LIVIU NICOLESCU

GRUPURI LIE

Editura Universității din București

LIVIU NICOLESCU

GRUPURI LIE

LIVIU NICOLESCU

GRUPURI LIE

EDITURA UNIVERSITĂȚII DIN BUCUREȘTI
2004

Referenţi ştiinţifici: Prof. dr. **Ion Mihai**
Prof. dr. **Gabriel Pripoae**

Şos. Panduri, 90-92, Bucureşti - 050663; Telefon/Fax: 410.23.84
E-mail: editura@unibuc.ro
Internet: www.editura.unibuc.ro

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
NICOLESCU, LIVIU
Grupuri Lie / Nicolescu Liviu - Bucureşti: Editura Universităţii din Bucureşti, 2004
Bibliogr.
ISBN 973-575-852-0

512.81

CUPRINS

INTRODUCERE

A. Născut la 17 decembrie 1842 la Nordfjordejet în Norvegia, **Marius Sophus Lie** a studiat matematica la Christiania (actualmente oraşul Oslo). În 1865 trece examenul de profesor pentru învăţământul secundar, şi intră în contact cu lucrările lui Iulius Plücker asupra complexelor de drepte, fapt care avea să-i reveleze vocaţia pentru cercetare. Primeşte o bursă de călătorie şi, în 1869, pleacă la Berlin, unde îl întâlneşte pe Felix Klein (1849 - 1925); cei doi vor dura o lungă şi fructuoasă prietenie şi colaborare. Astfel, ei pleacă la Paris unde descoperă lucrările lui Evariste Galois (1811 - 1832) şi Camille Jordan (1838 - 1921), care îi influenţează profund; lucrează împreună în teoria invarianţilor, în Analiză şi Geometrie diferenţială şi se pare că din această perioadă datează ideile lui Lie asupra grupurilor de transformări. Într-un memoriu comun din 1870, Lie şi Klein studiază sistematic subgrupurile cu un parametru ale grupului proiectiv al planului şi orbitele acestor subgrupuri ("curbele W") regăsind astfel, în cadrul teoriei grupurilor, proprietăţi ale curbelor clasice ($y = c \cdot x^m$, spirala logaritmică, etc.).

La declanşarea războiului franco-prusac (1870), Klein se întoarce în Germania, iar Lie pleacă (pe jos!) în Italia. Este arestat din greşeală ca spion german şi încarcerat, până la intervenţia lui Gaston Darboux (1842 - 1917), care îl disculpă.

În ianuarie 1871 este numit profesor la un colegiu din Christiania; în acelaşi an îşi susţine teza de doctorat la Universitatea din Christiania, intitulată: "*Asupra unei clase de transformări geometrice*". Lucrarea pune bazele teoriei transformărilor de contact (care generalizează simultan transformările geometrice punctuale şi transformarea prin polare reciproce). Începând cu 1872 lui Lie i se creează o catedră la Universitatea din Christiania, pe care o va ocupa până în 1886, dată la care Lie este chemat la Leipzig ca profesor de matematică (la catedra lui Klein) şi ca director al Institutului de Geometrie.

Teoria grupurilor Lie a fost construită începând din 1873, pe când Lie era la Christiania; ajuns la Leipzig, Lie colaborează cu Erns Engel la demonstrarea teoremelor fundamentale ale teoriei sale.

Numit profesor extraordinar la Christiania, Lie moare în 1899, la câteva luni după întoarcerea în ţară; numele său rămâne profund legat de teoria grupurilor Lie, teorie centrală în matematica modernă, la intersecţia analizei, algebrei şi geometriei şi fundamentală pentru modelele actuale ale fizicii teoretice.

În afara acestei contribuţii majore trebuie amintită şi abordarea de către Lie a "problemei spaţiului", care i-a adus autorului, în 1898, premiul Lobacevski decernat de Universitatea din Kazan pentru cercetări de Geometrie, de preferinţă neeuclidiană.

Henri Poincaré (1854 - 1912) analizează astfel opera lui Lie: "*Lie a cercetat în ce mod să se combine diferitele mişcări posibile ale unui sistem oarecare, sau mai general, diferitele transformări posibile ale unei figuri. Dacă se consideră un anumit număr de transformări şi se combină acestea în toate modurile posibile, mulţimea tuturor acestor combinaţii va forma un grup. Fiecărui grup îi corespunde o geometrie şi a noastră, care corespunde grupului deplasărilor unui corp solid, nu este decât un caz foarte particular. Dar toate grupurile ce se pot imagina vor poseda anumite proprietăţi comune, care limitează capriciul inventatorilor de geometrii; aceste proprietăţi au fost cele pe care Lie le-a studiat toată viaţa* ".

B. Ideea de grup, dominantă în matematica modernă, pare a fi demult prezentă în geometrie , implicată în conceptul intuitiv de mişcare rigidă. Definirea riguroasă a noţiunii de grup aparţine matematicianului francez E. Galois, care a utilizat-o în teoria rezolvării ecuaţiilor algebrice prin radicali. Aplicaţii ale noţiunii de grup în geometrie se întâlnesc la A. Cayley (1821 - 1895) şi J. Sylvester (1814 - 1897). Introducând noţiunea de geometrie cu grup fundamental, F. Klein a formulat în 1872 celebrul său "*Program de la Erlangen*", conform căruia, geometria este mulţimea figurilor şi a proprietăţilor invariante faţă de un anumit grup de transformări.

Lie abordeză studiul general al grupurilor de transformări, care depind continuu de r parametri şi acţionează într-un spaţiu cu n dimensiuni. Tratatul său "*Theorie der Transformationsgruppen*" (T. I, II, III, Leipzig 1889, 1890, 1893) publicat în caloborare cu F. Engel, conţine un studiu sistematic al problemei, în anumite condiţii de analiticitate. Prezentăm pe scurt ideea lui Lie după G. Vrănceanu (1900 - 1979), [77] şi M. Ţarină (1932 -1992), [73].

În spaţiul numeric $\mathbb{R}^n$ al variabilelor x^i, se consideră o familie G_r de transformări S_a ce depind de parametrii $a^1, ..., a^r$ şi sunt date de ecuaţiile:

$$y^i = f^i(x^1, x^2, ..., x^n; a^1, a^2, ..., a^r), (S_a) \tag{0.1}$$

unde $f^1, ..., f^n$ sunt funcţii analitice. În raport cu operaţia de compunere (prin definiţie asociativă) familia G_r formează un grup, adică:

i) produsul a două transformări din familie aparţine familiei, deci

$$(\forall) S_a, S_b \in G_r \Rightarrow S_a S_b = S_c \in G_r.$$

ii) familia G_r conţine transformarea identică, $S_0 \in G_r$.

iii) orice transformare $S_a \in G_r$ admite o inversă S_a^{-1} şi aceasta aparţine familiei, deci:

$$(\forall)\, S_a \in G_r, (\exists)\, S_a^{-1} \in G_r \text{ cu } S_a S_a^{-1} = S_a^{-1} S_a = S_0.$$

Parametrii $c^1, ..., c^r$ ai transformării produs $S_c = S_a S_b$ sunt daţi de relaţiile:

$$c^h = \varphi^h(a^1, ..., a^r, b^1, ..., b^r),\ h \in \{1, 2, ..., r\}$$

unde funcţiile $\varphi^1, \varphi^2, ..., \varphi^r$ sunt, de asemenea, presupuse analitice.

Dacă în formulele (0.1) funcţiile din membrul drept se dezvoltă în serii de puteri într-o vecinătate corespunzătoare transformării identice (obţinute pentru $a^1 = ... = a^r = 0$) se obţine :

$$y^i = x^i + \xi^i_h a^h + \frac{1}{2}\xi^i_{hk} a^h a^k + ...$$

În acest mod se pun în evidenţă **operatorii diferenţiali** (ai "*transformărilor infinitezimale*"):

$$(0.2) \qquad X_h = \xi^i_h \frac{\partial}{\partial x^i} \quad , \qquad h \in \{1, 2, ..., r\}$$

despre care se arată că satisfac **ecuaţiile de structură** :

$$[X_h, X_k] = c^s_{hk} X_s,$$

unde în membrul stâng figurează **paranteza Poisson** a operatorilor (0.2), iar c^s_{hk} sunt constante numite **constantele de structură.**

Întrega teorie a lui S. Lie se bazează pe proprietăţile operatorilor (0.2) şi ale constantelor de structură. În dezvoltarea ei se pot distinge mai multe etape:

I. Etapa clasică, caracterizată prin contribuţiile aduse de S. Lie şi unii dintre elevii săi, dintre care amintim pe F. Engel, W. Killing, L. Maurer, A. Mayer, K. Umlauf, F. Schur. În toate aceste cercetări, grupul G_r se identifică cu sistemul operatorilor X_h, în baza rezultatelor obţinute privitoare la determinarea unui grup prin aceşti operatori sau prin constantele de structură (Teoremele lui Lie). Se rezolvă unele probleme legate de structura unui grup Lie. Astfel, plecând de la studiul ecuaţiei caracteristice asociate unei transformări infinitezimale a unui grup, Killing obţine clasificarea cunoscută a grupurilor Lie simple. Se descoperă apoi rolul pe care grupurile integrabile (rezolubile) îl joacă în integrarea ecuaţiilor diferenţiale, rol analog grupurilor rezolubile din teoria lui Galois. Rezultate pe această linie au obţinut E. Picard, E. Vessiot, E. Levi, L. Bianchi.

II. A doua etapă în dezvoltarea teoriei grupurilor Lie este marcată de cercetările lui Elie Cartan (1869 - 1951), începând cu teza sa de doctorat: "*Sur la structure des groupes de transformations finis et continue* " (Paris, 1891), publicată în anul 1894. În teza sa de doctorat, E. Cartan reia multe dintre rezultatele anterioare completându-le şi demonstrându-le într-un mod riguros. Ca şi în alte capitole ale geometriei diferenţiale, E. Cartan aplică în studiul grupurilor Lie metoda reperului mobil, elaborată ca un instrument general de studiu. Astfel, dacă pe varietatea M acţionează grupul de transformări G, atunci în raport cu un reper fix (absolut) R_0 cu originea în punctul $x \in M$, unei transformări $S_a \in G$ îi corespunde un reper R_a cu originea în $S_a(x)$. Deplasarea infinitezimală a reperului R_a la o variaţie infinitezimală a parametrilor $a = (a^h)$ corespunde transformării $S_a^{-1}S_{a+da}$ şi este determinată de formele Pfaff $\omega^s(a, da)$, numite componentele sale relative.

Acestea dau variaţia coordonatelor unui punct fix faţă de R prin sistemul

$$dx^i + \sum_{s=1}^{r} \omega^s(a, da) X_s x^i = 0, \tag{0.3}$$

care, prin natura problemei, trebuie să fie complet integrabil. Condiţiile de integrabilitate ale sistemului (0.3) se scriu sub forma

$$d\omega^s = \frac{1}{2} \sum_{p,q=1}^{r} c_{pq}^s \omega^p \wedge \omega^q \ , \tag{0.4}$$

unde $d\omega^s$ este diferenţiala exterioară a lui ω^s. Condiţiile (0.4) se numesc **ecuaţiile de structură Maurer-Cartan.**

III. A treia etapă în dezvoltarea teoriei grupurilor Lie este etapa actuală. Cercetările actuale îşi au originea în cele mai sus menţionate şi au evoluat în două direcţii importante:

III_1. Algebrizare. O structură de bază care s-a degajat din studiul grupurilor Lie a fost aceea de algebră Lie, termenul fiind introdus în anul1939 de geometrul H. Weyl (1885 - 1955) în legatură cu teoria reprezentărilor. Există o strânsă legatură între proprietăţile unui grup Lie şi cele ale algebrei sale Lie. Aceasta este furnizată de **aplicaţia exponenţială**, multe dintre rezultatele clasice putând fi uşor interpretate în acest sens. De altfel, studiul general al algebrelor Lie constituie un capitol special al algebrei multiliniare, cu multiple şi interesante aplicaţii. O algebră Lie peste corpul K este o $K-$algebră L înzestrată cu o operaţie $K-$biliniară $L \times L \to L$, $(x, y) \to [x, y]$ care satisface proprietăţile:

$$\begin{aligned} [x, y] + [y, x] &= 0, \ (\forall) x, y \in L \\ [x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] &= 0, \ (\forall) x, y, z \in L. \end{aligned}$$

Menţionăm că multe dintre proprietăţile algebrei Lie a unui grup Lie decurg nemijlocit din teoria clasică, fiind implicit conţinute în acestea.

III_2. Globalizare. În primele decenii ale secolului nostru se pun şi se rezolvă diferite probleme legate de topologia grupurilor Lie. Astfel, a 5-a problemă a lui D. Hilbert (1862 - 1943), din lista prezentată la Congresul Mondial al matematicienilor ţinut la Paris în 1900, se referă la posibilitatea de a construi teoria grupurilor Lie fără ipoteze de derivabilitate asupra funcţiilor de compunere. Rezultate parţiale în această direcţie au fost obţinute de către L. Brouwer, pentru grupurile abeliene. Ulterior J. von Neumann rezolvă problema pentru grupuri nilpotente (în 1933), iar L. Pontreaghin pentru grupurile compacte (în 1934). Alţi matematicieni au căutat o rezolvare a problemei în condiţii mai generale. Cercetări în acest sens au fost întreprinse de A.Gleason, D. Montgomery, L. Zippin [36]. Unul dintre rezultatele obţinute, considerat ca o rezolvare satisfăcătoare a problemei lui Hilbert are următorul enunţ:

"*Un grup continuu, conex, local conex, local compact şi de dimensiune finită este un grup Lie*".

În prima jumătate a secolului nostru întreaga teorie a grupurilor Lie a fost reconsiderată din punctul de vedere al structurilor matematice de bază. Astfel grupurile topologice au fost studiate de O. Schreier în 1925. În deceniul al patrulea, odată cu elaborarea conceptului de varietate diferenţială, noţiunea de grup Lie se defineşte într-un mod general şi intrinsec. Este vorba de un grup G, care are o structură de varietate analitică reală astfel încât operaţia grupală

$$G \times G \to G, \quad (x, y) \to xy$$

este aplicaţie analitică.

În acelaşi context se precizează ideea de acţiune a unui grup Lie într-o varietate analitică, revenind astfel pe un plan superior la noţiunea de grup Lie de transformări considerată la începutul teoriei.

Această viziune este în acord cu spiritul actual potrivit căruia matematica actuală se caracterizează prin studiul structurilor mixte: algebrice, topologice şi diferenţiale. Studiul acţiunii unui grup Lie într-o varietate analitică se leagă strâns de unele probleme de topologie şi geometrie diferenţială, ca de exemplu de teoria spaţiilor simetrice ale lui E. Cartan sau de aceea a spaţiilor omogene. Există, de altfel, importante aplicaţii ale grupurilor şi algebrelor Lie în diverse ramuri de ştiinţă (mecanică analitică, teoria particulelor elementare, etc.).

În ţara noastră cercetări legate de teoria grupurilor Lie au fost întreprinse de **profesorul Gheorghe Vrănceanu** şi unii dintre elevii săi.

Astfel, Gh. Vrănceanu a enunţat o serie de teoreme privind grupurile Lie, finite şi continue, în care, printre altele, a precizat numărul $N - n$, pe care l-a numit clasa grupului G_r, din grupurile Lie finite şi continue.

În lucrarea "*Clasificarea grupurilor Lie de rang zero*" ("Studii şi cercetări matematice", vol. I. fasc. I, 1950, p. 46-86), Gh. Vrănceanu continuă şi adânceşte cercetările lui Killing şi Umlauf. Astfel, Gh. Vrănceanu, pornind de la ecuaţiile de structură ale unui grup G_r scrise sub forma stabilită de Cartan şi folosind metoda tensorială, aduce la forme canonice anumite mărimi ce se formează din tensorul de structură al grupului.

Interpretând apoi din punct de vedere grupal cazul în care vectorii sunt nuli, Gh. Vrănceanu rezolvă problema clasificării grupurilor Lie de rang zero. Metoda aceasta a fost apoi folosită de A. Dobrescu la clasificarea grupurilor Lie reale cu patru parametrii.

În legatură cu transformările generate de r transformări infinitezimale asociate unui grup Lie G_r, Vrănceanu a demonstrat teorema: *"Partea conexă a grupului centro-afin G_4 este în întregime generată de transformări infinitezimale".*

Menţionăm şi faptul că Gh. Vrănceanu şi I. Matei au efectuat clasificări ale algebrelor Lie reale de dimensiune 4, respectiv 5, prin metode directe.

Alte rezultate interesante obţinute de Gh. Vrănceanu sunt legate de grupurile discrete de mişcări ale spaţiilor euclidiene sau cu curbură constantă.

Dintre rezultatele referitoare la grupurile de mişcări ale spaţiilor Riemann pot fi citate cele obţinute de Gh. Vrănceanu şi K. Teleman. Plecând de la studiul lui Vrănceanu despre grupurile de mişcare tranzitive ale spaţiilor V_4, K. Teleman a studiat grupurile de mişcare tranzitive ale spaţiilor riemanniene V_5. K. Teleman a numit **spaţiu V_n separabil**, un spaţiu Riemann V_n al cărui grup de mişcare are ca invariant două sau mai multe sisteme Pfaff. Apoi a stabilit teorema: " *Condiţia necesară şi suficientă ca un spaţiu V_n cu grup de mişcare tranzitiv să fie separabil este ca grupul de stabilitate al unui punct din V_n să fie reductibil* ". În continuare K. Teleman a clasificat spaţiile Riemann V_5 cu grupuri de mişcări tranzitive. Arată, de exemplu, că în spaţiul euclidian E_5 există un singur grup neseparabil G_3; de asemenea, arată că spaţiile V_5 nu pot avea un grup tranzitiv cu 8 parametrii.

Într-un alt memoriu (publicat în 1954), K. Teleman a arătat că spaţiile simetrice $V_{2p}(\lambda)$, studiate anterior de Gh. Vrănceanu, sunt spaţii ale lui Riemann ireductibile V_{2p}, cu curbură variabilă, având un grup maxim de mişcări cu $p^2 + 2p$ parametrii.

În ceea ce priveşte grupurile de mişcări ale spaţiilor cu conexiune afină, amintim rezultatele obţinute de Gh. Vrănceanu, V. Dumitraş, M. Ţarină.

În ultimii ani au apărut lucrări referitoare la grupurile şi algebrele Lie-Banach. În ţara noastră grupurile Lie-Banach au fost studiate de Gh. Gheorghiev, A. Bejacu [4], M. Craioveanu.

Recent, G. Pripoae [61] a stabilit următoarea teoremă: "*Fie G un grup Lie conex de dimensiune $n \geq 3$. Presupunem că pentru orice două câmpuri stâng invariante X şi Y, câmpul $[X, Y]$ este o combinaţie liniară de X şi Y. Atunci orice metrică pseudo-riemanniană stâng invariantă pe G are curbura secţională constantă*". Acest rezultat constituie o generalizare a unor teoreme bine cunoscute ale lui Milnor (în cazul Riemann) [31] şi Nomizu (în cazul Lorentz) [48].

Rezultate privind algebrele de deformare asociate unui grup Lie au fost obţinute de A. Bejancu [6] şi L. Nicolescu [41]. Caracterizări ale metricilor pseudo-riemanniene bi-invariante pe un grup Lie au fost obţinute de L. Nicolescu [42].

Pseudoconexiuni pe un grup Lie au fost studiate de V. Obădeanu [61].

Monografia de faţă este rodul cursurilor opţionale de *Grupuri Lie* ţinute de autor în ultimii 25 ani la Universitatea Bucureşti. Ea prezintă rezultatele fundamentale dintr-un domeniu care cunoaşte o perioadă de reînflorire. Pe capitole, cartea conţine:

1. Generalităţi asupra grupurilor şi algebrelor Lie (subgrupuri cu un

parametru, aplicaţia exponenţială).

2. Subgrupuri Lie (teorema Cartan, teorema Chevalley).

3. Operatori diferenţiali stâng invarianţi pe grupuri Lie.

4. Algebra înfăşurătoare universală a unei algebre Lie (teorema Birkhoff-Witt).

5. Determinarea unui grup Lie de către algebra sa Lie (formula Campbell-Hausdorff, teorema fundamentală a lui Lie).

6. Reprezentări de grupuri Lie. Aplicaţii la grupurile Lie semi-simple.

7. Grupuri Lie de transformări (spaţii omogene, teoremele lui Lie).

8. Conexiuni liniare şi pseudoconexiuni invariante pe un grup Lie (conexiunile Cartan-Schouten, conexiuni invariante pe spaţii reductive).

9. Metrici pseudo-riemanniene bi-invariante pe grupuri Lie (teorema lui Nomizu, teorema lui Milnor, teorema lui Pripoae).

10. Structuri aproape simplectice şi structuri aproape complexe stâng invariante pe grupuri Lie (teorema Medina-Revoy).

Ultimele trei capitole sunt în mare măsură inedite, ele oglindind preocupări ale autorului de a investiga **proprietăţile geometrice** (conexiuni, curbură) ale grupurilor Lie.

Unele rezultate au apărut până acum doar în periodice, iar sinteza lor într-o monografie reprezintă o premieră.

Demonstraţiile sunt foarte detaliate, iar numeroase exemple şi exerciţii completează în mod armonios textul.

Cartea se adresează în primul rând studenţilor facultăţilor de matematică din anii terminali şi cercetătorilor. Cu puţin efort, cartea este accesibilă şi fizicienilor teoreticieni şi tuturor celor interesaţi într-o abordare riguroasă şi sistematică a grupurilor Lie.

Autorul

CAPITOLUL I

GENERALITĂŢI ASUPRA GRUPURILOR ŞI ALGEBRELOR LIE

§ 1. DEFINIŢII ŞI NOTAŢII

Primul paragraf al lucrării conţine **generalităţi privind varietăţile analitice, conexiunile liniare şi metricile Riemann pe varietăţi analitice.** Parcurgerea acestui paragraf uşurează familiarizarea cititorului cu notaţiile ce vor fi utilizate în paragrafele următoare. Demonstraţiile propoziţiilor din § 1 pot fi urmărite în [17], [18], [19], [27].

1.1. DEFINIŢIE. *Fie M un spaţiu topologic separat şi cu bază numărabilă şi fie $A = \{a, b, ...\}$ o mulţime oarecare de indici. Se numeşte* **structură analitică pe** M *o familie $\mathcal{A} = \{(U_a, h_a) \mid a \in A\}$, unde U_a este o mulţime deschisă din M, iar h_a este un homeomorfism de la U_a într-un deschis $h_a(U_a)$ din $\mathbb{R}^n$, astfel încât sunt îndeplinite următoarele proprietăţi:*

i) *familia $\{U_a \mid a \in A\}$ de deschişi din M formează o acoperire deschisă a lui M,*

ii) *pentru orice $a, b \in A$, pentru care $U_a \cap U_b \neq \varnothing$, aplicaţia*

$$h_b \circ h_a^{-1} : h_a(U_a \cap U_b) \to h_b(U_a \cap U_b)$$

este analitică.

iii) *pentru orice pereche (U, h) formată dintr-o mulţime deschisă U din M şi un homeomorfism definit pe U cu imaginea într-un deschis din $\mathbb{R}^n$, cu proprietatea că pentru orice $(U_a, h_a) \in \mathcal{A}$ care verifică $U_a \cap U \neq \varnothing$, aplicaţia*

$$h \circ h_a^{-1} : h_a(U_a \cap U) \to h(U_a \cap U)$$

este analitică, există indicele $b \in A$ astfel încât $(U, h) = (U_b, h_b)$.

OBSERVAŢIE. Condiţiile i), ii) definesc un **atlas analitic** pe spaţiul M, iar iii) reprezintă o **proprietate de maximalitate sau de completitudine a atlasului.**

O pereche (U_a, h_a) din atlasul $\mathcal{A}$ se numeşte **hartă**. Aplicaţia $h_b \circ h_a^{-1}$ este numită **aplicaţia de identificare** pentru U_a şi U_b.

1.2. DEFINIŢIE. *Se numeşte* **varietate analitică** *un spaţiu topologic separat şi cu bază numărabilă care este înzestrat cu o structură analitică.*

1.3. OBSERVAŢIE. Fie (U, h) o hartă a varietăţii M şi fie $p \in M$. Dacă se notează cu $x^1(p), ..., x^n(p)$ coordonatele punctului $h(p)$ în $\mathbb{R}^n$, se spune că acestea sunt **coordonatele locale** ale punctului p în harta (U, h). Funcţiile

$$x^i : p \in U \to x^i(p) \in \mathbb{R}, \ i = 1, 2, ..., n$$

se numesc **funcţiile coordonate** asociate hărţii (U, h). Spaţiul $\mathbb{R}^n$ se numeşte **spaţiul de modelare**, iar numărul natural n este **dimensiunea varietăţii** M.

1.4. DEFINIŢIE. *Fie M (resp. M') o varietate analitică reală de dimensiune n (resp. n') şi fie*

$$f : M \to M'$$

o aplicaţie continuă. Se spune că f este o **aplicaţie analitică** *dacă pentru orice $p \in M$ există o hartă (U, h) a varietăţii M şi o hartă (U', h') a varietăţii M' cu $p \in U$, $h(p) \in U'$, astfel încât aplicaţia*

$$h' \circ f \circ h^{-1} : h(U \cap f^{-1}(U')) \to h'(U' \cap f(U))$$

este analitică.

1.5. Se notează cu $\mathcal{F}(M)$ **inelul funcţiilor reale analitice** definite pe varietatea analitică M. Dacă p este un punct din varietatea M, atunci mulţimea T_pM, formată din aplicaţiile v: $\mathcal{F}(M) \to \mathbb{R}$ care verifică condiţiile:

(vt_1) v este aplicaţie $\mathbb{R}$−liniară;

(vt_2) $\mathrm{v}(fg) = \mathrm{v}(f)\,g(p) + f(p)\mathrm{v}(g) \quad (\forall)\, f, g \in \mathcal{F}(M)$,

este un spaţiu liniar real de dimensiune n, numit **spaţiul vectorilor tangenţi** la varietatea M în punctul p.

1.6. Prin $\mathcal{X}(M)$ vom nota mulţimea aplicaţiilor

$$X : \mathcal{F}(M) \to \mathcal{F}(M)$$

care verifică condiţiile:

i) X este o aplicaţie $\mathbb{R}-$liniară;

ii) $X(fg) = X(f)g + fX(g)$.

O astfel de aplicaţie se numeşte **câmp de vectori tangenţi** la varietatea M, deoarece pentru fiecare punct p din M,aplicaţia

$$X_p : \mathcal{F}(M) \rightarrow \mathbb{R}$$

definită prin

$$X_p(f) = X(f)(p)$$

este un vector tangent în punctul p la varietatea M.

Se constată uşor că $\mathcal{X}(M)$ este un **modul peste inelul** $\mathcal{F}(M)$.

Dacă $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, atunci aplicaţia

$$[X,Y] : \mathcal{F}(M) \rightarrow \mathcal{F}(M)$$

definită prin

$$[X,Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)),$$

este un câmp de vectori, numit **paranteza Poisson** a câmpurilor X şi Y.

1.7. Fie $p \in M$. Prin T_p^*M se notează dualul spaţiului tangent T_pM (T_p^*M este numit **spaţiul cotangent** în punctul p).

Prin $\Lambda^1(M)$ vom nota mulţimea formată din aplicaţiile:

$$\omega : \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{F}(M)$$

care sunt $\mathcal{F}(M)-$liniare ($\Lambda^1(M)$ se numeşte **spaţiul 1-formelor** pe varietatea M). Orice 1-formă ω asociază fiecărui punct p din M un vector cotangent $\omega(p) \in T_p^*M$. Este uşor de văzut că $\Lambda^1(M)$ **are o structură de** $\mathcal{F}(M)-$**modul**.

Observaţie. i) Fie U o mulţime deschisă în varietatea analitică M. Atunci U are structură de varietate analitică de dimensiune egală cu dimensiunea varietăţii M.

ii) Fie (U, h) o hartă a varietăţii analitice M şi fie $x^1, x^2, ..., x^n$ funcţiile coordonate asociate hărţii (U, h). Atunci $\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, ..., \frac{\partial}{\partial x^n}\right\}$ **este o bază în**

$\mathcal{F}(U)-$**modulul** $\mathcal{X}(U)$, iar $\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}\big|_p, \frac{\partial}{\partial x^2}\big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\big|_p\right\}$ **este o bază a spaţiului liniar** T_pM.

1.8. DEFINIŢIE. *Fie r şi s două numere naturale. Se numeşte* **câmp tensorial de tip** (r,s) *pe varietatea analitică M orice aplicaţie $\mathcal{F}(M)-$multiliniară*

$$T : \Lambda^1(M) \times \dots \times \Lambda^1(M) \times \mathcal{X}(M) \times \dots \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{F}(M),$$

unde produsul direct conţine de r ori factorul $\Lambda^1(M)$ şi de s ori factorul $\mathcal{X}(M)$, dacă $r+s>1$.

Pentru r şi s fixaţi, spaţiul câmpurilor tensoriale de tip (r,s) se notează prin $\mathcal{T}^r_s(M)$ şi este un $\mathcal{F}(M)-$modul. Prin convenţie, $\mathcal{T}^0_0(M) = \mathcal{F}(M)$.

Observaţie. Proprietăţi de algebră liniară permit identificarea câmpurilor tensoriale de tip (r,s) cu aplicaţiile $\mathcal{F}(M)-$multiliniare:

$$T : \mathcal{X}(M) \times \dots \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M) \times \dots \times \mathcal{X}(M),$$

unde în cele două produse directe avem s şi respectiv r factori.

1.9. Fie M şi M' două varietăţi analitice şi fie

$$f : M \to M'$$

o aplicaţie analitică. Fie $p \in M$. Considerăm aplicaţia

$$f_{*,p} : T_pM \to T_{f(p)}M'$$

definită prin

$$f_{*,p}(X_p)(f') = X_p(f' \circ f), \quad (\forall)\, f' \in \mathcal{F}(M').$$

Aplicaţia $f_{*,p}$ este numită **diferenţiala aplicaţiei** f **în punctul** p. Este uşor de constatat că $f_{*,p}$ este o aplicaţie liniară. De asemenea, se arată uşor că dacă f este o aplicaţie constantă, atunci $f_{*,p}=0$, oricare ar fi $p \in M$.

1.10. Fie M o varietate analitică reală de dimensiune n şi fie $TM = \bigcup_{p\in M} T_pM$. Atunci TM este o varietate analitică reală de dimensiune $2n$.

Fie M şi M' două varietăţi analitice şi fie

$$f : M \to M'$$

o aplicaţie analitică. Atunci aplicaţia

$$f_* : X_p \in TM \to f_* (X_p) = f_{*,p}(X_p) \in TM'$$

este o aplicaţie analitică.

1.11. <u>PROPOZIŢIE.</u> *Fie M, M_1, M_2 trei varietăţi analitice de dimensiuni finite.*

i) *Fie $f_1 : M \to M_1$, $f_2 : M \to M_2$ două aplicaţii analitice. Atunci funcţia*

$$f : M \to M_1 \times M_2$$

definită prin

$$f (x) = (f_1 (x), f_2 (x))$$

este o aplicaţie analitică.

ii) *Dacă $f : M \to M_1$ şi $h : M_1 \to M_2$ sunt două aplicaţii analitice, atunci*

ii$_1$) $(h \circ f)_* = h_* \circ f_*$

ii$_2$) $(Id_M)_* = Id_{TM}$.

1.12. Fie $M \times N$ produsul varietăţilor analitice M şi N.

1.12.1. <u>PROPOZIŢIE.</u> *Considerăm aplicaţiile*

$$\pi_M : M \times N \to M, \quad \pi_N : M \times N \to N$$

definite prin:

$$\pi_M (x, y) = x, \quad \pi_N (x, y) = y$$

(π_M şi π_N sunt numite **proiecţiile canonice***). Atunci, pentru orice $(a, b) \in M \times N$, aplicaţia*

$$\mathrm{v} \in T_{(a,b)} (M \times N) \to ((\pi_M)_* (\mathrm{v}), (\pi_N)_* (\mathrm{v})) \in T_a M \oplus T_b N$$

este un izomorfism liniar.

1.12.2. PROPOZIŢIE. *Fie Q o varietate analitică şi fie*

$$f : M \times N \to Q$$

o aplicaţie analitică. Fie $(a, b) \in M \times N$. Considerăm aplicaţiile

$$f_b : M \to Q, \quad f_a : N \to Q$$

definite prin:

$$f_b(c) = f(c, b), \quad f_a(d) = f(a, d).$$

Dacă $\mathrm{v} = (\mathrm{v}_a, \mathrm{v}_b) \in T_{(a,b)}(M \times N)$, *atunci*

$$f_*(\mathrm{v}) = (f_b)_* (\mathrm{v}_a) + (f_a)_* (\mathrm{v}_b) .$$

1.13. DEFINIŢII. *Fie* M, M' *două varietăţi analitice şi fie*

$$f : M \to M'$$

o aplicaţie analitică.

i) *Fie $p \in M$. Spunem că f este* **imersie** *(resp.* **submersie***)* **în punctul** *p dacă aplicaţia liniară*

$$f_{*,p} : T_pM \to T_{f(p)}M'$$

este injectivă (resp. surjectivă).

ii) *Fie $p \in M$. Spunem că f este* **difeomorfism local în punctul** *p dacă aplicaţia liniară $f_{*,p}$ este izomorfism de spaţii vectoriale.*

iii) *Aplicaţia f se numeşte* **imersie** *(resp.* **submersie***) dacă f este imersie (resp. submersie) în orice punct $p \in M$.*

iv) *Aplicaţia f se numeşte* **difeomorfism local** *dacă f este difeomorfism local în orice punct $p \in M$.*

1.14. DEFINIŢIE. *Fie* M, M' *două varietăţi analitice şi fie*

$$f : M \to M'$$

o aplicaţie analitică. Dacă f este difeomorfism local şi dacă este aplicaţie injectivă, atunci f se numeşte **difeomorfism** *(***analitic***) de la M la M'.*

1.15. DEFINIŢIE. *Fie M o varietate analitică. O* **varietate imersată** *este o pereche (N, φ) unde N este o varietate analitică, iar*

$$\varphi : N \to M$$

este o aplicaţie analitică astfel încât aplicaţia

$$\varphi_* : TN \to TM$$

este injectivă.

Observaţie. a) Deoarece aplicaţia

$$\varphi_{*,p} : T_pN \to T_{\varphi(p)}M$$

este injectivă, rezultă că $\dim N \leq \dim M$.

b) Dacă (N, φ) este o **varietate imersata** în varietatea analitică M, atunci aplicaţia

$$\varphi : N \to \varphi(N)$$

este bijectivă. Această bijecţie defineşte o structură de varietate analitică pe $\varphi(N)$ astfel încât aplicaţia

$$\varphi : N \to \varphi(N)$$

devine difeomorfism.

1.16. DEFINIŢIE. *O subvarietate a varietăţii analitice M este o varietate imersată (N, φ) astfel încât*

$$\varphi : N \to \varphi(N)$$

este un homeomorfism, unde $\varphi(N)$ este dotată cu topologia de subspaţiu a lui M. Dacă N este o submulţime a lui M, iar $\varphi = i$ este aplicaţia incluziune, atunci vom spune simplu că N este **subvarietate** *a lui M.*

1.17. PROPOZIŢIE. a) *Fie* (N, i) *o subvarietate a varietăţii analitice* M. *Considerăm o varietate analitică* Q *şi fie aplicaţiile*

$$\varphi : Q \to N, \quad \psi : Q \to M,$$

astfel încât următoarea diagramă este comutativă

$$\begin{tikzcd}
Q \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\psi"'] & N \arrow[d, "i"] \\
& M
\end{tikzcd}$$

Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(a_1) φ *este aplicaţie analitică,*

(a_2) ψ *este aplicaţie analitică.*

b) *Fie* N_1 *şi* N_2 *două subvarietăţi ale varietăţii analitice* M *şi fie*

$$i_k : N_k \to M$$

aplicaţia incluziune ($k = 1, 2$). *Presupunem că există o aplicaţie bijectivă*

$$\varphi : N_2 \to N_1$$

astfel încât $i_1 \circ \varphi = i_2$. *Atunci* φ *este difeomorfism analitic.*

1.18. DEFINIŢIE. *Prin* **varietate cât** *a varietăţii analitice* M *înţelegem o varietate analitică* N *împreună cu o aplicaţie analitică surjectivă*

$$\pi : M \to N,$$

astfel încât π *este submersie.*

1.19. PROPOZIŢIE. a) *Fie* (N, π) *o varietate cât a varietăţii analitice* M *şi fie* Q *o varietate analitică. Considerăm aplicaţiile:*

$$\varphi : M \to Q, \quad \psi : N \to Q$$

astfel încât diagrama

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "\varphi"'] & N \arrow[d, "\psi"] \\ & Q \end{tikzcd}$$

este comutativă.

Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(a$_1$) *ψ este aplicaţie analitică,*

(a$_2$) *φ este aplicaţie analitică.*

b) *Fie $(N_1, \pi_1), (N_2, \pi_2)$ două varietăţi cât ale varietăţii analitice M, astfel încât există o aplicaţie bijectivă*

$$\varphi : N_1 \to N_2$$

cu $\varphi \circ \pi_1 = \pi_2$. Atunci φ este difeomorfism analitic.

1.20. DEFINIŢIE. *Fie M, M' două varietăţi analitice, $X \in \mathcal{X}(M)$, $X' \in \mathcal{X}(M')$ şi fie $f : M \to M'$ o aplicaţie analitică. Câmpurile X şi X' se numesc $f-$***corelate** *dacă*

$$X'_{f(p)} = f_* (X_p), \quad (\forall)\, p \in M.$$

1.20.1. Exemplu. Fie U o mulţime deschisă în varietatea analitică M şi fie

$$i : U \to M$$

aplicaţia incluziune. Un câmp $X \in \mathcal{X}(M)$ induce un câmp $X \mid_U \in \mathcal{X}(U)$ prin formula

$$X \mid_U (p) = X_p, \quad (\forall)\, p \in U.$$

Câmpul $X \mid_U$ se numeşte **restricţia** lui X la U. Este evident că câmpurile $X \mid_U$ şi X sunt $i-$corelate.

1.20.2. PROPOZIŢIE. *Fie M, M' două varietăţi analitice şi fie $f : M \to M'$ o aplicaţie analitică.*

i) *Două câmpuri* $X \in \mathcal{X}(M)$ *şi* $X' \in \mathcal{X}(M')$ *sunt* $f-$*corelate dacă şi numai dacă*

$$X'(f') \circ f = X(f' \circ f), \ \ (\forall) f' \in \mathcal{F}(M');$$

ii) *Fie* $X \in \mathcal{X}(M)$ *şi* $X' \in \mathcal{X}(M')$ *două câmpuri* $f-$*corelate. Dacă* $Y \in \mathcal{X}(M)$ *şi* $Y' \in \mathcal{X}(M')$ *sunt alte două câmpuri* $f-$*corelate, atunci:*

ii$_1$) *pentru orice* $a, b \in \mathbb{R}$ *câmpurile* $aX + bY \in \mathcal{X}(M)$ *şi* $aX' + bY' \in \mathcal{X}(M')$ *sunt* $f-$*corelate;*

ii$_2$) *pentru orice* $f' \in \mathcal{F}(M')$ *câmpurile* $(f' \circ f) X \in \mathcal{X}(M)$ *şi* $f'X' \in \mathcal{X}(M')$ *sunt* $f-$*corelate;*

ii$_3$) *câmpurile de vectori* $[X, Y] \in \mathcal{X}(M)$ *şi* $[X', Y'] \in \mathcal{X}(M')$ *sunt* $f-$*corelate.*

iii) *Dacă aplicaţia* f *este surjectivă, atunci pentru orice* $X \in \mathcal{X}(M)$ *există un câmp* $X' \in \mathcal{X}(M')$ *astfel încât câmpurile* X *şi* X' *sunt* $f-$*corelate.*

1.21. PROPOZIŢIE. *Fie* M *şi* M' *două varietăţi analitice şi fie*

$$f : M \to M'$$

un difeomorfism analitic. Considerăm aplicaţia:

$$f_* : \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M')$$

definită prin

$$f_*(X)(f(p)) = f_{*,p}(X_p), \ \ (\forall) X \in \mathcal{X}(M), \ \ (\forall) p \in M.$$

Atunci:

i) $\quad f_*(X)(f') = X(f' \circ f) \circ f^{-1}, \ \ (\forall) f' \in \mathcal{F}(M');$

ii) *dacă* M'' *este varietate analitică şi dacă*

$$f' : M' \to M''$$

este un difeomorfism analitic, atunci

$$(f' \circ f)_* = f'_* \circ f_*$$

iii) $\quad (f_*)^{-1} = (f^{-1})_*$

iv) $(Id_M)_* = Id_{\mathcal{X}(M)}$
v) $f_*(hX) = (h \circ f^{-1}) f_*(X)$, $(\forall) h \in \mathcal{F}(M)$.

1.22. Fie $M \times N$ produsul varietăţilor analitice M şi N. Se ştie că $T(M \times N) = TM \times TN$. Fie $X \in \mathcal{X}(M)$, $Y \in \mathcal{X}(N)$. Considerăm câmpurile vectoriale

$$i_M X,\ i_N Y \in \mathcal{X}(M \times N)$$

definite prin

$$\begin{aligned} &(i_M X)(x,y) = (X(x), 0), \\ &(i_N Y)(x,y) = (0, Y(y)), \quad (\forall)(x,y) \in M \times N. \end{aligned}$$

Atunci:

i) Câmpurile vectoriale $i_M X$ şi X sunt π_M–corelate.

ii) Câmpurile vectoriale $i_N Y$ şi Y sunt π_N–corelate.

iii) Pentru orice $f \in \mathcal{F}(M)$ şi orice $h \in \mathcal{F}(N)$ avem:

$$\begin{aligned} &(i_M X)(f \circ \pi_M) = X(f) \circ \pi_M, \ (i_N Y)(f \circ \pi_M) = 0 \\ &(i_N Y)(h \circ \pi_N) = Y(h) \circ \pi_N, \ (i_M X)(h \circ \pi_N) = 0 \end{aligned}$$

iv) Dacă $Z \in \mathcal{X}(M \times N)$ şi dacă

$$Z(f \circ \pi_M) = 0,\ Z(h \circ \pi_N) = 0, \ (\forall) f \in \mathcal{F}(M), \ (\forall) h \in \mathcal{F}(N),$$

atunci $Z = 0$.

v) pentru orice $f \in \mathcal{F}(M \times N)$ avem:

$$(i_M X)((i_N Y)(f)) = (i_N Y)((i_M X)(f)).$$

1.23. DEFINIŢIE. *Se numeşte* **conexiune liniară** *pe varietatea analitică M orice aplicaţie :*

$$\nabla : (X,Y) \in \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \nabla(X,Y) = \nabla_X Y \in \mathcal{X}(M)$$

cu proprietăţile:

i) $\nabla_{X+Y} Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z$

ii) $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$

iii) $\nabla_{fX}Y = f\nabla_X Y$

iv) $\nabla_X fY = f\nabla_X Y + X(f)Y$

oricare ar fi $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$, $(\forall) f \in \mathcal{F}(M)$.

1.24. Unei conexiuni liniare ∇ pe o varietate analitică M îi corespund două câmpuri tensoriale T şi R de tip $(1,2)$ şi respectiv $(1,3)$, numite **torsiunea** şi respectiv **curbura conexiunii ∇**. Aplicaţiile

$$T : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$$

şi

$$R : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$$

sunt definite prin formulele:

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$$

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z.$$

1.25. Un alt câmp de tensori care se asociază unei conexiuni liniare ∇ este **câmpul tensorial al lui Ricci** S, de tip $(0,2)$, definit prin:

$$S(X,Y) = \mathrm{trace}(: Z \to R(Z,X)Y),$$

unde R este curbura conexiunii ∇.

1.26. Considerăm o conexiune liniară ∇ pe varietatea analitică M. Fie U un deschis din M şi fie $(e_1, e_2, ..., e_n)$ un reper pe U. Introducem componentele Γ^i_{jk} ale conexiunii ∇ prin

$$\nabla_{e_i} e_j = \Gamma^k_{ij} e_k.$$

În raport cu reperul $(e_1, e_2, ..., e_n)$, componentele torsiunii T şi respectiv ale curburii R se definesc prin:

$$T(e_i, e_j) = T^k_{ij} e_k \ ,$$
$$R(e_k, e_h) e_j = R^i_{jkh} e_i \ .$$

Au loc egalităţile:

$$T^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj} \ ,$$
$$R^i_{jkh} = e_k\left(\Gamma^i_{hj}\right) - e_h\left(\Gamma^i_{kj}\right) + \Gamma^i_{km}\Gamma^m_{hj} - \Gamma^i_{hm}\Gamma^m_{kj} \ .$$

Componentele tensorului lui Ricci S se introduc prin:

$$S\left(e_j, e_k\right) = R_{jk}$$

şi verifică egalităţile:

$$R_{jk} = \sum_{i=1}^{n} R^i_{jik}.$$

1.27. <u>DEFINIŢIE</u>. *Fie* ∇ *o conexiune liniară pe varietatea analitică* M *şi*

$$c : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow M$$

o curbă analitică regulată. Vom nota cu

$$\dot{c} : I \rightarrow TM$$

câmpul vectorial tangent curbei. Curba c se numeşte $\nabla-$**autoparalelă** *dacă există o funcţie*

$$a : I \rightarrow \mathbb{R},$$

astfel încât

$$\nabla_{\dot{c}}\dot{c}\,(t) = a\,(t)\,\dot{c}\,(t)\,, \quad (\forall)\, t \in I.$$

<u>Observaţii</u>. i) Se arată uşor că printr-o schimbare convenabilă de parametru pe curba c se poate face ca în ultima formulă membrul drept să devină nul.

ii) Două conexiuni liniare simetrice ∇ şi $\overline{\nabla}$ pe o varietate analitică M, admit aceleaşi curbe autoparalele dacă şi numai dacă există o $1-$formă ω pe M astfel încât să avem **formula lui Weyl**:

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \omega(X)Y + \omega(Y)X, \quad (\forall) X, Y \in \mathcal{X}(M).$$

1.28. DEFINIŢIE. *Fie M o varietate analitică. O* **metrică pseudo-riemanniană** *pe M este un câmp tensorial $g \in \mathcal{T}_2^0(M)$ care satisface condiţiile:*

(i) $g(X,Y) = g(Y,X)$, $(\forall) X, Y \in \mathcal{X}(M)$

(ii) *Pentru orice $p \in M$, aplicaţia*

$$g_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$$

este o formă biliniară nedegenerată şi indexul lui g_p este acelaşi, oricare ar fi $p \in M$.

O **varietate pseudo-riemanniană** *este un cuplu (M, g), unde M este o varietate analitică, iar g este o metrică pseudo-riemanniană pe M.*

Observaţie. Dacă în definiţia 1.28. înlocuim condiţia (ii) prin:
(ii') g_p este pozitiv definită, $(\forall) p \in M$, atunci g se numeşte **metrică Riemann** pe M, iar perechea (M, g) se numeşte **spaţiu Riemann**.

1.29. Fie (M, g) o varietate pseudo-riemanniană şi fie $(e_1, e_2, ..., e_n)$ un reper pe un deschis U al lui M. Componentele metricii g se definesc prin:

$$g(e_i, e_j) = g_{ij}.$$

Condiţiile (i) şi (ii) din definiţia 1.28 ne arată că:

$$g_{ij} = g_{ji}$$

şi că matricea $\| g_{ij} \|$ este nedegenerată.

1.30. PROPOZIŢIE. *Pe o varietate pseudo-riemanniană există o unică conexiune liniară satisfăcând următoarele două condiţii:*

i) $T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] = 0$, $(\forall) X, Y \in \mathcal{X}(M)$;

ii) $(\nabla_X g)(Y,Z) = X(g(Y,Z)) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z) = 0$,
$(\forall) X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$.

Observaţie. Conexiunea liniară ∇ ce satisface condiţiile (i) şi (ii) din propoziţia 1.30 este dată de formula:

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) &= X(g(Y,Z)) + Y(g(X,Z)) - Z(g(X,Y)) - \\ &\quad - g(Y,[X,Z]) - g(Z,[Y,X]) + g(X,[Z,Y]). \end{aligned}$$

Conexiunea liniară ∇ ce satisface condiţiile (i) şi (ii) din propoziţia 1.30 se numeşte **conexiunea Levi-Civita** asociată lui g.

1.31. Considerăm o varietate pseudo-riemanniană (M, g). Fie ∇ conexiunea Levi-Civita asociată lui g, R câmpul tensorial de curbură al conexiunii ∇, S tensorul lui Ricci.

1.31.1. Spaţiul (M, g) se numeşte **cu curbură constantă** dacă R satisface egalitatea:

$$R(X,Y)Z = K(g(Z,Y)X - g(Z,X)Y), \quad (\forall)\, X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$$

unde K este un număr real.

1.31.2. Spaţiul (M, g) se numeşte **spaţiu Einstein** dacă există o funcţie $\lambda \in \mathcal{F}(M)$ astfel încât $S = \lambda g$.

1.32. Fie ∇ şi $\overline{\nabla}$ două conexiuni liniare pe o varietate analitică M şi fie $A = \overline{\nabla} - \nabla \in \mathcal{T}_2^1(M)$. Dacă se defineşte produsul a două câmpuri de vectori $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ prin formula:

$$X * Y = A(X,Y),$$

atunci $\mathcal{F}(M)$ −modulul $\mathcal{X}(M)$ devine o $\mathcal{F}(M)$ −algebră. Această algebră se numeşte **algebra de deformare** asociată cuplului de conexiuni liniare $(\nabla, \overline{\nabla})$ şi va fi notată prin $\mathcal{U}(M, A)$.

1.32.1. Un element $X \in \mathcal{U}(M, A)$ se numeşte **câmp 2-nilpotent** dacă $A(X,X) = 0$.

1.32.2. Un element $X \in \mathcal{U}(M, A)$ se numeşte **câmp principal** dacă există o 1−formă ω pe M astfel încât

$$A(Z,X) = \omega(Z)X, \quad (\forall)\, Z \in \mathcal{X}(M).$$

Dacă $\omega = 0$, atunci X se numeşte **câmp special**.

1.32.3. Un element $X \in \mathcal{U}(M, A)$ se numeşte **câmp aproape principal** dacă există o funcţie $f \in \mathcal{F}(M)$ şi o 1−forma ω pe M astfel încât

$$A(Z,X) = fZ + \omega(Z)X, \quad (\forall)\, Z \in \mathcal{X}(M).$$

Dacă $\omega = 0$, atunci X se numeşte **câmp aproape special.**

1.33. Fie (M,g) o varietate Riemann şi $A \in \mathcal{T}_2^1(M)$. Un element $X \in \mathcal{U}(M,A)$ se numeşte **câmp distins** dacă:

$$g(A(Z,X),Y) + g(Z, A(Y,X)) = 0, \quad (\forall)\, Y, Z \in \mathcal{X}(M).$$

1.34. DEFINIŢIE. *Fie (M,g) şi (M',g') două varietăţi pseudo-riemanniene. Un difeomorfism analitic*

$$h : M \to M'$$

se numeşte **izometrie** *dacă:*

$$g_p(X_p, Y_p) = g'_{h(p)}(h_*(X_p), h_*(Y_p)),$$

pentru orice $p \in M$ şi orice vectori tangenţi $X_p, Y_p \in T_pM$.

1.35. Fie M o varietate analitică şi $A \in \mathcal{T}_2^1(M)$. Un element $F \in \mathcal{T}_1^1(M)$ se numeşte **derivare în algebra $\mathcal{U}(M,A)$** dacă:

$$F(A(X,Y)) = A(F(X),Y) + A(X, F(Y)), \quad (\forall)\, X, Y \in \mathcal{X}(M).$$

1.36. Fie ∇ şi $\overline{\nabla}$ două conexiuni liniare pe varietatea analitică M şi $A = \overline{\nabla} - \nabla \in \mathcal{T}_2^1(M)$.

Perechii de conexiuni $(\nabla, \overline{\nabla})$ îi asociem câmpurile tensoriale $\rho, K \in \mathcal{T}_3^1(M)$ prin:

$$4K(X,Y)Z = A(X, A(Y,Z)) - A(Y, A(X,Z))$$

$$\begin{aligned} 2\rho(X,Y)Z \;=\; & \nabla_X \overline{\nabla}_Y Z - \overline{\nabla}_Y \nabla_X Z + \overline{\nabla}_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \overline{\nabla}_X Z - \\ & - \nabla_{[X,Y]} Z - \overline{\nabla}_{[X,Y]} Z. \end{aligned}$$

K se numeşte **câmpul tensorial al curburii de deformare**, iar ρ se numeşte **câmpul tensorial al curburii mixte** al perechii $\left(\nabla, \overline{\nabla}\right)$. Au loc identităţile:

$$2\rho + 4K = R + \overline{R}$$

$$\rho + K = \overset{m}{R}$$

$$2\rho = 4\overset{m}{R} - R - \overline{R}$$

unde R, $\overline{R}$ respectiv $\overset{m}{R}$ sunt câmpurile tensoriale de curbură ale conexiunilor ∇, $\overline{\nabla}$ respectiv $\overset{m}{\nabla} = \frac{1}{2}\left(\nabla + \overline{\nabla}\right)$.

1.37. Fie M o varietate analitică reală de dimensiune n înzestrată cu o formă diferenţială exterioară Ω, de gradul doi, nedegenerată. Atunci se spune ca varietatea M este cu **structură aproape simplectică**.

Se arată uşor că dacă varietatea M admite o structură aproape simplectică Ω, atunci $n = \dim M$ este un număr par $2m$, iar Ω poate fi scrisă sub forma canonică:

$$\Omega = \omega^1 \wedge \omega^{m+1} + ... + \omega^m \wedge \omega^{2m},$$

unde $\omega^1, ..., \omega^{2m}$ sunt $1-$forme liniar independente.

1.38. Fie (M, Ω) o varietate aproape simplectică. Dacă $2-$forma Ω este închisă, adică $d\Omega = 0$, atunci spunem că Ω defineşte o **structură simplectică** pe M, sau că perechea (M, Ω) este o **varietate simplectică**.

Fie M o varietate analitică reală cu n dimensiuni şi fie $T^*M = \bigcup_{p \in M} T_p^*M$, unde T_p^*M este spaţiul cotangent în punctul $p \in M$. Se arată ca fibrarea cotangentă T^*M are o structură simplectică naturală.

1.39. Fie (M, Ω) o varietate aproape simplectică. O conexiune liniară ∇ pe varietatea M se numeşte conexiune aproape simplectică (sau conexiune compatibilă cu structura aproape simplectică Ω) dacă

$$\nabla_X \Omega = 0, \ (\forall) X \in \mathcal{X}(M).$$

1.40. Fie (M,Ω) o varietate aproape simplectică şi fie $\overset{0}{\nabla}$ o conexiune liniară arbitrară fixată pe M. Notăm cu $\psi \in \mathcal{T}_2^2(M)$ operatorul lui Obata, adică:

$$\psi = \frac{1}{2}\left(I \otimes I - g \otimes \overline{g}\right),$$

unde I este tensorul lui Kronecker, $g \in \mathcal{T}_2^0(M)$ este câmpul tensorial definit de coeficienţii g_{ij} ai formei Ω într-o hartă locală pe M, iar $\overline{g} \in \mathcal{T}_0^2(M)$ este definit prin

$$g\overline{g} = I.$$

Atunci familia tuturor conexiunilor aproape simplectice pe M este dată de formula:

$$\nabla_X Y = \overset{0}{\nabla}_X Y + \frac{1}{2}\left(\left(\overset{0}{\nabla}_X g\right)\overline{g}\right)Y + \psi Q(X,Y),$$

unde $Q \in \mathcal{T}_2^1(M)$ este un câmp tensorial arbitrar.

Fiind dată o varietate aproape simplectică (M,Ω), se demonstrează că există o conexiune aproape simplectică simetrică dacă şi numai dacă $d\Omega = 0$.

1.41. Fie M o varietate analitică înzestrată cu un câmp tensorial $F \in \mathcal{T}_1^1(M)$.

DEFINIŢIE. *Se numeşte* **pseudoconexiune pe** M *o aplicaţie*

$$D^F : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M),\ (X,Y) \to D_X^F Y$$

care satisface condiţiile:

$$D^F_{fX+hY} = fD^F_X + hD^F_Y,\ (\forall)\, f,h \in \mathcal{F}(M),\ (\forall)\, X,Y \in \mathcal{X}(M);$$
$$D^F_X f\, Y = f\, D^F_X Y + \left(d^F f\right)(X)Y,\ (\forall)\, f \in \mathcal{F}(M),\ (\forall)\, X,Y \in \mathcal{X}(M),$$

unde $\left(d^F f\right)(X) = F(X)(f),\ (\forall)\, X \in \mathcal{X}(M).$

1.42. DEFINIŢIE. *O structură aproape complexă pe varietatea analitică M este definită de un câmp tensorial $J \in \mathcal{T}_1^1(M)$ cu proprietatea $J^2 = -I$, unde I este tensorul lui Kronecker. O varietate analitică M înzestrată cu o structură aproape complexă J se numeşte* **varietate aproape complexă** *şi se notează cu (M,J).*

Observaţie. i) Pe o varietate aproape complexă (M, J) se defineşte **tensorul lui Nijenhuis** N prin:

$$N(X,Y) = [J(X), J(Y)] - J([X, J(Y)]) - J([J(X), Y]) - [X, Y].$$

Structura aproape complexă este integrabilă dacă şi numai dacă $N = 0$.

ii) O conexiune liniară ∇ pe varietatea aproape complexă (M, J) se numeşte $J-$**conexiune** dacă $(\nabla_X J)(Y) = 0$, $(\forall)\, X, Y \in \mathcal{X}(M)$.

Se demonstrează că orice $J-$conexiune liniară pe varietatea aproape complexă (M, J) este de forma:

$$\nabla_X Y = \overset{0}{\nabla}_X Y + \frac{1}{2}\left(\overset{0}{\nabla}_X J\right)(J(Y)) + Q(X,Y) - J(Q(X, J(Y))),$$

unde $\overset{0}{\nabla}$ este o conexiune liniară fixată, iar $Q \in \mathcal{T}_2^1(M)$ este arbitrar.

