f_n(x_n) = 1$ *şi*

$$\|x\|_0 = \|x\| + (\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|f_n(x)|^2}{2^n})^{\frac{1}{2}}$$

*este o normă pe* $X$, *echivalentă cu* $\|.\|$, *astfel ca* $(X, \|.\|_0)$ *este strict convex.*

**3**. *Fie* $X$ *un spaţiu vectorial normat peste* $K$, $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ *o familie de elemente din* $X$ *şi* $(k_\alpha)_{\alpha\in A}$ *o familie de elemente din* $K$. *Atunci există* $f \in X^*$ *astfel ca* $f(x_\alpha) = k_\alpha$, *pentru orice* $\alpha \in A$, *dacă şi numai dacă există* $M \in \mathbb{R}$ *astfel ca*

$$\left|\sum_\alpha a_\alpha k_\alpha\right| \leq M \left\|\sum_\alpha a_\alpha x_\alpha\right\|,$$

*unde sumele sunt finite şi considerate după toate alegerile posibile ale lui* $\alpha \in A$ *şi* $a_\alpha \in K$.

**4**. *Fie* $X$ *un spaţiu vectorial normat peste* $\mathbb{R}$ *şi* $p : X \to \mathbb{R}$.
*Atunci sunt echivalente:*
*a)* $p$ *este liniară*
*b)* $p$ *este subliniară şi există în mod unic* $f : X \to \mathbb{R}$ *liniară, astfel ca* $f \leq g$.

# CAPITOLUL III

## SEPARABILITATEA UNOR SPAŢII CONCRETE

## DIN ANALIZA FUNCŢIONALĂ

### BREVIAR TEORETIC

**Definiţie**. *O familie $\mathcal{B}$ de mulţimi deschise ale unui spaţiu topologic $(X, \tau)$ se numeşte bază a topologiei $\tau$ dacă îndeplineşte următoarele afirmaţii echivalente:*

*a) orice deschis $D \in \tau$ se poate scrie ca o reuniune de elemente ale lui $\mathcal{B}$.*

*b) pentru orice $x \in X$ şi orice $V \in \mathcal{V}(x)$ există $W \in \mathcal{B}$ astfel ca $x \in W \subseteq V$.*

**Definiţie**. *Fie $X$ o mulţime. O relaţie $R$ pe $X$ se numeşte relaţie de ordine dacă:*

*a) $(x, x) \in R$ pentru orice $x \in X$.*

*b) $(x, y) \in R$ şi $(y, z) \in R$ implică $(x, z) \in R$.*

*c) $(x, y) \in R$ şi $(y, x) \in R$ implică $x = y$.*

*Relaţia de ordine $R$ va fi notată cu $\leq$.*

**Definiţie**. *Se numeşte mulţime ordonată un dublet $(X, \leq)$ format dintr-o mulţime $X$ şi o relaţie de ordine $\leq$ pe $X$. Cind nu există pericol de confuzie, vom nota $X$ în loc de $(X, \leq)$.*

**Definiţie**. *Elementul $a$ al mulţimii ordonate $X$ se numeşte maximal dacă $x \in X$ şi $x \geq a$ implică $x = a$.*

**Definiţie**. *Fie $X$ o mulţime ordonată şi $A$ o submulţime nevidă a sa. Mulţimea $A$ se numeşte majorată dacă există $x \in X$ astfel ca $x \geq a$ pentru orice $a \in A$.*

**Definiţie**. *Mulţimea ordonată $X$ se numeşte total ordonată dacă pentru orice $x, y \in X$ avem una din următoarele două posibilităţi: $x \geq y$ sau $y \geq x$.*

**Definiţie**. *O mulţime ordonată se numeşte inductiv ordonată dacă orice submulţime total ordonată a sa este majorată.*

**Lema lui Zorn**. *Orice mulţime inductiv ordonată are un element maximal.*

**Notă istorică**. *Max Zorn* s-a născut în 1906 în Germania. A primit titlul de doctor în 1930 avîndu-l drept coordonator pe Artin. În 1933 părăseşte Germania datorită conjuncturii politice. Lucrează pe rînd la universitatea Yale (1934-1936), California, Indiana. A murit în 1993.

**Teoremă**. (Weierstrass). *Orice funcţie continuă $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ are următoarea proprietate: pentru orice $\varepsilon > 0$ există un polinom $p$ cu coeficienţi reali, astfel ca*

$$\sup_{x\in[a,b]} |f(x) - p(x)| < \varepsilon.$$

**Notă istorică**. *Karl Theodor Wilhelm Weierstrass* s-a născut în 1815 în Ostenfelde, Bavaria. Între 1829 şi 1834 urmează cursurile gimnaziului catolic din Paderborn, unde capătă o instrucţie matematică mult peste ceea ce se aştepta la acel nivel (citea regulat Crelle's Journal). În 1834, la insistenţele tatălui său şi împotriva voinţei sale de a studia matematica, se înscrie la universitatea din Bonn pentru a studia dreptul, finanţele şi economia. Rezultatul acestui conflict a fost o perioadă de 4 ani de viaţă uşoară, nededicată studiului acestor ştiinţe. A studiat însă matematica pe cont propriu. În 1839 se înscrie la Academia din Münster, unde îl întîlneşte pe Gudermann, care l-a încurajat puternic în studiile sale matematice. În 1841 este numit profesor la gimnaziul din Münster, iar în 1842 la cel din Deutsche Krone unde stă pînă în 1848, cînd se mută la colegiul Hoseanum din Braunsberg. A publicat cîteva articole referitoare la funcţii abeliene în revista acestui gimnaziu, care nu au avut ecou. După ce în 1854 publică în Crelle's Journal articolul "Zur Theorie der Abelschen Functionen", Universitatea din Könisberg îi decernează titlul de doctor. După o numire la Technische Hochschule din Berlin, Universitatea din Berlin îi ofera ceea ce dorea de mult, anume un post de profesor. În 1861 accentul pus pe rigoare îl va conduce la descoperirea celebrului exemplu de funcţie continuă care nu este derivabilă în nici un punct, exemplu ce a produs stupoare la aceea dată. Lista studenţilor lui Weierstrass este numeroasă: Cantor, Frobenius, Hölder, Hurtwiz, Klein, Kneser, Lie, Mertens, Minkowski, Mittag-Leffler, Schwarz, Stolz. A murit în 1897 la Berlin.

**Definiţie**. *Un spaţiu topologic $(X,\tau)$ se numeşte separabil dacă există o submulţime numărabilă densă în $X$.*

**Definiţie**. *Un spaţiu vectorial normat $X$ peste corpul $K$ se zice că admite bază Schauder dacă există un şir $(x_n)_{n\geq 1}$ de elemente din $X$ astfel ca pentru* *orice $x \in X$ există un unic şir $(\zeta_n)_{n\geq 1}$ de elemente din $K$ astfel ca*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n x_n.$$

**Propoziţie.** *Un spaţiu vectorial normat $X$ peste corpul $K$ care admite bază Schauder este separabil.*

*Demonstraţie.* Deoarece cazul complex se reduce imediat la cel real, să considerăm un spaţiu normat $X$ peste corpul $\mathbb{R}$ care admite baza Schauder $(e_n)_{n\geq 1}$.

Fie

$$A = \{\sum_{k=1}^{n} \rho_k e_k \mid n \in \mathbb{N}^*,\ \rho_k \in \mathbb{Q}, \text{ pentru orice } k \in \{1, 2, ...n\}\}.$$

$A$ este numărabilă (căci este o reuniune numărabilă de mulţimi numărabile).

Să arătăm acum că $A$ este densă în $X$.

În acest scop trebuie sa arătăm că pentru orice $x \in X$ şi pentru orice $\varepsilon > 0$ există $x' \in A$ astfel ca

$$\left\| x - x' \right\| < \varepsilon.$$

Deoarece $X$ admite bază Schauder, există un şir $(\zeta_n)_{n\geq 1}$ de elemente din $K$ astfel ca

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n e_n,$$

adică, notînd $x_n = \sum_{k=1}^{n} \zeta_k e_k$,

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n,$$

ceea ce este echivalent cu

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0.$$

Aşadar există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel ca

$$\|x_{n_0} - x\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pentru orice $k \in \{1, 2, ..., n_0\}$ fie $\rho_k \in \mathbb{Q}$ astfel ca

$$|\zeta_k - \rho_k| < \frac{\varepsilon}{2n_0 \|e_k\|}.$$

Atunci pentru $x' = \sum_{k=1}^{n_0} \rho_k e_k \in A$ avem

$$\left\|x - x'\right\| \leq \|x - x_{n_0}\| + \left\|x_{n_0} - x'\right\| \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \left\|\sum_{k=1}^{n_0} \zeta_k e_k - \sum_{k=1}^{n_0} \rho_k e_k\right\| \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k=1}^{n_0} |\zeta_k - \rho_k| \, \|e_k\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k=1}^{n_0} \frac{\varepsilon}{2n_0 \|e_k\|} \|e_k\| = \varepsilon.$$

Demonstraţia este astfel încheiată.

**Notă**. *Matematicianul Per Enflo a arătat că există spaţii vectoriale normate separabile (chiar complete) fără bază Schauder.*

**Notă istorică**. *Julius Pawel Schauder* s-a născut la 21 septembrie 1899, la Liov. În 1917 este înrolat în armata austro-ungară. Este luat prizonier de către italieni, dar după prăbuşirea Imperiului Austro-Ungar se înrolează într-o nouă armată poloneză organizată în Franţa. Se întoarce în Polonia în 1919. Aici frecventeză Universitatea Jan Kazimierz din Liov lucrînd pentru teza sa de doctorat sub îndrumarea lui Steinhaus. După susţinerea doctoratului, în 1923, predă la o şcoală generală şi lucrează pentru o companie de asigurări. În 1927 a scris un articol intitulat "Contributions to the theory of continuous mappings on function spaces" pe baza căruia i s-a permis să predea la Universitatea din Liov. În 1932, beneficiind de o bursă Rockfeller, merge la Leipzig şi Paris. Aici, împreună cu J. Leray scrie un articol ("Topologie et équations fonctionelles") de mare importanţă, pentru care primeşte, în 1938, Grand Prix Internationaux de Mathématique. Cariera sa se apropie de final odată cu cel de al doilea război mondial. În 1939 trupele sovietice ocupă Liovul. Schauder este bine văzut de administraţia sovietică, care îl numeşte profesor la universitate (acum rebotezată Ivan Franko). În 1941 armata germană cucereşte Liovul şi începe exterminarea evreilor. Nu se cunosc exact circumstanţele în care Schauder a murit în septembrie 1943.

**Propoziţie**. *Fie $(X, d)$ un spaţiu metric.*

*Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

*1. $(X, d)$ satisface axioma a doua de numărabilitate (i.e. este cu bază numărabilă).*

*2. $(X, d)$ este separabil.*

*3. Orice mulţime din $X$ care este $\varepsilon$-discretă (i.e. pentru orice $x, y \in X$, $x \neq y$, avem $d(x, y) > \varepsilon$) este cel mult numărabilă.*

*Demonstraţie.*

1) $\Rightarrow$ 2) Fie $(A_n)_{n\geq 1}$ o bază numărabilă a lui $X$. Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ să considerăm $a_n \in A_n$. Mulţimea numărabilă $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}^*$ este densă în $X$. Într-adevăr, pentru orice $x \in X$ şi orice $V \in \mathcal{V}_x$, există $n_0 \in \mathbb{N}^*$ astfel ca $x \in A_{n_0} \subseteq V$, deci $V \cap A \neq \emptyset$, deoarece $a_{n_0} \in A \cap V$.

2) $\Rightarrow$ 1) Fie $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}^*$ densă în $X$.

Atunci $\{B(a_n, \frac{1}{m}) \mid m, n \in \mathbb{N},\ m, n \geq 1\}$ formează o bază numărabilă a lui $X$.

Într-adevăr, dacă $x \in X$ şi $V \in \mathcal{V}_x$, există $r > 0$ astfel ca

$$x \in B(x, r) \subseteq V.$$

Fie $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$ astfel ca $\frac{1}{m} < \frac{r}{3}$.

Cum $x \in X = \overline{A}$ rezultă că există $n \in \mathbb{N}$ astfel ca

$$d(a_n, x) < \frac{1}{m}.$$

Atunci

$$x \in B(a_n, 2\frac{r}{3}) \subseteq B(x, r).$$

Într-adevăr, dacă $d(z, a_n) < 2\frac{r}{3}$ atunci

$$d(x, z) \leq d(x, a_n) + d(a_n, z) < \frac{r}{3} + 2\frac{r}{3} = r.$$

Drept urmare avem

$$x \in B(a_n, \frac{1}{m}) \subseteq B(a_n, 2\frac{r}{3}) \subseteq B(x, r) \subseteq V.$$

2) $\Rightarrow$ 3) Fie $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ densă în $X$.

Fie $B$ o submulţime $\varepsilon$-discretă a lui $X$.

Pentru orice $x \in B$ avem

$$B(x, \frac{\varepsilon}{2}) \cap A \neq \emptyset.$$

Fie $a_x \in B(x, \frac{\varepsilon}{2}) \cap A$ arbitrar, dar fixat.

Atunci aplicaţia $f : B \to A$, dată de $f(x) = a_x$, este injectivă (căci $x \neq y$ implică $d(x, y) > \varepsilon$, deci $B(x, \frac{\varepsilon}{2}) \cap B(y, \frac{\varepsilon}{2}) = \emptyset$, de unde $a_x \neq a_y$), deci $B$ este cel mult numărabilă.

3) $\Rightarrow$ 2) Pentru orice $\varepsilon > 0$ să considerăm

$$\mathcal{M}(\varepsilon) = \{B \subseteq X \mid B \text{ este } \varepsilon\text{-discretă}\}.$$

$\mathcal{M}(\varepsilon)$ este inductiv ordonată, deci, conform cu lema lui Zorn, admite un element maximal notat $C(\varepsilon)$ (care, conform ipotezei, este o mulţime numărabilă).

Atunci mulţimea $C = \bigcup_{n\geq 1} C(\frac{1}{n})$ (care este numărabilă, fiind o reuniune numărabilă de mulţimi numărabile) este densă în $X$.

Într-adevăr, pentru $x \in X - C$ şi $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ avem

$$C(\frac{1}{n}) \subset C(\frac{1}{n}) \cup \{x\},$$

deci

$$C(\frac{1}{n}) \cup \{x\} \notin M(\frac{1}{n})$$

(căci alminteri se contrazice maximalitatea lui $C(\frac{1}{n})$).

Drept urmare există $x_n \in C(\frac{1}{n})$ astfel ca

$$d(x, x_n) < \frac{1}{n},$$

deci

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n,$$

cu $x_n \in C(\frac{1}{n}) \subseteq C$, de unde $x \in \overline{C}$.

Evident că dacă $x \in C$, atunci $x \in \overline{C}$.

Aşadar concluzionăm că mulţimea numărabilă $C$ este densă în $X$, deci $X$ este separabil.

## SPAŢII DE ŞIRURI

### $l^\infty$

**Propoziţie.** $l^\infty$ *(cu norma descrisă în primul capitol) este neseparabil.*

*Demonstraţie.* Să considerăm următoarea submulţime a lui $l^\infty$:

$$A = \{(\zeta_n)_{n\geq 1} \mid \text{pentru orice } n \in \mathbb{N},\ n \geq 1,\ \zeta_n \in \{0,1\}\}.$$

Atunci cardinalul lui $A$ este $2^{\aleph} = \mathfrak{c}$, deci $A$ nu este numărabilă.

Pe de altă parte, $A$ este 1-discretă, căci pentru orice două şiruri diferite $(\zeta_n)_{n\geq 1}$ şi $(\eta_n)_{n\geq 1}$ avem

$$\|(\zeta_n)_{n\geq 1} - (\eta_n)_{n\geq 1}\| = 1,$$

întrucît pentru cel puţin un $n_0 \in \mathbb{N}$, $n_0 \geq 1$, $\zeta_{n_0} \neq \eta_{n_0}$.

Prin urmare $l^\infty$ nu este separabil.

**Propoziţie.** *$c$ (cu norma descrisă în primul capitol) este separabil.*

*Demonstraţie.* Vom arăta că $c$ admite bază Schauder, deci este separabil.

Afirmăm că $(e_n)_{n\geq 0}$, unde $e_0 = (1, 1, ..., 1, ....)$ şi pentru $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, $e_n = (0, 0, ..., 0, 1, 0, ....)$, unde 1 este pe poziţia $n$, formează o bază Schauder pentru $c$.

Într-adevăr, fie $x = (\zeta_k)_{k\geq 1} \in c$ şi $\zeta_0 = \lim\limits_{k\to\infty} \zeta_k$.

Atunci

$$\left\| x - (\zeta_0 e_0 + \sum_{k=1}^{n} (\zeta_k - \zeta_0) e_k) \right\| = \|(0, 0, ..., 0, \zeta_{n+1} - \zeta_0, \zeta_{n+2} - \zeta_0, ....)\| =$$

$$= \sup_{k\geq n+1} |\zeta_k - \zeta_0| ,$$

de unde

$$\lim_{n\to\infty} \left\| x - (\zeta_0 e_0 + \sum_{k=1}^{n} (\zeta_k - \zeta_0) e_k) \right\| =$$

$$= \overline{\lim_{n\to\infty}} |\zeta_n - \zeta_0| = \lim_{n\to\infty} |\zeta_n - \zeta_0| = 0.$$

Aşadar

$$x = \zeta_0 e_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\zeta_n - \zeta_0) e_n,$$

fapt care arată că $(e_n)_{n\geq 0}$ formează o bază Schauder pentru $c$.

## $c_0$

**Propoziţie.** *$c_0$ (cu norma descrisă în primul capitol) este separabil.*

*Demonstraţie.* Vom arăta că $c_0$ admite bază Schauder, deci este separabil.

Afirmăm că $(e_n)_{n\geq 1}$, unde pentru $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, $e_n = (0, 0, ..., 0, 1, 0, ....)$, 1 fiind pe poziţia $n$, formează o bază Schauder pentru $c_0$.

Într-adevăr, fie $x = (\zeta_k)_{k\geq 1} \in c_0$.

Atunci

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \zeta_k e_k \right\| = \|(0,0,...,0,\zeta_{n+1},\zeta_{n+2},....)\| =$$

$$= \sup_{k \geq n+1} |\zeta_k|,$$

de unde

$$\lim_{n\to\infty} \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \zeta_k e_k \right\| = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n+1} |\zeta_k| =$$

$$= \overline{\lim_{n\to\infty}} |\zeta_n| = \lim_{n\to\infty} |\zeta_n| = 0.$$

Aşadar

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} (\zeta_n) e_n,$$

fapt care arată că $(e_n)_{n\geq 1}$ formează o bază Schauder pentru $c_0$.

## $l_0$

**Propoziţie.** *$l_0$ (cu norma descrisă în primul capitol) este separabil.*

*Demonstraţie.* Vom arăta că $l_0$ admite bază Schauder, deci este separabil.

Afirmăm că $(e_n)_{n\geq 1}$, unde pentru $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, $e_n = (0,0,...,0,1,0,....)$, 1 fiind pe poziţia $n$, formează o bază Schauder pentru $l_0$.

Într-adevăr, fie $x = (\zeta_k)_{k\geq 1} \in l_0$.

Atunci există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel ca pentru orice $k \in \mathbb{N}$, $k > n_0$ avem $\zeta_k = 0$.

Drept urmare

$$x = \sum_{k=1}^{n_0} \zeta_k e_k,$$

fapt care arată că $(e_n)_{n\geq 1}$ formează o bază Schauder pentru $l_0$.

## $l^p$

**Propoziţie.** *$l^p$, $\infty > p \geq 1$, (cu norma descrisă în primul capitol) este separabil.*

*Demonstraţie.* Vom arăta că $l^p$ admite bază Schauder, deci este separabil.

Afirmăm că $(e_n)_{n\geq 1}$, unde pentru $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, $e_n = (0, 0, ..., 0, 1, 0, ....)$, 1 fiind pe poziţia $n$, formează o bază Schauder pentru $l^p$.

Într-adevăr, fie $x = (\zeta_k)_{k\geq 1} \in l^p$.

Atunci

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \zeta_k e_k \right\|_p = \|(0, 0, ..., 0, \zeta_{n+1}, \zeta_{n+2}, ....)\|_p =$$

$$= ( \sum_{k=n+1}^{\infty} |\zeta_k|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Întrucît $(\zeta_k)_{k\geq 1} \in l^p$, seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\zeta_n|^p$ este convergentă, deci

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} |\zeta_k|^p = 0,$$

deci

$$\lim_{n\to\infty} \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \zeta_k e_k \right\|_p = 0.$$

Aşadar

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} (\zeta_n) e_n,$$

fapt care arată că $(e_n)_{n\geq 1}$ formează o bază Schauder pentru $l^p$.

## SPAŢII DE FUNCŢII

### $\mathcal{M}(X)$

**Propoziţie.** *$\mathcal{M}(X)$ (cu norma descrisă în primul capitol) este separabil dacă şi numai dacă mulţimea $X$ este finită.*

*Demonstraţie.* Este evident că ne putem restrînge, fără pierderea generalităţii, la cazul $K = \mathbb{R}$.

Dacă $X$ este finită, atunci mulţimea numărabilă

$$A = \{f : X \to \mathbb{R} \mid f(x) \in \mathbb{Q} \text{ pentru orice } x \in X\}$$

este densă în $X$, deci $\mathcal{M}(X)$ este separabil.

Dacă $X$ este infinită, atunci mulţimea

$$A = \{\varphi_E : X \to \mathbb{R} \mid E \subseteq X\} \subseteq \mathcal{M}(X)$$

este nenumărabilă, căci $card\ A = card\ \mathcal{P}(X) > \aleph$ şi este 1-discretă deoarece pentru $E, F \subseteq X$, astfel ca $E \neq F$ avem

$$\|\varphi_E - \varphi_F\| = 1,$$

întrucît există un element $x_0$ care este în una dintre cele două mulţimi, dar nu este în cealaltă, deci

$$|(\varphi_E - \varphi_F)(x_0)| = 1.$$

Aşadar, în acest caz, $\mathcal{M}(X)$ nu este separabil.

$$\mathcal{B}([0,1])$$

**Propoziţie.** $\mathcal{B}([0,1])$ *(cu norma descrisă în primul capitol) este separabil.*
*Demonstraţie.* Mulţimea

$$A = \{\sum_{i=1}^{n} r_i x^i \mid n \in \mathbb{N}^*, r_i \in \mathbb{Q}\}$$

este evident numărabilă (fiind o reuniune numărabilă de mulţimi numărabile).

Vom arăta că $A$ este densă în $\mathcal{B}([0,1])$.

Conform teoremei lui Weierstrass, pentru orice $f \in \mathcal{B}([0,1])$ şi orice $\varepsilon > 0$, există $n \in \mathbb{N}^*$ şi $p : [0,1] \to \mathbb{R}$, $p(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i x^i$, cu $p_i \in \mathbb{R}$ pentru orice $i \in \{1, 2, ..., n\}$, astfel ca

$$\|f - p\| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (1)$$

Pentru orice $i \in \{1, 2, ..., n\}$ există $r_i \in \mathbb{Q}$ astfel ca

$$|p_i - r_i| < \frac{\varepsilon}{2n}.$$

Atunci, considerînd

$$q = \sum_{i=1}^{n} r_i x^i \in A,$$

avem

$$\|p-q\| = \sup_{x\in[0,1]} |p(x)-q(x)| =$$

$$= \sup_{x\in[0,1]} \left|\sum_{i=1}^{n}(p_i - r_i)x^i\right| \leq \sum_{i=1}^{n}|p_i - r_i| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2)$$

Din (1) şi (2) obţinem

$$\|f-q\| \leq \|f-p\| + \|p-q\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

fapt care arată că $A$ este densă în $\mathcal{B}([0,1])$.

**Remarcă**. *În fapt $\mathcal{B}([0,1])$ este cu bază Schauder.*

De exemplu şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ dat de $x_0 = 1$, $x_0(t) = t$ pentru orice $t \in [0,1]$ şi

$$x_{2^n+m}(t) = \begin{cases} 0, \text{ dacă } t \notin (\frac{2m-2}{2^{n+1}}, \frac{2m}{2^{n+1}}) \\ 1, \text{ dacă } t = \frac{2m-1}{2^{n+1}} \\ \text{liniară pe } [\frac{2m-2}{2^{n+1}}, \frac{2m-1}{2^{n+1}}] \text{ şi } [\frac{2m-1}{2^{n+1}}, \frac{2m}{2^{n+1}}] \end{cases},$$

unde $n \in \mathbb{N}$, $m \in \{1, 2, ..., 2^n\}$, constituie o bază Schauder pentru $\mathcal{B}([0,1])$.

$\mathcal{V}([0,1])$

**Propoziţie.** $\mathcal{V}([0,1])$ *(cu norma descrisă în primul capitol) nu este separabil.*

*Demonstraţie.* Mulţimea

$$A = \{\varphi_{[0,t]} : [0,1] \to \mathbb{R} \mid t \in [0,1]\} \subseteq \mathcal{V}([0,1])$$

este nenumărabilă, căci $card\ A = card[0,1] = \mathfrak{c} > \aleph$ şi este 1-discretă deoarece pentru $t, t' \in [0,1]$, $t \neq t'$ avem

$$\left\|\varphi_{[0,t]} - \varphi_{[0,t']}\right\| = \overset{1}{\underset{0}{V}}(\varphi_{[0,t]} - \varphi_{[0,t']}) = 1.$$

Aşadar $\mathcal{V}([0,1])$ nu este separabil.

$\mathcal{R}([0,1])$

**Propoziţie.** $\mathcal{R}([0,1])$ *(cu norma descrisă în primul capitol) nu este separabil.*

*Demonstrație.* Mulțimea

$$A = \{\varphi_{\{t\}} : [0,1] \to \mathbb{R} \,|t \in [0,1]\} \subseteq \mathcal{R}([0,1])$$

este nenumărabilă căci $card\ A = card[0,1] = \beth > \aleph$ şi 1-discretă deoarece pentru $t, t' \in [0,1]$, $t \neq t'$, avem

$$\left\|\varphi_{[0,t]} - \varphi_{[0,t']}\right\| = 1.$$

Aşadar $\mathcal{R}([0,1])$ nu este separabil.

## $\mathcal{C}^n([0,1])$

**Propoziţie.** $\mathcal{C}^n([0,1])$ *(cu norma descrisă în primul capitol) este separabil.*
*Demonstrație.* Mulţimea

$$A = \{\sum_{i=1}^{n} r_i x^i \mid n \in \mathbb{N}^*,\ r_i \in \mathbb{Q}\}$$

este evident numărabilă şi densă în $\mathcal{C}^n([0,1])$. Argumentele sunt identice cu cele de la studiul separabilității lui $\mathcal{B}([0,1])$.

## SPAŢIILE $L^p(\Omega)$

**Propoziţie.** $L^p(\Omega)$, $1 \le p < \infty$ *(cu norma descrisă în primul capitol) este separabil iar* $L^\infty(\Omega)$ *(cu norma descrisă în primul capitol) nu este separabil.*

*Demonstrație.* Acesta este un rezultat clasic de teoria măsurii (pentru detalii vezi R. A. Adams, Sobolev Spaces). Amintim aici numai faptul că mulţimea numărabilă

$$A = \{\chi_{\overline{\Omega_m}} f \mid m \in \mathbb{N}^* \text{ iar } f \text{ este polinom în } \mathbb{R}^n \text{ cu coeficienţi din } \mathbb{Q}\},$$

unde

$$\overline{\Omega_m} = \{x \in \Omega \mid d(x, Fr(\Omega)) \ge \frac{1}{m} \text{și } \|x\| \le m\},$$

este densă în $L^p(\Omega)$.

Pe de altă parte mulţimea

$$A = \{\varphi_{\{t\}} : \Omega \to K | t \in \Omega\} \subseteq L^\infty(\Omega)$$

este nenumărabilă şi 1-discretă.

Aşadar $L^\infty(\Omega)$ nu este separabil.

**Remarcă.** $L^p([0,1])$, $1 \le p < \infty$, *este cu bază Schauder.*

De exemplu şirul $(x_n)_{n\ge 1}$ dat de $x_1 = 1$ şi

$$x_{2^n+m}(t) = \begin{cases} \sqrt{2^n}, \text{ dacă } t \in [\frac{2m-2}{2^{n+1}}, \frac{2m-1}{2^{n+1}}) \\ \sqrt{2^n}, \text{ dacă } t \in [\frac{2m-1}{2^{n+1}}, \frac{2m}{2^{n+1}}) \\ 0, \text{ în rest} \end{cases},$$

unde $n \in \mathbb{N}$, $m \in \{1, 2, ..., 2^n\}$, constituie o bază Schauder pentru $L^p([0,1])$.

# CAPITOLUL IV

## FORMA APLICAŢIILOR LINIARE ŞI CONTINUE PE ANUMITE SPAŢII CONCRETE DIN ANALIZA FUNCŢIONALĂ

### BREVIAR TEORETIC

**Definiţie**. *Fie* $(X, d)$ *şi* $(Y, \rho)$ *două spaţii metrice. Se spune că o funcţie* $f : X \to Y$ *este uniform continuă dacă pentru orice* $\varepsilon > 0$ *există* $\delta > 0$ *astfel ca pentru orice* $x_1$, $x_2 \in X$ *cu proprietatea că* $d(x_1, x_2) < \delta$, *avem* $\rho(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$.

**Teoremă**. *Fie* $(X, d)$ *şi* $(Y, \rho)$ *două spaţii metrice şi* $f : X \to Y$ *o funcţie continuă. Dacă* $(X, d)$ *este compact, atunci* $f$ *este uniform continuă.*

**Definiţie**. *O funcţie* $\psi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ *se numeşte absolut continuă dacă pentru orice* $\varepsilon > 0$ *există* $\eta > 0$ *astfel ca pentru orice sistem* $[t_j, t_j'] \subseteq [\alpha, \beta]$, $(j \in \{1, 2, ..., n\})$, *de intervale închise care au în comun cel mult extremităţile şi pentru care*

$$\sum_{j=1}^{n}(t_j' - t_j) < \eta,$$

*avem*

$$\sum_{j=1}^{n}\left|\psi(t_j') - \psi(t_j)\right| < \varepsilon.$$

**Definiţie**. *Fie* $X$ *şi* $Y$ *două spaţii vectoriale normate şi* $F : X \to Y$ *o aplicaţie liniară. Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

*a)* $F$ *este continuă.*

*b)* $F$ *este continuă în origine.*

*c) există un deschis nevid din* $X$ *pe care* $F$ *este mărginită.*

*d) există* $M > 0$ *cu proprietatea că pentru orice* $x \in X$ *avem*

$$\|F(x)\| \leq M \|x\|.$$

*e)*

$$\sup_{\|x\|\leq 1} \|F(x)\| < \infty.$$

f)

$$\sup_{\|x\|=1} \|F(x)\| < \infty.$$

*Norma lui $F$ este definită de*

$$\|F\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|F(x)\| =$$

$$= \inf\{M \mid \|F(x)\| \leq M\,\|x\| \text{ pentru orice } x \in X\}.$$

**Remarcă**. *Pentru $X$ şi $Y$ spaţii normate, vom folosi următoarea notaţie*

$$L(X,Y) = \{f : X \to Y \mid \ f \textit{ este liniară şi continuă}\}$$

**Teoremă (Hahn-Banach)**. *Fie $X$ un spaţiu vectorial normat peste $K$, $Y$ un subspaţiu al lui $X$ şi $f : Y \to K$ o aplicaţie liniară şi continuă. Atunci există $F : X \to K$ o aplicaţie liniară şi continuă, astfel ca $F_{|Y} = f$ şi $\|f\| = \|F\|$.*

**Notă istorică**. *Hans Hahn* s-a născut în septembrie 1879 la Viena. Aici studiază la Technische Hochschule, unde este prieten bun cu Tietze. A mai studiat de asemenea la Strasbourg, München şi Göttingen. În 1921 se alătură corpului profesoral din Viena. A fost printre primii care au studiat teoria mulţimilor şi analiza funcţională. A adus contribuţii importante în domeniul calculului variaţional, dezvoltînd ideile lui Weierstrass. A murit în iulie 1934.

**Propoziţie (Inegalitatea lui Hölder)** *Dacă $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ şi $\alpha_1$, $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$, $\zeta_1$, $\zeta_2, \ldots, \zeta_n \in \mathbb{C}$, atunci*

$$\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|\,|\zeta_i| \leq (\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^q)^{\frac{1}{q}} (\sum_{i=1}^{n} |\zeta_i|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

**Notă istorică**. *Otto Ludwig Hölder* s-a născut în decembrie 1859 la Stuttgart. A studiat la Politehnica din Stuttgart şi la Universitatea din Berlin (unde i-a audiat pe Runge, Weierstrass, Kronecker şi Kummer). A obţinut titlul de doctor în 1882 la Universitatea din Tübingen cu o teza ce investiga funcţiile analitice. După o perioadă petrecută la Leipzig este numit lector la Göttingen unde, datorită influenţei lui Klein, devine interesat de teoria grupurilor. În 1889 i se oferă un post la Tübingen pe care-l ocupă abia un an mai tîrziu, datorită unor probleme de sănătate. A studiat problema convergenţei seriilor Fourier, ocazie cu care a descoperit inegalitatea prezentată mai sus, şi teoria grupurilor. A murit în 1937 la Leipzig.

**Definiţie.** *Fie $H$ un $K$-spaţiu vectorial. Se numeşte produs scalar pe $H$ o aplicaţie $\varphi : H \times H \to K$ care are următoarele proprietăţi:*

*a)* $\varphi(x, y) = \overline{\varphi(y, x)}$ *pentru orice* $x, y \in H$.

*b)* $\varphi(x + y, z) = \varphi(x, z) + \varphi(y, z)$ *pentru orice* $x, y, z \in H$.

*c)* $\varphi(\alpha x, y) = \alpha\varphi(x, y)$ *pentru orice* $x, y \in H$ *şi orice* $\alpha \in K$.

*d)* $\varphi(x, x) > 0$ *pentru orice* $x \in H - \{0\}$.

*De regulă vom nota* $\varphi(x, y) =< x, y >$ *pentru orice* $x, y \in H$.

**Definiţie.** *Se spune că norma spaţiului vectorial normat* $(H, \|.\|)$ *provine dintr-un produs scalar* $< ., . >$ *dacă*

$$\|x\| = \sqrt{< x, x >}$$

*pentru orice* $x \in H$.

**Definiţie.** *Se numeşte spaţiu prehilbert un spaţiu vectorial normat în care norma provine dintr-un produs scalar.*

**Definiţie.** *Se numeşte spaţiu Hilbert un spaţiu prehilbert complet.*

**Notă istorică.** *David Hilbert* s-a născut în ianuarie 1862 la Königsberg, unde a urmat gimnaziul şi facultatea, obţinînd titlul de doctor în 1885. Minkowski a fost unul dintre bunii lui prieteni. În 1885 se mută la Universitatea din Göttingen unde rămîne pînă la sfîrşitul carierei. La început Hilbert a lucrat în teoria invarianţilor, descoperind celebra teoremă a bazei. Apoi atenţia lui s-a îndreptat către geometrie. Un studiu sistematic al axiomelor lui Euclid l-a condus la prezentarea geometriei sub formă axiomatică, abordare care a avut o imensă influenţă asupra acestui domeniu. La cel de al doilea congres al matematicienilor de la Paris a propus o listă de 23 de probleme, unele nerezolvate pînă astăzi. Studiile sale în domeniul ecuaţiilor diferenţiale au condus la noţiunea de spaţiu Hilbert. Printre studenţii săi amintim pe Weil şi Zermelo. A murit în februarie 1943, ca cetăţean de onoare al oraşului Königsberg.

**Definiţie.** *Fie un inel $\Sigma$ (i.e. $\Sigma$ este o clasă nevidă de părţi ale unei mulţimi $X$ care este închisă la reuniuni finite şi la diferenţe). O funcţie de mulţime pozitivă şi numărabil aditivă definită pe $\Sigma$ (i.e. o funcţie $\mu : \Sigma \to \mathbb{R}_+$ astfel ca $\mu(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ pentru orice şir $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de mulţimi mutual disjuncte din $\Sigma$ cu proprietatea că $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma$) se numeşte măsură pozitivă pe $\Sigma$.*

**Definiţie**. *Măsura pozitivă* $\mu$ *se numeşte finită dacă*

$$\mu(A) < \infty$$

*pentru orice* $A \in \Sigma$.

*Dacă pentru orice* $A \in \Sigma$ *există un şir* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *de mulţimi din* $\Sigma$ *astfel ca*

$$A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

*şi*

$$\mu(A_n) < \infty,$$

*pentru orice* $n \in \mathbb{N}$, *spunem că* $\mu$ *este* $\sigma$*-finită.*

**Observaţie**. *Datorită unor rezultate de teoria măsurii se poate presupune că măsurile pozitive sunt definite pe o* $\sigma$*-algebră (i.e. un inel de mulţimi închis la reuniuni numărabile care conţine spaţiul total* $X$*) şi sunt complete (i.e.* $\mu^*(A) = 0$ *implică* $A \in \Sigma$, *unde* $\mu^*$ *este măsura exterioară asociată lui* $\mu$*).*

**Definiţie**. *Se numeşte spaţiu măsurabil o pereche* $(X, \Sigma)$ *unde* $X$ *este o mulţime nevidă iar* $\Sigma$ *este o* $\sigma$*-algebră de părţi ale lui* $X$. *Elementele lui* $\Sigma$ *se vor numi mulţimi măsurabile.*

**Definiţie**. *Vom numi spaţiu cu măsură un triplet* $(X, \Sigma, \mu)$, *unde* $X$ *este o mulţime nevidă,* $\Sigma$ *este o* $\sigma$*-algebră de părţi ale lui* $X$ *şi* $\mu$ *este o măsură pozitivă şi completă.*

**Definiţie**. *Fie* $(X, \Sigma)$ *un spaţiu măsurabil. O funcţie* $\varphi : X \to \mathbb{R}$ *se numeşte* $(\Sigma)$*-etajată (sau simplă) dacă există o partiţie finită* $(A_i)_{1\leq i\leq n}$, $A_i \in \Sigma$, *a lui* $X$, *şi numerele reale* $\alpha_1$, $\alpha_2$, ..., $\alpha_n$ *astfel ca*

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}.$$

**Observaţie**. *Orice funcţie* $(\Sigma)$*-etajată se poate scrie în mod unic sub forma de mai sus cu* $\alpha_1$, $\alpha_2$, ..., $\alpha_n$ *distincte şi* $A_1$, $A_2$, ..., $A_n$ *nevide.*

**Definiţie**. *Fie* $(X, \Sigma)$ *un spaţiu măsurabil. O funcţie* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *se numeşte* $(\Sigma)$*-măsurabilă dacă pentru orice* $a \in \mathbb{R}$ *avem* $\{x \in X \mid f(x) < a\} \in \Sigma$.

**Teoremă.** *Fie* $(X, \Sigma)$ *un spaţiu măsurabil. O funcţie* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *este* $(\Sigma)$*-măsurabilă dacă şi numai dacă este limita unui şir* $(\varphi_n)_n$ *de funcţii reale etajate.*

*Dacă* $f \geq 0$ *putem alege* $\varphi_n \geq 0$ *şi şirul* $(\varphi_n)_n$ *crescător.*

*Dacă $f$ este mărginită, se poate alege şirul $(\varphi_n)_n$ uniform convergent către $f$.*

**Definiţie**. *Fie $(X, \Sigma, \mu)$ un spaţiu cu măsură. Dacă funcţia $(\Sigma)$-etajată $\varphi = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$ este pozitivă, atunci elementul din $\overline{\mathbb{R}_+}$, dat prin*

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i),$$

*(cu convenţia $0 \bullet \infty = 0$) se numeşte integrala lui $\varphi$ în raport cu $\mu$ şi se notează*

$$\int \varphi d\mu.$$

*Vom spune că $\varphi$ este integrabilă în raport cu $\mu$ dacă*

$$\int \varphi d\mu < \infty.$$

**Definiţie**. *Fie $(X, \Sigma, \mu)$ un spaţiu cu măsură. Dacă funcţia măsurabilă $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ este pozitivă, atunci elementul din $\overline{\mathbb{R}_+}$, dat prin*

$$\int f d\mu = \sup\{\int \varphi d\mu \mid 0 \leq \varphi \leq f,\ \varphi etajat\breve{a}\},$$

*se numeşte integrala lui $f$ în raport cu $\mu$.*

*Vom spune că $f$ este integrabilă în raport cu $\mu$ dacă*

$$\int f d\mu < \infty.$$

*Dacă $A \in \Sigma$ atunci $\int \chi_A f d\mu$ se numeşte integrala lui $f$ pe $A$ şi se notează*

$$\int_A f d\mu.$$

*Vom spune că $f$ este integrabilă pe $A$ dacă*

$$\int_A f d\mu < \infty.$$

**Definiţie**. *Fie $(X, \Sigma, \mu)$ un spaţiu cu măsură. O funcţie măsurabilă $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ se numeşte integrabilă dacă $|f|$ este integrabilă, deci dacă*

$$\int |f| d\mu < \infty.$$

În acest caz, numărul real

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu$$

*se numeşte integrala lui $f$ în raport cu $\mu$.*

*Dacă $A \in \Sigma$ spunem că $f$ este integrabilă pe $A$ dacă funcţia $\chi_A f$ este integrabilă.*

*În acest caz,*

$$\int_A f d\mu = \int \chi_A f d\mu.$$

**Teorema de Convergenţă Monotonă a lui Lebesgue** *Fie $(X, \Sigma, \mu)$ un spaţiu cu măsură şi $(f_n)_{n \geq 1}$ un şir crescător de funcţii măsurabile şi pozitive convergent punctual la funcţia $f$.*

*Atunci $f$ este măsurabilă şi pozitivă şi avem*

$$\int f d\mu = \lim_{n \to \infty} \int f_n d\mu.$$

**Teorema de Convergenţă Dominată a lui Lebesgue** *Fie $(X, \Sigma, \mu)$ un spaţiu cu măsură şi $(f_n)_{n \geq 1}$ un şir de funcţii măsurabile, astfel încît există o funcţie reală $\mu$-integrabilă $g$ cu proprietatea*

$$|f_n| \leq g \text{ a.p.t.},$$

*pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.*

*Atunci, dacă $(f_n)_{n \geq 1}$ converge $\mu$-a.p.t. la o funcţie $f$, $f$ este $\mu$-integrabilă şi*

$$\int f d\mu = \lim_{n \to \infty} \int f_n d\mu.$$

**Notă istorică.** *Henri Léon Lebesgue* s-a născut în iunie 1875 la Picardie, Franţa. A studiat la Şcoala Normală Superioară în perioada 1899-1902. Este autorul uneia din cele mai remarcabile cuceriri ale analizei moderne, anume teoria integralei care-i poartă numele, teorie ce a permis un studiu mai profund al seriilor Fourier. În 1910 este numit la Sorbona. A murit în iulie 1941 la Paris.

**Teorema Lebesgue-Vitali.** *Fie $(X, \Sigma, \mu)$ un spaţiu cu măsură, iar $f$ o funcţie reală $\mu$-integrabilă.*

*Atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel ca*

$$A \in \Sigma \text{şi } \mu(A) < \delta \Rightarrow \left| \int_A f d\mu \right| < \varepsilon.$$

**Notă istorică.** *Giusseppe Vitali* s-a născut în august 1875 la Ravenna, Italia. A absolvit cursurile Şcolii Normale Superioare din Pisa în 1899. A fost asistentul lui Dini pentru doi ani, după care, în perioada 1904-1923 predă la liceul C. Colombo din Geneva, unde principala ocupaţie a sa nu mai este matematica, ci politica, de partea socialiştilor. Cînd în 1922 fasciştii vin la putere, cariera sa politica este terminată şi se întoarce la studiul matematicii. Ocupă pe rînd diferite poziţii la universităţile din Modena, Padova şi Bologna. Lui îi datorăm noţiunea de funcţie absolut continuă şi multe rezultate fundamentale din teoria măsurii. A murit în 1932.

**Teoremă.** *Dacă funcţia* $\psi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ *este absolut continuă, atunci există o funcţie integrabilă* $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ *astfel ca*

$$\psi(t) = \int_{\alpha}^{t} \varphi(t)dt + \psi(a).$$

## SPAŢII DE ŞIRURI

**Teoremă.** *Dacă* $(\alpha_n)_{n\geq 1} \in l^1$ *atunci formula*

$$f(x = (\zeta_n)_{n\geq 1}) = \alpha \lim_{n\to\infty} \zeta_n + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \zeta_n,$$

*unde* $\alpha \in K$, *defineşte o funcţională liniară şi continuă pe* $c$.

*Reciproc, pentru orice funcţională liniară şi continuă pe* $c$, *există* $(\alpha_n)_{n\geq 1} \in l^1$ *şi* $\alpha \in K$ *astfel ca*

$$f(x = (\zeta_n)_{n\geq 1}) = \alpha \lim_{n\to\infty} \zeta_n + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \zeta_n,$$

*pentru orice* $x = (\zeta_n)_{n\geq 1} \in c$.

*În plus,*

$$\|f\| = |\alpha| + \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|.$$

*Demonstraţie.* Este evident că formula

$$f(x = (\zeta_n)_{n\geq 1}) = \alpha \lim_{n\to\infty} \zeta_n + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \zeta_n,$$

defineşte o funcţională liniară pe $c$.

Din inegalitatea

$$\left|\alpha \lim_{n\to\infty}\zeta_n + \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\zeta_n\right| \leq (|\alpha| + \sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|)\sup_{n\geq 1}|\zeta_n|,$$

rezultă că $f$ este continuă şi

$$\|f\| \leq |\alpha| + \sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|.$$

Reciproc, fie $f$ o funcţională liniară şi continuă pe $c$.
Fie $x_0 = (1, 1, ..., 1, ...)$, $x_n = (0, ...0, 1, 0, ...)$, unde 1 este pe poziţia a $n$-a.
Fie $x = (\zeta_n)_{n\geq 1} \in c$ şi $\zeta_0 = \lim_{n\to\infty}\zeta_n$.
Atunci

$$x = \zeta_0 x_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(\zeta_n - \zeta_0)x_n$$

deoarece

$$\lim_{n\to\infty}\left\|x - \zeta_0 x_0 - \sum_{i=1}^{n}(\zeta_i - \zeta_0)x_i\right\| = \lim_{n\to\infty}\sup_{i\geq n+1}|\zeta_i - \zeta_0| =$$

$$= \overline{\lim_{n\to\infty}}|\zeta_n - \zeta_0| = \lim_{n\to\infty}|\zeta_n - \zeta_0| = 0.$$

Atunci

$$f(x) = f(\zeta_0 x_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(\zeta_n - \zeta_0)x_n) =$$

$$= \zeta_0 f(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty}(\zeta_n - \zeta_0)f(x_n) = \zeta_0\alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(\zeta_n - \zeta_0)\alpha_n,$$

unde am notat $\alpha_0 = f(x_0)$ şi $\alpha_n = f(x_n)$.

În continuare vom arăta că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ este absolut convergentă.
Fie $z_k = (sign(\alpha_1), sign(\alpha_2), ..., sign(\alpha_k), 0, 0, .....)$.
Evident, acest şir are limita 0 şi norma 1.
Atunci

$$f(z_k) = \sum_{i=1}^{k}|\alpha_i|,$$

de unde

$$f(z_k) = \sum_{i=1}^{k}|\alpha_i| = |f(z_k)| \leq \|f\|\,\|z_k\| = \|f\|,$$

pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$, ceea ce arată că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ este absolut convergentă, deci şirul $(\alpha_n)_{n\geq 1} \in l^1$.

Notînd

$$\alpha = \alpha_0 - \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i,$$

obţinem

$$f(x = (\zeta_n)_{n\geq 1}) = \alpha \lim_{n\to\infty} \zeta_n + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \zeta_n.$$

Să considerăm $y_k = (sign(\alpha_1), sign(\alpha_2), ..., sign(\alpha_k), sign(\alpha), sign(\alpha), sign(\alpha), .....)$. Evident, acest şir are limita $sign(\alpha)$ şi norma 1.

Atunci

$$f(y_k) = |\alpha| + \sum_{i=1}^{k} |\alpha_i| + sign(\alpha) \sum_{i=k+1}^{\infty} \alpha_i \leq \|f\| \, \|y_k\| = \|f\|,$$

pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$, deci

$$|\alpha| + \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| \leq \|f\|,$$

unde am ţinut cont că $\lim_{k\to\infty} \sum_{i=k+1}^{\infty} \alpha_i = 0$.

Din cele de mai sus rezultă că

$$\|f\| = |\alpha| + \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|.$$

**Corolar**. *Datorită teoremei lui Hahn-Banach, acelaşi rezultat este valabil dacă $c$ este înlocuit cu $c_0$ sau cu $l_0$.*

**Teoremă**. *Dacă $(\alpha_n)_{n\geq 1} \in l^{\infty}$ atunci formula*

$$f(x = (\zeta_n)_{n\geq 1}) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \zeta_n,$$

*defineşte o funcţională liniară şi continuă pe $l^1$.*

*Reciproc, pentru orice funcţională liniară şi continuă pe $l^1$, există $(\alpha_n)_{n\geq 1} \in l^{\infty}$ astfel ca*

$$f(x = (\zeta_n)_{n\geq 1}) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \zeta_n,$$

*pentru orice* $x = (\zeta_n)_{n\geq 1} \in l^1$.

*În plus,*

$$\|f\| = \sup_{n\geq 1} |\alpha_n| = \|(\alpha_n)_{n\geq 1}\|.$$

*Demonstrație.* Este evident că formula

$$f(x = (\zeta_n)_{n\geq 1}) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \zeta_n,$$

definește o funcțională liniară pe $l^1$.

Din inegalitatea

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \zeta_n\right| \leq (\sum_{n=1}^{\infty} |\zeta_n|) \sup_{n\geq 1} |\alpha_n|,$$

rezultă că $f$ este continuă și

$$\|f\| \leq \sup_{n\geq 1} |\alpha_n|. \tag{1}$$

Reciproc, fie $f$ o funcțională liniară și continuă pe $l^1$.

Fie $x_n = (0, ...0, 1, 0, ...)$, unde 1 este pe poziția a $n$-a.

Fie $x = (\zeta_n)_{n\geq 1} \in l^1$.

Atunci

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n x_n$$

deoarece

$$\lim_{n\to\infty} \left\|x - \sum_{i=1}^{n} \zeta_i x_i\right\| = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=n+1}^{\infty} |\zeta_i| = 0.$$

Atunci

$$f(x) = f(\sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n x_n) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n f(x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n \alpha_n,$$

unde am notat $\alpha_n = f(x_n)$.

Fie $x_n = (0,\ 0,\ ...,\ sign(\alpha_n),\ 0,\ 0,\ .....)$, unde $sign(\alpha_n)$ este pe poziția $n$.

Evident $\|x_n\| = 1$.

Atunci

$$f(x_n) = |\alpha_n|,$$

de unde

$$f(x_n) = |\alpha_n| \leq \|f\| \, \|x_n\| = \|f\|,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Deci

$$\sup_{n\geq 1} |\alpha_n| \leq \|f\|. \tag{2}$$

Din (1) şi (2) rezultă că

$$\sup_{n\geq 1} |\alpha_n| = \|f\|.$$

**Teoremă**. *Fie $p,q > 1$ astfel ca $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dacă $(\alpha_n)_{n\geq 1} \in l^q$, atunci formula*

$$f(x = (\zeta_n)_{n\geq 1}) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \zeta_n,$$

*defineşte o funcţională liniară şi continuă pe $l^p$.*

*Reciproc, pentru orice funcţională liniară şi continuă pe $l^p$, există $(\alpha_n)_{n\geq 1} \in l^q$ astfel ca*

$$f(x = (\zeta_n)_{n\geq 1}) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \zeta_n,$$

*pentru orice $x = (\zeta_n)_{n\geq 1} \in l^p$.*

*În plus,*

$$\|f\| = (\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^q)^{\frac{1}{q}} = \|(\alpha_n)_{n\geq 1}\|_q.$$

*Demonstraţie.* Este evident că formula

$$f(x = (\zeta_n)_{n\geq 1}) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \zeta_n,$$

defineşte o funcţională liniară pe $l^p$.

Din inegalitatea lui Hölder rezultă că

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \zeta_n\right| \leq (\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^q)^{\frac{1}{q}} (\sum_{n=1}^{\infty} |\zeta_n|^p)^{\frac{1}{p}},$$

adică

$$|f(x)| \leq (\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^q)^{\frac{1}{q}} \, \|x\|_p ,$$

deci $f$ este continuă şi

$$\|f\| \leq (\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^q)^{\frac{1}{q}}. \tag{1}$$

Reciproc, fie $f$ o funcţională liniară şi continuă pe $l^p$.
Fie $x_n = (0, ...0, 1, 0, , , , )$, unde 1 este pe poziţia a $n$-a.
Fie $x = (\zeta_n)_{n \geq 1} \in l^p$.
Atunci

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n x_n,$$

deoarece

$$\lim_{n\to\infty} \left\| x - \sum_{i=1}^{n} \zeta_i x_i \right\| = \lim_{n\to\infty} ( \sum_{i=n+1}^{\infty} |\zeta_i|^p)^{\frac{1}{p}} = 0,$$

căci seria $\sum_{n=1}^{\infty} |\zeta_n|^p$ este convergentă.
Atunci

$$f(x) = f(\sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n x_n) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n f(x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n \alpha_n,$$

unde am notat $\alpha_n = f(x_n)$.
Fie $x_n = (|\alpha_1|^{q-2}\,\overline{\alpha_1},\ |\alpha_2|^{q-2}\,\overline{\alpha_2},\ ...,\ |\alpha_n|^{q-2}\,\overline{\alpha_n},\ 0,\ 0, ...)$.
Atunci

$$f(x_n) = \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|^q ,$$

de unde

$$f(x_n) = \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|^q \leq \|f\| \, \|x_n\|_p = \|f\| \, (\sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|^q)^{\frac{1}{p}} ,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Aşadar

$$(\sum_{j=1}^{n}|\alpha_j|^q)^{\frac{1}{q}} = (\sum_{j=1}^{n}|\alpha_j|^q)^{1-\frac{1}{p}} \leq \|f\|,$$

pentru orice $n \geq 1$.

Din relaţia de mai sus deducem că

$$(\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|^q)^{\frac{1}{q}} \leq \|f\|, \tag{2}$$

deci $(\alpha_n)_{n\geq 1} \in l^q$.

Din (1) şi (2) rezultă că

$$(\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|^q)^{\frac{1}{q}} = \|f\|.$$

**Teoremă**. *Fie* $e_1 = (1,0,0,...,0,..)$, $e_2 = (0,1,0,0,...,0,..)$, ..., $e_n = (0,...0,1,0,0,...,0,..)$, *unde, în* $e_n$, 1 *este pe poziţia* $n$.

*Dacă* $l_0$ *este înzestrat cu norma* $\|.\|_p$, *cu* $1 \leq p \leq \infty$, *atunci aplicaţia* $F : (l_0)^* \to l^q$, *unde* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, *dată de*

$$\mathcal{F}(f) = (f(e_1), f(e_2), ..., f(e_n), ...),$$

*pentru orice* $f \in (l_0)^*$, *atunci* $F$ *este liniară, surjectivă şi*

$$\|\mathcal{F}(f)\|_q = \|f\|,$$

*pentru orice* $f \in (l_0)^*$.