1.43. DEFINIŢIE. *O varietate aproape complexă* (M, J) *dotată cu o metrică Riemann* g *astfel încât*

$$g(J(X), J(Y)) = g(X,Y), \ (\forall)\, X, Y \in \mathcal{X}(M)$$

se numeşte **varietate aproape hermitiană**.

1.44. DEFINIŢIE. *O varietate aproape hermitiană* (M, J, g) *se numeşte* **varietate Kähler** *dacă:*

$$\nabla_X J = 0, \ (\forall)\, X \in \mathcal{X}(M)$$

unde ∇ *este conexiunea Levi-Civita asociată lui* g.

§ 2. DEFINIŢIA GRUPULUI LIE. EXEMPLE

2.1. DEFINIŢIE. *Fie G o mulţime arbitrară. Presupunem că:*
i*) mulţimea G este înzestrată cu o strucură de grup*

$$\mu : (x, y) \in G \times G \to \mu(x, y) \in G,$$

ii*) mulţimea G este înzestrată cu o structură de varietate analitică reală, de dimensiune finită n.*

Tripletul format din mulţimea G şi cele două structuri se numeşte **grup Lie** *de dimensiune n dacă operaţia μ este o aplicaţie analitică a varietăţii analitice produs $G \times G$ pe varietatea analitică G.*

2.2. EXEMPLE:

2.2.1. $\mathbb{R}^n$ înzestrat cu structura canonică de varietate analitică reală şi cu structura de grup aditiv este un grup Lie.

$\mathbb{R}^n$ *este un grup Lie conex, abelian, necompact, de dimensiune n.* Elementul neutru al grupului este $e = (0, 0, ..., 0)$.

2.2.2. În mulţimea $G = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ se poate introduce o structură de grup cu ajutorul numerelor complexe de modul nenul. Definim înmulţirea a două numere complexe:

$$z = a^1 + ia^2, \quad z' = a'^1 + ia'^2$$

prin:

$$zz' = a^1 a'^1 - a^2 a'^2 + i(a^1 a'^2 + a^2 a'^1).$$

Se verifică uşor că mulţimea G înzestrată cu legea de compoziţie

$$\mu : G \times G \to G$$

definită prin:

$$\mu\left(\left(a^1, a^2\right), \left(a'^1, a'^2\right)\right) = \left(a^1 a'^1 - a^2 a'^2, a^1 a'^2 + a^2 a'^1\right)$$

este un grup. Este evident că G este o varietate analitică reală de dimensiune doi.

Deoarece aplicaţia μ este analitică rezultă că G este un grup Lie de dimensiune 2. *Grupul Lie G este conex, abelian, necompact.* Elementul neutru al grupului G este $e = (1, 0)$.

2.2.3. Dacă în exemplul precedent considerăm numere complexe de modul 1, se obţine o structură de grup Lie pe cercul S^1 (de rază $r = 1$) din planul euclidian. *Cercul S^1 este un grup Lie compact, abelian, conex, de dimensiune unu.* Elementul neutru al grupului este $e = (1, 0)$.

2.2.4. În mulţimea $G = \mathbb{R}^4 - \{0\}$ se poate introduce o structură de grup Lie cu ajutorul cuaternionilor de modul nenul. Definim înmulţirea a doi cuaternioni:

$$\begin{aligned} q &= x^1 + x^2 i + x^3 j + x^4 k \\ q' &= x'^1 + x'^2 i + x'^3 j + x'^4 k \end{aligned}$$

prin:

$$qq' = x''^1 + x''^2 i + x''^3 j + x''^4 k \ ,$$

unde:

$$\left\{ \begin{aligned} x''^1 &= x^1 x'^1 - x^2 x'^2 - x^3 x'^3 - x^4 x'^4 \\ x''^2 &= x^3 x'^4 - x^4 x'^3 + x^1 x'^2 + x^2 x'^1 \\ x''^3 &= x^1 x'^3 + x^3 x'^1 + x^4 x'^2 - x^2 x'^4 \\ x''^4 &= x^4 x'^1 + x^1 x'^4 + x^2 x'^3 - x^3 x'^2 \end{aligned} \right. .$$

Se verifică uşor că mulţimea G înzestrată cu legea de compoziţie:

$$\mu : G \times G \to G$$

definită prin:

$$\mu\left(\left(x^1, x^2, x^3, x^4\right), \left(x'^1, x'^2, x'^3, x'^4\right)\right) = \left(x''^1, x''^2, x''^3, x''^4\right)$$

este un grup necomutativ. Este uşor de văzut că G este varietate analitică reală de dimensiune patru. Deoarece aplicaţia μ este analitică, rezultă că G este grup Lie de dimensiune patru. *Acest grup Lie este conex, neabelian, necompact.* Elementul neutru al grupului G este $e = (1, 0, 0, 0)$.

2.2.5. Considerând în exemplul precedent cuaternioni de modul 1 se obţine o structură de grup Lie pe sfera unitate S^3 (ca subgrup al grupului cuaternionilor nenuli).

Grupul Lie S^3 este compact, neabelian, conex, de dimensiune trei. Elementul neutru al grupului Lie S^3 este $e = (1, 0, 0, 0)$.

2.2.6. Considerăm mulţimea:

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 \neq 0\}.$$

Se verifică uşor că mulţimea G înzestrată cu legea de compoziţie:

$$\mu : G \times G \to G$$

definită prin:

$$\mu((x, y)(x', y')) = (xx' + yy', xy' + x'y)$$

este un grup. Elementul neutru al grupului G este $e = (1, 0)$. Este uşor de văzut că G este o varietate analitică reală de dimensiune doi. Deoarece μ este aplicaţie analitică, rezultă că G este grup Lie de dimensiune doi.

Acest grup Lie este neconex, abelian, necompact.

2.2.7. Fie $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ mulţimea matricelor pătratice de ordinul n cu elemente în $\mathbb{R}$. Considerăm mulţimea:

$$GL(n, \mathbb{R}) = \{a \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \det a \neq 0\}.$$

Asociem fiecărei matrice $\| a^i_j \|$ punctul $(a^1_1, ..., a^n_1, ..., a^1_n, ..., a^n_n) \in \mathbb{R}^{n^2}$. În acest fel $GL(n, \mathbb{R})$ apare ca mulţime deschisă în $\mathbb{R}^{n^2}$. Rezultă că $GL(n, \mathbb{R})$ este varietate analitică reală de dimensiune n^2. Mulţimea $GL(n, \mathbb{R})$ împreună cu operaţia de înmulţire a matricelor este un grup. Elementul neutru al grupului $GL(n, \mathbb{R})$ este matricea unitate de ordinul n. Deoarece aplicaţia:

$$\mu : (a, b) \in GL(n, \mathbb{R}) \times GL(n, \mathbb{R}) \to \mu(a, b) = ab \in GL(n, \mathbb{R})$$

este analitică, rezultă că $GL(n, \mathbb{R})$ este grup Lie.

Grupul Lie $GL(n, \mathbb{R})$ este neconex, necompact, neabelian (dacă $n > 1$). Dimensiunea grupului Lie $GL(n, \mathbb{R})$ este $n^2 = \dim \mathbb{R}^{n^2}$. Grupul Lie $GL(n, \mathbb{R})$ este numit **grupul liniar general real**.

2.2.8. Mulţimea $G = \mathbb{R}^*_+$ a numerelor reale strict pozitive, împreună cu operaţia:

$$\mu : (x, y) \in G \times G \to \mu(x, y) = xy \in G$$

este un grup. În plus, G are o structură canonică de varietate analitică de dimensiune unu.

Deoarece aplicaţia μ este analitică, rezultă că G *este grup Lie de dimensiune unu.*

2.2.9. Considerăm mulţimea $G = \mathbb{R} - \{-1\}$. Se verifică uşor că mulţimea G înzestrată cu legea de compoziţie

$$\mu : G \times G \to G \ , \quad \mu(a, b) = ab + a + b$$

este un grup. Elementul neutru al grupului G este $e = 0$. Este uşor de văzut că G este varietate analitică reală de dimensiune unu. Deoarece μ este aplicaţie analitică, rezultă că G este grup Lie de dimensiune unu.

Acest grup Lie este neconex, abelian, necompact.

2.2.10. Considerăm mulţimea:

$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (y^2 - z^2)x \neq 0\}$$

şi aplicaţia

$$\mu : G \times G \to G$$

definită prin:

$$\mu\left((x, y, z), (x', y', z')\right) = (xx', yz' + y'z, yy' + zz').$$

Se constată uşor că mulţimea G înzestrată cu legea de compoziţie μ este un grup. Elementul neutru al grupului este $e = (1, 0, 1)$. Este evident că G este varietate analitică reală de dimensiune trei.

Deoarece μ este aplicaţie analitică, rezultă că G *este grup Lie de dimensiune trei. Acest grup Lie este neconex, abelian, necompact.*

2.2.11. Fie mulţimea $\mathbb{R}^2$ şi aplicaţia

$$\begin{aligned}
&\mu : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \\
&\mu\left((a^1, a^2), \left(a'^1, a'^2\right)\right) = \left(a''^1, a''^2\right),
\end{aligned}$$

unde:

$$\begin{cases} a''^1 = a^1 + a'^1 e^{-a^2} \\ a''^2 = a^2 + a'^2 \end{cases}$$

Se constată uşor că $(\mathbb{R}^2, \mu)$ este grup. Elementul neutru al acestui grup este $(0, 0)$. Este evident că $\mathbb{R}^2$ este varietate analitică de dimensiune 2. Deoarece

μ este aplicaţie analitică, rezultă că μ determină pe varietatea $\mathbb{R}^2$ o structură de grup Lie.

2.2.12. Considerăm varietatea analitică $\mathbb{R}^4$ şi aplicaţia

$$\mu : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$$

definită prin

$$\mu\left(\left(a^1, a^2, a^3, a^4\right), \left(a'^1, a'^2, a'^3, a'^4\right)\right) =$$

$$= \left(a^1 e^{ka'^3} + a'^1, a^2 e^{-ka'^3} + a'^2, a^3 + a'^3, a^4 + a'^4 - ha^1 a'^2 e^{ka'^3}\right)$$

unde k şi h sunt parametrii reali arbitrari. Se constată uşor că $(\mathbb{R}^4, \mu)$ este grup. Deoarece μ este aplicaţie analitică, obţinem că legea μ determină pe varietatea $\mathbb{R}^4$ o structură de grup Lie.

2.3. OBSERVAŢIE. Considerăm mulţimea $G = \mathbb{R}$ şi aplicaţia:

$$\mu : G \times G \to G,$$

definită prin:

$$\mu(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}.$$

Se verifică fără dificultate că μ este o lege de grup în mulţimea G. În plus, G este varietate analitică de dimensiune $n = 1$. Aplicaţia μ nu este analitică. Rezultă că *aplicaţia μ nu determină o structură de grup Lie pe varietatea G.*

§ 3. PROPRIETĂŢI IMEDIATE ALE GRUPURILOR LIE

3.1. PROPOZIŢIE. i) *Fie G un grup Lie. Pentru orice $a \in G$, aplicaţiile:*

$$L_a : x \in G \to L_a(x) = ax \in G$$

şi

$$R_a : x \in G \to R_a(x) = xa \in G$$

sunt difeomorfisme analitice. L_a (respectiv R_a) se numeşte **translaţia la stânga** *(respectiv* **la dreapta***) a grupului Lie G definită de elementul $a \in G$.*

ii) *Mulţimea translaţiilor la stânga ale grupului Lie G, înzestrată cu legea de compunere obişnuită a funcţiilor, formează un grup (numit* **primul grup al parametrilor** *al lui G).*

iii) *Primul grup al parametrilor al grupului Lie G este izomorf cu grupul G.*

Demonstraţie. i) Notăm cu e elementul neutru al grupului G. Pentru orice $a \in G$ avem:

$$L_a \circ L_a^{-1} = L_a^{-1} \circ L_a = L_e = Id_G.$$

Rezultă că aplicaţia L_a este inversabilă şi $(L_a)^{-1} = L_{a^{-1}}$. Ţinând seama de propoziţia 1.11 i), obţinem că aplicaţia

$$x \in G \to (a, x) \in G \times G$$

este analitică. Deoarece pentru orice $a \in G$, L_a este compunerea aplicaţiilor analitice:

$$\begin{gathered} G \to G \times G \to G \\ x \to (a, x) \to \mu(a, x) = ax = L_a(x), \end{gathered}$$

rezultă că aplicaţia L_a este analitică. Am obţinut că pentru orice $a \in G$, aplicaţiile L_a şi $(L_a)^{-1} = L_{a^{-1}}$ sunt analitice, deci L_a este difeomorfism analitic.

Analog se arată că R_a este difeomorfism analitic, oricare ar fi $a \in G$.

ii) Verificările sunt triviale. Elementul neutru este translaţia $L_e = Id_G$.

iii) Fie h aplicaţia care asociază fiecarui punct $a \in G$ translaţia la stânga L_a. Deoarece

$$h(ab) = L_{ab} = L_a \circ L_b = h(a) \circ h(b),$$

rezultă că h este homomorfism de grupuri. Homomorfismul h este injectiv deoarece $h(a) = h(b)$ implică $L_a = L_b$, adică $a = b$. Deoarece h este surjectiv rezultă că h este izomorfism de grupuri.

3.2. PROPOZIŢIE. *Fie G un grup Lie. Aplicaţia de inversare*

$$j : x \in G \to j(x) = x^{-1} \in G$$

este un difeomorfism analitic.

Demonstraţie. Deoarece $j \circ j = Id_G$, rezultă că aplicaţia j are inversă şi $j^{-1} = j$. Mai rămâne să arătăm că aplicaţia j este analitică.

Considerăm aplicaţia:

$$\varphi : G \times G \to G \times G$$

definită prin:

$$\varphi(x, y) = (x, \mu(x, y)) = (x, L_x(y)).$$

Este evident că φ este aplicaţie bijectivă. Deoarece μ este aplicaţie analitică rezultă că şi φ este analitică. Matricea iacobiană a aplicaţiei φ este:

$$J(\varphi) = \left\| \begin{matrix} I & 0 \\ \partial_1\mu & \partial_2\mu \end{matrix} \right\|,$$

unde I este matricea unitate de ordinul $n = \dim G$, iar ∂_1 (respectiv ∂_2) este derivata Fréchet parţială în raport cu x (respectiv cu y).

Pentru x fixat, aplicaţia:

$$L_x : y \in G \to L_x(y) = \mu(x, y) \in G$$

este un difeomorfism analitic. Rezultă că aplicaţia:

$$(L_x)_* : \mathcal{X}(G) \to \mathcal{X}(G)$$

este un izomorfism liniar. Rezultă că matricea aplicaţiei liniare $(L_x)_*$ este nesingulară. Deoarece avem $(L_x)_* = \partial_2\mu$, rezultă că şi matricea $J(\varphi)$ este nesingulară. Aceasta ne arată că inversa φ^{-1} a aplicaţiei φ este analitică. Aplicaţia

$$\varphi^{-1} : G \times G \to G \times G$$

este dată prin:

$$\varphi^{-1}(x, y) = (x, x^{-1}y).$$

Fixând al doilea argument $y = e$ obţinem aplicaţia analitică

$$(x, e) \to \varphi^{-1}(x, e) = (x, x^{-1}) = (x, j(x)).$$

Deoarece φ^{-1} este aplicaţie analitică, rezultă că şi componenta a două este analitică, deci aplicaţia j este analitică. Prin urmare, aplicaţia $j = j^{-1}$ este un difeomorfism analitic.

3.3. PROPOZIŢIE. *Fie G o varietate analitică de dimensiune finită înzestrată cu o structură de grup*

$$\mu : (x, y) \in G \times G \to \mu(x, y) = xy \in G.$$

Următoarele afirmaţii sunt echivalente:
(i) G este grup Lie.
(ii) Aplicaţia

$$(x, y) \in G \times G \to xy^{-1} \in G$$

este analitică.

Demonstraţie. (i)⇒(ii). Deoarece G este un grup Lie, aplicaţia μ este analitică. De asemenea, aplicaţia de inversare $x \to x^{-1}$ este analitică.

Rezultă că aplicaţia

$$(x, y) \in G \times G \to xy^{-1} \in G$$

este analitică, ea fiind compunerea aplicaţiilor analitice

$$(x, y) \in G \times G \to (x, y^{-1}) \in G \times G \to xy^{-1} \in G.$$

(ii)⇒(i). Deoarece aplicaţia

$$(x, y) \in G \times G \to xy^{-1} \in G$$

este analitică rezultă că aplicaţia $y \to y^{-1}$ este analitică, ea fiind compunerea aplicaţiilor analitice:

$$y \in G \to (e, y) \in G \times G \to y^{-1} \in G.$$

Aplicaţia μ este analitică deoarece ea este compunerea aplicaţiilor analitice:

$$\begin{gathered} G \times G \to G \times G \to G \\ (x, y) \to (x, y^{-1}) \to x(y^{-1})^{-1} = xy. \end{gathered}$$

Prin urmare, G este grup Lie.

Q.E.D.

Construcţia unor grupuri Lie, plecând de la grupuri Lie date, este indicată în următoarele trei propoziţii.

3.4. PROPOZIŢIE. *Produsul direct a două grupuri Lie este un grup Lie.*

Demonstraţie. Fie G şi G' două grupuri Lie. Mulţimea $G \times G'$ are o structură de grup (produsul direct al grupurilor G şi G') şi o structură de varietate analitică reală (produsul varietăţilor analitice reale G şi G').

Deoarece aplicaţia

$$\begin{gathered} (G \times G') \times (G \times G') \to G \times G' \\ ((x, x'), (y, y')) \to (xy, x'y') \end{gathered}$$

este analitică, rezultă că $G \times G'$ este un grup Lie. Dimensiunea acestui grup este $\dim G + \dim G'$.

Q.E.D.

Observaţie. Folosind propoziţia 3.4 obţinem uşor alte grupuri Lie.

De exemplu:

i) *Cilindrul real cu două dimensiuni* $\mathbb{R} \times S^1$ *este un grup Lie de dimensiune doi.*

ii) *Torul* $T^n = \underbrace{S^1 \times \ldots \times S^1}_{de\ n\ ori}$ *este un grup Lie de dimensiune* n. *Torul* T^n *este un grup Lie abelian, compact şi conex.*

Notaţie. Dacă G este un grup Lie, atunci prin G_e se notează mulţimea punctelor din G care pot fi unite cu elementul neutru $e \in G$ printr-un drum continuu conţinut în G (G_e se numeşte *componenta conexă a unităţii*).

3.5. PROPOZIŢIE. *G_e este grup Lie de dimensiune egală cu $n = \dim G$.*
Demonstraţie. Fie $x, y \in G_e$. Există drumurile continue

$$f_{e,x} : [0,1] \to G,\ f_{e,y} : [0,1] \to G$$

astfel încât:

$$f_{e,x}(0) = f_{e,y}(0) = e,\ f_{e,x}(1) = x,\ f_{e,y}(1) = y.$$

Definim drumul continuu

$$f_{e,xy} : [0,1] \to G$$

prin formula:

$$f_{e,xy}(t) = f_{e,x}(t)\, f_{e,y}(t)\,.$$

Deoarece

$$f_{e,xy}(0) = e \text{ şi } f_{e,xy}(1) = xy$$

rezultă că $xy \in G_e$. Definim acum drumul continuu

$$f_{e,x^{-1}} : [0,1] \to G$$

prin formula:

$$f_{e,x^{-1}}(t) = j \circ f_{e,x}(t)\,,$$

unde $j : x \in G \to j(x) = x^{-1} \in G$ este aplicaţia de inversare.
Deoarece

$$f_{e,x^{-1}}(0) = e \text{ si } f_{e,x^{-1}}(1) = x^{-1},$$

rezultă că $x^{-1} \in G_e$. Prin urmare, G_e este subgrup al grupului G.
Vom arăta acum că G_e este mulţime deschisă în varietatea G. Fie $x \in G_e$. Există drumul continuu $f_{e,x} : [0,1] \to G$ cu proprietatea că:

$$f_{e,x}(0) = e, \ f_{e,x}(1) = x.$$

Fie (U, h) o hartă locală a varietăţii G astfel încât $x \in U$. Dacă U nu este mulţime conexă, atunci vom urma calea descrisă în continuare. Mulţimea $h(U)$ fiind deschisă în $\mathbb{R}^n$, rezultă că putem alege o sferă deschisă $S_{h(x),r}$ de centru $h(x)$ şi de rază r suficient de mică, astfel încât $S_{h(x),r} \subset h(U)$. Deoarece $S_{h(x),r}$ este mulţime conexă rezultă că şi mulţimea $U' = h^{-1}(S_{h(x),r})$ este conexă.

Vom înlocui perechea (U, h) prin perechea (U', h') unde $h' = h\,|_{U'}$.

Prin urmare, de fiecare dată putem să alegem o hartă (U, h) în jurul punctului x astfel încât U să fie mulţime conexă. U fiind mulţime conexă, rezultă că pentru orice $y \in U$ există un drum continuu

$$f_{x,y} : [0, 1] \to G,$$

astfel încât:

$$f_{x,y}(0) = x \text{ şi } f_{x,y}(1) = y.$$

Definim aplicaţia:

$$f_{e,y} : [0, 1] \to G$$

prin formula:

$$f_{e,y}(t) = \begin{cases} f_{e,x}(2t) \text{ ,dacă } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ f_{x,y}(2t-1) \text{ ,dacă } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Deoarece avem:

$$\begin{gathered} f_{e,y}(\tfrac{1}{2}) = f_{e,x}\,(1) = f_{x,y}\,(0) = x, \\ f_{e,y}\,(0) = f_{e,x}\,(0) = e, \\ f_{e,y}\,(1) = f_{x,y}\,(1) = y \end{gathered}$$

rezultă că $f_{e,y}$ este un drum continuu care uneşte punctul y cu e. Aceasta ne arată că $y \in G_e$. Rezultă că $U \subset G_e$. Deci pentru un punct arbitrar $x \in G_e$ există o mulţime deschisă U care conţine punctul x şi $U \subset G_e$. Prin urmare, G_e este mulţime deschisă în varietatea G. Rezultă că G_e este varietate analitică reală de dimensiune $n = \dim G$.

Deoarece restricţia unei aplicaţii analitice la o mulţime deschisă este o aplicaţie analitică, obţinem că aplicaţia:

$$(x, y) \in G_e \times G_e \to xy \in G_e$$

este analitică. Prin urmare G_e este un grup Lie.

Q.E.D.

3.6. PROPOZIŢIE. *Fie G un grup Lie de dimensiune n şi fie $TG = \bigcup_{a \in G} T_a G$, unde $T_a G$ este spaţiul liniar tangent la varietatea G într-un punct oarecare $a \in G$. Atunci pe TG se poate introduce o structură de grup Lie de dimensiune $2n$.*

Pentru demonstraţie vom folosi următoarea lemă:

3.7. LEMĂ. *Fie G un grup Lie. Pentru $a, b \in G$ considerăm aplicaţiile analitice:*

$$k_a : x \in G \to k_a(x) = (a, x) \in \{a\} \times G$$
$$i_b : x \in G \to i_b(x) = (x, b) \in G \times \{b\}.$$

Fie μ operaţia grupală în G. Atunci:

i) *Au loc egalităţile:*

$$\mu \circ k_a = L_a, \mu \circ i_b = R_b,$$

unde L_a (resp. R_b) este translaţia la stânga (resp. la dreapta) a grupului Lie G definită de elementul a (resp. b).

ii) *Pentru $X_a \in T_a G$, $Y_b \in T_b G$, au loc egalităţile:*

(ii') $(k_a)_* (Y_b) = (0_a, Y_b)$, $(i_b)_* (X_a) = (X_a, 0_b)$,

(ii") $(R_b)_* (X_a) + (L_a)_* (Y_b) = \mu_* (X_a, Y_b)$,

(ii"') $(L_{a^{-1}})_* \circ (R_{a^{-1}})_* (X_a) + j_* (X_a) = 0_{a^{-1}}$,

unde 0_x este vectorul nul al spaţiului liniar tangent $T_x G$, iar

$$j : x \in G \to j(x) = x^{-1} \in G$$

este aplicaţia de inversare în grupul G.

Demonstraţia lemei 3.7. i) Deoarece pentru orice $x \in G$ avem

$$\mu \circ k_a(x) = \mu(a, x) = ax = L_a(x),$$
$$\mu \circ i_b(x) = \mu(x, b) = xb = R_b(x),$$

rezultă:

$$\mu \circ k_a = L_a \text{ şi } \mu \circ i_b = R_b.$$

ii) Considerăm o curbă analitică

$$\gamma : \mathbb{R} \to G$$

astfel încât $\gamma(0) = b$ şi $\dot{\gamma}(0) = Y_b$, unde $\dot{\gamma}(0) = \gamma_* \left(\frac{d}{dt}|_{t=0}\right)$.
Fie aplicaţia

$$\beta : \mathbb{R} \to G \times G,$$

definită prin

$$\beta(t) = k_a \circ \gamma(t) = (a, \gamma(t)).$$

Deoarece aplicaţiile k_a şi γ sunt analitice, rezultă că β este o curbă analitică. Din egalitatea $\dot{\beta}(t) = \left(0_a, \dot{\gamma}(t)\right)$, obţinem:

$$\dot{\beta}(0) = \left(0_a, \dot{\gamma}(0)\right) = (0_a, Y_b).$$

Pe de altă parte, avem:

$$\begin{aligned} \dot{\beta}(0) &= \beta_* \left(\frac{d}{dt}|_{t=0}\right) = (k_a \circ \gamma)_* \left(\frac{d}{dt}|_{t=0}\right) = \\ &= (k_a)_* \left(\dot{\gamma}(0)\right) = (k_a)_*(Y_b). \end{aligned}$$

Rezultă

$$(k_a)_*(Y_b) = (0_a, Y_b).$$

Analog se obţine:

$$(i_b)_*(X_a) = (X_a, 0_b).$$

Ţinând seama de relaţiile stabilite mai sus, avem:

$$\begin{aligned}(R_b)_*(X_a) + (L_a)_*(Y_b) &= (\mu \circ i_b)_*(X_a) + (\mu \circ k_a)_*(Y_b) = \\ &= \mu_*(X_a, 0_b) + \mu_*(0_a, Y_b) = \mu_*(X_a, Y_b).\end{aligned}$$

Rămâne să mai stabilim formula (ii"'). Definim aplicaţia

$$f : G \to G,$$

prin formula

$$f(x) = \mu \circ (Id_G \times j)(x, x).$$

Pentru orice $x \in G$ avem:

$$f(x) = \mu(x, j(x)) = xj(x) = xx^{-1} = e,$$

unde e este elementul neutru al grupului G. Rezultă $f_*(X_x) = 0_e$, oricare ar fi $X_x \in T_xG$. Avem deci:

$$0_e = \mu_* \circ (Id_{TG} \times j_*)(X_a, X_a) = \mu_*(X_a, j_*(X_a))$$

şi, folosind relaţia (ii'), rezultă

$$(R_{j(a)})_*(X_a) + (L_a)_*(j_*(X_a)) = 0_e.$$

Aplicând $(L_{a^{-1}})_*$ ultimei relaţii, se obţine (ii"').

Q.E.D.

Demonstraţia propoziţiei 3.6. Vom reaminti construcţia fibratului tangent TM în cazul varietăţii $M = G$. Fie (U, h) o hartă locală a varietăţii G. Notăm cu $x^1, x^2, ..., x^n$ funcţiile coordonate asociate hărţii (U, h). Definim aplicaţia

$$H : TU = \bigcup_{a \in U} T_aG \to h(U) \times \mathbb{R}^n,$$

prin formula

$$H(X_a) = (h(a), X_a^1, ..., X_a^n),$$

unde

$$X_a = X_a^i \frac{\partial}{\partial x^i} |_a .$$

Avem:

$$H(X_a) = H(X_b) \Leftrightarrow \left(h(a), X_a^1, ..., X_a^n\right) = \left(h(b), Y_b^1, ..., Y_b^n\right) .$$

Ultima egalitate implică $h(a) = h(b)$ şi $X_a^i = Y_b^i$, $i = 1, 2, ..., n$, deci $X_a = Y_b$.

Prin urmare, H este aplicaţie injectivă.

Deoarece pentru orice $(u, v^1, ..., v^n) \in h(U) \times \mathbb{R}^n$ putem construi un vector tangent în a la G prin formula $X_a = v^i \frac{\partial}{\partial x^i} |_a$, unde $a = h^{-1}(u)$, rezultă că H este o aplicaţie surjectivă.

Pe mulţimea TU introducem topologia pentru care H este homeomorfism (deci o mulţime din TU este o mulţime deschisă dacă şi numai dacă imaginea ei prin H este mulţime deschisă în $h(U) \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{2n}$).

Fie $(\overline{U}, \overline{h})$ o altă hartă a varietăţii G astfel încât $\overline{U} \cap U \neq \varnothing$. Avem:

$$H(TU \cap T\overline{U}) = H(T(U \cap \overline{U})) = h(U \cap \overline{U}) \times \mathbb{R}^n,$$

deci $H(TU \cap T\overline{U})$ este mulţime deschisă în $\mathbb{R}^{2n}$. Deoarece H este homeomorfism, rezultă că $TU \cap T\overline{U}$ este mulţime deschisă atât în TU cât şi în $T\overline{U}$.

Definim acum deschişii lui TG. O mulţime $V \subset TG$ este mulţime deschisă dacă şi numai dacă oricare ar fi harta (U, h) a varietăţii G, cu $TU \cap V \neq \varnothing$, mulţimea $H(TU \cap V)$ este o mulţime deschisă în $h(U) \times \mathbb{R}^n$.

Deci hărţile pe TG vor fi perechi de forma (TU, H). Este evident că reuniunea domeniilor acestor hărţi ne dă TG, din cauză că reuniunea domeniilor hărţilor lui G ne dă G.

Considerăm două hărţi arbitrare (TU, H) şi $(T\overline{U}, \overline{H})$ astfel încât $TU \cap T\overline{U} \neq \varnothing$. Să arătăm că aplicaţia

$$\begin{aligned} \overline{H} \circ H^{-1} \qquad & H\left(TU \cap T\overline{U}\right) = h\left(U \cap \overline{U}\right) \times \mathbb{R}^n \to \overline{H}\left(TU \cap T\overline{U}\right) = \\ = \; & \overline{h}\left(U \cap \overline{U}\right) \times \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

este analitică. Fie $a \in U \cap \overline{U}$. Rezultă: $u = h(a) \in h\left(U \cap \overline{U}\right)$. Fie $v^1, v^2, ..., v^n \in \mathbb{R}$. Avem:

$$
\begin{aligned}
\overline{H} \circ H^{-1}\left(u, v^1, ..., v^n\right) &= \overline{H} \circ H^{-1}\left(h(a), v^1, v^2, ..., v^n\right) = \\
&= \overline{H}\left(v^i \frac{\partial}{\partial x^i} |_a\right) = \overline{H}\left(v^i \frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^i} |_a \frac{\partial}{\partial \overline{x}^j} |_a\right) = \\
&= \left(\overline{h}(a), v^i \frac{\partial \overline{x}^1}{\partial x^i} |_a, ..., v^i \frac{\partial \overline{x}^n}{\partial x^i} |_a\right) = \\
&= \left(\overline{h} \circ h^{-1}(u), \overline{v}^1, ..., \overline{v}^n\right),
\end{aligned}
$$

unde $\overline{v}^i = \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^j} |_a v^j$ (am notat cu $x^1, x^2, ..., x^n$ (resp. $\overline{x}^1, \overline{x}^2, ..., \overline{x}^n$) funcţiile coordonate asociate hărţii (U, h) (resp. $(\overline{U}, \overline{h})$)). Am obţinut deci

$$
\overline{H} \circ H^{-1}(u, v^1, ..., v^n) = (\overline{h} \circ h^{-1}(u), \overline{v}^1, ..., \overline{v}^n) ,
$$

ceea ce ne arată că aplicaţia $\overline{H} \circ H^{-1}$ este analitică.

Deoarece spaţiul topologic G este separat, rezultă că şi TG este separat.

Deci TG este varietate analitică de dimensiune $2n$.

Vom arăta acum că dacă

$$
\mu : (a, b) \in G \times G \to \mu(a, b) = ab \in G
$$

este legea de grup în mulţimea punctelor lui G, atunci aplicaţia:

$$
\mu_* : (X_a, Y_b) \in TG \times TG \to \mu_*(X_a, Y_b) \in TG
$$

este o lege de grup în mulţimea punctelor lui TG.

Deoarece μ este asociativă, rezultă

$$
\mu \circ (\mu \times Id_G) = \mu \circ (Id_G \times \mu).
$$

Această relaţie implică

$$
\mu_* \circ (\mu_* \circ Id_{TG}) = \mu_* \circ (Id_{TG} \circ \mu_*),
$$

ceea ce arată că operaţia μ_* este asociativă.

Folosind acum formula (ii") stabilită în lema 3.7, obţinem pentru orice $a \in G$ şi orice $X_a \in T_aG$, egalităţile:

$$
\begin{aligned}
\mu_*(0_e, X_a) = (R_a)_*(0_e) + (L_e)_*(X_a) = 0_a + X_a = X_a, \\
\mu_*(X_a, 0_e) = (R_e)_*(X_a) + (L_a)_*(0_e) = X_a + 0_a = X_a.
\end{aligned}
$$

Rezultă că vectorul 0_e este elementul neutru în raport cu legea μ_*.

Ţinând seama de formulele (ii") şi (ii"') stabilite în lema 3.7, avem:

$$\begin{aligned}
\mu_*(j_*(X_a), X_a) &= (R_a)_*(j_*(X_a)) + (L_{a^{-1}})_*(X_a) = \\
&= -(R_a)_*((L_{a^{-1}})_*(R_{a^{-1}})_*(X_a)) + (L_{a^{-1}})_*(X_a) = \\
&= -(L_{a^{-1}})_*(X_a) + (L_{a^{-1}})_*(X_a) = (L_{a^{-1}})_*(-X_a + X_a) = \\
&= 0_e.
\end{aligned}$$

Analog obţinem $\mu_*(X_a, j_*(X_a)) = 0_e$. Prin urmare, $j_*(X_a)$ este simetricul elementului X_a în raport cu legea μ_*. Rezultă că μ_* este o lege de grup în mulţimea punctelor lui TG.

Ţinând seama de 1.10, obţinem că structura de grup a lui TG este compatibilă cu structura de varietate analitică reală a lui TG, adică aplicaţia

$$\mu_* : TG \times TG \to TG,$$

este analitică. Prin urmare, TG este grup Lie de dimensiune $2n$.

Q.E.D.

§ 4. ACŢIUNI ALE GRUPULUI ADITIV LIE $\mathbb{R}$ ÎNTR-O VARIETATE ANALITICĂ

4.1. DEFINIŢIE. *Fie M o varietate analitică. Se numeşte* **acţiune** *a grupului aditiv Lie $\mathbb{R}$ în varietatea M orice aplicaţie*

$$\gamma : \mathbb{R}\times M \to M,$$

care verifică condiţiile:
(a$_1$) *γ este o aplicaţie analitică,*
(a$_2$) $\gamma(t,\gamma(t',p)) = \gamma(t+t',p)$, $(\forall)t,t' \in \mathbb{R}$, $(\forall)p \in M$,
(a$_3$) $\gamma(0,p) = p$, $(\forall)p \in M$.

4.2. PROPOZIŢIE. *Fie*

$$\gamma : \mathbb{R}\times M \to M$$

o acţiune a grupului aditiv Lie $\mathbb{R}$ în varietatea analitică M. Atunci:
i) *Pentru orice $t \in \mathbb{R}$ aplicaţia*

$$\gamma_t : p \in M \to \gamma_t(p) = \gamma(t,p) \in M$$

este difeomorfism analitic.
ii) *Mulţimea $\{\gamma_t \mid t \in \mathbb{R}\}$ formează un grup în raport cu compunerea difeomorfismelor lui M.*
iii) *Fie $p \in M$ şi aplicaţia*

$$\gamma_p : t \in \mathbb{R} \to \gamma_p(t) = \gamma(t,p) \in M.$$

Mulţimea

$$H_p = \{t \in \mathbb{R} \mid \gamma_p(t) = p\}$$

este subgrup închis al grupului Lie $\mathbb{R}$ (H_p se numeşte **grupul de stabilitate al punctului** *p în raport cu acţiunea γ. Imaginea aplicaţiei γ_p se numeşte* **orbita punctului** *p în raport cu acţiunea γ).*

Demonstraţie.
i) Aplicaţia γ_t este analitică, deoarece am fixat un argument într-o aplicaţie analitică de două argumente. Pentru orice $t, t' \in \mathbb{R}$ avem

$$\gamma_t \circ \gamma_{t'} = \gamma_{t+t'}$$

Rezultă:

$$\gamma_t \circ \gamma_{-t} = \gamma_0 = Id_M \text{ şi } \gamma_{-t} \circ \gamma_t = \gamma_0 = Id_M.$$

Rezultă că aplicaţiile γ_t şi γ_{-t} sunt inverse una alteia, deci $(\gamma_t)^{-1} = \gamma_{-t}$. Deoarece γ_t şi $(\gamma_t)^{-1}$ sunt analitice, obţinem că γ_t este un difeomorfism analitic.

ii) Verificările sunt triviale.

iii) Deoarece $\gamma_p(0) = \gamma(0,p) = p$, rezultă $0 \in H_p$. Dacă $t, t' \in H_p$, rezultă

$$\gamma_p(t+t') = \gamma(t+t',p) = \gamma(t,\gamma(t',p)) = \gamma(t,p) = p,$$

ceea ce ne arată că $t + t' \in H_p$. În continuare avem:

$$\gamma_p(-t) = \gamma(-t,p) = \gamma(-t,\gamma(t,p)) = \gamma((-t+t),p) = \gamma(0,p) = p,$$

adică $-t \in H_p$. Rezultă că H_p este subgrup al grupului $\mathbb{R}$. Deoarece mulţimea punctelor $t \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că $\gamma(t,p) = p$ este o mulţime închisă în $\mathbb{R}$, obţinem că H_p este subgrup închis al grupului Lie $\mathbb{R}$.

4.3. PROPOZIŢIE. *Fie $\gamma : \mathbb{R} \times M \to M$ o acţiune a grupului (aditiv) Lie $\mathbb{R}$ în varietatea analitică M.*

i) *Fie $p, p' \in M$. Dacă $p' \in \operatorname{Im}\gamma_p$, atunci $\gamma_p(\mathbb{R}) = \gamma_{p'}(\mathbb{R})$.*

ii) *Fie H_p grupul de stabilitate al unui punct $p \in M$ faţă de acţiunea γ. Dacă $H_p = \mathbb{R}$, atunci orbita ce conţine punctul p se reduce la un punct.*

Demonstraţie.

i) Deoarece $p' \in \operatorname{Im}\gamma_p$,rezultă că există $t' \in \gamma_{p'}(\mathbb{R})$ astfel încât:

$$p' = \gamma_p(t') = \gamma(t',p) = \gamma_{t'}(p) \text{ şi } p = \gamma_{-t'}(p').$$

Fie $q \in \gamma_{p'}(\mathbb{R})$. Rezultă că există $t \in \mathbb{R}$ astfel încât:

$$\begin{aligned} q &= \gamma_{p'}(t) = \gamma(t,p') = \gamma(t,\gamma_{t'}(p)) = \gamma(t,\gamma(t',p)) = \\ &= \gamma(t+t',p) = \gamma_p(t+t') \in \gamma_p(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Fie $z \in \gamma_p(\mathbb{R})$. Rezultă că există $s \in \mathbb{R}$ astfel încât:

$$\begin{aligned} z &= \gamma_p(s) = \gamma(s,p) = \gamma(s, \gamma_{-t'}(p')) = \gamma(s, \gamma(-t', p')) = \\ &= \gamma(s-t', p') = \gamma_{p'}(s-t') \in \gamma_{p'}(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Rezultă $\gamma_p(\mathbb{R}) = \gamma_{p'}(\mathbb{R})$.

ii) Din $H_p = \mathbb{R}$, rezultă $\gamma_p(t) = p$, pentru orice $t \in \mathbb{R}$, deci $\gamma_p(\mathbb{R}) = p$.

4.4. EXEMPLE.

4.4.1. Fie aplicaţia

$$\gamma : \mathbb{R} \times S^2 \to S^2$$

definită prin

$$\gamma(t, (x^1, x^2, x^3)) = (x^1 \cos t - x^2 \sin t, x^1 \sin t + x^2 \cos t, x^3),$$

unde $(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 1$.

Se verifică fără dificultate condiţiile (a_1), (a_2), (a_3) din definiţia 4.1, deci γ este o acţiune a grupului aditiv Lie $\mathbb{R}$ în varietatea S^2. Se vede că acţiunea γ defineşte **grupul rotaţiilor sferei** S^2 în jurul axei $0x^3$.

4.4.2. Considerăm varietatea analitică $\mathbb{R}^n$ şi aplicaţia

$$\gamma : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

definită prin

$$\gamma(t, (x^1, ..., x^n)) = (x^1 + tv^1, ..., x^n + tv^n),$$

unde $v = (v^1, ..., v^n)$ este un vector fixat în $\mathbb{R}^n$. Se verifică uşor condiţiile (a_1), (a_2), (a_3) din definiţia 4.1, deci γ este o acţiune a grupului aditiv Lie $\mathbb{R}$ în varietatea $\mathbb{R}^n$. Se vede că acţiunea γ defineşte **grupul translaţiilor spaţiului vectorial $\mathbb{R}^n$ după direcţia vectorului** v.

4.5. PROPOZIŢIE. *Unei acţiuni $\gamma : \mathbb{R} \times M \to M$ i se poate asocia în mod canonic un câmp de vectori tangenţi la varietatea M.*

Demonstraţie. Pentru $p \in M$ avem aplicaţia analitică

$$\gamma_p : \mathbb{R} \to M, \gamma_p(t) = \gamma(t, p).$$

Definim vectorul tangent $X_p \in T_pM$ prin formula

$$X_p = (\gamma_p)_* \left(\frac{d}{dt}\,|_{t=0}\right).$$

Rămâne să arătăm că aplicaţia $(p \to X_p) : M \to TM$ este analitică.

Fie $p \in M$ şi fie (U, h) o hartă în jurul punctului p. Deoarece γ este analitică, rezultă că γ este continuă, deci $V = \gamma^{-1}(U)$ este mulţime deschisă în $\mathbb{R} \times M$. Deoarece $\gamma(0, p) = p$, rezultă că mulţimea V conţine punctul $(0, p)$. Există mulţimea deschisă $W = I \times U'$, unde I este un interval deschis ce conţine $0 \in \mathbb{R}$, iar U' este o vecinătate deschisă a punctului p, astfel încât $W \subset V$. Când vom scrie în coordonate acţiunea γ ne vom limita la punctele lui W.

Pentru $(t, q) \in W$, avem $\gamma(t, q) \in U$.

Fie $x^1, ..., x^n$ funcţiile coordonate asociate hărţii (U, h). Scriem în coordonate locale relaţia $X_q = (\gamma_q)_* \left(\frac{d}{dt}\,|_{t=0}\right)$, pentru $(t, q) \in W$. Obţinem:

$$X_q^i = X_q\left(x^i\right) = (\gamma_q)_* \left(\frac{d}{dt}\,|_{t=0}\right)(x^i) = \frac{d}{dt}\,|_{t=0}\,(x^i \circ \gamma_q) = \frac{d}{dt}\,|_{t=0}\left(\gamma^i(., q)\right),$$

unde funcţiile $\gamma^i(., q) = \gamma_q^i : I \to \mathbb{R}$ sunt definite prin $\gamma^i(., q)(t) = \gamma^i(t, q) = = x^i \circ \gamma(t, q) = \gamma_q^i(t)$.

Acum este uşor de văzut că funcţia $(q \to X_q) : U' \to \mathbb{R}$ este analitică în jurul oricărui punct din U'. În particular, această funcţie este analitică în jurul punctului p. Cum punctul p a fost ales arbitrar, obţinem $X \in \mathcal{X}(M)$.

4.6. DEFINIŢIE. *Fie $\gamma : \mathbb{R} \times M \to M$ o acţiune a grupului (aditiv) Lie $\mathbb{R}$ în varietatea analitică M. Câmpul de vectori:*

$$X : p \in M \to X_p = (\gamma_p)_* \left(\frac{d}{dt}\,|_{t=0}\right) \in T_pM \subset TM$$

construit în propoziţia 4.5 se numeşte **câmpul de vectori tangenţi asociat acţiunii** γ.

4.7. EXEMPLE.

4.7.1. Considerăm aplicaţia

$$\gamma : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

definită prin

$$\gamma(t,(x^1,x^2)) = (x^1\cos t - x^2\sin t, x^1\sin t + x^2\cos t).$$

Se verifică fără dificultate că γ este o acţiune a grupului Lie $\mathbb{R}$ în varietatea analitică $\mathbb{R}^2$.

Pentru $p = (x_0^1, x_0^2) \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$, obţinem curba analitică

$$\gamma_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$$

definită prin

$$\gamma_p(t) = (x_0^1\cos t - x_0^2\sin t, x_0^1\sin t + x_0^2\cos t).$$

Prin urmare, orbita punctului p este un cerc cu centrul în origine şi de rază $\sqrt{(x_0^1)^2 + (x_0^2)^2}$. Din $\gamma_p(0) = p = (x_0^1, x_0^2) \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$, rezultă $\cos t = 1$, $\sin t = 0$, adică $H_p = \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Prin urmare, grupul de stabilitate al oricărui punct $p \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$ este submulţimea discretă $H_p = 2\pi\mathbb{Z}$ a lui $\mathbb{R}$, deci un grup Lie de dimensiune zero. Grupul de stabilitate al punctului $p = 0 = (0,0)$ este $H_0 = \mathbb{R}$, iar orbita ce conţine punctul $p = 0 = (0,0)$ se reduce la acest punct.

Pentru a determina câmpul X de vectori tangenţi la $\mathbb{R}^2$, asociat acţiunii γ, vom folosi formula:

$$X_p = (\gamma_p)_* \left(\frac{d}{dt}\,|_{t=0}\right).$$

Componentele X^1 şi X^2 ale câmpului $(p \to X_p)$ sunt date de:

$$X^i(p) = X_p(x^i) = (\gamma_p)_* \left(\frac{d}{dt}\,|_{t=0}\right)(x^i) = \frac{d}{dt}\,|_{t=0}\,(x^i \circ \gamma_p) = \frac{d\gamma_p^i}{dt}\,|_{t=0},$$

unde $i \in \{1,2\}$ şi unde

$$\gamma_p(t) = (\gamma_p^1(t), \gamma_p^2(t)) = (x_0^1\cos t - x_0^2\sin t, x_0^1\sin t + x_0^2\cos t),$$

cu $p = (x_0^1, x_0^2) \in \mathbb{R}^2$. Rezultă

$$\frac{d\gamma_p^1}{dt}\,|_{t=0} = -x_0^2 \quad , \quad \frac{d\gamma_p^2}{dt}\,|_{t=0} = x_0^1.$$

Avem deci $X^1(p) = -x_0^2 = -x^2(p)$ şi $X^2(p) = x_0^1 = x^1(p)$, $(\forall) p \in \mathbb{R}^2$, adică $X^1 = -x^2$ şi $X^2 = x^1$.

Prin urmare, câmpul X asociat acţiunii γ se scrie

$$X = -x^2 \frac{\partial}{\partial x^1} + x^1 \frac{\partial}{\partial x^2}.$$

4.7.2. Considerăm aplicaţia

$$\gamma : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

definită prin

$$\gamma(t, (x^1, ..., x^n)) = (e^t x^1, ..., e^t x^n).$$

Se verifică fără dificultate că γ este o acţiune a grupului aditiv Lie $\mathbb{R}$ în varietatea analitică $\mathbb{R}^n$.

Fie $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ câmpul de vectori tangenţi asociat acţiunii γ, deci pentru $i \in \{1,2,...,n\}$ avem:

$$\begin{aligned} X^i(p) &= X_p(x^i) = (\gamma_p)_* \left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\right)(x^i) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \left(x^i \circ \gamma_p\right) = \\ &= \frac{d(e^t x_0^i)}{dt}\Big|_{t=0} = x_0^i, \text{ unde } x_0^i = x^i(p). \end{aligned}$$

Deci câmpul asociat acţiunii γ este $X = x^i \frac{\partial}{\partial x^i}$.

4.8. DEFINIŢIE. *Fie M o varietate analitică şi fie $X \in \mathcal{X}(M)$. Se numeşte* **traiectorie** *a câmpului X orice curbă analitică*

$$c : I \subseteq \mathbb{R} \to M$$

astfel încât $\dot{c}(t) = X_{c(t)}$, oricare ar fi $t \in I$.

OBSERVAŢIE. Fie $(x^1, x^2, ..., x^n)$ un sistem de coordonate locale în jurul punctului $c(t)$. Avem:

$$X_{c(t)} = X^i(c(t)) \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{c(t)},$$
$$\dot{c}(t) = \left(\dot{c}(t)\right)^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{c(t)}.$$

Egalitatea $\overset{\bullet}{c}(t) = X_{c(t)}$ implică:

$$X^i \circ c(t) = \left(\overset{\bullet}{c}(t)\right)^i = \overset{\bullet}{c}(t)\left(x^i\right) = c_*\left(\frac{d}{dt}|_t\right)\left(x^i\right) = \frac{d}{dt}|_t\left(x^i \circ c\right) = \frac{dc^i(t)}{dt},$$

unde am notat $c^i = x^i \circ c$. Am obţinut sistemul de ecuaţii diferenţiale ale traiectoriilor câmpului X :

$$\frac{dc^i(t)}{dt} = X^i \circ c(t),\ i = 1, 2, ..., n.$$

4.9. PROPOZIŢIE. *Fie X un câmp de vectori tangenţi la varietatea analitică M şi fie J_1, J_2 două intervale deschise ale lui $\mathbb{R}$, astfel încât $0 \in J_1 \cap J_2$. Fie*

$$\gamma_1 : J_1 \to M\ ,\ \gamma_2 : J_2 \to M$$

două traiectorii ale câmpului X, astfel încât $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$. Atunci

$$\gamma_1 |_{J_1 \cap J_2} = \gamma_2 |_{J_1 \cap J_2} .$$

Demonstraţie. Deoarece $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$, rezultă că mulţimea

$$J = \{t \in J_1 \cap J_2 \mid \gamma_1(t) = \gamma_2(t)\}$$

este nevidă. Deoarece γ_1 şi γ_2 sunt aplicaţii analitice, rezultă că γ_1 şi γ_2 sunt aplicaţii continue. Folosim următoarea **teoremă de topologie generală** *[46]:*

"Fiind date două aplicaţii continue $\gamma_1, \gamma_2 : I \to M$, unde M este un spaţiu topologic separat, punctele $t \in I$ în care $\gamma_1(t) = \gamma_2(t)$ formează o mulţime închisă în I ".

Dacă luăm $I = J_1 \cap J_2$, rezultă că J este o mulţime închisă în $J_1 \cap J_2$.

Fie $t_0 \in J$, deci $\gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0)$. În plus, curbele γ_1 şi γ_2 verifică sistemul de ecuaţii diferenţiale ale traiectoriilor câmpului X. Rezultă că există un interval deschis I', care conţine punctul t_0, astfel încât $\gamma_1 |_{I'} = \gamma_2 |_{I'}$. Deci pentru un punct arbitrar $t_0 \in J$ am găsit o vecinătate deschisă $I' \subset J$. Rezultă că J este mulţime deschisă în $J_1 \cap J_2$.

În plus, mulţimea $J_1 \cap J_2$ este conexă. Rezultă $J = J_1 \cap J_2$, adică $\gamma_1 |_{J_1 \cap J_2} = \gamma_2 |_{J_1 \cap J_2}$. Q.E.D.

4.10. PROPOZIŢIE. *Fie $X \in \mathcal{X}(M)$ şi fie $c : I \to M$ o traiectorie a câmpului X. Considerăm translaţia $\tau_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\tau_a(t) = t + a$. Atunci:*

(i) $(\tau_a)_* \left(\frac{d}{dt} |_{t=b}\right) = \frac{d}{dt} |_{\tau_a(b)}$

(ii) *Curba $c_1 = c \circ \tau_a : \tau_a^{-1}(I) \to M$ este o traiectorie a lui X.*

(iii) *Dacă câmpul X este asociat acţiunii $\gamma : \mathbb{R}\times M \to M$, atunci, pentru orice $p \in M$, curba*

$$\gamma_p : \mathbb{R} \to M, \gamma_p(t) = \gamma(t,p)$$

este o traiectorie a câmpului X.

Demonstraţie. (i) Pentru o funcţie oarecare $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ avem:

$$(\tau_a)_* \left(\frac{d}{dt} |_{t=b}\right)(f) = \frac{d}{dt} |_{t=b} (f \circ \tau_a) = \frac{df}{dt} |_{\tau_a(b)} \frac{d\tau_a}{dt} |_b = \frac{d}{dt} |_{\tau_a(b)} (f).$$

(ii) Pentru orice $b \in \tau_a^{-1}(I)$, avem:

$$\overset{\bullet}{c}_1 (b) = c_* \left((\tau_a)_* \left(\frac{d}{dt} |_{t=b}\right)\right) \overset{(i)}{=} c_* \left(\frac{d}{dt} |_{\tau_a(b)}\right) = X_{c(\tau_a(b))} = X_{c_1(b)}.$$

(iii) Evident, $\gamma_p(0) = p$, $\gamma_p(t) = \gamma(t,p)$. Avem:

$$(\gamma_p \circ \tau_a)_* \left(\frac{d}{dt} |_{t=0}\right) = (\gamma_p)_* \left((\tau_a)_* \left(\frac{d}{dt} |_{t=0}\right)\right) \overset{(i)}{=} (\gamma_p)_* \left(\frac{d}{dt} |_{t=a}\right),$$

deci $\overset{\bullet}{\widehat{\gamma_p \circ \tau_a}} (0) = \overset{\bullet}{\gamma}_p (a)$. Pe de altă parte,

$$\gamma_p \circ \tau_a(t) = \gamma_p(t + a) = \gamma(t, \gamma(a,p)) = \gamma_{\gamma(a,p)}(t).$$

Rezultă:

$$\overset{\bullet}{\gamma}_p (a) = \overset{\bullet}{\widehat{\gamma_p \circ \tau_a}} (0) = \overset{\bullet}{\gamma}_{\gamma(a,p)} (0) = \left(\gamma_{\gamma(a,p)}\right)_* \left(\frac{d}{dt} |_{t=0}\right) = X_{\gamma(a,p)} = X_{\gamma_p(a)}.$$

4.11. PROPOZIŢIE. *Fie $X \in \mathcal{X}(M)$ şi fie*

$$\gamma : \mathbb{R}\times M \to M,\ \gamma' : \mathbb{R}\times M \to M,$$

două acţiuni. Dacă X este un câmp asociat atât acţiunii γ cât şi acţiunii γ', atunci $\gamma = \gamma'$.

Demonstraţie. Fie $p \in M$. Conform propoziţiei 4.10, curbele

$$\gamma_p, \gamma'_p : \mathbb{R} \to M$$

sunt traiectorii ale câmpului X. În plus, $\gamma_p(0) = \gamma'_p(0) = p$. Conform propoziţiei 4.9, rezultă $\gamma = \gamma'$.

4.12. DEFINIŢIE. *Fie M o varietate analitică şi fie $X \in \mathcal{X}(M)$. Dacă există o acţiune*

$$\gamma : \mathbb{R} \times M \to M,$$

astfel încât câmpul de vectori asociat acţiunii γ este X, atunci X se numeşte **câmp complet.**

OBSERVAŢIE. Din cele arătate mai sus rezultă că există o corespondenţă biunivocă între mulţimea câmpurilor vectoriale complete pe varietatea M şi mulţimea acţiunilor grupului aditiv Lie $\mathbb{R}$ în varietatea M.

Acţiunile grupului aditiv Lie $\mathbb{R}$ într-o varietate analitică se mai numesc grupuri de transformări cu un parametru.

4.13. EXEMPLU. Fie $X = x^i \frac{\partial}{\partial x^i} \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^n)$. Asociem câmpului X sistemul de ecuaţii diferenţiale ale traiectoriilor:

$$\frac{dx^i}{dt} = x^i, \quad i = 1, 2, ..., n.$$

Prin integrare, obţinem:

$$x^i = e^t c^i, \; c^i = \text{const.}, \; i = 1, 2, ..., n.$$

Dacă notăm $x_0^i = x^i(0)$, rezultă că traiectoria centrată în punctul $p_0 = (x_0^1, ..., x_0^n) \in \mathbb{R}^n$ este curba parametrizată

$$\gamma_{p_0} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$$

definită prin:

$$\gamma_{p_0}(t) = (x_0^1 e^t, ..., x_0^n e^t).$$

Variem punctul p_0 în $\mathbb{R}^n$ şi obţinem aplicaţia

$$\gamma : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

definită prin

$$\gamma(t, (x^1, ..., x^n)) = (x^1 e^t, ..., x^n e^t).$$

Aplicaţia γ este o acţiune a grupului aditiv Lie $\mathbb{R}$ in varietatea $\mathbb{R}^n$. Câmpul de vectori asociat acţiunii γ este (a se vedea exemplul 4.7.2) $X = x^i \frac{\partial}{\partial x^i}$. Este clar că câmpul X este complet.

OBSERVAŢIE. i) Fie $X \in \mathcal{X}(M)$ un câmp complet. Notăm cu

$$\gamma : \mathbb{R} \times M \to M$$

acţiunea al cărui câmp de vectori asociat este X. Se mai spune atunci că γ este grupul de transformări cu un parametru asociat lui X.

ii) În general, un câmp $X \in \mathcal{X}(M)$ nu este complet, deci nu totdeauna se poate găsi o acţiune γ a grupului aditiv Lie $\mathbb{R}$ în varietatea analitică M, astfel încât X să fie câmpul de vectori asociat lui γ. Din acest motiv se introdûce următoarea definiţie:

4.14. DEFINIŢIE. *Considerăm o varietate analitică M. Fie U o mulţime deschisă în M, $\varepsilon > 0$, $I_\varepsilon = (-\varepsilon, \varepsilon)$ şi aplicaţia*

$$\gamma : (t,p) \in I_\varepsilon \times U \to \gamma(t,p) = \gamma_t(p) \in M.$$

Spunem că γ formează un **grup de transformări locale cu un parametru** *dacă verifică următoarele condiţii:*

(gl$_1$) γ este aplicaţie analitică,

(gl$_2$) pentru orice $t, s \in I_\varepsilon$ cu $t + s \in I_\varepsilon$ şi $\gamma_s(p) \in U$, $(\forall)p \in U$, avem $\gamma_{t+s} = \gamma_t \circ \gamma_s$,

(gl$_3$) $\gamma_0(p) = \gamma(0,p) = p$, $(\forall)p \in U$.