*Demonstraţie.* Dacă $f \in (l_0)^*$ atunci

$$\|f\| = \|(f(e_n)_{n\geq 1}\|_q.$$

Într-adevăr, pentru orice $x = (x_n)_{n\geq 1} \in l_0$ avem

$$|f(x)| = \left|f(\sum_{n=1}^{\infty}x_n e_n)\right| = \left|\sum_{n=1}^{\infty}x_n f(e_n)\right| \leq$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty}|x_n|\,|f(e_n)| \leq \|x\|_p \|(f(e_n)_{n\geq 1}\|_q,$$

deci

$$\|f\| \leq \|(f(e_n)_{n\geq 1}\|_q.$$

Pe de altă parte, pentru $p = 1$, avem

$$|f(e_n)| \le \|f\|,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, deci

$$\|(f(e_n)_{n\ge 1}\|_q \le \|f\|.$$

Pentru $1 < p < \infty$, să considerăm şirul $(x_n = (x_n^j)_{j\ge 1})_{n\ge 1}$ de elemente din $l_0$ dat de

$$x_n^j = \begin{cases} 0, & f(e_j) = 0 \text{ sau } j > n \\ \frac{|f(e_j)|^q}{f(e_j)}, & \text{în caz contrar} \end{cases}.$$

Atunci

$$\sum_{j=1}^{\infty} |x_n^j|^p = \sum_{j=1}^{n} |f(e_j)|^q,$$

deoarece $pq = p + q$, deci

$$\|x_n\|_p = (\sum_{j=1}^{n} |f(e_j)|^q)^{\frac{1}{p}},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Prin urmare

$$\sum_{j=1}^{n} |f(e_j)|^q = f(x_n) \le \|f\| \, \|x_n\|_p = \|f\| \, (\sum_{j=1}^{n} |f(e_j)|^q)^{\frac{1}{p}},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, de unde, deoarece $1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{q}$, avem

$$(\sum_{j=1}^{n} |f(e_j)|^q)^{\frac{1}{q}} \le \|f\|,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, deci

$$\|(f(e_n)_{n\ge 1}\|_q \le \|f\|.$$

Aşadar

$$\|(f(e_n)_{n\ge 1}\|_q = \|f\|.$$

Pentru $p = \infty$ demonstraţia este asemănătoare.

Este evident că $\mathcal{F}$ este liniară, iar afirmaţia de mai sus arată că

$$\|\mathcal{F}(f)\|_q = \|f\|.$$

$\mathcal{F}$ este de asemenea surjectivă deoarece dacă $y = (y_j)_{j\geq 1} \in l^q$ atunci definim $f_y : l_0 \to \mathbb{R}$ prin

$$f_y(x = (x_j)_{j\geq 1}) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j,$$

pentru orice $x = (x_j)_{j\geq 1} \in l_0$.

Atunci

$$|f_y(x)| \leq \|x\|_p \|y\|_q ,$$

pentru orice $x \in l_0$, deci $f_y \in (l_0)^*$.

În plus,

$$\mathcal{F}(f_y) = y.$$

**Remarcă**. *Un rezultat asemănător are loc pentru* $(K^n, \|.\|_p)$.

## SPAŢII DE FUNCŢII

Să reamintim următorul rezultat clasic de teoria măsurii.

**Teoremă (de reprezentare a lui Riesz)**. *Fie $X$ un spaţiu topologic separat local compact. Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

*a) $F : C_0(X) \to C$ este liniară şi continuă.*

*b) există o unică măsură complexă Radon pe $X$ astfel ca pentru orice $f \in C_0(X)$ să avem*

$$F(f) = \int_X f(t) d\mu(t).$$

*Mai mult,*

$$\|F\| = \|\mu\| \left(= |\mu|(X) = \sup \sum_{k=1}^{n} |\mu(E_k)|\right),$$

*unde sup este considerat peste toate partiţiile finite$\{E_1, E_2, ..., E_n\}$ ale lui $X$, $E_i$ fiind mulţimi Borel, pentru orice $i \in \{1, 2, ..., n\}$.*

Vom demonstra aici un caz particular al acestui rezultat, anume cel în care $X = [0, 1]$.

În acest caz, măsura $\mu$ este determinată de o funcţie cu variaţie mărginită.

**Teoremă**. *Dacă $\varphi$ este o funcţie reală cu variaţie mărginită pe $[0,1]$, atunci formula*

$$f(x) = \int_0^1 x(t)d\varphi(t),$$

*defineşte o funcţională liniară şi continuă pe spaţiul $C([0,1]) = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid f$ este continuă$\}$.*

*Reciproc, pentru orice funcţională liniară şi continuă $f$, pe spaţiul $C([0,1])$, există o funcţie reală $\varphi$ pe $[0,1]$, cu variaţie mărginită, astfel ca*

$$f(x) = \int_0^1 x(t)d\varphi(t),$$

*pentru orice $x \in C[0,1]$.*

*În plus*

$$\|f\| = \overset{1}{\underset{0}{V}}(\varphi).$$

*Demonstraţie.* Evident, formula

$$f(x) = \int_0^1 x(t)d\varphi(t),$$

defineşte funcţională liniară pe spaţiul $C([0,1])$.

Din inegalitatea

$$\left|\int_0^1 x(t)d\varphi(t)\right| \leq \overset{1}{\underset{0}{V}}(\varphi) \sup_{t\in[0,1]} |x(t)|,$$

rezultă că $f$ este continuă şi

$$\|f\| \leq \overset{1}{\underset{0}{V}}(\varphi). \tag{1}$$

Reciproc, fie $f$ o funcţională liniară şi continuă pe spaţiul $C([0,1])$.

Avînd în vedere teorema Hahn-Banach, $f$ se poate prelungi pe spaţiul $\mathcal{M}([0,1])$ cu păstrarea liniarităţii, continuităţii şi normei.

Vom nota această prelungire tot cu $f$.

Pentru orice $t \in (0,1]$ vom considera funcţia $z_t = \chi_{[0,t]} : [0,1] \to \{0,1\}$ iar prin $z_0$ vom indica funcţia identic nulă pe $[0,1]$.

Fie $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ dată de

$$\varphi(t) = f(z_t).$$

Vom arăta că $\varphi$ este cu variaţie mărginită.

În acest scop să considerăm o diviziune oarecare a segmentului $[0, 1]$, anume

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1.$$

Notînd

$$\sigma_j = sign(\varphi(t_{j+1}) - \varphi(t_j))$$

şi considerînd

$$y = \sum_{j=0}^{n-1} \sigma_j (z_{t_{j+1}} - z_{t_j}),$$

avem că $y \in \mathcal{M}([0,1])$, $\|y\| = 1$ şi

$$f(y) = \sum_{j=0}^{n-1} |\varphi(t_{j+1}) - \varphi(t_j)|.$$

Atunci

$$f(y) = \sum_{j=0}^{n-1} |\varphi(t_{j+1}) - \varphi(t_j)| \leq \|f\| \, \|y\| \leq \|f\|.$$

Aşadar $\varphi$ este cu variaţie mărginită şi

$$\overset{1}{\underset{0}{V}}(\varphi) \leq \|f\|. \tag{2}$$

Fie acum un element arbitrar $x \in \mathcal{C}([0,1])$.

Cum $[0,1]$ este compact şi $x$ este continuă, $x$ este uniform continuă, deci, pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\eta > 0$ astfel ca pentru orice $t', t'' \in [0,1]$ astfel încît

$$\left| t' - t'' \right| < \eta$$

avem

$$\left| x(t') - x(t'') \right| < \varepsilon. \tag{3}$$

Fie o diviziune oarecare a segmentului $[0,1]$, anume

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1,$$

astfel ca

$$t_{j+1} - t_j < \eta,$$

pentru orice $j \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$.

Pentru $j \in \{0, 1, 2, ..., n-1\}$ să considerăm $s_j \in [t_j, t_{j+1}]$ şi să punem

$$v = \sum_{j=0}^{n-1} x(s_j)(z_{t_{j+1}} - z_{t_j}).$$

Evident $v \in \mathcal{M}([0, 1])$ şi, datorită relaţiei (3),

$$|x(t) - v(t)| < \varepsilon,$$

pentru orice $t \in [0, 1]$, deci

$$\|x - v\| < \varepsilon.$$

Drept urmare

$$|f(x) - f(v)| \leq \|f\| \, \|x - v\| < \|f\| \, \varepsilon,$$

deci

$$\left| f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} x(s_j)[\varphi_{t_{j+1}} - \varphi_{t_j}] \right| < \|f\| \, \varepsilon,$$

fapt care arată că

$$f(x) = \int_0^1 x(t) d\varphi(t).$$

Din (1) şi (2) avem că

$$\|f\| = \overset{1}{\underset{0}{V}}(\varphi).$$

**Definiţie**. *O funcţie $f \in BV([a, b])$ se numeşte normalizată dacă $f(a) = 0$şi $f$ este continuă la dreapta pe $(a, b)$. Mulţimea tuturor funcţiilor cu variaţie mărginită pe $[a, b]$ care sunt normalizate se notează cu $NBV([a, b])$.*

*$NBV([a, b])$ cu norma*

$$\|f\| = \overset{b}{\underset{a}{V}}(f),$$

*devine spaţiu normat.*

**Teoremă**. *Aplicaţia $F : NBV([a, b]) \to (C([a, b]))^*$, dată de*

$$\mathcal{F}(g) = F_g,$$

*pentru orice* $g \in NBV([a,b])$, *unde*

$$F_g(f) = \int_a^b f dg,$$

*pentru orice* $f \in C([a,b])$, *este liniară, izometrică şi surjectivă.*

**Corolar.** *O funcţie* $g \in NBV([a,b])$ *este crescătoare dacă şi numai dacă* $F_g \in (C([a,b]))^*$ *este o funcţională pozitivă.*

## SPAŢIILE $L^p$

În primul capitol am prezentat spaţiile $L^p$ într-un cadru particular.

Vom prezenta în continuare forma funcţionalelor liniare şi continue pe $L^p$ în cadrul general.

Fie $(T, \mathcal{R}, \mu)$ un spaţiu cu măsură.

Pentru $0 < p < \infty$ definim

$$L^p(\mu) = \{f : T \to \mathbb{R} \mid f \text{ este } \mu\text{-măsurabilă şi } \int |f|^p \, d\mu < \infty\}.$$

Nu vom face distincţie între două funcţii $\mu$-egale a.p.t.

Pentru $0 < p < 1$, $L^p(\mu)$ devine spaţiu metric complet cu metrica

$$d(f,g) = |||f - g|||_p = \int |f - g|^p \, d\mu.$$

Pentru $1 \leq p < \infty$, $L^p(\mu)$ devine spaţiu Banach cu norma

$$\|f\|_p = (\int |f|^p \, d\mu)^{\frac{1}{p}}.$$

Fie

$$L^\infty(\mu) = \{f : T \to \mathbb{R} \mid f \text{ este } \mu\text{-măsurabilă şi}$$

$$\|f\|_\infty = ess\sup f =$$

$$= \inf\{\sup\{|f(t)| \mid t \in T - M\} \mid M \in \mathcal{R} \text{ astfel ca } \mu(M) = 0\} < \infty\}.$$

$L^\infty(\mu)$ devine spaţiu Banach cu norma

$$\|f\|_\infty = ess\sup f.$$

În cele ce urmează vom presupune că $\mu$ este $\sigma$-finită.

**Teoremă (Day).** *Fie $0 < p < 1$. Să presupunem că $\mu$ are proprietatea lui Darboux, adică pentru orice $A \in \mathbb{R}$ cu $0 < \mu(A) < \infty$ şi orice $0 < \lambda < \mu(A)$, există $B \in R$, $B \subseteq A$ astfel ca $\mu(B) = \lambda$ (de exemplu măsura Lebesgue pe un interval $n$-dimensional are această proprietate).*

*Atunci, dacă $F : L^p(\mu) \to \mathbb{R}$ este liniară şi continuă, avem $F = 0$.*

**Teoremă.** *Fie $1 \leq p < \infty$ şi $q$ astfel ca $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Atunci dacă $F : L^p(\mu) \to \mathbb{R}$ este liniară şi continuă, există $g \in L^q(\mu)$ astfel ca pentru orice $f \in L^p(\mu)$ să avem*

$$F(f) = \int fgd\mu.$$

*În plus*

$$\|F\| = \|g\|_q .$$

**Remarcă.** *Nu orice funcţională liniară şi continuă pe $L^\infty(\mu)$ este generată de un element din $L^1(\mu)$.*

În cele ce urmează vom demonstra rezultatele de mai sus pe un caz particular, anume acela în care $T = [0,1]$, $\mathcal{R}$ este mulţimea mulţimilor măsurabile Lebesgue din $[0,1]$ iar $\mu$ este măsura Lebesgue.

**Teoremă.** *Dacă $\varphi \in L^\infty([0,1])$ atunci formula*

$$F(f) = \int_0^1 f(t)\varphi(t)dt,$$

*defineşte o funcţională liniară şi continuă pe $L^1([0,1])$.*

*Reciproc, pentru orice funcţională liniară şi continuă $F$, pe $L^1([0,1])$, există o funcţie $\varphi \in L^\infty([0,1])$ astfel ca*

$$F(f) = \int_0^1 f(t)\varphi(t)dt, \qquad (*)$$

*pentru orice $f \in L^1([0,1])$.*

*În plus*

$$\|F\| = \|\varphi\|_\infty .$$

*Demonstraţie.* Este evident că formula

$$F(f) = \int_0^1 f(t)\varphi(t)dt,$$

defineşte o funcţională liniară pe $L^1([0,1])$.

Din inegalitatea

$$\left|\int_0^1 f(t)\varphi(t)dt\right| \leq \left|\int_0^1 f(t)dt\right| \|\varphi\|_\infty ,$$

rezultă că $f$ este continuă şi

$$\|F\| \leq \|\varphi\|_\infty . \tag{1}$$

Reciproc, fie $F$ o funcţională liniară şi continuă pe $L^1([0,1])$.

Pentru orice $t \in [0,1]$ vom considera funcţia $z_t = \chi_{[0,t]} : [0,1] \to \{0,1\}$ iar prin $z_0$ vom indica funcţia identic nulă pe $[0,1]$.

Fie $\psi : [0,1] \to \mathbb{R}$ dată de

$$\psi(t) = F(z_t).$$

Vom arăta că $\psi$ este absolut continuă.

Să considerăm sistemul $[t_i, t_{i'}] \subseteq [0,1]$, $(i \in \{1,2,...,n\})$, de intervale închise care au în comun cel mult extremităţile.

Dacă punem

$$\sigma_i = sign(\psi(t_i') - \psi(t_i)),$$

atunci

$$\sum_{j=1}^{n} \left|\psi(t_j') - \psi(t_j)\right| = \sum_{j=1}^{n} \sigma_i[\psi(t_j') - \psi(t_j)] =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sigma_i[F(z_{t_j'}) - F(z_{t_j})] = F(\sum_{j=1}^{n} \sigma_i(z_{t_j'} - z_{t_j})) \leq$$

$$\leq \|F\| \left\|\sum_{j=1}^{n} \sigma_i(z_{t_j'} - z_{t_j})\right\| = \|F\| \int_0^1 \left|\sum_{j=1}^{n} \sigma_i(z_{t_j'}(s) - z_{t_j}(s))\right| ds \leq$$

$$\leq \|F\| \sum_{j=1}^{n} (t_j' - t_j).$$

Aşadar

$$\sum_{j=1}^{n} \left|\psi(t_j') - \psi(t_j)\right| \leq \|F\| \sum_{j=1}^{n} (t_j' - t_j),$$

relaţie care arată că $\psi$ este absolut continuă.

Atunci există o funcţie integrabilă $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ astfel ca

$$\psi(t) = \int_0^t \varphi(\tau)d\tau + \psi(0),$$

pentru orice $t \in [0,1]$.

Deoarece $\psi(0) = F(z_0) = F(0) = 0$ putem scrie

$$F(z_t) = \int_0^1 z_t(s)\varphi(s)ds.$$

Fie acum $f$ o **funcţie** în scară, adică de forma

$$f(s) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i[z_{t_i}(s) - z_{t_{i-1}}(s)],$$

unde

$$0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = 1.$$

Atunci

$$F(f) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(\int_0^1 z_{t_i}(s)\varphi(s)ds - \int_0^1 z_{t_{i-1}}(s)\varphi(s)ds) =$$

$$= \int_0^1 (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i[z_{t_i}(s) - z_{t_{i-1}}(s)])\varphi(s)ds = \int_0^1 f(s)\varphi(s)ds,$$

deci (*) este valabilă pentru funcţii în scară.

Dacă $f$ este o funcţie măsurabilă şi mărginită, atunci există un şir $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funcţii în scară uniform mărginit (adică există $M \in \mathbb{R}$ astfel ca pentru orice $n \in \mathbb{N}$ şi orice $t \in [0,1]$ avem $|f_n(t)| \le M$) care converge a.p.t. către $f$.

Drept urmare, avînd în vedere Teorema de Convergenţă Dominată a lui Lebesgue, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge în $L^1([0,1])$ către $f$ (adică $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 |f_n(s) - f(s)|\, ds = 0$).

Deoarece $F$ este continuă, rezultă că

$$F(f) = F(\lim_{n\to\infty} f_n) = \lim_{n\to\infty} F(f_n) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(s)\varphi(s)ds = \int_0^1 f(s)\varphi(s)ds,$$

unde am aplicat iarăşi Teorema de Convergenţă Dominată a lui Lebesgue.

Deci (*) este valabilă şi pentru funcţii măsurabile şi mărginite.

Fie acum $s \in (0,1)$ şi $\phi > 0$ astfel ca $s + \phi \in (0,1)$.

Să considerăm

$$f_0(t) = \begin{cases} \frac{1}{\phi}, & \text{dacă } s \leq t \leq s + \phi \\ 0, & \text{dacă } 0 \leq t \leq s \text{ sau } s + \phi < t \leq 1. \end{cases}$$

$f_0$ este măsurabilă şi mărginită, deci, conform cu cele de mai sus avem

$$|F(f_0)| = \left| \int_0^1 f_0(t)\varphi(t)dt \right| = \frac{1}{\phi} \left| \int_s^{s+\phi} \varphi(t)dt \right|.$$

Pe de altă parte $\|f_0\| = \int_0^1 |f_0(t)|\, dt = 1$, deci

$$|F(f_0)| = \frac{1}{\phi} \left| \int_s^{s+\phi} \varphi(t)dt \right| \leq \|F\| \, \|f_0\| = \|F\|,$$

adică, avînd în vedere că $\psi(t) = \int_0^t \varphi(\tau)d\tau$,

$$|\psi(s+\phi) - \psi(s)| \leq \|F\| \, \phi = \|F\| \, |(s+\phi) - s| .$$

Cum $s$ şi $\phi$ au fost alese arbitrar, decurge că $\psi$ este Lipschitz.

În plus, deoarece $\psi$ admite derivată a.p.t. egală cu $\varphi$, rezultă că

$$|\varphi| \leq \|F\|$$

a.p.t., deci

$$\|\varphi\|_\infty \leq \|F\| . \tag{2}$$

Deci $\varphi$ este o funcţie (măsurabilă) mărginită a.p.t.

Fie acum $f \in L^1([0,1])$.

Să considerăm

$$f_n(t) = \begin{cases} f(t), & \text{dacă } |f(t)| < n \\ (sign\ f(t))n, & \text{dacă } |f(t)| \geq n. \end{cases}$$

Este clar că şirul $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de funcţii măsurabile şi mărginite converge a.p.t. către $f$.

În plus

$$|f_n| \leq |f|$$

orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Drept urmare, avînd în vedere Teorema de Convergenţă Dominată a lui Lebesgue, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge în $L^1([0,1])$ către $f$ (adică $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1 |f_n(s)-f(s)|\,ds = 0$).

Deoarece $F$ este continuă, rezultă că

$$F(f) = F(\lim_{n\to\infty} f_n) = \lim_{n\to\infty} F(f_n) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\int\limits_0^1 f_n(s)\varphi(s)ds = \int\limits_0^1 f(s)\varphi(s)ds,$$

unde am aplicat Teorema de Convergenţă Dominată a lui Lebesgue.

Deci (*) este valabilă pentru orice funcţie $f \in L^1([0,1])$.

Din (1) şi (2) rezultă

$$\|F\| = \|\varphi\|_\infty .$$

**Teoremă**. *Fie* $q > 1$ *şi* $p$ *astfel ca* $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. *Dacă* $\varphi \in L^q([0,1])$, *atunci formula*

$$F(f) = \int\limits_0^1 f(t)\varphi(t)dt,$$

*defineşte o funcţională liniară şi continuă pe* $L^p([0,1])$.

*Reciproc, pentru orice funcţională liniară şi continuă* $F$ *pe* $L^p([0,1])$, cu $p > 1$, *există o funcţie* $\varphi \in L^q([0,1])$ *astfel ca*

$$F(f) = \int\limits_0^1 f(t)\varphi(t)dt, \tag{*}$$

*pentru orice* $f \in L^p([0,1])$.

*În plus*

$$\|F\| = \|\varphi\|_q .$$

*Demonstraţie.* Este evident că formula

$$F(f) = \int\limits_0^1 f(t)\varphi(t)dt$$

defineşte o funcţională liniară pe $L^p([0,1])$.

Din inegalitatea lui Hölder avem

$$\left|\int_0^1 f(t)\varphi(t)dt\right| \leq (\int_0^1 |f(t)|^p\, dt)^{\frac{1}{p}} (\int_0^1 \varphi\,|(t)|^q\, dt)^{\frac{1}{q}} = \|f\|_p \|\varphi\|_q ,$$

de unde rezultă că $f$ este continuă şi

$$\|F\| \leq (\int_0^1 \varphi\,|(t)|^q\, dt)^{\frac{1}{q}} = \|\varphi\|_q . \tag{1}$$

Reciproc, fie $F$ o funcţională liniară şi continuă pe $L^p([0,1])$, cu $p > 1$.

Pentru orice $t \in [0,1]$ vom considera funcţia $z_t = \chi_{[0,t]} : [0,1] \to \{0,1\}$ iar prin $z_0$ vom indica funcţia identic nulă pe $[0,1]$.

Fie $\psi : [0,1] \to \mathbb{R}$ dată de

$$\psi(t) = F(z_t).$$

Vom arăta că $\psi$ este absolut continuă.

Să considerăm sistemul $[t_i, t_{i'}] \subseteq [0,1]$, $(i \in \{1,2,...,n\})$, de intervale închise care au în comun cel mult extremităţile.

Dacă punem

$$\sigma_i = sign(\psi(t_i^{'}) - \psi(t_i))$$

atunci

$$\sum_{j=1}^{n} \left|\psi(t_j^{'}) - \psi(t_j)\right| = \sum_{j=1}^{n} \sigma_i[\psi(t_j^{'}) - \psi(t_j)] =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sigma_i[F(z_{t_j^{'}}) - F(z_{t_j})] = F(\sum_{j=1}^{n} \sigma_i(z_{t_j^{'}} - z_{t_j})) \leq$$

$$\leq \|F\| \left\|\sum_{j=1}^{n} \sigma_i(z_{t_j^{'}} - z_{t_j})\right\|_p = \|F\| (\int_0^1 \left|\sum_{j=1}^{n} \sigma_i(z_{t_j^{'}}(s) - z_{t_j}(s))\right|^p ds)^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq \|F\| (\sum_{j=1}^{n} (t_j^{'} - t_j))^{\frac{1}{p}}.$$

Aşadar

$$\sum_{j=1}^{n} \left|\psi(t_j^{'}) - \psi(t_j)\right| \leq \|F\| (\sum_{j=1}^{n} (t_j^{'} - t_j))^{\frac{1}{p}},$$

relaţie care arată că $\psi$ este absolut continuă.

Atunci există o funcţie integrabilă $\varphi : [0, 1] \to \mathbb{R}$ astfel ca

$$\psi(t) = \int_0^t \varphi(\tau) d\tau + \psi(0).$$

Deoarece $\psi(0) = F(z_0) = F(0) = 0$ putem scrie

$$F(z_t) = \int_0^1 z_t(s)\varphi(s)ds.$$

Fie acum $f$ o funcţie în scară, adică de forma

$$f(s) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i [z_{t_i}(s) - z_{t_{i-1}}(s)],$$

unde

$$0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = 1.$$

Atunci

$$F(f) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (\int_0^1 z_{t_i}(s)\varphi(s)ds - \int_0^1 z_{t_{i-1}}(s)\varphi(s)ds) =$$

$$= \int_0^1 (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i [z_{t_i}(s) - z_{t_{i-1}}(s)])\varphi(s)ds = \int_0^1 f(s)\varphi(s)ds,$$

deci (*) este valabilă pentru funcţii în scară.

Dacă $f$ este o funcţie măsurabilă şi mărginită, atunci există un şir $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funcţii în scară uniform mărginit (adică există $M \in \mathbb{R}$ astfel ca pentru orice $n \in \mathbb{N}$ şi orice $t \in [0, 1]$ avem $|f_n(t)| \leq M$) care converge a.p.t. către $f$.

Drept urmare, avînd în vedere Teorema de Convergenţă Dominată a lui Lebesgue, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, în $L^p([0, 1])$, către $f$ (adică $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 |f_n(s) - f(s)|^p \, ds = 0$).

Deoarece $F$ este continuă, rezultă că

$$F(f) = F(\lim_{n\to\infty} f_n) = \lim_{n\to\infty} F(f_n) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(s)\varphi(s)ds = \int_0^1 f(s)\varphi(s)ds,$$

unde am aplicat iarăşi Teorema de Convergenţă Dominată a lui Lebesgue.

Deci (*) este valabilă şi pentru funcţii măsurabile şi mărginite.

Să considerăm acum pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} |\varphi(t)|^{q-2}\varphi(t), & \text{dacă } |\varphi(t)|^{q-1} < n^{\frac{1}{p}} \\ (sign\ f(t))n^{\frac{1}{p}}, & \text{dacă } |\varphi(t)|^{q-1} \geq n^{\frac{1}{p}}. \end{cases}$$

Fiecare funcţie $\varphi_n$ este măsurabilă şi mărginită.

Avem

$$\varphi_n(t)\varphi(t) = |\varphi_n(t)|\,|\varphi(t)| \geq$$

$$\geq |\varphi_n(t)|\,|\varphi_n(t)|^{\frac{1}{q-1}} = |\varphi_n(t)|^{1-\frac{1}{q-1}} =,$$

$$= |\varphi_n(t)|^{\frac{q}{q-1}} = |\varphi_n(t)|^p,$$

şi deci avem

$$\int_0^1 |\varphi_n(t)|^p\,dt \leq \int_0^1 \varphi_n(t)\varphi(t)dt = F(\varphi_n) \leq$$

$$\leq \|F\|\,(\int_0^1 |\varphi_n(t)|^p\,d)^{\frac{1}{p}}.$$

Drept urmare, din relaţia de mai sus, rezultă că

$$(\int_0^1 |\varphi_n(t)|^p\,dt)^{\frac{1}{q}} \leq \|F\|.$$

Să observăm acum că

$$|\varphi_n(t)|^p = \begin{cases} |\varphi(t)|^q, & \text{dacă } |\varphi(t)|^{p(q-1)} < n \\ (sign\ f(t))n^{\frac{1}{p}}, & \text{dacă } |\varphi(t)|^{p(q-1)} \geq n. \end{cases},$$

deci şirul $(|\varphi_n(t)|^p)_{n\in\mathbb{N}}$ este crescător.

Evident, $\lim\limits_{n\to\infty} |\varphi_n(t)|^p = |\varphi(t)|^q$ a.p.t., deci, folosind Teorema de Convergenţă Monotonă a lui Lebesgue, găsim

$$(\int_0^1 |\varphi(t)|^q\,dt)^{\frac{1}{q}} \leq \|F\|. \tag{2}$$

Deci $\varphi \in L^q([0,1])$.

Fie acum $f \in L^p([0,1])$.

Să considerăm, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, funcţiile măsurabile şi mărginite,

$$f_n(t) = \begin{cases} f(t), & \text{dacă } |f(t)| < n^{\frac{1}{p}} \\ (sign\ f(t))n^{\frac{1}{p}}, & \text{dacă } |f(t)| \geq n^{\frac{1}{p}}. \end{cases}.$$

Să observăm că

$$|f_n(t)|^p \leq |f(t)|^p,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ şi orice $t \in [0,1]$.

Pentru orice $n \in \mathbb{N}$ să considerăm mulţimea

$$A_n = \{t \in [0,1] \mid |f(t)| \geq n^{\frac{1}{p}}\}.$$

Deoarece $f \in L^p([0,1])$, rezultă că $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$, unde $\mu$ este măsura Lebesgue.