OBSERVAŢIE. i) O acţiune a grupului aditiv Lie $\mathbb{R}$ într-o varietate analitică M defineşte un grup de transformări locale cu un parametru pe orice deschis $U \subset M$.

ii) Fie $\gamma : I_\varepsilon \times U \to M$ un grup de transformări locale cu un parametru şi fie p un punct în U. Considerăm aplicaţia analitică

$$\gamma_p : t \in I_\varepsilon \to \gamma_p(t) = \gamma(t, p) \in M.$$

Cu ajutorul formulei $X_p = \dot{\gamma}_p\ (0)$ asociem grupului de transformări locale cu un parametru un câmp X de vectori tangenţi la varietatea U.

4.15. PROPOZIŢIE. *Fie M o varietate analitică şi fie $Y \in \mathcal{X}(M)$. Pentru orice $p_0 \in M$, există o vecinătate U a lui p_0, un număr $\varepsilon > 0$ şi un grup de transformări locale cu un parametru*

$$\gamma : I_\varepsilon \times U \to M, \quad I_\varepsilon = (-\varepsilon, \varepsilon),$$

astfel încât $Y\ |_U$ este câmpul de vectori asociat lui γ.

Demonstraţie. Fie $p_0 \in M$ şi fie V o vecinătate de coordonate în jurul punctului p_0 astfel încât:

$$x^1(p_0) = ... = x^n(p_0) = 0.$$

Fie $Y\ |_V = Y^i(x^1, x^2, ..., x^n)\frac{\partial}{\partial x^i}$ restricţia lui Y la V. Considerăm pe V sistemul de ecuaţii diferenţiale:

$$\frac{df^i}{dt} = Y^i(f^1(t), ..., f^n(t)),\ i = 1, 2, ..., n,$$

unde $f^i(t)\ \ (i = 1, 2, ..., n)$ sunt funcţii necunoscute.

Conform unei teoreme de ecuaţii diferenţiale ([21], [32]), există funcţiile analitice $f^i(t, p)$, $i = 1, 2, ..., n$, cu $p = (x^1, x^2, ..., x^n) \in V$, $|x^i| < \delta$, $|t| < \varepsilon$, funcţii ce formează o soluţie unică a sistemului dat când p este fixat şi satisface condiţiile iniţiale:

$$f^i(0, p) = x^i,\ i = 1, 2, ..., n.$$

Notăm: $I_\varepsilon = (-\varepsilon, \varepsilon)$, $U = \{p \in M \mid |x^i| < \delta,\ i = 1, 2, ..., n\}$. Definim aplicaţia $\gamma : I_\varepsilon \times U \to M$ prin formula

$$\gamma(t, p) = (f^1(t, p), ..., f^n(t, p)).$$

Vom verifica condiţiile:

(gl$_1$) γ este analitică,

(gl$_2$) $(\forall)t, s \in I_\varepsilon$ cu $t + s \in I_\varepsilon$, $\gamma_s(p) \in U$, $(\forall)p \in U \Rightarrow \gamma_{t+s} = \gamma_t \circ \gamma_s$,
(gl$_3$) $\gamma_0(p) = p$, $(\forall)p \in U$.

În adevăr, condiţia (gl$_1$) este verificată deoarece, din teorema de ecuaţii diferenţiale folosită, funcţiile $f^i(t,p)$ sunt analitice, oricare ar fi $i \in \{1, 2, ..., n\}$.

Condiţia (gl$_3$) este verificată datorită condiţiilor iniţiale impuse. Avem: $\gamma(0,p) = (f^1(0,p), ..., f^n(0,p)) = (x^1, ..., x^n) = p$.

Să verificăm condiţia (gl$_2$). Fie $t, s \in I_\varepsilon$ cu $t+s \in I_\varepsilon$, $\gamma_s(p) \in U$, $(\forall)p \in U$. Atunci funcţiile:

$$g^i(t) = f^i(t + s, p),\ i = 1, 2, ..., n$$

reprezintă, de asemenea, o soluţie pentru sistemul de ecuaţii diferenţiale dat cu condiţiile iniţiale:

$$g^i(0) = f^i(s, p),\ i = 1, 2, ..., n.$$

Pe de altă parte, soluţia sistemului fiind unică, trebuie să avem:

$$g^i(t) = f^i(t, h(s, p)),\ i = 1, 2, ..., n,$$

unde

$$h^i(s, p) = g^i(0).$$

Rezultă $h^i(s,p) = f^i(s,p)$, deci $h(s,p) = \gamma(s,p) = \gamma_s(p)$. Prin urmare, $f^i(t + s, p) = f^i(t, \gamma_s(p))$, adică $\gamma(t + s, p) = \gamma(t, \gamma_s(p))$, sau

$$\gamma_{t+s}(p) = \gamma_t \circ \gamma_s\,(p)\ ,$$

deci şi condiţia (gl$_2$) este verificată.

Grupul local de transformări

$$\gamma : I_\varepsilon \times U \to M$$

induce pe U un câmp de vectori $\overline{Y}$ prin

$$\overline{Y}_p = (\gamma_p)_* \left(\frac{d}{dt} \,|_{t=0} \right).$$

Avem:

$$\begin{aligned} \overline{Y}_p(f) &= (\gamma_p)_* \left(\frac{d}{dt}\mid_{t=0}\right)(f) = \frac{d}{dt}\mid_{t=0}(f\circ\gamma_p) = \frac{\partial f}{\partial x^i}\mid_p \frac{df^i}{dt}\mid_{t=0}= \\ &= Y^i\left(x^1,x^2,...,x^n\right)\frac{\partial f}{\partial x^i}\mid_p = Y_p(f). \end{aligned}$$

Deci $\overline{Y}_p(f) = Y_p(f)$. Rezultă $\overline{Y}_p = Y_p$, oricare ar fi $p \in U$, deci $\overline{Y}\mid_U = Y\mid_U$.

4.16. EXEMPLU. Considerăm câmpul vectorial

$$X = \frac{\partial}{\partial x^1} + ... + \frac{\partial}{\partial x^{n-1}} + e^{-x^n}\frac{\partial}{\partial x^n} \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^n).$$

Asociem câmpului X sistemul de ecuaţii diferenţiale ale traiectoriilor:

$$\frac{dx^1}{dt} = ... = \frac{dx^{n-1}}{dt} = 1,\ \frac{dx^n}{dt} = e^{-x^n}.$$

Prin integrare, obţinem:

$$x^1 = t + c^1, ..., x^{n-1} = t + c^{n-1}, x^n = \ln(t + c^n),$$

unde $c^1, ..., c^n$ sunt constante reale, iar $t \in I = (-c^n, +\infty)$.

Dacă notăm $x^i(0) = x_0^i$, rezultă că traiectoria centrată în punctul $p_0 = (x_0^1, x_0^2, ..., x_0^n) \in \mathbb{R}^n$, este curba parametrizată $\gamma_{p_0} : I \to \mathbb{R}^n$ definită prin:

$$\gamma_{p_0}(t) = \gamma(t, p_0) = (x_0^1 + t, ..., x_0^{n-1} + t, \ln(t + e^{x_0^n})).$$

Variem punctul p_0 în $\mathbb{R}^n$ şi obţinem aplicaţia

$$\gamma : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

definită prin

$$\gamma(t, (x^1, ..., x^n)) = (x^1 + t, ..., x^{n-1} + t, \ln(t + e^{x^n})).$$

Deoarece aplicaţia γ nu poate fi prelungită la o acţiune $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, rezultă că X nu este câmp complet (γ este doar grup de transformări locale cu un parametru).

§ 5. ALGEBRE LIE. DEFINIŢIE. EXEMPLE. CONSTANTE DE STRUCTURĂ

5.1. DEFINIŢIE. *Se numeşte* **algebră Lie** *peste corpul comutativ* K, *o mulţime* L, *înzestrată cu o structură de* K*−spaţiu vectorial şi cu o aplicaţie:*

$$[\ ,\ ] : (a,b) \in L \times L \to [a,b] \in L,$$

satisfăcând următoarele condiţii:

(a.l.1.) $[\lambda a + \mu b, c] = \lambda[a,c] + \mu[b,c]$, $(\forall)\lambda, \mu \in K$, $(\forall)a,b,c \in L$,
(a.l.2.) $[a,b] + [b,a] = 0$, $(\forall)a,b \in L$,
(a.l.3.) $[[a,b],c] + [[b,c],a] + [[c,a],b] = 0$, $(\forall)a,b,c \in L$.

5.2. EXEMPLE DE ALGEBRE LIE.

5.2.1. Spaţiul euclidian $\mathbb{R}^3$, împreună cu operaţia

$$[\ ,\ ] : (a,b) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to [a,b] = a \times b \in \mathbb{R}^3,$$

este o algebră Lie reală de dimensiune trei (am notat $a \times b$ produsul vectorial obişnuit al vectorilor $a, b \in \mathbb{R}^3$).

În adevăr, condiţiile (a.l.1.) şi (a.l.2.) se verifică imediat. Pentru a verifica condiţia (a.l.3.) se foloseşte egalitatea

$$a \times (b \times c) = - < a,b > c + < a,c > b,$$

unde $< a,b >$ este produsul scalar al vectorilor $a, b \in \mathbb{R}^3$.

5.2.2. i) Fie A o algebră asociativă peste corpul comutativ K şi fie ab produsul elementelor $a, b \in A$. Atunci spaţiul vectorial A, împreună cu operaţia

$$[\ ,\ ] : (a,b) \in A \times A \to [a,b] = ab - ba \in A,$$

este o algebră Lie peste corpul K.

ii) Fie $M(n,K)$ algebra matricelor pătratice de ordinul n cu elemente în corpul comutativ K şi fie $gl(n,K)$ algebra Lie construită la punctul i), unde $A = M(n,K)$. Atunci multiplicarea lui $gl(n,K)$ este dată în baza sa canonică $\{E^i_j\}$ prin:

$$[E^i_j, E^k_h] = \delta^i_h E^k_j - \delta^k_j E^i_h,$$

unde E_j^i este matricea cu toate elementele nule, în afara celui de pe linia i şi coloana j, care este egal cu 1.

5.2.3. Fie $\mathcal{X}(M)$ mulţimea câmpurilor de vectori tangenţi la o varietate analitică M. Se verifică fără dificultate că mulţimea $\mathcal{X}(M)$, împreună cu operaţiile de adunare a două câmpuri de vectori şi de înmulţire a unui câmp de vectori cu un scalar este un spaţiu vectorial real. Ca operaţie de înmulţire în $\mathcal{X}(M)$ vom considera paranteza Poisson a două câmpuri de vectori definită prin

$$[X,Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)),\ (\forall) f \in \mathcal{F}(M).$$

În acest fel $\mathcal{X}(M)$ devine o algebră Lie reală, deoarece paranteza Poisson este antisimetrică, $\mathbb{R}-$liniară în fiecare argument şi satisface identitatea lui Jacobi:

$$[[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] = 0,\ (\forall) X,Y,Z \in \mathcal{X}(M).$$

5.2.4. Considerăm spaţiul vectorial real $\mathbb{R}^n$ şi aplicaţia $[,] : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definită prin $[x,y] = 0$, oricare ar fi vectorii $x, y \in \mathbb{R}^n$. Este uşor de văzut că spaţiul vectorial $\mathbb{R}^n$, cu croşetul astfel introdus, devine o algebră Lie reală de dimensiune n.

5.3. DEFINIŢIE. i) *Se numeşte* **subalgebră Lie** *a algebrei Lie L, un subspaţiu vectorial L' al lui L, astfel încât $a, b \in L'$ implică $[a,b] \in L'$.*

ii) *Fie L' o subalgebră Lie a algebrei Lie L. L' se numeşte* **ideal**, *dacă $a \in L'$, $b \in L$ implică $[a,b] \in L'$.*

5.4. PROPOZIŢIE. *Fie L o algebră Lie peste un corp comutativ K şi fie $E_1, ..., E_r \in L$. Dacă $[E_i, E_j] \in sp(E_1, ..., E_r)$ pentru orice $i, j \in \{1, 2, ..., r\}$, atunci $sp(E_1, ..., E_r)$ este o subalgebră Lie L' a lui L (se mai spune că $E_1, ..., E_r$ generează liniar subalgebra L').*

Demonstraţie. Fie $X, Y \in sp(E_1, ..., E_r)$. Avem:

$$X = \sum_{i=1}^{r} c^i E_i\ ,\ Y = \sum_{j=1}^{r} k^j E_j,\ c^i, k^j \in K.$$

Rezultă

$$[X,Y] = \left[\sum_{i=1}^{r} c^i E_i, \sum_{j=1}^{r} k^j E_j\right] = \sum_{i,j=1}^{r} c^i k^j [E_i, E_j] = \sum_{i,j,k=1}^{r} c^i k^j c_{ij}^k E_k,$$

deci $sp(E_1, ..., E_r)$ este o subalgebră Lie.

5.5. DEFINIŢIE. *Fie L o algebră Lie (peste corpul comutativ K) cu n dimensiuni şi fie $\{E_1, ..., E_n\}$ o bază în spaţiul vectorial L.*

Relaţiile $[E_i, E_j] = c_{ij}^k E_k$ se numesc **ecuaţiile de structură** *ale algebrei Lie L, iar scalarii $c_{ij}^k \in K$ se numesc* **constantele de structură** *ale algebrei Lie L relative la baza considerată.*

OBSERVAŢIE. Fie $\{E_1, ..., E_n\}$, $\{E'_1, ..., E'_n\}$ două baze ale algebrei Lie L. Fie c_{jk}^i şi c'^i_{jk} constantele de structură ale algebrei Lie L relative la cele două baze considerate, deci:

$$[E_i, E_j] = c_{ij}^k E_k, \ [E'_i, E'_j] = c'^k_{ij} E'_k.$$

Dacă $E'_i = a_i^s E_s$, atunci obţinem:

$$c'^k_{ij} a_k^s = c_{kr}^s a_i^k a_j^r.$$

5.6 PROPOZIŢIE. i) *Considerăm o algebră Lie L de dimensiune finită n şi fie $\{E_1, ..., E_n\}$ o bază în L. Constantele de structură c_{jk}^i (relative la baza considerată) sunt antisimetrice în indicii j şi k şi satisfac relaţiile pătratice ale lui Lie:*

$$c_{sj}^k c_{ir}^s + c_{si}^k c_{rj}^s + c_{sr}^k c_{ji}^s = 0.$$

ii) *Presupunem că dimensiunea algebrei Lie L este doi. Atunci, într-o bază convenabilă a lui L, ecuaţiile de structură ale lui L au una din formele canonice următoare:*

(ii') $[E_i, E_j] = 0$, $(\forall) i, j \in \{1, 2\}$,

(ii'') $[E_1, E_1] = [E_2, E_2] = 0$, $[E_1, E_2] = E_2$.

Demonstraţie. i) Din $[E_i, E_j] + [E_j, E_i] = 0$, obţinem $c_{ij}^k + c_{ji}^k = 0$. Apoi, din identitatea lui Jacobi

$$[[E_i, E_j], E_k] + [[E_j, E_k], E_i] + [[E_k, E_i], E_j] = 0,$$

se obţin, fără dificultate, relaţiile pătratice ale lui Lie.

ii) Avem:

$$[E_1, E_1] = [E_2, E_2] = 0, \ [E_1, E_2] = c_{12}^1 E_1 + c_{12}^2 E_2.$$

Vom căuta o bază în care toate constantele sunt zero sau unu.

Dacă $c_{12}^1 = c_{12}^2 = 0$, obţinem algebra Lie comutativă (ii').

Dacă $c_{12}^1 = 0$, $c_{12}^2 \neq 0$, atunci alegând baza $\{E_1', E_2'\}$ unde $E_1' = \frac{1}{c_{12}^2} E_1$, $E_2' = E_2$, obţinem:

$$[E_1', E_1'] = [E_2', E_2'] = 0,\ [E_1', E_2'] = E_2',$$

deci forma canonică (ii"). Analog se studiază cazul în care $c_{12}^1 \neq 0$, $c_{12}^2 = 0$.

Ultimul caz pe care îl discutăm este $c_{12}^1 \neq 0$, $c_{12}^2 \neq 0$. Atunci, alegând baza:

$$E_1' = \frac{1}{c_{12}^2} E_1,\ E_2' = c_{12}^1 E_1 + c_{12}^2 E_2,$$

vom avea:

$$[E_1', E_1'] = [E_2', E_2'] = 0,\ [E_1', E_2'] = E_2',$$

adică forma canonică (ii").

§ 6. ALGEBRA LIE A UNUI GRUP LIE

6.1. DEFINIŢIE. *Fie G un grup Lie. Se numeşte* **câmp de vectori stâng invariant** *pe grupul Lie G, un câmp X de vectori tangenţi la varietatea G satisfăcând condiţia*

$$(L_a)_*(X) = X, \ (\forall) a \in G,$$

unde L_a este translaţia la stânga a grupului Lie G, definită de elementul $a \in G$.

OBSERVAŢIE. i) În definiţia câmpurilor stâng invariante analiticitatea câmpurilor poate fi omisă, aceasta rezultând ca o consecinţă.

ii) Analog se definesc **câmpurile vectoriale drept invariante** pe un grup Lie.

iii) Dacă notăm cu $L(G)$ mulţimea câmpurilor vectoriale stâng invariante pe grupul Lie G, avem $L(G) \subset \mathcal{X}(G)$.

6.2. PROPOZIŢIE. *Mulţimea $L(G)$ a câmpurilor de vectori stâng invariante pe grupul Lie G este o subalgebră Lie a lui $\mathcal{X}(G)$ ($L(G)$ se mai numeşte* **algebra Lie** *a grupului Lie G).*

Demonstraţie. Dacă $X, Y \in L(G)$, avem pentru orice $a, b \in G$:

$$\begin{aligned}
(L_a)_*(X+Y)(L_a(b)) &= (L_a)_*((X+Y)(b)) = (L_a)_*(X_b + Y_b) = \\
&= (L_a)_*(X_b) + (L_a)_*(Y_b) = \\
&= (L_a)_*(X)(L_a(b)) + (L_a)_*(Y)(L_a(b)) = \\
&= X(L_a(b)) + Y(L_a(b)) = \\
&= (X+Y)(L_a(b)),
\end{aligned}$$

deci $X + Y \in L(G)$. Analog se arată că dacă $c \in \mathbb{R}$, atunci $cX \in L(G)$.

În plus, dacă $X, Y \in L(G)$, avem

$$(L_a)_*([X,Y]) = [(L_a)_*(X), (L_a)_*(Y)] = [X,Y], \ (\forall)\, a \in G,$$

adică $[X, Y] \in L(G)$.

6.3. PROPOZIŢIE. *Fie G un grup Lie. Algebra Lie $L(G)$ a grupului Lie G este de dimensiune finită $n = \dim G$.*

Demonstraţie. Fie e elementul neutru al grupului G. Vom arăta că aplicaţia

$$f : X \in L(G) \to f(X) = X(e) = X_e \in T_eG$$

este un izomorfism de spaţii vectoriale reale.

Pentru orice $X, Y \in L(G)$ şi orice $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, avem:

$$f(k_1X + k_2Y) = (k_1X + k_2Y)(e) = k_1f(X) + k_2f(Y),$$

deci f este o aplicaţie liniară. Deoarece

$$(L_a)_*(X) = X, (L_a)_*(Y) = Y,$$

pentru orice $a, b \in G$, avem:

$$(L_a)_*(X)(L_a(b)) = (L_a)_*(X_b) = X(L_a(b)) = X(ab).$$

În particular, pentru $b = e$, obţinem:

$$(L_a)_*(X)(a) = (L_a)_*(X_e) = X(a),\ (\forall)a \in G.$$

Analog se obţine:

$$(L_a)_*(Y)(a) = (L_a)_*(Y_e) = Y(a),\ (\forall)a \in G.$$

Dacă $f(X) = f(Y) \Leftrightarrow X_e = Y_e$, rezultă $X(a) = Y(a)$ pentru orice $a \in G$, deci $X = Y$. Prin urmare, aplicaţia f este injectivă.

Fie $v_e \in T_eG$. Pentru orice $a \in G$, construim vectorul $X_a \in T_aG$ prin relaţia

$$X(a) = (L_a)_*(v_e) \in T_aG.$$

Fie μ operaţia grupală în G. Ţinând seama de formula

$$\begin{aligned}\mu_*(X_a, Y_b) &= (L_a)_*(Y_b) + (R_b)_*(X_a),\ (\forall)a, b \in G,\\ (\forall)X_a &\in T_aG,\ (\forall)Y_b \in T_bG,\end{aligned}$$

stabilită în lema 3.7, obţinem:

$$X(a) = (L_a)_*(v_e) = \mu_*(0_a, v_e), \ (\forall) a \in G.$$

Folosim acum următorul exerciţiu: "Fie M, M_1, M_2 trei varietăţi analitice şi fie:

$$f_1 : M \to M_1, \ f_2 : M \to M_2$$

două aplicaţii analitice. Definim aplicaţia

$$f : x \in M \to f(x) = (f_1(x), f_2(x)) \in M_1 \times M_2.$$

Atunci f este analitică".

Dacă luăm $M = G$, $M_1 = M_2 = TG$ şi

$$f_1(a) = 0_a \in T_aG, \quad f_2(a) = v_e \in T_eG, \ (\forall) a \in G,$$

obţinem aplicaţia analitică

$$a \in G \to (0_a, v_e) \in TG \times TG.$$

Folosim acum următorul exerciţiu: "Dacă M şi M' sunt două varietăţi analitice şi

$$\varphi : M \to M'$$

este o aplicaţie analitică, atunci aplicaţia

$$\varphi_* : X_p \in TM \to \varphi_*(X_p) \in TM'$$

este analitică".

Aplicaţia $a \to X(a)$ este analitică, deoarece ea este compunerea aplicaţiilor analitice:

$$\begin{array}{rcl} G & \to & TG \times TG \to TG, \\ a & \to & (0_a, v_e) \to \mu_*(0_a, v_e) = (L_a)_*(v_e) = X(a). \end{array}$$

Prin urmare, $X \in \mathcal{X}(G)$. Să arătăm că $X \in L(G)$. Pentru orice $a, b \in G$, avem:

$$\begin{aligned}(L_b)_*(X)(a) &= (L_b)_*(X_{L_{b^{-1}}(a)}) = (L_b)_*(X_{b^{-1}a}) = (L_b)_*(X(b^{-1}a)) = \\ &= (L_b)_*((L_{b^{-1}a})_*(v_e)) = (L_b \circ L_{b^{-1}a})_*(v_e) = X(a),\end{aligned}$$

deci $(L_b)_*(X) = X, (\forall)b \in G$, adică $X \in L(G)$.

În plus, $f(X) = X_e = v_e$. Prin urmare, pentru orice vector tangent $X_e \in T_eG$, există un câmp $X \in L(G)$ astfel încât:

$$X(a) = (L_a)_*(X_e),\ (\forall)a \in G.$$

Rezultă că aplicaţia f este surjectivă. Prin urmare, spaţiile vectoriale $L(G)$ şi T_eG sunt izomorfe. Avem $\dim L(G) = \dim T_eG = \dim G = n$.

Observaţie. Fie $R(G)$ mulţimea câmpurilor de vectori drept invariante pe grupul Lie G. Procedând ca în propoziţia anterioară, vom obţine că spaţiile vectoriale T_eG şi $R(G)$ sunt izomorfe. Pentru un câmp drept invariant $Y \in R(G)$ vom obţine formula

$$Y(b) = (R_b)_*(Y_e),\ (\forall)b \in G,$$

unde R_b este translaţia la dreapta a grupului Lie G definită de elementul $b \in G$.

6.4. PROPOZIŢIE. *Orice grup Lie este o varietate paralelizabilă.*

Demonstraţie. Din propoziţia 6.3 rezultă că varietatea G admite n câmpuri de vectori $E_1, E_2, ..., E_n$ liniar independente. Deci varietatea G este paralelizabilă.

6.5. PROPOZIŢIE. *Fie G un grup Lie şi fie $\{E_1, E_2, ..., E_n\}$ o bază în algebra Lie $L(G)$ a grupului Lie G. Orice câmp $X \in \mathcal{X}(G)$ se scrie sub forma $X = f^iE_i$, unde $f^i \in \mathcal{F}(G)$, $i = 1, 2, ..., n$.*

Demonstraţie. Deoarece câmpurile $E_1, E_2, ..., E_n$ sunt independente, vectorii $E_1(a), E_2(a), ..., E_n(a)$ sunt liniar independenţi, oricare ar fi $a \in G$.

Deoarece $\dim T_aG = n$, rezultă că vectorii $E_1(a), E_2(a), ..., E_n(a)$ formează o bază în T_aG. Fie $X \in \mathcal{X}(G)$. Avem

(6.1.) $$X(a) = \lambda_a^i E_i(a).$$

Vom arăta că funcţiile:

$$(a \to \lambda_a^i) : G \to R$$

sunt analitice.

Fie $a \in G$ şi fie (U, h) o hartă a varietăţii G cu $a \in U$. Notăm cu $x^1, ..., x^n$ funcţiile coordonate asociate hărţii (U, h). Avem $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $E_j = E^i_j \frac{\partial}{\partial x^i}$. Pentru orice $b \in U$ rezultă

$$X^i(b) \frac{\partial}{\partial x^i} |_b = \lambda^k_b E^i_k(b) \frac{\partial}{\partial x^i} |_b$$

sau

$$(6.2.) \qquad X^i(b) = \lambda^k_b E^i_k(b), i = 1, ..., n.$$

Deoarece vectorii $E_1(b), ..., E_n(b)$ sunt liniar independenţi $(\forall)b \in U$, rezultă că:

$D(b) = \det(E^i_k(b)) \neq 0$, $(\forall)b \in U$. Folosind regula lui Cramer din (6.2), obţinem:

$$\lambda^k_b = \frac{D^k(b)}{D(b)}, \ (\forall)b \in U.$$

Deoarece funcţiile $b \to D^k(b)$ şi $b \to D(b)$ sunt analitice, iar $D(b) \neq 0$, $(\forall)b \in U$, obţinem că funcţiile $(b \to \lambda^i_b) : U \to \mathbb{R}$ sunt analitice în jurul oricărui punct din U, în particular în jurul punctului a. Cum punctul a a fost ales arbitrar în G, rezultă că funcţiile $\left(b \to \lambda^j_b\right) : G \to \mathbb{R}$, sunt analitice.

Definim funcţiile $f^j : G \to \mathbb{R}$, $j = 1, ..., n$, prin $f^j(b) = \lambda^j_b$ şi folosind (6.1) rezultă $X(a) = f^j(a)E_j(a)$, $(\forall)a \in G$, adică $X = f^j E_j$, unde $f^j \in \mathcal{F}(G)$, $j = 1, ..., n$.

6.6. PROPOZIŢIE. *Fie G un grup Lie şi $X \in \mathcal{X}(G)$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) *X este câmp stâng invariant,*

(ii) *$X(a) = (L_a)_*(X_e)$, oricare ar fi $a \in G$,*

(iii) *$X(b) = (L_{ba^{-1}})_*(X_a)$, oricare ar fi $a, b \in G$.*

Demonstraţie. (i)⇒(ii) Deoarece avem $(L_a)_*(X) = X$, $(\forall)a \in G$, rezultă $(L_a)_*(X)(L_a(e)) = X(L_a(e))$, $(\forall)a \in G$, adică (ii).

(ii)⇒(iii) Ţinând seama de (ii), pentru orice $a, b \in G$ avem:

$$X(b) = (L_{ba^{-1}})_* \circ (L_a)_*(X_e) = (L_{ba^{-1}})_*(X_a).$$

(iii)⇒(ii) Se ia $a = e$ în (iii).

(ii)⇒(i) Pentru orice $a, b \in G$ avem:

$$\begin{aligned}(L_a)_*(X)(b) &= (L_a)_*(X_{a^{-1}b}) = (L_a)_* \circ (L_{a^{-1}b})_*(X_e) = (L_b)_*(X_e) = \\ &= X(b).\end{aligned}$$

Q.E.D.

6.7. PROPOZIŢIE. *Fie $X \in L(G)$ şi fie $f \in \mathcal{F}(G)$. Atunci:*

i) *dacă există un punct $a \in G$ astfel încât $X(a) = 0$, atunci $X(b) = 0$, oricare ar fi $b \in G$.*

ii) *X se anulează într-un punct $a \in G$ dacă şi numai dacă X este câmpul nul.*

iii) *dacă $X \neq 0$, câmpul fX este stâng invariant dacă şi numai dacă $f =$const.*

Demonstraţie. i) Se foloseşte formula:

$$X(b) = (L_{ba^{-1}})_*(X_a), \ (\forall)a, b \in G.$$

ii) Se obţine uşor din i).

iii) Presupunem că $fX \in L(G)$, deci

$$(L_a)_*(fX) = fX, \ (\forall)a \in G.$$

Rezultă

$$(L_a)_*(fX)(L_a(b)) = (fX)(L_a(b))$$

sau

$$f(b)(L_a)_*(X_b) = f(ab)X_{ab} \ ,$$

pentru orice $a, b \in G$. În particular, pentru $b = e$, obţinem $f(a) = f(e)$, $(\forall)a \in G$, adică $f =$const.

Reciproc, dacă $f =$const., atunci $fX \in L(G)$.

Q.E.D.

6.8. PROPOZIŢIE. i) *Câmpurile de vectori stâng sau drept invariante pe grupul aditiv $\mathbb{R}^n$ sunt câmpurile constante.*

ii) *Algebra Lie $L(\mathbb{R}^n)$ a lui $\mathbb{R}^n$ se identifică cu algebra Lie comutativă $\mathbb{R}^n$.*

Demonstraţie. i) Fie $x^1, x^2, ..., x^n$ funcţiile coordonate ale varietăţii $\mathbb{R}^n$.

Folosim formula

$$X(a) = (L_a)_*(X_e), \ (\forall)a \in \mathbb{R}^n,$$

unde $e = (0, 0, ..., 0)$. Obţinem:

$$X(a)(x^i) = (L_a)_*(X_e)(x^i) = X_e(x^i \circ L_a).$$

Pentru orice $a' \in \mathbb{R}^n$ avem:

$$(x^i \circ L_a)(a') = x^i(a + a') = x^i(a) \cdot 1 + x^i(a'),$$

deci

$$x^i \circ L_a = x^i(a) \cdot 1 + x^i.$$

Rezultă

$$X(a)(x^i) = X_e(x^i \circ L_a) = x^i(a)X_e(1) + X_e(x^i) = X_e(x^i).$$

Dacă înlocuim X cu $X^j \frac{\partial}{\partial x^j}$, unde $X^j \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$, obţinem $X^i(a) = X^i(0)$, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}^n$, ceea ce ne arată că X^i =const., $i = 1, ..., n$.

ii) Evident, $[X, Y] = 0$, oricare ar fi $X, Y \in L(\mathbb{R}^n)$. Prin urmare, algebra Lie $L(\mathbb{R}^n)$ se identifică cu algebra Lie comutativă $\mathbb{R}^n$ (exemplul 5.2.4).

6.9. EXEMPLU. Considerăm grupul Lie $GL(n, \mathbb{R})$. Vrem să construim câmpurile de vectori stâng şi drept invariante pe grupul Lie $GL(n, \mathbb{R})$.

Fie x^i_j funcţiile coordonate ale varietăţii $GL(n, \mathbb{R})$, deci

$$x^i_j : a = \left\|a^h_k\right\| \in GL(n, \mathbb{R}) \to x^i_j(a) = a^i_j \in \mathbb{R}.$$

Formula $X(a) = (L_a)_*(X_e)$ ne conduce la

$$X(a)(x^i_j) = (L_a)_*(X_e)(x^i_j) = X_e(x^i_j \circ L_a).$$

Pentru orice $a' \in GL(n, \mathbb{R})$ avem:

$$(x^i_j \circ L_a)(a') = x^i_j(aa') = x^i_k(a)x^k_j(a'),$$

deci

$$x_j^i \circ L_a = x_k^i(a)x_j^k.$$

Rezultă

$$X(a)(x_j^i) = X_e(x_j^i \circ L_a) = X_e(x_k^i(a)x_j^k) = x_k^i(a)X_e(x_j^k).$$

Înlocuim $X = \xi_s^h \frac{\partial}{\partial x_s^h}$, unde $\xi_s^h \in \mathcal{F}(GL(n,\mathbb{R}))$ şi obţinem:

$$\xi_j^i(a) = x_k^i(a)\xi_j^k(e), \ (\forall)a \in GL(n,\mathbb{R}).$$

Deci un câmp stâng invariant pe $GL(n,\mathbb{R})$ se scrie $X = \xi_j^i(e)x_i^k \frac{\partial}{\partial x_j^k}$. Ştim că aplicaţia:

$$f : X \in L(GL(n,\mathbb{R})) \to f(X) = X_e \in T_eGL(n,\mathbb{R})$$

este un izomorfism liniar. Mai ştim că vectorii $\frac{\partial}{\partial x_j^i} |_e$ formează o bază în spaţiul tangent în elementul neutru $e = \left\|\delta_j^i\right\| \in GL(n,\mathbb{R})$. Dacă notăm $X_i^j = x_i^h \frac{\partial}{\partial x_j^h}$, avem:

$$f(X_i^j) = X_i^j(e) = x_i^h(e)\frac{\partial}{\partial x_j^h} |_e = \delta_i^h \frac{\partial}{\partial x_j^h} |_e = \frac{\partial}{\partial x_j^i} |_e .$$

Prin urmare, cele n^2 câmpuri X_j^i formează o bază în algebra Lie $L(GL(n,\mathbb{R}))$ a grupului Lie $GL(n,\mathbb{R})$.

Trecem acum să construim câmpurile de vectori drept invariante pe grupul Lie $GL(n,\mathbb{R})$. Un câmp drept invariant este un element $Y \in \mathcal{X}(GL(n,\mathbb{R}))$ care verifică formula

$$Y(a) = (R_a)_*(Y_e), \ (\forall)a \in GL(n,\mathbb{R}),$$

unde R_a este translaţia la dreapta a grupului Lie $GL(n,\mathbb{R})$ definită de elementul $a \in GL(n,\mathbb{R})$. Folosind ultima formulă, avem:

$$Y(a)(x_j^i) = (R_a)_*(Y_e)(x_j^i) = Y_e(x_j^i \circ R_a),$$
$$x_j^i \circ R_a(a') = x_j^i(R_a a') = x_j^i(a'a) = x_k^i(a')x_j^k(a).$$

Rezultă că

$$x^i_j \circ R_a = x^k_j(a)x^i_k,$$

deci, pentru orice $a \in GL(n, \mathbb{R})$, avem:

$$Y(a)(x^i_j) = Y_e(x^i_j \circ R_a) = Y_e(x^k_j(a)x^i_k) = x^k_j(a)Y_e(x^i_k).$$

Scriind câmpul $Y \in \mathcal{X}(GL(n, \mathbb{R}))$ sub forma

$$Y = \eta^h_q \frac{\partial}{\partial x^h_q},\ \eta^h_q \in \mathcal{F}(GL(n, \mathbb{R})),$$

din egalitatea

$$Y(a)(x^i_j) = x^k_j(a)Y_e(x^i_k),$$

obţinem:

$$\eta^h_q(a)\delta^i_h\delta^q_j = x^k_j(a)\eta^h_q(e)\delta^i_h\delta^q_k$$

sau

$$\eta^i_j(a) = x^k_j(a)\eta^i_k(e).$$

Rezultă că:

$$Y(a) = \eta^i_k(e)x^k_j(a)\frac{\partial}{\partial x^i_j}\ |_a, (\forall)a \in GL(n, \mathbb{R}).$$

Deci un câmp drept invariant Y se scrie

$$Y = \eta^i_k(e)Y^k_i,$$

unde am folosit notaţia:

$$Y^k_i = x^k_j \frac{\partial}{\partial x^i_j}.$$

Aplicaţia

$$f : Y \in R(GL(n, \mathbb{R})) \to f(Y) = Y_e \in T_e(GL(n, \mathbb{R}))$$

este un izomorfism liniar. Avem:

$$f(Y_i^k) = Y_i^k(e) = x_j^k(e)\frac{\partial}{\partial x_j^i}\ |_e = \delta_j^k \frac{\partial}{\partial x_j^i}\ |_e = \frac{\partial}{\partial x_k^i}\ |_e\ .$$

Deoarece vectorii $\frac{\partial}{\partial x_k^i}\ |_e$ formează o bază în spaţiul tangent în elementul neutru $e = \|\delta_j^i\| \in GL(n, \mathbb{R})$, rezultă că cele n^2 câmpuri Y_i^k formează o bază în algebra Lie $R(GL(n, \mathbb{R}))$ a câmpurilor de vectori drept invariante pe grupul Lie $GL(n, \mathbb{R})$.

OBSERVAŢIE. Fie $\{X_j^i\}$ şi $\{Y_j^i\}$ $(i, j = 1, 2, ..., n)$ bazele algebrelor Lie $L(GL(n, \mathbb{R}))$ şi $R(GL(n, \mathbb{R}))$ obţinute în exemplul 6.9.

Obţinem

$$[X_j^i, X_l^k] = \delta_l^i X_j^k - \delta_j^k X_l^i\ .$$

Avem:

$$\begin{array}{l} [X_j^i, X_i^k] = X_j^k, \text{ dacă } k \neq j \ (i \text{ nu sumează !}) \\ [X_j^i, X_l^j] = -X_l^i, \text{ dacă } i \neq l \ (j \text{ nu sumează !}) \\ [X_j^i, X_i^j] = X_j^j - X_i^i, \ (i \text{şi } j \text{ nu sumează !}) \\ [X_i^i, X_h^h] = \delta_h^i X_i^h - \delta_i^h X_h^i, \ (i \text{şi } h \text{ nu sumează !}). \end{array} \quad .$$

Dacă $h \neq i$, rezultă $[X_i^i, X_h^h] = 0$.

Dacă $h = i$, rezultă $[X_i^i, X_h^h] = 0$.

Prin urmare, *algebra Lie $L(GL(n, \mathbb{R}))$ de dimensiune n^2 admite o subalgebră comutativă de dimensiune n* (generată de $X_1^1, X_2^2, ..., X_n^n$).

Analog arătăm că operatorii $Y_1^1, ..., Y_n^n$ formează o bază a unei subalgebre Lie comutative a algebrei Lie $R(GL(n, \mathbb{R}))$.

6.10. DEFINIŢIE. *Fie G un grup Lie, $L(G)$ algebra sa Lie. Se numeşte* **derivare a algebrei Lie** $L(G)$ *orice endomorfism*

$$D : L(G) \to L(G)$$

cu proprietatea

$$D([X, Y]) = [D(X), Y] + [X, D(Y)], \ (\forall) X, Y \in L(G).$$

OBSERVAŢIE. Mulţimea derivărilor algebrei Lie $L(G)$ poate fi structurată ca spaţiu vectorial real. Introducând croşetul a două derivări prin

$$[D, D'] = DD' - D'D,$$

unde $DD' = D \circ D'$, se constată uşor că spaţiul vectorial al derivărilor algebrei Lie $L(G)$ devine o algebră Lie reală. Această algebră Lie o vom nota cu $DerL(G)$.

6.11. PROPOZIŢIE. $[X, Y] = 0$, $(\forall)X \in L(G)$, $(\forall)Y \in R(G)$.

Demonstraţie. Fie $X \in L(G)$, $Y \in R(G)$. Definim câmpurile $i_R X, i_L Y \in \mathcal{X}(G \times G)$ prin relaţiile:

$$i_R X(a, b) = (0, X(b)),\ i_L Y(a, b) = (Y(a), 0).$$

Folosind formula

$$\mu_{*,(a,b)}(X_a, Y_b) = (L_a)_*(Y_b) + (R_b)_*(X_a),$$

stabilită în lema 3.7, obţinem:

$$\begin{aligned} \mu_{*,(a,b)}(i_R X(a,b)) &= \mu_{*,(a,b)}(0, X_b) = (L_a)_*(X_b) = \\ &= (L_a)_* \circ (L_b)_*(X_e) = (L_{ab})_*(X_e) = \\ &= X_{ab} = X_{\mu(a,b)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_{*,(a,b)}(i_L Y(a,b)) &= \mu_{*,(a,b)}(Y_a, 0) = (R_b)_*(Y_a) = \\ &= (R_b)_*(Y)(R_b(a)) = Y(ab) = Y_{\mu(a,b)}. \end{aligned}$$

Prin urmare, câmpurile X şi $i_R X$ sunt $\mu-$corelate. De asemenea, câmpurile Y şi $i_L Y$ sunt $\mu-$corelate. Folosind propoziţia 1.12.2, rezultă că câmpurile $[X, Y]$ şi $[i_R X, i_L Y]$ sunt $\mu-$corelate, deci

$$[X, Y](\mu(a, b)) = \mu_*([i_R X, i_L Y](a, b)).$$

Folosind propoziţia 1.22.v), obţinem

$$[X, Y](\mu(a, b)) = 0,\ (\forall)a, b \in G.$$

Deoarece μ este aplicaţie surjectivă, obţinem

$$[X,Y]=0.$$

6.12. <u>EXEMPLU</u>. Ne propunem să determinăm algebra Lie a grupului Lie $G=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ (a se vedea exemplul 2.9.).

Legea în raport cu care G devine grup este

$$G\times G\to G,(a,a')\to aa'+a+a'.$$

Fie x funcţia coordonată a varietăţii G.

Fie $\left\{\frac{d}{dx}\right\}$ baza canonică a $\mathcal{F}(G)-$modulului $\mathcal{X}(G)$. Un element $X=f\frac{d}{dx}\in\mathcal{X}(G)$, unde $f\in\mathcal{F}(G)$, este câmp stâng invariant dacă şi numai dacă avem

$$X(a)=(L_a)_*(X_e),\ (\forall)a\in G,$$

unde $e=0$ este elementul neutru al grupului G. Aplicând vectorul $X(a)$ funcţiei coordonate x, obţinem

$$(*)\qquad X(a)(x)=X_e(x\circ L_a),\ (\forall)a\in G.$$

Pentru orice $a'\in G$, avem

$$x\circ L_a(a')=x(a)x(a')+x(a)+x(a').$$

Rezultă

$$x\circ L_a=x(a)x+x(a)\cdot 1+x.$$

Calculăm membrul drept din $(*)$. Avem

$$\begin{aligned}X_e(x\circ L_a)&=X_e(x(a)x+x(a)\cdot 1+x)=x(a)X_e(x)+x(a)X_e(1)+X_e(x)=\\&=(x(a)+1)X_e(x).\end{aligned}$$

Membrul stâng din $(*)$ este:

$$X(a)(x)=\left(f\frac{d}{dx}\right)(a)(x)=f(a)\frac{d}{dx}\big|_a(x)=f(a).$$

Ţinând seama de $(*)$, rezultă că pentru orice $a \in G$, avem:

$$X(a) = (x(a)+1)X_e(x)\frac{d}{dx}\mid_a .$$

De aici rezultă

$$X = (x+1)k\frac{d}{dx},$$

unde $k = X_e(x)$ este o constantă reală.

Prin urmare, un câmp stâng invariant X pe grupul Lie G se scrie $X = kE$, unde am notat

$$E = (x+1)\frac{d}{dx}.$$

Fie $L(G)$ algebra Lie a grupului Lie G. Ştim că aplicaţia

$$h : L(G) \to T_eG,\ h(X) = X_e$$

este un izomorfism liniar.

Deoarece $h(E) = \frac{d}{dx}\mid_e$, iar $\{\frac{d}{dx}\mid_e\}$ este bază în T_eG rezultă că $\{E\}$ este bază în algebra Lie $L(G)$.

§ 7. HOMOMORFISME ŞI IZOMORFISME DE GRUPURI LIE.

7.1. DEFINIŢIE. *Considerăm două grupuri Lie G şi G'. Vom spune că aplicaţia*

$$h : G \to G'$$

este **homomorfism** *(respectiv* **izomorfism***)* **de grupuri Lie**, *dacă h este o aplicaţie analitică (resp. difeomorfism analitic) pentru structurile analitice şi un homomorfism (resp. izomorfism) pentru structurile grupale.*

7.2. EXEMPLE.

7.2.1. Considerăm grupurile Lie aditive $\mathbb{R}$ şi $\mathbb{R}^2$. Aplicaţia

$$h : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \to h(x, y) = x \in \mathbb{R}$$

este un homomorfism (surjectiv) de grupuri Lie. Aplicaţia h nu este izomorfism de grupuri deoarece h nu este injectiv. Deci h nu este izomorfism de grupuri Lie.

7.2.2. Fie $\mathbb{R}$ grupul aditiv Lie al numerelor reale şi $\mathbb{R}_+^*$ grupul multiplicativ Lie al numerelor reale strict pozitive. Se constată fără dificultate că dacă $a > 0$ şi $a \neq 1$, atunci aplicaţia

$$x \in \mathbb{R} \to a^x \in \mathbb{R}_+^*$$

este un izomorfism de grupuri Lie.

7.2.3. Fie $\mathbb{R}$ grupul aditiv Lie al numerelor reale şi fie $GL(3, \mathbb{R})$ grupul multiplicativ Lie al matricilor de tip $(3, 3)$, nedegenerate, cu elemente numere reale. Se verifică uşor că aplicaţia

$$h : \mathbb{R} \to GL(3, \mathbb{R})$$

definită prin:

$$h(t) = \begin{Vmatrix} 1 & t & 2t(1+t) \\ 0 & 1 & 4t \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

este un homomorfism de grupuri.

În plus, se obţine $\ker h = \{0\}$, deci homomorfismul h este injectiv.

Deoarece aplicaţia h este analitică, rezultă că h este homomorfism injectiv de grupuri Lie.

7.2.4. Fie $\mathbb{R}$ grupul aditiv Lie al numerelor reale şi fie grupul Lie S^1 considerat în exemplul 1.2.3. Se constată uşor că aplicaţia:

$$h : t \in \mathbb{R} \to h(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) \in S^1$$

este un homomorfism surjectiv de grupuri Lie.

În adevăr, pentru orice $t, t' \in \mathbb{R}$ avem:

$$h(t + t') = (\cos 2\pi(t + t'), \sin 2\pi(t + t')) \in S^1.$$

Pe de altă parte, făcând produsul elementelor $h(t)$, $h(t')$ $\in$ S^1, obţinem $h(t)h(t') = (\cos 2\pi(t+t'), \sin 2\pi(t+t'))$. Cum h este aplicaţia analitică rezultă că h este homomorfism de grupuri Lie. Este uşor de văzut că h este aplicaţie surjectivă.

7.2.5. Fie G un grup Lie. Se numeşte **automorfism** al grupului Lie G, orice izomorfism de grupuri Lie

$$h : G \to G.$$

Mulţimea automorfismelor unui grup Lie, împreună cu operaţia de compunere a automorfismelor, constituie un grup, notat cu $AutG$.

Fie $a \in G$ şi fie aplicaţia

$$I_a : x \in G \to I_a(x) = axa^{-1} \in G.$$

Deoarece $I_a = R_{a^{-1}} \circ L_a$, rezultă că I_a este izomorfism de grupuri Lie. I_a se numeşte **automorfismul interior** al grupului Lie G definit de elementul $a \in G$.

PROPOZIŢIE. i) *Mulţimea automorfismelor interioare ale grupului Lie G constituie un subgrup al grupului $AutG$.*

ii) *Grupul automorfismelor interioare ale unui grup Lie G este izomorf cu grupul G dacă şi numai dacă centrul lui G se reduce la elementul unitate e al lui G.*

Demonstraţie. i) Fie I_a şi I_b două automorfisme interioare ale grupului Lie G definite respectiv de elementele $a \in G$, $b \in G$. Pentru orice $x \in G$, avem:

$$I_a \circ I_b(x) = a(bxb^{-1})a^{-1} = (ab)x(ab)^{-1} = I_{ab}(x).$$

Deci compunerea $I_a \circ I_b = I_{ab}$ este automorfismul interior al grupului Lie G definit de elementul $ab \in G$. În continuare, pentru orice $x \in G$, avem:

$$\begin{aligned} I_{a^{-1}} \circ I_a(x) &= I_{a^{-1}}(axa^{-1}) = a^{-1}(axa^{-1})a = (a^{-1}a)x(a^{-1}a) = \\ &= exe = x = I_a \circ I_{a^{-1}}(x). \end{aligned}$$

Prin urmare, $I_{a^{-1}}$ este automorfismul interior invers lui I_a. Deci mulţimea automorfismelor interioare ale lui G este un subgrup al lui $AutG$.

ii) Considerăm aplicaţia

$$h : G \to AutG$$

definită prin

$$h(a) = I_a.$$

Este uşor de văzut că h este un homomorfism al grupului G în grupul automorfismelor interioare. Ştim că centrul grupului G este mulţimea

$$C = \{a \in G \mid ax = xa, \ (\forall)x \in G\}.$$

Nucleul homomorfismului h este mulţimea

$$\text{Ker } h = \{a \in G \mid I_a(x) = x, \ (\forall)x \in G\}.$$

Pentru orice $x \in G$, avem:

$$I_a(x) = x \Leftrightarrow axa^{-1} = x \Leftrightarrow ax = xa.$$

Prin urmare, Ker $h = C$. Rezultă că h este izomorfism între grupul G şi grupul automorfismelor interioare ale lui G dacă şi numai dacă centrul lui G se reduce la elementul unitate al grupului G.

7.2.6.1. <u>OBSERVAŢIE</u>. Fie G un grup Lie, $a \in G$, $h \in T_eG$. Fie $X \in L(G)$, $Y \in R(G)$, astfel încât $X(e) = h$, $Y(e) = (I_a)_*(h)$. Atunci avem:

$$\begin{aligned} Y(a) &= (R_a)_*(Y_e) = (R_a)_*((I_a)_*(h)) = (R_a)_* \circ (R_a^{-1} \circ L_a)_*(h) = \\ &= (L_a)_*(h) = (L_a)_*(X_e) = X(a). \end{aligned}$$

Prin urmare, $Y(a) = X(a)$.

7.3. PROPOZIŢIE. *Fie*

$$h : G \to G'$$

un homomorfism de grupuri Lie. Atunci:

i) $h(e) = e'$, *unde* e *(resp.* e'*) este elementul neutru al grupului* G *(resp.* G'*).*

ii) $h \circ j = j' \circ h$, *unde* j *(resp.* j'*) este aplicaţie de inversare în* G *(resp.* G'*).*

iii) $h \circ L_a = L_{h(a)} \circ h$, $h \circ R_a = R_{h(a)} \circ h$, *unde* L_a *(resp.* R_a*) este translaţia la stânga (resp. la dreapta) a grupului Lie* G *definită de elementul* $a \in G$.

iv) $h_* : TG \to TG'$ *este un homomorfism de grupuri Lie.*

v) *Dacă* $h : G \to G'$ *este un izomorfism de grupuri Lie atunci aplicaţia*

$$h_* : TG \to TG'$$

este un izomorfism de grupuri Lie.

Demonstraţie. i) Din egalitatea $h(e) = h(e)h(e)$, obţinem

$$h(e)(h(e))^{-1} = h(e),$$

adică $h(e) = e'$.

ii) pentru orice $x \in G$, avem

$$h \circ j(x) = h(x^{-1}) \text{şi } j \circ h(x) = (h(x))^{-1}.$$

Deoarece

$$h(x^{-1})h(x) = h(x^{-1}x) = h(e) = e' = h(x)h(x^{-1}),$$

rezultă

$$h(x^{-1}) = (h(x))^{-1},$$

adică

$$h \circ j = j' \circ h.$$

iii) Pentru orice $x \in G$, avem:

$$h \circ L_a(x) = h(ax) = h(a)h(x) = L_{h(a)} \circ h(x),$$

deci $h \circ L_a = L_{h(a)} \circ h$. Analog se obţine $h \circ R_a = R_{h(a)} \circ h$.

iv) Fie μ (resp. μ') operaţia grupală în G (resp. G'). Pentru orice $a, b \in G$ şi orice $X_a \in T_aG$, $Y_b \in T_bG$, avem:

$$\begin{aligned} h_* \circ \mu_*(X_a, Y_b) &= h_*((L_a)_*(Y_b) + (R_b)_*(X_a)) = \\ &= (h \circ L_a)_*(Y_b) + (h \circ R_b)_*(X_a) = \\ &= (L_{h(a)} \circ h)_*(Y_b) + (R_{h(b)} \circ h)_*(X_a) = \\ &= (L_{h(a)})_*(h_*(Y_b)) + (R_{h(b)})_*(h_*(X_a)) = \\ &= \mu'_*(h_*(X_a), h_*(Y_b)). \end{aligned}$$

Rezultă că h_* este un homomorfism de grupuri. Deoarece h este aplicaţie analitică, rezultă că h_* este analitică şi deci h_* este homomorfism de grupuri Lie.

v) Presupunem că h este un izomorfism de grupuri Lie. Deoarece h este difeomorfism analitic, din egalităţile

$$h \circ h^{-1} = Id_{G'}, \text{şi } h^{-1} \circ h = Id_G,$$

obţinem:

$$h_* \circ (h^{-1})_* = Id_{TG'} \text{şi } (h^{-1})_* \circ h_* = Id_{TG}.$$

Prin urmare, aplicaţia analitică h_* este inversabilă şi inversa ei

$$(h_*)^{-1} = (h^{-1})_* : TG' \to TG$$

este, de asemenea, analitică. Deci h_* este izomorfism de grupuri Lie.

7.4. PROPOZIŢIE. *Fie G un grup Lie şi fie proiecţia canonică*

$$\pi : TG \to G, \ \pi(X_x) = x, \ (\forall)x \in G, \ (\forall)X_x \in T_xG.$$

Atunci:

i) π *este un homomorfism de grupuri,*

ii) π *este aplicaţie continuă,*

iii) *aplicaţia* π *este analitică,*

iv) π *este homomorfism de grupuri Lie.*

Demonstraţie. i) Fie μ operaţia grupală în G. Avem

$$\pi \circ \mu_*(X_x, Y_y) = \mu(x, y), \ (\forall)x, y \in G, \ (\forall)X_x \in T_xG, \ (\forall)Y_y \in T_yG.$$

Prin urmare, π este homomorfism de grupuri.

ii) Fie U o mulţime deschisă în G. Să arătăm că $\pi^{-1}(U)$ este mulţime deschisă în TG. Vom folosi hărţile lui TG şi G indicate în propoziţia 3.6.

Fie $\{(U_a, h_a) \mid a \in A\}$ un atlas pe G. Acestui atlas îi corespunde un atlas $\{(TU_a, H_a) \mid a \in A\}$ pe TG. Mulţimea $TU_a = \pi^{-1}(U_a)$ este deschisă în TG. Din egalitatea:

$$U = \bigcup_{a \in A}(U \cap U_a),$$

rezultă

$$\pi^{-1}(U) = \bigcup_{a \in A} \pi^{-1}(U \cap U_a).$$

Deoarece diagrama

$$\begin{tikzcd}
\pi^{-1}(U_a) \arrow[r, "H_a"] \arrow[d, "\pi"'] & h_a(U_a) \times \mathbf{R}^n \arrow[d, "\pi_1"] \\
U_a \arrow[r, "h_a"'] & h_a(U_a)
\end{tikzcd}$$

este comutativă, rezultă

$$\pi \mid_{\pi^{-1}(U_a)} = h_a^{-1} \circ \pi_1 \circ H_a,$$

unde

$$\pi_1 : h_a(U_a) \times \mathbb{R}^n \to h_a(U_a)$$

este proiecţia canonică pe primul factor. De aici rezultă că $\pi \mid_{\pi^{-1}(U_a)}$ este continuă, deci $\pi^{-1}(U \cap U_a)$ este mulţime deschisă în $\pi^{-1}(U_a)$. Rezultă că mulţimea

$$\bigcup_{a \in A} \pi^{-1}(U \cap U_a) = \pi^{-1}(U)$$

este mulţime deschisă în TG şi deci π este aplicaţie continuă.

iii) Egalitatea $\pi \mid_{\pi^{-1}(U_a)} = h_a^{-1} \circ \pi_1 \circ H_a$ stabilită la punctul precedent ne arată că aplicaţia π este analitică.

iv) Rezultă din punctele i) şi iii).

7.5. DEFINIŢIE. *Fie L şi L' două algebre Lie peste corpul comutativ K. Aplicaţia*

$$h : L \to L'$$

se numeşte **homomorfism** *(respectiv* **izomorfism***)* **de algebre Lie**, *dacă h este homomorfism (respectiv izomorfism) de spaţii vectoriale şi*

$$h([a,b]) = [(h(a), h(b)], \ (\forall) a, b \in L.$$

7.5.1. EXEMPLU. i) Considerăm pe dreapta reală câmpurile:

$$X_1 = \frac{d}{dx}, \ X_2 = x\frac{d}{dx}, \ X_3 = x^2\frac{d}{dx}.$$

Avem relaţiile:

$$[X_1, X_2] = X_1, \ [X_1, X_3] = 2X_2, \ [X_2, X_3] = X_3.$$

Conform propoziţiei 5.4, rezultă că câmpurile X_1, X_2, X_3 generează liniar algebra Lie

$$L = \left\{c^1X_1 + c^2X_2 + c^3X_3 \mid c^1, \ c^2, \ c^3 \in \mathbb{R}\right\}.$$

Se constată uşor că dimensiunea algebrei Lie L este trei.

ii) Considerăm câmpurile X_1', X_2', $X_3' \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^2)$ date prin:

$$X_1' = x^2\frac{\partial}{\partial x^1}, \ X_2' = x^1\frac{\partial}{\partial x^2}, \ X_3' = x^1\frac{\partial}{\partial x^1} - x^2\frac{\partial}{\partial x^2}.$$

Avem relaţiile:

$$[X'_1, X'_2] = -X'_3,\ [X'_1, X'_3] = 2X'_1,\ [X'_2, X'_3] = -2X'_2.$$

Conform propoziţiei 5.4, rezultă că câmpurile X'_1, X'_2, X'_3 generează liniar algebra Lie

$$L' = \{c'^1 X'_1 + c'^2 X'_2 + c'^3 X'_3 \mid c'^1,\ c'^2,\ c'^3 \in \mathbb{R}\}.$$

Se constată uşor că dimensiunea algebrei Lie L' este trei.

iii) Algebrele Lie L şi L' sunt izomorfe deoarece aplicaţia $h : L \to L'$, $h(X_1) = X'_2$, $h(X_2) = -\frac{1}{2}X'_3$, $h(X_3) = -\frac{1}{2}X'_1$ este un izomorfism liniar şi satisface condiţiile $h([X_i, X_j]) = [h(X_i), h(X_j)]$, pentru orice $i, j \in \{1, 2, 3\}$.