Avem

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_p = \lim_{n\to\infty} (\int_0^1 |f(t) - f_n(t)|^p \, dt)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} (\int_{A_n} |f(t) - f_n(t)|^p \, dt)^{\frac{1}{p}} \leq \lim_{n\to\infty} (\int_{A_n} |f(t)|^p \, dt)^{\frac{1}{p}} + \lim_{n\to\infty} (\int_{A_n} |f_n(t)|^p \, dt)^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq 2 \lim_{n\to\infty} (\int_{A_n} |f(t)|^p \, dt)^{\frac{1}{p}} = 0,$$

datorită Teoremei Lebesgue-Vitali.

Deci

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f,$$

în $L^p([0,1])$.

Deoarece $F$ este continuă, rezultă că

$$F(f) = F(\lim_{n\to\infty} f_n) = \lim_{n\to\infty} F(f_n) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(t)\varphi(t)dt = \int_0^1 f(t)\varphi(t)dt,$$

ultima egalitate fiind justificată de următoarea relaţie:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\int_0^1 f(t)\varphi(t)dt - \int_0^1 f_n(t)\varphi(t)dt\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\int_0^1 f(t) - f_n(t))\varphi(t)dt\right| \leq$$

$$\leq \lim_{n\to\infty}\int_0^1 |f(t) - f_n(t))\varphi(t)|\,dt \leq \lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_p \|\varphi\|_q = 0,$$

unde am aplicat inegalitatea lui Hölder.

Deci (*) este valabilă pentru orice funcţie $f \in L^1([0,1])$.

Din (1) şi (2) rezultă că

$$\|F\| = \|\varphi\|_q .$$

Aşa cum am menţionat avem următoarea

**Remarcă**. *Nu orice funcţională liniară şi continuă pe $L^\infty(\mu)$ este generată de un element din $L^1(\mu)$.*

Într-adevăr, aplicaţia liniară şi continuă $\mathcal{F} : C([0,1]) \to \mathbb{R}$ dată de $F(f) = f(1)$ poate fi extinsă cu ajutorul teoremei lui Hahn-Banach la o aplicaţia liniară şi continuă $F : L^\infty([0,1]) \to \mathbb{R}$.

Atunci nu există $\varphi \in L^1([0,1])$ astfel ca

$$F(f) = \int_0^1 f(t)\varphi(t)dt,$$

pentru orice $f \in L^\infty([0,1])$, căci în caz contrar, considerînd pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ următoarele elemente din $L^\infty([0,1])$

$$f_n(t) = \{ \begin{array}{cc} 0, & \text{dacă } 0 \leq t \leq 1 - \frac{1}{n} \\ nt - n + 1, & \text{dacă } 1 - \frac{1}{n} < t \leq 1 \end{array},$$

ajungem la o contradicţie astfel:

$$\lim_{n\to\infty} F(f_n) = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(t)\varphi(t)dt,$$

adică

$$1 = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(t)\varphi(t)dt = 0,$$

ultima egalitate decurgînd din teorema de Convergenţă Dominată a lui Lebesgue cu ajutorul următoarele observaţii:

i) pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$

$$|f_n \varphi| \leq |\varphi|,$$

ii) $\varphi \in L^1([0,1])$ şi

iii) $\lim\limits_{n \to \infty} f_n \varphi = 0$.

## ALTE REZULTATE

**Teoremă**. *Fie $H$ un spaţiu Hilbert. Dacă $y \in H$, atunci formula*

$$F(x) = < x, y > ,$$

*pentru orice $x \in H$, defineşte o funcţională liniară şi continuă pe $H$.*

*Reciproc, pentru orice funcţională liniară şi continuă $F$ pe $H$, există $y \in H$ astfel ca*

$$F(x) = < x, y >$$

*pentru orice $x \in H$.*

*În plus*

$$\|F\| = \|y\|.$$

**Teoremă**. *Fie $\mu : \mathcal{P}(X) \to \mathbb{R}$ o funcţie aditivă şi mărginită. Atunci formula*

$$F(f) = \int_X f(s) d\mu(s),$$

*defineşte o funcţională liniară şi continuă pe $\mathcal{M}(X)$.*

*Reciproc, pentru orice funcţională liniară şi continuă $F$ pe $\mathcal{M}(X)$, există $\mu : \mathcal{P}(X) \to \mathbb{R}$ o funcţie aditivă şi mărginită, astfel ca*

$$F(f) = \int_X f(s) d\mu(s),$$

*pentru orice $f \in \mathcal{M}(X)$.*

*În plus*

$$\|F\| = |\mu| = \sup \sum_{i=1}^{n} |\mu(E_i)|,$$

*unde sup este considerat pentru toate partiţiile lui $X$.*

**Teoremă**. *Fie* $\mu$ *o măsură regulată Borel pe* $[a, b]$ şi $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{n-1} \in \mathbb{R}$ *Atunci formula*

$$F(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i f^{(i)}(a) + \int_a^b f^{(n)}(s) d\mu(s),$$

*defineşte o funcţională liniară şi continuă pe* $C^n([a, b])$.

*Reciproc, pentru orice funcţională liniară şi continuă* $F$ *pe* $C^n([a, b])$, *există* $\mu$ *o măsură regulată Borel pe* $[a, b]$ şi $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{n-1} \in \mathbb{R}$, *astfel ca*

$$F(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i f^{(i)}(a) + \int_a^b f^{(n)}(s) d\mu(s),$$

*pentru orice* $f \in C^n([a, b])$.

# CAPITOLUL V

# REFLEXIVITATEA UNOR SPAŢII CONCRETE DIN ANALIZA FUNCŢIONALĂ

## BREVIAR TEORETIC

**Definiţie** *Fie* $(X, d)$ *şi* $(Y, \rho)$ *două spaţii metrice. O bijecţie* $f : X \to Y$ *se numeşte izometrie dacă pentru orice* $x, y \in X$ *avem*

$$\rho(f(x), f(y)) = d(x, y).$$

**Definiţie**. *Două spaţii metrice se numesc izometrice dacă există o izometrie între ele.*

**Definiţie**. *Fie* $X$ *un spaţiu vectorial normat peste* $K$. *Atunci*

$$X^* = \{f : X \to K \mid f \text{ este liniară şi continuă}\},$$

*cu norma*

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| \mid \|x\| \leq 1\},$$

*este un spaţiu vectorial normat complet, numit dualul lui* $X$.
*Dualul lui* $X^*$, *notat* $X^{**}$, *este numit bidualul lui* $X$.

**Definiţie**. *Fie* $X$ *un spaţiu vectorial normat şi* $x \in X$. *Aplicaţia* $j_x : X^* \to K$ *dată de*

$$j_x(f) = f(x),$$

*pentru orice* $f \in X^*$, *aparţine lui* $X^{**}$ *şi*

$$\|j_x\| = \|x\|.$$

*Definim $J : X \to X^{**}$ prin*

$$J(x) = j_x,$$

*pentru orice $x \in X$.*

*Această aplicaţie $J$ se numeşte scufundarea canonică a lui $X$ în $X^{**}$.*

**Definiţie**. *Un spaţiu vectorial normat $X$ se numeşte reflexiv dacă scufundarea canonică a lui $X$ în $X^{**}$, $J : X \to X^{**}$, este surjectivă (deci bijectivă, căci injectivitatea este automată).*

**Remarcă**. *Prin urmare, dacă $X$ este reflexiv, $J$ este o izometrie între $X$ şi $X^{**}$.*

**Remarcă**. *Definiţia de mai sus cere în mod expres ca izometria dintre $X$ şi $X^{**}$să fie $J$ şi nu altă aplicaţie. R.C. James a arătat că spaţiul Banach*

$$X = \{x \in c_0 \mid \|x\|' < \infty\},$$

*unde*

$$\|x\|' = \|(x_n)_{n\geq 1}\|' =$$

$$= \sup\{[\sum_{j=1}^{n}(x_{p_{j+1}} - x_{p_j})^2 + (x_{p_{n+1}} - x_{p_1})^2]^{\frac{1}{2}} \mid n \in \mathbb{N}^* \text{şi } 1 \leq p_1 \leq \dots \leq p_{n+1}\},$$

*cu norma $\|.\|'$, este izometric cu bidualul său, dar că $J$ nu este izometrie.*

**Remarcă**. Putem reformula definiţia spaţiului reflexiv astfel: *un spaţiu vectorial normat $X$ se numeşte reflexiv dacă pentru orice aplicaţie liniară şi continuă $F$ pe $X^*$, există $x \in X$ astfel ca $F = j_x$.*

**Remarcă**. *Dacă $X$ este reflexiv atunci, fiind izometric cu $X^{**}$ care este Banach, este Banach. Pe de altă parte, aşa cum vom vedea mai jos, există spaţii Banach care nu sunt reflexive.*

**Propoziţie**. *Fie $X$ un spaţiu vectorial normat reflexiv. Atunci:*
*a) orice subspaţiu închis al lui $X$ este reflexiv.*
*b) $X^*$ este reflexiv.*
*c) $X$ este separabil dacă şi numai dacă $X^*$ este separabil.*

Să reformulăm în termenii de mai sus rezultatele obţinute în capitolul precedent ( $X \simeq Y$ semnifică faptul că $X$ şi $Y$ sunt izomorfe):

$(l_0)^* \simeq l^1$

$(c_0)^* \simeq l^1$

$(c)^* \simeq l^1$

$(C([a,b]))^* \simeq NBV([a,b])$

$(l^1)^* \simeq l^\infty$

$(l^p)^* \simeq l^q$, pentru $p > 1$ şi $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$(L^1)^* \simeq L^\infty$

$(L^p)^* \simeq L^q$, pentru $p > 1$ şi $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

## SPAŢII DE ŞIRURI

**Propoziţie.** *Spaţiile $l_0$, $c_0$ şi $c$ nu sunt reflexive.*

*Demonstraţie.* Să presupunem, prin reducere la absurd, că ele sunt reflexive. Atunci

$$l_0 \simeq (l_0)^{**} = ((l_0)^*)^* \simeq (l^1)^* \simeq l^\infty,$$

$$c_0 \simeq (c_0)^{**} = ((c_0)^*)^* \simeq (l^1)^* \simeq l^\infty$$

şi

$$c \simeq (c)^{**} = ((c)^*)^* \simeq (l^1)^* \simeq l^\infty.$$

Deci am avea $l_0 \simeq l^\infty$, $c_0 \simeq l^\infty$ şi $c \simeq l^\infty$, ceea ce constituie o contradicţie întrucît pe de o parte $l_0$, $c_0$ şi $c$ sunt separabile, iar pe de altă parte $l^\infty$ nu este separabil.

**Propoziţie.** *Spaţiul $l^\infty$ nu este reflexiv.*

*Demonstraţie.* Să presupunem, prin reducere la absurd, că este reflexiv. Atunci, $c$ fiind un subspaţiu închis al său, este reflexiv. Aşa cum am văzut mai sus, acest fapt este fals.

**Propoziţie.** *Spaţiul $l^p$, pentru $p > 1$, este reflexiv.*

*Demonstraţie.* Fie $q$ astfel ca $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Am văzut în capitolul precedent că aplicaţiile $F : l^q \to (l^p)^*$ şi $G : l^p \to (l^q)^*$ date de

$$F(y)(x) = G(x)(y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n,$$

unde $x = (x_n)_{n\geq 1} \in l^p$, $y = (y_n)_{n\geq 1} \in l^q$, sunt surjective.

Pentru a arăta că $l^p$ este reflexiv vom demonstra că $J : l^p \to (l^p)^{**}$ este surjectivă.

Fie deci un element arbitrar $\mathcal{F} \in (l^p)^{**}$.

Vom arăta că există $x \in l^p$ astfel ca $J(x) = \mathcal{F}$.

Deoarece $\mathcal{F} \circ F \in (l^q)^*$, există $x \in l^p$ astfel ca $\mathcal{F} \circ F = G(x)$.

Fie acum un element arbitrar din $f \in (l^p)^*$. Atunci există un unic $y \in l^q$ astfel ca $F(y) = f$.

Avem

$$\mathcal{F}(f) = \mathcal{F}(F(y)) = (\mathcal{F} \circ F)(y) = G(x)(y) =$$

$$= F(y)(x) = f(x) = j_x(f) = J(x)(f).$$

Cum $f \in (l^p)^*$ a fost ales arbitrar, deducem că $\mathcal{F} = J(x)$, ceea ce încheie demonstraţia.

## SPAŢII DE FUNCŢII

**Propoziţie**. *Spaţiul $\mathcal{C}([0,1])$ nu este reflexiv.*

*Demonstraţie.* Să presupunem, prin reducere la absurd, că este reflexiv. Atunci, deoarece $\mathcal{C}([0,1])$ este separabil şi

$$\mathcal{C}([0,1])^* \simeq \mathcal{V}([0,1]),$$

$\mathcal{V}([0,1])$ ar fi separabil, fapt care constituie o contradicţie.

**Propoziţie**. *Spaţiul $\mathcal{V}([a,b])$ nu este reflexiv.*

*Demonstraţie.* Să presupunem, prin reducere la absurd, că este reflexiv. Atunci, dualul său, $\mathcal{C}([a,b])$ este reflexiv, fapt care, aşa cum am văzut mai sus, constituie o contradicţie.

## SPAŢIILE $L^p$

Absolut asemănător cu modul în care am făcut-o pentru $l^p$, se arată că:

**Propoziţie**. *Spaţiul $L^p([a,b])$ (sau mai general $L^p$), pentru $p > 1$, este reflexiv.*

**Propoziţie**. *Spaţiul $L^1([a,b])$ nu este reflexiv.*

*Demonstraţie.* Să presupunem, prin reducere la absurd, că este reflexiv. Atunci,

$$J(L^1([a,b])) = ((L^1([a,b]))^*)^* \simeq (L^\infty([a,b]))^*,$$

ceea ce am văzut în capitolul precedent că nu este adevărat.

**Propoziţie.** *Spaţiul $L^\infty([a,b])$ nu este reflexiv.*

*Demonstraţie.* Să presupunem, prin reducere la absurd, că este reflexiv. Atunci, $C([a,b])$ fiind un subspaţiu închis al său, este reflexiv. Aşa cum am văzut mai sus, acest fapt este fals.

## ALTE REZULTATE

**Definiţie.** *Un spaţiu vectorial normat $X$ se numeşte uniform convex dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel ca pentru orice $x, y \in X$ astfel ca $\|x\| \leq 1$, $\|y\| \leq 1$ şi $\|x-y\| \geq \varepsilon$, avem $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leq 1-\delta$.*

**Teoremă (Milman)** *Un spaţiu vectorial normat uniform convex este reflexiv.*

**Remarcă.** *Aşa cum a arătat Day, reciproca acestei teoreme nu este valabilă. Cu alte cuvinte, există spaţii reflexive care nu sunt uniform convexe.*

**Teoremă (Clarkson)** *Spaţiile $l^p$ şi $L^p$ sunt uniform convexe, deci reflexive.*

**Propoziţie.** *Orice spaţiu Hilbert este uniform convex, deci reflexiv.*

**Propoziţie.** *Nici un subspaţiu infinit dimensional al lui $l^1$ (deci $l^1$ însuşi) nu este reflexiv.*

Acest rezultat decurge din următoarele:

**Teoremă (Eberlein)** *Un spaţiu vectorial normat este reflexiv dacă şi numai dacă orice şir mărginit al său are un subşir convergent în topologia slabă.*

**Propoziţie.** *Pentru un şir $(x_n)_{n\geq 1} \in l^1$ următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

*a) $(x_n)_{n\geq 1}$ converge către $x$ în normă.*

*b) $(x_n)_{n\geq 1}$ converge către $x$ în topologia slabă.*

**Teoremă (Riesz)** *Fie $X$ un spaţiu vectorial normat. Atunci $\overline{B(0,1)}$ este compactă dacă şi numai dacă $X$ este de dimensiune finită.*

**Notă istorică.** *Frigyes Riesz*, născut la Györ, Ungaria, în 1880, a studiat matematicile la Budapesta (unde obţine doctoratul în1902), Göttingen şi Zürich. După doi ani petrecuţi în învăţămîntul liceal, obţine un post în învăţămîntul universitar. Riesz a fost unul dintre fondatorii analizei matematice. În 1907-1908 a descoperit vestita teoremă de reprezentare a funcţionalelor liniare şi continue (pe $L^2$). A introdus noţiunea de convergenţă slabă şi a lucrat în teoria operatorilor. În 1911 este numit la Universitatea din Koloszvár (Cluj) care se mută la Szeged în 1920. Aici, în 1922, împreună cu Haar, înfiinţează Institutul Matematic János Bolyai şi revista Acta Scientiarum Mathematicarum în care publică multe articole. În 1911 este numit la Universitatea din Budapesta. Celebra teoremă Riesz-Fischer (1907) este fundamentală în analiza Fourier a spaţiilor Hilbert şi în mecanica cuantică. A contribuit de asemenea la teoria ergodică, teoria seriilor ortonormale şi la topologie. Cartea sa, "Leçon's d'analyse fonctionnelle", scrisă împreună cu studentul său Szökefalvi-Nagy, este una dintre cele mai clare expuneri ale analizei funcţionale scrise vreodată. A fost membru al Academiei Ungare şi al Academiei Franceze de Ştiinţe, iar în 1949 a primit premiul Kossuth. A murit în 1956.

**Propoziţie.** *Spaţiile* $\mathcal{M}(X)$ şi $C^n([a,b])$ *nu sunt reflexive (căci un spaţiu reflexiv este complet în topologia slabă, proprietatea de care cele două spaţii nu se bucură).*

# CAPITOLUL VI

## CONVERGENŢĂ SLABĂ ŞI CONVERGENŢĂ SLABĂ*

### BREVIAR TEORETIC

**Definiţie**. *Un şir* $(x_n)_{n\geq 1}$ *de elemente dintr-un spaţiu vectorial normat* $X$ *converge slab către* $x \in X$ *dacă*

$$\lim_{n\to\infty} x^*(x_n) = x^*(x),$$

*pentru orice* $x^* \in X^*$. *În acest caz* $x$ *se numeşte o limită slabă a lui* $(x_n)_{n\geq 1}$.

*Scriem*

$$x_n \xrightarrow{s} x$$

*în* $X$.

**Teoremă**. *Fie* $(x_n)_{n\geq 1}$ *şi* $(y_n)_{n\geq 1}$ *două şiruri de elemente dintr-un spaţiu vectorial normat* $X$. *Atunci:*

*a) Dacă pentru* $x$ *şi* $y$ *din* $X$ *avem* $x_n \xrightarrow{s} x$ *şi* $x_n \xrightarrow{s} y$, *atunci* $x = y$, *adică un şir ce converge slab are limită unică.*

*b) Dacă avem* $x_n \xrightarrow{s} x$, $y_n \xrightarrow{s} y$ *în* $X$ *şi* $k_n \to k$ *în* $K$, *atunci* $x_n + y_n \xrightarrow{s} x + y$ *şi* $k_n x_n \xrightarrow{s} kx$, *adică operaţiile de spaţiu vectorial ale lui* $X$ *sunt compatibile cu convergenţa slabă.*

*c) Dacă* $x_n \to x$ *în* $X$, *atunci* $x_n \xrightarrow{s} x$, *dar reciproca nu este adevărată. Totuşi, dacă* $x_n \xrightarrow{s} x$ *atunci* $x \in \overline{co}\{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$, *adică închiderii convexe a lui* $\{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$.

**Teoremă**. *Fie* $(x_n)_{n\geq 1}$ *un şir de elemente dintr-un spaţiu vectorial normat* $X$ *şi* $x \in X$. *Atunci* $x_n \xrightarrow{s} x$ *în* $X$ *dacă şi numai dacă*

*i)* $(x_n)_{n\geq 1}$ *este mărginit.*

*ii) există* $S$ *o submulţime a lui* $X^*$ *astfel ca închiderea spaţiului generat de* $S$ *este* $X^*$, *i.e.* $\overline{spanS} = X^*$, *şi*

$$\lim_{n\to\infty} x^*(x_n) = x^*(x),$$

*pentru orice* $x^* \in S$.

**Definiţie.** *Fie* $X$ *un spaţiu vectorial normat şi* $X^*$ *dualul său. Un şir* $(x_n^*)_{n\geq 1}$ *de elemente din* $X^*$ *converge slab* către* $x^* \in X^*$ *dacă*

$$\lim_{n\to\infty} x_n^*(x) = x^*(x),$$

*pentru orice* $x \in X$. *În acest caz* $x^*$ *se numeşte o limită slabă* a lui* $(x_n^*)_{n\geq 1}$.
*Scriem*

$$x_n^* \xrightarrow{s^*} x^*$$

*în* $X^*$.

**Teoremă.** *Fie* $X$ *un spaţiu vectorial normat şi* $X^*$ *dualul său, iar* $(x_n^*)_{n\geq 1}$ *şi* $(y_n^*)_{n\geq 1}$ *două şiruri de elemente din* $X^*$. *Atunci:*

*a) Dacă pentru* $x^*$ *şi* $y^*$ *din* $X$ *avem* $x_n^* \xrightarrow{s^*} x^*$ *şi* $x_n^* \xrightarrow{s^*} y^*$, *atunci* $x^* = y^*$, *adică un şir ce converge slab* are limită unică.*

*b) Dacă avem* $x_n^* \xrightarrow{s} x^*$ *şi* $y_n^* \xrightarrow{s} y^*$ *în* $X^*$ *iar* $k_n \to k$ *în* $K$, *atunci* $x_n^* + y_n^* \xrightarrow{s^*} x^* + y^*$ *şi* $k_n x_n^* \xrightarrow{s} kx^*$, *adică operaţiile de spaţiu vectorial ale lui* $X^*$ *sunt compatibile cu convergenţa slabă*.*

*c) Este posibil ca* $x_n^* \xrightarrow{s^*} x^*$ *însă să avem* $x^* \notin \overline{co}\{x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*, ...\}$.

**Teoremă.** *Fie* $(x_n^*)_{n\geq 1}$ *un şir de elemente din* $X^*$ *iar* $x^* \in X^*$, *unde* $X$ *este un spaţiu normat. Atunci* $x_n^* \xrightarrow{s^*} x^*$ *în* $X^*$ *dacă şi numai dacă:*

*i)* $(x_n^*)_{n\geq 1}$ *este mărginit în* $X^*$.

*ii) există* $S$ *o submulţime a lui* $X$ *astfel ca închiderea spaţiului generat de* $S$ *este* $X$, *i.e.* $\overline{spanS} = X$ *şi* $\lim_{n\to\infty} x_n^*(x) = x^*(x)$ *pentru orice* $x \in S$.

**Teoremă (Banach).** *Fie* $X$ *un spaţiu vectorial normat separabil. Atunci orice şir mărginit din* $X^*$ *conţine un subşir slab* convergent.*

**Remarcă.** *Are loc un rezultat mai general, anume:*

**Teoremă (Alaoglu).** *În orice spaţiu vectorial normat, sfera unitate închisă este slab* compactă.*

**Definiţie.** *Pentru* $f \in L^1([-\pi, \pi])$ *definim seria Fourier a sa ca fiind seria formală*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{int},$$

*unde*

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) e^{-ins} ds$$

*este coeficientul Fourier de ordin n al lui f.*

**Notă istorică.** *Jean Baptiste Joseph Fourier* s-a născut în 1768 la Auxerre, în Franţa. Din 1870 frecventează Ecole Royale Militaire din Auxerre. În 1783 primeşte primul său premiu pentru un studiu de mecanică. În 1787 Fourier se dedică vieţii monahale mergînd la mănăstirea benedectină din St Benoit-sur-Loire. Interesul său pentru matematică este însă prezent şi în această perioadă. În 1790 devine profesor la Ecole Royale Militaire din Auxerre. Conflictului său interior referitor la calea pe care o va urma (matematică sau teologie) i se adaugă un nou element în 1793 cînd se implică în politică, alăturîndu-se Comitetului Revoluţionar local. Deşi datorită terorii generate de revoluţia Franceză doreşte să se retragă din astfel de activităţi, acest lucru este imposibil. Mai mult, pe motive politice este arestat. Din 1794 studiază la Ecole Normale din Paris unde sunt profesori Lagrange, Laplace şi Monge. Predă la Collège de France şi la Ecole Centrale des Travaux Publiques condusă de către Lazare Carnot şi Gaspard Monge, care curînd îşi schimbă numele în Ecole Polytechnique. În 1797 îi succede lui Lagrange la catedra de analiză şi mecanică. În 1798 se alătură armatei lui Napoleon în invazia Egiptului unde ocupă diverse poziţii administrative pînă în 1801 cînd se întoarce la postul de profesor de analiză de la Ecole Polytechnique. La cererea lui Napoleon preia postul de prefect la Isère. Aceasta (1804-1807) este perioada în care lucrează la teoria propagării căldurii, rezultatul fiind memoriul intitulat "Despre propagarea căldurii în corpuri solide", memoriu de o importanţă capitală, dar care la vremea respectivă a fost foarte controversat. Lagrange şi Laplace au avut obiecţii asupra dezvoltării funcţiilor în serii trigonometrice. Din 1817 devine membru al Académie des Sciences. A murit în 1830.

**Remarcă.** *Convergenţa seriei Fourier* $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e^{int}$ *către* $f(t)$, *pentru orice* $t \in [-\pi,\pi]$, *este una dintre problemele fundamentale ale teoriei seriilor Fourier. În 1926 Kolmogorov a prezentat un exemplu de funcţie din* $L^1([-\pi,\pi])$ *a cărei serie Fourier este divergentă în orice punct din* $[-\pi,\pi]$. *Chiar dacă* $f$ *este continuă pe* $[-\pi,\pi]$, *seria Fourier poate să nu conveargă către* $f$, *pe* $[-\pi,\pi]$, *aşa cum vom vedea în capitolul VII. Carleson (1966) şi Hunt (1968) au arătat că dacă* $f \in L^p([-\pi,\pi])$, *unde* $1 < p \leq \infty$, *atunci seria Fourier a lui* $f$ *converge către* $f$ *a.p.t în* $[-\pi,\pi]$.

**Notă istorică.** *Andrey Nikolaevich Kolmogorov*, născut în 1903, la Tambov, Rusia a studiat la Universitatea de Stat din Moscova într-o perioadă cînd aici se aflau şi Luzin, Egorov, Suslin, Aleksandrov, Uryshon şi Stepanov. În perioada 1925-1929, sub îndrumarea lui Luzin, îşi elaborează teza de doctorat. În 1925, împreună cu Khinchin, publică un articol care va fi baza calculului stocastic. Devine, din 1931, profesor la Universitatea din Moscova. Monografia sa asupra teoriei probabilităţilor, "Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung", apărută în 1933, pune bazele teoriei axiomatice a probabilităţilor. Devine şeful Departamentului de Statistică şi Probabilităţi de la Institutul de Matematică al Academiei de Ştiinţe. În 1941 publică două articole despre teoria turbulenţelor care sunt de o importanţă covîrşitoare. În 1954 studiază sistemele dinamice în relaţie cu mişcarea planetelor, demonstrînd rolul vital al teoriei probabilităţilor în fizică. A definit, în 1936, grupul de coomologie al unui grup topologic local compact şi a avut multiple contribuţii la teoria coomologiei. Două articole ale sale, apărute în 1953 şi 1954, despre teoria sistemelor dinamice cu aplicaţii în dinamica Hamiltoniană, au pus bazele KAM(Kolmogorov–Arnold-Moser)-teoriei. A avut mari contribuţii la cea de a şasea problemă a lui Hilbert şi a rezolvat-o complet pe cea de a treisprezecea. A fost mebru al Academiei de Ştiinţe a URSS, a primit Premiul de Stat în 1941, Premiul Lenin în 1965 şi Premiul Lobachevsky în 1987. A murit în 1987.

**Definiţie.** *Pentru* $m \in \mathbb{N}$ *şi* $t \in [-\pi, \pi]$ *definim nucleul Dirichlet de ordin* $m$ *prin*

$$D_m(t) = \sum_{n=-m}^{m} e^{int}.$$

**Remarcă.**

$$s_m(t) = \sum_{n=-m}^{m} \hat{f}(n)e^{int} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)D_m(t-s)ds$$

$$D_m(-t) = D_m(t)$$

$$D_m(t) = \begin{cases} \frac{\sin(m+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}, & dacă\ t \neq 0 \\ 2m+1, & dacă\ t = 0. \end{cases}$$

Una dintre caracteristicile neplăcute ale nucleelor Dirichlet este că ele nu sunt pozitive.

Chiar considerînd valoarea lor absolută, ele nu au un comportament mulţumitor, adică avem:

**Teoremă.**

$$\lim_{m\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} |D_m(t)|\, dt = \infty.$$

**Notă istorică.** *Johann Peter Gustav Lejeunne Dirichlet* s-a născut în februarie 1805 la Düren, Franţa (acum în Germania). Merge la gimnaziu în Bonn începînd din 1817, dar după doi ani frecventează un alt colegiu din Köln. Se hotărăşte să-şi continue studiile la Paris unde frecventează cursurile de la Collège de France şi de la Faculté des Scientes unde are ca profesori pe Fourier, Laplace, Legendre şi Poisson. Din 1823 Dirichlet este luat în ocrotire de către generalul Foy (o figură celebră din armata franceză în timpul războaielor lui Napoleon). În iulie 1825 prezintă la Academia din Paris primul lui articol, asupra teoremei lui Fermat, care-l va face faimos. În acelaşi an generalul Foy moare, iar Dirichlet se hotărăşte să se întoarcă în Germania. Predă la universităţile din Breslau(1827), Colegiul Militar şi Universitatea din Berlin (1828-1855). A fost un bun prieten al lui Jacobi pe care l-a şi însoţit în Italia (1843) în perioada de convalescenţă a acestuia. În 1855 i se oferă catedra lui Gauss de la Göttingen. A avut numeroase contribuţii la teoria numerelor, a introdus noţiunea modernă de funcţie, iar studiile sale despre stabilitatea sistemului solar l-au condus la celebra problemă a funcţiilor armonice care au condiţii date pe frontieră. De asemenea este faimos pentru stabilirea condiţiilor pentru convergenţa seriilor trigonometrice, publicate în 1828 în Crelle's Journal. A murit în 1859 la Göttingen (Germania).

**Definiţie**. *Pentru* $m \in \mathbb{N}^*$ *şi* $t \in [-2\pi, 2\pi]$ *definim nucleul Fejér de ordin* $m$ *prin*

$$k_m(t) = \begin{cases} \frac{1-\cos mt}{m(1-\cos t)}, & \text{dacă } t \neq 0,\ 2\pi,\ -2\pi \\ m, & \text{dacă } t = 0,\ 2\pi,\ -2\pi. \end{cases}$$

**Remarcă**. *Pentru* $t \in [-\pi, \pi]$ *avem*

$$a_m = \frac{s_1 + s_2 + \ldots + s_m}{m} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) k_m(t-s) ds,$$

*iar* $k_m$*-urile sunt pozitive.*

**Teoremă (Fejér, 1904).** *Fie* $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ *continuă cu* $f(-\pi) = f(\pi)$. *Atunci* $(a_m)_{m \geq 1}$, *şirul mediilor aritmetice ale sumelor parţiale ale seriei Fourier a lui* $f$, *converge uniform către* $f$, *pe* $[-\pi, \pi]$.

**Notă istorică**. *Lipót Fejér* (numele său real este Leopold Weiss) s-a născut la Pécs, Ungaria, în 1880. Între 1897 şi 1902 a studiat matematica şi fizica la Budapesta şi Berlin unde a fost studentul lui Schwarz. Teorema referitoare la teoria seriilor Fourier care-i poartă numele, publicată în 1900, constituie baza tezei sale de doctorat pe care a susţinut-o în 1902 la Budapesta. Între 1902 şi 1905 predă la Universitatea din Budapesta, apoi, între 1905 şi 1911 la Koloszsvár (Cluj), iar din 1911 pînă la moartea sa, în 1959, din nou la Budapesta. Principalul său domeniu de studiu a fost analiza armonică dar a publicat de asemenea un articol important despre funcţii întregi (împreună cu Carathéodory, în 1907) şi unul despre transformări conforme (împreună cu Riesz, în 1922).

**Lema Riemann-Lebesgue.** *Dacă* $f \in L^1([-\pi, \pi])$ *atunci*

$$\lim_{n\to\infty} \hat{f}(n) = 0$$

*şi*

$$\lim_{n\to-\infty} \hat{f}(n) = 0.$$

*Dacă* $\hat{f}(n) = 0$ *pentru orice* $n \in \mathbb{Z}$, *atunci* $f = 0$ *a.p.t., i.e. coeficienţii Fourier ai lui* $f$ *determină pe* $f$.

**Notă istorică.** *Bernhard Riemann* (1826-1866) a fost unul dintre matematicienii de frunte ai secolului al XIX-lea. În scurta sa carieră, el a introdus idei de o importanţă fundamentală în analiza complexă, analiza reală, geometria diferenţială, teoria numerelor si alte domenii ale matematicii. Cercetările sale de geometrie diferenţiala au constituit baza matematică pentru teoria generală a relativităţii.

Numele lui Riemann este legat de (probabil) cea mai importantă conjectură nedemonstrată încă a matematicii zilelor noastre, şi anume ipoteza lui Riemann, care este de o importanta fundamentală pentru distribuţia numerelor prime.

Riemann s-a născut în 1826 în ţinutul Hanovrei, mai târziu parte din Germania. Tatal său era un preot luteran. Încă de la o vîrstă fragedă el îşi manifestă interesul pentru istorie şi matematică, fiind încurajat de către familia sa în acest sens. La vârsta de 14 ani intră la gimnaziul din Hanovra, iar doi ani mai târziu este transferat la gimnaziul din Lüneburg, unde îi este descoperit remarcabilul talent matematic. Schmalfuss, directorul gimnaziului, îi dă lui Riemann o carte de teoria numerelor scrisă de Legendre. Şase zile mai târziu, Riemann îi înapoiază cartea de 859 pagini spunând: "Este o carte minunată! Am terminat-o." Şi o terminase. În 1846, Riemann se înscrie la Universitatea Göttingen. Conform dorinţelor tatălui său, începe facultatea de teologie, dar se transferă curând la facultatea de filosofie pentru a studia stiinţele şi matematica.

Cu toate că Gauss se afla şi el la Universitatea din Göttingen în această perioadă, probabil că nu a avut nici un contact personal cu Riemann. Abilitatea lui Riemann i-a atras însă atenţia altui matematician de la Göttingen, Moritz Stern. După un an, Riemann se transferă la Universitatea din Berlin, unde poate beneficia de îndrumările lui Jacobi, Steiner, Dirichlet şi Eisenstein. Dirichlet a fost cel care l-a influenţat cel mai mult pe Riemann şi care avea să devină colaboratorul său. În 1850, Riemann se întoarce la Göttingen, unde îşi va petrece tot restul carierei.

Dizertaţia lui Riemann, alcatuită sub supravegherea lui Gauss în 1851, avea ca subiect fundamentarea analizei complexe. Ea introduce mai multe idei de importanţă fundamentală, cum ar fi definiţia aplicaţiei conforme şi simplu conexitatea. Acestea sunt necesare unuia dintre principalele sale rezultate: orice domeniu simplu conex al planului complex, având cel puţin două puncte pe frontieră, poate fi transformat conform în discul unitate.

Următorul pas în cariera academică a lui Riemann este calificarea ca Privatdozent (lector). Pentru aceasta, el trebuia să prezinte un Habilitationsschrift (eseu) şi un Habilitationsvortrag (prelegere). Ambele s-au dovedit a fi opere matematice. Pentru Habilitationsschrift, Riemann a ales ca subiect seriile Fourier, prezentînd eseul complet în anul 1853. Cu toate că seriile trigonometrice fuseseră îndelung folosite în astronomie, problema găsirii soluţiilor ecuaţiei undelor, care pot fi reprezentate prin astfel de serii, a constituit subiectul unor largi dezbateri în secolul al XVIII lea, implicîndu-i pe D'Alembert, Euler şi alţii. Problema de bază era lipsa unei fundamentări a analizei matematice. Fourier făcuse în mod extensiv uz de seriile trigonometrice în rezolvarea ecuatiei căldurii, dar a făcut foarte puţine pentru a rezolva aspectele fundamentale. Eseul lui Riemann a constituit un considerabil progres în aceasta problemă, în primul rând prin aceea că a dat primul criteriu de integrabilitate a unei funcţii (sau, cum spunem astăzi, integrabilitate Riemann), şi apoi prin obţinerea unei condiţii necesare pentru ca o funcţie integrabilă Riemann să poată fi reprezentată printr-o serie Fourier.

Pentru Habiltationsvortrag-ul său, Riemann a propus trei teme, şi contrar aşteptărilor sale, Gauss a ales-o pe cea de geometrie. Prelegerea lui Riemann "Despre falsele ipoteze aflate la baza geometriei" a fost susţinută pe 10 iunie 1854. Această operă extraordinară introduce (ceea ce acum se numeşte) suprafaţa Riemann n-dimensionala şi tensorul său de curbură. Rezultatele sale sunt folosite în teoria generală a relativităţii a lui Einstein şaizeci de ani mai târziu. Probabil că singura persoană din audienţă care aprecia adâncimea operei lui Riemann era Gauss, care făcuse muncă de pionierat în geometria diferenţială. Un raport al prelegerii lui Riemann nu a fost publicat decât în anul 1868, după moartea sa.

Cu toate că Privatdozent-ul putea colecta taxe de la studenţi, postul nu era prevăzut cu salariu. Cu ajutorul lui Dirichlet, Riemann obţine un post mărunt plătit. El nu devine profesor asistent decât în anul 1857, an în care îşi publică cercetările sale legate de funcţiile abeliene. Funcţiile abeliene fuseseră studiate de către Abel şi Jacobi; ele sunt o generalizare a funcţiilor eliptice. Riemann dezvoltă o teorie geometrică foarte puternică care rezolvă mai multe probleme remarcabile din acest domeniu. Opera sa îl recomandă pe Riemann ca pe un mare matematician, dar nu fără a-i fi controversat acest titlu. El foloseste în mod extensiv, fară demonstraţie, un principiu variaţional, numit principiul lui Dirichlet. Weierstrass avea îndoielile sale în legătură cu acest principiu, care, după moartea lui Riemann, cade în dizgraţie. Această stare de fapt a avut însă consecinţe fructuoase. Mai mulţi matematicieni au găsit cu succes demonstraţii ale rezultatelor lui Riemann fără a folosi principiul lui Dirichlet, iar principiului în sine i-a fost dată o demonstraţie riguroasă în anul 1899 de către Hilbert.

În 1859, Dirichlet, care era succesor la catedra lui Gauss din 1855, moare în urma unei boli grave. Riemann este numit în locul său. În acelaşi an, el este ales membru corespondent al Academiei de Ştiinte din Berlin. Ca nou membru, lui Riemann i se cere să trimită Academiei un raport al activităţii sale recente. Raportul trimis de Riemann, numit "Despre numărul numerelor prime mai mici decât un numar dat", este de o importanţă fundamentală în teoria numerelor.

Riemann arată că diverse rezultate legate de distribuţia numerelor prime erau strâns legate de proprietăţile analitice ale funcţiei zeta. Unele dintre rezultatele sale au fost stabilite în mod riguros de către Hadamard şi Vallée-Poussin în 1896, dar ipoteza lui Riemann a rămas nedemonstrată.

## EXEMPLE REFERITOARE LA CONVERGENŢA SLABĂ

**1**. Pentru $X = K^n$, $X^*$ se identifică cu $K^n$. Dacă $x_j^*$ este dată de

$$x_j^*(x_1, ..., x_n) = x_j,$$

pentru orice $(x_1, ..., x_n) \in K^n$, atunci $(x_1^m, ..., x_n^m) = x_m \xrightarrow{s} x = (x_1, ..., x_n)$ dacă şi numai dacă $x_j^*(x_1^m, ..., x_n^m) = x_j^m \to x_j$ pentru orice $j \in \{1, 2, ..., n\}$, ceea ce înseamnă că $x_m \to x$.

Deci *în $K^n$ convergenţa slabă coincide cu convergenţa în normă.*

**2**. Fie $X = (l^p, \|.\|_p)$, cu $1 \le p < \infty$.

Vom demonstra pentru început următorul rezultat cunoscut sub numele de **Lema lui Schur**: *$x_n \xrightarrow{s} x$ în $l^1$ dacă şi numai dacă $x_n \to x$ în $l^1$.*

Într-adevăr, în caz contrar există un şir $(x_n = (x_j^n)_{j\ge1})_{n\ge1}$ de elemente din $l^1$ astfel ca $x_n \xrightarrow{s} 0$ în $l^1$, adică

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} x_j^n y_j = 0,$$

pentru orice şir $y = (y_j)_{j\ge1}$ de elemente din $l^\infty$, dar există $\varepsilon_0 > 0$ astfel ca

$$\sum_{j=1}^{\infty} |x_j^n| \ge \varepsilon_0,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Pentru orice $j \in \mathbb{N}^*$, fie $x_j^* \in (l^1)^*$ dată de

$$x_j^*(x_1, ..., x_n, ..) = x_j,$$

pentru orice $(x_1, ..., x_n, ...) \in l^1$, care corespunde şirului $y = (0, 0, ..., 0, 1, ...) \in l^\infty$, unde 1 se află pe poziţia $j$.

Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_j^n = 0$ pentru orice $j \in \mathbb{N}^*$.

Punem $n_0 = m_0 = 0$ şi definim inductiv şirurile de numere naturale $(n_k)_{k\ge0}$ şi $(m_k)_{k\ge0}$ astfel: dacă $n_{k-1}$ şi $m_{k-1}$ au fost definite, fie $n_k$ cel mai mic număr natural strict mai mare decît $n_{k-1}$ astfel ca

$$\sum_{j=1}^{m_{k-1}} |x_j^{n_k}| < \frac{\varepsilon_0}{5}$$

şi fie $m_k$ cel mai mic număr natural strict mai mare decît $m_{k-1}$ astfel ca

$$\sum_{j=m_k+1}^{\infty} |x_j^{n_k}| < \frac{\varepsilon_0}{5}.$$

Definim un şir $y = (y_j)_{j\geq 1}$ de elemente din $l^\infty$ astfel: pentru $m_{k-1}+1 \leq j \leq m_k$, unde $k$ este un număr natural, punem:

$$y_j = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x_j^{n_k} = 0 \\ \frac{|x_j^{n_k}|}{x_j^{n_k}}, & \text{dacă } x_j^{n_k} \neq 0. \end{cases}$$

Atunci

$$\left|\sum_{j=1}^{\infty} x_j^{n_k} y_j - |x_j^{n_k}|\right| \leq 2\sum_{j=1}^{m_{k-1}} |x_j^{n_k}| + 2\sum_{j=m_k+1}^{\infty} |x_j^{n_k}| < \frac{4\varepsilon_0}{5}.$$

Drept urmare

$$\left|\sum_{j=1}^{\infty} x_j^{n_k} y_j\right| \geq \varepsilon_0 - \frac{4\varepsilon_0}{5} = \frac{\varepsilon_0}{5},$$

ceea ce contrazice faptul că

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{j=1}^{\infty} x_j^{n_k} y_j = 0.$$

Să considerăm acum cazul în care $1 < p < \infty$.

Alegînd $S = \{x_j^* \mid j \in \mathbb{N}^*\}$, unde

$$x_j^*(x_1, ..., x_n, ...) = x_j,$$

pentru orice $j \in \mathbb{N}^*$ şi orice $(x_1, ..., x_n, ...) \in l^p$, găsim că:

*$x_n = (x_j^n)_{j\geq 1} \xrightarrow{s} x = (x_j)_{j\geq 1}$ în $l^p$ dacă şi numai dacă $(x_n)_{n\geq 1}$ este mărginit şi $\lim_{n\to\infty} x_j^n = x_j$ pentru orice $j \in \mathbb{N}^*$.*

Într-adevăr, $\overline{spanS} = (l^p)^*$ căci $F : l^q \to (l^p)^*$ dată de

$$F((x_j)_{j\geq 1})((y_j)_{j\geq 1}) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j,$$

pentru $(x_j)_{j\geq 1} \in l^q$ şi $(y_j)_{j\geq 1} \in l^p$, este o izometrie liniară surjectivă.

Dar

$$F(e_j) = x_j^*$$

pentru orice $j \in \mathbb{N}^*$ şi $\{e_1, ..., e_n, ...\}$ formează bază Schauder pentru $l^q$.

Deci, dacă $x^* \in (l^p)^*$, cu $F(x) = x^*$, unde $x = (x_j)_{j \geq 1} \in l^q$, atunci

$$x^* = F(\sum_{j=1}^{\infty} x_j e_j) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j x_j^*,$$

adică $spanS$ este dens în $(l^p)^*$.

**Remarcă**. *Dacă* $1 < p < \infty$ *să observăm că* $x_n \xrightarrow{s} x$ *în* $l^p$ *nu implică* $x_n \to x$ *în* $l^p$*; de exemplu* $e_n \xrightarrow{s} 0$ *în* $l^p$ *dar* $\|e_n\|_p = 1$*, deci* $e_n \nrightarrow 0$ *în* $l^p$.

**Notă istorică**. *Issai Schur* (10 ianuarie 1875, Mogilyov, Bielorusia - 10 ianuarie 1941, Tel Aviv, Palestina) a frecventat Gimnaziul din Lipaja, Letonia. Din 1894 studiază la Universitatea din Berlin avînd ca profesori pe Frobenius şi Burnside, fondatorii teoriei reprezentărilor de grupuri, obţinînd doctoratul în 1901. În 1903 devine lector la Universitatea din Berlin iar apoi, între 1911 şi 1916, profesor la Universitatea din Bonn. Se întoarce la Universitatea din Berlin unde este profesor pînă în 1935 cînd este îndepărtat pe motive rasiale. I-a avut ca studenţi pe Richard Brauer şi Kurt Hirsh. În 1922 devine membru al Academiei Prusace. În 1939 emigează în Palestina.

**3**. Fie $X = L^p = L^p([a, b])$ cu $1 \leq p < \infty$.

Deoarece $(L^p)^* = L^q$, unde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ şi pentru că funcţiile simple sunt dense în $L^p$, rezultă că:

$x_n \xrightarrow{s} x$ *în* $L^p$ *dacă şi numai dacă* $(\|x_n\|_p)_{n \geq 1}$ *este un şir mărginit şi* $\lim_{n\to\infty} \int_E x_n(t)dt = \int_E x(t)dt$ *pentru orice mulţime măsurabilă* $E \subseteq [a, b]$.

Spre exemplu, fie $f_n : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ dată de

$$f_n(t) = e^{int},$$

pentru orice $t \in [-\pi, \pi]$, unde $n \in \mathbb{Z}$.

Lema Riemann-Lebesgue ne asigură că pentru orice $f \in L^1([-\pi, \pi])$ avem

$$\lim_{|n|\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt = 0.$$

Deoarece $\|f_n\|_p = 1$ pentru orice $1 \leq p < \infty$ şi orice $n \in \mathbb{Z}$, conchidem că $f_n \xrightarrow{s} 0$ în $L^p[-\pi, \pi])$ cînd $|n| \to \infty$ şi $1 \leq p < \infty$.

**4**. Vom arăta că:

$f_n \xrightarrow{s} f$ *în* $C([a, b])$ *dacă şi numai dacă* $(\|f_n\|)_{n \geq 1}$ *este un şir mărginit şi* $\lim_{n\to\infty} f_n(t) = f(t)$ *pentru orice* $t \in [a, b]$.

Fie $f_n \xrightarrow{s} f$ în $C([a, b])$

Atunci $(\|f_n\|)_{n\geq 1}$ este un şir mărginit iar $t \in [a,b]$ defineşte un element $f_t^* \in (C([a,b]))^*$ dat de

$$f_t^*(f) = f(t),$$

pentru orice $f \in C([a,b])$.

Drept urmare

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t) = \lim_{n\to\infty} f_t^*(f_n) = f_t^*(x) = f(t),$$

pentru orice $t \in [a,b]$.

Reciproc, fie

$$\|f_n\| \leq \alpha$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$ şi

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t) = f(t),$$

pentru $t \in [a,b]$.

Dacă $f^* \in (C([a,b]))^*$ atunci există $y$ o funcţie cu variaţie mărginită pe $[a,b]$ astfel ca

$$f^*(f) = \int_a^b f dy$$

pentru orice $f \in C([a,b])$.

Putem presupune fără pierderea generalităţii că $y$ este crescătoare.

Atunci

$$|f^*(f_n) - f^*(f)| = \left| \int_a^b f_n(t) - f(t) dy \right| \leq$$

$$\leq \int_a^b |f_n(t) - f(t)|\, dy.$$

Dar

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t) = f(t),$$

pentru orice $t \in [a,b]$ şi

$$|f_n(t) - f(t)| \leq |f_n(t)| + |f(t)| \leq \alpha + \|f\|.$$

Drept urmare, conform teoremei de convergenţă dominată (aplicată măsurii Lebesgue-Stieltjes definită de $y$) avem că

$$\lim_{n\to\infty} f^*(f_n) = f^*(f),$$

deci $f_n \xrightarrow{s} f$ în $\mathcal{C}([a,b])$.

**Remarcă**. *$f_n \xrightarrow{s} f$ nu implică că $f_n \to f$ în $\mathcal{C}([a,b])$.*

De exemplu fie

$$f_n(t) = \begin{cases} nt, & 0 \le t \le \frac{1}{n} \\ 2-nt, & \frac{1}{n} < t \le \frac{2}{n} \\ 0, & \frac{2}{n} < t \le 1 \end{cases}.$$

Atunci $f_n \in \mathcal{C}([a,b])$, $\|f_n\| = 1$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ şi

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t) = 0,$$

pentru orice $t \in [0,1]$.

Drept urmare $f_n \xrightarrow{s} 0$ , dar $f_n \nrightarrow 0$ în $\mathcal{C}([a,b])$.

## ALTE REZULTATE

**5**. *$x_n = (\zeta_j^n)_{j\ge1} \xrightarrow{s} x = (\zeta_j)_{j\ge1}$ în $l_0$ sau $c_0$ dacă şi numai dacă*

$$(\|x_n\|)_{n\ge1}$$

*este mărginit şi*

$$\lim_{n\to\infty} \zeta_j^n = \zeta_j$$

*pentru orice $j \in \mathbb{N}^*$.*

**6**. *$x_n = (\zeta_j^n)_{j\ge1} \xrightarrow{s} x = (\zeta_j)_{j\ge1}$ în $c$ dacă şi numai dacă*

$$(\|x_n\|)_{n\ge1}$$

*este mărginit,*

$$\lim_{n\to\infty} \zeta_j^n = \zeta_j$$

*pentru orice $j \in \mathbb{N}^*$ şi*

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{j\to\infty} \zeta_j^n = \lim_{j\to\infty} \zeta_j.$$

## EXEMPLE REFERITOARE LA CONVERGENŢA SLABĂ*

**Remarcă**. *Ipoteza de separabilitate din teorema lui Banach este esenţială.*

Spre exemplu, fie $X = l^\infty$. Pentru $x \in X$ şi $n \in \mathbb{N}^*$ considerăm $x_n^* \in (l^\infty)^*$ dată de

$$x_n^*((\zeta_j)_{j\geq 1}) = \zeta_n,$$

pentru orice $(\zeta_j)_{j\geq 1} \in l^\infty$.

Avem

$$\|x_n^*\| = 1,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, deci $(x_n^*)_{n\geq 1}$ este mărginit.

$(x_n^*)_{n\geq 1}$ nu are însă nici un subşir slab* convergent.

Într-adevăr, pentru orice subşir $(x_{n_m}^*)_{m\geq 1}$ al lui $(x_n^*)_{n\geq 1}$ fie $x = (\zeta_j)_{j\geq 1} \in l^\infty$ dat de

$$\zeta_j = \begin{cases} 1, & \text{pentru } j = n_m \text{ cu } m \text{ impar} \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}.$$

Atunci

$$x_{n_m}^*(x) = \zeta_{n_m} = 1$$

pentru $m$ impar şi

$$x_{n_m}^*(x) = \zeta_{n_m} = 0$$

pentru $m$ par, deci $x_{n_m}^*(x)$ nu converge slab*.

Acest fapt are loc pentru că $l^\infty$ nu este separabil.

**Remarcă**. *Chiar dacă $X^*$ este separabil, este posibil ca un şir mărginit din $X$ să nu aibă subşiruri slab convergente. Altfel spus, nu există un analog al teoremei lui Banach pentru convergenţa slabă.*

Într-adevăr, fie $X = l_0$.

Atunci $X^*$ este separabil deoarece se identifică cu $l^1$.

Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ considerăm

$$x_n = (1, 1, ..., 1, 0, 0, ....),$$

care are 1 pe primele $n$ poziţii.

Evident

$$\|x_n\| = 1.$$

Fie acum $x_0 = (y_1, y_2, ..., y_{n_0}, 0, 0, ...0, ..) \in l_0$ arbitrar.
Fie $m \in \mathbb{N}^*$, $m > n_0$.
Atunci pentru $(x_m)^*$ dat de

$$(x_m)^*((\zeta_j)_{j\geq 1}) = \zeta_m,$$

pentru orice $(\zeta_j)_{j\geq 1} \in X$, avem

$$(x_{m+1})^*(x_n) = 1$$

pentru orice $n \geq m+1$ şi

$$(x_{m+1})^*(x_0) = 0,$$

deci nici un subşir al lui $(x_n)_{n\geq 1}$ nu poate fi slab convergent către $x_0$.

Deoarece $x_0$ a fost ales arbitrar, găsim că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ nu are nici un subşir care converge slab.

## APLICAŢII ALE TEOREMEI LUI BANACH

O primă aplicaţie a teoremei lui Banach este următoarea:

**Teoremă**. *Să considerăm seria formală* $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} k_n e^{int}$, *unde* $k_n \in K$. *Pentru* $m \in \mathbb{Z}$ *şi* $t \in [-\pi, \pi]$ *fie*

$$s_m(t) = \sum_{n=-m}^{m} k_n e^{int}$$

*şi*

$$a_m(t) = \frac{(s_0 + ... + s_m)(t)}{m}.$$

*Fie* $1 < p < \infty$.

*Dacă* $(a_m)_{m\geq 1}$ *este mărginit în* $L^p([-\pi, \pi])$, *atunci există* $f \in L^p([-\pi, \pi])$ *care are seria Fourier* $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} k_n e^{int}$.

*Demonstraţie.* Fie $1 \leq q < \infty$ astfel încît $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Am văzut că funcţia $F : L^p([-\pi, \pi]) \to (L^q([-\pi, \pi]))^*$, dată de

$$F(f)(g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt,$$

pentru $f \in L^p([-\pi, \pi])$ şi $g \in L^q([-\pi, \pi])$ este o izometrie surjectivă.

Deoarece $(a_m)_{m\geq 1}$ este mărginit în $L^p([-\pi, \pi])$, rezultă că $(F(a_m))_{m\geq 1}$ este mărginit în $L^q([-\pi, \pi])^*$.

Deoarece $L^q([-\pi, \pi])$ este separabil pentru $1 \leq q < \infty$, conform teoremei lui Banach, există $f \in L^p([-\pi, \pi])$ şi un subşir $(F(a_{m_j}))_{j\geq 1}$ al lui $(F(a_m))_{m\geq 1}$ aşa încît

$$F(a_{m_j}) \xrightarrow{s^*} F(f)$$

în $(L^q([-\pi, \pi]))^*$.

Pentru $n \in \mathbb{Z}$, funcţiile $g_n(t) = e^{-int}$, $t \in [-\pi, \pi]$, sunt în $L^q([-\pi, \pi])$, de unde

$$\lim_{j\to\infty} F(a_{m_j})(g_n) = F(f)(g_n).$$

Dar

$$F(a_{m_j})(g_n) = \int_{-\pi}^{\pi} a_{m_j}(t)e^{-int}dt =$$

$$= \frac{2\pi}{m_j}(m_j - |n|)k_n = 2\pi k_n(1 - \frac{|n|}{m_j}),$$

care tinde la $2\pi k_n$ cînd $j \to \infty$.

Astfel, pentru orice $n \in \mathbb{Z}$,

$$F(f)(g_n) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt = 2\pi k_n.$$

Aceasta demonstrează că seria Fourier a lui $f$ este $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} k_n e^{int}$.