7.5.2. Fie $gl(n, \mathbb{R})$ algebra Lie considerată în exemplul 5.2.2, unde $K = \mathbb{R}$ şi fie $L(GL(n, \mathbb{R}))$ algebra Lie a grupului Lie $GL(n, \mathbb{R})$. Notând cu $\{X^i_j\}_{1\leq i,j\leq n}$ baza canonică a spaţiului vectorial $L(GL(n, \mathbb{R}))$, se obţine fără dificultate următorul izomorfism de algebre Lie:

$$h : a = \left\|a^i_j\right\| \in gl(n, \mathbb{R}) \to h\,(a) = a^i_j X^j_i \in L(GL(n, \mathbb{R})).$$

În adevăr, este evident că h este izomorfism de spaţii vectoriale reale. Pentru orice $a, b \in gl\,(n, \mathbb{R})$, avem:

$$\begin{aligned}
[h\,(a)\,, h\,(b)] &= \left[a^i_j X^j_i, b^k_r X^r_k\right] = a^i_j b^k_r \left[X^j_i, X^r_k\right] = a^i_j b^k_r \left(\delta^j_k X^r_i - \delta^r_i X^j_k\right) = \\
&= a^i_j b^k_r \delta^j_k X^r_i - a^i_j b^k_r \delta^r_i X^j_k = a^i_j b^j_r X^r_i - a^i_j b^k_i X^j_k = \\
&= (ab)^i_r\, X^r_i - (ba)^k_j\, X^j_k = (ab - ba)^k_j\, X^j_k = \\
&= h\,([a, b])\,.
\end{aligned}$$

7.6. PROPOZIŢIE. *Fie $L(G)$ (resp. $R(G)$) algebra Lie a câmpurilor invariante la stânga (resp. la dreapta) pe grupul Lie G şi fie*

$$j : G \to G$$

aplicaţia de inversare. Atunci aplicaţia

$$j_* : \mathcal{X}(G) \to \mathcal{X}(G)$$

defineşte un izomorfism între algebrele Lie $L(G)$ şi $R(G)$.

Demonstraţie. Deoarece j este difeomorfism rezultă că $j_* : \mathcal{X}(G) \to \mathcal{X}(G)$ este un izomorfism de algebre Lie. Pentru $X \in L(G)$ avem

$$(R_a)_*(j_*(X)) = (R_a \circ j)_*(X) = (j \circ L_{a^{-1}})_*(X) = j_*(L_{a^{-1}})_*(X) = j_*(X).$$

Rezultă $j_*(X) \in R(G)$, deci $j_*(L(G)) \subset R(G)$. Analog obţinem $j_*(R(G)) \subset L(G)$.

Cum $j^2 = Id_G$, rezultă că j_* stabileşte un izomorfism între algebrele $L(G)$ şi $R(G)$.

OBSERVAŢIE. Ştim că orice difeomorfism

$$h : M \to M'$$

induce un izomorfism de algebre Lie $h_* : \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M')$. Această proprietate nu este adevărată în cazul în care h nu este difeomorfism. În schimb, vom stabili un analog al acestei proprietăţi în cazul în care h se înlocuieşte cu un homomorfism $h : G \to G'$ de grupuri Lie.

7.7. PROPOZIŢIE. *Fie $h : G \to G'$ un homomorfism de grupuri Lie şi fie $L(G)$ (resp. $L(G')$) algebra Lie a lui G (resp. G'). Pentru orice câmp $X \in L(G)$ există un unic câmp $X' \in L(G')$, astfel încât*

$$(7.1) \qquad X'(f') \circ h = X(f' \circ h), \ (\forall) f' \in \mathcal{F}(G').$$

Demonstraţie. Fie $X \in L(G)$. Definim aplicaţia

$$X' : G' \to TG'$$

prin formula

$$(7.2) \qquad X'(b) = (L_b)_*(h_*(X_e)), \ (\forall) b \in G',$$

unde e este elementul neutru al grupului Lie G. Este evident că $h_*(X_e)$ este un vector tangent la varietatea G' în elementul neutru $e' = h(e)$. Se constată uşor că aplicaţia $b \to X'(b)$ este analitică. Prin urmare, $X' \in \mathcal{X}(G')$. Se arată uşor că $X' \in L(G')$. Să arătăm acum că X' construit prin formula (7.2) verifică (7.1).

Pentru orice $a \in G$, avem:

$$\begin{aligned}
(X'(f') \circ h)(a) &= X'(f')(h(a)) = X'_{h(a)}(f') = (L_{h(a)})_*(h_*(X_e))(f') = \\
&= (L_{h(a)} \circ h)_*(X_e)(f') = (h \circ L_a)_*(X_e)(f') = \\
&= h_*((L_a)_*(X_e))(f') = h_*(X_a)(f') = X_a(f' \circ h) = \\
&= X(f' \circ h)(a),
\end{aligned}$$

deci X' verifică (7.1). Să stabilim acum unicitatea lui X'. Presupunem că ar mai exista un câmp $Y' \in L(G')$ cu proprietatea că:

$$Y'(f') \circ h = X(f' \circ h), \ (\forall) f' \in \mathcal{F}(G'). \tag{7.3}$$

Pentru orice $f' \in \mathcal{F}(G')$, din (7.3) rezultă:

$$(Y'(f') \circ h)(e) = X(f' \circ h)(e) = X_e(f' \circ h) = h_*(X_e)(f').$$

De asemenea, avem:

$$(Y'(f') \circ h)(e) = Y'(f')(h(e)) = Y'_{e'}(f').$$

Pentru orice $f' \in \mathcal{F}(G')$, rezultă

$$Y'_{e'}(f') = h_*(X_e)(f') = X'_{e'}(f'),$$

deci $Y'_{e'} = X'_{e'}$. Cum $X', Y' \in L(G')$, rezultă că $X' = Y'$.

Notaţie. Câmpul $X' \in L(G')$ construit prin formula (7.2) va fi notat în continuare prin $h_*(X)$. Cu această notaţie formula (7.1) din propoziţia 7.7 se scrie

$$h_*(X)(f') \circ h = X(f' \circ h), \ (\forall) f' \in \mathcal{F}(G'), \tag{7.1'}$$

iar formula (7.2) devine

$$h_*(X)(b) = (L_b)_*(h_*(X_e)), \ (\forall) b \in G'. \tag{7.2'}$$

7.8. PROPOZIŢIE. *Fie $h : G \to G'$ un homomorfism de grupuri Lie. Atunci aplicaţia*

$$h_* : X \in L(G) \to h_*(X) \in L(G')$$

este un homomorfism de algebre Lie ($h_* : L(G) \to L(G')$ se numeşte homomorfismul canonic asociat homomorfismului de grupuri Lie $h : G \to G'$).

Demonstraţie. Pentru orice k_1, $k_2 \in \mathbb{R}$ şi orice X, $Y \in L(G)$, avem:

$$h_*(k_1X + k_2Y) = k_1h_*(X) + k_2h_*(Y).$$

Deoarece câmpurile $[h_*(X), h_*(Y)]$ şi $h_*([X,Y])$ sunt stâng invariante, pentru a stabili egalitatea

$$h_*([X,Y]) = [h_*(X), h_*(Y)],$$

este suficient să arătăm că

$$h_*([X,Y])(e') = [h_*(X), h_*(Y)](e'). \tag{7.4}$$

În adevar, folosind formula

$$h_*(X)(f') \circ h = X(f' \circ h), \ (\forall) f' \in \mathcal{F}(G'), \tag{7.5}$$

avem:

$$\begin{aligned}
[h_*(X), h_*(Y)](e')(f') &= (h_*(X))_{e'}(h_*(Y)(f')) - (h_*(Y))_{e'}(h_*(X)(f')) = \\
&= h_*(X_e)(h_*(Y)(f')) - h_*(Y_e)(h_*(X)(f')) = \\
&= X_e(h_*(Y)(f') \circ h) - Y_e(h_*(X)(f') \circ h) = \\
&= X_e(Y(f' \circ h)) - Y_e(X(f' \circ h)) = [X,Y]_e(f' \circ h) = \\
&= h_*([X,Y]_e)(f') = h_*([X,Y])(h(e))(f') = \\
&= h_*([X,Y])(e')(f'), \ (\forall)\, f' \in \mathcal{F}(G'),
\end{aligned}$$

deci egalitatea (7.4) este verificată.

7.9. PROPOZIŢIE. *Fie*

$$h : G \to G' \text{şi } h' : G' \to G''$$

două homomorfisme de grupuri Lie. Atunci

$$h' \circ h : G \to G''$$

este un homomorfism de grupuri Lie şi avem:

$$(h' \circ h)_* = h'_* \circ h_*.$$

Demonstraţie. Pentru orice $f'' \in \mathcal{F}(G'')$ şi orice $X \in L(G)$, avem:

$$\begin{aligned}
(h' \circ h)_*(X)(f'') \circ (h' \circ h) &= X(f'' \circ (h' \circ h)) = X((f'' \circ h') \circ h) = \\
&= (h_*(X)(f'' \circ h')) \circ h = \\
&= (h'_*(h_*(X))(f'') \circ h') \circ h = \\
&= (h'_* \circ h_*)(X)(f'') \circ (h' \circ h).
\end{aligned}$$

Deci $(h' \circ h)_* = h'_* \circ h_*$.

OBSERVAŢIE. Se arată uşor că $(Id_G)_* = Id_{L(G)}$.

7.10. PROPOZIŢIE. *Dacă $h : G \to G'$ este un izomorfism de grupuri Lie, atunci:*

$$h_* : X \in L(G) \to h_*(X) \in L(G')$$

este un izomorfism de algebre Lie.

Demonstraţie. Din relaţiile:

$$h \circ h^{-1} = Id_{G'} \text{şi } h^{-1} \circ h = Id_G,$$

obţinem:

$$h_* \circ (h^{-1})_* = Id_{L(G')}, \; (h^{-1})_* \circ h_* = Id_{L(G)}.$$

Deci aplicaţia h_* este inversabilă şi $(h_*)^{-1} = (h^{-1})_*$. Rezultă că h_* este un izomorfism de algebre Lie.

7.11. OBSERVAŢIE. i) Conform notaţiilor tradiţionale folosite mai sus simbolul h_* desemnează fie **homomorfismul de algebre Lie**

$$h_* : L(G) \to L(G'),$$

fie **homomorfismul de grupuri Lie**

$$h_* : TG \to TG'.$$

ii) Fie $h : G \to G'$ un homomorfism de grupuri Lie şi fie $h_* : L(G) \to L(G')$ homomorfismul canonic asociat homomorfismului h. Ţinând seama de formula (7.2), avem:

$$h_*(X)(h(a)) = h_*(X_a), \ (\forall) a \in G.$$

În adevăr, pentru orice $a \in G$, avem:

$$\begin{aligned} h_*(X)(h(a)) &= (L_{h(a)})_*(h_*(X_e)) = (L_{h(a)} \circ h)_*(X_e) = \\ &= (h \circ L_a)_*(X_e) = h_* \circ (L_a)_*(X_e) = h_*(X_a). \end{aligned}$$

7.12. Fie V un spaţiu vectorial real de dimensiune finită n şi fie $gl(V)$ spaţiul vectorial al endomorfismelor lui V. Considerăm aplicaţia

$$[\ ,\ ] : gl(V) \times gl(V) \to gl(V)$$

definită prin

$$[h, h'] = hh' - h'h,$$

unde $hh' = h \circ h'$. Se constată uşor că spaţiul vectorial $gl(V)$ cu croşetul astfel introdus devine o algebra Lie reală de dimensiune n^2.

PROPOZIŢIE. *Fie V un spaţiu vectorial real de dimensiune finită n. Notăm cu $GL(V)$ grupul endomorfismelor nesingulare ale lui V. Atunci $GL(V)$ este un grup Lie. În plus, algebrele Lie $L(GL(V))$ şi $gl(V)$ sunt izomorfe.*

Demonstraţie. Fie $\{f_1, f_2, ..., f_n\}$ o bază în V şi fie $h \in gl(V)$. Punem

$$h(f_j) = x^i_j(h) f_i, \ j = 1, 2, ..., n\ ,$$

unde $x^i_j(h) \in \mathbb{R}$ $(i,j = 1,2,...,n)$. Considerăm aplicaţia

$$J_f : gl(V) \to gl(n,\mathbb{R})$$

definită prin

$$J_f(h) = \left\| x^i_j(h) \right\|.$$

Este uşor de văzut că J_f este un izomorfism de algebre Lie. Restricţia aplicaţiei J_f la $GL(V)$ este un izomorfism de grupuri

$$J_f : GL(V) \to GL(n,\mathbb{R}).$$

Deoarece J_f este aplicaţie bijectivă, rezultă că există o unică structură de varietate analitică pe $GL(V)$, în raport cu care J_f devine difeomorfism. Următoarea diagramă

$$\begin{tikzcd}
GL(V) \times GL(V) \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "J_f \times J_f"'] & GL(V) \arrow[d, "J_f"] \\
GL(n,\mathbf{R}) \times GL(n,\mathbf{R}) \arrow[r, "\mu'"'] & GL(n,\mathbf{R})
\end{tikzcd}$$

este comutativă. Avem

$$J_f \circ \mu = \mu' \circ (J_f \times J_f),$$

unde μ (resp. μ') este operaţia grupală în $GL(V)$ (resp. $GL(n,\mathbb{R})$). Rezultă că aplicaţia

$$\mu = J_f^{-1} \circ \mu' \circ (J_f \times J_f)$$

este analitică, deci $GL(V)$ este grup Lie.

Deoarece aplicaţia

$$J_f : GL(V) \to GL(n, \mathbb{R})$$

este izomorfism de grupuri Lie, rezultă că aplicaţia

$$(J_f)_* : L(GL(V)) \to gl(n, \mathbb{R})$$

este un izomorfism de algebre Lie. Deoarece aplicaţia

$$J_f^{-1} : gl(n, \mathbb{R}) \to gl(V)$$

este un izomorfism de algebre Lie, rezultă următorul izomorfism de algebre Lie

$$J_f^{-1} \circ (J_f)_* : L(GL(V)) \to gl(V).$$

Dacă $\{f_1', f_2', ..., f_n'\}$ este o altă bază a lui V, atunci, în mod analog, se obţine izomorfismul de algebre Lie următor

$$J_{f'} : gl(V) \to gl(n, \mathbb{R}).$$

Fie $A \in GL(V)$ astfel încât

$$A(f_i) = f_i', \ i = 1, 2, ..., n.$$

Atunci J_f şi $J_{f'}$ sunt legate prin ecuaţiile

$$J_f(h) = J_{f'}(A) J_{f'}(h) J_{f'}(A^{-1}).$$

Deoarece aplicaţia

$$a \in GL(n, \mathbb{R}) \to J_{f'}(A) \ a \ J_{f'}(A^{-1}) \in GL(n, \mathbb{R})$$

este un izomorfism de grupuri Lie, rezultă că structura analitică a lui $GL(V)$ este independentă de alegerea bazei în V. În plus, izomorfismul de algebre Lie

$$J_f^{-1} \circ (J_f)_* : L(GL(V)) \to gl(V)$$

nu depinde de alegerea bazei în V.

7.13. DEFINIŢIE. *Fie G un grup Lie şi fie $h \in T_eG$.*

i) *Câmpul unic $X \in L(G)$ cu $X(e) = h$ se numeşte* **câmp vectorial stâng invariant generat de** h.

ii) *Câmpul unic $Y \in R(G)$ cu $Y(e) = h$ se numeşte* **câmp vectorial drept invariant generat de** h.

7.13.1. Am văzut în propoziţia 7.6 că izomorfismul de algebre Lie

$$j_* : \mathcal{X}(G) \to \mathcal{X}(G)$$

se restricţionează la un izomorfism

$$j_* : L(G) \to R(G).$$

Fie $h \in T_eG$ şi fie $X \in L(G)$, $Y \in R(G)$ astfel încât $X(e) = Y(e) = h$. Atunci, folosind formula

$$j_*(X_a) + (L_{a^{-1}})_* \circ (R_{a^{-1}})_*(X_a) = 0_{a^{-1}}, \;\; X_a \in T_aG, \;\; a \in G$$

(stabilită în lema 3.7), obţinem:

$$\begin{aligned} j_*(X_a) &= -(L_{a^{-1}})_* \circ (R_{a^{-1}})_*(X_a) = -(L_{a^{-1}})_* \circ (R_{a^{-1}})_* \circ (L_a)_*(X_e) = \\ &= -(L_{a^{-1}} \circ R_{a^{-1}} \circ L_a)_*(X_e) = -(L_{a^{-1}} \circ L_a \circ R_{a^{-1}})_*(X_e) = \\ &= -(R_{a^{-1}})_*(Y_e) = -Y_{a^{-1}}. \end{aligned}$$

Avem, deci

$$j_*(X_a) = -Y(a^{-1}),$$

sau

$$j_*(X)(j(a)) = -Y(j(a)), \;\; (\forall)a \in G.$$

Rezultă

$$j_*(X) = -Y.$$

7.13.2. Am văzut în propoziţia 6.3 că spaţiile vectoriale T_eG şi $L(G)$ sunt izomorfe. Introducem o structură de algebră Lie în T_eG prin formula:

$$[h,h'] = [X,X'](e), \ (\forall)h,h' \in T_eG,$$

unde X, $X' \in L(G)$, $X(e) = h$, $X'(e) = h'$.

Izomorfismul liniar existent între T_eG şi $R(G)$ determină o altă structură de algebră Lie pe T_eG:

$$[h,h']^{\sim} = [Y,Y'](e), \ (\forall)h,h' \in T_eG,$$

unde Y, $Y' \in R(G)$, $Y(e) = h$, $Y'(e) = h'$.

Conform cu 7.13.1, avem:

$$[h,h']^{\sim} = -[h,h'], \ (\forall)h,h' \in T_eG.$$

Este uşor de văzut că aplicaţia:

$$h \in T_eG \to -h \in T_eG$$

este un izomorfism între aceste două algebre Lie.

§ 8. SUBGRUPURILE CU UN PARAMETRU ALE UNUI GRUP LIE. APLICAŢIA EXPONENŢIALĂ

8.1. DEFINIŢIE. *Un* **subgrup cu un parametru** *al unui grup Lie G este un homomorfism al grupului aditiv Lie al numerelor reale $\mathbb{R}$ în G, adică o aplicaţie analitică*

$$\rho : \mathbb{R} \to G,$$

astfel încât

$$\rho(t+s) = \rho(t)\rho(s),\ (\forall)t, s \in \mathbb{R}.$$

8.2. PROPOZIŢIE. *Fie $\rho : \mathbb{R} \to G$ un subgrup cu un parametru al grupului Lie G. Atunci lui ρ i se asociază un câmp stâng invariant $X \in L(G)$. În plus, X este complet, fiind asociat acţiunii*

$$\alpha : \mathbb{R}\times G \to G$$

definită prin

$$\alpha(t, a) = a\rho(t).$$

Demonstraţie. Deoarece $\rho : \mathbb{R} \to G$ este homomorfism avem

$$\rho(t+t') = \rho(t)\rho(t'),\ \rho(0) = e.$$

Considerăm vectorul

$$X_e = \rho_* \left(\frac{d}{dt}\, |_{t=0} \right) \in T_eG.$$

Cu ajutorul vectorului X_e construim câmpul stâng invariant $X \in L(G)$ prin

$$X(a) = (L_a)_*(X_e) = (L_a)_* \left(\rho_* \left(\frac{d}{dt}\, |_{t=0} \right) \right).$$

Deci lui ρ i-am asociat un câmp stâng invariant X prin formula

$$(8.1) \qquad X(a) = (L_a \circ \rho)_* \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \right).$$

În plus, vom arăta că X este complet şi că este asociat acţiunii

$$\alpha : \mathbb{R}\times G \to G$$

definită prin

$$\alpha(t,a) = a\rho(t).$$

În primul rând să verificăm că aplicaţia α este o acţiune. Aplicaţia

$$\mathbb{R}\times G \to G, \ (t,a) \to a$$

este analitică. De asemenea, aplicaţia

$$\mathbb{R}\times G \to \mathbb{R}, \ (t,a) \to t$$

cste analitică. Rezultă că aplicaţia

$$\mathbb{R}\times G \to G \times \mathbb{R}, \ (t,a) \to (a,t)$$

este analitică. Aplicaţia

$$\alpha : \mathbb{R}\times G \to G$$

este analitică, deoarece ea este compunerea aplicaţiilor analitice

$$\begin{array}{ccl} \mathbb{R}\times G & \to & G \times \mathbb{R} \xrightarrow{Id_G \times \rho} G \times G \xrightarrow{\mu} G \\ (t,a) & \to & (a,t) \longrightarrow (a, \rho(t)) \to a\rho(t) = \alpha(t,a), \end{array}$$

unde μ este legea de grup în G.

Pentru orice $a \in G$ şi orice t, $t' \in \mathbb{R}$ avem:

$$\alpha(0,a) = a\rho(0) = ae = a,$$

$$\alpha(t, \alpha(t', a)) = \alpha(t', a)\rho(t) = a\rho(t')\rho(t) = a\rho(t+t') = \alpha(t+t', a),$$

deci α este o acţiune.

Acţiunii α i se asociază un câmp de vectori tangenţi varietăţii G care, în orice punct $a \in G$, ne dă vectorul

$$(\alpha_a)_* \left(\frac{d}{dt} |_{t=0} \right),$$

unde $\alpha_a(t) = \alpha(t,a)$. Vom arăta că câmpul $a \in G \to (\alpha_a)_* \left(\frac{d}{dt} |_{t=0}\right) \in TG$, asociat acţiunii α, este tocmai câmpul $X \in L(G)$, dat prin (8.1). Deoarece $\alpha_a(t) = \alpha(t,a) = a\rho(t) = L_a(\rho(t)) = (L_a \circ \rho)(t)$, rezultă

$$(\alpha_a)_* \left(\frac{d}{dt} |_{t=0} \right) = (L_a \circ \rho)_* \left(\frac{d}{dt} |_{t=0} \right) = X(a),$$

deci câmpul X este complet, el fiind asociat acţiunii α.

Q.E.D.

8.3. PROPOZIŢIE. *Fie G un grup Lie şi fie $X \in L(G)$. Atunci X este complet. În plus, există un singur homomorfism de grupuri Lie $\rho : \mathbb{R} \to G$ cu proprietatea că grupul de transformări cu un parametru asociat lui X este*

$$\alpha : \mathbb{R} \times G \to G$$

definit prin

$$\alpha(t,a) = a\rho(t).$$

Demonstraţie. Fie $X \in L(G)$. Alegem un grup de transformări locale cu un parametru al câmpului X

$$\beta : I_\varepsilon \times U \to G,$$

unde U este o vecinătate deschisă a lui $e \in G$, iar $I_\varepsilon = (-\varepsilon, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. Pentru $a \in U$ curba

$$\beta_a : I_\varepsilon \to G, \ \beta_a(t) = \beta(t,a)$$

este traiectorie a câmpului X (centrată în punctul a), deci

$$(8.2) \qquad X_{\beta_a(t)} = (\beta_a)_* \left(\frac{d}{dt} |_t \right)$$

cu condiţia iniţială

$$(8.2') \qquad \beta_a(0) = \beta(0, a) = a.$$

Pentru $a = e$, din (8.2) rezultă:

$$(\beta_e)_* \left(\frac{d}{dt} |_t \right) = X_{\beta_e(t)}$$

cu condiţia iniţială $\beta_e(0) = e$. Dacă aplicăm $(L_a)_*$ obţinem

$$(L_a)_* \left((\beta_e)_* \left(\frac{d}{dt} |_t \right) \right) = (L_a)_* \left(X_{\beta_e(t)} \right)$$

şi, ţinând seama că X este stâng invariant, rezultă

$$(8.3) \qquad (L_a \circ \beta_e)_* \left(\frac{d}{dt} |_t \right) = X_{L_a \circ \beta_e(t)}$$

cu condiţia iniţială

$$(8.3') \qquad L_a \circ \beta_e(0) = a.$$

Relaţiile (8.2) şi (8.3) ne arată că pentru $a \in U$, curbele

$$L_a \circ \beta_e : I_\varepsilon \to G \text{şi } \beta_a : I_\varepsilon \to G$$

sunt traiectorii ale câmpului X, iar relaţiile (8.2') şi (8.3') ne arată că aceste traiectorii satisfac aceeaşi condiţie iniţială

$$\beta_a(0) = L_a \circ \beta_e(0).$$

Conform propoziţiei 4.9, rezultă

$$L_a \circ \beta_e(t) = \beta_a(t), \ (\forall)t \in I_\varepsilon, \ (\forall)a \in U.$$

Am obţinut formula

$$(8.4) \qquad \beta(t, a) = a\beta(t, e), \ (\forall)t \in I_\varepsilon, \ a \in U.$$

Fie $t_1, t_2 \in I_\varepsilon$ cu $t_1 + t_2 \in I_\varepsilon$. Deoarece β este un grup de transformări locale cu un parametru, avem:

$$\beta(t_1+t_2,e)=\beta(t_1,\beta(t_2,e))=\beta(t_2,\beta(t_1,e)).$$

Folosind (8.4), avem

$$\beta(t_1+t_2,e)=\beta(t_2,e)\beta(t_1,e)=\beta(t_1,e)\beta(t_2,e)$$

sau

$$\beta(t_1+t_2,e)=\beta_e(t_2)\beta_e(t_1)=\beta_e(t_1)\beta_e(t_2).$$

Definim funcţia

$$\sigma : I_\varepsilon \to G$$

prin formula

$$\sigma(t)=\beta_e(t).$$

Fie $s,t\in I_\varepsilon$ cu $s+t\in I_\varepsilon$. Rezultă

$$\sigma(s+t)=\sigma(s)\sigma(t).$$

Am obţinut astfel un homomorfism local σ al unei vecinătăţi I_ε a lui $0\in\mathbb{R}$ în grupul G. Vom prelungi acest homomorfism la $\mathbb{R}$ prin:

$$\rho(t)=\underbrace{\sigma\left(\frac{t}{n}\right)\ldots\sigma\left(\frac{t}{n}\right)}_{n\text{ factori}}=\left(\sigma\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n,$$

unde n este un număr natural suficient de mare pentru ca $\frac{t}{n}$ să fie în intervalul I_ε.

Deoarece σ este homomorfism local, definiţia lui ρ este independentă de alegerea lui n. În adevăr, fie m un alt număr natural suficient de mare astfel ca $\frac{t}{m}$ să fie în intervalul I_ε. Atunci

$$\begin{aligned}\rho(t) &= \left(\sigma\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n=\left(\sigma\left(\frac{mt}{mn}\right)\right)^n=\left(\left(\sigma\left(\frac{t}{mn}\right)\right)^m\right)^n=\\ &= \left(\left(\sigma\left(\frac{t}{mn}\right)\right)^n\right)^m=\left(\sigma\left(\frac{nt}{mn}\right)\right)^m=\left(\sigma\left(\frac{t}{m}\right)\right)^m\end{aligned}$$

Fie $t, t' \in \mathbb{R}$. Alegem un număr natural $n \in \mathbb{N}$, suficient de mare, astfel ca $\frac{t}{n}$, $\frac{t'}{n}$, $\frac{t+t'}{n}$ să fie în intervalul I_ε. Atunci

$$\begin{aligned} \rho(t+t') &= \left(\sigma\left(\frac{t+t'}{n}\right)\right)^n = \left(\sigma\left(\frac{t}{n}+\frac{t'}{n}\right)\right)^n = \left(\sigma\left(\frac{t}{n}\right)\sigma\left(\frac{t'}{n}\right)\right)^n = \\ &= \left(\sigma\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n \left(\sigma\left(\frac{t'}{n}\right)\right)^n = \rho(t)\rho(t'), \end{aligned}$$

deci ρ este un homomorfism global al lui $\mathbb{R}$ în G.

Din consideraţiile de mai sus, este clar că σ este restricţia homomorfismului ρ la I_ε.

Cu ajutorul lui ρ prelungim pe β prin

$$\alpha(t, a) = a\rho(t).$$

Este evident că α este acţiune a grupului aditiv $\mathbb{R}$ în varietatea G. Să verificăm că câmpul stâng invariant X este asociat acţiunii α. Avem:

$$\begin{aligned} X_e &= (\beta_e)_* \left(\frac{d}{dt}\,|_{t=0}\right) = \sigma_* \left(\frac{d}{dt}\,|_{t=0}\right) = (\rho\,|_{I_\varepsilon})_* \left(\frac{d}{dt}\,|_{t=0}\right) = \\ &= \rho_* \left(\frac{d}{dt}\,|_{t=0}\right) = (\alpha_e)_* \left(\frac{d}{dt}\,|_{t=0}\right). \end{aligned}$$

Am obţinut:

$$X_e = (\alpha_e)_* \left(\frac{d}{dt}\,|_{t=0}\right) = Y_e,$$

unde $Y \in L(G)$ este câmpul de vectori asociat acţiunii α. Avem $X, Y \in L(G)$ şi $X_e = Y_e$. Rezultă că $X = Y$. Prin urmare, orice câmp $X \in L(G)$ determină o acţiune unică $\alpha : \mathbb{R} \times G \to G$ astfel încât

$$(\alpha_e)_* \left(\frac{d}{dt}\right) = X.$$

8.3.1. Notaţie. În continuare, pentru a pune în evidenţă faptul că subgrupul cu un parametru α_e este determinat de câmpul stâng invariant X, vom folosi notaţia $\alpha_e = \rho_X$.

Este uşor de văzut că dacă

$$\alpha : \mathbb{R} \times G \to G$$

este acţiunea asociată câmpului stâng invariant X, atunci avem:

$$\alpha(t, a) = a\rho_X(t) = R_{\rho_X(t)}(a),$$

unde $R_{\rho_X(t)} : G \to G$ este translaţia la dreapta a grupului Lie G definită de elementul $\rho_X(t) \in G$.

Observaţie. Fie $L(G)$ algebra Lie a unui grup Lie G. Ştim că un subgrup cu un parametru al lui G este un homomorfism de grupuri Lie $\rho : R \to G$. Notând cu Γ mulţimea subgrupurilor cu un parametru ale lui G, din ultimele două propoziţii rezultă următoarea bijecţie

$$\nu : \Gamma \to L(G).$$

Pentru un subgrup cu un parametru oarecare $\rho \in \Gamma$, elementul $\nu(\rho) \in L(G)$ este câmpul stâng invariant asociat acţiunii

$$\alpha : \mathbb{R} \times G \to G$$

definită prin

$$\alpha(t, a) = a\rho(t).$$

În notaţiile din propoziţia precedentă avem

$$\nu^{-1}(X) = \rho_X, \ (\forall) X \in L(G).$$

8.3.2. EXEMPLU. Fie $L(\mathbb{R}^n)$ algebra Lie a grupului Lie aditiv $\mathbb{R}^n$. Ne propunem să determinăm grupul cu un parametru asociat unui câmp oarecare $X \in L(\mathbb{R}^n)$ şi să punem în evidenţă subgrupurile cu un parametru ale grupului Lie $\mathbb{R}^n$.

Ştim că un câmp $X \in L(\mathbb{R}^n)$ se scrie

$$X = a^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \ a^i = \text{const.}, \ i = 1, 2, ..., n.$$

Traiectoriile câmpului X sunt date de sistemul:

$$\frac{dx^i}{dt} = a^i, \; i = 1, 2, ..., n.$$

Rezultă $x^i = a^i t + b^i$, unde b^i sunt constante, $i = 1, 2, \ldots, n$. Dacă notăm $x_0^i = x^i(0)$, obţinem $b^i = x_0^i$. Deci traiectoria centrată în punctul

$$p_0 = (x_0^1, ..., x_0^n)$$

este curba parametrizată

$$\alpha_{p_0} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$$

definită prin

$$\alpha_{p_0}(t) = \left(a^1 t + x_0^1, ..., a^n t + x_0^n\right).$$

Variind punctul $p_0 \in \mathbb{R}^n$, obţinem acţiunea

$$\alpha : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

dată prin

$$\alpha(t, p) = (a^1 t + x^1, ..., a^n t + x^n),$$

unde $p = (x^1, ..., x^n) \in \mathbb{R}^n$.

Pentru $p = e = (0, ..., 0) \in \mathbb{R}^n$ obţinem:

$$\alpha_e(t) = (a^1 t, ..., a^n t).$$

Rezultă că subgrupurile cu un parametru ale lui $\mathbb{R}^n$ sunt date de

$$t \in \mathbb{R} \to (a^1 t, ..., a^n t) \in \mathbb{R}^n.$$

Prin urmare, subgrupurile cu un parametru ale lui $\mathbb{R}^n$ se identifică cu dreptele din $\mathbb{R}^n$ ce trec prin origine.

8.4. PROPOZIŢIE. *Fie G un grup Lie şi fie $\rho : \mathbb{R} \to G$ o curbă analitică în G cu $\rho(0) = e$. Notăm $X_e = \dot{\rho}(0)$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) *ρ este subgrup cu un parametru*

(ii) *ρ satisface ecuaţia diferenţială*

$$(8.5)\qquad \overset{\bullet}{\rho}(t) = \left(L_{\rho(t)}\right)_* (X_e).$$

Demonstraţie. (i)$\Rightarrow$(ii). Deoarece ρ este subgrup cu un parametru avem $L_{\rho(t)} \circ \rho = \rho \circ L_t$. Folosind această egalitate, obţinem:

$$\begin{aligned}
(L_{\rho(t)})_*(X_e) &= \left(L_{\rho(t)}\right)_* \circ \rho_* \left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\right) = (L_{\rho(t)} \circ \rho)_* \left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\right) = \\
&= (\rho \circ L_t)_* \left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\right) = \rho_* \circ (L_t)_* \left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\right) = \\
&= \rho_* \left(\frac{d}{dt}\Big|_t\right) = \overset{\bullet}{\rho}(t).
\end{aligned}$$

(ii)$\Rightarrow$(i). Fie $X \in L(G)$ câmpul stâng invariant generat de X_e, adică $X(a) = (L_a)_*(X_e)$. Câmpului X îi corespunde subgrupul cu un parametru $\sigma : \mathbb{R} \to G$, precum şi acţiunea $\alpha : \mathbb{R} \times G \to G$ astfel încât $\overset{\bullet}{\alpha}_a(0) = X(a)$ şi $\alpha_e(t) = \sigma(t)$.

Rezultă $\overset{\bullet}{\sigma}(0) = \overset{\bullet}{\alpha}_e(0) = X(e)$. Folosind aceasta, se obţine:

$$\begin{aligned}
(L_{\sigma(t)})_*(X_e) &= (L_{\sigma(t)})_* \circ \sigma_* \left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\right) = (L_{\sigma(t)} \circ \sigma)_* \left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\right) = \\
&= (\sigma \circ L_t)_* \left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\right) = \sigma_* \left((L_t)_* \left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\right)\right) = \\
&= \sigma_* \left(\frac{d}{dt}\Big|_t\right) = \overset{\bullet}{\sigma}(t),
\end{aligned}$$

unde am folosit egalitatea $L_{\sigma(t)} \circ \sigma = \sigma \circ L_t$ şi faptul că $\frac{d}{dt} \in L(\mathbb{R})$. Am obţinut:

$$(8.6)\qquad \overset{\bullet}{\sigma}(t) = (L_{\sigma(t)})_*(X_e).$$

Din (8.6) şi (8.5) vedem că curbele analitice ρ şi σ verifică aceeaşi ecuaţie diferenţială de ordinul unu, cu aceeaşi condiţie iniţială $\sigma(0) = \rho(0) = e$.

Prin urmare, avem $\rho = \sigma$, deci ρ este subgrup cu un parametru al grupului Lie G.

Observaţie. Ţinând seama de identificarea $L(G) \to T_eG$, $X \to X_e$, rezultă că ν poate fi privită şi ca o bijecţie între Γ şi T_eG, dată de $\rho \to X_e$, $X_e = \frac{d\rho}{dt}|_{t=0} = \dot{\rho}(0)$.

8.5. PROPOZIŢIE. *Fie $X \in L(G)$ şi fie $\alpha : \mathbb{R} \times G \to G$ acţiunea determinată de câmpul X, adică α verifică condiţiile:*

$$(8.7) \qquad \alpha(t,a) = a\alpha_e(t), \ (\alpha_e)_*(\frac{d}{dt}) = X,$$

unde $\alpha_e : \mathbb{R} \to G$ este un homomorfism de grupuri Lie.

Pentru $t \in \mathbb{R}$ definim aplicaţia

$$\gamma_t : \mathbb{R} \times G \to G,$$

prin

$$\gamma_t(s,a) = \alpha(st,a).$$

Atunci aplicaţia γ_t este acţiune. În plus, aplicaţia $(\gamma_t)_e : \mathbb{R} \to G$, $(\gamma_t)_e(s) = \alpha_e(ts)$ este homomorfism de grupuri Lie. Dacă Y este câmpul stâng invariant determinat de $(\gamma_t)_e$, adică

$$Y = ((\gamma_t)_e)_* \left(\frac{d}{ds}\right),$$

atunci $Y = tX$.

Demonstraţie. Este evident că γ_t este analitică şi $\gamma_t(0,a) = \alpha(0,a) = a$. În plus, avem:

$$\gamma_t(s_1 + s_2, a) = \alpha(s_1t + s_2t, a) = \alpha(s_1t, \alpha(s_2t, a)) = \gamma_t(s_1, \gamma_t(s_2, a)).$$

În continuare, rezultă:

$$\begin{aligned} (\gamma_t)_e(s_1+s_2) &= \gamma_t(s_1+s_2,e) = \alpha(s_1t+s_2t,e) = \alpha_e(s_1t+s_2t) = \\ &= \alpha_e(s_1t)\alpha_e(s_2t) = (\gamma_t)_e(s_1)(\gamma_t)_e(s_2), \end{aligned}$$

unde am folosit relaţia

$$(8.8) \qquad (\gamma_t)_e(s) = \alpha_e(st).$$

Mai departe, avem:

$$\begin{aligned} Y &= ((\gamma_t)_e)_* \left(\frac{d}{ds}\right) = (\alpha_e)_* \left(\frac{d(st)}{ds}\frac{d}{d(st)}\right) = (\alpha_e)_* \left(t\frac{d}{d(st)}\right) = \\ &= t(\alpha_e)_* \left(\frac{d}{d(st)}\right) = tX. \end{aligned}$$

Am obţinut egalitatea:

$$Y = tX. \tag{8.9}$$

8.6. Observaţie. Din relaţia (8.8) avem:

$$(\gamma_t)_e(1) = \alpha_e(t). \tag{8.8'}$$

Dacă notăm $\alpha_e = \rho_X$, $(\gamma_t)_e = \rho_Y$, atunci (8.8') se scrie

$$\rho_Y(1) = \rho_X(t) \tag{8.8''}$$

sau, folosind (8.9), avem:

$$\rho_{tX}(1) = \rho_X(t).$$

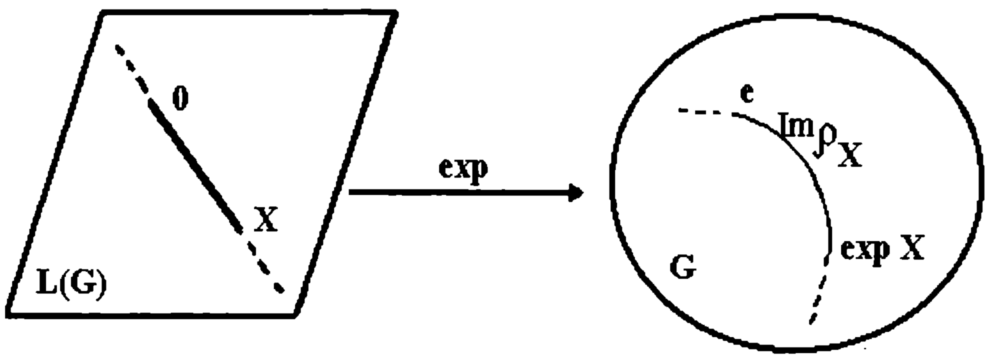
În plus, din relaţia (8.8) obţinem:

$$\rho_{tX}(s) = \rho_X(st). \tag{8.10}$$

8.7. DEFINIŢIE. *Fie G un grup Lie, $L(G)$ algebra sa Lie. Se numeşte* **aplicaţie exponenţială**, *aplicaţia*

$$\exp : X \in L(G) \to \exp X = \rho_X(1) \in G,$$

unde $\rho_X : \mathbb{R} \to G$ este homomorfismul de grupuri Lie generat de câmpul X.



8.8. PROPOZIŢIE. *Fie $X \in L(G)$. Dacă $\rho_X : \mathbb{R} \to G$ este subgrupul cu un parametru generat de câmpul X, atunci:*

i) $\exp tX = \rho_X(t)$,

ii) *Au loc următoarele egalităţi:*

ii') $(\exp tX)(\exp sX) = \exp(t+s)X$,

ii") $\exp 0 = e$,

iii) *Dacă $\alpha : \mathbb{R}\times G \to G$ este acţiunea determinată de câmpul X, atunci $\alpha(t,a) = R_{\exp tX}(a)$.*

Demonstraţie. i) Ţinând seama de formula (8.8"), obţinem:

$$\exp tX = \rho_X(t).$$

ii) $(\exp tX)(\exp sX) = \rho_X(t)\rho_X(s) = \rho_X(t+s) = \exp(t+s)X$, adică (ii'). Folosind (ii'), obţinem:

$$(\exp X)(\exp(-X)) = \exp 0 = \rho_X(0) = e.$$

iii) Se foloseşte propoziţia 8.8 i) şi punctul 8.3.1.

8.9. PROPOZIŢIE. *Fie $h : G \to G'$ un homomorfism de grupuri Lie şi fie $h_* : L(G) \to L(G')$ homomorfismul canonic de algebre Lie asociat homomorfismului h. Atunci diagrama*

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "h"] & G' \\ L(G) \arrow[u, "exp"] \arrow[r, "h_*"'] & L(G') \arrow[u, "exp"'] \end{tikzcd}$$

este comutativă.

Demonstraţie. Fie $X \in L(G)$. Dacă notăm $h \circ \rho_X = \rho_{X'}$, atunci avem:

$$X' = (\rho_{X'})_*\left(\frac{d}{dt}\right) = (h \circ \rho_X)_*\left(\frac{d}{dt}\right) = h_*(\rho_X)_*\left(\frac{d}{dt}\right) = h_*(X).$$

Din egalitatea

$$\rho_{h_*(X)}(t) = h \circ \rho_X(t), \ (\forall) t \in \mathbb{R}$$

rezultă

$$\rho_{h_*(X)}(1) = h\left(\rho_X(1)\right),$$

sau

$$\exp h_*(X) = h(\exp X).$$

Cum X a fost ales arbitrar, rezultă:

$$\exp \circ h_* = h \circ \exp .$$

Observaţie. Se ştie că spaţiul vectorial real $n-$dimensional T_eG are structură de varietate analitică reală. Mulţimea $L(G)$ are structură de varietate analitică reală.

8.10. PROPOZIŢIE. *Fie $L(G)$ algebra Lie a unui grup Lie G şi fie e elementul neutru al grupului G.*

i) *Aplicaţia exponenţială* $\exp : L(G) \to G$ *este analitică.*

ii) $\exp_{*,0} = Id_{L(G)}$.

iii) *Aplicaţia exponenţială realizează un difeomorfism analitic al unei vecinătăţi a lui $0 \in L(G)$ pe o vecinătate deschisă a lui $e \in G$.*

Demonstraţie. i) Fie $X \in L(G)$ şi fie $\rho_X : \mathbb{R} \to G$ homomorfismul de grupuri Lie determinat de câmpul X, deci

$$(\rho_X)_*\left(\frac{d}{dt}\right) = X.$$

Rezultă

$$(\rho_X)_*\left(\frac{d}{dt}\right)(\rho_X(t)) = X_{\rho_X(t)}$$

sau

$$(\rho_X)_* \left(\frac{d}{dt}\,|_t\right) = X_{\rho_X(t)},$$

deci ρ_X este o traiectorie a câmpului X.

Considerăm funcţia

$$\rho : \mathbb{R} \times L(G) \to G$$

definită prin

$$\rho(t, X) = \rho_X(t).$$

Avem:

$$\frac{d\rho(t, X)}{dt} = X_{\rho(t,X)} = \left(L_{\rho(t,X)}\right)_* (X_e).$$

Vom arăta la început că aplicaţia ρ este analitică pe o mulţime de forma $I_\varepsilon \times U_0$, unde $I_\varepsilon = (-\varepsilon, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, iar U_0 este o vecinătate deschisă a lui $0 \in L(G)$.

Alegem o hartă locală (U, h) în jurul punctului $e \in G$ şi fie $x^1, x^2, ..., x^n$ funcţiile coordonate. Deoarece operaţia de grup

$$\mu : G \times G \to G$$

este analitică, rezultă că μ este o aplicaţie continuă, deci $\mu^{-1}(U)$ este o mulţime deschisă în $G \times G$. Deoarece $\mu(e, e) = e \in U$, rezultă că $(e, e) \in \mu^{-1}(U)$. Prin urmare, există o mulţime deschisă $U' \times U'$ în jurul punctului (e, e), astfel încât $U' \times U' \subset \mu^{-1}(U)$. (Evident, putem lua $U' \subset U$, în caz contrar alegem $U' \cap U$ drept U').

Presupunem că $\rho(t, X) \in U'$, deci:

$$\mu(\rho(t, X), x) = L_{\rho(t,X)}(x) \in U, \ (\forall) x \in U'.$$

Scriind acum ecuaţia

$$\text{(8.11)} \qquad \frac{d\rho(t,X)}{dt} = (L_{\rho(t,X)})_*(X_e)$$

în sistemul de coordonate locale considerat, avem:

$$\text{(8.11')} \qquad \frac{d\rho^i(t,X)}{dt} = \frac{\partial \mu^i}{\partial x^j}\,|_{(\rho(t,X),e)}\, X_e^j.$$

Introducem funcţiile analitice de $2n$ variabile

$$\varphi^i : h(U') \times h(U') \to \mathbb{R},\ i = \overline{1,n},$$

prin

$$\varphi^i(x^1,...,x^n,v^1,...,v^n) = \frac{\partial \mu^i}{\partial x^j}\,|_{(x^1,...,x^n,e^1,...,e^n)}\, v^j,$$

unde $e^1,...,e^n$ sunt componentele elementului neutru e.

Din (8.11') rezultă că ρ este soluţia sistemului

$$\frac{d\rho^i(t,X)}{dt} = \varphi^i(\rho(t,X), X_e^1,...,X_e^n),\ i = 1,2,...,n,$$

verificând condiţia iniţială

$$\rho^i(0,X) = e^i,\ i = 1,2,...,n.$$

Aplicând un rezultat binecunoscut de ecuaţii diferenţiale, obţinem analiticitatea funcţiei ρ pe o vecinătate deschisă de forma

$$I_\varepsilon \times U_0 \text{ a lui } (0,0) \in \mathbb{R} \times L(G).$$

Pentru t oarecare din $\mathbb{R}$ alegem un număr natural $m \in \mathbb{N}$ astfel încât $\frac{t}{m} \in I_\varepsilon$. Deoarece ρ_X este homomorfism, avem:

$$\rho(t,X) = \left(\rho\left(\frac{t}{m}, X\right)\right)^m.$$

Astfel se obţine că aplicaţia ρ este analitică, pentru orice (t, X) din $\mathbb{R} \times U_0$.

Vrem să arătăm că ρ este analitică în jurul unui punct $(t, X) \in \mathbb{R} \times L(G)$. Fie $(t, X) \in \mathbb{R} \times L(G)$. Există $s \in \mathbb{R}$ astfel încât $sX \in U_0$. Ţinând seama de formula (8.10), avem:

$$\rho(t, X) = \rho\left(\frac{t}{s}, sX\right),$$

ceea ce ne arată că ρ este analitică în jurul punctului $(t, X) \in \mathbb{R} \times L(G)$. Rezultă că aplicaţia

$$\exp : X \in L(G) \to \exp X = \rho(1, X) \in G$$

este analitică.

ii) Avem aplicaţia $\exp : L(G) = T_e G \to G$ şi vrem să calculăm $\exp_{*,0} X$, unde

$$(\exp)_{*,0} : T_0 L(G) \to T_e G, \ e = \exp 0.$$

Dacă identificăm pe $L(G)$ cu $T_0 L(G)$, vom arăta că

$$\exp_{*,0} : X \in L(G) \to X_e \in T_e G.$$

Ştim că $\exp tX = \rho(t, X)$. Rezultă:

$$\frac{d}{dt} \exp tX = \frac{d\rho(t, X)}{dt} = \left(L_{\rho(t,X)}\right)_* (X_e).$$

Pentru $X \in L(G)$ considerăm următoarea curbă:

$$\gamma : t \in I_1 = (-1, 1) \to \gamma(t) = tX \in L(G).$$

Curba γ verifică condiţiile:

$$\gamma(0) = 0 \in L(G), \ \dot{\gamma}(0) = \gamma_* \left(\frac{d}{dt}\,|_{t=0}\right) = \frac{d\gamma(t)}{dt}\,|_{t=0} = X.$$

Deci X este tangent la curba parametrizată $\gamma(t) = tX$, în punctul $t = 0$.

Considerăm acum curba

$$\gamma' = \exp \circ \gamma : (-1, 1) \to G,$$

$$\gamma'(t) = \exp \circ \gamma(t) = \exp tX = \rho_X(t) \in G.$$

Avem:

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}'(0) &= (\gamma')_* \left(\frac{d}{dt} |_{t=0} \right) = (\exp \circ \gamma)_* \left(\frac{d}{dt} |_{t=0} \right) = \\ &= \exp_{*,\gamma(0)} \circ \gamma_{*,0} \left(\frac{d}{dt} |_{t=0} \right) = \exp_{*,0} \dot{\gamma}(0) = \exp_{*,0} X. \end{aligned}$$

Pe de altă parte, avem:

$$\dot{\gamma}'(0) = \gamma'_* \left(\frac{d}{dt} |_{t=0} \right) = (\rho_X)_* \left(\frac{d}{dt} |_{t=0} \right) = X_{\rho_X(0)} = X_e.$$

Prin urmare, am găsit:

$$\exp_{*,0} X = X_e$$

şi, deoarece avem identificarea $L(G) = T_eG$, rezultă că:

$$\exp_{*,0} = Id_{L(G)}.$$

iii) Deoarece $\exp_{*,0} = Id_{L(G)}$, rezultă că $\exp_{*,0}$ are determinantul egal cu 1. Vom putea aplica teorema de inversare locală. Rezultă că există o vecinătate V_0 a lui $0 \in L(G)$, astfel încât aplicaţia

$$\exp_{*,X} : T_X L(G) \to T_{\exp X} G$$

are determinantul nenul pentru $X \in V_0$. Atunci pe V_0 putem să inversăm aplicaţia exponenţială, deci există un difeomorfism $\exp |_{V_0}$ între V_0 şi o vecinătate deschisă $W_e = \exp V_0$ a lui $e \in G$.

Observaţie. Orice vecinătate deschisă W a lui e, cu proprietatea că aplicaţia exponenţială stabileşte un difeomorfism între W şi $U = \exp^{-1} W$ se numeşte **vecinătate normală**.

Se notează cu $\log : W \to U$ inversa aplicaţiei $\exp|_U$. Avem:

$$\exp \circ \log = Id_W, \ \ \log \circ \exp = Id_U.$$

Identificând algebra Lie $L(G)$ cu $\mathbb{R}^n$, se obţine că perechea $(W, \log)$ este o hartă a varietăţii G în jurul elementului $e \in G$, cu $\log e = 0$. Coordonatele locale în harta $(W, \log)$ vor fi numite **coordonate canonice** sau **normale**.

8.11. PROPOZIŢIE. i) *Fie $h_1, h_2 : G \to G'$ două homomorfisme de grupuri Lie şi fie $L(G)$ (resp. $L(G')$) algebra Lie a lui G (resp. G'). Dacă*

$$(h_1)_* = (h_2)_* : L(G) \to L(G'), \tag{8.12}$$

atunci

$$h_1(x) = h_2(x), \ \ (\forall) x \in G_e,$$

unde G_e este componenta conexă a unităţii $e \in G$.

ii) *Fie $h : G \to G'$ un homomorfism de grupuri Lie. Dacă*

$$h_* = 0 : L(G) \to L(G'),$$

atunci

$$h(x) = e', \ \ (\forall) x \in G_e.$$

iii) *Fie G şi G' două grupuri Lie. Presupunem că G este conex şi simplu conex. Dacă $h' : L(G) \to L(G')$ este un homomorfism de algebre Lie, atunci există un unic homomorfism de grupuri Lie $h : G \to G'$ cu proprietatea $h' = h_*$.*

Demonstraţie. i) Vom folosi egalitatea

$$h \circ \exp = \exp \circ h_*.$$

Fie W o vecinătate normală de coordonate. Pentru orice $x = \exp X \in W$, avem:

$$\begin{aligned} h_1(x) &= h_1 \circ \exp X = \exp \circ (h_1)_*(X) = \exp \circ (h_2)_*(X) = h_2 \circ \exp X = \\ &= h_2(x). \end{aligned}$$

Deoarece W este deschisă în G şi $h_1(x) = h_2(x)$, $(\forall) x \in W$, rezultă

$$h_1(x) = h_2(x), \ (\forall) x \in W \cap G_e \subset G_e$$

şi, folosind următoarea teoremă: *"Fie M şi M' două varietăţi analitice şi fie $f_1, f_2 : M \to M'$ două funcţii analitice. Presupunem că M este conexă. Dacă $f_1(x) = f_2(x)$, pentru orice $x \in U$ (=mulţime deschisă în M), atunci $f_1 = f_2$ "*, obţinem:

$$h_1(x) = h_2(x), \ (\forall) x \in G_e.$$

ii) Dacă luăm în formula (8.12)

$$h_1 = h, \quad h_2(x) = e', \ (\forall) x \in G,$$

obţinem $h(x) = e'$, oricare ar fi $x \in G_e$.

iii) A se vedea [10] sau [31].

8.11.1. Aplicaţie. *Fie G un grup Lie conex şi simplu conex. Atunci aplicaţia*

$$h : \text{Aut } G \to h_* \in \text{Aut } L(G)$$

este un izomorfism de grupuri.

În adevăr, deoarece G este conex, egalitatea $(h_1)_* = (h_2)_*$ implică $h_1 = h_2$ (propoziţia 8.11.i)), deci aplicaţia $h \to h_*$este injectivă. Folosim propoziţia

8.11.iii) şi obţinem că, oricare ar fi $h' \in$Aut $L(G)$, există un unic $h \in$Aut G, astfel încât $h_* = h'$. Prin urmare, aplicaţia $h \to h_*$ este surjectivă. Din egalităţile

$$(h_1 \circ h_2)_* = (h_1)_* \circ (h_2)_*, \ (h^{-1})_* = h_*^{-1},$$

rezultă imediat că aplicaţia

$$h \in \text{Aut } G \to h_* \in \text{Aut } L(G)$$

este un izomorfism de grupuri.

OBSERVAŢIE. 1) Am văzut că aplicaţia exponenţială a grupului Lie G realizează un difeomorfism între o vecinătate V_0 a lui 0 în $L(G)$ şi o vecinătate W_e a lui e în G. Inversa aplicaţiei exponenţiale

$$\log : W_e \to V_0$$

este, de asemenea, difeomorfism.

Fixăm o bază $\{E_1, ..., E_n\}$ în algebra Lie $L(G)$. Identificăm $L(G)$ cu $\mathbb{R}^n$ prin

$$L(G) \to \mathbb{R}^n, \ X = X^i E_i \to (X^1, ..., X^n).$$

Dacă $x = \exp X = \exp X^i E_i \in W_e$, atunci avem:

$$\log x = \log \circ \exp X = Id_{V_0}(X) = X = (X^1, ..., X^n).$$

Rezultă că punctul $x = \exp X^i E_i \in W_e$ are coordonatele locale $(X^1, ..., X^n)$ în harta normală $(W_e, \log)$.

Este evident că, fixând o altă bază în $L(G)$, punctul $x = \exp X \in W_e$ va avea alte coordonate normale (canonice).

2) În continuare vom fixa o bază $\{E_1, ..., E_n\}$ în algebra Lie $L(G)$. Dacă $X = X^i E_i \in V_0$, atunci spunem că $(X^1, ..., X^n)$ sunt coordonatele canonice (normale) ale punctului $x = \exp X \in W_e \subset G$.

În cele ce urmează vom micşora vecinătatea V_0 astfel încât dacă $X \in V_0$ să avem $-X \in V_0$. (Dacă nu se întâmplă aceasta, atunci alegem în V_0 o sferă deschisă S de centru O şi rază ε, conţinută în V_0, şi înlocuim V_0 cu sfera S). În baza relaţiei $\exp X \exp(-X) = e$, obţinem că inversul x^{-1} al elementului $x = \exp X$ este $x^{-1} = (\exp X)^{-1} = \exp(-X)$. Dacă x are coordonatele canonice $(X^1, ..., X^n)$, atunci x^{-1} are coordonatele canonice $(-X^1, ..., -X^n)$.

8.12. PROPOZIŢIE. *Fie G un grup Lie. Notăm cu $h : \mathbb{R} \to G$ un homomorfism de grupuri topologice. Atunci h este analitic.*

Demonstraţie. Este suficient să demonstrăm că h este analitic pe o vecinătate a lui $0 \in \mathbb{R}$ şi, apoi, procedând ca la propoziţia 8.3, rezultă că h este analitic.