**Remarcă**. *Reciproca teoremei precedente este de asemenea adevărată. Spre exemplu, pentru $L^1([-\pi, \pi])$, o serie formală $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} k_n e^{int}$ este seria Fourier a unei funcţii din $L^1([-\pi, \pi])$ dacă şi numai dacă şirul mediilor aritmetice al sumelor sale parţiale converge în $L^1([-\pi, \pi])$.*

În continuare prezentăm o aplicaţie a teoremei lui Banach în teoria probabilităţilor.

**Definiţie**. *O funcţie $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care este mărginită, crescătoare şi continuă la dreapta se numeşte funcţie distribuţie.*

**Remarcă**. *Dacă $f$ este o variabilă aleatoare (i.e. o funcţie măsurabilă) definită pe un spaţiu probabilistic şi dacă pentru orice $t \in \mathbb{R}$, $y(t)$ defineşte* *probabilitatea ca $f$ să fie mai mică sau egală cu $t$, atunci $y$ este o funcţie distribuţie.*

**Principiul lui Helly.** *Fie $(y_n)_{n\geq 1}$ un şir de funcţii distribuţie astfel ca $y_n(a) = 0$ şi $y_n(b) = 1$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Atunci există un subşir $(y_{n_j})_{j\geq 1}$ şi o funcţie distribuţie $y$ cu proprietatea $y(a) = 0$ şi $y(b) = 1$ astfel ca*

$$\lim_{j\to\infty} y_{n_j}(t) = y(t),$$

*pentru orice $t$, punct de continuitate al lui $y$.*

*Demonstraţie.* Să observăm că $y_n \in NBV[a,b] = \{y : [a,b] \to \mathbb{R} \mid y(a) = 0$, $y$ este cu variaţie mărginită şi $y$ continuă la dreapta pe $(a,b)\}$ şi $\overset{b}{\underset{a}{V}}(y_n) = 1$.

Dar $NBV([a,b])$ se identifică cu $(C([a,b]))^*$.

Atunci, conform cu teorema lui Banach, există un subşir $(y_{n_j})_{j\geq 1}$ şi $y$ astfel ca

$$y_{n_j} \xrightarrow{s^*} y$$

în $NBV([a,b])$.

Fie $t_0 \in (a,b)$.

Pentru $m \in \mathbb{N}$ suficient de mare definim

$$f_m(t) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & a \leq t \leq t_0 \\ m(t_0 - t) + 1, & t_0 < t \leq t_0 + \frac{1}{m} \\ 0 & t_0 + \frac{1}{m} < t \leq b \end{array} \right. .$$

Atunci $f_m \in C([a,b])$, $0 \leq f_m \leq 1$ şi avem

$$\lim_{j\to\infty} \int_a^b f_m dy_{n_j} = \int_a^b f_m dy.$$

Dar

$$\int_a^b f_m dy_{n_j} \geq \int_a^{t_0} x_m dy_{n_j} = \int_a^{t_0} dy_{n_j} = y_{n_j}(t_0) - y_{n_j}(a) = y_{n_j}(t_0)$$

şi

$$\int_a^b f_m dy = \int_a^{t_0+\frac{1}{m}} f_m dy \leq \int_a^{t_0+\frac{1}{m}} dy = y(t_0 + \frac{1}{m}) - y(a) = y(t_0 + \frac{1}{m}).$$

Deci

$$\overline{\lim_{j\to\infty}} y_{n_j}(t_0) \leq y(t_0 + \frac{1}{m}),$$

pentru $m$ suficient de mare.

Similar găsim că

$$\varliminf_{j\to\infty} y_{n_j}(t_0) \geq y(t_0 - \frac{1}{m}),$$

pentru $m$ suficient de mare.

Drept urmare

$$\lim_{\substack{t \to t_0 \\ t < t_0}} y(t) \leq \varliminf_{j\to\infty} y_{n_j}(t_0) \leq \varlimsup_{j\to\infty} y_{n_j}(t_0) \leq \lim_{\substack{t \to t_0 \\ t > t_0}} y(t).$$

Dacă $y$ este continuă în $t_0 \in (a,b)$ relaţia de mai sus arată că există

$$\lim_{j\to\infty} y_{n_j}(t_0) = y(t_0).$$

Cazurile $t_0 = a$ şi $t_0 = b$ sunt similare.

Deoarece $y_n$ este crescătoare pentru orice $n \in \mathbb{N}$ şi mulţimea punctelor de continuitate ale lui $y$ este densă în $[a,b]$, rezultă că $y$ este de asemenea crescătoare.

Aşadar $y$ este distribuţie.

Mai mult, $y(a) = 0$ şi $y \in NBV([a,b])$ deoarece

$$y(b) = \int_a^b dy = \lim_{j\to\infty} \int_a^b dy_{n_j} = \lim_{j\to\infty} (y_{n_j}(b) - y_{n_j}(a)) = 1 - 0 = 1.$$

**Notă istorică.** *Eduard Helly* (1 iunie 1884, Viena, Austria - 28 noiembrie 1943 în Chicago, Illinois, SUA) a studiat la Universitatea din Viena unde obţine titlul de doctor în 1907 cu o teză despre ecuaţiile Fredholm sub îndrumarea lui Wirtinger şi Mertens. Merge apoi la Göttingen unde studiază cu Hilbert, Klein, Minkowski şi Runge. Se întoarce la Viena, unde se întreţine din diverse activităţi mărunte şi reuşeşte să demonstreze (în 1912, deci cu mulţi ani înaintea lui Hahn şi Banach), într-un caz particular, rezultatul cunoscut astăzi sub numele de teorema Hahn-Banach. În timpul primului război mondial este rănit pe front şi este luat prizonier de către armata rusă. Se întoarce la Viena abia în 1920 după mulţi ani petrecuţi în taberele de prizonieri din Siberia şi în spitale. Lucrează la o bancă, apoi ca agent de asigurări. În 1938, din motive de persecuţie rasială, emigrează în America. Aici, cu susţinerea lui Einstein, primeşte un post la Paterson Junior College din New Jersey. În 1941 se mută la Monmouth Junior College, New Jersey iar apoi este angajat ca matematician de către Signal Corps din Chicago. I se oferă un post la Illinois Institute of Technology, dar la scurt timp după aceasta moare în urma unui atac de inimă. Este celebru datorită unei teoreme publicată în 1923, care afirmă că dacă $n$ submulţimi convexe ale unui spaţiu euclidian de dimensiune $d$, cu $n > d + 1$, au proprietatea că orice colecţie de $d+1$ submulţimi au un punct comun, atunci există un punct comun tuturor celor $n$ submulţimi. În 1912 a publicat rezultatul amintit mai sus.

## ALTE REZULTATE

**1.** *$x_n^* \xrightarrow{s^*} x^*$ în $(K^n)^*$ dacă şi numai dacă $x_n^* \to x^*$ în $(K^n)^*$*

**2.** *Fie $1 < p \leq \infty$, iar $q$ conjugatul său. Atunci $x_n = (\zeta_j^n)_{j\geq 1} \xrightarrow{s^*} x = (\zeta_j)_{j\geq 1}$ în $l^q = (l^p)^*$ dacă şi numai dacă*

$$(\|x_n\|_q)_{n\geq 1}$$

*este mărginit şi*

$$\lim_{n\to\infty} \zeta_j^n = \zeta_j$$

*pentru orice $j \in \mathbb{N}^*$.*

**3.** *Fie $1 < p \leq \infty$, iar $q$ conjugatul său. Atunci $f_n \xrightarrow{s^*} f$ în $L^q([a,b]) = (L^p([a,b]))^*$ dacă şi numai dacă*

$$(\|f_n\|_q)_{n\geq 1}$$

*este mărginit şi*

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)dx = \int_E f(x)dx$$

*pentru orice mulţime măsurabilă $E \subseteq [a,b]$.*

**4.** *$f_n \xrightarrow{s^*} f$ în $NBV([a,b]) = (C([a,b]))^*$ dacă şi numai dacă*

$$(\overset{b}{\underset{a}{V}}(f_n))_{n\geq 1}$$

*este mărginit şi*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t) = f(t),$$

*pentru orice $t$ care este punct de continuitate pentru $f$.*

**5.** *Fie $f \in L^\infty([-\pi,\pi])$ şi $x_n$ şirul mediilor aritmetice ale sumelor parţiale ale seriei Fourier a lui $f$. Atunci $x_n \xrightarrow{s^*} f$ în $L^\infty([-\pi,\pi]) = (L^1([-\pi,\pi]))^*$.*

# CAPITOLUL VII

# PRINCIPIILE FUNDAMENTALE ALE ANALIZEI FUNCŢIONALE

## PRINCIPIUL MĂRGINIRII UNIFORME

Dacă $\mathcal{F}$ este o mulţime de funcţii între doua spaţii metrice, să spunem $X$ şi $Y$, atunci mărginirea uniformă a lui $\mathcal{F}$ este, în general, o condiţie mult mai puternică decît mărginirea punctuală. De exemplu, fie $X = [0,1]$, $Y = \mathbb{R}$ şi $\mathcal{F} = \{F_n\}_{n\geq 1}$ unde

$$F_n(t) = \begin{cases} n^2 t, & 0 \leq t \leq \frac{1}{n} \\ \frac{1}{t}, & \frac{1}{n} < t \leq 1 \end{cases}.$$

Atunci $F_n(0) = 0$ şi

$$|F_n(t)| \leq \frac{1}{t}$$

pentru $t \neq 0$ şi $n \in \mathbb{N}^*$.

Drept urmare $\mathcal{F}$ este mărginită punctual dar, deoarece

$$\sup_{t\in[0,1]} |F_n(t)| = n,$$

nu este mărginită uniform.

Teorema lui Arzela-Ascoli afirmă că, dacă $X$ este compact şi $\mathcal{F}$ este echicontinuă în orice punct din $X$, atunci $\mathcal{F}$ este mărginită uniform dacă şi numai dacă este mărginită punctual. Din nefericire ipotezele din acest rezultat referitoare la compacitate şi echicontinuitate sunt rare în cazul în care $X$ este un spaţiu vectorial normat. Din acest motiv avem nevoie de un alt set de condiţii din care să se deducă mărginirea uniformă din mărginirea punctuală a unei familii de aplicaţii liniare şi continue pe $X$.

**Teoremă (Principiul mărginirii uniforme al lui Banach-Steinhaus).** *Fie $X$ un spaţiu Banach, $Y$ un spaţiu vectorial normat şi $\mathcal{F}$ o familie de aplicaţii liniare şi continue de la $X$ la $Y$. Atunci, fie există o submulţime $D$ a lui $X$ densă în $X$ astfel ca, pentru orice $x \in D$, mulţimea $\{\|F(x)\|\}_{F\in\mathcal{F}}$ este nemărginită, fie $\{\|F\|\}_{F\in\mathcal{F}}$ este mărginită.*

**Remarcă.** *Din punct de vedere geometric teorema de mai sus are următoarea interpretare: fie orice $F \in \mathcal{F}$ duce închiderea bilei unitate a spaţiului Banach $X$ într-o bilă fixată din $Y$ cu centrul în $0$, fie există $x \in X$ astfel ca nici o bilă din $Y$ nu conţine mulţimea $\{F(x) \mid F \in \mathcal{F}\}$.*

**Remarcă.** *Teorema de mai sus furnizează condiţii pentru ca mărginirea punctuală să implice mărginirea uniformă, deoarece faptul că $\{\|F\|\}_{F\in\mathcal{F}}$ este mărginită echivalează cu mărginirea uniformă a mulţimii $\{\|F(x)\| \mid F \in \mathcal{F}\}$ pe bila unitate.*

**Notă istorică.** *Hugo Dyonizy Steinhaus*, născut în 1887 la Jaslo, în Austria (acum în Polonia), a studiat la Liov, München şi Göttingen, fiind influenţat din punct de vedere matematic de către Bernstein, Carathéodory, Courant, Herglotz, Hilbert (conducătorul său de doctorat), Klein, Koebe, Landau, Runge, Toeplitz şi Zermelo. Cea mai puternică influenţă asupra sa va veni însă de la Lebesgue, prin cele două cărţi fundamentale ale sale, anume "Leçons sur l'intégration et la recherché des fonctions primitives" şi "Leçons sur les séries trigonométriques". După ce îşi va satisface serviciul militar în legiunea polonă se mută la Cracovia. Împreună cu Nikodym şi Banach pune bazele Societăţii Poloneze de Matematică. În 1916 devine asistent, iar apoi, în 1920, profesor la Universitatea Jan Kazimierz. El este primul care, în 1923, publică în Fundamenta Mathematicae, un articol în care este prezentată o riguroasă teorie a probabilităţilor bazată pe teoria măsurii în cazul aruncării unei monezi. A fost de asemenea primul care, în 1925, a definit şi discutat conceptul de strategie în teoria jocurilor. Împreună cu Banach înfiinţeză o nouă revistă, Studia Mathematica. A scris, împreună cu Kaczmarz, în 1937 o importantă carte despre teoria seriilor. După perioada extrem de grea din timpul celui de al doilea război mondial, se mută la Universitatea din Wroclaw. Este primul care a construit un exemplu de serie trigonometrică divergentă în orice punct, dar ai cărei coeficienţi tind către zero. A murit în 1972.

**Remarcă.** *Condiţia ca $X$ să fie spaţiu Banach este esenţială.*

De exemplu, pentru $X = l_0$ şi $f_n \in X^*$, date de

$$f_n((\zeta_j)_{j\geq 1}) = \sum_{j=1}^{n} \zeta_j,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, să fixăm $x = (\zeta_j)_{j\geq 1} \in l_0$ şi să alegem $m$ astfel ca

$$\zeta_j = 0,$$

pentru orice $j \geq m$.

Atunci

$$|f_n((\zeta_j)_{j\geq 1})| \leq m\|(\zeta_j)_{j\geq 1}\|$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ şi orice $(\zeta_j)_{j\geq 1} \in l_0$.

Pe de altă parte, se verifică imediat că

$$\|f_n\| = n,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Astfel mulţimea $\{|f_n((\zeta_j)_{j\geq 1})|\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ este mărginită pentru orice $(\zeta_j)_{j\geq 1} \in l_0$, dar familia $\{\|f_n\|\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ este nemărginită.

**Corolar**. *Fie $X$ un spaţiu Banach, $Y$ un spaţiu vectorial normat şi $(F_n)_{n\geq 1}$ un şir de aplicaţii liniare şi continue din $X$ în $Y$ astfel ca şirul $(F_n(x))_{n\geq 1}$ converge pentru orice $x \in X$. Notînd $F(x) = \lim_{n\to\infty} F_n(x)$ avem:*

*a) $F$ este liniară şi continuă şi*

$$\|F\| \leq \varliminf_{n\to\infty} \|F_n\| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}^*} \|F_n\| < \infty.$$

*b) dacă $E$ este o submulţime total mărginită a lui $X$, atunci $(F_n(x))_{n\geq 1}$ converge uniform către $F(x)$ pentru orice $x \in E$.*

*Demonstraţie.* Omitem demonstraţia punctului a).

b) Considerînd eventual $F_n - F$ în loc de $F_n$ putem presupune că $F = 0$.

Cum $E$ este o submulţime total mărginită a lui $X$, pentru orice $\varepsilon > 0$ există $m \in \mathbb{N}^*$ şi $x_j \in E$, $j \in \{1, 2, ..., m\}$, astfel ca pentru orice $x \in E$ există $x_j$ astfel ca

$$\|x_j - x\| < \varepsilon.$$

Deoarece

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x_j) = 0,$$

pentru orice $j \in \{1, 2, ..., m\}$, există $n_0 \in \mathbb{N}^*$ astfel ca

$$\|F_n(x_j)\| < \varepsilon,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq n_0$ şi orice $j \in \{1, 2, ..., m\}$.

Fie acum $x \in E$ şi alegem $j \in \{1, 2, ..., m\}$ astfel ca

$$\|x_j - x\| < \varepsilon.$$

Atunci

$$\|F_n(x)\| \leq \|F_n(x - x_j)\| + \|F_n(x_j)\| \leq (\sup_{n\in\mathbb{N}^*} \|F_n\| + 1)\varepsilon,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq n_0$.

Deoarece $\sup_{n\in\mathbb{N}^*} \|F_n\| < \infty$ rezultă că $(F_n(x))_{n\geq 1}$ converge uniform către 0 pentru orice $x \in E$.

**Corolar**. *Fie $X$ un spaţiu vectorial normat şi $E \subseteq X$. Atunci $E$ este mărginită dacă şi numai dacă $x^*(E)$ este mărginită pentru orice $x^* \in X^*$.*

*Demonstrație.* Fie $E \subseteq X$ mărginită. Atunci există $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel ca

$$\|x\| \leq \alpha$$

pentru orice $x \in E$.

Pentru $x^* \in X^*$ avem

$$\|x^*(x)\| \leq \|x^*\| \, \|x\| \leq \alpha \, \|x^*\|$$

pentru orice $x \in E$, deci $x^*(E)$ este mărginită.

Reciproc, să presupunem că $x^*(E)$ este mărginită, pentru orice $x^* \in X^*$.

Pentru $x \in E$ fixat să considerăm $F_x : X^* \to K$ dată de

$$F_x(x^*) = x^*(x),$$

pentru orice $x^* \in X^*$.

Evident $F_x$ este liniară şi mai mult, deoarece,

$$|F_x(x^*)| = |x^*(x)| \leq \|x^*\| \, \|x\|,$$

pentru orice $x^* \in X^*$, deducem că $F_x$ este continuă şi $\|F_x\| \leq \|x\|$. Dar se cunoaşte că există $x^* \in X^*$ cu $\|x^*\| = 1$ şi $x^*(x) = \|x\|$. Acest lucru implică

$$\|F_x\| = \|x\|.$$

Să considerăm în continuare

$$\mathcal{F} = \{F_x\}_{x \in E}.$$

Pentru orice $x^* \in X^*$ avem

$$\sup_{F_x \in \mathcal{F}} |F_x(x^*)| = \sup_{x \in E} |x^*(x)| < \infty$$

din ipoteză.

Conform principiului mărginirii uniforme avem

$$\sup_{F_x \in \mathcal{F}} \|F_x\| = \sup_{x \in E} \|x\| < \infty,$$

adică $E$ este mărginită.

**Remarcă.** *Corolarul de mai sus are următoarea interpretare geometrică: fie $E \subseteq X$; dacă pentru orice hiperplan închis $H$ din $X$, există $\alpha > 0$ astfel că $E$ se află între hiperplanele $H - \alpha$ şi $H + \alpha$, atunci $E$ se află într-o bilă.*

**Corolar.** *Fie $X$ şi $Y$ spaţii vectoriale normate şi $F : X \to Y$ o aplicaţie liniară. Atunci $F$ este continuă dacă şi numai dacă $y^* \circ F \in X^*$ pentru orice $y^* \in Y^*$.*

*Demonstraţie.* O aplicaţie liniară $F : X \to Y$ este continuă dacă şi numai dacă mulţimea

$$E = \{F(x) \in Y \mid x \in X, \ \|x\| < 1\}$$

este mărginită în $Y$, dacă şi numai dacă mulţimea

$$y^*(E) = \{(y^* \circ F)(x) \in Y \mid x \in X, \ \|x\| < 1\}$$

este mărginită în $K$, pentru orice $y^* \in Y^*$, dacă şi numai dacă

$$y^* \circ F \in X^*,$$

pentru orice $y^* \in Y^*$.

## APLICAŢII ALE PRINCIPIULUI MĂRGINIRII UNIFORME

**Definiţie.** *Fie $X$ un spaţiu vectorial normat peste $\mathbb{C}$ şi $D$ o mulţime deschisă din $\mathbb{C}$. O funcţie $F : D \to X$ se numeşte analitică pe $D$ dacă pentru orice $z_0 \in D$ există*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0}.$$

**Teoremă (Dunford, 1938).** *Fie $X$ un spaţiu Banach peste $\mathbb{C}$, $D$ o mulţime deschisă din $\mathbb{C}$ şi o funcţie $F : D \to X$. Atunci $F$ este analitică pe $D$ dacă şi numai dacă $x^* \circ F$ este analitică pe $D$ pentru orice $x^* \in X^*$.*

*Demonstraţie.* Dacă $F$ este analitică pe $D$, atunci continuitatea lui $x^* \in X^*$ implică că $x^* \circ F$ este analitică pe $D$, pentru orice $x^* \in X^*$.

Reciproc, presupunem că $x^* \circ F$ este analitică pe $D$, pentru orice $x^* \in X^*$ şi fie $z_0 \in D$.

Deoarece $X$ este complet, este suficient să arătăm că

$$\lim_{z, w \to z_0} G(z, w) = 0,$$

unde

$$G(z, w) = \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} - \frac{F(w) - F(z_0)}{w - z_0}.$$

Deoarece $D$ este deschisă, există $r > 0$, astfel ca

$$D_r(z_0) \subseteq D.$$

Fie $\gamma : [0,1] \to D$ dat de

$$\gamma(t) = z_0 + re^{2\pi i t}.$$

Fie $x^* \in X^*$. Deoarece $x^* \circ F$ este analitică pe $D$, avem în virtutea teoremei lui Cauchy

$$(x^* \circ F)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{(x^* \circ F)(s)}{s - z} ds,$$

pentru orice $z$ astfel ca $0 < |z - z_0| < r$.

Formulele similare pentru $(x^* \circ F)(z_0)$ şi $(x^* \circ F)(w)$ arată că

$$(x^* \circ G)(z, w) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{(x^* \circ F)(s)(z - w)}{(s - z)(s - w)(s - z_0)} ds,$$

pentru $0 < |z - z_0| < r$ şi $0 < |w - z_0| < r$.

Dar $x^* \circ F$ este continuă, deci mărginită, pe $\gamma$.

Drept urmare, pentru $E = \{F(s) \mid s \in \gamma\}$ avem că $x^*(E)$ este mărginită pentru orice $x^* \in X^*$, deci $E$ este mărginită.

Fie $\alpha > 0$, astfel ca

$$\|F(s)\| \leq \alpha$$

pentru orice $s \in \gamma$.

Dacă considerăm $z, w \in \mathbb{C}$ astfel ca $|z - z_0| < \frac{r}{2}$ şi $|w - z_0| < \frac{r}{2}$, atunci $|s - z| > \frac{r}{2}$ şi $|s - w| > \frac{r}{2}$, pentru orice $s \in \gamma$.

Aşadar avem

$$|x^*(G(z, w))| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{\|x^*\| \, \alpha \, |z - w|}{\frac{r}{2}\frac{r}{2}r} 2\pi r = \frac{4\alpha \, |z - w| \, \|x^*\|}{r^2}.$$

Pentru $z, w \in \mathbb{C}$ cu $|z - z_0| < \frac{r}{2}$ şi $|w - z_0| < \frac{r}{2}$, există $x^* \in X^*$, astfel ca

$$x^*(G(z, w)) = \|G(z, w)\|$$

şi

$$\|x^*\| = 1.$$

Folosind acest $x^*$ în inegalitatea precedentă, găsim

$$\|G(z, w)\| \leq \frac{4\alpha \, |z - w|}{r^2}.$$

Deoarece $\alpha$ şi $r$ sunt constante, avem

$$\lim_{z, w \to z_0} G(z, w) = 0.$$

Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă. Deoarece, în general, este dificil să se calculeze exact $\int_a^b f(x)dx$, în practică, se folosesc diverse aproximări ale acestei integrale. Aproximări primitive precum $\frac{(b-a)(f(a)+f(b))}{2}$ (metoda trapezului) sau $\frac{(b-a)(f(a)+\frac{4f(a+b)}{2}+f(b))}{6}$ (metoda lui Simpson) sunt utile în unele situaţii. S-au considerat însă şi alte şiruri de aproximare pentru $\int_a^b f(x)dx$.

Menţionăm cîteva dintre ele: pentru $n \in \mathbb{N}^*$ şi $m \in \mathbb{N}$, $0 \leq m \leq n$ fie

$$t_{m,n} = a + \frac{m(b-a)}{n}.$$

**Formula trapezului compusă:**

$$T_n(f) = \frac{(b-a)}{n}\left(\frac{f(t_{n,0})}{2} + f(t_{n,1}) + ... + f(t_{n,n-1}) + \frac{f(t_{n,n})}{2}\right).$$

**Formula lui Simpson compusă:**

$$S_{2n}(f) = \frac{(b-a)}{6n}[(f(t_{2n,0}) + 4f(t_{2n,1}) + f(t_{2n,3}) + ... + f(t_{2n,2n-1}))$$
$$+ 2(f(t_{2n,2}) + f(t_{2n,4}) + ... + f(t_{2n,2n-2}) + f(t_{2n,2n}))].$$

**Notă istorică.** *Thomas Simpson*, născut la Market Bosworth, Leicestershire, Anglia, în 1710, este cunoscut datorită metodei sale de integrare numerică. Prima sa slujbă a fost de ţesător, perioadă în care scria cărţi şi oferea lecţii private de matematică. A studiat de asemenea teoria probabilităţilor, iar în 1740 scrie "The Nature and Laws of Chance". A scris de asemenea "The Doctrine and Application of Fluxions" (1750). În 1754 devine editor al Ladies Diary. Moare în 1761.

**Formula lui Newton-Cotes:**

$$N_n(f) = \frac{(b-a)}{n}\sum_{m=0}^{n} c_{m,n}f(t_{n,m}),$$

unde

$$c_{m,n} = \frac{(-1)^{n-m}}{m!(n-m)!}\int_0^n t(t-1)...(t-m+1)(t-m-1)...(t-n)dt.$$

**Notă istorică.** *Isaac Newton*, fiul unui fermier bogat dar complet needucat, s-a născut în 1643, la Lincolnshire, Anglia. Frecventează Free Grammar School din Gratham. Din 1661 frecventează cursurile de la Trinity College, Cambridge. Interesul lui Newton pentru matematică este stîrnit în 1663, an în care, cumpărînd o carte de astronomie, nu o poate înţelege datorită slabei pregătiri matematice. Datorită unei epidemii, în 1665, se întoarce la Lincolnshire, unde, într-o perioadă de doi ani pune bazele noilor sale idei din matematică, fizică, optică şi astronomie. În 1669 i se oferă postul de Lucasian Profesor, lăsat liber de către Barrow. A stabilit că, în contradicţie cu ceea ce se credea pînă atunci, lumina nu este formată dintr-o singură entitate de bază, ci este un mixaj de diverse tipuri de raze. Publică aceste concluzii, în 1672, în "Philosophical Transactions of the Royal Society". În 1687 scrie "Philosophiae naturalis principia mathematica", recunoscută ca fiind cea mai importantă carte ştiinţifică scrisă vreodată şi care-l propulsează în postura de lider internaţional în cercetarea ştiinţifică. În 1701 preia o funcţie guvernamentală la Londra. Regina Anne îi acordă în 1705 titlul de Sir. A murit în 1727.

**Notă istorică.** *Roger Cotes* s-a născut în 1682, la Burbage, Anglia. Studiază la Trinity College, Cambridge. La 26 de ani devine profesor de astronomie si filozofie experimentală. Între 1709 şi 1713 Cotes se ocupă cu publicarea celei de a doua ediţii a operei "Principia" a lui Newton. A publicat un singur articol, intitulat "Logometria", dar a descoperit o teoremă importantă despre rădăcina de ordin $n$ a unităţii, a anticipat metoda celor mai mici pătrate şi a descoperit o metodă de a integra fracţiile raţionale cu numitorul binomial. A murit în 1716, la Cambridge.

**Formula lui Gauss:**

$$G_n(f) = (b-a)\sum_{m=1}^{n} d_m f(\frac{(b-a)}{2}t_m + \frac{b+a}{2}),$$

unde $t_1$, $t_2$, ..., $t_n$ sunt rădăcinile polinomului Legendre de ordin $n$, anume

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n$$

şi

$$d_m = \frac{1}{(1-t_m^2)(P_n'(t_m))^2},$$

pentru orice $m \in \{1, 2, ...n\}$.

**Notă istorică.** *Johann Carl Friedrich Gauss* s-a născut la Brunswick, Germania, în aprilie 1777. Încă de la 7 ani i-a uimit pe dascălii săi cu abilităţile sale matematice. În 1888 intră la gimnaziu iar din 1792, cu sprijinul material al ducelui de Brunswick-Wolfenbüttel, urmează Brunswick Collegium Carolinum. În 1795 merge la Universitatea din Göttingen unde devine prieten cu Farkas

Bolyai, prietenie ce va dura peste ani. Ducele de Brunswick continuă să-l sprijine material în decursul pregătirii tezei sale de doctorat sub îndrumarea lui Pfaff. În 1801 publică carte "Disquisitiones Arithmeticae". În 1807 devine directorul observatorului astronomic din Göttingen iar în 1809 publică o a doua carte, intitulată "Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis Solemambientum". Contribuţiile lui Gauss la astronomia teoretică iau sfîrşit în 1817 deşi va face observaţii astronomice pînă la vîrsta de 70 de ani. A mai publicat "Disquisitiones generales circa seriem infinitam", "Methodus nova integralium valores per approximationem inviendi", "Bestimmung der Genauigkeit der Beobachtungen", "Theoria attractionis corporum sphaeroidicorum ellipticorum homogeneorum methodus nova tractata", "Disquisitiones generales circa superficies curva", "Über ein neues allgemeines Grundgesetz der Mechanik" şi "Principia generalia theoriae figurae fluidorum in statu aequilibrii". I se oferă o poziţie la Universitatea din Berlin, pe care însă o refuză. În 1831 la Göttingen este numit fizicianul Wilhelm Weber, împreună cu care Gauss începe un studiu al magnetismului terestru, descoperă legea lui Kirchhoff şi construieşte o variantă primitivă a telegrafului. A murit în februarie 1855.

Este important de stabilit în ce condiţii aceste şiruri de aproximaţii converg către $\int_a^b f(x)dx$, pentru orice $f \in C([a,b])$.

Vom prezenta un criteriu care răspunde la problema de mai sus.

Pentru orice $m$, $n \in \mathbb{N}^*$ considerăm ponderile $k_{n,m} \in \mathbb{R}$ şi nodurile $t_{n,m} \in [a,b]$.

Presupunem că, dacă două noduri coincid, atunci şi ponderile corespunzătoare coincid.

Fie $X = C([a,b])$ şi $F_n : X \to \mathbb{R}$ dată de

$$F_n(f) = \sum_{m=1}^{p_n} k_{n,m} f(t_{n,m}),$$

unde $f \in X$ şi $p_n \in \mathbb{N}^*$.

Atunci $(F_n)_{n\geq 1}$ se numeşte un *şir de formule cuadratice.*

Dorim să vedem în ce condiţii

$$\lim_{n\to\infty} F_n(f) = \int_a^b f(x)dx \stackrel{def}{=} F(f),$$

pentru orice $f \in X$.

Evident $F$ şi $F_n$ sunt liniare şi

$$\|F\| = b - a.$$

*Afirmaţie.*

$$\|F_n\| = \sum_{m=1}^{p_n} |k_{n,m}|,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Într-adevăr, pentru $f \in X$ avem

$$|F_n(f)| \leq \sum_{m=1}^{p_n} |k_{n,m}| \, \|f\|.$$

Pe de altă parte fie $f_0 \in X$ dată de

$$f_0(t_{n,m}) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } k_{n,m} = 0 \\ \frac{k_{n,m}}{|k_{n,m}|}, & \text{dacă } k_{n,m} \neq 0 \end{cases},$$

iar între noduri funcţia este liniară.

Atunci

$$\|f_0\| \leq 1$$

şi

$$F_n(f_0) = \sum_{m=1}^{p_n} |k_{n,m}|$$

ceea ce încheie demostraţia afirmaţiei.

Înainte de a prezenta rezultatul principal al acestei secţiuni, anume teorema lui Polya, vom demonstra următoarea:

**Teoremă.** *Fie $X$ un spaţiu vectorial normat şi $Y$ un spaţiu Banach.*

*a) Fie $X_0$ un subspaţiu dens al lui $X$ şi $F_0 \in L(X_0, Y)$. Atunci există o unică aplicaţie $F \in L(X, Y)$ astfel ca*

$$F_{|X_0} = F_0.$$

*Mai mult*

$$\|F\| = \|F_0\|.$$

*b) Fie $E$ o submulţime a lui $X$ astfel ca $spanE$ este dens în $X$ şi $(F_n)_{n\geq 1}$ un şir de elemente din $L(X, Y)$ pentru care există $\alpha > 0$ astfel ca*

$$\|F_n\| \leq \alpha,$$

*pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.*

*Dacă, pentru orice $x \in E$, $(F_n(x))_{n\geq 1}$ converge, atunci există $F \in L(X,Y)$ astfel ca*

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x),$$

*pentru orice $x \in X$.*

*Demonstraţie.* a) Fie $x \in X$. Atunci există un şir $(x_n)_{n\geq 1}$ din $X_0$ astfel ca $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Deoarece pentru orice $m, n \in \mathbb{N}^*$ avem

$$\|F_0(x_n) - F_0(x_m)\| \leq \|F_0\| \, \|x_n - x_m\|,$$

deducem că şirul $(F_0(x_n))_{n\geq 1}$ este Cauchy.

Cum $Y$ este spaţiu Banach, $(F_0(x_n))_{n\geq 1}$ este convergent.

Fie

$$\lim_{n\to\infty} F_0(x_n) = y.$$

Definim $F : X \to Y$ prin

$$F(x) = y.$$

Se verifică uşor că $F$ este bine definită, liniară şi

$$\|F_0\| = \|F\|.$$

Unicitatea lui $F$ decurge din densitatea lui $X_0$ în $X$ şi din continuitatea lui $F$.

b) Fie $X_0 = span\{E\}$.

Deoarece, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $F_n$ este liniară, $(F_n(x))_{n\geq 1}$ converge pentru orice $x_0 \in X_0$.

Fie

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x_0) = F_0(x_0).$$

Deoarece

$$\|F_0(x_0)\| = \lim_{n\to\infty} \|F_n(x_0)\| \leq \lim_{n\to\infty} \|F_n\| \, \|x_0\| \leq \alpha \, \|x_0\|,$$

pentru orice $x_0 \in X_0$, rezultă că $F_0 \in L(X_0, Y)$.

Folosind a), găsim $F \in L(X,Y)$ astfel ca

$$F_{|X_0} = F_0.$$

Fie acum $x \in X$ şi $\varepsilon > 0$.

Alegem $x_0 \in X_0$ astfel ca

$$\|x - x_0\| < \varepsilon$$

şi $n_0 \in \mathbb{N}^*$, astfel ca pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq n_0$ să avem

$$\|F_n(x_0) - F(x_0)\| < \varepsilon.$$

Atunci, pentru $n \geq n_0$ avem

$$\|F_n(x) - F(x)\| \leq$$

$$\leq \|F_n(x) - F_n(x_0)\| + \|F_n(x_0) - F_n(x_0)\| + \|F(x_0) - F(x)\| \leq$$

$$\leq \|F_n\| \, \|x - x_0\| + \|F_n(x_0) - F_n(x_0)\| + \|F\| \, \|x - x_0\| \leq$$

$$\leq \alpha\varepsilon + \varepsilon + \|F\| \, \varepsilon = (\alpha + 1 + \|F\|)\varepsilon,$$

fapt care arată că

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x),$$

pentru orice $x \in X$.

**Teoremă (Polya, 1933).** *Fie $X = C([a, b])$ şi $(F_n)_{n\geq 1}$ un şir de formule cuadratice.*

*Dacă $F(f) = \int_a^b f(x)dx$, atunci*

$$\lim_{n\to\infty} F_n(f) = F(f),$$

*pentru orice $f \in X$, dacă şi numai dacă*

*a)*

$$\lim_{n\to\infty} F_n(f_j) = F(f_j),$$

*pentru orice $j \in \mathbb{N}$, unde $f_j(x) = x^j$, şi*

*b)*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}^*} \sum_{m=1}^{p_n} |k_{n,m}| < \infty.$$

*Demonstraţie.* Dacă $\lim_{n\to\infty} F_n(f) = F(f)$, pentru orice $f \in X$, atunci a) este evident satisfăcută.

De asemenea, datorită faptului că $\|F_n\| = \sum_{m=1}^{p_n} |k_{n,m}|$ şi unui corolar de mai sus, b) este satisfăcută.

Reciproc, presupunem că a) şi b) sunt satisfăcute.

Teorema lui Weierstrass ne asigură că spaţiul generat de $\{f_0, f_1, ..., f_n, ...\}$ este dens în $X$.

Drept urmare $\lim_{n\to\infty} F_n(f) = F(f)$ pentru orice $f \in X$, avînd în vedere teorema precedentă.

**Notă istorică**. *George Pólya* s-a născut la Budapesta, în 1887. Iniţial s-a înscris la Universitatea din Budapesta ca să studieze dreptul. Se plictiseşte şi se hotărăşte să studieze lingvistica. Pentru a înţelege filozofia, a studiat matematica. Primeşte un doctorat în matematici în 1912. În 1913 merge la Göttingen, unde întîlneşte pe Hilbert şi pe Weyl, iar în 1914 la Zürich. În 1924 se află în Anglia unde lucrează împreună cu Hardy şi Littlewood la cartea, publicată în 1934, despre inegalităţi. A publicat articole despre serii, teoria numerelor, combinatorică, astronomie, probabilităţi şi funcţii integrale. A emigrat în SUA unde după o perioadă de doi ani petrecută la Brown University se mută la Stanford. A murit în 1985.

**Remarcă**. *Dacă toate ponderile $k_{n,m}$ sunt pozitive, condiţia b) de mai sus este de prisos, căci*

$$\sum_{m=1}^{p_n} |k_{n,m}| = \sum_{m=1}^{p_n} k_{n,m} = F_n(1) \overset{n\to\infty}{\to} F(1),$$

*conform condiţiei a), deci*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}^*} \sum_{m=1}^{p_n} |k_{n,m}| < \infty.$$

*Acesta este spre exemplu cazul cu formula lui Gauss.*

*Mai mult, în acest caz, se poate arăta că*

$$F_n(f_j) = F(f_j)$$

*pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ astfel ca $j \le 2n-1$, deci*

$$\lim_{n\to\infty} F_n(f) = \int_a^b f(x)dx,$$

*pentru orice $f \in C([a,b])$.*

**Remarcă**. *În cazul formulelor lui Newton-Cotes, ponderile sunt mixte, iar Polya a arătat că există o funcţie continuă pentru care nu avem*

$$\lim_{n\to\infty} F_n(f) = \int_a^b f(x)dx.$$

*În cazul formulelor compuse pentru trapez şi Simpson este adevărat că*

$$\lim_{n\to\infty} F_n(f) = \int_a^b f(x)dx$$

*pentru orice* $f \in C([a,b])$.

## DIVERGENŢA SERIILOR FOURIER PENTRU FUNCŢII CONTINUE

**Teoremă.** *Fie* $X = \{f \in C([-\pi,\pi]) \mid f(\pi) = f(-\pi)\}$. *Atunci există o submulţime densă* $D$ *în* $X$, *astfel ca, pentru orice* $f \in D$, *şirul sumelor parţiale în* 0 *pentru seria Fourier a lui* $f$ *diverge.*

*Demonstraţie.* Pentru $m \in \mathbb{N}$ şi $f \in X$, fie $F_m(f)$ valoarea în zero a sumei parţiale de ordin $m$ a seriei Fourier a funcţiei $f$.

Atunci

$$F_m(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)D_m(x)dx,$$

unde $D_m$ este nucleul Dirichlet de ordin $m$.

Evident $F_m$ este o funcţională liniară pe $X$.

Vom arăta că

$$\|F_m\| = \frac{\|D_m\|_1}{2\pi},$$

unde $\|.\|_1$ reprezintă norma din $L^1([-\pi,\pi])$.

Într-adevăr,

$$|F_m(f)| \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\,|D_m(x)|\,dx \le \frac{1}{2\pi}\,\|f\|\,\|D_m\|_1$$

pentru orice $f \in X$.

Pe de altă parte, fie mulţimea închisă

$$E = \{x \in [-\pi,\pi] \mid D_m(x) \ge 0\},$$

şi, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f_n(x) = \frac{1 - nd(x,E)}{1 + nd(x,E)}$$

pentru $x \in [-\pi,\pi]$.

Atunci

$$\|f_n\| \le 1,$$

$$f_n(x) = 1$$

pentru orice $x \in E$, şi

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = -1$$

pentru orice $x \notin E$.

Atunci, conform teoremei de convergenţă dominată,

$$\lim_{n\to\infty} F_m(f_n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_m(x)|\,dx.$$

Drept urmare

$$\|F_m\| = \frac{\|D_m\|_1}{2\pi}.$$

Dar

$$\lim_{m\to\infty} \|D_m\|_1 = \infty,$$

deci

$$\sup_{m\in\mathbb{N}} \|F_m\| = \infty.$$

Prin urmare există o mulţime densă $D$ în $X$, astfel ca, pentru orice $f \in D$, avem

$$\sup_{m\in\mathbb{N}} |F_m(f)| = \infty,$$

adică pentru orice $f \in D$, şirul sumelor parţiale în 0 pentru seria Fourier a lui $f$ diverge.

**Remarcă**. *Discuţia de mai sus arată forţa metodelor de analiză funcţională în tratarea problemelor de analiză clasică. Totuşi trebuie menţionat că aceste metode nu sunt constructive şi că ele nu produc exemple concrete.* De exemplu, discuţia de mai sus nu dă nici o indicaţie despre cum se găseşte o funcţie continuă $2\pi$-periodică, a cărei serie Fourier este divergentă într-un punct.

Astfel de exemple se cunoşteau de mult timp, spre exemplu pentru $m, n \in \mathbb{N}^*$ şi $t \in [-\pi, \pi]$ fie

$$Q(m,n,x) = \sin mt \sum_{j=1}^{n} \frac{\sin jx}{j}$$

şi

$$f(x) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{Q(m_p, n_p, x)}{p^2},$$

unde $\frac{m_p}{2} = n_p = 2^{p^2}$.

Atunci $f \in C([-\pi, \pi])$, $f(-\pi) = f(\pi)$, dar seria Fourier a lui $f$ în 0 diverge.

Precizăm un alt rezultat datorat lui Pal(1914) şi Bohr (1935): *Dacă $f \in C([-\pi, \pi])$ şi $f(-\pi) = f(\pi)$, atunci există un homeomorfism $h : [-\pi, \pi] \to [-\pi, \pi]$ astfel ca seria Fourier a lui $f \circ h$ să fie uniform convergentă pe $[-\pi, \pi]$.*

## METODE DE SUMARE

Deoarece serii divergente apar în multe contexte, este de dorit să avem o definiţie mult mai generală pentru suma unei serii. Spre exemplu, chiar dacă seria Fourier a unei funcţii continue periodică de perioadă $2\pi$ este divergentă, am văzut că şirul mediilor aritmetice ale sumelor parţiale ale seriei Fourier ale funcţiei $f$ converge uniform pe $[-\pi, \pi]$. Într-o astfel de situaţie am dori să spunem că $f$ este suma generalizată a seriei Fourier a lui $f$.

**Definiţie**. *Fie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ o serie formală, unde $a_n$ sunt date, şi să considerăm*

$$S_m = a_1 + a_2 + \ldots + a_m$$

*şirul sumelor parţiale.*

*Să considerăm o matrice infinită $M = (k_{n,m})_{m,n \in \mathbb{N}^*}$.*

*Dacă pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, seria $\sum\limits_{m=1}^{\infty} k_{n,m} a_n$ converge către $t_n$ şi $\lim\limits_{n \to \infty} t_n = t$, atunci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ se numeşte sumabilă prin metoda $M$, iar $t$ se numeşte suma ei generalizată.*

**Remarcă**. *Metoda uzuală de sumare corespunde matricii unitate, în timp ce sumarea prin medii aritmetice a sumelor parţiale corespunde matricii*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \ldots \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & & \end{pmatrix}$$

Aici $k_{n,m} = \frac{1}{n}$, pentru $m \leq n$, şi $k_{n,m} = 0$, pentru $m > n$, deci

$$t_n = \frac{\sum\limits_{m=1}^{n} S_m}{n},$$

adică media aritmetică a primelor $n$ sume parţiale $S_1$, $S_2$, ..., $S_n$.
Aceasta este cunoscută sub numele de metoda de sumare a lui Cesaro.

**Definiţie**. *O metodă de sumare $M$ se numeşte permanentă dacă orice serie convergentă este sumabilă prin $M$ şi dacă suma generalizată coincide cu suma uzuală. Altfel spus o metodă de sumare $M$ este permanentă dacă şi numai dacă transformarea dată de*

$$Mx = y,$$

*unde $x = (x_n)_{n\geq 1}$ şi $y = (y_n)_{n\geq 1}$, cu $y_n = \sum\limits_{m=1}^{\infty} k_{n,m}x_m$, duce $x \in c$ în $y \in c$ cu $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.*

Prezentăm în continuare un criteriu pentru ca aceasta să se întîmple.

**Teoremă (Toeplitz, 1911)**. *Pentru ca metoda de sumare $M = (k_{n,m})_{m,n\in\mathbb{N}^*}$ să fie permanentă este necesar şi suficient ca $M$ să satisfacă următoarele condiţii:*

*a)* $s = \sup\limits_{n\in N^*} \sum\limits_{m=1}^{\infty} |k_{n,m}| < \infty$.

*b)* $\lim\limits_{n\to\infty} k_{n,m} = 0$ *pentru orice* $m \in \mathbb{N}^*$.

*c)* $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{m=1}^{\infty} k_{n,m} = 1$.

*Demonstraţie.* $\Rightarrow$ Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ şi $x = (x_n)_{n\geq 1} \in c$, definim

$$f_n(x) = (Mx)_n = \sum_{m=1}^{\infty} k_{n,m}x_m.$$

Atunci $f_n$ este liniară şi

$$\|f_n\| = \sum_{m=1}^{\infty} |k_{n,m}|.$$

Pentru orice $x \in c$ avem

$$Mx = (f_1(x), f_2(x), ...) \in c,$$

deci $(f_n(x))_{n\geq 1}$ este convergent.
Drept urmare

$$s = \sup_{n\in\mathbb{N}^*} \|f_n\| < \infty,$$

adică condiţia a) este satisfăcută .

Pentru $m \in \mathbb{N}^*$ avem $e_m \in c$, deci $Me_m \in c$ şi

$$\lim_{n\to\infty} k_{n,m} = \lim_{n\to\infty} (Me_m)_n = \lim_{n\to\infty} e_m(n) = 0$$

ceea ce demonstrează b).

Deoarece $e = (1, 1, ....) \in c$, avem $Me \in c$ şi

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{\infty} k_{n,m} = \lim_{n\to\infty} (Me)_n = \lim_{n\to\infty} e(n) = 1,$$

ceea ce demonstrează c).

$\Longleftarrow$ Fie $x = (x_n)_{n\geq 1} \in c$.

Pentru $m \in \mathbb{N}^*$ avem

$$\sum_{m=1}^{\infty} |k_{n,m}x_m| \leq \sum_{m=1}^{\infty} |k_{n,m}| \, \|x\| \leq s \, \|x\| .$$

Deoarece, din a), $s < \infty$, $\sum\limits_{m=1}^{\infty} k_{n,m}x_m$ converge.

Fie $y_n = \sum\limits_{m=1}^{\infty} k_{n,m}x_m$ limita sa.

Avem

$$Mx = y = (y_n)_{n\geq 1}.$$

Vom arăta că $y \in c$ şi că $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Fie $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = k$ şi $e = (1, 1, ....) \in c$.

Pentru orice $\varepsilon > 0$ există $m_0$ astfel ca

$$\sup_{m\geq m_0} |x_m - k| < \varepsilon.$$

Avînd în vedere b) şi c), există $n_0 \in \mathbb{N}^*$, astfel ca pentru orice $n \geq n_0$

$$\sum_{m=1}^{m_0} |k_{n,m}| < \varepsilon$$

şi

$$\left|\sum_{m=1}^{\infty} k_{n,m} - 1\right| < \varepsilon.$$

Atunci

$$|y_n - k| = \left|\sum_{m=1}^{\infty} k_{n,m}x_m - k\right| \leq$$

$$\leq \left| \sum_{m=1}^{\infty} k_{n,m}(x_m - k) \right| + |k| \left| \sum_{m=1}^{\infty} k_{n,m} - 1 \right| \leq$$

$$\leq \left| \sum_{m=1}^{m_0} k_{n,m}(x_m - k) \right| + \left| \sum_{m=m_0+1}^{\infty} k_{n,m}(x_m - k) \right| + |k|\, \varepsilon \leq$$

$$\leq \|x - ke\|\, \varepsilon + s\varepsilon + |k|\, \varepsilon = (\|x - ke\|_{\infty} + s + |k|)\varepsilon.$$

Deci $y \in c$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = k = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

**Remarcă**. *Dacă intrările matricii $M$ sunt pozitive atunci, avînd în vedere c), condiţia a) este de prisos.*

**Notă istorică**. *Otto Toeplitz* s-a născut la Breslau, Germania (acum Wroclaw, Polonia) în 1881, unde a urmat gimnaziul şi universitatea. Obţine titlul de doctor în matematici în 1905, iar în 1906 merge la Göttingen unde se împrieteneşte cu Hellinger. În 1913 i se oferă un post la Universitatea din Kiel iar în 1928 este numit la universitatea din Bonn. Este concediat pe motive rasiale în 1935, iar în 1939 emigrează în Palestina, unde contribuie la fundarea Universităţii din Ierusalim. A murit în 1940. A dezvoltat o teorie generală a spaţiilor infinit dimensionale şi a criticat opera lui Banach ca fiind prea abstractă. A scris o excelentă carte de istoria matematicii "The Calculus: A Genetic Approach".

## ALTE REZULTATE

**1**. *Fie $X$ un spaţiu Banach şi $Y$ un spaţiu normat. Pentru $m, n \in \mathbb{N}^*$ fie $F_{m,n} \in L(X, Y)$.*

*Dacă pentru orice $m \in \mathbb{N}^*$ există $x_m \in X$ astfel ca*

$$\sup_{n \in N^*} \|F_{n,m}(x_m)\| = \infty,$$

*atunci există $x \in X$ astfel ca*

$$\sup_{n \in N^*} \|F_{n,m}(x)\| = \infty,$$

*pentru orice $m \in \mathbb{N}^*$.*

**2**. *Fie $X$, $Y$, $Z$ spaţii normate şi $F : X \times Y \to Z$ astfel ca, definind*

$$F_x(y) = F(x, y) = F^y(x),$$

*aplicaţiile $F_x$ şi $F^y$ sunt liniare, pentru orice $x \in X$ şi $y \in Y$. Dacă $X$ sau $Y$ este Banach şi orice $F_x$, $x \in X$, $F^y$, $y \in Y$ este continuă, atunci $F$ este continuă. În acest caz există $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel ca*

$$\|F(x,y)\| \leq \alpha \|x\| \|y\|,$$

*pentru orice $x \in X$, $y \in Y$.*

## TEOREMA GRAFICULUI ÎNCHIS

Dacă $(X, d_1)$ şi $(Y, d_2)$ sunt două spaţii metrice şi considerăm pe $X \times Y$ metrica dată de

$$d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = d_1(x_1,y_1) + d_2(x_2,y_2),$$

pentru orice $(x_1,y_1)$, $(x_2,y_2) \in X \times Y$, atunci graficul unei funcţii $F : X \to Y$ este închis (în $X \times Y$) dacă şi numai dacă pentru orice şir $(x_n)_{n\geq 1}$ din $X$, $x \in X$ şi $y \in Y$ astfel ca

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

şi

$$\lim_{n\to\infty} F(x_n) = y,$$

rezultă $F(x) = y$.

În particular, dacă $F$ este continuă, atunci graficul lui $F$ este închis.

Reciproca nu este adevărată, în general, de exemplu $F : X = \mathbb{R} \to Y = \mathbb{R}$, dată de

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{t}, & t \neq 0 \\ 0, & t = 0 \end{cases},$$

are graficul închis, dar nu este continuă.

**Teoremă (a graficului închis, Banach, 1932).** *Fie $X$ şi $Y$ spaţii Banach şi $F : X \to Y$ o aplicaţie liniară care are graficul închis. Atunci $F$ este continuă.*

**Corolar.** *Fie $X$ şi $Y$ spaţii Banach şi $F : X \to Y$ o aplicaţie liniară. Dacă graficul lui $F$ este închis şi $F$ este bijecţie, atunci $F$ este un homeomorfism.*

**Corolar.** *Fie $(X, \|\cdot\|_1)$ şi $(X, \|\cdot\|_2)$ spaţii Banach. Dacă există $\alpha > 0$ astfel ca*

$$\|x\|_1 \leq \alpha \|x\|_2,$$

*pentru orice $x \in X$, atunci există $\beta > 0$ astfel ca*

$$\|x\|_2 \leq \beta \|x\|_1 ,$$

*pentru orice $x \in X$.*

**Remarcă**. *Ipoteza de completitudine din teorema graficului închis sau din cele două corolarii nu poate fi omisă.*

Spre exemplu, pentru $X = C^1([0,1])$ şi $Y = C([0,1])$, aplicaţia $F : X \to Y$ dată de

$$F(f) = f',$$

pentru orice $f \in X$ este liniară, dar nu este continuă.
Totuşi $f$ are graficul închis.

Pe de altă parte, fie $X = C([0,1])$ cu normele $\|.\|_1$ şi $\|.\|_\infty$.
Evident

$$\|f\|_1 \leq \|f\|_\infty ,$$

pentru orice $f \in X$.
Totuși nu există $\beta \in \mathbb{R}$ astfel ca

$$\|f\|_\infty \leq \beta \|f\|_1$$

pentru orice $f \in X$, căci pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, considerînd

$$f_n(t) = \begin{cases} n - \frac{n^2 t}{2}, & 0 \leq t \leq \frac{2}{n} \\ 0, & \frac{2}{n} \leq t \leq 1 \end{cases},$$

avem $\|f_n\|_1 = 1$ şi $\|f_n\|_\infty = n$.
Acest fapt arată că $(C([0,1]), \|.\|_1)$ nu este spaţiu complet.

## APLICAŢII ALE TEOREMEI GRAFICULUI ÎNCHIS

**1**. *Fie $X = L^1([-\pi, \pi)$ înzestrat cu o normă $\|.\|$ astfel ca $(X, \|.\|)$ este spaţiu complet şi pentru orice $n \in \mathbb{Z}$ aplicaţiile liniare $F_n : X \to \mathbb{R}$ date de*

$$F_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt,$$

*pentru orice $f \in X$, sunt continue.*
*Atunci $\|.\|$ este echivalentă cu $\|.\|_1$ pe $L^1([-\pi, \pi)$.*

Într-adevăr, fie $X_1 = (L^1([-\pi,\pi]), \|.\|_1)$ şi să considerăm $Id : X_1 \to X$.
Vom arăta că $Id$ are graficul închis.
Fie $(f_n)_{n\geq 1}$ din $X_1$, $f \in X_1$ şi $g \in X$ astfel ca

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f$$

şi

$$\lim_{n\to\infty} Id(f_n) = g.$$

Atunci, pentru orice $m \in \mathbb{Z}$,

$$\lim_{n\to\infty} F_m(f_n) = F_m(f)$$

şi

$$\lim_{n\to\infty} F_m(f_n) = F_m(g).$$

Drept urmare

$$F_m(f) = F_m(g),$$

pentru orice $m \in \mathbb{Z}$, adică coeficienţii Fourier ai lui $f$ şi $g$ sunt egali, deci $f = g$.
Deoarece $Id$ este bijecţie, conform cu corolarul de mai sus, $Id$ este un homeomorfism liniar, adică cele două norme sunt echivalente.

**2**. Vom prezenta o condiţie suficientă pentru ca o aplicaţie liniară pe anumite spaţii Banach de şiruri să fie continuă.