Fie $(W, \log)$ o hartă normală în jurul lui $e \in G$, astfel încât dacă $x \in W$, atunci şi $x^{-1} \in W$. Fie $x^1, x^2, ..., x^n$ coordonatele canonice în harta $(W, \log)$. Dacă $x = \exp X \in W$, atunci

$$x^p = \exp pX, \ (\forall) p \in \mathbb{N}.$$

Fie $p \in \mathbb{N}$ astfel încât $x^p \in W$. Deoarece

$$x^i(\exp pX) = px^i(\exp X),$$

rezultă

$$x^i(x^p) = px^i(x).$$

Fie $\varepsilon > 0$ astfel încât

$$h(t) \in W, \ (\forall) t \in (-\varepsilon, \varepsilon) = I_\varepsilon.$$

Fixăm $t_0 \in (0, \varepsilon)$. Evident, $h(t_0) \in W$, deci şi

$$h\left(\frac{t_0}{q}\right) \in W, \ (\forall) q \in \mathbb{N}^*.$$

Deoarece h este homomorfism, avem:

$$\left(h\left(\frac{t_0}{q}\right)\right)^q = \underbrace{h\left(\frac{t_0}{q}\right)\dots h\left(\frac{t_0}{q}\right)}_{\text{de } q \text{ ori}} = h\left(q\frac{t_0}{q}\right) = h\left(t_0\right) \in W.$$

Rezultă

$$x^i\left(h\left(t_0\right)\right) = x^i\left(\left(h\left(\frac{t_0}{q}\right)\right)^q\right) = qx^i\left(h\left(\frac{t_0}{q}\right)\right).$$

De aici obţinem:

$$x^i\left(h\left(\frac{t_0}{q}\right)\right) = \frac{1}{q}x^i(h(t_0)),\ (\forall)q \in \mathbb{N}^*.$$

Alegem $p \in \mathbb{N}$ astfel încât $\frac{p}{q}t_0 < \varepsilon$. Avem:

$$x^i\left(h\left(\frac{p}{q}t_0\right)\right) = \frac{p}{q}x^i(h(t_0)).$$

Rezultă

$$(8.13) \qquad x^i(h(rt_0)) = rx^i(h(t_0))$$

pentru orice număr raţional $r \in (0,1)$. Fie $t \in (0,1)$. t este limita unui şir $(r_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de numere raţionale. Scriem formula (8.13) pentru fiecare termen al şirului:

$$(8.14) \qquad x^i(h(r_m t_0)) = r_m x^i(h(t_0)),\ i = 1, 2, ..., n.$$

Trecem la limită. În membrul drept apare $tx^i(h(t_0))$. În membrul stâng, din (8.14), limita comută cu h şi cu x^i (deoarece sunt aplicaţii continue).

Obţinem:

$$(8.15) \qquad x^i \circ h(tt_0) = tx^i \circ h(t_0),\ i = 1, 2, ..., n\ ,$$

pentru orice $t \in (0,1)$. Observăm că (8.15) este adevărată pentru $t = 1$.

De asemenea, (8.15) este adevărată pentru $t = 0$, deoarece

$$x^i \circ h(0) = x^i(e) = x^i(\exp 0) = 0.$$

Am obţinut că (8.15) este adevărată, pentru orice $t \in [0,1]$. Vom arăta că (8.15) este adevărată şi pentru $t \in [-1,0)$. Fie $t \in (-1,0)$, deci $-t \in (0,1)$, şi, scriind (8.15) pentru $-t$, avem:

$$(8.15') \qquad x^i(h(-tt_0)) = -t(x^i(h(t_0)).$$

Avem formula:

$$(8.15'') \qquad x^i(h(-tt_0)) = -x^i(h(tt_0)).$$

În adevăr, oricare ar fi $t' \in (-\varepsilon, \varepsilon) = I_\varepsilon$, avem

$$h(t' - t') = h(0) = e = h(t')h(-t'),$$

şi deci $h(-t') = (h(t'))^{-1}$. Prin urmare, obţinem:

$$x^i(h(-t')) = x^i(h(t'))^{-1} = -x^i(h(t')),$$

adică (8.15″) este adevărată. Rezultă că (8.15) este adevărată, pentru orice $t \in [-1,1]$. Din (8.15) avem:

$$h^i(tt_0) = th^i(t_0).$$

Deci componentele $h^i = x^i \circ h$ ale aplicaţiei h apar ca aplicaţii liniare în t, cu $t \in [-1,1]$. Rezultă că h este aplicaţie analitică pe intervalul $(-t_0, t_0)$. Deoarece h este homomorfism, rezultă apoi uşor că h este aplicaţie analitică pe $\mathbb{R}$.

8.13. PROPOZIŢIE. *Fie G un grup Lie, $L(G)$ algebra sa Lie. Fie*

$$L(G) = L_1 \oplus L_2$$

o descompunere a lui $L(G)$ în sumă directă de subspaţii vectoriale. Definim aplicaţia

$$\varphi : L(G) \to G$$

prin relaţia:

$$\varphi(X_1 \oplus X_2) = \exp X_1 \exp X_2, \;\; X_i \in L_i, \;\; i \in \{1,2\}.$$

Atunci:

i) φ *este analitică,*

ii) $\varphi_{*,0} = Id_{L(G)}$,

iii) φ *realizează un difeomorfism analitic al unei vecinătăţi a lui* $0 \in L(G)$, *pe o vecinătate a lui* $e \in G$.

Demonstraţie. i) Fie $p_i : L(G) \to L_i$, $i \in \{1,2\}$ proiecţia lui $L(G)$ pe L_i, deci

$$p_i(X_1 \oplus X_2) = X_i, \;\; i \in \{1,2\}.$$

Observăm că avem

$$\varphi(X_1 \oplus X_2) = \mu(\exp X_1, \exp X_2),$$

unde $\mu : G \times G \to G$ este operaţia grupală. Rezultă:

$$\varphi(X_1 \oplus X_2) = \mu \left(\exp \circ p_1(X_1 \oplus X_2), \exp \circ p_2(X_1 \oplus X_2)\right).$$

Definim acum funcţia

$$\psi : L(G) \to G \times G$$

prin formula

$$\psi(X_1 \oplus X_2) = ((\exp \circ p_1) \times (\exp \circ p_2))(X_1 \oplus X_2, X_1 \oplus X_2).$$

Deoarece $\exp \circ p_i$ este analitică, pentru $i \in \{1, 2\}$, rezultă că ψ este analitică şi deci $\varphi = \mu \circ \psi$ este analitică.

ii) Să arătăm că $\varphi_{*,0} = Id_{L(G)}$. E suficient să arătăm că $\varphi_{*,0} \mid_{L_k} = i_k$, $k \in \{1, 2\}$, unde $i_k : L_k \to L(G)$ este incluziunea. Pentru $k = 1$, avem:

$$\varphi(X_1) = \exp X_1 \exp 0 = \exp X_1, \ \ X_1 \in L_1.$$

Dar $\exp_{*,0} = Id_{L(G)}$. Rezultă $\varphi_{*,0} \mid_{L_1} = i_1$. Analog $\varphi_{*,0} \mid_{L_2} = i_2$. Prin urmare, $\varphi_{*,0} = Id_{L(G)}$.

iii) Rezultă din primele două puncte.

8.14. PROPOZIŢIE. i) *Fie G un grup Lie şi fie $L(G)$ algebra sa Lie. Atunci, oricare ar fi $f \in \mathcal{F}(G)$ şi oricare ar fi $X \in L(G)$, avem:*

$$\frac{d^m(f(\exp tX))}{dt^m} = (X^m(f))(\exp tX), \tag{8.16}$$

unde

$$X^m(f) = \underbrace{X(...(X}_{m}(f))...).$$

ii) *Pentru t suficient de mic are loc formula Taylor:*

$$f(\exp tX) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{t^p}{p!}(X^p(f))(e), \tag{8.17}$$

unde $X \in L(G)$, $f \in \mathcal{F}(G)$, $X^0(f) = f$.

Demonstraţie. i) Deoarece $X \in L(G)$, avem:

$$(\rho_X)_* \left(\frac{d}{dt}\right) = X,$$

unde $\rho_X : \mathbb{R} \to G$ este subgrupul cu un parametru generat de câmpul X. Rezultă

$$(\rho_X)_* \left(\frac{d}{dt}\right)(\rho_X(t)) = X_{\rho_X(t)},$$

sau, folosind observaţia 7.11 ii), obţinem:

$$(\rho_X)_* \left(\frac{d}{dt}\,|_t\right) = X_{\rho_X(t)}.$$

Dacă aplicăm acest vector unei funcţii arbitrare $f \in \mathcal{F}(G)$, obţinem

$$\frac{d}{dt}\,|_t\,(f \circ \rho_X) = X_{\rho_X(t)}(f)$$

sau

$$\frac{d\,(f \circ \rho_X(t))}{dt} = (X(f))\,(\rho_X(t)),$$

adică tocmai formula (8.16), pentru $m = 1$.

Presupunând formula (8.16) adevărată pentru $m = k$, rezultă:

$$\frac{d^{k+1}(f(\exp tX))}{dt^{k+1}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d^k(f(\exp tX))}{dt^k}\right) = \frac{d}{dt}(X^k(f)(\exp tX))$$

şi, folosind (8.16), obţinem

$$\frac{d^{k+1}(f(\exp tX))}{dt^{k+1}} = (X(X^k(f)))(\exp tX),$$

deci (8.16) este adevărată, pentru orice $m \in \mathbb{N}$.

ii) Notăm $\varphi(t) = f(\exp tX)$. Este evident că φ este analitică. Scriem formula clasică a lui Taylor pentru funcţia analitică φ :

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \frac{t}{1!}\frac{d\varphi}{dt}\,|_{t=0} + \frac{t^2}{2!}\frac{d^2\varphi}{dt^2}\,|_{t=0} + \ldots \tag{8.18}$$

Deoarece avem:

$$\varphi(0) = f(\exp 0) = f(e) = (X^0(f))(e),$$

$$\frac{d^p\varphi}{dt^p}\,|_{t=0} = (X^p(f))(\exp tX)\,|_{t=0} = (X^p(f))(e),$$

din (8.18) se obţine (8.17).

8.15. EXEMPLE.

8.15.1. Am văzut în exemplul 8.4 că unui câmp $X = a^i \frac{\partial}{\partial x^i} \in L(\mathbb{R}^n)$ i se asociază subgrupul cu un parametru

$$\alpha_e = \rho_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n,$$

$$\rho_X(t) = (a^1 t, ..., a^n t).$$

Avem $\exp X = \rho_X(1) = (a^1, a^2, ..., a^n)$. Rezultă că aplicaţia exponenţială pentru grupul Lie $\mathbb{R}^n$ este

$$\exp : X = a^i \frac{\partial}{\partial x^i} \in L(\mathbb{R}^n) \to \exp X = (a^1, a^2, ..., a^n) \in \mathbb{R}^n.$$

Prin urmare, aplicaţia exponenţială a lui $\mathbb{R}^n$ se identifică cu identitatea lui $\mathbb{R}^n$.

8.15.2. Ne propunem să scriem aplicaţia exponenţială a grupului Lie $GL(n, \mathbb{R})$. Considerăm funcţiile

$$x^i_j : GL(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ i, j = 1, 2, ..., n,$$

definite prin

$$x^i_j(a) = a^i_j,$$

unde $a = \left\|a^i_j\right\|$.

Am văzut că un câmp $X \in L(GL(n,\mathbb{R}))$ se scrie $X = a^q_s X^s_q$, unde

$$X^s_q = x^h_q \frac{\partial}{\partial x^h_s},$$

iar $a^q_s = X(x^q_s)(e)$ sunt constante reale. Folosind aceasta în formula (8.16), pentru $m = 1$ şi $f = x^i_j$, obţinem

$$\frac{d(\exp tX)^i_j}{dt} = a^q_j (\exp tX)^i_q$$

sau

$$\frac{dY}{dt} = Ya,$$

unde $Y = Y(t) = \left\|(\exp tX)^i_j\right\|$, iar $a = \left\|a^i_j\right\|$ este o matrice constantă. Avem:

$$Y(0) = \exp 0 = \left\|\delta^i_j\right\| = I.$$

Soluţia ecuaţiei diferenţiale matriceale $\frac{dY}{dt} = Ya$, $Y(0) = I$, este:

$$\exp tX = I + \frac{t}{1!}a + \frac{t^2}{2!}a^2 + ...$$

Rezultă:

$$\exp X = e^a = I + \frac{a}{1!} + \frac{a^2}{2!} + ...$$

Algebra Lie $L(GL(n,\mathbb{R}))$ se identifică cu algebra Lie $gl(n,\mathbb{R})$ prin izomorfismul de algebre Lie următor:

$$a = \left\|a^i_j\right\| \in gl(n,\mathbb{R}) \rightarrow a^i_j X^j_i \in L(GL(n,\mathbb{R})).$$

Rezultă că aplicaţia exponenţială a grupului Lie $GL(n, \mathbb{R})$ este

$$\exp : a \in gl(n, \mathbb{R}) \rightarrow \exp a = e^a \in GL(n, \mathbb{R}).$$

Acest rezultat motivează denumirea de "aplicaţie exponenţială".

8.15.3. Considerăm grupul Lie $G = \mathbb{R}^2 - \{0\}$ (a se vedea exemplul 2.2.2). Legea în raport cu care G devine grup este

$$((a^1, a^2), (a'^1, a'^2)) \in G \times G \rightarrow (a''^1, a''^2) \in G,$$

unde

$$\begin{cases} a''^1 = a^1 a'^1 - a^2 a'^2 \\ a''^2 = a^1 a'^2 + a^2 a'^1. \end{cases}$$

Ne propunem următoarele:

i) Să construim câmpurile vectoriale stâng invariante pe grupul Lie G.

ii) Să scriem o bază în algebra Lie $L(G)$ a grupului Lie G şi să găsim constantele de structură ale algebrei Lie $L(G)$ relative la baza considerată.

iii) Să determinăm grupul de transformări cu un parametru al unui câmp oarecare $X \in L(G)$.

iv) Să determinăm subgrupurile cu un parametru ale grupului Lie G.

v) Să scriem aplicaţia exponenţială pentru grupul Lie G.

vi) Să studiem aceleaşi probleme pentru grupul Lie S^1 (considerat în exemplul 2.2.3).

i) Fie x^1, x^2 funcţiile coordonate ale varietăţii G. Atunci $\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}\right\}$ formează o bază în $\mathcal{F}(G)-$modulul $\mathcal{X}(G)$. Un câmp $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \in \mathcal{X}(G)$ este stâng invariant dacă

$$(8.19) \qquad X(a) = (L_a)_*(X_e), \ (\forall) a \in G,$$

unde $e = (1, 0) \in G$ este elementul neutru al grupului G, iar L_a este translaţia stângă a grupului Lie G, definită de elementul $a \in G$. Aplicând vectorul (8.19) funcţiei coordonate x^i, obţinem

$$(8.20) \qquad X^i(a) = X_e(x^i \circ L_a).$$

Pentru orice $a \in G$, avem

$$x^i \circ L_a(a') = x^i(aa') = a''^i, \ i \in \{1, 2\},$$

sau, pe larg:

$$\begin{aligned} x^1 \circ L_a(a') &= x^1(a)x^1(a') - x^2(a)x^2(a') \\ x^2 \circ L_a(a') &= x^1(a)x^2(a') + x^2(a)x^1(a'). \end{aligned}$$

Rezultă

$$\begin{aligned} x^1 \circ L_a &= x^1(a)x^1 - x^2(a)x^2 \\ x^2 \circ L_a &= x^1(a)x^2 + x^2(a)x^1 \end{aligned}$$

şi, înlocuind în (8.20), obţinem:

$$\begin{aligned} X^1(a) &= x^1(a)X^1(e) - x^2(a)X^2(e) \\ X^2(a) &= x^1(a)X^2(e) + x^2(a)X^1(e). \end{aligned}$$

Rezultă

$$X = \left(X^1(e)x^1 - X^2(e)x^2\right)\frac{\partial}{\partial x^1} + \left(X^1(e)x^2 + X^2(e)x^1\right)\frac{\partial}{\partial x^2}$$

sau $X = X^i(e)E_i$, unde

$$\begin{aligned} E_1 &= x^1\tfrac{\partial}{\partial x^1} + x^2\tfrac{\partial}{\partial x^2}, \\ E_2 &= -x^2\tfrac{\partial}{\partial x^1} + x^1\tfrac{\partial}{\partial x^2}. \end{aligned}$$

ii) Ştim că aplicaţia

$$f : X \in L(G) \to f(X) = X(e) \in T_eG$$

este izomorfism de spaţii vectoriale. Deoarece $f(E_i) = E_i(e) = \frac{\partial}{\partial x^i}\,|_e$, rezultă că $\{E_1, E_2\}$ este o bază în algebra Lie $L(G)$. Deoarece $[E_i, E_j] = 0$, rezultă $c^i_{jk} = 0$, oricare ar fi $i, j, k \in \{1, 2\}$. Rezultă că $L(G)$ este o algebră Lie comutativă.

iii) Vrem să determinăm grupul de transformări cu un parametru al unui câmp oarecare

$$X = a^1E_1 + a^2E_2 \in L(G);\ a^1, a^2 \in \mathbb{R}.$$

Scriem sistemul diferenţial de ecuaţii al traiectoriilor câmpului X:

$$\begin{cases} \frac{dx^1}{dt} = a^1x^1 - a^2x^2 \\ \frac{dx^2}{dt} = a^1x^2 + a^2x^1. \end{cases}$$

Dacă notăm

$$Y = \begin{Vmatrix} x^1 \\ x^2 \end{Vmatrix}, \qquad A = \begin{Vmatrix} a^1 & -a^2 \\ a^2 & a^1 \end{Vmatrix},$$

atunci sistemul precedent devine

$$(8.21) \qquad \frac{dY}{dt} = AY.$$

Soluţia ecuaţiei diferenţiale matriceale (8.21) este de forma

$$(8.22) \qquad Y = e^{tA}C,$$

unde $C = \begin{Vmatrix} c^1 \\ c^2 \end{Vmatrix}$ este o matrice constantă.

Dacă notăm

$$I = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \qquad J = \begin{Vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix},$$

atunci avem:

$$A = a^1 I + a^2 J.$$

Din (8.22), avem:

$$(8.22') \qquad Y = e^{ta^1} e^{ta^2 J} C.$$

Deoarece $J^2 = -I$, rezultă:

$$\begin{aligned} e^{ta^2 J} &= I\left(1 - \frac{t^2(a^2)^2}{2!} + \frac{t^4(a^2)^4}{4!} - \ldots\right) + J\left(ta^2 - \frac{t^3(a^2)^3}{3!} + \frac{t^5(a^2)^5}{5!} - \ldots\right) = \\ &= I \cos ta^2 + J \sin ta^2. \end{aligned}$$

Rezultă că (8.22′) se scrie:

$$Y = e^{ta^1}(I \cos ta^2 + J \sin ta^2) C$$

sau

$$\left\| \begin{matrix} x^1 \\ x^2 \end{matrix} \right\| = e^{ta^1} \cdot \left\| \begin{matrix} \cos ta^2 & -\sin ta^2 \\ \sin ta^2 & \cos ta^2 \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} c^1 \\ c^2 \end{matrix} \right\|.$$

De aici obţinem:

$$\begin{cases} x^1 = e^{ta^1}(c^1 \cos ta^2 - c^2 \sin ta^2) \\ x^2 = e^{ta^1}(c^1 \sin ta^2 + c^2 \cos ta^2). \end{cases}$$

Dacă notăm $x_0^1 = x^1(0)$, $x_0^2 = x^2(0)$, obţinem că traiectoria centrată în punctul $p_0 = (x_0^1, x_0^2) \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$ este curba

$$\alpha_{p_0} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 - \{0\}$$

definită prin

$$\alpha_{p_0}(t) = \left(e^{ta^1}\left(x_0^1 \cos ta^2 - x_0^2 \sin ta^2\right), e^{ta^1}\left(x_0^1 \sin ta^2 + x_0^2 \cos ta^2\right)\right).$$

Variind punctul $p_0 \in G = \mathbb{R}^2 - \{0\}$, obţinem acţiunea

$$\alpha : \mathbb{R} \times G \to G$$

definită prin

$$\alpha(t,p) = \alpha_p(t) = \left(e^{ta^1}(x^1 \cos ta^2 - x^2 \sin ta^2), e^{ta^1}(x^1 \sin ta^2 + x^2 \cos ta^2)\right),$$

unde $p = (x^1, x^2) \in G$.

iv) Pentru $p = e = (1,0)$, obţinem $\alpha_e(t) = \left(e^{ta^1} \cos ta^2, e^{ta^1} \sin ta^2\right)$, deci subgrupurile cu un parametru ale lui $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ sunt de forma:

$$t \in \mathbb{R} \to \left(e^{ta^1} \cos ta^2, e^{ta^1} \sin ta^2\right) \in \mathbb{R}^2 - \{0\}.$$

Dacă $a^1 = 0$, $a^2 = 0$, atunci obţinem subgrupul constant

$$t \in \mathbb{R} \to e = (1,0) \in \mathbb{R}^2 - \{0\}.$$

Dacă $a^1 = 0$, $a^2 \neq 0$, atunci subgrupul cu un parametru corespunzător este cercul unitate S^1.

Dacă $a^1 \neq 0$, $a^2 = 0$, atunci subgrupul cu un parametru corespunzător este semiaxa pozitivă

$$t \in \mathbb{R} \to \left(e^{ta^1}, 0\right).$$

Dacă $a^1 \neq 0$, $a^2 \neq 0$, obţinem spirale exponenţiale.

v) Aplicaţia exponenţială a grupului Lie G este definită prin

$$\exp X = \rho_X(1) = \alpha_e(1).$$

În cazul de față avem:

$$X = a^1E_1 + a^2E_2 \in L(G) \to \exp X = \left(e^{a^1}\cos a^2, e^{a^1}\sin a^2\right) \in \mathbb{R}^2 - \{0\}.$$

Observăm că aplicația exponențială realizează difeomorfismul local

$$z \in \mathbb{C} \to e^z \in \mathbb{C}^*$$

al grupul Lie aditiv complex $\mathbb{C}$ pe grupul multiplicativ Lie $\mathbb{C}^*$ al numerelor complexe nenule.

vi) Algebra Lie a cercului unitate S^1 este $\mathbb{R}E_2 |_{S^1} = L(S^1)$.

Grupul cu un parametru al unui câmp $X' \in L(S^1)$ este $\alpha : \mathbb{R} \times S^1 \to S^1$, dat prin

$$\alpha\left(t, (x^1, x^2)\right) = \left(x^1 \cos ta^2 - x^2 \sin ta^2, x^1 \sin ta^2 + x^2 \cos ta^2\right),$$

cu $(x^1)^2 + (x^2)^2 = 1$. Subgrupurile cu un parametru ale grupului Lie S^1 sunt de forma $t \in \mathbb{R} \to (\cos ta^2, \sin ta^2) \in S^1$. Aplicația $\exp : L(S^1) \to S^1$ este de forma $a \in \mathbb{R} \to (\cos a, \sin a) \in S^1$, unde am identificat $L(S^1)$ cu $\mathbb{R}$.

8.16. Exercițiu. Fie G un grup Lie, $L(G)$ algebra sa Lie și fie $L(G) = L_1 \oplus ... \oplus L_k$ o descompunere a algebrei Lie $L(G)$ în sumă directă de subspații vectoriale. Definim aplicația $\varphi : L(G) \to G$ prin $\varphi(X_1 \oplus ... \oplus X_k) = (\exp X_1)...(\exp X_k)$, $X_i \in L_i$, $i \in \{1, ..., k\}$.

Atunci:

i) φ este analitică,

ii) $\varphi_{*,0} = Id_{L(G)}$,

iii) φ realizează un difeomorfism analitic al unei vecinătăți a lui $0 \in L(G)$ pe o vecinătate a lui $e \in G$.

Indicație. A se vedea propoziția 8.13.

Observație. În particular, dacă subspațiile L_i sunt subspațiile generate de vectorii unei baze, adică $L_i = \{rE_i \mid r \in \mathbb{R}\}$, ($\{E_1, ..., E_n\}$ bază în $L(G)$), atunci aplicația $L(G) \to G$, $X = \sum_{i=1}^{n} t_iE_i \to \exp t_1E_1 ... \exp t_nE_n$ se restricționează la un difeomorfism al unei vecinătăți a lui $0 \in L(G)$ pe o vecinătate a lui $e \in G$.

8.17. Ne propunem, în continuare, să determinăm subgrupurile cu un parametru ale grupului Lie S^3 (a se vedea exemplul 2.2.5) şi să scriem aplicaţia exponenţială a grupului Lie S^3.

Considerăm grupul Lie $G = \mathbb{R}^4 - \{0\}$ (a se vedea exemplul 2.2.4). Procedând la fel ca la 8.5.3, obţinem baza $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ în algebra Lie $L(G)$, unde

$$\begin{aligned}
E_1 &= x^1\frac{\partial}{\partial x^1} + x^2\frac{\partial}{\partial x^2} + x^3\frac{\partial}{\partial x^3} + x^4\frac{\partial}{\partial x^4}\\
E_2 &= -x^2\frac{\partial}{\partial x^1} + x^1\frac{\partial}{\partial x^2} + x^4\frac{\partial}{\partial x^3} - x^3\frac{\partial}{\partial x^4}\\
E_3 &= -x^3\frac{\partial}{\partial x^1} - x^4\frac{\partial}{\partial x^2} + x^1\frac{\partial}{\partial x^3} + x^2\frac{\partial}{\partial x^4}\\
E_4 &= -x^4\frac{\partial}{\partial x^1} + x^3\frac{\partial}{\partial x^2} - x^2\frac{\partial}{\partial x^3} + x^1\frac{\partial}{\partial x^4}.
\end{aligned}$$

Câmpurile E_2, E_3, E_4 sunt definite pe G, deci şi în punctele sferei S^3. În plus, $E_2\,|_{S^3}$, $E_3\,|_{S^3}$, $E_4\,|_{S^3}$ sunt tangente sferei S^3. Rezultă că algebra Lie a grupului Lie S^3 este

$$L(S^3) = \{a^2E_2\,|_{S^3} + a^3E_3\,|_{S^3} + a^4E_4\,|_{S^3} \mid a^2, a^3, a^4 \in \mathbb{R}\}.$$

Fie $X \in L(S^3)$; deci X se scrie

$$\begin{aligned}
X &= (-a^2x^2 - a^3x^3 - a^4x^4)\frac{\partial}{\partial x^1} + (a^2x^1 - a^3x^4 + a^4x^3)\frac{\partial}{\partial x^2} +\\
&\quad +(a^2x^4 + a^3x^1 - a^4x^2)\frac{\partial}{\partial x^3} + (-a^2x^3 + a^3x^2 + a^4x^1)\frac{\partial}{\partial x^4}.
\end{aligned}$$

Ecuaţiile diferenţiale ale traiectoriilor câmpului X sunt

$$(8.23)\qquad \begin{cases}
\frac{dx^1}{dt} = -a^2x^2 - a^3x^3 - a^4x^4\\[2mm]
\frac{dx^2}{dt} = a^2x^1 - a^3x^4 + a^4x^3\\[2mm]
\frac{dx^3}{dt} = a^2x^4 + a^3x^1 - a^4x^2\\[2mm]
\frac{dx^4}{dt} = -a^2x^3 + a^3x^2 + a^4x^1.
\end{cases}$$

Derivând în (8.23), şi ţinând seama de (8.23), obţinem

$$\text{(8.23}'\text{)} \qquad \frac{d^2x^i}{dt^2} + \alpha^2 x^i = 0, \ i \in \{1,2,3,4\},$$

unde $\alpha^2 = (a^2)^2 + (a^3)^2 + (a^4)^2$. Din (8.23′) obţinem:

$$\text{(8.24)} \qquad \begin{cases} x^1(t) = A^1 \cos\alpha t + A^2 \sin\alpha t \\ x^2(t) = B^1 \cos\alpha t + B^2 \sin\alpha t \\ x^3(t) = C^1 \cos\alpha t + C^2 \sin\alpha t \\ x^4(t) = D^1 \cos\alpha t + D^2 \sin\alpha t. \end{cases}$$

Ne interesează traiectoria centrală în elementul neutru $e = (e^1, e^2, e^3, e^4) = (1,0,0,0)$. Din $x^i(0) = e^i$, $i \in \{1,2,3,4\}$, obţinem: $A^1 = 1$, $B^1 = C^1 = D^1 = 0$. Folosind aceasta, din (8.24) obţinem

$$\text{(8.24}'\text{)} \qquad \begin{cases} x^1(t) = \cos\alpha t + A^2 \sin\alpha t \\ x^2(t) = B^2 \sin\alpha t \\ x^3(t) = C^2 \sin\alpha t \\ x^4(t) = D^2 \sin\alpha t, \end{cases}$$

unde constantele A^2, B^2, C^2, D^2 vor fi determinate astfel încât să fie satisfăcute ecuaţiile (8.23).

Notăm $\rho_X : \mathbb{R} \to S^3$ subgrupul cu un parametru generat de câmpul stâng invariant X.

Dacă $\alpha = 0$, atunci $X = 0$ şi rezultă $x^1(t) = 1$, $x^2(t) = 0$, $x^3(t) = 0$, $x^4(t) = 0$, deci obţinem subgrupul constant

$$t \in \mathbb{R} \to e = (1,0,0,0) \in S^3.$$

Dacă $\alpha \neq 0$, atunci din (8.24′) obţinem:

$$\text{(8.25)} \qquad \begin{cases} \frac{dx^1}{dt} = -\alpha \sin\alpha t + \alpha A^2 \cos\alpha t \\ \frac{dx^2}{dt} = \alpha B^2 \cos\alpha t \\ \frac{dx^3}{dt} = \alpha C^2 \cos\alpha t \\ \frac{dx^4}{dt} = \alpha D^2 \cos\alpha t. \end{cases}$$

Folosind (8.25), obţinem:

$$(8.26) \quad \frac{dx^1}{dt}\,|_{t=0}= A^2\alpha,\ \frac{dx^2}{dt}\,|_{t=0}= B^2\alpha,\ \frac{dx^3}{dt}\,|_{t=0}= C^2\alpha,\ \frac{dx^4}{dt}\,|_{t=0}= D^2\alpha.$$

Pe de altă parte, din (8.23) şi (8.24′) rezultă:

$$(8.26') \quad \frac{dx^1}{dt}\,|_{t=0}= 0,\ \frac{dx^2}{dt}\,|_{t=0}= a^2,\ \frac{dx^3}{dt}\,|_{t=0}= a^3,\ \frac{dx^4}{dt}\,|_{t=0}= a^4.$$

Din (8.26) şi (8.26′) rezultă $A^2 = 0$, $B^2 = \frac{a^2}{\alpha}$, $C^2 = \frac{a^3}{\alpha}$, $D^2 = \frac{a^4}{\alpha}$. Obţinem subgrupul cu un parametru generat de câmpul $X \in L(S^3)$ ca fiind curba parametrizată $\rho_X : \mathbb{R} \to S^3$, $\rho_X(t) = (\cos\alpha t, \frac{a^2}{\alpha}\sin\alpha t, \frac{a^3}{\alpha}\sin\alpha t, \frac{a^4}{\alpha}\sin\alpha t)$.

Folosind ecuaţiile parametrice ale curbei $\rho_X : \mathbb{R} \to S^3$,

$$\rho_X : \begin{cases} x^1 = \cos\alpha t \\ x^2 = \frac{a^2}{\alpha}\sin\alpha t \\ x^3 = \frac{a^3}{\alpha}\sin\alpha t \\ x^4 = \frac{a^4}{\alpha}\sin\alpha t \end{cases}$$

se observă că imaginea aplicaţiei ρ_X se află în hiperplanele $H_1 : a^3x^2 - a^2x^3 = 0$ şi $H_2 : a^2x^4 - a^4x^2 = 0$. Dar $\rho_X(\mathbb{R}) \subset S^3$, deci $\rho_X(\mathbb{R}) \subset H_1 \cap H_2 \cap S^3$. În concluzie subgrupurile cu un parametru al grupului Lie S^3 sunt cercuri.

Aplicaţia exponenţială a grupului Lie S^3 se scrie

$$\exp : L(S^3) \to S^3, \quad \exp X = \rho_X(1) = (\cos\alpha, \frac{a^2}{\alpha}\sin\alpha, \frac{a^3}{\alpha}\sin\alpha, \frac{a^4}{\alpha}\sin\alpha).$$

8.18. PROPOZIŢIE. *Fie G şi G' două grupuri Lie şi $h : G \to G'$ un homomorfism injectiv de grupuri Lie. Atunci:*

i) *homomorfismul de algebre Lie* $h_* : L(G) \to L(G')$ *este injectiv.*

ii) *aplicaţia* h *este scufundare.*

Demonstraţie. Fie W' o vecinătate normală a unităţii e' a grupului Lie G'. Deoarece h este aplicaţie continuă, rezultă că $h^{-1}(W')$ este vecinătate a unităţii e a grupului Lie G. Prin urmare există o vecinătate normală W a unităţii $e \in G$, cu proprietatea că $h(W) \subset W'$.

Fie U o vecinătate a lui $0 \in L(G)$, şi U' o vecinătate a lui $0 \in L(G')$, cu proprietatea că restricţiile

$$\exp : U \to W, \ \ \exp : U' \to W'$$

sunt difeomorfisme analitice.

i) Fie $X \in L(G)$, astfel încât $h_*(X) = 0$. Deoarece U este vecinătate a originii în $L(G)$, rezultă că există $\lambda \in \mathbb{R}^*$, cu proprietatea că $\lambda X \in U$. Cum h_* este liniară, avem:

$$h_*(\lambda X) = \lambda h_*(X) = 0.$$

Rezultă:

$$h \circ \exp(\lambda X) = \exp \circ h_*(\lambda X) = \exp(0) = e' = h \circ \exp(0).$$

Aplicaţia $h \circ \exp : U \to G'$ este injectivă, fiind o compunere de aplicaţii injective. Din $\lambda X, 0 \in U$ şi $h \circ \exp(\lambda X) = h \circ \exp(0)$, rezultă $\lambda X = 0$, adică $X = 0$.

Rezultă $\operatorname{Ker} h_* = \{0\}$, deci h_* este aplicaţie injectivă.

ii) Fie $f : L(G) \to T_eG$, $f(X) = X_e$ şi $f' : L(G') \to T_{e'}G'$, $f'(X') = X'_{e'}$. Ştim că f şi f' sunt izomorfisme liniare.

Fie $u \in T_eG$, astfel încât $h_{*,e}(u) = 0$. Fie $X = f^{-1}(u) \in L(G)$. Avem:

$$h_{*,e} \circ f(X) = h_{*,e}(X_e) = h_*(X)(e') = f' \circ h_*(X).$$

Rezultă că:

$$f' \circ h_*(X) = h_{*,e}(X_e) = h_{*,e}(u) = 0,$$

deci $X \in \mathrm{Ker}\,(f' \circ h_*) = \{0\}$. Prin urmare, aplicaţia $h_{*,e} : T_eG \to T_{e'}G'$ este injectivă, ceea ce ne arată că h este imersie în punctul e.

Fie $a \in G$. Avem:

$$h \circ L_a = L_{h(a)} \circ h.$$

Rezultă:

$$h_{*,a} \circ (L_a)_{*,e} = \left(L_{h(a)}\right)_{*,e'} \circ h_{*,e}.$$

Deoarece L_a şi $L_{h(a)}$ sunt difeomorfisme, rezultă că $(L_a)_{*,e}$ şi $\left(L_{h(a)}\right)_{*,e'}$ sunt izomorfisme liniare. Rezultă că aplicaţia

$$h_{*,a} = \left(L_{h(a)}\right)_{*,e'} \circ h_{*,e} \circ \left((L_a)_{*,e}\right)^{-1}$$

este injectivă, fiind o compunere de aplicaţii injective. Rezultă că h este imersie în punctul $a \in G$. Cum h este imersie în fiecare punct din G, rezultă că h este imersie. Cum h este imersie injectivă, rezultă că h este scufundare.

§ 9. GRUPURI LIE LOCALE. HOMOMORFISME DE GRUPURI LIE LOCALE

9.1. DEFINIŢIE. *Se numeşte* **grup Lie local** *o varietate analitică reală G, înzestrată cu un element distins $e \in G$, cu o vecinătate deschisă U_e a lui e şi cu două aplicaţii analitice*

$$\mu : U_e \times U_e \to G, \quad j : U_e \to U_e$$

care satisfac următoarele condiţii:

(gl 1) *există o vecinătate deschisă V_1 a lui e cu $V_1 \subset U_e$ şi astfel încât $\mu(x,e) = \mu(e,x) = x$, $(\forall)x \in V_1$.*

(gl 2) *există o vecinătate deschisă V_2 a lui e cu $V_2 \subset U_e$ şi astfel încât dacă $\mu(x,y) \in V_2$, $\mu(x,z) \in V_2$ atunci*

$$\mu(x, \mu(y,z)) = \mu(\mu(x,y), z), \ (\forall)x, y, z \in V_2.$$

(gl 3) *există o vecinătate deschisă V_3 a lui e cu $V_3 \subset U_e$ şi astfel încât $\mu(x, j(x)) = \mu(j(x), x)$, $(\forall)x \in V_3$.*

Notaţie. Un grup Lie local îl vom nota prin (G, U_e, e).

9.2. OBSERVAŢIE.

9.2.1. Orice grup Lie este, în acelaşi timp, şi un grup Lie local.

9.2.2. Reciproca afirmaţiei de la 9.2.1 nu este adevărată.

9.2.3. Un grup Lie G defineşte pe orice vecinătate deschisă a elementului său netru e un grup Lie local.

9.2.4. În continuare, pentru simplificarea notaţiilor, convenim să punem $\mu(x,y) = xy$, $j(x) = x^{-1}$.

9.3. PROPOZIŢIE. *Fie (G, U_e, e) un grup Lie local.*

i) *Există o vecinătate W_e a elementului distins e, astfel încât, pentru orice $x, y, z \in W_e$, să avem:*

$$xe = ex = x, \quad x(yz) = (xy)z, \quad xx^{-1} = x^{-1}x, \quad x \in W_e \Rightarrow x^{-1} \in W_e.$$

ii) *Pentru $x_0, z_0 \in W_e$ fixaţi, ecuaţia $x_0 y = z_0$ are soluţie unică $y_0 \in W_e$.*

Demonstraţie. i) Vom folosi definiţia 9.1. Putem presupune că vecinătatea deschisă U_e este simetrică, în caz contrar alegem $U_e \cap U_e^{-1}$ drept U_e. Definim $W_e = V_1 \cap V_2 \cap V_3$. Este evident că W_e este vecinătate deschisă a lui e, şi că sunt satisfăcute cerinţele de la i).

ii) Este uşor de văzut că $y_0 = x_0^{-1} z_0$ este soluţie a ecuaţiei date. În adevăr, avem:

$$x_0 y_0 = x_0(x_0^{-1} z_0) = (x_0 x_0^{-1}) z_0 = e z_0 = z_0.$$

Presupunem că ecuaţia $x_0 y = z_0$ are două soluţii $y_0, y_0' \in W_e$. Atunci, ţinând seama de punctul precedent, din egalitatea $x_0 y_0 = x_0 y_0'$ rezultă $y_0 = y_0'$.

9.4. DEFINIŢIE. *Fie (G, U_e, e) şi $(G', U'_{e'}, e')$ două grupuri Lie locale. Se numeşte* **homomorfism local** *al grupului Lie local (G, U_e, e) în grupul Lie local $(G', U'_{e'}, e')$ orice aplicaţie analitică $f : W_e \to G'$, unde $W_e \subset U_e$ este o vecinătate deschisă a lui e în G, cu $f(e) = e'$ şi astfel încât, dacă $x, y, xy \in W_e$, atunci $f(x)f(y) = f(xy)$.*

9.5. Exemplu. Fie (G, U_e, e) un grup Lie local. Atunci $Id_G : G \to G$, $x \to x$ este un homomorfism local.

9.6. Observaţie. În legatură cu posibilitatea prelungirii unui homomorfism local se demonstrează următoarea teoremă: "Fie G şi G' două grupuri Lie. Presupunem că G este conex şi simplu conex. Atunci orice homomorfism local

$$f : W_e \to G',$$

unde W_e este o vecinătate deschisă a lui e în G, se poate prelungi în mod unic la un homomorfism de grupuri Lie $h : G \to G'$ ". Demonstraţia acestei teoreme poate fi urmărită [73].

CAPITOLUL II

SUBGRUPURI LIE

§ 1. SUBGRUPURI ÎNCHISE. TEOREMA LUI CARTAN.

DEFINIŢII. i) *Se numeşte* **subgrup Lie** *al grupului Lie G, orice pereche (H, i), unde*

1) H este grup Lie,

2) $i : H \to G$ este un homomorfism injectiv de grupuri Lie.

ii*) Fie G un grup Lie şi fie H un subgrup (în sens algebric) al grupului G. Dacă H este mulţime închisă în G, atunci H se numeşte* **subgrup închis**.

TEOREMA LUI CARTAN. *Fie H un subgrup închis al grupului Lie G. Atunci spaţiul topologic H (cu topologia indusă) admite o structură analitică unică în raport cu care H este un grup Lie. Cu această structură, incluziunea*

$$i : H \to G$$

este un homomorfism de grupuri Lie şi perechea (H, i) este un subgrup Lie. Mai mult, H este subvarietate a varietăţii G.

Pentru a demonstra teorema lui Cartan vom da câteva propoziţii pregătitoare.

1.1. PROPOZIŢIE. *Fie G un grup Lie şi fie $H \subset G$ un subgrup închis. Presupunem că t_i $(i = 1, 2, ...)$ este un şir de numere reale şi h_i $(i = 1, 2, ...)$ este un şir de vectori din T_eG, astfel încât:*

(1) $t_i \to 0$, *dar* $t_i \neq 0$, $i = 1, 2, ...$

(2) $h_i \to h$ $(\in T_eG)$

(3) $\exp t_i h_i \in H$, $i = 1, 2, ...$

Atunci $\exp th \in H$, *oricare ar fi* $t \in \mathbb{R}$.

Demonstraţie. Considerăm două cazuri:

a) Şirul $(t_i)_{i \geq 1}$ conţine un subşir de numere pozitive şi atunci pe $(t_i)_{i \geq 1}$ îl înlocuim cu acel subşir.

b) Şirul $(t_i)_{i\geq 1}$ nu conţine un subşir de numere pozitive. Atunci el conţine un subşir de numere negative. Considerăm în locul şirului $(t_i)_{i\geq 1}$ acel subşir de numere negative. Să arătăm că şirul $(-t_i)_{i\geq 1}$ verifică cele trei condiţii din ipoteză.

(1') $-t_i \to 0$, însă $-t_i \neq 0$, $i = 1, 2, \ldots$

(2') $h_i \to h$ $(\in T_eG)$

(3') $\exp(-t_ih_i) = (\exp t_ih_i)^{-1}$ şi, cum H este subgrup, rezultă că $\exp(-t_ih_i) \in H$.

Deci şirul $(-t_i)_{i\geq 1}$ verifică cele trei condiţii din ipoteză. Această observaţie ne arată că putem presupune de la bun început că şirul $(t_i)_{i\geq 1}$ este un şir de numere reale strict pozitive. Pentru demonstrarea propoziţiei este suficient să arătăm că $\exp th \in H$, pentru un $t > 0$.

Fixăm un număr real pozitiv $t > 0$, şi fie n_i numărul natural definit prin:

$$\frac{t}{t_i} - 1 < n_i \leq \frac{t}{t_i}.$$

De aici rezultă:

$$t - t_i < n_it_i \leq t.$$

Deoarece $t_i \to 0$, avem

$$\lim_{i\to\infty} n_it_i = t$$

şi, cum $\lim_{i\to\infty} h_i = h$, rezultă că $\lim_{i\to\infty} n_it_ih_i$ există şi

$$\lim_{i\to\infty} n_it_ih_i = \lim_{i\to\infty} n_it_i \lim_{i\to\infty} h_i = th.$$

Deci avem

$$th = \lim_{i\to\infty} (n_it_ih_i).$$

Ştim că exp este analitică, deci exp este continuă. Din ultima egalitate rezultă:

$$\exp th = \exp \lim_{i\to\infty}(n_i t_i h_i) = \lim_{i\to\infty} \exp n_i t_i h_i = \lim_{i\to\infty}(\exp t_i h_i)^{n_i}.$$

Prin ipoteză $\exp t_i h_i \in H$. Rezultă $(\exp t_i h_i)^{n_i} \in H$. Cum H este închis, rezultă că $\lim_{i\to\infty}(\exp t_i h_i)^{n_i} \in H$, deci $\exp th \in H$.

Am arătat că $\exp th \in H$, pentru $t > 0$. Pentru $t = 0$, avem $\exp 0 \cdot h = \exp 0 = e \in H$. Fie $t < 0$. Atunci $-t > 0$ şi obţinem $\exp(-th) \in H$ sau $(\exp th)^{-1} \in H$, şi cum H este subgrup, rezultă $\exp th \in H$. În concluzie, $\exp th \in H$, $(\forall)\, t \in \mathbb{R}$.

1.2. PROPOZIŢIE. *Fie G un grup Lie şi fie H un subgrup al grupului G. Notăm:*

$$S(H) = \{\alpha : \mathbb{R} \to G \mid \alpha \text{ analitica}, \ \alpha(0) = e, \ \alpha(\mathbb{R}) \subset H\};$$
$$F = \{h \in T_eG \mid h = \dot{\alpha}(0), \ \alpha \in S(H)\}.$$

Atunci F este subspaţiu vectorial al spaţiului T_eG.

Demonstraţie: Fie h, $k \in F$. Să arătăm că $h + k \in F$. Fie α, $\beta \in S(H)$ cu

$$\dot{\alpha}(0) = h, \ \dot{\beta}(0) = k.$$

Definim aplicaţia

$$\gamma : \mathbb{R} \to G$$

prin

$$\gamma(t) = \alpha(t)\beta(t).$$

Avem $\gamma(t) = \mu(\alpha(t), \beta(t))$ sau $\gamma(t) = \mu \circ (\alpha \times \beta)(t,t)$. Deci $\gamma = \mu \circ \sigma$, cu $\sigma(t) = (\alpha \times \beta)(t,t)$.

Aplicaţia γ este analitică. De asemenea, avem $\gamma(0) = \alpha(0) \cdot \beta(0) = e$. În plus, din $\beta(t)$, $\alpha(t) \in H$, rezultă $\gamma(t) \in H$ (pentru că H este subgrup). Prin urmare $\gamma \in S(H)$.

Avem:

$$\overset{\bullet}{\gamma}(t) = \gamma_* \left(\frac{d}{dt} \,|_t \right) = (\mu \circ \sigma)_* \left(\frac{d}{dt} \,|_t \right) = \mu_{*,\sigma(t)} \circ \sigma_* \left(\frac{d}{dt} \,|_t \right) = \mu_{*,\sigma(t)} \overset{\bullet}{\sigma}(t),$$

deci

$$\overset{\bullet}{\gamma}(t) = \mu_{*,\sigma(t)} \overset{\bullet}{\sigma}(t).$$

Din $\sigma(t) = (\alpha(t), \beta(t))$ rezultă

$$\overset{\bullet}{\sigma}(t) = \left(\overset{\bullet}{\alpha}(t), \overset{\bullet}{\beta}(t) \right)$$

şi deci

$$\overset{\bullet}{\sigma}(0) = \left(\overset{\bullet}{\alpha}(0), \overset{\bullet}{\beta}(0) \right) = (h, k).$$

Vrem să calculăm

$$\overset{\bullet}{\gamma}(0) = \mu_{*,\sigma(0)} \overset{\bullet}{\sigma}(0) = \mu_{*,(e,e)}(h, k).$$

Calculăm mai întâi $\mu_{*,(e,e)}(h, 0_e)$. Pentru aceasta luăm o curbă în $G \times G$, tangentă la vectorul $(h, 0_e)$ în punctul (e, e) :

$$t \in \mathbb{R} \to (\alpha(t), e) \in G \times G.$$

Deoarece

$$\mu\left(\alpha(t), e\right) = \alpha(t),$$

rezultă

$$\mu_{*,(\alpha(t),e)} \left(\overset{\bullet}{\alpha}(t), 0_e \right) = \overset{\bullet}{\alpha}(t).$$

Deci avem:

$$\mu_{*,(\alpha(0),e)}\left(\overset{\bullet}{\alpha}(0), 0_e\right) = \overset{\bullet}{\alpha}(0)$$

sau

$$\mu_{*,(e,e)}(h, 0_e) = h.$$

Analog obţinem

$$\mu_{*,(e,e)}(0_e, k) = k.$$

Prin urmare, avem:

$$\overset{\bullet}{\gamma}(0) = \mu_{*,(e,e)}(h, 0_e) + \mu_{*,(e,e)}(0_e, k) = h + k$$

şi deci

$$\overset{\bullet}{\gamma}(0) = h + k,\ \gamma \in S(H),\ \text{adică } h + k \in F.$$

Să arătăm că $\lambda h \in F$, $(\forall)\lambda \in \mathbb{R}$. Considerăm curba

$$\delta : \mathbb{R} \to G$$

definită prin

$$\delta(t) = \alpha(\lambda t).$$

Este evident că δ este analitică. În plus, $\delta(0) = e$ şi $\operatorname{Im}\delta \subset H$. Rezultă $\delta \in S(H)$. Să calculăm $\overset{\bullet}{\delta}(0)$. Avem:

$$\overset{\bullet}{\delta}(0) = \delta_*\left(\frac{d}{dt}\,|_0\right) = \alpha_*\left(\frac{d(\lambda t)}{dt}\frac{d}{d(\lambda t)}\,|_0\right) = \alpha_*\left(\lambda\frac{d}{d(\lambda t)}\,|_0\right) = \lambda\overset{\bullet}{\alpha}(0) = \lambda h.$$

Prin urmare, $\lambda h \in F$. Rezultă că F este subspaţiu vectorial al spaţiului tangent T_eG.

1.3. PROPOZIŢIE. *Fie H un subgrup închis al grupului Lie G şi fie F subspaţiul construit în propoziţia precedentă.*
Atunci

$$\exp th \in H, \ (\forall)t \in \mathbb{R}, \ (\forall)h \in F.$$

Demonstraţie. Reamintim că inversa aplicaţiei exponenţiale

$$\exp : V_0 \subset L(G) \equiv T_eG \to W_e \subset G,$$

am notat-o cu log, deci

$$\log : W_e \to V_0.$$

Avem:

$$\exp \circ \log = Id_{W_e}, \ \log \circ \exp = Id_{V_0}.$$

Fie $h \in F$. Ştim că $h = \dot{\alpha}(0)$, cu $\alpha \in S(H)$. Deoarece $\alpha : \mathbb{R} \to G$ este analitică, rezultă că α este continuă şi deci $\alpha^{-1}(W_e)$ este mulţime deschisă în $\mathbb{R}$. Prin urmare, există $\varepsilon > 0$, astfel încât oricare ar fi $t \in \mathbb{R}$ cu $|t| < \varepsilon$, să avem $\alpha(t) \in W_e$.
Dacă punem

$$h(t) = \log \alpha(t),$$

atunci avem:

$$h(0) = \log \alpha(0) = \log e = 0 = (0, ..., 0).$$

Am definit deci o curbă analitică

$$h : (-\varepsilon, \varepsilon) \to V_0,$$

cu proprietatea că $\alpha(t) = \exp h(t)$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Rezultă:

$$\overset{\bullet}{\alpha}(t) = \exp_{*,h(t)} \overset{\bullet}{h}(t).$$

De aici obţinem:

$$\overset{\bullet}{\alpha}(0) = \exp_{*,h(0)} \overset{\bullet}{h}(0) = \exp_{*,0} \overset{\bullet}{h}(0)$$

sau

$$h = \overset{\bullet}{\alpha}(0) = \overset{\bullet}{h}(0).$$

Deci putem scrie:

$$h = \overset{\bullet}{h}(0) = \lim_{t \to 0} \frac{h(t) - h(0)}{t - 0}.$$

Obţinem:

$$h = \lim_{t \to 0} \frac{h(t)}{t} = \lim_{i \to \infty} ih\left(\frac{1}{i}\right).$$

De fapt am ales un şir $(t_i)_{i \geq 1}$ de numere reale care tinde la zero

$$(1") \qquad t_i = \frac{1}{i} \to 0, \text{ însă } t_i \neq 0.$$

Dacă notăm $h_i = ih\left(\frac{1}{i}\right)$ pentru orice $i = 1, 2, ...$, atunci avem: $h_i \in T_eG = L(G)$. De fapt, avem un şir $(h_i)_{i=1,2,...}$ de vectori din T_eG, cu

$$(2") \qquad h_i \to h \in T_eG.$$

Deoarece $t_i h_i = h\left(\frac{1}{i}\right)$, avem

$$\exp t_i h_i = \exp h(\frac{1}{i}) = \alpha(\frac{1}{i}) \in H,$$

deci

$$(3") \qquad \exp t_i h_i \in H.$$

Din (1"), (2") şi (3") vedem că putem să aplicăm propoziţia 1.1. Rezultă $\exp th \in H$, $(\forall)t \in \mathbb{R}$. În concluzie, avem

$$\exp th \in H, (\forall)t \in \mathbb{R}, (\forall)h \in F.$$

1.4. PROPOZIŢIE. *Fie H un subgrup închis al grupului Lie G. Fie $F \subset T_eG$ definit ca în propoziţia 1.2 şi fie $L \subset T_eG$ un subspaţiu complementar lui F în T_eG, deci $T_eG = L \oplus F$. Atunci există o vecinătate V_L a lui* 0 *în L, astfel încât:*

$$\exp h \notin H, \; h \in V_L, \; h \neq 0.$$

Demonstraţie. Să presupunem că proprietatea nu este adevărată, adică să presupunem că oricare ar fi vecinătatea V_L a lui 0 în L, există un vector $h \in V_L$, astfel încât $h \neq 0$ şi $\exp h \in H$.

Construim un şir $(h_i)_{i\geq 1}$ de vectori nenuli din L cu proprietatea că $h_i \to 0$ şi $\exp h_i \in H$, în felul următor: alegem o normă pe L, adică o aplicaţie

$$\| \| : h \in L \to \|h\| \in \mathbb{R},$$

care să fie compatibilă cu topologia lui L. Aceasta o putem realiza luând o bază $\{E_1, ..., E_r\}$ în L, deci orice vector $h \in L$ se scrie

$$h = \sum_{s=1}^{r} h^s E_s$$

şi punând

$$\|h\| = \sqrt{(h^1)^2 + ... + (h^r)^2}.$$

Cu ajutorul normei astfel introduse, definim sfera deschisă $B_k (k \in \mathbb{N}^*)$ de centru O şi rază $\frac{1}{k}$ în felul următor:

$$B_k = \{h \in L \mid \|h\| < \frac{1}{k}\}.$$

B_k sunt mulţimi deschise în L. În fiecare B_k există un vector nenul h_k astfel încât $\exp h_k \in H$. Dacă facem pe k să tindă la infinit, obţinem $h_k \to 0$ (deoarece $\|h_k\| < \frac{1}{k}$). Deci am construit un şir $(h_i)_{i \geq 1}$ de vectori din L cu proprietăţile

$$h_i \to 0, \ h_i \neq 0, \ \exp h_i \in H.$$

Pentru fiecare termen al şirului $(h_i)_{i \geq 1}$ notăm

$$t_i = \frac{1}{\|h_i\|}.$$

Rezultă:

$$\|t_i h_i\| = 1.$$

Deci fiecare vector $t_i h_i = k_i$ aparţine sferei unitate

$$S_{r-1} = \{h \in L \mid \|h\| = 1\}.$$

Deoarece S_{r-1} este compactă, rezultă că S_{r-1} este marginită. Cum $k_i \in S_{r-1}$, oricare ar fi $i = 1, 2, ...$, rezultă că şirul $(k_i)_{i \geq 1}$ este mărginit (în norma introdusă mai sus). Conform lemei lui Cesaro [47], şirul $(k_i)_{i \geq 1}$ conţine un subşir convergent (către un element $h \in S_{r-1}$, deci $h \in L$ şi $h \neq 0$). Înlocuim şirul iniţial (k_i) prin acest subşir convergent al său. În definitiv am obţinut un şir de numere reale $(\frac{1}{t_i})_{i \geq 1}$ (unde $\frac{1}{t_i} = \|h_i\|$) şi un şir de vectori $(k_i)_{i \geq 1}$, $k_i \in T_e G$ satisfăcând următoarele condiţii:

1) $\frac{1}{t_i} = \|h_i\| \to 0$, dar $\frac{1}{t_i} \neq 0$, $i = 1, 2, ...$
2) $k_i \to h \in T_eG$,
3) $\exp \frac{1}{t_i} k_i = \exp \frac{1}{t_i} \cdot t_i h_i = \exp h_i \in H$.
Aplicând propoziţia 1.1, obţinem:

$$\exp th \in H, \ (\forall) t \in \mathbb{R}.$$

Considerăm curba

$$\alpha : \mathbb{R} \to G$$

definită prin $\alpha(t) = \exp th$. Evident, α este analitică. În plus, $\alpha(0) = \exp 0 = e$ şi $\alpha(\mathbb{R}) \subset H$, deci $\alpha \in S(H)$. Deoarece

$$\overset{\bullet}{\alpha}(0) = h,$$

rezultă că $h \in F$, ceea ce este <u>absurd</u>, căci $h \in L$, $h \neq 0$ şi $L \cap F = \{0\}$. ·

Prin urmare, există o vecinătate V_L a lui 0 în L astfel încât

$$\exp h \notin H, \ h \in V_L, \ h \neq 0.$$

1.5. <u>PROPOZIŢIE</u>. *Fie H un subgrup închis al grupului Lie G şi fie F subspaţiul vectorial construit în propoziţia 1.2. Alegem un al doilea subspaţiu $L \subset T_eG$ astfel ca $T_eG = L \oplus F$. Considerăm aplicaţia*

$$\varphi : L \times F \to G$$

definită prin

$$\varphi(k, h) = \exp k \exp h.$$

Atunci există vecinătăţile deschise $V_L \subset L$, $V_F \subset F$ ale lui 0 în L (resp. F), şi mai există o vecinătate deschisă $U \subset G$ a lui e în G, astfel încât:

i) *φ induce un difeomorfism analitic între $V_L \times V_F$ şi U. Cu alte cuvinte, φ se restricţionează la un difeomorfism*

$$\varphi : V_L \times V_F \to U.$$

ii) *$U \cap H = \exp(V_F)$.*

Demonstraţie. i) Aplicăm propoziţia 8.13 (cap. I). Rezultă că există vecinătăţile deschise $V_L \subset L$, $V_F \subset F$ ale lui 0 în L şi F, şi mai există o vecinătate U a lui e în G astfel încât aplicaţia $\varphi : V_L \times V_F \to U$ este difeomorfism analitic. În virtutea propoziţiei precedente, putem alege V_L astfel încât $\exp k \notin H$, oricare ar fi $k \in V_L - \{0\}$.

ii) Din propoziţia 1.2 rezultă $\exp(F) \subset H$. Dar $V_F \subset F$, deci obţinem $\exp(V_F) \subset H$.

Ştim că $\varphi : V_L \times V_F \to U$ este difeomorfism analitic. Rezultă

$$\varphi(0 \times V_F) = \exp(V_F) \subset U.$$

Prin urmare, $\exp(V_F) \subset H \cap U$.

Fie $x \in H \cap U$. Deoarece $x \in U$, putem scrie

$$x = \exp k \exp h, \quad k \in V_L, \ h \in V_F.$$

Rezultă $\exp k = x(\exp h)^{-1}$.
Din $\exp h \in H$, rezultă $(\exp h)^{-1} \in H$. Deoarece $x \in H$, rezultă că $\exp k = x(\exp h)^{-1} \in H$. Deci $\exp k \in H$, $k \in V_L$.

Aplicăm propoziţia precedentă şi avem că singurul element $k \in V_L$ cu proprietatea că $\exp k \in H$ este $k = 0$. Avem deci

$$x = \exp 0 \exp h = e \exp h = \exp h, \ h \in V_F,$$

adică $x \in \exp(V_F)$. Cum x a fost ales arbitrar, rezultă $H \cap U \subset \exp(V_F)$. În concluzie

$$H \cap U = \exp(V_F).$$

1.6. PROPOZIŢIE. *Fie G un grup Lie şi fie H un subgrup închis al său. Atunci:*

i) *H admite o structură de varietate analitică,*

ii) *Multiplicarea în H este aplicaţie analitică în raport cu structura de varietate analitică reală a lui H construită la punctul* i).

Demonstraţie. Vom folosi notaţiile din propoziţia precedentă.

i) Alegem o bază $\{E_1, ..., E_n\}$ în T_eG, astfel încât $\{E_1, ..., E_r\}$ să fie bază în L şi $\{E_{r+1}, ..., E_n\}$ să fie bază în F. Pentru orice $X \in T_eG$, avem $X = X^iE_i$. Spaţiul tangent T_eG se identifică cu $\mathbb{R}^n$ prin
$X = X^iE_i \in T_eG \to (X^1, ..., X^n) \in \mathbb{R}^n$. În acest fel L se identifică cu mulţimea $\{(X^1, ..., X^n) \in \mathbb{R}^n \mid X^{r+1} = ... = X^n = 0\} \cong \mathbb{R}^r$, iar F se identifică cu mulţimea $\{(X^1, ..., X^n) \in \mathbb{R}^n \mid X^1 = ... = X^r = 0\}$, care se identifică cu $\mathbb{R}^{n-r}$.

În acest mod $V_L \times V_F$ se identifică cu un deschis din $\mathbb{R}^n$. (V_F se identifică cu un deschis din $\mathbb{R}^{n-r}$).

Pentru $a \in H$ construim o hartă (U_a, ψ_a) a varietăţii G în jurul punctului a, astfel: $U_a = L_a(U)$, unde L_a este translaţia stângă a grupului G definită de $a \in H$,iar U este vecinătatea lui e considerată în propoziţia precedentă.

Deoarece U este mulţime deschisă în G, iar L_a este difeomorfism, rezultă că U_a este mulţime deschisă în G.
Cu ajutorul difeomorfismului φ din propoziţia precedentă, construim aplicaţia ψ_a astfel:

$$\psi_a = \varphi^{-1} \circ L_{a^{-1}} : U_a \to V_L \times V_F.$$

Deoarece $L_{a^{-1}}$ şi φ^{-1} sunt difeomorfisme, rezultă că ψ_a este difeomorfism. Prin urmare, perechea (U_a, ψ_a) este hartă a lui G compatibilă cu structura analitică reală a lui G.

H are topologia indusă de topologia lui G. Pentru $a \in H$ construim o hartă (W_a, ξ_a) pe H, astfel:

$$W_a = U_a \cap H, \xi_a = \psi_a\,|_{W_a}.$$

Este evident că W_a este mulţime deschisă în H. Deoarece ψ_a este injectivă, rezultă că ξ_a este injectivă. Avem:

$$\begin{aligned} \xi_a(W_a) &= \psi_a(U_a \cap H) = \varphi^{-1} \circ L_{a^{-1}}(L_a(U) \cap H) = \varphi^{-1}(U \cap H) = \\ &= \varphi^{-1}(\exp(V_F)) = \varphi^{-1} \circ \varphi(0 \times V_F) = 0 \times V_F. \end{aligned}$$

Dar $0 \times V_F$ este în bijecţie cu V_F, deci rezultă că $\xi_a : W_a \to V_F$ este bijecţie. În continuare vom folosi următoarea proprietate de topologie generală: **"Fie X şi Y două spaţii topologice şi fie $f : X \to Y$ un homeomorfism. Pentru $Z \subset X$, definim funcţia $h : Z \to f(Z)$, prin $h(p) = f(p)$. Atunci h este homeomorfism între Z şi $f(Z)$ (Z şi $f(Z)$ sunt luate cu topologiile induse)".**
Dacă luăm:

$$f = \psi_a,\ h = \xi_a,\ X = U_a,\ Z = W_a,\ Y = V_L \times V_F,\ f(Z) = V_F,$$

rezultă că aplicaţia $\xi_a : W_a \to V_F$ este homeomorfism. Prin urmare, am obţinut că perechea (W_a, ξ_a) este hartă pe spaţiul topologic H.

Este evident că reuniunea domeniilor hărţilor de forma (W_a, ξ_a), $a \in H$, este H. Fie acum două hărţi (W_a, ξ_a) şi (W_b, ξ_b), cu $W_a \cap W_b \neq \varnothing$.
Să arătăm că aplicaţia

$$\xi_b \circ \xi_a^{-1} : \xi_a(W_a \cap W_b) \to \xi_b(W_a \cap W_b)$$

este analitică. Vom folosi faptul că aplicaţia

$$\text{(1.1.)} \qquad \psi_b \circ \psi_a^{-1} : \psi_a(U_a \cap U_b) \to \psi_b(U_a \cap U_b)$$

este analitică. Aplicaţia (1.1) este reprezentată analitic prin relaţiile:

$$\text{(1.1'.)} \qquad \begin{array}{l} x'^i = \psi^i(x^1, ..., x^r, x^{r+1}, ..., x^n),\ i = \overline{1, r}, \\ x'^\alpha = \psi^\alpha(x^1, ..., x^r, x^{r+1}, ..., x^n),\ \alpha = \overline{r+1, n}, \end{array}$$

unde $n - r = \dim F$. Este evident că funcţiile $\psi^1, ..., \psi^r, \psi^{r+1}, ..., \psi^n$ sunt analitice în jurul oricărui punct $p \in \psi_a(U_a \cap U_b) \subset V_L \times V_F$.

Fie $p \in \xi_a(W_a \cap W_b) \subset V_F$. Avem $\xi_b \circ \xi_a^{-1}(p) \in V_F$. Rezultă că atunci când trecem de la ψ_a la ξ_a va trebui să luăm în (1.1')

$$x^1 = ... = x^r = 0,\ x'^1 = ... = x'^r = 0.$$

Atunci formulele

$$(1.1") \qquad x'^{\alpha} = \psi^{\alpha}(0,...,0,x^{r+1},...,x^{n}), \ \alpha = r+1,...,n$$

arată că aplicaţia $\xi_b \circ \xi_a^{-1}$ este analitică (am fixat r argumente într-o aplicaţie analitică de n argumente). Prin urmare, H are structură de varietate analitică reală de dimensiune $n-r$.

ii) Fie $x \in W_a$, $y \in W_b$, $z = xy \in W_{ab}$. Privim pe x, y şi $z = xy$ ca elemente din G, deci $x \in U_a$, $y \in U_b$, $z = xy \in U_{ab}$. Ştim că operaţia grupală

$$(1.2.) \qquad \mu : (x,y) \in G \times G \to z = \mu(x,y) = xy \in G$$

este o aplicaţie analitică. Aplicaţia (1.2) este reprezentată analitic prin relaţiile:

$$(1.2') \quad z^{i} = \mu^{i}(x^{1},...,x^{r},x^{r+1},...,x^{n},y^{1},...,y^{r},y^{r+1},...,y^{n}), \ i = 1,2,...,n \ ,$$

unde funcţiile μ^i sunt analitice. Dar $x, y, z \in H$, deci:

$$x^{1} = ... = x^{r} = y^{1} = ... = y^{r} = z^{1} = ... = z^{r} = 0$$

şi, din (1.2'), obţinem:

$$(1.2") \quad z^{\alpha} = \mu^{\alpha}(0,...,0,x^{r+1},...,x^{n},0,...,0,y^{r+1},...,y^{n}), \ \alpha = r+1,...,n.$$

Formulele (1.2") ne arată că multiplicarea în H este analitică, şi deci H este un grup Lie.

1.6.1. OBSERVAŢIE. *Din construcţia structurii analitice pe H rezultă că $T_eH = F$, şi deci F este algebra Lie $L(H)$ a grupului Lie H. Deci $h \in L(H)$ dacă şi numai dacă* $\exp th \in H$, $t \in \mathbb{R}$.

1.7. PROPOZIŢIE. *Fie G şi G' două grupuri Lie şi $h : G \to G'$ un homomorfism de grupuri. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) *h este homomorfism de grupuri Lie,*

(ii) *pentru orice homomorfism continuu $h' : \mathbb{R} \to G$, aplicaţia $h \circ h' : \mathbb{R} \to G'$ este homomorfism continuu.*

Demonstraţie. (i)$\Rightarrow$(ii) Deoarece h este analitic, rezultă că h este continuu, şi deci $h \circ h'$ este continuu.

(ii)$\Rightarrow$(i) Fie $\{E_1, ..., E_n\}$ o bază în algebra Lie $L(G)$ a grupului Lie G. Pentru orice $i \in \{1, ..., n\}$, aplicaţia

$$\rho_{E_i} : \mathbb{R} \to G,\ \rho_{E_i}(t) = \exp tE_i$$

este un homomorfism de grupuri Lie, deci ρ_{E_i} este aplicaţie continuă, $(\forall)\ i \in \{1, ..., n\}$. Ţinând seama de (ii), avem că $h \circ \rho_{E_i} : \mathbb{R} \to G'$ este homomorfism continuu, $(\forall)\ i \in \{1, ..., n\}$. Folosind propoziţia 8.12 (Cap. I), obţinem că $h \circ \rho_{E_i}$ este homomorfism de grupuri Lie. Aplicaţia

$$f : \mathbb{R}^n \to G',\ f(t_1, ..., t_n) = h \circ \rho_{E_1}(t_1) ... h \circ \rho_{E_n}(t_n)$$

este analitică.

Folosind 8.16 (Cap. I), rezultă că aplicaţia

$$L(G) \to G,\ X = \sum_{i=1}^{n} t_i E_i \longrightarrow (\exp t_1 E_1)...(\exp t_n E_n)$$

se restricţionează la un difeomorfism $\varphi : U \to W$, unde U este o vecinătate a lui 0 în $L(G)$, iar W este o vecinătate a lui e în G. Algebra Lie $L(G)$ se identifică cu $\mathbb{R}^n$ ($n = \dim G$), prin $\theta : \mathbb{R}^n \to L(G)$, $\theta(t_1, ..., t_n) = X = \sum\limits_{i=1}^{n} t_i E_i$. Rezultă că aplicaţia

$$\varphi \circ \theta : \theta^{-1}(U) \to W,\ \varphi \circ \theta(t_1, ..., t_n) = (\exp t_1 E_1)...(\exp t_n E_n)$$

este difeomorfism, ea fiind compunerea difeomorfismelor $(t_1, ..., t_n) \in \theta^{-1}(U) \xrightarrow{\theta} X = \sum\limits_{i=1}^{n} t_i E_i \xrightarrow{\varphi} \varphi(X) = \exp t_1 E_1 ... \exp t_n E_n \in W$.

Pentru $b \in W$, avem: $b = (\exp t_1 E_1)...(\exp t_n E_n) \in W$. Rezultă

$$\begin{aligned} f\circ(\varphi\circ\theta)^{-1}(b) &= f\circ(\varphi\circ\theta)^{-1}((\exp t_1E_1)\ldots(\exp t_nE_n)) = f(t_1,\ldots,t_n) = \\ &= h\circ\rho_{E_1}(t_1)\ldots h\circ\rho_{E_n}(t_n) = h(\exp t_1E_1)\ldots h(\exp t_nE_n) = \\ &= h(b). \end{aligned}$$

Rezultă că aplicaţia $h : W \to G'$ este analitică.

Pentru $a \in G$, avem:

$$h(ax) = h(a)h(x) = L_{h(a)} \circ h(x),\ (\forall)x \in W.$$

Observăm că $aW = L_a(W) =$ mulţime deschisă în G, şi $a \in aW$. Avem deci: $h\mid_{aW} = L_{h(a)} \circ h\mid_W$. Cum $h\mid_W$ este analitică, iar $L_{h(a)}$ este difeomorfism, rezultă că $h\mid_{aW}$ este analitică în fiecare punct al lui aW. Deoarece $\{aW\}_{a\in G}$ formează o acoperire deschisă a lui G, rezultă că aplicaţia $h : G \to G'$ este homomorfism de grupuri Lie.

Observaţie. Fie G şi G' două grupuri Lie şi

$$h : G \to G'$$

un homomorfism continuu. Folosind propoziţia precedentă, obţinem că h este homomorfism de grupuri Lie.

1.8. Demonstraţia teoremei lui Cartan.

Deoarece H este subgrup închis, conform propoziţiei 1.6 rezultă că H este grup Lie. Deoarece incluziunea

$$i : H \to G$$

este un homomorfism de grupuri topologice, conform propoziţiei precedente, rezultă că i este un homomorfism de grupuri Lie. Deoarece i este homomorfism injectiv de grupuri Lie, rezultă că perechea (H, i) este un subgrup Lie al grupului Lie G. Deoarece i este imersie injectivă, rezultă că H este subvarietate a lui G.

În continuare vom demonstra unicitatea structurii analitice pentru care H este grup Lie. Să presupunem că am putea defini pe H două structuri analitice $\mathcal{A}_1$ şi $\mathcal{A}_2$ în raport cu care H devine grup Lie. Notăm $H_1 = (H, \mathcal{A}_1)$ şi $H_2 = (H, \mathcal{A}_2)$. Ştim că pe H_1 şi H_2 avem aceeaşi topologie şi anume topologia indusă de topologia lui G. Este evident că aplicaţia

$$Id_H : H_1 \to H_2,\ x \to Id_H(x) = x,$$

este un homeomorfism. În plus, $Id_H : H_1 \to H_2$ este un izomorfism de grupuri. Utilizând observaţia de la sfârşitul propoziţiei 1.7, rezultă uşor că dacă două grupuri Lie sunt izomorfe (ca grupuri abstracte) şi homeomorfe (ca spaţii topologice), atunci ele sunt analitic izomorfe. Prin urmare, aplicaţia $Id_H : H_1 \to H_2$ este un difeomorfism analitic. În concluzie structurile analitice $\mathcal{A}_1$ şi $\mathcal{A}_2$ coincid. Am obţinut astfel unicitatea structurii analitice pe H, pentru care H devine grup Lie.

Q.E.D.

1.9. APLICAŢII ALE TEOREMEI LUI CARTAN.

1.9.1. PROPOZIŢIE. *Fie H un subgrup compact al grupului Lie G şi fie $i : H \to G$ aplicaţia incluziune. Atunci perechea (H, i) este subgrup Lie al lui G.*

Demonstraţie. Deoarece H este compact, rezultă că H este închis şi, conform teoremei lui Cartan, perechea (H, i) este subgrup Lie.

1.9.2. PROPOZIŢIE. *Fie M o varietate analitică şi fie*

$$\alpha : \mathbb{R} \times M \to M$$

o acţiune a grupului aditiv Lie $\mathbb{R}$ în varietatea M. Fie $p \in M$ şi fie:

$$H_p = \{t \in \mathbb{R} \,|\alpha(t, p) = p\}$$

subgrupul de stabilitate al punctului p în raport cu acţiunea α. Atunci (H_p, i) este subgrup Lie al grupului Lie $\mathbb{R}$ (cu $i : H_p \to \mathbb{R}$ am notat aplicaţia incluziune).

Demonstraţie. Evident, H_p este subgrup închis al grupului Lie $\mathbb{R}$. Conform teoremei lui Cartan, (H_p, i) este subgrup Lie.

1.9.3. PROPOZIŢIE. *Fie G şi G' două grupuri Lie şi fie $h : G \to G'$ un homomorfism de grupuri Lie. Notăm cu* Ker h *nucleul homomorfismului* h. *Atunci*

i) Ker h *este grup Lie,*

ii) $L(\text{Ker } h) = \text{Ker } h_*$,

unde

$$h_* : L(G) \to L(G')$$

este homomorfismul canonic de algebre Lie asociat homomorfismului h.

Demonstraţie. i) Este evident că $\text{Ker}h = \{x \in G \mid h(x) = e'\}$ este subgrup al grupului G. Deoarece h este aplicaţie analitică, rezultă că h este continuă. Prin urmare, $\text{Ker}h = h^{-1}(\{e'\})$ este mulţime închisă în G. Deoarece Ker$h$ este subgrup închis, rezultă că Ker$h$ este grup Lie.

ii) Fie $X \in L(\text{Ker}h)$. Rezultă că $X_e \in T_e(\text{Ker}h)$. Prin urmare, există o curbă analitică $\alpha : \mathbb{R} \to G$ cu $\alpha(0) = e$, $\alpha(\mathbb{R}) \subset \text{Ker}h$ şi astfel încât $\dot{\alpha}(0) = X_e$. Din $\alpha(t) \in \text{Ker}h$, $(\forall)t \in \mathbb{R}$, rezultă $h \circ \alpha(t) = e'$, $(\forall)t \in \mathbb{R}$, ceea ce implică $(h \circ \alpha)_* = 0$, adică $h_* \circ \alpha_* = 0$. De aici obţinem $h_* \circ \alpha_*(\frac{d}{dt}|_{t=0}) = 0$ sau $h_*(X) = 0$, deci $X \in \text{Ker}h_*$. Am obţinut $L(\text{Ker}h) \subset \text{Ker}h_*$.

Fie acum $X \in \text{Ker}h_*$. Deoarece $X \in L(G)$, el determină un subgrup cu un parametru $\rho_X : \mathbb{R} \to G$, care verifică relaţia

$$(\rho_X)_* \left(\frac{d}{dt}\right) = X.$$

Deoarece $X \in \text{Ker}h_*$, avem $h_*(X) = 0$.
Ultimele două egalităţi ne arată că avem

$$(h \circ \rho_X)_* \left(\frac{d}{dt}\right) = 0,$$

unde $h \circ \rho_X : \mathbb{R} \to G'$ este un homomorfism de grupuri Lie. Deoarece $\{\frac{d}{dt}\}$ este o bază în algebra Lie $L(\mathbb{R})$, rezultă că avem $(h \circ \rho_X)_* = 0$. De aici, folosind propoziţia 8.11 (Cap. I) şi faptul că grupul Lie $\mathbb{R}$ este conex, obţinem $h \circ \rho_X(t) = e'$, $(\forall)t \in \mathbb{R}$. Rezultă $\rho_X(\mathbb{R}) \subset \text{Ker}h$. În definitiv am obţinut o curbă analitică $\rho_X : \mathbb{R} \to G$ cu $\rho_X(0) = e$, $\rho_X(\mathbb{R}) \subset \text{Ker}h$. Rezultă că

$\rho_X \in S(\text{Ker}h)$. Deoarece $\overset{\bullet}{\rho}_X(0) = X_e$, rezultă $X_e \in T_e(\text{Ker}h)$, adică $X \in L(\text{Ker}h)$. Am obţinut $\text{Ker}h_* \subset L(\text{Ker}h)$. Rezultă:

$$L(\text{Ker}h) = \text{Ker}h_*.$$

Observaţie. Fie $i : \text{Ker}h \to G$ incluziunea. Atunci, conform teoremei lui Cartan, perechea $(\text{Ker}h, i)$ este subgrup Lie al lui G.

1.9.3'. EXEMPLU. Considerăm grupul Lie $G = \mathbb{R}^4 - \{0\}$ (a se vedea exemplul 2.2.4 din Cap. I). Fie varietatea $G' = \mathbb{R} - \{-1\}$, înzestrată cu o structură de grup Lie, pentru care aplicaţia

$$h : G \to G', \ h(x) = \|x\|^2 - 1$$

este homomorfism de grupuri Lie.

Din $h(xy) = h(x) * h(y)$ rezultă

$$\|xy\|^2 - 1 = \left(\|x\|^2 - 1\right) * \left(\|y\|^2 - 1\right).$$

Dacă notăm $a = \|x\|^2 - 1$ şi $b = \|y\|^2 - 1$, atunci obţinem legea de grup pe $G' = \mathbb{R} - \{-1\}$

$$a * b = (a + 1)(b + 1) - 1,$$

adică

$$a * b = ab + a + b.$$

Observăm că $G' = \mathbb{R} - \{-1\}$ este tocmai grupul Lie considerat în exemplul 2.2.9 din Cap. I.
Este uşor de văzut că nucleul homomorfismului h este

$$\text{Ker}h = S^3.$$

Conform propoziţiei anterioare, sfera S^3 este grup Lie (a se vedea şi exemplul 2.2.5 din Cap. I).

1.9.4. PROPOZIŢIE. *Fie A o algebră reală (în general neasociativă) de dimensiune n, a cărei multiplicare o notăm cu*

$$(a, b) \to a * b.$$

Notăm, de asemenea, cu V spaţiul vectorial real corespunzător algebrei A, cu $GL(V)$ grupul automorfismelor spaţiului vectorial V, cu $EndV$ algebra endomorfismelor spaţiului vectorial V, şi cu $G(A)$ subgrupul lui $GL(V)$ constituit din automorfismele algebrei A. Fie

$$g(A) = \{x \in EndV : (xa) * b + a * (xb) = x(a * b), \ (\forall) a, b \in A\}.$$

Atunci:

i) *$g(A)$ admite o structură canonică de algebră Lie reală, de dimensiune finită,*

ii) *$G(A)$ este un grup Lie a cărui algebra Lie este $g(A)$.*

Demonstraţie. i) Este evident că $g(A)$ este un subspaţiu vectorial real al lui $EndV$. Să arătăm acum că, oricare ar fi $x, y \in g(A)$, avem

$$[x, y] = xy - yx \in g(A).$$

În adevăr, putem scrie pentru orice $a, b \in A$:

$$\begin{aligned}(xy)(a * b) &= ((xy)a) * b + (ya) * (xb) + (xa) * (yb) + a * ((xy)b),\\ (yx)(a * b) &= ((yx)a) * b + (xa) * (yb) + (ya) * (xb) + a * ((yx)b),\end{aligned}$$

de unde obţinem:

$$[x, y](a * b) = ([x, y]a) * b + a * ([x, y]b)\,,$$

adică $[x, y] \in g(A)$. Observăm că $g(A)$ este o subalgebră Lie a algebrei Lie asociată algebrei asociative $EndV$ (a se vedea exemplul 5.2.2, Cap. I).

ii) Fixând o bază $\{e_1, ..., e_n\}$ în V, grupul $GL(V)$ se identifică în mod canonic cu grupul Lie $GL(n, \mathbb{R})$.

Un element $x \in GL(V)$ este, prin definiţie, automorfism al algebrei A, dacă:

$$(1.3.) \qquad (xa) * (xb) = x(a * b), \quad (\forall) a, b \in A.$$

Fie $x_1, ..., x_r, ...$ un şir de automorfisme ale algebrei A, convergent către un element $x \in GL(V)$. Din relaţiile

$$(x_r a) * (x_r b) = x_r(a * b),$$

rezultă (1.3), deoarece aplicaţiile:

$$\begin{array}{ccll} G(A) & \longrightarrow & A, & y \longrightarrow (ya) * (yb), \\ G(A) & \longrightarrow & A, & y \longrightarrow y(a * b) \end{array}$$

sunt continue, pentru orice $a, b \in A$. Am arătat astfel că $G(A)$ este un subgrup închis al lui $GL(V)$.

Conform teoremei lui Cartan, $(G(A), i)$ este subgrup Lie al grupului Lie $GL(V)$. ($i : G(A) \to GL(V)$ este incluziunea).

Să notăm cu $L(G(A))$ algebra Lie a lui $G(A)$. Pentru a arăta că $L(G(A)) \subset g(A)$, considerăm o curbă analitică

$$C : I_\varepsilon = (-\varepsilon, \varepsilon) \to G(A),$$

cu $C(0) = I$ (= elementul neutru al grupului $G(A)$, sau al grupului $GL(V)$). Deoarece $C(t) \in G(A)$, rezultă:

$$(C(t)a) * (C(t)b) = C(t)(a * b), \; (\forall) a, b \in A,$$

deci

$$\left(\dot{C}(t)a\right) * (C(t)b) + (C(t)a) * \left(\dot{C}(t)b\right) = \dot{C}(t)(a * b), \; (\forall) a, b \in A,$$

Făcând $t = 0$, şi ţinând seama de faptul că $C(0) = I$, obţinem

$$\left(\dot{C}(0)a\right) * b + a * \left(\dot{C}(0)b\right) = \dot{C}(0)(a * b),\ (\forall)a, b \in A,$$

deci vectorul $\dot{C}(0)$, tangent în punctul I la grupul $G(A)$, aparţine algebrei Lie $g(A)$. Rezultă $L(G(A)) \subset g(A)$.

Să stabilim acum incluziunea inversă. În acest scop vom folosi anumite dezvoltări în serie. Toate seriile care apar sunt uniform convergente. Stabilirea convergenţei uniforme a seriilor respective este elementară şi se bazează pe folosirea următoarelor norme:

- pentru un vector oarecare $a = a^i e_i \in V$, punem:

$$\|a\| = \sum_{i=1}^{n} \left|a^i\right|,$$

- pentru o transformare liniară oarecare $x \in EndV$, $xe_i = x_i^j e_j$, punem:

$$\|x\| = \sup_j \sum_{i=1}^{n} \left|x_i^j\right|.$$

Introducem acum constantele de structură ale algebrei A, în baza considerată:

$$e_j * e_k = c_{jk}^i e_i.$$

Pentru orice $a, b \in A$, avem:

$$\begin{aligned} \|a * b\| &= \sum_{i=1}^{n} \left|C_{jk}^i a^j b^k\right| \leq \left|\sum_{i=1}^{n} C_{jk}^i a^j b^k\right| \leq \sum_{i=1}^{n} \left|C_{jk}^i\right| \cdot \left|a^j\right| \cdot \left|b^k\right| \leq \\ &\leq nM \|a\| \cdot \|b\|, \end{aligned}$$

unde $M = \sup\limits_{i,j,k} \left\|C_{jk}^i\right\|$. În plus, amintim că:

$$\begin{aligned} \|xa\| &\leq \|x\| \cdot \|a\|,\ (\forall)x \in EndV,\ (\forall)a \in A, \\ \|xy\| &\leq \|x\| \cdot \|y\|,\ (\forall)x, y \in EndV. \end{aligned}$$

Pe de altă parte, avem:

$$x^r(a*b)=\sum_{s=0}^{r}C_r^s\left(x^sa\right)*\left(x^{r-s}b\right), (\forall)x\in G(A),\ (\forall)a,b\in A.$$

Ne propunem să arătăm că, oricare ar fi $x\in g(A)$, elementul

$$e^x=I+\frac{x}{1!}+...+\frac{x^r}{r!}+...$$

se găseşte în $G(A)$. În adevăr, pentru orice $a,b\in A$, avem:

$$\begin{aligned}(e^xa)*(e^xb) &= \sum_{p,q=0}^{\infty}\left(\frac{x^p}{p!}a\right)*\left(\frac{x^q}{q!}b\right)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{r!}\sum_{s=0}^{r}C_r^s\left(x^sa\right)*\left(x^{r-s}b\right)= \\ &= \sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{r!}x^r\left(a*b\right)=e^x\left(a*b\right).\end{aligned}$$

De aici rezultă că subgrupul cu un parametru

$$t\longrightarrow e^{tx}$$

al lui $GL(V)$ este, pentru $x\in g(A)$, de asemenea subgrup cu un parametru al grupului $G(A)$.

1.9.5. <u>PROPOZIŢIE</u>. *Fie H_1 şi H_2 două subgrupuri închise ale unui grup Lie G.*

Atunci:

i) *H_1, H_2 şi $H_1\cap H_2$ sunt grupuri Lie,*

ii) *$L\left(H_1\cap H_2\right)=L(H_1)\cap L(H_2)$.*

<u>Demonstraţie</u>. i) Se aplică propoziţia 1.6.

ii) Vom demonstra egalitatea prin dublă incluziune.

Fie $h\in L\left(H_1\cap H_2\right)$. Folosind propoziţia 1.3 rezultă că există o curbă analitică $\alpha:\mathbb{R}\to G$ cu $\alpha(0)=e$, $\alpha(\mathbb{R})\subset H_1\cap H_2$, $\dot{\alpha}(0)=h$. Din $\alpha(\mathbb{R})\subset H_1\cap H_2$ rezultă că $\alpha(\mathbb{R})\subset H_1$ şi $\alpha(\mathbb{R})\subset H_2$, deci $\alpha\in S(H_1)$ şi $\alpha\in S(H_2)$. Cum $h=\dot{\alpha}(0)$ rezultă că $h\in L(H_1)$ şi $h\in L(H_2)$, adică $h\in L(H_1)\cap L(H_2)$. Am obţinut:

$$L(H_1 \cap H_2) \subset L(H_1) \cap L(H_2).$$

Fie acum $h \in L(H_1) \cap L(H_2)$. Considerăm curba $c : \mathbb{R} \to G$, $c(t) = \exp th$. Este evident că c este aplicaţie analitică. Avem $c(0) = e$ şi $\dot{c}(0) = h$. Să arătăm că imaginea aplicaţiei c este inclusă în $H_1 \cap H_2$. Din $h \in L(H_1) \cap L(H_2)$ obţinem $h \in L(H_1)$ şi $h \in L(H_2)$. Aplicând propoziţia 1.3, obţinem $\exp th \in H_1$ şi $\exp th \in H_2$, $(\forall) t \in \mathbb{R}$, deci $\exp th \in H_1 \cap H_2$, $(\forall) t \in \mathbb{R}$. Prin urmare, $c(t) \in H_1 \cap H_2$, $(\forall) t \in \mathbb{R}$. Rezultă că $c \in S(H_1 \cap H_2)$, şi cum $\dot{c}(0) = h$, obţinem $h \in L(H_1 \cap H_2)$.

Prin urmare, avem:

$$L(H_1 \cap H_2) = L(H_1) \cap L(H_2).$$

1.9.6. Fie G un grup Lie şi fie $AutG$ grupul automorfismelor grupului Lie G. Notăm cu $L(G)$ algebra Lie a grupului Lie G. Prin **automorfism al algebrei Lie** $L(G)$ înţelegem un izomorfism al algebrei Lie $L(G)$ pe ea însăşi. Mulţimea automorfismelor algebrei Lie $L(G)$, împreună cu operaţia de compunere a automorfismelor, constituie un grup notat $AutL(G)$.

PROPOZIŢIE. i) *$AutL(G)$ este subgrup Lie al grupului Lie $GL(L(G))$.*

ii) *Algebra Lie a grupului Lie $AutL(G)$ este algebra Lie a derivărilor algebrei Lie $L(G)$.*

Demonstraţie. i) Vom arăta că $AutL(G)$ este subgrup închis al grupului Lie $GL(L(G))$.

Fie A, $B \in AutL(G)$, deci A, B sunt liniare, inversabile şi $A([X,Y]) = [A(X), A(Y)]$, $B([X,Y]) = [B(X), B(Y)]$. Este evident că $A \circ B$ este liniară şi inversabilă. În plus, avem:

$$A \circ B([X,Y]) = A(B([X,Y])) = A([B(X), B(Y)]) = [A \circ B(X), A \circ B(Y)].$$

Rezultă că $A \circ B \in AutL(G)$. Pentru orice $X = A(X')$, $Y = A(Y')$ avem

$$\begin{aligned} A^{-1}([X,Y]) &= A^{-1}([A(X'), A(Y')]) = A^{-1} \circ A([X',Y']) = [X',Y'] = \\ &= [A^{-1} \circ A(X'), A^{-1} \circ A(Y')] = [A^{-1}(X), A^{-1}(Y)], \end{aligned}$$

deci $A^{-1} \in AutL(G)$ şi deci $AutL(G)$ este subgrup al grupului $GL(L(G))$.

Să arătăm acum că $AutL(G)$ este mulţime închisă în $GL(L(G))$. Fie un şir $(A_i)_{i\geq 1}$ de elemente din $AutL(G)$, convergent către un element $A \in GL(L(G))$. Avem

$$\begin{aligned} A([X,Y]) &= \lim_{i\to\infty} A_i([X,Y]) = \lim_{i\to\infty} [A_i(X), A_i(Y)] = \\ &= \left[\lim_{i\to\infty} A_i(X), \lim_{i\to\infty} A_i(Y)\right] = [A(X), A(Y)], \end{aligned}$$

deci $A \in AutL(G)$, adică $AutL(G)$ este subgrup închis în $GL(L(G))$. Prin urmare, $AutL(G)$ este grup Lie.

ii) Vrem să dovedim egalitatea $L(AutL(G)) = DerL(G)$.

Ştim că dacă H este subgrup închis al grupului Lie G, atunci

$$h \in L(H) \Leftrightarrow \exp th \in H,\ (\forall)t \in \mathbb{R}.$$

Fie $D \in L(AutL(G)) \Leftrightarrow \exp tD \in AutL(G)$, $(\forall)t \in \mathbb{R}$. Pentru orice $X, Y \in L(G)$ şi orice $t \in \mathbb{R}$, avem:

$$(\exp tD)([X,Y]) = [(\exp tD)(X), (\exp tD)(Y)] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} D^m([X,Y]) = \left[\sum_{p=0}^{\infty} \frac{t^p}{p!} D^p(X), \sum_{q=0}^{\infty} \frac{t^q}{q!} D^q(Y)\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} D^m([X,Y]) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{p+q=m} \frac{t^{p+q}}{p!q!} [D^p(X), D^q(Y)] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} D^m([X,Y]) = \sum_{m=0}^{\infty} t^m \sum_{p=0}^{m} \frac{1}{p!(m-p)!} \left[D^p(X), D^{m-p}(Y)\right].$$

De aici rezultă $(\forall)X, Y \in L(G)$

$$D^m([X,Y]) = m! \sum_{p=0}^{m} \frac{1}{p!(m-p)!} \left[D^p(X), D^{m-p}(Y)\right].$$

Pentru $m = 1$, obţinem

$$D([X,Y]) = [X, D(Y)] + [D(X), Y],$$

deci D este o derivare a algebrei Lie $L(G)$. Am obţinut

$$L(AutL(G)) \subset DerL(G).$$

Fie acum $D \in DerL(G)$. Avem

$$D([X,Y]) = [X, D(Y)] + [D(X), Y], \ (\forall) X, Y \in L(G).$$

Vom stabili prin inducţie egalitatea

$$(*) \quad D^m([X,Y]) = \sum_{p=0}^{m} \frac{m!}{p!(m-p)!} \left[D^p(X), D^{m-p}(Y)\right].$$

Pentru $m = 1$ egalitatea $(*)$ este adevărată, deoarece D este o derivare a algebrei Lie $L(G)$. Presupunând egalitatea $(*)$ adevărată pentru m, deducem:

$$D^{m+1}([X,Y]) = D(D^m([X,Y])) = D\left(\sum_{p=0}^{m} \frac{m!}{p!(m-p)!} \left[D^p(X), D^{m-p}(Y)\right]\right) =$$

$$= \sum_{p=0}^{m} \frac{m!}{p!(m-p)!} D\left(\left[D^p(X), D^{m-p}(Y)\right]\right) =$$

$$= \sum_{p=0}^{m} \frac{m!}{p!(m-p)!} \left\{\left[D^p(X), D^{m-p+1}(Y)\right] + \left[D^{p+1}(X), D^{m-p}(Y)\right]\right\} =$$

$$= \sum_{p=0}^{m} \frac{m!}{p!(m-p)!} \left[D^p(X), D^{m-p+1}(Y)\right] + \sum_{p=0}^{m} \frac{m!}{p!(m-p)!} \left[D^{p+1}(X), D^{m-p}(Y)\right] =$$

$$= \sum_{p=1}^{m} \frac{m!}{p!(m-p)!} \left[D^p(X), D^{m-p+1}(Y)\right] + \left[X, D^{m+1}(Y)\right] + \left[D^{m+1}(X), Y\right] +$$

$$+ \sum_{p=0}^{m-1} \frac{m!}{p!(m-p)!} \left[D^{p+1}(X), D^{m-p}(Y)\right] = \left[X, D^{m+1}(Y)\right] + \left[D^{m+1}(X), Y\right] +$$

$$+ \sum_{p=1}^{m} \frac{m!}{p!(m-p)!} \left[D^p(X), D^{m-p+1}(Y)\right] + \sum_{s=1}^{m} \frac{m!}{(s-1)!(m-s+1)!} \left[D^s(X); D^{m-s+1}(Y)\right.$$

$$= \left[X, D^{m+1}(Y)\right] + \left[D^{m+1}(X), Y\right] + \sum_{p=1}^{m} (\frac{m!}{p!(m-p)!} +$$

$$+ \frac{m!}{(p-1)!(m-p+1)!}) \left[D^p(X), D^{m-p+1}(Y)\right] = \left[X, D^{m+1}(Y)\right] + \left[D^{m+1}(X), Y\right] +$$

$$+ \sum_{p=1}^{m} \frac{(m+1)!}{p!(m-p+1)!} \left[D^p(X), D^{m-p+1}(Y)\right] = \sum_{p=0}^{m+1} \frac{(m+1)!}{p!(m-p+1)!} \left[D^p(X), D^{m-p+1}(Y)\right]$$

şi deci egalitatea $(*)$ este adevărată, $(\forall) m \in \mathbb{N}$. Scriem $(*)$ sub forma

$$\frac{1}{m!}D^m([X,Y]) = \sum_{p=0}^{m} \frac{1}{p!(m-p)!}\left[D^p(X), D^{m-p}(Y)\right],$$

sau, pentru $(\forall)t \in \mathbb{R}$,

$$\frac{t^m}{m!}D^m([X,Y]) = \sum_{p=0}^{m} \frac{t^m}{p!(m-p)!}\left[D^p(X), D^{m-p}(Y)\right].$$

De aici rezultă

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!}D^m([X,Y]) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{m} \frac{t^m}{p!(m-p)!}\left[D^p(X), D^{m-p}(Y)\right],$$

sau

$$(\exp tD)([X,Y]) = \left[\sum_{p=0}^{\infty} \frac{t^p}{p!}D^p(X), \sum_{q=0}^{\infty} \frac{t^q}{q!}D^q(Y)\right].$$

Avem deci egalitatea

$$(\exp tD)([X,Y]) = [(\exp tD)(X), (\exp tD)(Y)].$$

Este evident că $\exp tD$ este liniară. În plus, $\exp tD$ este inversabilă. În adevăr, din egalitatea

$$\exp tD \exp(-tD) = e$$

rezultă că $\exp tD$ este inversabilă, şi $(\exp tD)^{-1} = \exp(-tD)$. Rezultă că $\exp tD \in AutL(G)$, $(\forall)t \in \mathbb{R}$, adică $D \in L(AutL(G))$. Am obţinut

$$DerL(G) \subset L(AutL(G)).$$

Prin urmare avem: $DerL(G) = L(AutL(G))$.

§ 2. GRUPURI LIE CLASICE ŞI ALGEBRELE LOR LIE

2.1. SUBGRUPURI ÎNCHISE ALE GRUPULUI LIE $GL(n, \mathbb{R})$.

2.1.1. Grupul liniar special real.

PROPOZIŢIE. i) *Mulţimea*

$$SL(n, \mathbb{R}) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$$

poate fi organizată ca grup Lie (numit **grupul liniar special real***).*

ii) *Algebra Lie $L(SL(n, \mathbb{R}))$ a grupului Lie $SL(n, \mathbb{R})$ este algebra Lie $sl(n, \mathbb{R})$ a matricelor de urmă nulă din $gl(n, \mathbb{R})$.*

Demonstraţie. i) Este evident că $SL(n, \mathbb{R})$ este o mulţime închisă în varietatea $GL(n, \mathbb{R})$. În plus, $SL(n, \mathbb{R})$ este subgrup al grupului $GL(n, \mathbb{R})$, deoarece dacă $A, B \in SL(n, \mathbb{R})$, atunci $\det(AB^{-1}) = \det A \det B^{-1} = 1$, deci $AB^{-1} \in SL(n, \mathbb{R})$. Conform teoremei lui Cartan, rezultă că $SL(n, \mathbb{R})$ este grup Lie.

ii) Am văzut în cap. I, ex. 8.15.2 că algebra Lie $gl(n, \mathbb{R})$ a grupului Lie $GL(n, \mathbb{R})$ este algebra matricelor pătratice de ordinul n, în care se introduce croşetul:

$$[A, B] = AB - BA.$$

Observăm că dacă matricele A şi B sunt de urmă nulă atunci matricea $[A, B]$ este, de asemenea, de urmă nulă. Prin urmare, putem considera subalgebra Lie $sl(n, \mathbb{R})$ a algebrei Lie $gl(n, \mathbb{R})$ constituită din toate matricele de urmă nulă. Vom arăta că $sl(n, \mathbb{R}) = L(SL(n, \mathbb{R}))$.

Pentru a arăta că $L(SL(n, \mathbb{R})) = sl(n, \mathbb{R})$ considerăm o curbă analitică

$$C : \mathbb{R} \to SL(n, \mathbb{R}),$$

cu

$$C(0) = I_n = \left\|\delta_j^i\right\|.$$

Deoarece $C(t) \in SL(n, \mathbb{R})$ rezultă

$$\det C(t) = \det \left\| C^i_j(t) \right\| = 1,$$

deci

$$\frac{d}{dt}\left(\det \left\| C^i_j(t) \right\|\right) = 0$$

sau, pe larg:

$$\begin{vmatrix} \overset{\bullet}{C}{}^1_1(t) & \dots & \overset{\bullet}{C}{}^1_n(t) \\ C^2_1(t) & \dots & C^2_n(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ C^n_1(t) & \dots & C^n_n(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} C^1_1(t) & \dots & C^1_n(t) \\ \overset{\bullet}{C}{}^2_1(t) & \dots & \overset{\bullet}{C}{}^2_n(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ C^n_1(t) & \dots & C^n_n(t) \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} C^1_1(t) & \dots & C^1_n(t) \\ C^2_1(t) & \dots & C^2_n(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ \overset{\bullet}{C}{}^n_1(t) & \dots & \overset{\bullet}{C}{}^n_n(t) \end{vmatrix} = 0.$$

Făcând $t = 0$ şi ţinând seama de faptul că $C^i_j(0) = \delta^i_j$, rezultă:

$$\begin{vmatrix} \overset{\bullet}{C}{}^1_1(0) & \dots & \overset{\bullet}{C}{}^1_n(0) \\ 0 \quad 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \overset{\bullet}{C}{}^2_1(0) & \dots & \overset{\bullet}{C}{}^2_n(0) \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & & 1 \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} 1 & & 0 \\ 0 \quad 1 & & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ \overset{\bullet}{C}{}^n_1(0) & \dots & \overset{\bullet}{C}{}^n_n(0) \end{vmatrix} = 0.$$

sau

$$\overset{\bullet}{C}{}^1_1(0) + \dots + \overset{\bullet}{C}{}^n_n(0) = 0. \tag{2.1}$$

Deci vectorul $\overset{\bullet}{C}(0)$ tangent în punctul I_n la grupul $SL(n, \mathbb{R})$ verifică (2.1). Rezultă că $L(SL(n, \mathbb{R})) \subset sl(n, \mathbb{R})$.

Considerăm acum o matrice de urmă nulă $A \in sl(n, \mathbb{R})$. Este evident că $A \in gl(n, \mathbb{R})$. Am văzut că aplicaţia exponenţială a grupului Lie $GL(n, \mathbb{R})$

$$\exp : gl(n, \mathbb{R}) \to GL(n, \mathbb{R})$$

se scrie

$$A \to \exp A = e^A = I_n + \frac{A}{1!} + ... + \frac{A^r}{r!} + ...$$

Considerăm curba analitică

$$c : \mathbb{R} \to GL(n, \mathbb{R}),$$

definită prin:

$$c(t) = e^{At}.$$

Avem $c(0) = I_n$. Notăm

$$w(t) = \det c(t) = \det e^{At}.$$

Este cunoscută ([23], pag. 140) următoarea formula a lui Liouville:

$$\frac{d}{dt} w(t) = (TrA) w(t).$$

Deoarece $TrA = 0$, din ultima formulă rezultă $w(t) = k$ (=const.), adică:

$$\det e^{At} = k, \ (\forall) t \in \mathbb{R}.$$

Pentru $t = 0$, din ultima egalitate obţinem:

$$k = \det e^{A \cdot 0} = \det I_n = \det \left\| \delta^i_j \right\| = 1,$$

deci $\det e^{At} = 1$, adică $e^{At} \in SL(n, \mathbb{R})$. Prin urmare, curba analitică

$$c : t \in \mathbb{R} \to c(t) = e^{At} \in GL(n, \mathbb{R})$$

are imaginea în $SL(n, \mathbb{R}) \subset GL(n, \mathbb{R})$. Curba analitică

$$c : \mathbb{R} \to GL(n, \mathbb{R})$$

verifică condiţiile:

$$\begin{aligned} c(0) &= I_n, \operatorname{Im} c \subset SL(n, \mathbb{R}) \\ \dot{c}(0) &= \frac{dc}{dt}\Big|_{t=0} = \frac{de^{At}}{dt}\Big|_{t=0} = A. \end{aligned}$$

Rezultă că $A \in L(SL(n, \mathbb{R}))$, deci $sl(n, \mathbb{R}) \subset L(SL(n, \mathbb{R}))$. Prin urmare, $L(SL(n, \mathbb{R})) = sl(n, \mathbb{R})$. Dimensiunea grupului Lie $SL(n, \mathbb{R})$ este $\dim SL(n, \mathbb{R}) = \dim L(SL(n, \mathbb{R})) = \dim sl(n, \mathbb{R}) = n^2 - 1$.

Observaţie. Fie aplicaţia $h : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{n^2}$, $h(a) = (b_1, b_2, ..., b_{n^2})$, unde $a = (a_{ij})$, $b_{i+(j-1)n} = a_{ij}$. Este uşor de văzut că h este bijecţie. Această bijecţie permite să dotăm mulţimea $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ cu o topologie în raport cu care h este homeomorfism.

În plus, rezultă că există o unică structură analitică pe $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, în raport cu care h devine difeomorfism.

2.1.2. Grupul ortogonal.

PROPOZIŢIE. i) *Mulţimea:*

$$O(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid A^T A = I_n\}$$

($^T A$ este transpusa matricei A) poate fi organizată ca grup Lie (numit **grupul ortogonal**).

ii) *Algebra Lie $L(O(n))$ este algebra Lie $o(n)$ a matricelor antisimetrice din $gl(n, \mathbb{R})$.*

Demonstraţie. i) Este evident că $I_n \in O(n)$. Dacă $A, B \in O(n)$, avem:

$$(AB)^T(AB) = AB^T B^T A = AI_n\, {}^T A = A^T A = I_n,$$

deci $AB \in O(n)$. Din $A^T A = I_n$, rezultă ${}^T A = A^{-1}$. Ultima egalitate, împreună cu ${}^T(A^T A) = I_n$, ne conduc la ${}^T(A^{-1})A^{-1} = I_n$, deci $A^{-1} \in O(n)$. Rezultă că $O(n)$ este subgrup al grupului $GL(n, \mathbb{R})$. În continuare vom ţine seama de ultima observaţie. Aplicaţia $\Phi : GL(n,\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\Phi(A) = A^T A$, este continuă. Rezultă că $\Phi^{-1}(\{I_n\}) = O(n)$ este mulţime închisă în $GL(n,\mathbb{R})$. Deoarece $O(n)$ este subgrup închis în grupul Lie $GL(n,\mathbb{R})$, folosind teorema lui Cartan, obţinem că $O(n)$ este subgrup Lie.

ii) Observăm că dacă matricele A şi B sunt antisimetrice, atunci şi matricea

$$[A,B] = AB - BA$$

este antisimetrică. Prin urmare, putem considera subalgebra Lie $o(n)$ a algebrei Lie $gl(n,\mathbb{R})$, constituită din toate matricele antisimetrice. Vom arăta că $L(O(n)) = o(n)$.

Pentru a arăta că $L(O(n)) \subset o(n)$, considerăm o curbă analitică

$$c : \mathbb{R} \to O(n),$$

cu $c(0) = I_n$. Avem:

$$c(t)^T c(t) = I_n.$$

Prin derivare, se obţine:

$$\dot{c}(t)^T c(t) + c(t)^T \dot{c}(t) = 0$$

sau, folosind faptul că $c(t) = \left\| c^i_j(t) \right\|$, avem:

$$\sum_{i=1}^{n} \dot{c}^i_j(t) c^i_k(t) + \sum_{i=1}^{n} c^i_j(t) \dot{c}^i_k(t) = 0.$$

Pentru $t = 0$, avem $c^i_j(0) = \delta^i_j$, deci

$$\sum_{i=1}^{n} \dot{c}^i_j(0) c^i_k(0) + \sum_{i=1}^{n} c^i_j(0) \dot{c}^i_k(0) = 0,$$

sau

$$\text{(2.2)} \qquad \overset{\bullet k}{c}_j(0) + \overset{\bullet j}{c}_k(0) = 0.$$

Vectorul $\overset{\bullet}{c}(t)$, tangent curbei $c(t)$, ne dă în $t = 0$, matricea $\overset{\bullet}{c}(0) = \left\| \overset{\bullet i}{c}_j(0) \right\|$. Prin urmare, vectorul $\overset{\bullet}{c}(0) = \left\| \overset{\bullet i}{c}_j(0) \right\|$, tangent în I_n la varietatea $O(n)$, verifică (2.2). Rezultă că

$$L(O(n)) \subset o(n).$$

Considerăm acum o matrice $A \in o(n) \subset gl(n, \mathbb{R})$. Am văzut că aplicaţia

$$\exp : gl(n, \mathbb{R}) \to GL(n, \mathbb{R})$$

se scrie

$$A \to \exp A = e^A.$$

Considerăm curba analitică

$$c : t \in \mathbb{R} \mapsto c(t) = \exp At = e^{At} \in Gl(n, \mathbb{R}).$$

Avem $c(0) = I_n$. Vom arăta că curba c are imaginea în $O(n)$. Deoarece matricea A este antisimetrică, avem ${}^T A = -A$, deci ${}^T(At) = -At$. Rezultă:

$$\exp(-At) = \exp^T(At) = e^{T(At)} =^T (e^{At}) =^T (\exp At).$$

Ţinând seama de egalitatea $\exp(-At) =^T (\exp At)$, obţinem:

$$c(t)^T c(t) = (\exp At)^T (\exp At) = \exp At \exp(-At) = \exp(At - At) = \exp 0 = I_n$$

deci $c(t) \in O(n)$. În plus, avem:

$$\overset{\bullet}{c}(0) = \frac{de^{At}}{dt} \Big|_{t=0} = A.$$

Curba analitică

$$c : \mathbb{R} \to GL(n, \mathbb{R})$$

verifică condiţiile:

$$c(0) = I, \ \ \mathrm{Im}\, c \subset O(n), \ \ \overset{\bullet}{c}(0) = A.$$

Rezultă că $A \in L(O(n))$, deci $o(n) \subset L(O(n))$. În concluzie, avem:

$$L(O(n)) = o(n).$$

Dimensiunea grupului Lie $O(n)$ este

$$\dim O(n) = \dim L(O(n)) = \dim o(n) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

2.1.3. Grupul special ortogonal.

PROPOZIŢIE. i) *Mulţimea*

$$SO(n) = \{A \in O(n) \mid \det A = 1\}$$

poate fi organizată ca grup Lie (numit **grupul special ortogonal**).

ii) *Algebra Lie $L(SO(n))$ este algebra Lie $o(n)$ a matricelor antisimetrice din $gl(n, \mathbb{R})$.*

Demonstraţie. Avem $SO(n) = O(n) \cap SL(n, \mathbb{R})$. În continuare se foloseşte propoziţia 1.9.5.

2.1.4. Grupul ortogonal de tip (p, q); $p, q \in \mathbb{N}$, $p + q = n$.

Considerăm forma biliniară simetrică

$$< \ , \ >: \mathbb{R}^{p+q} \times \mathbb{R}^{p+q} \to \mathbb{R}$$

$$(2.3) \qquad < x, y >= -x^1y^1 - ... - x^py^p + x^{p+1}y^{p+1} + ... + x^{p+q}y^{p+q}.$$

Endomorfismele spaţiului $\mathbb{R}^{p+q}$ care invariază forma biliniară (2.3) se numesc **transformări ortogonale de tip** (p, q).

Dacă privim pe x şi y ca vectori coloană, atunci (2.3) se scrie în notaţie matriceală:

$$(2.3') \qquad (< x, y >) =^T xI_{p,q}y, \quad I_{p,q} = \begin{pmatrix} -I_p & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix}$$

În (2.3'), $(< x, y >)$ este o matrice cu o linie şi o coloană.

Dacă A este matricea unei transformări ortogonale generale de tip (p, q), atunci avem:

$$\begin{aligned} < \quad & Ax, Ay >=< x, y >, \quad (\forall)x, y \in \mathbb{R}^{p+q} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \quad & ^T(Ax)I_{p,q}Ay =^T xI_{p,q}y, \quad (\forall)x, y \in \mathbb{R}^{p+q} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \quad & ^Tx^TAI_{p,q}Ay =^T xI_{p,q}y, \quad (\forall)x, y \in \mathbb{R}^{p+q} \Leftrightarrow^T AI_{p,q}A = I_{p,q}. \end{aligned}$$

De aici rezultă că $\det A \neq 0$, deci $A \in GL(p + q, \mathbb{R})$.

PROPOZIŢIE. i) Mulţimea

$$O(p, q) = \{A \in GL(p + q, \mathbb{R}) \mid^T AI_{p,q}A = I_{p,q}\}$$

poate fi structurată ca grup Lie (numit grupul ortogonal de tip (p, q)).

ii) Mulţimea

$$o(p, q) = \{A \in gl(p + q, \mathbb{R}) \mid^T AI_{p,q} + I_{p,q}A = 0\}$$

poate fi structurată ca algebra Lie.

iii) $L(O(p,q)) = o(p,q)$.

Demonstrație. i) Fie $A, B \in O(p,q)$, deci

$$^{T}AI_{p,q}A = I_{p,q} \text{și } ^{T}BI_{p,q}B = I_{p,q}.$$

Rezultă

$$^{T}(AB)I_{p,q}(AB) =^{T} B^{T}AI_{p,q}AB =^{T} BI_{p,q}B = I_{p,q}.$$

Rezultă $AB \in O(p,q)$.

Fie $A \in O(p,q)$, deci $^{T}AI_{p,q}A = I_{p,q}$. Rezultă că $^{T}AI_{p,q} = I_{p,q}A^{-1}$. Avem $^{T}(A^{-1})I_{p,q}A^{-1} = (^{T}A)^{-1^{T}}AI_{p,q} = I_{p,q}$, deci $A^{-1} \in O(p,q)$. Am arătat că $O(p,q)$ este subgrup algebric al grupului $GL(p+q,\mathbb{R})$.