Mai precis, *fie $X$ unul dintre spaţiile $l^p$, $1 \leq p \leq \infty$, $c$ sau $c_0$ cu normele cunoscute, şi $F : X \to X$ liniară.*
*Să considerăm $S : X \to X$, unde*

$$S(x_1, x_2, ..., x_n, ...) = (0, x_1, x_2, ..., x_n, ...).$$

*Atunci $F$ este continuă dacă şi numai dacă $FS = SF$.*

Într-adevăr, pentru $m, n \in \mathbb{N}^*$, definim $f_{n,m} : X \to K$

$$f_{n,m}(x_1, x_2, ..., x_n, ...) = x_n F(e_n)_m$$

pentru orice $x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...) \in X$.
Aplicaţiile $f_{n,m}$ sunt liniare şi continue, căci

$$|f_{n,m}(x_1, x_2, ..., x_n, ...)| \leq \|(x_n)_{n\geq 1}\| \, \|F(e_n)\|.$$

Vom arăta că $F$ are graficul închis.
Fie în acest scop $x_n = (x_j^n)_{j\geq 1} \in X$ şi $y = (y_n)_{n\geq 1} \in X$ astfel ca

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

şi

$$\lim_{n\to\infty} F(x_n) = y.$$

Vom arăta că $y = 0$.

Pentru $m$ fixat şi $n \in \mathbb{N}^*$ avem

$$x_n = \sum_{j=1}^{m} x_j^n e_j + S^m(z_{n,m}),$$

unde $z_{n,m} \in X$ este definit prin

$$(z_{n,m})_{j\geq 1} = x_{m+j}^n,$$

pentru orice $j \in \mathbb{N}^*$.

Deoarece $SF = FS$ avem $FS^m = S^m F$, pentru orice $m \in \mathbb{N}^*$.

Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ avem

$$F(x_n)_m = (\sum_{j=1}^{m} x_j^n F(e_j) + S^m(F(z_{n,m}))_m =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} f_{j,m}(x_n) + 0,$$

deoarece operatorul $S^m$ introduce zerouri pe primele $m$ poziţii.

Deoarece $f_{j,m}$ este continuă şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, găsim că

$$\lim_{n\to\infty} F(x_n)_m = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{m} f_{j,m}(x_n) = \sum_{j=1}^{m} f_{j,m}(0) = 0.$$

Pe de altă parte, deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} F(x_n) = y$, avem

$$\lim_{n\to\infty} F(x_n)_m = y_m.$$

Prin urmare

$$y_m = 0,$$

pentru orice $m \in \mathbb{N}^*$, adică $y = 0$.

Aşadar $F$ are graficul închis, deci, întrucît $X$ este spaţiu Banach, conform cu teorema graficului închis, $F$ este continuă.

**3. Definiţie**. *Fie $T$ o mulţime iar $X$ un spaţiu vectorial de funcţii ce au domeniul $T$ şi codomeniul $K$. Dacă $\|.\|$ este o normă pe $X$ astfel ca $(X, \|.\|)$ este complet şi pentru orice $t \in T$, aplicaţia liniară $F_t : X \to K$, dată de*

$$F_t(f) = f(t),$$

*pentru orice $f \in X$, este continuă, atunci $(X, \|.\|)$ se numeşte un spaţiu Banach de funcţii.*

**Remarcă.** *În cazul în care $T$ este un spaţiu metric, $\mathcal{M}(T)$ şi $\mathcal{B}(T)$, cu norma cunoscută, sunt spaţii Banach de funcţii.*

**Teoremă.** *Fie $X$ şi $Y$ spaţii Banach de funcţii şi $f_0 : T \to K$ astfel ca $f_0 f \in Y$ pentru orice $f \in X$.*

*Considerăm aplicaţia $F : X \to Y$ dată de $F(f) = f_0 f$.*

*Atunci $F$ este continuă.*

*Demonstraţie.* Evident $F$ este liniară.

Arătăm că $F$ are graficul închis.

În acest scop, fie $f_n \in X$ astfel ca

$$\lim_{n\to\infty} f_n = 0$$

şi

$$\lim_{n\to\infty} F(f_n) = f_0 f_n = y.$$

Deoarece $X$ şi $Y$ sunt spaţii Banach de funcţii, deducem că

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t) = f(t)$$

şi

$$\lim_{n\to\infty} f_0(t) f_n(t) = y(t),$$

pentru orice $t \in T$.

Deci

$$y(t) = f_0(t) f(t),$$

pentru orice $t \in T$, i.e. $y = f_0 f = F(f)$.

Teorema graficului închis ne asigură că $F$ este continuă.

### 4. Proiecţii pe subspaţii închise.

Fie $Y$ şi $Z$ subspaţii ale unui spaţiu vectorial $X$, astfel ca $X = Y + Z$ şi $Y \cap Z = \{0\}$.

Atunci orice $x \in X$ are o descompunere unică

$$x = y + z,$$

cu $y \in Y$ şi $z \in Z$.

Să considerăm aplicaţia $P : X \to X$, dată de $P(x) = y$.

Este imediat că $P$ este liniară,

$$P^2 = P,$$

$$\operatorname{Im} P = Y$$

şi

$$Ker(P) = Z.$$

Reciproc, dacă $P : X \to X$ este o aplicaţie liniară astfel ca $P^2 = P$, atunci

$$X = \operatorname{Im} P + Ker(P)$$

şi

$$\operatorname{Im} P \cap Ker(P) = \{0\}.$$

Dacă în plus $\|.\|$ este o normă pe $X$, pentru care $P$ este continuă, atunci $Ker(P)$ este evident închis.

De asemenea $\operatorname{Im} P$ este închis, căci $\operatorname{Im} P = Ker(Id_X - P)$.

Să presupunem că $X$ este un spaţiu Banach, iar $Y$ şi $Z$ sunt subspaţii închise ale lui $X$, astfel ca $X = Y + Z$ şi $Y \cap Z = \{0\}$.

Pentru $x \in X$, fie $P(x) = y$, unde $x = y + z$ cu $y \in Y$ şi $z \in Z$.

Vom arăta că $P$ este continuă.

Pentru aceasta este suficient să arătăm că $P$ are graficul închis.

Fie în acest scop $(x_n)_{n\geq 1}$, $x$ şi $y$ elemente din $X$ astfel ca

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

şi

$$\lim_{n\to\infty} P(x_n) = y.$$

Deoarece $x = y + (x - y)$, pentru a arăta că $P(x) = y$, este suficient să arătăm că $y \in Y$ şi $x - y \in Z$.

Dar

$$\lim_{n\to\infty} P(x_n) = y,$$

unde $P(x_n) \in \operatorname{Im}(P) = Y$ şi $Y$ este închis, deci $y \in Y$.

De asemenea

$$\lim_{n\to\infty} x_n - P(x_n) = x - y,$$

unde $x_n - P(x_n) \in Ker(P) = Z$ şi $Z$ este închis, deci $x - y \in Z$.

**Definiţie**. *Dacă $X$ este un spaţiu vectorial normat şi $P : X \to X$ liniară şi continuă satisface $P^2 = P$, atunci $P$ se numeşte proiecţie.*

**Remarcă**. *Am văzut că, dacă $X$ este un spaţiu Banach, atunci proiecţiile corespund descompunerilor lui $X$ de forma $X = Y + Z$, unde $Y$ şi $Z$ sunt subspaţii închise ale lui $X$ cu $Y \cap Z = \{0\}$.*

Se ridică următoarea problemă: *dat fiind un subspaţiu închis $Y$ al unui spaţiu vectorial normat $X$, există un subspaţiu închis $Z$ al lui $X$ astfel ca $X = Y + Z$ şi $Y \cap Z = \{0\}$?*

*În general răspunsul este negativ.*

*Este cunoscut că $c_0$ nu are complement în $l^\infty$ şi că $C([0,1])$ nu are complement în $\mathcal{B}([0,1])$.*

Avem însă:

**Propoziţie.** *Dacă $Y$ este un subspaţiu închis finit dimensional al unui spaţiu vectorial normat $X$, atunci există un subspaţiu închis $Z$ al lui $X$ astfel ca $X = Y + Z$ şi $Y \cap Z = \{0\}$.*

*Demonstraţie.* Fie $\{y_1, y_2, ..., y_n\}$ o bază a lui $Y$.

Atunci există $x_1^*, x_2^*, ..., x_n^* \in X^*$ astfel ca

$$x_j^*(y_i) = \begin{cases} 1 & \text{, dacă } i = j \\ 0 & \text{, dacă } i \neq j \end{cases}.$$

Fie $Z = \{x \in X \mid x_j^*(x) = 0, \text{ pentru orice } j \in \{1, 2, ..., n\}\}$.

Atunci $Z$ este închis şi $Y \cap Z = \{0\}$.

De asemenea, dacă $x \in X$, atunci

$$y = x_1^*(x)y_1 + x_2^*(x)y_2 + ... + x_n^*(x)y_n \in Y$$

şi

$$x - y \in Z.$$

Aşadar $X = Y + Z$.

## ALTE REZULTATE

**1.** *Fie $X, Y, Z$ spaţii Banach, $G : X \to Z$ şi $H : Y \to Z$ liniare şi continue. Presupunem că pentru orice $x \in X$, ecuaţia $G(x) = H(y)$ are o soluţie unică $y \in Y$. Atunci aplicaţia $F : X \to Y$, dată de $F(x) = y$, este linară şi continuă.*

**2.** *Fie $\|.\|$ o normă pe $C([a,b])$, astfel ca $(C([a,b]), \|.\|)$ este complet şi pentru orice $(f_n)_{n\geq 1}, f \in C([a,b])$ cu*

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0,$$

*rezultă*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t) = f(t),$$

*pentru orice* $t \in [a, b]$.

*Atunci* $\|.\|$ *este echivalentă cu* $\|.\|_\infty$.

**3**. *Fie* $\|.\|$ *o normă pe* $C^1([a,b])$, *astfel ca* $(C^1([a,b]), \|.\|)$ *este complet şi pentru orice* $(f_n)_{n\geq 1}, f \in C^1([a,b])$ *cu*

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0,$$

*rezultă*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(a) = f(a)$$

*şi*

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(t) = f'(t),$$

*pentru orice* $t \in [a, b]$.

*Atunci* $\|.\|$ *este echivalentă cu* $\|f\|_\infty + \left\|f'\right\|_\infty$.

*În particular* $\|f\| = |f(a)| + \left\|f'\right\|_\infty$ *este echivalentă cu* $\|f\|_\infty + \left\|f'\right\|_\infty$.

4. *Fie* $Y$ *şi* $Z$ *subspaţii închise ale unui spaţiu Banach* $X$ *astfel ca* $Y \cap Z = \{0\}$ *dar* $Y$ *nu este inclus în* $Z$.

*Atunci* $Y + Z$ *este închis dacă şi numai dacă*

$$\inf_{y\in Y, y\notin Z} \frac{d(y, Z)}{\|y\|} > 0.$$

## TEOREMA APLICAŢIEI DESCHISE

O funcţie continuă şi bijectivă între două spaţii metrice nu este în general deschisă. Rezultatul următor arată că acest lucru este imposibil dacă funcţia este liniară, iar domeniul şi codomeniul său sunt spaţii Banach.

**Teoremă (a aplicaţiei deschise, Banach, 1932)**. *Fie* $X$ *şi* $Y$ *spaţii Banach şi* $F : X \to Y$ *o aplicaţie liniară. Atunci* $F$ *este continuă şi deschisă dacă şi numai dacă* $F$ *este surjectivă şi are graficul închis.*

**Corolar**. *Fie* $X$ *şi* $Y$ *spaţii Banach şi* $F : X \to Y$ *o aplicaţie liniară şi continuă. Atunci* $F^{-1}$ *există şi este liniară şi continuă dacă şi numai dacă* $F$ *este bijectivă.*

**Remarcă**. *Ipotezele de completitudine asupra spaţiilor* $X$ *şi* $Y$ *în rezultatele de mai sus sunt esenţiale.*

De exemplu, pentru $X = \mathcal{C}^1([0,1])$ cu $\|f\|_1 = \|f\|_\infty + \left\|f'\right\|_\infty$, pentru orice $f \in \mathcal{C}^1([0,1])$, este spaţiu Banach, dar $Y = \mathcal{C}^1([0,1])$, cu $\|.\|_\infty$, nu este spaţiu Banach.

Aplicaţia $Id : X \to Y$, dată de $Id(f) = f$, pentru orice $f \in X$, este continuă, bijectivă dar nu este deschisă, deoarece $F^{-1}$ nu este continuă.

Pe de altă parte, fie $Y$ un spaţiu Banach arbitrar infinit dimensional şi să alegem $\{y_\alpha\}_{\alpha\in A}$ o bază a lui $Y$ cu, $\|y_\alpha\| = 1$, pentru orice $\alpha \in A$.

Fie $X$ mulţimea tuturor funcţiilor din $A$ în $K$ care, cu excepţia unei submulţimi finite a lui $A$, sunt nule în toate elementele lui $A$. Atunci $X$ cu adunarea şi înmulţirea cu scalari a funcţiilor este un spaţiu vectorial normat, cu norma dată de

$$\|f\| = \sum_{\alpha\in A} |f(\alpha)|.$$

Acest spaţiu vectorial normat nu este complet.

Într-adevăr, fie $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, ...\}$ o submulţime infinită a lui $A$. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ definim

$$f_n(\alpha) = \begin{cases} \frac{1}{2^j}, & \text{dacă } \alpha = \alpha_j \text{şi } j \leq n \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}.$$

Pentru $n \geq m$ avem

$$\|f_n - f_m\| = \sum_{j=m+1}^{n} \frac{1}{2^j},$$

de unde rezultă îndată că $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este şir Cauchy.

Acest şir nu este convergent deoarece, în caz contrar, există $f \in X$ astfel ca

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f,$$

adică

$$\lim_{n\to\infty} f_n(\alpha) = f(\alpha),$$

pentru orice $\alpha \in A$.

Dar pentru orice $j \in \mathbb{N}^*$ şi $n \geq j$ avem $f_n(\alpha_j) = \frac{1}{2^j}$ deci $f(\alpha_j) = \frac{1}{2^j} \neq 0$, de unde $f \notin X$.

Aşadar $X$ nu este Banach.

Fie $F : X \to Y$ dată de

$$F(f) = \sum_{\alpha\in A} f(\alpha) y_\alpha.$$

Evident $F$ este liniară şi continuă deoarece

$$\|F(f)\| \leq \sum_{\alpha\in A} |f(\alpha)| \, \|y_\alpha\| = \sum_{\alpha\in A} |f(\alpha)| = \|f\|$$

pentru orice $f \in X$.

$F$ este bijectivă dar nu este deschisă deoarece în caz contrar $F$ ar fi un homeomorfism liniar de la $X$ la $Y$, fapt care este fals, căci $X$ nu este Banach, iar $Y$ este Banach.

# APLICAŢII ALE TEOREMEI APLICAŢIEI DESCHISE

## SOLUŢII APROXIMATIVE PENTRU ECUAŢII DIFERENŢIALE

Să considerăm ecuaţia neomogenă de ordin $n$ cu coeficienţi variabili

$$a_n(t)x^{(n)}(t) + ... + a_0(t)x(t) = y(t),$$

cu $t \in [a,b]$, unde $a_j \in \mathcal{C}([a,b])$, pentru orice $j \in \{0,1,2,...,n\}$.

Fie $S$ mulţimea condiţiilor iniţiale sau a condiţiilor la frontieră (de exemplu, $x(a) = x^{(1)}(a) = ... = x^{(n)}(a) = 0$ sau $x(t_1) = x(t_2) = ... = x(t_n) = 0$, unde $a = t_1 < ... < t_n = b$), astfel ca, pentru orice $y \in \mathcal{C}([a,b])$, există o unică soluţie $x \in \mathcal{C}([a,b])$ care satisface ecuaţia de mai sus şi condiţiile $S$.

Adesea este posibil să se găsească soluţiile numai pentru anumite funcţii din $\mathcal{C}([a,b])$ (de exemplu pentru polinoame).

Fie deci $y \in \mathcal{C}([a,b])$ şi $(P_n)_{n\in N^*}$ un şir de polinoame astfel ca

$$\lim_{n\to\infty} P_n = y.$$

Se ridică următoarea întrebare: *dacă $x_n$ este soluţia ce corespunde lui $P_n$, iar $x$ este soluţia ce corespunde lui $y$, este adevărat că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$?*

*Răspunsul este da.*

Într-adevăr fie

$$X = \{x \in \mathcal{C}^n([a,b]) \mid x \text{ satisface condiţiile } S\}$$

cu

$$\|x\| = \sum_{m=0}^{n} \left\|x^{(m)}\right\|_\infty$$

şi $Y = \mathcal{C}([a,b])$ cu norma obişnuită.

$X$ şi $Y$ sunt spaţii Banach.

Fie $F : X \to Y$ dată de

$$F(x) = a_n x^{(n)} + \dots + a_0 x$$

pentru orice $x \in X$.

$F$ este liniară şi, datorită ipotezelor despre existenţa şi unicitatea soluţiilor, $F$ este bijecţie.

De asemenea $F$ este continuă, căci

$$\|F(x)\|_\infty \leq (\|a_n\|_\infty + \dots + \|a_0\|_\infty)\, \|x\|.$$

Atunci $F^{-1}$ este continuă, ceea ce încheie demonstraţia.

## RECIPROCA LEMEI LUI RIEMANN-LEBESGUE

Am văzut că, dacă $f \in L^1([-\pi, \pi])$, atunci $\lim\limits_{|n| \to \infty} \hat{f}(n) = 0$.

În cele ce urmează studiem problema inversă, anume, *dacă* $(y_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in K$ *are proprietatea că* $\lim\limits_{|n| \to \infty} y_n = 0$, *există* $f \in L^1([-\pi, \pi])$, *astfel ca* $\hat{f}(n) = y(n)$ *pentru orice* $n \in \mathbb{Z}$*?*

Fie $X = L^1([-\pi, \pi])$ şi $Y = \{(y_n)_{n \in \mathbb{Z}} \mid \lim\limits_{|n| \to \infty} y_n = 0\}$ înzestrat cu norma

$$\|(y_n)_{n \in \mathbb{Z}}\| = \sup_{n \in \mathbb{Z}} |y_n|.$$

Atunci $X$ şi $Y$ sunt spaţii Banach, iar aplicaţia $F : X \to Y$, dată de

$$F(f) = (\hat{f}(n))_{n \in \mathbb{Z}},$$

este liniară şi injectivă.

De asemenea $F$ este continuă, deoarece

$$\|F(f)\| = \sup_{n \in \mathbb{Z}} \left| \hat{f}(n) \right| \leq \left\| \hat{f} \right\|_1.$$

Dacă $F$ ar fi surjectivă, atunci $F^{-1}$ ar fi continuă. Dar dacă $(D_m)_{m \in \mathbb{Z}}$ este şirul nucleelor Dirichlet, atunci

$$F(D_m) = (\dots, 0, 1, 1, \dots, 1, 0, \dots),$$

unde 1 apare numai pe poziţiile de la $-m$ la $m$, deci

$$\|F(D_m)\| = 1,$$

în timp ce

$$\lim_{m \to \infty} \|D_m\|_1 = \infty,$$

fapt care contrazice continuitatea lui $F^{-1}$.

Drept urmare $F$ nu este surjectivă, deci *reciproca lemei lui Riemann-Lebesgue nu este valabilă.*

## CONTINUITATEA COEFICIENŢILOR FUNCŢIONALI PENTRU O BAZĂ SCHAUDER

Presupunem că spaţiul Banach $X$ admite o bază Schauder $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Să presupunem în plus că $\|x_n\| = 1$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Atunci, pentru orice $x \in X$, există în mod unic un şir $(a_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ din $K$, astfel ca

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} a_j(x) x_j.$$

*Definim* $x_j^* : X \to K$ *prin*

$$x_j^*(x) = a_j(x),$$

*pentru orice* $x \in X$.

*Această funcţională se numeşte al j-ulea coeficient funcţional pentru baza Schauder aleasă.*

*Arătăm că* $x_j^* \in X^*$, *pentru orice* $j \in N^*$, *şi că există* $\alpha > 0$, *astfel ca*

$$\|x_j^*\| \leq \alpha,$$

*pentru orice* $j \in \mathbb{N}^*$.

Într-adevăr, fie

$$Y = \{y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \mid \sum_{j=1}^{\infty} y_j x_j \text{ converge în } X\},$$

înzestrat cu norma

$$\|y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}\| = \sup_{i \in \mathbb{N}^*} \left\| \sum_{j=1}^{i} y_j x_j \right\|.$$

Fie $F : Y \to X$ dată de

$$F(y = (y_n)_{n\in\mathbb{Z}}) = \sum_{j=1}^{\infty} y_j x_j,$$

pentru orice $y \in X$.

Atunci $F$ este liniară, surjectivă şi continuă, căci

$$\|F(y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}^*})\| = \lim_{i\to\infty} \left\| \sum_{j=1}^{i} y_j x_j \right\| \leq$$
$$\leq \sup_{i\in\mathbb{N}^*} \left\| \sum_{j=1}^{i} y_j x_j \right\| = \|y\|.$$

$Y$ este un spaţiu Banach.

Pentru a justifica aceasta, să observăm că

$$|y_j| = \|y_j x_j\| = \left\| \sum_{i=1}^{j} y_j x_j - \sum_{i=1}^{j-1} y_j x_j \right\| \leq 2\|y\|.$$

Fie acum $(y_n = (y_n^j)_{j\in\mathbb{N}^*})_{n\in\mathbb{N}^*}$ un şir Cauchy de elemente din $Y$.

Pentru $m, n, j$ din $\mathbb{N}^*$ avem

$$\left| y_n^j - y_m^j \right| \leq 2\|y_n - y_m\|.$$

Drept urmare $(y_n^j)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este şir Cauchy, pentru orice $j \in \mathbb{N}^*$, deci există

$$\lim_{n\to\infty} y_n^j \stackrel{def}{=} y_j.$$

Arătăm în continuare că

$$\lim_{n\to\infty} y_n = y = (y_j)_{j\in\mathbb{N}^*}.$$

Într-adevăr, deoarece $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este un şir Cauchy, pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n_1 \in \mathbb{N}^*$, astfel ca, pentru orice $n, m \geq n_1$ avem

$$\|y_n - y_m\| = \sup_{i\in\mathbb{N}^*} \left\| \sum_{j=1}^{i} (y_n^j - y_m^j) x_j \right\| < \varepsilon.$$

Prin trecere la limită după $m$, obţinem

$$\sup_{i\in\mathbb{N}^*} \left\| \sum_{j=1}^{i} (y_n^j - y^j) x_j \right\| < \varepsilon.$$

A rămas de arătat că $y \in Y$.

Deoarece

$$\|F(y_n) - F(y_m)\| \leq \|y_n - y_m\|$$

pentru orice $m$ şi $n$ din $\mathbb{N}^*$, deducem că $(F(y_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ este un şir Cauchy din spaţiul Banach $X$, deci există $x \in X$ astfel ca

$$\lim_{n\to\infty} F(y_n) = x.$$

Fie $n_2 \in \mathbb{N}^*$, astfel ca, pentru orice $n \geq n_2$ avem

$$\|F(y_n) - x\| < \varepsilon.$$

Fie $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ şi $i_0$ astfel ca pentru orice $i \geq i_0$ să avem

$$\left\|F(y_{n_0}) - \sum_{j=1}^{i} y_{n_0}^j x_j\right\| \leq \varepsilon.$$

Atunci pentru $i \geq i_0$ avem

$$\left\|x - \sum_{j=1}^{i} y_j x_j\right\| \leq \left\|x - \sum_{j=1}^{\infty} y_{n_0}^j x_j\right\| + \left\|\sum_{j=1}^{\infty} y_{n_0}^j x_j - \sum_{j=1}^{i} y_{n_0}^j x_j\right\| +$$
$$+ \left\|\sum_{j=1}^{i} y_{n_0}^j x_j - \sum_{j=1}^{i} y^j x_j\right\| \leq \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon.$$

Drept urmare

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} y_j x_j,$$

adică $y = (y_j)_{j\in\mathbb{N}^*} \in Y$.

Aşadar $Y$ este spaţiu Banach.

Atunci $F^{-1} : X \to Y$ este continuă.

Pentru $x \in X$ dat de

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} a_j(x) x_j$$

avem

$$\begin{aligned} \left|x_j^*(x)\right| &= |a_j(x)| \leq 2\left\|(a_1(x), a_2(x), \ldots)\right\| = \\ &= 2\left\|F^{-1}(x)\right\| \leq 2\left\|F^{-1}\right\| \ \|x\|, \end{aligned}$$

ceea ce arată că $x_j^* \in X^*$ pentru orice $j \in \mathbb{N}^*$ şi

$$\left\|x_j^*\right\| \leq 2\left\|F^{-1}\right\|$$

pentru orice $j \in \mathbb{N}^*$.

## ECUAŢII OPERATORIALE

Teorema aplicaţie deschise are o importanţă considerabilă în rezolvarea ecuaţiilor operatoriale.

Fie $X$ şi $Y$ spaţii Banach, iar $F : X \to Y$ o aplicaţie liniară şi continuă. Să presupunem că $F$ este surjectivă, deci pentru orice $y \in Y$ ecuaţia operatorială

$$F(x) = y$$

are o soluţie în $X$.

Teorema aplicaţiei deschise ne asigură că imaginea prin $F$ a bilei unitate din $X$ conţine o bilă închisă de rază $\varepsilon > 0$ din $Y$.

Atunci pentru orice $y \in Y$, $\frac{\varepsilon y}{\|y\|}$ are norma $\varepsilon$, deci există $x \in X$ cu $\|x\| < 1$ astfel ca $F(x) = \frac{\varepsilon y}{\|y\|}$, adică

$$F(\frac{x\,\|y\|}{\varepsilon}) = y.$$

Aşadar am găsit că de fapt ecuaţia $F(x) = y$ are o soluţie $x_0 = \frac{x\|y\|}{\varepsilon}$, care are proprietatea că $\|x_0\| < \frac{1}{\varepsilon}\,\|y\|$.

*Prin urmare, conchidem că de fiecare dată cînd ecuaţia operatorială $F(x) = y$ are o soluţie în $X$, pentru orice $y \in Y$, ea are de fapt o soluţie a cărei normă este mai mică decît $\|y\|$ înmulţită cu o constantă, care este independentă de $y \in Y$.*

## ALTE REZULTATE

**1.** *Orice spaţiu Banach separabil este liniar homeomorf cu $l^1/Z$, unde $Z$ este un subspaţiu închis al lui $l^1$.*

**2.** *Fie $Y$ şi $Z$ subspaţii închise ale unui spaţiu Banach $X$, astfel ca $X = Y + Z$. Atunci există $\alpha > 0$, astfel ca orice $x \in X$ are o reprezentare de forma $x = y + z$, unde $y \in Y$, $z \in Z$ şi*

$$\|y\| + \|z\| \le \alpha\,\|x\|.$$

# BIBLIOGRAFIE

[1] **R. Adams** - *Sobolev Spaces,* Academic Press, 1975.

[2] **I. Chiţescu şi N. Secelean** - *Elemente de Teoria Măsurii şi Integralei,* Editura Fundaţiei "Romania de Mîine", 1999.

[3] **I. Colojoară** - *Analiză Matematică,* Editura Didactică şi Pedagogică, 1981.

[4] **R. Cristescu** - *Analiză Funcţională,* Editura Didactică şi Pedagogică, 1983.

[5] **N. Dunford şi J. Schwartz** - *Linear operators,* Interscience Publishers, 1958.

[6] **V. Limaye** - *Functional Analysis,* John Wiley & Sons, *1981.*

[7] **R. Larsen** - *Functional Analysis,* Marcel Dekker, *1973.*

[8] **M. Rădulescu şi S. Rădulescu,** *Teoreme şi Probleme de Analiză Matematică,* Editura Didactică şi Pedagogică, 1985.

[9] **Gh. Sireţchi** - *Spaţii Concrete în Analiza Funcţională,* Editura Universităţii Bucureşti, 1986.

[10] http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk:80/~history/BiogIndex.html.

# INDEX

## A



## B



## C

## D



## E



## F

## G



## H



## I

## K



## L

## M



## N



## P

## R



## S, Ş



## T

Tiparul s-a executat sub c-da nr. 987/2002 la
Tipografia Editurii Universităţii din Bucureşti

81000 lei

ISBN 973-575-700-1 Lei 81000