Fie funcția

$$\varnothing : GL(p+q,\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{p+q}(\mathbb{R}), \varnothing(A) =^{T} AI_{p,q}A.$$

Este evident că $\varnothing$ este continuă.
Rezultă că $O(p,q) = \varnothing^{-1}(\{I_{p,q}\})$ este mulțime închisă în $GL(p+q,\mathbb{R})$. Am arătat că $O(p,q)$ este subgrup închis în $GL(p+q,\mathbb{R})$. Rezultă că $O(p,q)$ este grup Lie.

ii) Fie $A, B \in o(p,q)$. Se constată ușor că $A+B$, $\lambda A \in o(p,q)$, $[A,B] \in o(p,q)$, $(\forall)\lambda \in \mathbb{R}$, deci $o(p,q)$ este o subalgebră Lie a algebrei Lie $gl(p+q,\mathbb{R})$.

iii) Pentru a stabili incluziunea $L(O(p,q)) \subset o(p,q)$, considerăm o curbă analitică $c : \mathbb{R} \to O(p,q)$, cu $c(0) = I_{p+q}$. Din $^{T}c(t)I_{p,q}c(t) = I_{p,q}$, deducem

$$^{T}\dot{c}(t)I_{p,q}c(t) +^{T} c(t)I_{p,q}\dot{c}(t) = 0, \ (\forall)t \in \mathbb{R}.$$

În particular, pentru $t = 0$, rezultă

$$(2.4) \qquad ^{T}\dot{c}(0)I_{p,q} + I_{p,q}\dot{c}(0) = 0,$$

unde am folosit $c(0) = I_{p+q} =^{T} c(0)$. Deoarece vectorul $\dot{c}(0)$, tangent în elementul neutru I_{p+q} la varietatea $O(p,q)$, verifică (2.4), rezultă că:

$$(2.5) \qquad L(O(p,q)) \subset o(p,q).$$

Considerăm acum o matrice $A \in o(p,q) \subset gl(p+q,\mathbb{R})$. Ştim că aplicaţia exponenţială a grupului Lie $GL(p+q,\mathbb{R})$ este

$$X \in gl(p+q,\mathbb{R}) \rightarrow \exp X = e^X \in GL(p+q,\mathbb{R}).$$

Considerăm curba analitică

$$c : \mathbb{R} \rightarrow GL(p+q,\mathbb{R}),\ c(t) = \exp tA = e^{tA}.$$

Avem $c(0) = I_{p+q}$. Vom arăta că curba c are imaginea în $O(p,q)$. Observăm că avem formula

$$(2.6) \qquad I_{p,q}A^k = (-1)^k({}^TA)^k I_{p,q},\ (\forall)k \in \mathbb{N}.$$

În adevăr, pentru $k=1$ formula (2.6) este adevărată, deoarece $A \in o(p,q)$. Presupunând (2.6) adevărată, rezultă

$$\begin{aligned} I_{p,q}A^{k+1} &= (I_{p,q}A^k)A = (-1)^k({}^TA)^k(I_{p,q}A) = (-1)^k({}^TA)^k(-{}^TAI_{p,q}) = \\ &= (-1)^{k+1}({}^TA)^{k+1}I_{p,q}, \end{aligned}$$

deci formula (2.6) este adevărată, $(\forall)k \in \mathbb{N}$.
Folosind formula (2.6), rezultă:

$${}^T(\exp tA)I_{p,q} = I_{p,q}\exp(-tA).$$

De aici, rezultă

$${}^Tc(t)I_{p,q}c(t) ={}^T(\exp tA)I_{p,q}(\exp tA) = I_{p,q}\exp(-tA)\exp tA = I_{p,q},$$

ceea ce ne arată că curba c are imaginea în $O(p,q)$. În plus, avem $\dot{c}(0) = A$. Curba analitică $c : \mathbb{R} \rightarrow GL(p+q,\mathbb{R})$ verifică condiţiile

$c(0) = I_{p+q}$, $c(\mathbb{R}) \subset O(p,q)$, $\dot{c}(0) = A$.
Rezultă că $A \in L(O(p,q))$, deci $o(p,q) \subset L(O(p,q))$ şi, folosind (2.5), obţinem: $L(O(p,q)) = o(p,q)$.

Observaţie. i) Avem $O(0,n) = O(n)$.
ii) grupul $O(1,3)$ se numeşte **grupul lui Lorentz,** şi intervine sistematic în teoria relativităţii restrânse.

Exerciţiu. i) Să se determine algebra Lie a grupului Lorentz $O(1,3)$.
ii) Considerăm matricea

$$X = -E_2^1 + I_{1,3}E_1^2 I_{1,3},$$

unde E_j^i sunt matricele din baza canonică a spaţiului vectorial $M_4(\mathbb{R})$. Să se calculeze $\exp X$.

2.1.5. Grupul Lie $GL(n,\mathbb{C})_0 \subset GL(2n,\mathbb{R})$.
În continuare vom nota cu I_n matricea unitate de ordinul n, adică

$$I_n = (\delta_j^i).$$

Considerăm următoarea matrice de ordinul $2n$:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Notăm $GL(n,\mathbb{C})_0 = \{A \in GL(2n,\mathbb{R}) \mid AJ = JA\}$,

$$L = \{A \in gl(2n,\mathbb{R}) \mid AJ = JA\}.$$

PROPOZIŢIE. i) $GL(n,\mathbb{C})_0$ *este subgrup Lie al grupului Lie* $GL(2n,\mathbb{R})$.
ii) L *este subalgebra Lie a algebrei Lie* $gl(2n,\mathbb{R})$.
iii) $L(GL(n,\mathbb{C})_0) = L$.
Demonstraţie. i) Este uşor de văzut că

$$I_{2n} \in GL(n,\mathbb{C})_0.$$

Fie $A, B \in GL(n, \mathbb{C})_0$. Avem $(AB)J = AJB = J(AB)$, deci $AB \in GL(n, \mathbb{C})_0$.

Fie $A \in GL(n, \mathbb{C})_0$. Deoarece $J^2 = -I_{2n}$, rezultă

$$A^{-1}J = (J^{-1}A)^{-1} = (-JA)^{-1} = (-AJ)^{-1} = -J^{-1}A^{-1} = JA^{-1}$$

şi deci $A^{-1} \in GL(n, \mathbb{C})_0$. Prin urmare, $GL(n, \mathbb{C})_0$ este subgrup al grupului $GL(2n, \mathbb{R})$. Deoarece $GL(n, \mathbb{C})_0$ este subgrup închis, conform teoremei lui Cartan, $GL(n, \mathbb{C})_0$ este subgrup Lie.

ii) Pentru orice $A, B \in L$, avem $A + B \in L$, $\lambda A \in L$, $(\forall)\lambda \in \mathbb{R}$, deci L este subspaţiu vectorial al lui $gl(2n, \mathbb{R})$. Pentru $A, B \in L$ avem

$$\begin{aligned}[A, B]J &= (AB - BA)J = ABJ - BAJ = AJB - BJA = JAB - JBA = \\ &= J(AB - BA) = J[A, B]\end{aligned}$$

şi deci $[A, B] \in L$. Prin urmare, L este subalgebră Lie a algebrei Lie $gl(2n, \mathbb{R})$.

iii) Fie $A \in L(GL(n, \mathbb{C})_0)$. Rezultă că există o curbă analitică

$$\alpha : \mathbb{R} \to GL(2n, \mathbb{R}),$$

cu

$$\alpha(0) = I_{2n},\ \dot{\alpha}(0) = A,\ \alpha(\mathbb{R}) \subset GL(n, \mathbb{C})_0.$$

Din egalitatea $\alpha(t)J = J\alpha(t)$, $(\forall)t \in \mathbb{R}$, prin derivare, rezultă $\dot{\alpha}(t)J = J\dot{\alpha}(t)$. Pentru $t = 0$, obţinem $AJ = JA$, adică $A \in L$. Am stabilit incluziunea

$$L(GL(n, \mathbb{C})_0) \subset L.$$

Să stabilim acum incluziunea $L \subset L(GL(n, \mathbb{C})_0)$. Fie $A \in L$. Definim curba

$$\alpha : \mathbb{R} \to GL(2n, \mathbb{R}),\ \alpha(t) = \exp At.$$

Este evident că α este aplicaţie analitică. De asemenea, avem $\alpha(0) = I_{2n}$, $\dot{\alpha}(0) = A$. În plus, deoarece J comută cu puterile lui A şi cu I_{2n}, rezultă:

$$\alpha(t)J = (\exp At)J = J(\exp At) = J\alpha(t).$$

Prin urmare, avem $\alpha(\mathbb{R}) \subset GL(n,\mathbb{C})_0$, ceea ce ne arată că $A \in L(GL(n,\mathbb{C})_0)$. Am arătat că:

$$L \subset L(GL(n,\mathbb{C})_0).$$

Am obţinut egalitatea:

$$L = L(GL(n,\mathbb{C})_0).$$

2.1.6. Grupul liniar general complex.

PROPOZIŢIE. *Fie $GL(n,\mathbb{C})$ grupul multiplicativ al matricelor pătratice nesingulare de ordinul n peste $\mathbb{C}$ ($\mathbb{C}$ este corpul numerelor complexe).*

Atunci:

i) *$GL(n,\mathbb{C})$ este subgrup Lie al grupului Lie $GL(2n,\mathbb{R})$.*

ii) *Algebra Lie a grupului Lie $GL(n,\mathbb{C})$ este algebra Lie $gl(n,\mathbb{C})$ considerată în exemplul 5.2.2 (*ii*), (Cap. I).*

Demonstraţie. i) Fie $A = (a_k^j) \in GL(n,\mathbb{C})$.

Punem

$$a_k^j = b_k^j + ic_k^j \in \mathbb{C},$$

unde $i^2 = -1$, $c_k^j, b_k^j \in \mathbb{R}$. Fie $B = \left(b_k^j\right)$ şi $C = \left(c_k^j\right)$. Considerăm aplicaţia

$$h : GL(n,\mathbb{C}) \to GL(2n,\mathbb{R}),\ h(A) = \begin{pmatrix} B & -C \\ C & B \end{pmatrix}.$$

Vom arăta că h este homomorfism injectiv de grupuri. Deoarece $h(A) = h(A')$ implică $A = A'$, rezultă că h este injectie.

Fie $A = \left(a_k^j\right)$, $A' = \left(a_k'^j\right) \in GL(n, \mathbb{C})$; avem $a_k^j = b_k^j + ic_k^j$, $a_k'^j = b_k'^j + ic_k'^j$. Notăm $B = \left(b_k^j\right)$, $C = \left(c_k^j\right)$, $B' = \left(b_k'^j\right)$, $C' = \left(c_k'^j\right)$. Avem

$$(AA')_k^j = a_r^j a_k'^r = \left(b_r^j + ic_r^j\right)\left(b_k'^r + ic_k'^r\right) = b_r^j b_k'^r - c_r^j c_k'^r + i\left(b_r^j c_k'^r + c_r^j b_k'^r\right).$$

Am obţinut egalitatea

$$AA' = BB' - CC' + i(BC' + CB').$$

Rezultă

$$h(AA') = \begin{pmatrix} BB' - CC' & -BC' - CB' \\ BC' + CB' & BB' - CC' \end{pmatrix}.$$

De asemenea, rezultă:

$$h(A)h(A') = \begin{pmatrix} B & -C \\ C & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B' & -C' \\ C' & B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} BB' - CC' & -BC' - CB' \\ BC' + CB' & BB' - CC' \end{pmatrix}.$$

Am obţinut $h(AA') = h(A)h(A')$, adică h este homomorfism de grupuri.

Din ultima egalitate rezultă $h(I_n) = h\left(AA^{-1}\right) = h(A)h(A^{-1})$, şi cum $h(I_n) = h(I_n + i \cdot 0) = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$, obţinem $\det h(I_n) = 1$. Prin urmare, avem $\det h(A) \neq 0$.

Vom arăta (prin dublă incluziune) că

$$h(GL(n, \mathbb{C})) = GL(n, \mathbb{C})_0.$$

Fie $A \in GL(n, \mathbb{C})$, deci $A = B + iC$, unde $B, C \in GL(n, \mathbb{R})$. Avem

$$\begin{aligned} h(A)J &= \begin{pmatrix} B & -C \\ C & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & B \\ -B & C \end{pmatrix} \\ Jh(A) &= \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B & -C \\ C & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & B \\ -B & C \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Rezultă că $h(A)J = Jh(A)$, deci $h(A) \in GL(n, \mathbb{C})_0$. Am obţinut:

$$h(GL(n, \mathbb{C})) \subset GL(n, \mathbb{C})_0.$$

Fie $A \in GL(n, \mathbb{C})_0 \subset GL(2n, \mathbb{R})$. Avem $A = \begin{pmatrix} B & D \\ C & E \end{pmatrix}$, unde $B, D, C, E \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ şi $\det A \neq 0$. Ştim că $AJ = JA$, deci

$$\begin{pmatrix} B & D \\ C & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & D \\ C & E \end{pmatrix}.$$

Din ultima egalitate, rezultă $\begin{pmatrix} -D & B \\ -E & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & E \\ -B & -D \end{pmatrix}$, de unde obţinem $C = -D$, $B = E$. Avem deci

$$A = \begin{pmatrix} B & -C \\ C & B \end{pmatrix} = h(B + iC), \quad B + iC \in GL(n, \mathbb{C}),$$

$A \in h(GL(n, \mathbb{C}))$, şi deci

$$GL(n, \mathbb{C})_0 \subset h(GL(n, \mathbb{C})).$$

În concluzie, $h(GL(n, \mathbb{C})) = GL(n, \mathbb{C})_0$.
Deci aplicaţia

$$h : GL(n, \mathbb{C}) \to GL(n, \mathbb{C})_0$$

este un homomorfism bijectiv. Rezultă că $GL(n, \mathbb{C})$ se identifică prin h cu $GL(n, \mathbb{C})_0 \subset GL(2n, \mathbb{R})$. Prin urmare, putem considera $GL(n, \mathbb{C})$ ca subgrup Lie al grupului Lie $GL(2n, \mathbb{R})$. Grupul Lie $GL\,(n, \mathbb{C})$ este numit **grupul liniar general complex**.

ii) Considerăm algebra Lie $gl(n, \mathbb{C})$ (a se vedea exemplul 5.2.2, Cap. I), şi fie aplicaţia

$$h : gl(n, \mathbb{C}) \to gl(2n, \mathbb{R}), \; h(A) = h(C + iD) = \begin{pmatrix} C & -D \\ D & C \end{pmatrix},$$

unde $A = C + iD \in gl(n, \mathbb{C})$. Se constată uşor că h este homomorfism injectiv de spaţii vectoriale, şi că avem $h(gl(n, \mathbb{C})) = L$, unde
$L = \{X \in gl(2n, \mathbb{R}) \mid JX = XJ\}$.

Pentru $A = C + iD$, $B = E + iF \in gl(n, \mathbb{C})$, avem:

$$\begin{aligned}
[h(A), h(B)] &= h(A)h(B) - h(B)h(A) = \\
&= \begin{pmatrix} C & -D \\ D & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & -F \\ F & E \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} E & -F \\ F & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C & -D \\ D & C \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} CE - DF & -CF - DE \\ DE + CF & -DF + CE \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} EC - FD & -ED - FC \\ FC + ED & -FD + EC \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} CE - DF - EC + FD & ED + FC - CF - DE \\ DE + CF - FC - ED & -DF + CE + FD - EC \end{pmatrix} = \\
&= h([A, B]).
\end{aligned}$$

Prin urmare, h este izomorfism de algebre Lie între $gl(n, \mathbb{C})$ şi L. Deci
$L(GL(n, \mathbb{C})) \simeq L(GL(n, \mathbb{C})_0) = L \simeq gl(n, \mathbb{C})$.

În concluzie, $L(GL(n, \mathbb{C})) = gl(n, \mathbb{C})$.

2.2. SUBGRUPURI ÎNCHISE ALE GRUPULUI LIE $GL(n, \mathbb{C})$.

În cadrul acestui subparagraf vom considera următoarele subgrupuri Lie:
- grupul liniar special complex,
- grupul unitar,
- grupul special unitar,
- grupul unitar de tip (p, q).

2.2.1. Grupul liniar special complex.

Considerăm mulţimea

$$SL(n, \mathbb{C}) = \{A \in GL(n, \mathbb{C}) \mid \det A = 1\}.$$

Dacă $A, B \in SL(n, \mathbb{C})$, atunci $AB \in GL(n, \mathbb{C})$ şi avem

$$\det(AB) = \det A \det B = 1.$$

Rezultă $AB \in SL(n, \mathbb{C})$.

Din $\det A = 1$, rezultă $\det A^{-1} = 1$, deci $A^{-1} \in SL(n, \mathbb{C})$. Prin urmare, $SL(n, \mathbb{C})$ este subgrup al grupului $GL(n, \mathbb{C})$. Deoarece $SL(n, \mathbb{C})$ este mulţime închisă în varietatea $GL(n,\mathbb{C})$, rezultă că $SL(n,\mathbb{C})$ este subgrup închis al grupului Lie $GL(n,\mathbb{C})$ şi, conform teoremei lui Cartan, $SL(n,\mathbb{C})$ este subgrup Lie (numit **grupul liniar special complex**). Algebra Lie a grupului Lie $SL(n,\mathbb{C})$ este

$$L(SL(n,\mathbb{C})) = sl(n,\mathbb{C}) = \{A \in gl(n,\mathbb{C}) \mid \text{Tr}\, A = 0\}.$$

2.2.2. Grupul unitar. Fie mulţimea

$$U(n) = \{A \in GL(n,\mathbb{C}) \mid A^{-1} = \widetilde{A}\},$$

unde $\widetilde{A}$ este conjugata matricei transpuse lui A. Dacă $A, B \in U(n)$, avem:

$$\begin{aligned} \widetilde{AB} &= \overline{{}^T(AB)} = \overline{{}^TB\,{}^TA} = \overline{{}^TB}\;\overline{{}^TA} = \widetilde{B}\widetilde{A} = B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1}, \\ \widetilde{A^{-1}} &= \overline{{}^TA^{-1}} = \overline{({}^TA)^{-1}} = \overline{({}^TA)}^{-1} = \widetilde{A}^{-1} = (A^{-1})^{-1}. \end{aligned}$$

Rezultă că $AB \in U(n)$ şi $A^{-1} \in U(n)$. Prin urmare, $U(n)$ este subgrup al grupului $GL(n,\mathbb{C})$. În plus, $U(n)$ este mulţime închisă în varietatea $GL(n,\mathbb{C})$. Conform teoremei lui Cartan $U(n)$ este subgrup Lie al grupului Lie $GL(n,\mathbb{C})$ (numit **grupul unitar**). Algebra Lie a grupului Lie $U(n)$ este

$$L(U(n)) = u(n) = \{A \in gl(n,\mathbb{C}) \mid A + \widetilde{A} = 0\}.$$

2.2.3. Grupul special unitar. Fie mulţimea

$$SU(n) = \{A \in U(n) \mid \det A = 1\}.$$

Se constată cu uşurinţă că $SU(n)$ este subgrup închis al grupului Lie $U(n)$. Folosind teorema lui Cartan rezultă că $SU(n)$ este subgrup Lie (numit **grupul special unitar**). Deoarece $SU(n) = SL(n,\mathbb{C}) \cap U(n)$, rezultă $L(SU(n)) = L(SL(n,\mathbb{C})) \cap L(U(n))$, şi deci algebra Lie a grupului Lie $SU(n)$ este

$$L(SU(n)) = su(n) = \{A \in gl(n, \mathbb{C}) \mid \mathrm{Tr}\, A = 0, \quad A + \widetilde{A} = 0\},$$

unde $\widetilde{A}$ este conjugata matricei transpuse lui A.

2.2.4. Grupul unitar de tip (p, q). Definim forma biliniară

$$< \ , \ >: \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$$

prin

$$(2.7) \quad < x, y >= -x^1\overline{y}^1 - \ldots - x^p\overline{y}^p + x^{p+1}\overline{y}^{p+1} + \ldots + x^{p+q}\overline{y}^{p+q},$$

unde $p + q = n$; $x, y \in \mathbb{C}^n$.

Dacă privim pe x şi y ca vectori coloană, atunci (2.7) se scrie în notaţie matriceală

$$(2.7') \quad (< x, y >) = {}^T x I_{p,q} \overline{y}, \quad I_{p,q} = \begin{pmatrix} -I_p & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix}.$$

Endomorfismele spaţiului $\mathbb{C}^n$, care invariază forma biliniară (2.7), se numesc **transformări unitare de tip** (p, q). Notăm cu A matricea asociată unei astfel de transformări. Avem $< Ax, Ay >=< x, y >$, $(\forall) x, y \in \mathbb{C}^n$, sau ${}^T(Ax) I_{p,q} \overline{Ay} = {}^T x I_{p,q} \overline{y}$, $(\forall) x, y \in \mathbb{C}^n$, ceea ce implică

$${}^T x {}^T A I_{p,q} \overline{A} \overline{y} = {}^T x I_{p,q} \overline{y}, \ (\forall) x, y \in \mathbb{C}^n.$$

De aici, rezultă: ${}^T A I_{p,q} \overline{A} = I_{p,q}$. Ultima egalitate implică $\det A \neq 0$, deci $A \in GL(n, \mathbb{C})$.

PROPOZIŢIE. i) *Mulţimea*

$$U(p, q) = \{A \in GL(n, \mathbb{C}) \mid {}^T A I_{p,q} \overline{A} = I_{p,q}\}$$

poate fi organizată ca grup Lie (numit grupul unitar de tip (p, q)), unde $p, q \in \mathbb{N}$ şi $n = p + q$.

ii) *Mulţimea*

$$u(p,q) = \{A \in gl(n,\mathbb{C}) \mid {}^T A I_{p,q} + I_{p,q}\overline{A} = 0\}$$

poate fi structurată ca algebră Lie, unde $p + q = n$.

iii) $L(U(p,q)) = u(p,q)$.

Demonstraţie. i) Notăm $p + q = n$; considerăm funcţia

$$\varnothing : GL(n,\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \varnothing(A) = {}^T A I_{p,q}\overline{A}.$$

Este evident că $\varnothing$ este continuă. Rezultă că $U(p,q) = \varnothing^{-1}(\{I_{p,q}\})$ =mulţime închisă în $GL(n,\mathbb{C})$. Pentru $A, B \in U(p,q)$, avem

$${}^T(AB)I_{p,q}\overline{AB} = {}^T B\, {}^T A I_{p,q}\overline{A}\,\overline{B} = {}^T B I_{p,q}\overline{B} = I_{p,q},$$

deci $AB \in U(p,q)$. Pe de altă parte, din $A \in U(p,q)$, rezultă

$${}^T A I_{p,q}\overline{A} = I_{p,q} \quad \text{sau} \quad {}^T A I_{p,q} = I_{p,q}\overline{A}^{-1}.$$

Folosind ultima egalitate, obţinem:

$${}^T(A^{-1})I_{p,q}\overline{A}^{-1} = ({}^T A)^{-1} I_{p,q}\overline{A}^{-1} = ({}^T A)^{-1}\, {}^T A I_{p,q} = I_{p,q}.$$

Rezultă $A^{-1} \in U(p,q)$, deci $U(p,q)$ este subgrup închis al grupului $GL(n,\mathbb{C})$.

Observăm că dacă $p = 0$ şi $q = n$, atunci $I_{0,n} = I_n$ şi $U(0,n) = U(n)$.

ii) Este uşor de văzut că dacă $A, B \in u(p,q)$, atunci $A + B$, λA, $[A, B] \in u(p,q)$, $(\forall)\lambda \in \mathbb{R}$, deci $u(p,q)$ este subalgebră Lie a algebrei Lie $gl(p+q,\mathbb{C})$.

iii) Se arată (prin dublă incluziune) că $L(U(p,q)) = u(p,q)$.

2.3. GRUPURI SIMPLECTICE.

2.3.1. Grupul simplectic real.

Prin **structură simplectică** pe un spaţiu vectorial real V ($\dim V = 2n$) înţelegem o aplicaţie $\mathbb{R}$−biliniară $<\ ,\ >: V \times V \to \mathbb{R}$, care îndeplineşte următoarele condiţii:

(i) este antisimetrică, adică $< x, y > + < y, x >= 0$, $(\forall)x, y \in V$,
(ii) este nedegenerată, adică dacă $< x, y >= 0$, $(\forall)y \in V$, atunci $x = 0$.
Dacă $V = \mathbb{R}^{2n}$, definim **grupul simplectic real**

$$Sp(n, \mathbb{R}) = \{A \in GL(2n, \mathbb{R}) \mid < Ax, Ay >=< x, y >, \ (\forall)x, y \in \mathbb{R}^{2n}\}.$$

Considerăm în $\mathbb{R}^{2n}$ o bază $\{e_1, ..., e_{2n}\}$ astfel încât

$$< e_i, e_j >= \begin{cases} 1, \text{ dacă } j - i = n \\ -1, \text{ dacă } i - j = n \\ 0, \text{ dacă } j - i \neq \pm n. \end{cases}$$

Atunci matricea structurii simplectice este $J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$, unde I_n este matricea unitate de ordinul n. Rezultă

$$Sp(n, \mathbb{R}) = \{A \in GL(2n, \mathbb{R}) \mid ^T AJA = J\},$$

unde ^TA este transpusa matricei A.

În cele ce urmează ne propunem să arătăm că mulţimea $Sp(n, \mathbb{R})$ poate fi organizată ca grup Lie, şi apoi să determinăm algebra Lie a grupului Lie $Sp(n, \mathbb{R})$.

Fie $A, B \in Sp(n, \mathbb{R})$, deci $^TAJA =^T BJB = J$. De aici rezultă

$$^T(AB)J(AB) =^T B(^TAJA)B =^T BJB = J,$$

deci $AB \in Sp(n, \mathbb{R})$. Pe de altă parte,

$$^T(A^{-1})J(A^{-1}) = (^TA)^{-1}(JA^{-1}) = (^TA)^{-1}(^TAJ) = J,$$

de unde rezultă că $A^{-1} \in Sp(n, \mathbb{R})$.

Fie $A_i \in Sp(n, \mathbb{R})$, $i \in \{1, 2, ...\}$, cu $\lim_{i\to\infty} A_i = A$. Din relaţiile

$$^TA_iJA_i = J,$$

prin trecere la limită, obţinem

$$^T A J A = J,$$

adică $A \in Sp(n, \mathbb{R})$. Prin urmare, $Sp(n, \mathbb{R})$ este subgrup închis al grupului Lie $GL(2n, \mathbb{R})$. Conform teoremei lui Cartan rezultă că $Sp(n, \mathbb{R})$ este grup Lie (numit **grupul simplectic real**).

Notăm

$$sp(n, \mathbb{R}) = \{A \in gl(2n, \mathbb{R}) \mid ^T AJ + JA = 0\}.$$

Observăm că dacă $A, B \in sp(n, \mathbb{R})$, deci dacă

$$^T AJ + JA = 0, \ ^T BJ + JB = 0,$$

atunci $[A, B] = AB - BA \in sp(n, \mathbb{R})$. În adevăr, avem

$$\begin{aligned} ^T[A,B]J + J[A,B] &= {}^T(AB - BA)J + J(AB - BA) = \\ &= {}^T B({}^T AJ) - {}^T A({}^T BJ) + J(AB) - J(BA) = \\ &= -{}^T B(JA) + {}^T A(JB) + J(AB) - J(BA) = \\ &= J(BA) - J(AB) + J(AB) - J(BA) = 0. \end{aligned}$$

Aşadar putem considera subalgebra Lie $sp(n, \mathbb{R})$ a algebrei Lie $gl(2n, \mathbb{R})$.

Vom arăta că $L(Sp(n, \mathbb{R})) = sp(n, \mathbb{R})$. Considerăm o curbă analitică

$$c : \mathbb{R} \to Sp(n, \mathbb{R}),$$

cu $c(0) = I_{2n}$. Pentru orice $t \in \mathbb{R}$, avem:

$$^T c(t) J c(t) = J.$$

Rezultă:

$$^T \dot{c}(t) J c(t) + {}^T c(t) J \dot{c}(t) = 0.$$

Pentru $t = 0$, avem:

$$ {}^T\overset{\bullet}{c}(0)J + J\overset{\bullet}{c}(0) = 0. $$

În concluzie, vectorul $\overset{\bullet}{c}(0)$ tangent în I_{2n} la varietatea $Sp(n,\mathbb{R})$ verifică relaţia din definiţia lui $sp(n,\mathbb{R})$.

Fie $X \in L(Sp(n,\mathbb{R}))$. Atunci $\exists$ curba $c : \mathbb{R} \to Sp(n,\mathbb{R})$, astfel încât $X_{c(t)} = \overset{\bullet}{c}(t)$. În particular, $X_{I_{2n}} = \overset{\bullet}{c}(0)$ verifică

$$ {}^T X_{I_{2n}} J + J X_{I_{2n}} = 0. $$

În baza izomorfismului natural între $L(Sp(n,\mathbb{R}))$ şi $T_{I_{2n}}(Sp(n,\mathbb{R}))$, rezultă că X verifică relaţia

$$ {}^T X J + J X = 0, $$

deci $L(Sp(n,\mathbb{R})) \subset sp(n,\mathbb{R})$.

Considerăm acum o matrice $A \in sp(n,\mathbb{R}) \subset gl(2n,\mathbb{R})$. Se ştie că aplicaţia

$$ \exp : gl(2n,\mathbb{R}) \to GL(2n,\mathbb{R}) $$

se scrie

$$ A \to \exp A = e^A. $$

Considerăm curba analitică

$$ c : t \in \mathbb{R} \to c(t) = \exp At = e^{At} \in GL(2n,\mathbb{R}), $$

unde

$$ e^{At} = I_{2n} + \frac{t}{1!}A + \frac{t^2}{2!}A^2 + \ldots $$

Avem $c(0) = I_{2n}$. Vom arăta că imaginea aplicaţiei c este în $Sp(n, \mathbb{R})$. Deoarece $A \in sp(n, \mathbb{R})$, avem:

$$ {}^T A J + J A = 0. $$

Prin inducţie după n se arată că

$$ ({}^T A)^n J = (-1)^n J A^n. $$

Calculăm

$$ \begin{aligned} (\exp({}^T A))J &= (I_{2n} + \frac{t}{1!}\, {}^T A + \frac{t^2}{2!}\, {}^T A^2 + \ldots)J = J - \frac{t}{1} J A + \frac{t^2}{2!} J A^2 + \ldots = \\ &= J \exp(-At). \end{aligned} $$

De aici, rezultă:

$$ \begin{aligned} {}^T c(t) \cdot J \cdot c(t) &= {}^T(\exp(At)) J \exp(At) = (\exp({}^T At)) J \exp(At) = \\ &= J(\exp(-At)) \exp(At) = J. \end{aligned} $$

În concluzie, $c(t) \in Sp(n, \mathbb{R})$. Pe de altă parte,

$$ \dot{c}(0) = \frac{de^{At}}{dt} \,|_{t=0} = A. $$

Curba analitică $c : \mathbb{R} \to GL(2n, \mathbb{R})$ verifică condiţiile $c(0) = I_{2n}$, $\operatorname{Im} c \subset Sp(n, \mathbb{R})$, $\dot{c}(0) = A$. Rezultă că $A \in L(Sp(n, \mathbb{R}))$, deci $sp(n, \mathbb{R}) \subset L(Sp(n, \mathbb{R}))$. Am obţinut: $L(Sp(n, \mathbb{R})) = sp(n, \mathbb{R})$. Avem:

$$ \dim Sp(n, \mathbb{R}) = n(2n + 1). $$

2.3.2. Grupul simplectic de tip (p, q). Fie $p, q \in \mathbb{N}$. Considerăm matricea

$$ K_{p,q} = \begin{pmatrix} 0 & I_{p,q} \\ -I_{p,q} & 0 \end{pmatrix}, \text{ unde } I_{p,q} = \begin{pmatrix} -I_p & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix}. $$

PROPOZIŢIE. i) *Mulţimea*

$$Sp(p,q,\mathbb{R}) = \{A \in GL(2(p+q),\mathbb{R}) \mid^T AK_{p,q}A = K_{p,q}\}$$

poate fi structurată ca grup Lie (numit **grupul simplectic de tip** (p,q)*).*

ii) *Mulţimea*

$$sp(p,q,\mathbb{R}) = \{A \in gl(2(p+q),\mathbb{R}) \mid^T AK_{p,q} + K_{p,q}A = 0\}$$

poate fi structurată ca algebra Lie reală.

iii) $L(Sp(p,q,\mathbb{R})) = sp(p,q,\mathbb{R})$.

Demonstraţie. i) Fie $A, B \in Sp(p,q,\mathbb{R})$, deci

$$A, B \in GL(2(p+q),\mathbb{R})\text{şi } {}^TAK_{p,q}A = K_{p,q},\ {}^TBK_{p,q}B = K_{p,q}.$$

Rezultă ${}^T(AB)K_{p,q}(AB) =^T B\, {}^TAK_{p,q}AB =^T BK_{p,q}B = K_{p,q}$, deci $AB \in Sp(p,q,\mathbb{R})$.

Din $A \in Sp(p,q,\mathbb{R})$, deducem: $K_{p,q}A = ({}^TA)^{-1}K_{p,q}$.
Folosind ultima egalitate, deducem

$${}^T(A^{-1})K_{p,q}A^{-1} = ({}^TA)^{-1}K_{p,q}A^{-1} = K_{p,q}AA^{-1} = K_{p,q},$$

ceea ce ne arată că $A^{-1} \in Sp(p,q,\mathbb{R})$.

Prin urmare, $Sp(p,q,\mathbb{R})$ este subgrup al grupului $GL(2(p+q),\mathbb{R})$.

Definim aplicaţia $\Phi : GL(2(p+q),\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2(p+q)}(\mathbb{R})$, prin

$$\Phi(A) =^T AK_{p,q}A.$$

Este evident că Φ este aplicaţie continuă.
Rezultă că $Sp(p,q,\mathbb{R}) = \Phi^{-1}(\{K_{p,q}\})$ =mulţime închisă în $GL(2(p+q),\mathbb{R})$.
Deoarece $Sp(p,q,\mathbb{R})$ este subgrup închis al grupului Lie $GL(2(p+q),\mathbb{R})$, rezultă că $Sp(p,q,\mathbb{R})$ este grup Lie.

ii) Fie $A, B \in sp(p,q,\mathbb{R})$. Atunci $A+B$, $\lambda A \in sp(p,q,\mathbb{R})$, $(\forall)\lambda \in \mathbb{R}$. În plus, deoarece $K_{p,q}A = -{}^TAK_{p,q}$ şi $K_{p,q}B = -{}^TBK_{p,q}$, rezultă:

$$\begin{aligned} {}^T[A,B]K_{p,q} + K_{p,q}[A,B] &= {}^T(AB-BA)K_{p,q} + K_{p,q}(AB-BA) = \\ &= {}^TB\,{}^TAK_{p,q} - {}^TA\,{}^TBK_{p,q} + K_{p,q}AB - K_{p,q}BA = \\ &= K_{p,q}BA - K_{p,q}AB + K_{p,q}AB - K_{p,q}BA = 0. \end{aligned}$$

Deducem că $[A,B] \in sp(p,q,\mathbb{R})$, şi deci $sp(p,q,\mathbb{R})$ este o subalgebră Lie a algebrei Lie $gl(2(p+q),\mathbb{R})$.

iii) Fie $c : \mathbb{R} \to Sp(p,q,\mathbb{R})$ o curbă analitică, cu $c(0) = I_{2(p+q)}$. Avem:

$$ {}^Tc(t)K_{p,q}c(t) = K_{p,q},\ (\forall)t \in \mathbb{R}. $$

Prin derivare, obţinem:

$$ {}^T\dot{c}(t)K_{p,q}c(t) + {}^Tc(t)K_{p,q}\dot{c}(t) = 0,\ (\forall)t \in \mathbb{R}. $$

Pentru $t = 0$, obţinem:

$$ {}^T\dot{c}(0)K_{p,q} + K_{p,q}\dot{c}(0) = 0. $$

Ultima egalitate ne arată că

$$ L(Sp(p,q,\mathbb{R})) \subset sp(p,q,\mathbb{R}). $$

Procedând ca la punctul 2.3.2, obţinem: $sp(p,q,\mathbb{R}) \subset L(Sp(p,q,\mathbb{R}))$. Prin urmare, avem: $L(Sp(p,q,\mathbb{R})) = sp(p,q,\mathbb{R})$.

2.3.3. Grupul simplectic complex.

Considerăm forma biliniară antisimetrică

$$ \begin{aligned} &< \ , \ >: \mathbb{C}^{2n} \times \mathbb{C}^{2n} \to \mathbb{C}, \text{ definită prin} \\ &< x, y >= x^1y^{n+1} - y^1x^{n+1} + \ldots + x^ny^{2n} - x^{2n}y^n, \end{aligned} $$

sau, în scriere matriceală,

$$(< x, y >) =^T xJy, \text{ unde } J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Endomorfismele spaţiului $\mathbb{C}^{2n}$ care invariază forma $<\ ,\ >$ se numesc **transformări simplectice**. Mulţimea lor se notează $Sp(n, \mathbb{C})$ şi avem:

$$Sp(n, \mathbb{C}) = \{A \in GL(2n, \mathbb{C}) \mid^T AJA = J\}.$$

Se arată că $Sp(n, \mathbb{C})$ poate fi structurat ca grup Lie (numit **grupul simplectic complex**).

Algebra Lie a grupului Lie $Sp(n, \mathbb{C})$ este:

$$L(Sp(n, \mathbb{C})) = sp(n, \mathbb{C}) = \{A \in gl(2n, \mathbb{C}) \mid^T AJ + JA = 0\}.$$

2.4. <u>GRUPURI DE TRANSFORMĂRI CARE INVARIAZĂ O FORMĂ BILINIARĂ NEDEGENERATĂ</u>.

2.4.1. Fie V un spaţiu vectorial real de dimensiune n şi $B : V \times V \to \mathbb{R}$ o formă biliniară nedegenerată. Notăm $H(B) = \{f : V \to V \mid f$ este liniară şi $B(f(x), f(y)) = B(x, y),\ (\forall) x, y \in V\}$. Fie $\{e_1, ..., e_n\}$ o bază în V şi fie $g \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ matricea lui B în baza considerată, deci $g = (g_{ij})$, unde $g_{ij} = B(e_i, e_j)$, $(\forall) i, j \in \{1, ..., n\}$. Condiţia de nedegenerare a lui B se scrie:

$$B(x, y) = 0,\ \ (\forall) y \in V \text{ implică } x = 0.$$

Fie $x = x^i e_i \in V$, astfel încât $B(x, y) = 0$, $(\forall) y \in V$. Scriind y sub forma $y = y^i e_i$, obţinem:

$$\begin{aligned} B(x, y) &= 0,\ (\forall) y \in V \Leftrightarrow B\left(x^i e_i, y^j e_j\right) = 0,\ (\forall)\left(y^1, ..., y^n\right) \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^i y^j B(e_i, e_j) = 0,\ (\forall) y^1, ..., y^n \in \mathbb{R} \Leftrightarrow g_{ij} x^i y^j = 0,\ (\forall) y^1, ..., y^n \\ &\Leftrightarrow g_{ij} x^i = 0,\ j \in \{1, ..., n\}. \end{aligned}$$

Deoarece $B(x, y) = 0$, $(\forall) y \in V$ implică $x = 0$, rezultă că sistemul $g_{ij} x^i = 0$, $j \in \{1, ..., n\}$ are numai soluţia banală $x^1 = ... = x^n = 0$, deci $\det(g_{ij}) \neq 0$, adică g este inversabilă.

Fie $f : V \to V$ o aplicaţie liniară şi fie $A = \left(a^i_j\right)$ matricea lui f în baza $\{e_1, ..., e_n\}$, deci $f(e_i) = a^k_i e_k$. Pentru $x = x^i e_i$, $y = y^j e_j \in V$ avem:

$$\begin{aligned} B(f(x), f(y)) &= B(x,y) \Leftrightarrow B\left(f\left(x^i e_i\right), f\left(y^j e_j\right)\right) = B\left(x^i e_i, y^j e_j\right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^i y^j B\left(a^k_i e_k, a^r_j e_r\right) = x^i y^j g_{ij} \Leftrightarrow x^i y^j a^k_i a^r_j g_{kr} = x^i y^j g_{ij} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left(a^k_i a^r_j g_{kr} - g_{ij}\right) x^i y^j = 0. \end{aligned}$$

Observăm că avem:

$$\begin{aligned} f &\in H(B) \Leftrightarrow B(f(e_i), f(e_j)) = B(e_i, e_j), \quad (\forall)\, i,j \in \{1,...,n\} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow B\left(a^k_i e_k, a^r_j e_r\right) = g_{ij}, \quad (\forall)\, i,j \in \{1,...,n\} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow a^k_i a^r_j g_{kr} = g_{ij}, \quad (\forall)\, i,j \in \{1,...,n\} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left({}^T A g A\right)_{ij} = g_{ij}, \quad (\forall)\, i,j \in \{1,...,n\} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow {}^T A g A = g. \end{aligned}$$

Dacă $f \in H(B)$, atunci ${}^T A g A = g$ şi deoarece g este inversabilă, rezultă că A este inversabilă, deci $A \in GL(n, \mathbb{R})$. Prin urmare $H(B)$ se identifică cu mulţimea matricelor din $GL(n, \mathbb{R})$, cu proprietatea că ${}^T A g A = g$.

Vom nota:

$$\begin{aligned} H(g) &= \left\{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid {}^T A g A = g\right\}; \\ h(g) &= \left\{A \in gl(n, \mathbb{R}) \mid {}^T A g + g A = 0\right\}. \end{aligned}$$

PROPOZIŢIE.
i) *$H(g)$ poate fi structurat ca grup Lie;*
ii) *$h(g)$ este subalgebră Lie a algebrei Lie $gl(n, \mathbb{R})$;*
iii) *Algebra Lie $L(H(g))$ a grupului Lie $H(g)$ este $h(g)$.*
Demonstraţie.
i) Fie $A, B \in H(g)$. Atunci

$${}^T(AB)\, g\, (AB) = {}^T B \left({}^T A g A\right) B = {}^T B g B = g,$$

deci $AB \in H(g)$.

Fie $A \in H(g)$, deci ${}^T A g A = g$. Rezultă

$$^T\left(A^{-1}\right)gA^{-1} = ^T\left(A^{-1}\right)\left(^TAgA\right)A^{-1} = ^T\left(A^{-1}\right)^T Ag\left(AA^{-1}\right) = ^T\left(AA^{-1}\right)g = g,$$

deci $A^{-1} \in H(g)$. Rezultă că $H(g)$ este subgrup al grupului $GL(n, \mathbb{R})$.

Fie $\overline{H(g)}$ închiderea lui $H(g)$ în $GL(n, \mathbb{R})$, şi fie $A \in \overline{H(g)}$. Deoarece $GL(n, \mathbb{R})$ are bază numărabilă, rezultă că există un şir $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de elemente din $H(g)$, cu proprietatea că $A = \lim\limits_{i\to\infty} A_i$. Deoarece $A_i \in H(g)$, rezultă că $^TA_igA_i = g$, oricare ar fi $i \in \mathbb{N}$. Atunci:

$$^TAgA = \left(\lim_{i\to\infty} {^TA_i}\right)g\left(\lim_{i\to\infty} A_i\right) = \lim_{i\to\infty}\left(^TA_igA_i\right) = \lim_{i\to\infty} g = g,$$

deci $A \in H(g)$. Rezultă că $\overline{H(g)} \subset H(g)$, şi cum $H(g) \subset \overline{H(g)}$, avem $H(g) = \overline{H(g)}$, deci $H(g)$ este subgrup închis al lui $GL(n, \mathbb{R})$. Din teorema lui Cartan rezultă că $H(g)$ este grup Lie.

ii) Fie $A, B \in h(g)$, deci $^TAg+gA = 0$ şi $^TBg+gB = 0$. Pentru $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, avem:

$$\begin{aligned} ^T(k_1A + k_2B)g + g(k_1A + k_2B) &= k_1^TAg + k_2^TBg + k_1gA + k_2gB = \\ &= k_1\left(^TAg + gA\right) + k_2\left(^TBg + gB\right) = 0. \end{aligned}$$

Rezultă $k_1A+k_2B \in h(g)$, deci $h(g)$ este subspaţiu vectorial al lui $gl(n, \mathbb{R})$.

În continuare, avem:

$$\begin{aligned} ^T[A,B]g + g[A,B] &= ^T(AB - BA)g + g(AB - BA) = \\ &= ^TB^TAg - ^TA^TBg + gAB - gBA = \\ &= -^TBgA + ^TAgB + gAB - gBA = \\ &= gBA - gAB + gAB - gBA = 0. \end{aligned}$$

Prin urmare, $[A, B] \in h(g)$ şi deci $h(g)$ este subalgebră Lie a algebrei Lie $gl(n, \mathbb{R})$.

iii) Fie $A \in L(H(g))$. Atunci există o curbă analitică $c : \mathbb{R} \to GL(n, \mathbb{R})$ cu proprietăţile $c(0) = I_n$, $\dot{c}(0) = A$, $c(\mathbb{R}) \subset H(g)$. Rezultă $^Tc(t)gc(t) = g$, $(\forall) t \in \mathbb{R}$. Prin derivare, obţinem: $^T\dot{c}(t)gc(t) + ^Tc(t)g\dot{c}(t) = 0$, $(\forall) t \in \mathbb{R}$.

Pentru $t=0$, deoarece $c(0)=I_n$ şi $\overset{\bullet}{c}(0)=A$, obţinem ${}^TAg+gA=0$, deci $A\in h(g)$. Am obţinut: $L(H(g))\subset h(g)$.

Reciproc, fie $A\in h(g)$, deci ${}^TAg+gA=0$. Rezultă ${}^TA=-gAg^{-1}$. Prin inducţie, obţinem: $\left({}^TA\right)^k=(-1)^k gA^kg^{-1}$.

Considerăm curba $c:\mathbb{R}\to GL(n,\mathbb{R})$, $c(t)=\exp tA$. Evident, c este analitică. Avem $c(0)=I_n$, $\overset{\bullet}{c}(0)=A$. În plus, pentru orice $t\in\mathbb{R}$, avem:

$$\begin{aligned}{}^Tc(t) &= {}^T(\exp tA)=\exp\left(t{}^TA\right)=\exp\left(-tgAg^{-1}\right)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-t)^m}{m!}\left(gAg^{-1}\right)^m= \\ &= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-t)^m}{m!}gA^mg^{-1}=g\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-t)^m}{m!}A^m\right)g^{-1}=g\left(\exp(-tA)\right)g^{-1}.\end{aligned}$$

Rezultă

$${}^Tc(t)\,gc(t)=\left(g\exp(-tA)\,g^{-1}\right)gc(t)=g\exp(-tA)\exp tA=g\exp 0=g,$$

ceea ce ne arată că $c(t)\in H(g)$, $(\forall)\,t\in\mathbb{R}$, şi deci $A=\overset{\bullet}{c}(0)\in L(H(g))$. Obţinem că $h(g)\subset L(H(g))$.

În concluzie, $L(H(g))=h(g)$.

2.4.2. OBSERVAŢII.

2.4.2.1. Dacă B este o formă bilinară simetrică, atunci:

$$g_{ij}=B(e_i,e_j)=B(e_j,e_i)=g_{ji},(\forall)\,i,j\in\{1,...,n\},$$

deci $g={}^Tg$, ceea ce ne arată că g este simetrică.

Condiţia ${}^TAg+gA=0$ se mai scrie:

$${}^TA^Tg+gA=0\Leftrightarrow{}^T(gA)+gA=0\Leftrightarrow gA \text{ este antisimetrică.}$$

Fie I forma biliniară simetrică pentru care baza $\{e_1,...,e_n\}$ este ortonormată, deci $I(e_i,e_j)=\delta_{ij}$, $(\forall)\,i,j\in\{1,...,n\}$. Atunci matricea corespunzătoare în această bază este I_n. Rezultă că

$$o(n)=h(I_n)=\left\{A\in gl(n,\mathbb{R})\mid{}^TA+A=0\right\}$$

este subalgebră Lie a lui $gl(n,\mathbb{R})$, şi anume este algebra Lie a grupului Lie

$$O(n) = H(I_n) = \left\{A \in GL(n,\mathbb{R}) \mid^T AA = I_n\right\}$$

(grupul ortogonal de ordinul n, considerat la 2.1.2).

Dacă notăm $e_{pq} = (\delta_{rp}\delta_{sq})_{1\leq r,s\leq n}$, unde $p,q \in \{1,...,n\}$, atunci o bază în algebra Lie $o(n)$ este formată din matricele:

$$\{e_{pq} - e_{qp} \mid 1 \leq p < q \leq n\},$$

deci dimensiunea algebrei Lie $o(n)$ este $\frac{n(n-1)}{2}$. Prin urmare, $\dim O(n) = \frac{n(n-1)}{2}$.

Revenind la cazul formei biliniare simetrice B, observăm că $A \in h(g) \Leftrightarrow gA \in o(n)$.

Fie $\varphi : gl(n,\mathbb{R}) \to gl(n,\mathbb{R})$, $\varphi(A) = gA$. Observăm că φ este un izomorfism liniar şi că $h(g) = \varphi^{-1}(o(n))$. Rezultă că dimensiunea lui $h(g)$ este tot $\frac{n(n-1)}{2}$ şi deci dimensiunea grupului Lie $H(g)$ este $\frac{n(n-1)}{2}$.

Fie acum $p,q \in \mathbb{N}$ cu $p+q=n$ şi $I_{p,q} = \begin{pmatrix} -I_p & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix}$. Fie $B_{p,q}$ forma biliniară simetrică, care în baza $\{e_1,...,e_n\}$ are matricea $I_{p,q}$. Atunci

$$O(p,q) = \left\{A \in GL(n,\mathbb{R}) \mid^T AI_{p,q}A = I_{p,q}\right\} = H(I_{p,q})$$

este grup Lie de dimensiune $\frac{n(n-1)}{2}$, care are ca algebră Lie pe

$$o(p,q) = \left\{A \in gl(n,\mathbb{R}) \mid^T AI_{p,q} + I_{p,q}A = 0\right\} = h(I_{p,q}).$$

$O(p,q)$ este grupul ortogonal de tip (p,q) (a se vedea 2.1.4).

2.4.2.2. Dacă B este o formă biliniară antisimetrică, atunci

$$g_{ij} = B(e_i,e_j) = -B(e_j,e_i) = -g_{ji}, \quad (\forall)\, i,j \in \{1,...,n\},$$

deci ${}^Tg = -g$. Prin urmare, g este antisimetrică. Atunci condiţia ${}^TAg + gA = 0$ se mai scrie:

$$-^{T}A^{T}g + gA = 0 \Leftrightarrow -^{T}(gA) + gA = 0 \Leftrightarrow gA \text{ este simetrică.}$$

Fie $S = \left\{A \in gl(n, \mathbb{R}) \mid^{T} A = A\right\}$. Atunci S este subspaţiu vectorial al spaţiului vectorial $gl(n, \mathbb{R})$ şi o bază în S este formată din matricele:

$$\{e_{pq} + e_{qp} \mid 1 \leq p < q \leq n\} \cup \{e_{pp} \mid p \in \{1, ..., n\}\},$$

deci dimensiunea lui S este $\frac{n(n-1)}{2} + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Deoarece $h(g) = \varphi^{-1}(S)$, rezultă că dimensiunea lui $h(g)$ este $\frac{n(n+1)}{2}$. Prin urmare, dimensiunea grupului Lie $H(g)$ este $\frac{n(n+1)}{2}$.

Considerăm $n = 2m$ şi B forma biliniară antisimetrică care, în baza $\{e_1, ..., e_{2m}\}$, are matricea $J = \begin{pmatrix} 0 & I_m \\ -I_m & 0 \end{pmatrix}$.

Obţinem **grupul simplectic real**

$$Sp(m, \mathbb{R}) = \left\{A \in GL(2m, \mathbb{R}) \mid^{T} AJA = J\right\}$$

(a se vedea 2.3.2). Algebra sa Lie este:

$$sp(m, \mathbb{R}) = L(Sp(m, \mathbb{R})) = \left\{A \in gl(2m, \mathbb{R}) \mid^{T} AJ + JA = 0\right\}.$$

Dimensiunea grupului simplectic real $Sp(m, \mathbb{R})$, este: $\frac{2m(2m+1)}{2} = m(2m+1)$.

Considerăm $n = 2m$ şi $m = p + q$, cu $p, q \in \mathbb{N}$. Fie B forma biliniară antisimetrică care, în baza $\{e_1, ..., e_{2m}\}$ are matricea:

$$K_{p,q} = \begin{pmatrix} 0 & I_{p,q} \\ -I_{p,q} & 0 \end{pmatrix}.$$

Obţinem atunci grupul simplectic de tip (p, q) (a se vedea 2.3.3):

$$Sp(p, q, \mathbb{R}) = \left\{A \in GL(2m, \mathbb{R}) \mid^{T} AK_{p,q}A = K_{p,q}\right\}.$$

Dimensiunea grupului Lie $Sp(p, q, \mathbb{R})$ este $m(2m+1)$. Algebra sa Lie este:

$$sp(p, q, \mathbb{R}) = L(Sp(p, q, \mathbb{R})) = \left\{A \in gl(2m, \mathbb{R}) \mid^{T} AK_{p,q} + K_{p,q}A = 0\right\}.$$

2.5. GRUPURI UNITARE.

2.5.1. Fie V un spaţiu vectorial complex de dimensiune n şi

$$B : V \times V \to \mathbb{C}$$

o formă hermitică nedegenerată, deci care are proprietăţile:

i) $B(\lambda x + \mu y, z) = \lambda B(x, z) + \mu B(y, z)$, $(\forall) x, y, z \in V$, $(\forall) \lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

ii) $B(y, x) = \overline{B(x, y)}$, $(\forall) x, y \in V$.

iii) $B(x, y) = 0$, $(\forall) y \in V$ implică $x = 0$.

În loc de B vom folosi şi notaţia $< , >$, deci $B(x, y) =< x, y >$, $(\forall) x, y \in V$.

Notăm

$$\begin{aligned} U(B) &= \{f : V \to V \mid f \text{ este } \mathbb{C}\text{−liniară şi} \\ &< f(x), f(y) >=< x, y >, \ (\forall) x, y \in V\}. \end{aligned}$$

Fie $\{e_1, ..., e_n\}$ o bază a lui V şi fie $g_{ij} =< e_i, e_j >\in \mathbb{C}$, $(\forall) i, j \in \{1, ..., n\}$. Notăm $g = (g_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Avem:

$$g_{ji} =< e_j, e_i >= \overline{< e_i, e_j >} = \overline{g_{ij}},$$

deci ${}^T g = \overline{g}$. Rezultă $g = \widetilde{g}$, unde $\widetilde{g} = \overline{{}^T g} =^T \overline{g}$.

Dacă $x = x^i e_i$ şi $y = y^j e_j$, atunci:

$$< x, y >=< x^i e_i, y^j e_j >= x^i \overline{y}^j < e_i, e_j >= x^i \overline{y}^j g_{ij}.$$

Dar $< x, y >= 0$, $(\forall) y \in V \Leftrightarrow g_{ij} x^i \overline{y}^j = 0$, $(\forall)(y^1, ..., y^n) \in \mathbb{C}^n \Leftrightarrow g_{ij} x^i = 0$, $(\forall) j \in \{1, ..., n\}$.

Acest sistem are numai soluţia banală dacă şi numai dacă g este inversabilă. Deci condiţia iii) implică g inversabilă. Prin urmare, $g \in GL(n, \mathbb{C})$.

Fie $f : V \to V$ o aplicaţie $\mathbb{C}$−liniară şi $x = x^i e_i$, $y = y^j e_j \in V$. Atunci:

$$\begin{aligned} &< f(x), f(y) >=< x, y >\Leftrightarrow< f(x^i e_i), f(y^j e_j) >=< x^i e_i, y^j e_j >\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow &\ x^i \overline{y}^j < f(e_i), f(e_j) >= x^i \overline{y}^j < e_i, e_j >\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow &\ \{< f(e_i), f(e_j) > - < e_i, e_j >\} x^i \overline{y}^j = 0. \end{aligned}$$

Rezultă că $f \in U(B) \Leftrightarrow < f(x), f(y) > = < x, y >, (\forall) x, y \in V \Leftrightarrow$
$< f(e_i), f(e_j) > = < e_i, e_j >, (\forall) i, j = \overline{1, n}$.

Fie $A = \left(a_j^i\right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ matricea lui f în baza $\{e_1, ..., e_n\}$, deci $f(e_i) = a_i^k e_k$. Rezultă:

$$< f(e_i), f(e_j) > = < a_i^r e_r, a_j^s e_s > = a_i^r \overline{a}_j^s g_{rs} = \left({}^T A\right)_i^r (g)_{rs} \left(\overline{A}\right)_j^s = \left({}^T A g \overline{A}\right)_{ij}.$$

Prin urmare, $f \in U(B) \Leftrightarrow < f(e_i), f(e_j) > = < e_i, e_j >, (\forall) i, j = \overline{1, n} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \left({}^T A g \overline{A}\right)_{ij} = g_{ij}, (\forall) i, j = \overline{1, n} \Leftrightarrow {}^T A g \overline{A} = g$.

Dacă $f \in U(B)$ atunci ${}^T A g \overline{A} = g$, şi cum g este inversabilă, rezultă că A este inversabilă, deci $A \in GL(n, \mathbb{C})$. Prin urmare $U(B)$ se identifică cu mulţimea

$$U(g) = \left\{ A \in GL(n, \mathbb{C}) \mid {}^T A g \overline{A} = g \right\}.$$

2.5.2. PROPOZIŢIE.

i) $U(g)$ poate fi organizat ca grup Lie.

ii) Mulţimea $u(g) = \left\{ X \in gl(n, \mathbb{C}) \mid {}^T X g + g \overline{X} = 0 \right\}$ poate fi organizată ca algebră Lie.

iii) Algebra Lie $L(U(g))$ a grupului Lie $U(g)$ este $u(g)$.

Demonstraţie. i) Fie $A, B \in U(g)$, deci ${}^T A g \overline{A} = g$ şi ${}^T B g \overline{B} = g$. Rezultă:

$$\begin{aligned} {}^T(AB)\, g \overline{AB} &= {}^T B\, {}^T A g \overline{A}\, \overline{B} = {}^T B g \overline{B} = g, \text{ deci } AB \in U(g); \\ {}^T\left(A^{-1}\right) g \overline{\left(A^{-1}\right)} &= \left({}^T A\right)^{-1} g \left(\overline{A}\right)^{-1} = \left({}^T A\right)^{-1} \cdot {}^T A g \overline{A} \left(\overline{A}\right)^{-1} = g, \\ \text{deci } A^{-1} &\in U(g). \end{aligned}$$

Rezultă că $U(g)$ este sugbrup în $GL(n, \mathbb{C})$.

Fie $A \in \overline{U(g)}$. Deoarece $GL(n, \mathbb{C})$ are bază numărabilă, rezultă că există un şir $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$, cu proprietăţile:

a) $A_i \in U(g)$, deci ${}^T A_i g \overline{A_i} = g$, $(\forall) i \in \mathbb{N}$;

b) $\lim\limits_{i \to \infty} A_i = A$.

Rezultă că $\lim\limits_{i \to \infty} {}^T A_i = {}^T A$ şi $\lim\limits_{i \to \infty} \overline{A_i} = \overline{A}$, şi avem:

$${}^T A g \overline{A} = \left(\lim_{i \to \infty} {}^T A_i\right) g \left(\lim_{i \to \infty} \overline{A_i}\right) = \lim_{i \to \infty} \left({}^T A_i g \overline{A_i}\right) = \lim_{i \to \infty} g = g, \text{ deci } A \in U(g).$$

Prin urmare, $\overline{U(g)} \subset U(g)$, şi cum $U(g) \subset \overline{U(g)}$, rezultă $\overline{U(g)} = U(g)$. Prin urmare, $U(g)$ este subgrup închis al grupului Lie $GL(n,\mathbb{C})$. Conform teoremei lui Cartan, rezultă că $U(g)$ este grup Lie.

ii) Fie $X, Y \in u(g)$, deci ${}^T X g + g\overline{X} = 0$ şi ${}^T Y g + g\overline{Y} = 0$. Avem ${}^T(X+Y)g + g\overline{(X+Y)} = {}^T Xg + {}^T Yg + g\overline{X} + g\overline{Y} = 0$. Rezultă $X+Y \in u(g)$.

Este evident că $\lambda X \in u(g)$, $(\forall)\lambda \in \mathbb{C}$, deci $u(g)$ este subspaţiu vectorial al spaţiului vectorial $gl(n,\mathbb{C})$.

Fie $X, Y \in u(g)$. Avem:

$$\begin{aligned}
{}^T[X,Y]g + g\overline{[X,Y]} &= {}^T(XY - YX)g + g\overline{(XY - YX)} = \\
&= {}^T Y {}^T X g - {}^T X {}^T Y g + g\overline{XY} - g\overline{YX} = \\
&= -{}^T Y g\overline{X} + {}^T X g\overline{Y} + g\overline{XY} - g\overline{YX} = \\
&= g\overline{YX} - g\overline{XY} + g\overline{XY} - g\overline{YX} = 0,
\end{aligned}$$

ceea ce ne arată că $[X,Y] \in u(g)$. Prin urmare $u(g)$ este subalgebră Lie a algebrei Lie $gl(n,\mathbb{C})$.

iii) Vom arăta că $L(U(g)) = u(g)$, prin dublă incluziune.

Fie $X \in L(U(g)) \subset gl(n,\mathbb{C})$. Atunci există o curbă analitică

$$c : \mathbb{R} \to GL(n,\mathbb{C}),\ \text{cu } c(0) = I_n,\ \dot{c}(0) = X_e,\ c(\mathbb{R}) \subset U(g).$$

Rezultă ${}^T c(t)\, g\overline{c(t)} = g$, $(\forall)\, t \in \mathbb{R}$. Prin derivare obţinem:

$${}^T\dot{c}(t)\, g\overline{c(t)} + {}^T c(t)\, g\overline{\dot{c}(t)} = 0,\ \ (\forall)\, t \in \mathbb{R}.$$

În particular, pentru $t = 0$, obţinem ${}^T X_e g + g\overline{X_e} = 0$, şi cum $X \in gl(n,\mathbb{C})$, rezultă ${}^T X g + g\overline{X} = 0$, deci $X \in u(g)$. Am obţinut $L(U(g)) \subset u(g)$.

Fie $X \in u(g)$. Considerăm aplicaţia $c : \mathbb{R} \to GL(n,\mathbb{C})$, $c(t) = \exp tX$. Este evident că c este analitică şi că $c(0) = I_n$, $\dot{c}(0) = X$. Deoarece

$$\begin{aligned}
{}^T c(t) &= {}^T(\exp tX) = \exp t\,{}^T X = \exp\left(-tg\overline{X}g^{-1}\right) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-t)^r}{r!}\left(g\overline{X}g^{-1}\right)^r = \\
&= g\left(\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-t)^r}{r!}\overline{X}^r\right) g^{-1} = g\left(\exp\left(-t\overline{X}\right)\right) g^{-1}
\end{aligned}$$

şi

$$\overline{c(t)} = \overline{\exp tX} = \exp t\overline{X},$$

rezultă:

$$\begin{aligned} {}^{T}c(t)\, g\overline{c(t)} &= g\left(\exp\left(-t\overline{X}\right)\right) g^{-1} g \exp t\overline{X} = g\left(\exp\left(-t\overline{X}\right)\right) \exp t\overline{X} = \\ &= g \exp 0 = g, \quad (\forall)\, t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Am obţinut $c(t) \in U(g)$, $(\forall)\, t \in \mathbb{R}$, adică $c(\mathbb{R}) \subset U(g)$. Rezultă $X \in L(U(g))$, deci $u(g) \subset L(U(g))$.

În concluzie $L(U(g)) = u(g)$. Q.E.D.

2.5.3. Observaţie. Ţinând seama de egalitatea ${}^{T}g = \overline{g}$, condiţia ${}^{T}Xg + g\overline{X} = 0$ se mai scrie sub forma:

$$\begin{aligned} {}^{T}X\,{}^{T}\overline{g} + \overline{g}\overline{X} &= 0 \Leftrightarrow {}^{T}\left(\overline{g}X\right) + \overline{\left(\overline{g}X\right)} = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \overline{g}X \in u(n) = \left\{A \in gl(n, \mathbb{C}) \mid {}^{T}A + \overline{A} = 0\right\}. \end{aligned}$$

Dar $u(n)$ este un subspaţiu vectorial real al spaţiului vectorial $gl(n, \mathbb{C})$. Dacă notăm $E_{pq} = \left(\delta_{pr}\delta_{qs}\right)_{r,s=\overline{1,n}}$, atunci o bază în $u(n)$ este dată de:

$$\left\{E_{pq} - E_{qp} \mid p < q\right\} \cup \left\{i\left(E_{pq} + E_{qp}\right) \mid p < q\right\} \cup \left\{iE_{pp} \mid p = \overline{1,n}\right\}.$$

Atunci dimensiunea lui $u(n)$ ca spaţiu vectorial real este $\frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} + n = n^2$.

Fie aplicaţia $h : gl(n, \mathbb{C}) \to gl(n, \mathbb{C})$, $h(x) = \overline{g}x$. Atunci h este un izomorfism de spaţii liniare reale, şi deoarece $u(g) = h^{-1}(u(n))$, rezultă că $u(g)$ are aceeaşi dimensiune (ca spaţiu vectorial real) ca şi $u(n)$, deci $n^2 = \dim u(g)$.

Prin urmare, $U(g)$ este grup Lie de dimensiune n^2.

2.5.4. Fie $p, q \in \mathbb{N}$, $p + q = n$. Pentru $g = I_{p,q} = \begin{pmatrix} -I_p & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix}$, obţinem grupul unitar de tip (p, q),

$$U(p, q) = \left\{A \in GL(n, \mathbb{C}) \mid {}^{T}AI_{p,q}\overline{A} = I_{p,q}\right\}.$$

$U_{p,q}$ este subgrup Lie al grupului Lie $GL(n, \mathbb{C})$. Dimensiunea grupului Lie $U(p, q)$ este n^2. Algebra Lie $L(U(p,q))$ a grupului Lie $U(p,q)$ este:

$$u(p,q) = \left\{ X \in gl(n, \mathbb{C}) \mid^T XI_{p,q} + I_{p,q}\overline{X} = 0 \right\} \text{ (a se vedea şi 2.2.4).}$$

Dacă $p = 0$, $q = n$, atunci $I_{0,n} = I_n$ şi obţinem grupul unitar:

$$U(n) = \left\{ A \in GL(n, \mathbb{C}) \mid^T A\overline{A} = I_n \right\} \text{ (a se vedea şi 2.2.2).}$$

$U(n)$ este subgrup Lie al lui $GL(n, \mathbb{C})$. Dimensiunea grupului Lie $U(n)$ este n^2. Algebra Lie $L(U(n))$ este $u(n)$.

§ 3. TEOREMA LUI CHEVALLEY

Fie G un grup Lie şi H un subgrup închis al său. Definim o relaţie de echivalenţă în G :

$$a \sim b \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \text{ există } y \in H \text{ astfel încât } a = by.$$

O clasă oarecare de echivalenţă o notăm cu $\widehat{a} = aH$. Notăm

$$G/H = \{aH \mid a \in G\}.$$

Considerăm aplicaţia

$$\pi : G \to G/H$$

definită prin

$$\pi(a) = aH = \widehat{a}.$$

Este evident că proiecţia canonică π este aplicaţie surjectivă. Cu ajutorul aplicaţiei π introducem o topologie pe G/H. Spunem că o mulţime $Q \subset G/H$ este mulţime deschisă, dacă $\pi^{-1}(Q)$ este deschisă în G. Fie Q, $\overline{Q} \subset G/H$, astfel încât mulţimile $\pi^{-1}(Q)$, $\pi^{-1}(\overline{Q})$ sunt deschise în G. Rezultă că $\pi^{-1}(Q \cap \overline{Q}) = \pi^{-1}(Q) \cap \pi^{-1}(\overline{Q})$ =mulţime deschisă în G.
Rezultă că $Q \cap \overline{Q}$ este mulţime deschisă în G/H. Fie $Q_i \subset G/H$, $i \in I$, astfel încât $\pi^{-1}(Q_i)$ este mulţime deschisă în G, pentru orice $i \in I$. Deoarece avem $\pi^{-1}\left(\bigcup\limits_{i \in I} Q_i\right) = \bigcup\limits_{i \in I} \pi^{-1}(Q_i)$ =mulţime deschisă în G, rezultă că $\bigcup\limits_{i \in I} Q_i$ este mulţime deschisă în G/H. Deoarece $\pi^{-1}(G/H) = G$ şi $\pi^{-1}(\varnothing) = \varnothing$ sunt mulţimi deschise în G, rezultă că G/H şi $\varnothing$ sunt mulţimi deschise în G/H, şi deci avem într-adevăr o topologie pe G/H.

Din felul în care am introdus topologia pe G/H rezultă că *aplicaţia π este continuă.*

<u>PROPOZIŢIE</u>. *Aplicaţia π este deschisă.*

Demonstraţie. Va trebui să arătăm că dacă D este mulţime deschisă în G, atunci $\pi(D)$ este mulţime deschisă în G/H. Vom stabili formula

$$(3.1) \qquad \pi^{-1}(\pi(D)) = \bigcup_{a\in H} Da.$$

În adevăr, fie $x \in \pi^{-1}(\pi(D))$. Rezultă $\pi(x) \in \pi(D)$, deci există $y \in D$, astfel încât $\pi(x) = \pi(y)$, sau $\widehat{x} = \widehat{y}$, sau $xH = yH$. Există $a \in H$, astfel încât $x = ya$, $y \in D$. Deci $x \in Da$.

Rezultă: $x \in \bigcup\limits_{a\in H} Da$. Am obţinut: $\pi^{-1}(\pi(D)) \subset \bigcup\limits_{a\in H} Da$.

Să stabilim incluziunea inversă. Fie $x \in \bigcup\limits_{a\in H} Da$. Există $b \in H$, astfel încât $x \in Db$. Rezultă că există $y \in D$, astfel încât $x = yb$. Ultima egalitate implică $\pi(x) = \pi(y)$, unde $y \in D$, ceea ce arată că $x \in \pi^{-1}(\pi(D))$, şi deci $\bigcup\limits_{a\in H} Da \subset \pi^{-1}(\pi(D))$. Deci formula (3.1) a fost stabilită. Deoarece translaţia la dreapta

$$R_a : x \in G \to R_a(x) = xa \in G$$

este difeomorfism analitic, iar D este mulţime deschisă în G, rezultă că $R_a(D) = Da$ este mulţime deschisă în G, deci şi $\bigcup\limits_{a\in H} Da = \pi^{-1}(\pi(D))$ este mulţime deschisă în G/H, ceea ce ne arată că aplicaţia π este deschisă.

OBSERVAŢIE. Din cele de mai sus rezultă că topologia lui G/H are o bază numărabilă. Mai mult, deoarece H este închis în G, rezultă că G/H este un spaţiu Hausdorff. Ultima afirmaţie rezultă din propoziţia de mai jos.

3.1. PROPOZIŢIE. *Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) *G/H este separat;*

(ii) *H este închis.*

Demonstraţie. (i)⇒(ii). Deoarece G/H este separat, rezultă că orice punct din G/H este o mulţime închisă. În particular, clasa $\widehat{e}$ a elementului neutru $e \in G$ este o mulţime închisă în G/H. Deoarece $\pi : G \to G/H$ este aplicaţie continuă rezultă că $\pi^{-1}(\widehat{e}) = H$ este mulţime închisă în G.

(ii)⇒(i). Considerăm aplicaţia

$$\sigma : G \times G \to G,\ \sigma(x,y) = x^{-1}y.$$

Aplicaţia σ este analitică, deoarece ea este compunerea aplicaţiilor analitice

$$\begin{array}{ccccc} & & G \times G & \stackrel{j\times Id_G}{\longrightarrow} G \times G & \stackrel{\mu}{\longrightarrow} G \\ (x,y) & \longrightarrow & (x^{-1},y) & \longrightarrow \mu(x^{-1},y) = x^{-1}y, & \end{array}$$

unde μ este operaţia grupală în G, iar j este aplicaţia de inversare în G.

Rezultă că σ este continuă, deci $\sigma^{-1}(H)$ este mulţime închisă în $G \times G$. Se observă că $\sigma^{-1}(H)$ este tocmai graficul relaţiei de echivalenţă definită de H, adică

$$\sigma^{-1}(H) = \{(x,y) \in G \times G \mid x \sim y\}.$$

Fie $\widehat{x}$, $\widehat{y} \in G/H$ cu $\widehat{x} \neq \widehat{y}$. Rezultă $(x,y) \notin \sigma^{-1}(H)$ (deoarece în caz contrar avem $\sigma(x,y) \in H \Leftrightarrow x^{-1}y \in H$, adică există $b \in H$, cu $x^{-1}y = b \Leftrightarrow \Leftrightarrow y = xb \Leftrightarrow y \sim x \Leftrightarrow \widehat{y} = \widehat{x}$). Prin urmare, $(x,y) \in G{\times}G\backslash\sigma^{-1}(H)$ =mulţime deschisă în $G \times G$. Există vecinătăţile deschise U, V cu $x \in U$, $y \in V$, $(U \times V) \cap \sigma^{-1}(H) = \varnothing$ şi, cum G este separat, putem alege U şi V astfel încât să avem $U \cap V = \varnothing$. Deoarece π este deschisă, rezultă că $\pi(U)$ şi $\pi(V)$ sunt vecinătăţi deschise ale lui $\widehat{x}$ şi $\widehat{y}$, iar intersecţia $\pi(U) \cap \pi(V)$ este vidă. În adevăr, să presupunem că $\pi(U) \cap \pi(V) \neq \varnothing$, deci există $\widehat{z} \in \pi(U) \cap \pi(V) \Rightarrow \Rightarrow \widehat{z} \in \pi(U)$ şi $\widehat{z} \in \pi(V)$. Rezultă că există $a \in U$, $b \in V$ cu $\widehat{z} = \pi(a) = \pi(b)$. Din $\pi(a) = \pi(b)$ rezultă $a^{-1}b \in H$, adică $\sigma(a,b) \in H$, deci $(a,b) \in \sigma^{-1}(H)$. Cum $(a,b) \in U \times V$, rezultă $(a,b) \in (U \times V) \cap \sigma^{-1}(H)$, ceea ce nu se poate, pentru că $(U \times V) \cap \sigma^{-1}(H) = \varnothing$.

În acest paragraf ne propunem să demonstrăm următoarea teoremă:

TEOREMA LUI CHEVALLEY. *Fie G un grup Lie şi H un subgrup închis al său. Există o unică structură analitică pe G/H, astfel încât proiecţia canonică*

$$\pi : a \in G \to \pi(a) = aH \in G/H$$

este analitică şi G/H este varietate cât a lui G. Dimensiunea varietăţii G/H este

$$\dim G/H = \dim G - \dim H.$$

Vom stabili, la început, câteva propoziţii ajutătoare.

3.2. PROPOZIŢIE. *Fie G un grup Lie şi H un subgrup închis al său. Notăm:*

$$\begin{aligned} S(H) &= \{\alpha : \mathbb{R} \to G \mid \alpha \, analitică,\ \alpha(0) = e,\ \alpha(\mathbb{R}) \subset H\}, \\ F &= \{h \in T_eG \mid h = \overset{\bullet}{\alpha}(0),\ \alpha \in S(H)\}. \end{aligned}$$

Alegem un al doilea subspaţiu $L \subset T_eG$, astfel încât $T_eG = L \oplus F$.

Considerăm aplicaţia

$$\tau : L \times H \to G$$

definită prin

$$\tau(k, y) = (\exp k)y,\ k \in L,\ y \in H.$$

Atunci există o vecinătate W_L a lui 0 în L, astfel încât τ se restricţionează la un difeomorfism analitic

$$\tau : W_L \times H \to Q,$$

unde Q este o mulţime deschisă în G.

Demonstraţie. Din propoziţia 1.5, rezultă că există vecinătăţile V_L a lui 0 în L, V_F a lui 0 în F şi U a lui e în G, astfel încât:

i) Aplicaţia

$$(k, h) \in L \times F \to \exp k \exp h \in G$$

se restricţionează la un difeomorfism $\varphi : V_L \times V_F \to U$

$$\varphi(k,h) = \exp k \exp h, \;\; k \in V_L, \;\; h \in V_F.$$

ii) $U \cap H = \exp(V_F)$.

Pentru $A \subset G$ şi $B \subset G$, vom folosi notaţia:

$$A^{-1}B = \{a^{-1}b \in G \mid a \in A, \; b \in B\} \subset G.$$

La început, vom arăta că putem găsi o vecinătate W_L a lui 0 în L, astfel încât

$$W_L \subset V_L \text{şi } (\exp W_L)^{-1} \exp W_L \subset U.$$

Considerăm aplicaţia

$$\rho : k \in V_L \to \rho(k) = \exp k \in U.$$

Este evident că aplicaţia ρ este continuă. Mai considerăm aplicaţia

$$\sigma : (x,y) \in U \times U \to \sigma(x,y) = x^{-1}y \in G.$$

Deoarece aplicaţia σ este continuă, rezultă că $\sigma^{-1}(U)$ este mulţime deschisă în $U \times U$. Deoarece $\sigma(e,e) = e \in U$, rezultă că $(e,e) \in \sigma^{-1}(U)$. Deci putem găsi o vecinătate deschisă de forma $U' \times U'$ a punctului (e,e) în $\sigma^{-1}(U)$, astfel încât U' să fie mulţime deschisă în U (în $\sigma^{-1}(U)$ putem lua ca bază de vecinătăţi mulţimi de forma $U' \times U'$). Definim acum mulţimea W_L astfel:

$$W_L = \rho^{-1}(U').$$

Din egalitatea $\rho(0) = e$, rezultă că $0 \in W_L$. Deoarece U' este mulţime deschisă în U, rezultă că $\rho^{-1}(U') = W_L$ este mulţime deschisă în V_L. Un element oarecare $x \in (\exp W_L)^{-1} \exp W_L$ se scrie:

$$x = (\exp k)^{-1} \exp h, \;\; k, h \in W_L,$$

sau:

$$x = (\rho(k))^{-1}\rho(h) = \sigma(\rho(k), \rho(h)).$$

Deoarece k, $h \in W_L$, rezultă că $\rho(k)$, $\rho(h) \in U'$, deci $\sigma(\rho(k), \rho(h)) \in U$. Prin urmare, am micşorat vecinătatea V_L, astfel încât să ajungem la o vecinătate W_L, cu

$$(\exp W_L)^{-1} \exp W_L \subset U.$$

Să arătăm că aplicaţia τ este injectivă. Pentru k_1, $k_2 \in W_L$ şi y_1, $y_2 \in H$, avem:

$$\begin{aligned} \tau(k_1, y_1) &= \tau(k_2, y_2) \Leftrightarrow (\exp k_1)y_1 = (\exp k_2)y_2 \Leftrightarrow y_2 y_1^{-1} = \\ &= (\exp k_2)^{-1} \exp k_1. \end{aligned}$$

Deoarece $(\exp W_L)^{-1} \exp W_L \subset U$, rezultă $(\exp k_2)^{-1} \exp k_1 \in U$. Prin urmare, $y_2 y_1^{-1} \in U$. Dar $y_2 y_1^{-1} \in H$. Rezultă $y_2 y_1^{-1} \in U \cap H$ şi, folosind egalitatea $U \cap H = \exp(V_F)$, obţinem $y_2 y_1^{-1} \in \exp(V_F)$. Prin urmare, există $h \in V_F$, astfel încât $y_2 y_1^{-1} = \exp h$. Din egalităţile

$$\exp h = y_2 y_1^{-1} \text{şi } (\exp k_2)^{-1} \exp k_1 = y_2 y_1^{-1},$$

rezultă $\exp h = (\exp k_2)^{-1} \exp k_1$, sau $\exp k_2 \exp h = \exp k_1$. Prin urmare, avem:

$$\varphi(k_2, h) = \exp k_2 \exp h = \exp k_1 = \varphi(k_1, 0).$$

Deoarece φ este injectivă, rezultă $k_2 = k_1$ şi $h = 0$. Rezultă $y_1 = y_2$, şi deci aplicaţia τ este injectivă pe $W_L \times H$. Rămâne să mai arătăm că τ este difeomorfism local în orice punct din $W_L \times H$.

Diagrama

$$\begin{tikzcd} W_L \times V_F \arrow[r, "Id_{W_L} \times \exp"] \arrow[d, "\varphi"', "\cong"] & W_L \times (U \cap H) \arrow[dl, "\tau"] \\ \varphi(W_L \times V_F) & \end{tikzcd}$$

este comutativă.

În adevăr, pentru $k \in W_L$ şi $h \in V_F$, avem:

$$\tau \circ (Id_{W_L} \times \exp)(k,h) = \tau(k, \exp h) = \exp k \exp h = \varphi(k,h).$$

Rezultă $\tau \circ (Id_{W_L} \times \exp) = \varphi$. Prin urmare, aplicaţia

$$\tau = \varphi \circ (Id_{W_L} \times \exp)^{-1} : W_L \times (U \cap H) \to \varphi(W_L \times V_F)$$

este difeomorfism analitic.

Să dovedim că τ este difeomorfism local în orice punct din $W_L \times H$. Pentru aceasta introducem o familie $\{V_a \mid a \in H\}$ de submulţimi ale lui $W_L \times H$, în felul următor:

$$V_a = W_L \times (U \cap H)a = W_L \times R_a(U \cap H).$$

Dacă $x \in \bigcup\limits_{a \in H} R_a(U \cap H)$, atunci există $b \in H$, astfel încât $x \in R_b(U \cap H)$. Rezultă că există $y \in U \cap H$, astfel încât $x = R_b(y)$, deci avem $x = yb$.

Deoarece $y \in H$ şi $b \in H$, rezultă $x \in H$. Am obţinut, deci: $\bigcup\limits_{a \in H} R_a(U \cap H) \subset H$.

Fie $x \in H$. Deoarece $e \in U \cap H$, rezultă $x = R_x(e)$, deci $x = R_x(U \cap H)$. Rezultă $x \in \bigcup\limits_{a \in H} R_a(U \cap H)$, şi deci $H \subset \bigcup\limits_{a \in H} R_a(U \cap H)$.

Am stabilit egalitatea

$$H = \bigcup_{a \in H} R_a(U \cap H).$$

De aici rezultă:

$$\bigcup_{a\in H} V_a = W_L \times \bigcup_{a\in H} R_a(U\cap H) = W_L \times H.$$

Dacă notăm $V'_a = \tau(V_a)$, şi ţinem seama de faptul că aplicaţia τ este injectivă, obţinem:

$$\bigcup_{a\in H} V'_a = \tau(W_L \times H).$$

Să arătăm că, oricare ar fi $a \in H$, mulţimea V_a este deschisă în $W_L \times H$, V'_a este mulţime deschisă în G, iar τ realizează un difeomorfism între V_a şi V'_a.

Pentru $a = e$, din comutativitatea diagramei, rezultă că τ realizează un difeomorfism între $V_e = W_L \times (U \cap H)$ şi $\varphi(W_L \times V_F) = V'_e$. Să considerăm cazul $a \neq e$, $a \in H$. Pe H avem topologia indusă de topologia lui G, deci $U \cap H$ este mulţime deschisă în H. Pentru $a \in H$, aplicaţia

$$R_a : x \in H \to R_a(x) = xa \in H$$

este difeomorfism analitic. Rezultă că $R_a(U \cap H)$ este mulţime deschisă în H. Prin urmare, obţinem că, pentru $a \in H$, mulţimea

$$V_a = W_L \times R_a(U \cap H)$$

este mulţime deschisă în $W_L \times H$.

Următoarea diagrama

$$\begin{tikzcd}
V_a \arrow[r, "Id_{W_L} \times R_{a^{-1}}", "\cong"'] \arrow[d, "\tau"'] & V_e \arrow[d, "\tau", "\cong"'] \\
V'_a \arrow[r, "R_{a^{-1}}"', "\cong"] & V'_e
\end{tikzcd}$$

este comutativă, $(\forall)a \in G$.

În adevar, fie $x = (k, ya) \in V_a = W_L \times (U \cap H)a$, $k \in W_L$, $y \in U \cap H$, $a \in H$. Avem:

$$\begin{aligned} R_{a^{-1}} \circ \tau(x) &= R_{a^{-1}}((\exp k)ya) = (\exp k)y, \\ \tau \circ (Id_{W_L} \times R_{a^{-1}})(x) &= \tau(k, y) = (\exp k)y, \end{aligned}$$

deci diagrama de mai sus este comutativă.

Ştim că mulţimea $V_e = W_L \times (U \cap H)$ este deschisă în $W_L \times H$. Folosind penultima diagramă, rezultă că mulţimea

$$V'_e = \tau(V_e) = \varphi(W_L \times V_F)$$

este deschisă în G. Deoarece translaţia la dreapta $R_{a^{-1}} : G \to G$ este difeomorfism analitic, rezultă că mulţimea

$$V'_a = R_a(V'_e)$$

este deschisă în G. Din comutativitatea ultimei diagrame rezultă că $\tau : V_a \to V'_a$ este difeomorfism analitic.

În concluzie, aplicaţia τ este injectivă şi realizează un difeomorfism local în jurul oricărui punct $a \in W_L \times H$, deci τ este difeomorfism. În plus, mai rezultă că mulţimea

$$\bigcup_{a \in H} V'_a = Q$$

este deschisă în G.

3.3. PROPOZIŢIE. *Menţinem notaţiile din propoziţiile anterioare. Considerăm aplicaţia:*

$$\alpha : W_L \to G/H,$$

definită prin:

$$\alpha(k) = \pi \circ \exp k.$$

Atunci:

i) *Următoarea diagramă este comutativă:*

$$\begin{tikzcd} W_L \times H \arrow[r, "\tau", "\cong"'] \arrow[d, "\pi_1"'] & Q \arrow[d, "\pi"] \\ W_L \arrow[r, "\alpha"'] & G/H \end{tikzcd}$$

(am notat $\pi_1 : W_L \times H \to W_L$, $\pi_1(k,y) = k$, proiecţia pe primul factor).

ii) *Aplicaţia* α *este homeomorfism între* W_L *şi* $\alpha(W_L) = \pi(Q)$ *=mulţime deschisă în* G/H.

iii) $Q = QH$.

iv) $\pi^{-1}(\pi(Q)) = Q$.

Demonstraţie. i) Pentru orice $(k,y) \in W_L \times H$, avem:

$$\begin{aligned} \pi \circ \tau(k,y) &= \pi((\exp k)y) = \pi(\exp k) = \alpha(k) \\ \alpha \circ \pi_1(k,y) &= \alpha(k). \end{aligned}$$

ii) Deoarece aplicaţiile π şi exp sunt continue, rezultă că α este aplicaţie continuă. Să arătăm că α este aplicaţie deschisă. Fie K o mulţime deschisă în W_L. Deoarece π_1 este aplicaţie continuă, rezultă că $\pi_1^{-1}(K)$ este mulţime deschisă în $W_L \times H$. Deoarece τ este difeomorfism şi π este aplicaţie deschisă, rezultă că mulţimea

$$\pi \circ \tau\left(\pi_1^{-1}(K)\right) = \alpha \circ \pi_1(\pi_1^{-1}(K)) = \alpha(K)$$

este deschisă în G/H, deci α este aplicaţie deschisă.

Din comutativitatea diagramei mai rezultă $\alpha(W_L) = \pi(Q)$ =mulţime deschisă în G/H.

Să arătăm că α este injectivă. Presupunem că avem:

$$\alpha(k_1) = \alpha(k_2),\ k_1, k_2 \in W_L.$$

Aceasta implică $\pi \circ \exp k_1 = \pi \circ \exp k_2$, deci există $b \in H$, astfel încât $\exp k_1 = (\exp k_2)b$, adică dacă şi numai dacă $\tau(k_1, e) = \tau(k_2, b)$. Deoarece τ

este difeomorfism, rezultă $k_1 = k_2$ şi $b = e$, deci α este injectivă.
Rezultă că aplicaţia:

$$\alpha : W_L \to \alpha(W_L) = \pi(Q)$$

este bijectivă. Deoarece α este continuă şi deschisă, rezultă că α este homeomorfism.

iii) Deoarece $Q = Qe$, $e \in H$, rezultă $Q \subset QH$. Să stabilim incluziunea $QH \subset Q$. Fie $x \in QH$, deci x se scrie $x = ya$, cu $y \in Q$ şi $a \in H$. Deoarece $y \in Q = \tau(W_L \times H)$, rezultă că există $k \in W_L$ şi $b \in H$, astfel încât $y = \tau(k, b) = (\exp k)b$. Rezultă:

$$x = ((\exp k)b)a = (\exp k)(ba) = \tau(k, ba) \in Q$$

şi deci $QH \subset Q$. Prin urmare, avem $QH = Q$.

iv) Este evident că $Q \subset \pi^{-1}(\pi(Q))$. Să arătăm că $\pi^{-1}(\pi(Q)) \subset Q$. Fie $x \in \pi^{-1}(\pi(Q))$. Rezultă $\pi(x) \in \pi(Q)$, deci există $y \in Q$, astfel încât $\pi(x) = \pi(y)$. Rezultă că există $b \in H$, astfel încât $x = yb$ şi, folosind punctul iii), rezultă:

$$x = yb \in QH = Q,$$

deci $x \in Q$. Am obţinut egalitatea: $\pi^{-1}(\pi(Q)) = Q$.

Notaţie. $\widetilde{Q} = \pi(Q) = \alpha(W_L)$ =mulţime deschisă în G/H.

Observaţie. i) Cu ajutorul homeomorfismului α definim o structură de varietate analitică pe $\widetilde{Q}$. Vom folosi următorul exerciţiu:

"Fie M o varietate analitică reală şi fie M' o mulţime arbitrară. Presupunem că avem o aplicaţie bijectivă $\alpha : M \to M'$. Atunci există o unică structură de varietate analitică reală pe M', astfel încât α să devină difeomorfism".

Deoarece aplicaţia

$$\alpha : W_L \to \widetilde{Q}$$

este bijectivă, rezultă că există o unică structură de varietate analitică pe $\widetilde{Q}$, astfel încât α să devină difeomorfism.

ii) *Pe $\widetilde{Q}$ avem două topologii:*

- topologia $\mathcal{T}$ indusă de $\pi : Q \to \widetilde{Q}$,

- topologia $\mathcal{T}'$ indusă de structura de varietate analitică reală a lui $\widetilde{Q}$.

Am văzut mai înainte că α este homeomorfism dacă considerăm pe $\widetilde{Q}$ topologia $\mathcal{T}$. Din faptul că α este difeomorfism, rezultă că α este homeomorfism şi relativ la topologia $\mathcal{T}'$. Rezultă $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$. Deci l-am făcut pe α difeomorfism şi în raport cu $\mathcal{T}$.

iii) Din comutativitatea ultimei diagrame, obţinem egalitatea:

$$\pi\,|_Q = \alpha \circ \pi_1 \circ \tau^{-1}.$$

Deoarece τ este difeomorfism, π_1 este aplicaţie analitică şi α este difeomorfism, obţinem că $\pi\,|_Q$ este aplicaţie analitică.

3.4. Fie $a \in G$. Considerăm aplicaţia

$$T_a : G/H \to G/H$$

definită prin

$$T_a(bH) = (ab)H.$$

PROPOZIŢIE. *Definiţia aplicaţiei T_a este independentă de alegerea repre tantului din clasa $\widehat{b}$.*

Demonstraţie. Presupunem că

$$bH = b'H.$$

Rezultă

$$T_a(bH) = (ab)H = a(bH) = a(b'H) = (ab')H = T_a(b'H),$$

unde am folosit asociativitatea operaţiei de înmulţire în grupul G.

PROPOZIŢIE. i) *Următoarea diagramă este comutativă:*

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "L_a"'] & G/H \arrow[d, "T_a"] \\ G \arrow[r, "\pi"'] & G/H \end{tikzcd}$$

ii) T_a *este homeomorfism.*

Demonstraţie. i) Pentru orice $b \in G$, avem:

$$\begin{aligned} T_a \circ \pi(b) &= T_a(bH) = (ab)H, \\ \pi \circ L_a(b) &= \pi(ab) = (ab)H. \end{aligned}$$

Prin urmare, avem $\pi \circ L_a = T_a \circ \pi$.

ii) Să arătăm că T_a este aplicaţie bijectivă. Avem:

$$\begin{aligned} T_a \circ T_{a^{-1}}(bH) &= T_a((a^{-1}b)H) = (aa^{-1}b)H = bH, \\ T_{a^{-1}} \circ T_a(bH) &= T_{a^{-1}}((ab)H) = (a^{-1}ab)H = bH. \end{aligned}$$

Prin urmare,

$$T_a \circ T_{a^{-1}} = T_{a^{-1}} \circ T_a = Id_{G/H}.$$

Rezultă că aplicaţiile T_a şi $T_{a^{-1}}$ sunt inverse una alteia, deci

$$(T_a)^{-1} = T_{a^{-1}}.$$

Deoarece aplicaţia π este continuă şi deschisă, iar L_a este difeomorfism, rezultă că T_a este aplicaţie continuă şi deschisă. Prin urmare, aplicaţia T_a este homeomorfism.

3.5. PROPOZIŢIE. *Folosim notaţiile din propoziţiile anterioare. În plus, pentru* $a \in G$, *considerăm mulţimea* $\widetilde{Q}_a = T_a(\widetilde{Q})$ *şi aplicaţia*

$$\alpha_a = T_a \circ \alpha : W_L \to \widetilde{Q}_a.$$

Atunci:

i) $\widetilde{Q}_a$ *este mulţime deschisă în* G/H,

ii) α_a *este homeomorfism.*

Demonstraţie. i) Ştim că T_a este homeomorfism şi că $\alpha(W_L) = \pi(Q) = \widetilde{Q}$ este mulţime deschisă în G/H. Atunci $\widetilde{Q}_a = T_a(Q)$ este mulţime deschisă în G/H.

ii) Deoarece $\alpha : W_L \to \widetilde{Q}$ este difeomorfism, iar T_a este homeomorfism, rezultă că aplicaţia α_a este homeomorfism.

Observaţie. Reamintim că am ales o bază $\{E_1, E_2, ..., E_n\}$ în spaţiul tangent T_eG, astfel încât $\{E_1, E_2, ..., E_r\}$ să fie bază în L, iar $\{E_{r+1}, E_{r+2}, ..., E_n\}$ să fie bază în F. Spaţiul tangent T_eG se identifică cu $\mathbb{R}^n$ prin:

$$X = x^i E_i \in T_eG \to (x^1, ..., x^n) \in \mathbb{R}^n.$$

În acest fel L se identifică cu mulţimea

$$\{(x^1, ..., x^n) \in \mathbb{R}^n \mid x^{r+1} = ... = x^n = 0\},$$

iar F se identifică cu mulţimea

$$\{(x^1, ..., x^n) \in \mathbb{R}^n \mid x^1 = ... = x^r = 0\}.$$

Rezultă că W_L se identifică cu o mulţime deschisă din $\mathbb{R}^{\dim G - \dim H} = \mathbb{R}^r$.

Din propoziţia 3.5, rezultă că α_a este un homeomorfism între W_L(=mulţime deschisă în $\mathbb{R}^r$) şi $\widetilde{Q}_a$(=mulţime deschisă în G/H).

3.6. PROPOZIŢIE. *Familia*

$$\mathcal{A} = \{(\widetilde{Q}_a, \alpha_a^{-1}) \mid a \in G\}$$

este un atlas analitic pe G/H.

Demonstrație. Știm că pentru orice $a \in G$, $\widetilde{Q}_a$ este mulțime deschisă în G/H, iar aplicația

$$\alpha_a^{-1} : \widetilde{Q}_a \to \alpha_a^{-1}(\widetilde{Q}_a) = W_L$$

este un homeomorfism între $\widetilde{Q}_a$ și W_L(=mulțime deschisă în $\mathbb{R}^{\dim G - \dim H}$). Avem:

$$\begin{aligned}
\bigcup_{a\in G} \widetilde{Q}_a &= \bigcup_{a\in G} T_a\left(\widetilde{Q}\right) = \bigcup_{a\in G}(T_a \circ \pi(Q)) = \bigcup_{a\in G}(\pi \circ L_a(Q)) = \\
&= \bigcup_{a\in G} \pi(aQ) = \bigcup_{a\in G} a\pi(Q) = \left(\bigcup_{a\in G} a\right)\pi(Q) = G\widetilde{Q}.
\end{aligned}$$

Să arătăm că $G\widetilde{Q} = G/H$. Este evident că $G\widetilde{Q} \subset G/H$. Să stabilim incluziunea inversă. Fie o clasă $\widehat{a} = aH \in G/H$, cu $a \in G$. Deoarece $e \in Q$ și $\widehat{e} = \pi(e) = H$, rezultă $\widehat{a} = aH = a\pi(e) \in G\widetilde{Q}$. Prin urmare,

$$\bigcup_{a\in G} \widetilde{Q}_a = G/H.$$

Fie $a, b \in G$, astfel încât $\widetilde{Q}_a \cap \widetilde{Q}_b \neq \varnothing$. Aplicația de identificare

$$\alpha_b^{-1} \circ \alpha_a : \alpha_a^{-1}(\widetilde{Q}_a \cap \widetilde{Q}_b) \to \alpha_b^{-1}(\widetilde{Q}_a \cap \widetilde{Q}_b)$$

este dată prin

$$\begin{aligned}
\alpha_b^{-1} \circ \alpha_a &= (T_b \circ \alpha)^{-1} \circ (T_a \circ \alpha) = \alpha^{-1} \circ (T_{b^{-1}} \circ T_a) \circ \alpha = \alpha^{-1} \circ T_{b^{-1}a} \circ \alpha = \\
&= \alpha^{-1} \circ (T_{b^{-1}a} \circ \pi) \circ \exp = \alpha^{-1} \circ (\pi \circ L_{b^{-1}a}) \circ \exp .
\end{aligned}$$

Știm că aplicațiile α^{-1}, $L_{b^{-1}a}$, exp și $\pi\,|_Q$ sunt analitice. Rezultă că aplicația de identificare $\alpha_b^{-1} \circ \alpha_a$ este analitică. Rezultă că G/H este varietate analitică reală de dimensiune egală cu $\dim G - \dim H$.

Observație. Deoarece pentru $a \in G$, perechea $(\widetilde{Q}_a, \alpha_a^{-1})$ este hartă a varietății G/H, rezultă că aplicația

$$\alpha_a = T_a \circ \alpha : W_L \to \widetilde{Q}_a$$

este difeomorfism analitic. Deoarece $\alpha : W_L \to \widetilde{Q}$ este difeomorfism analitic, rezultă că şi aplicaţia

$$T_a = \alpha_a \circ \alpha^{-1} : \widetilde{Q} \to \widetilde{Q}_a$$

este difeomorfism analitic.

3.7. <u>DEFINIŢIE</u>. *Varietatea G/H se numeşte spaţiu omogen.*

3.8. <u>PROPOZIŢIE</u>. i) *Următoarea diagramă este comutativă:*

$$\begin{tikzcd}
W_L \times H \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\pi_1"'] & Q \arrow[r, "L_a"] \arrow[d, "\pi"'] & aQ \arrow[d, "\pi"'] \\
W_L \arrow[r, "\alpha"] & \tilde{Q} \arrow[r, "T_a"] & \tilde{Q}_a
\end{tikzcd}$$

ii) *Proiecţia canonică*

$$\pi : G \to G/H$$

este analitică şi de rang maxim în fiecare punct.

<u>Demonstraţie</u>. i) Pentru $(k, y) \in W_L \times H$, avem:

$$\begin{aligned}
\pi \circ \tau(k, y) &= \pi((\exp k)y) = ((\exp k)y)H = (\exp k)H, \\
\alpha \circ \pi_1(k, y) &= \alpha(k) = \pi \circ \exp k = (\exp k)H.
\end{aligned}$$

Pentru $x \in Q$, avem:

$$\begin{aligned}
\pi \circ L_a(x) &= \pi(ax) = (ax)H, \\
T_a \circ \pi(x) &= T_a(xH) = (ax)H.
\end{aligned}$$

Pentru $(k, y) \in W_L \times H$, avem:

$$\begin{aligned}
\pi \circ L_a \circ \tau(k, y) &= \pi \circ L_a((\exp k)y) = \pi(a((\exp k)y) = (a(\exp k))H, \\
T_a \circ \alpha \circ \pi_1(k, y) &= T_a \circ \alpha(k) = T_a \circ \pi(\exp k) = T_a((\exp k)H) = (a(\exp k))H.
\end{aligned}$$

ii) Din primul pătrat rezultă că aplicaţia

$$\pi\,|_Q = \alpha \circ \pi_1 \circ \tau^{-1}$$

este analitică şi de rang maxim în fiecare punct al lui Q. Deoarece L_a este difeomorfism, rezultă că $L_a(Q) = aQ$ =mulţime deschisă în G. Deoarece π este aplicaţie deschisă, rezultă că $\pi(aQ) = \widetilde{Q}_a$ =mulţime deschisă în G/H.

Din al doilea pătrat obţinem:

$$\pi\,|_{aQ} \circ L_a = T_a \circ \pi\,|_Q \,.$$

Rezultă că aplicaţia

$$\pi\,|_{aQ} = T_a \circ \pi\,|_Q \circ L_{a^{-1}} : aQ \to \widetilde{Q}_a$$

este analitică şi de rang maxim în fiecare punct al lui aQ.
Deoarece $\{aQ\}_{a\in G}$ formează o acoperire deschisă a lui G, rezultă că aplicaţia:

$$\pi : G \to G/H$$

este analitică în jurul oricărui punct $a \in G$. În plus, π este de rang maxim în fiecare punct al lui G. Deci π este submersie.

3.9. Demonstraţia teoremei lui Chevalley. Din propoziţia 3.6. rezultă că G/H este varietate analitică reală şi

$$\dim G/H = \dim G - \dim H.$$

Folosind propoziţia 3.8 obţinem că proiecţia canonică π este analitică şi de rang maxim (submersie), adică G/H este varietate cât a lui G.

Unicitatea. Presupunem că $\mathcal{A}'$ şi $\mathcal{A}''$ sunt două structuri analitice pe G/H, pentru care π este submersie analitica. Atunci aplicaţia

$$Id_{G/H} : (G/H, \mathcal{A}') \to (G/H, \mathcal{A}'')$$

este bijectivă, iar diagrama

$$\begin{tikzcd} & (G,\mathcal{A}) \arrow[dl, "\pi'"'] \arrow[dr, "\pi''"] & \\ (G/H,\mathcal{A}') \arrow[rr, "Id_{G/H}"'] & & (G/H,\mathcal{A}'') \end{tikzcd}$$

este comutativă. Pe baza unei teoreme din analiza pe varietăţi, rezultă că $Id_{G/H}$ este difeomorfism, deci $\mathcal{A}' = \mathcal{A}''$.

Q.E.D.

3.10. Reamintim că dacă H este un subgrup închis al grupului Lie G, atunci H are structură de grup Lie, şi avem:

$$L(H) = T_e H = F,$$

unde

$$\begin{aligned} F &= \{h \in T_e G \mid h = \dot{\alpha}(0),\ \alpha \in S(H)\}, \\ S(H) &= \{\alpha : \mathbb{R} \to G \mid \alpha \text{ este analitică},\ \alpha(0) = e,\ \alpha(\mathbb{R}) \subset H\}. \end{aligned}$$

Am văzut că proiecţia canonică $\pi : G \to G/H$ este analitică şi de rang maxim. Rezultă că oricare ar fi $a \in G$, aplicaţia

$$\pi_{*,a} : T_a G \to T_{\pi(a)}(G/H)$$

este surjectivă. Pentru $a = e$, obţinem aplicaţia

$$\pi_{*,e} : T_e G = L(G) \to T_{\widehat{e}}(G/H), \widehat{e} = \pi(e) = H.$$

PROPOZIŢIE. i) *Cu notaţiile de mai sus, avem*

$$F = \mathrm{Ker}\pi_{*,e}.$$

ii) *Aplicaţia* $\pi_{*,e}$ *induce un izomorfism liniar*

$$L(G)/F \xrightarrow{\cong} T_{\widehat{e}}(G/H).$$

Demonstraţie. i) Fie $h \in F$. Rezultă că există o aplicaţie $\alpha \in S(H)$, astfel încât $h = \overset{\bullet}{\alpha}(0)$. Avem:

$$\pi_{*,e}(h) = \pi_{*,e}\left(\overset{\bullet}{\alpha}(0)\right) = \pi_{*,e} \circ \alpha_{*,0}\left(\frac{d}{dt}\,|_{t=0}\right) = (\pi \circ \alpha)_{*,0}\left(\frac{d}{dt}\,|_{t=0}\right).$$

Deoarece $\mathrm{Im}\,\alpha \subset H$ şi $\pi(H) = H$, rezultă

$$\pi \circ \alpha(t) = \pi(\alpha(t)) = H = \widehat{e},\ (\forall)t \in \mathbb{R},$$

deci $\pi \circ \alpha : \mathbb{R} \to G/H$ este aplicaţie constantă. Rezultă

$$\pi_{*,e}(h) = (\pi \circ \alpha)_{*,0}\left(\frac{d}{dt}\,|_{t=0}\right) = 0,$$

adică $h \in \mathrm{Ker}\pi_{*,e}$, şi deci $F \subset \mathrm{Ker}\pi_{*,e}$.

Aplicaţia $\pi_{*,e}$ fiind surjectivă, rezultă că avem

$$\dim \mathrm{Im}\,\pi_{*,e} = \dim T_{\widehat{e}}(G/H) = \dim L(G) - \dim F.$$

Din teorema de homomorfism de la spaţii vectoriale rezultă că avem următorul izomorfism liniar:

$$\mathrm{Im}\,\pi_{*,e} \cong L(G)/\mathrm{Ker}\pi_{*,e}.$$

Rezultă că $\dim\mathrm{Ker}\pi_{*,e} = \dim F$. Cum $F \subset \mathrm{Ker}\pi_{*,e}$, obţinem

$$F = \mathrm{Ker}\pi_{*,e} = L(H).$$

ii) Folosind punctul precedent, obţinem că aplicaţia $\pi_{*,e}$ induce un izomorfism liniar între $L(G)/L(H)$ şi $T_{\hat{e}}(G/H)$.

3.11. PROPOZIŢIE. *Fie G un grup Lie şi H un subgrup închis al său. Presupunem că H este subgrup normal, adică $aH = Ha$, oricare ar fi $a \in G$. Atunci:*

i) *Există o structură de grup Lie pe G/H, astfel încât proiecţia canonică $\pi : G \to G/H$ este homomorfism de grupuri Lie.*

ii) $L(G/H) = L(G)/L(H)$.

Demonstraţie. i) Fie $\mu : G \times G \to G$ operaţia grupală în G. Definim aplicaţia

$$\overline{\mu} : G/H \times G/H \to G/H$$

prin

$$\overline{\mu}(\pi(a), \pi(b)) = \pi(\mu(a, b)).$$

Se constată uşor că $\overline{\mu}$ este bine definită. De asemenea, se verifică uşor că $\overline{\mu}$ este o lege de grup în mulţimea G/H. Este evident că π este homomorfism de grupuri. Se verifică uşor comutativitatea următoarei diagrame:

$$\begin{tikzcd} G \times G \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\pi \times \pi"'] & G \arrow[d, "\pi"] \\ G/H \times G/H \arrow[r, "\overline{\mu}"'] & G/H \end{tikzcd}$$

Avem: $\pi \circ \mu = \overline{\mu} \circ (\pi \times \pi)$. Deoarece $\pi \times \pi$ este submersie analitică surjectivă, iar $\pi \circ \mu$ este analitică, rezultă că $\overline{\mu}$ este aplicaţie analitică şi deci G/H este grup Lie. Aplicaţia π este homomorfism de grupuri Lie.

ii) Folosind propoziţia 3.10 ii) rezultă că

$$L(G/H) \cong L(G)/L(H).$$

3.12. <u>PROPOZIŢIE</u>. *Fie G şi G' două grupuri Lie şi $h : G \to G'$ un homomorfism de grupuri Lie. Atunci $h(G)$ este grup Lie.*

<u>Demonstraţie</u>. Fie $y_1, y_2 \in h(G)$. Există $x_1, x_2 \in G$ cu proprietatea că $h(x_1) = y_1$, $h(x_2) = y_2$. Deoarece h este homomorfism de grupuri, avem

$$y_1 y_2 = h(x_1)h(x_2) = h(x_1 x_2) \in h(G).$$

Analog se arată că dacă $y \in h(G)$, atunci şi $y^{-1} \in h(G)$. În concluzie, $h(G)$ este subgrup al grupului G'.

Vom studia în continuare două cazuri.

<u>Cazul I</u>. *Aplicaţia h este injectivă.* Este evident că aplicaţia $h : G \to h(G)$ este bijectivă. Rezultă că există o unică structură de varietate analitică reală pe $h(G)$, astfel încât aplicaţia $h : G \to h(G)$ să devină difeomorfism.

Fie μ (resp. μ') operaţia grupală în G (resp. G'). Următoarea diagramă este comutativă:

$$\begin{tikzcd}
G \times G \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "h\times h"', "\cong"] & G \arrow[d, "h", "\cong"'] \\
h(G) \times h(G) \arrow[r, "\mu'"'] & h(G)
\end{tikzcd}$$

În adevăr, pentru orice $(a, b) \in G \times G$, avem

$$\mu' \circ (h \times h)(a, b) = \mu'(h(a), h(b)) = h(a)h(b) = h(ab) = h \circ \mu(a, b).$$

Rezultă $\mu' \circ (h \times h) = h \circ \mu$. De aici obţinem egalitatea

$$\mu' \,|_{h(G)\times h(G)} = h \circ \mu \circ (h \times h)^{-1}.$$

Deoarece h şi $(h \times h)^{-1}$ sunt difeomorfisme analitice, iar aplicaţia μ este analitică, obţinem că aplicaţia $\mu' \mid_{h(G)\times h(G)}$ este analitică. Prin urmare, structura de varietate analitică şi structura de grup a lui $h(G)$ sunt compatibile, deci $h(G)$ este grup Lie de dimensiune egală cu dimensiunea varietăţii G.

<u>**Cazul II**</u>. *Aplicaţia h nu este injectivă.* Am văzut în propoziţia 1.9.3 (cap. II) că Ker$h$ este subgrup închis. Pentru orice $y \in$Ker$h$, şi orice $x \in G$, avem

$$\begin{aligned} h(xyx^{-1}) &= h(x)h(y)h(x^{-1}) = h(x)e'h(x^{-1}) = h(x)h(x^{-1}) = \\ &= h(xx^{-1}) = h(e) = e', \end{aligned}$$

unde e (resp. e') este elementul neutru al grupului G (resp. G'). Rezultă că avem

$$xyx^{-1} \in \mathrm{Ker}h,\ x \in G,\ y \in \mathrm{Ker}h.$$

Prin urmare, Ker$h$ este subgrup normal şi, conform propoziţiei precedente, există o structură de grup Lie pe $G/$Ker$h$, astfel încât proiecţia canonică $\pi : G \to G/$Ker$h$ este homomorfism de grupuri Lie.

Considerăm aplicaţia $h' : G/$Ker$h \to G'$, astfel încât următoarea diagramă să fie comutativă

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "h"'] & G/Ker\ h \arrow[dl, "h'"] \\ G' & \end{tikzcd}$$

Avem deci $h' \circ \pi = h$. Aplicaţia h' este bine definită, căci

$$\widehat{x} = \widehat{y} \Leftrightarrow h(x) = h(y).$$

În adevăr, din $\widehat{x} = \widehat{y}$ rezultă $\pi(x) = \pi(y)$. De aici obţinem $h' \circ \pi(x) = = h' \circ \pi(y)$, adică $h(x) = h(y)$.

Reciproc, din $h(x) = h(y)$ rezultă:

$$e' = h(x)(h(y))^{-1} = h(x)h(y^{-1}) = h(xy^{-1}).$$

Prin urmare, xy^{-1} $\in$Ker$h$. Aceasta implică $\widehat{e} = \pi(xy^{-1}) = \pi(x)\pi(y^{-1}) =$ $= \pi(x)(\pi(y))^{-1}$. Prin urmare, avem $\pi(x) = \pi(y)$, adică $\widehat{x} = \widehat{y}$.

Ţinând seama de propoziţia 1.19 (Cap. I), rezultă că aplicaţia h' este analitică. Deoarece avem

$$h'(\widehat{x})h'(\widehat{y}) = h(x)h(y) = h(xy) = h'(\widehat{xy}) \text{şi } h'(\widehat{e}) = h(e) = e',$$

rezultă că h' este homomorfism de grupuri Lie. Homomorfismul h' este injectiv, deoarece

$$h'(\widehat{x}) = h'(\widehat{y}) \Longrightarrow h(x) = h(y) \Longrightarrow \widehat{x} = \widehat{y}.$$

Aplicând **Cazul I**, rezultă că $h(G) = h'(G/\text{Ker}h)$ este grup Lie.

3.13. PROPOZIŢIE. *Fie G un grup Lie, şi fie G_e componenta conexă a varietăţii G, care conţine elementul neutru e. Atunci:*

i*) G_e este subgrup Lie al grupului G.*

ii*) G_e este subgrup normal.*

iii*) $L(G_e) = L(G)$.*

Demonstraţie. i) Am văzut în Cap. I (Propoziţia 3.5) că G_e este grup Lie de dimensiune egală cu $n = \dim G$. Deoarece G_e este subvarietate deschisă a lui G, incluziunea $i : G_e \to G$ este aplicaţie analitică, şi deci perechea (G_e, i) este subgrup Lie al lui G.

ii) Avem $aG_e = G_e a$, $(\forall)a \in G$, deci G_e este subgrup normal.

iii) Incluziunea $i : G_e \to G$ este imersie şi submersie. Rezultă că $T_e(G_e) = T_e G$, şi deci $L(G_e) = L(G)$.

§ 4. PROPRIETĂŢI TOPOLOGICE ALE SUBGRUPURILOR GRUPULUI LINIAR $GL(n, K)$ ($K = \mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$)

4.0. Reamintim că se numeste **drum**, unind punctele a şi b în spaţiul topologic X, orice aplicaţie continuă $c : [0,1] \to X$, cu $c(0) = a$, $c(1) = b$.

Spaţiul topologic X se numeşte **liniar conex** (sau **conex prin arce**), dacă oricare două puncte ale lui X pot fi unite cu un drum în X.

4.1. PROPOZIŢIE.

i) *Grupul Lie $SU(n)$ este liniar conex.*

ii) *Grupul Lie $U(n)$ este liniar conex.*

iii) *Grupul Lie $SO(n)$ este liniar conex.*

iv) *Grupul Lie $O(n)$ nu este liniar conex.*

Demonstraţie.

i) Ştim că mulţimea

$$SU(n) = \{A \in U(n) \mid \det A = 1\}$$

poate fi structurată ca grup Lie (a se vedea 2.2.3, Cap. II). Fie $A \in SU(n)$. Deoarece $\det A = 1$, rezultă că există o matrice unitară $S \in SU(n)$, astfel încât matricea $B = SAS^{-1}$ să fie o matrice diagonală de forma

$$B = \left(\delta^j_k e^{2\pi i \lambda_j}\right)_{1 \le j,k \le n}, \ \lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 0.$$

Definim aplicaţia $\beta : [0,1] \to GL(n, \mathbb{C})$ prin

$$\beta(t) = \left(\delta^j_k e^{2\pi i t \lambda_j}\right)_{1 \le j,k \le n}, \ t \in [0,1].$$

Pentru orice $t \in [0,1]$, avem:

$$\begin{aligned}\left({}^T\beta(t)\overline{\beta(t)}\right)^r_s &= \sum_{p=1}^n \left({}^T\beta(t)\right)^r_p \left(\overline{\beta(t)}\right)^p_s = \sum_{p=1}^n \left(\beta(t)\right)^p_r \left(\overline{\beta(t)}\right)^p_s = \\ &= \sum_{p=1}^n \delta^p_r e^{2\pi i t \lambda_p} \delta^p_s e^{-2\pi i t \lambda_p} = \sum_{p=1}^n \delta^p_r \delta^p_s e^{2\pi i t(\lambda_p - \lambda_p)} = \delta^r_s.\end{aligned}$$

Am obţinut egalitatea ${}^T\beta(t)\overline{\beta(t)} = I_n$. De aici rezultă faptul că imaginea curbei β se află în $U(n)$, deci $\beta(t) \in U(n)$, $(\forall)t \in [0,1]$. Deoarece $\lambda_1 + ... + \lambda_n = 0$, obţinem

$$\det \beta(t) = e^{2\pi i t\lambda_1}...e^{2\pi i t\lambda_n} = e^{2\pi i t(\lambda_1+...+\lambda_n)} = 1$$

adică $\beta(t) \in SU(n)$, $(\forall)t \in [0,1]$. În plus $\beta(0) = I_n$ şi $\beta(1) = B$.
Prin urmare, $\beta : [0,1] \to GL(n,\mathbb{C})$ este un drum continuu a cărui imagine este în $SU(n)$, care uneşte $I_n = \beta(0)$ cu $B = \beta(1)$.

Fie aplicaţia $\alpha : [0,1] \to GL(n,\mathbb{C})$ definită prin

$$\alpha(t) = S^{-1}\beta(t)S.$$

Pentru orice $t \in [0,1]$, avem

$$\det \alpha(t) = (\det S)^{-1} \det \beta(t) \det S = \det \beta(t) = 1,$$

ceea ce ne arată că $\alpha(t) \in SL(n,\mathbb{C})$, $(\forall)t \in [0,1]$.

Deoarece $\beta(t) \in U(n)$ şi $S \in U(n)$ rezultă

$${}^T\alpha(t)\overline{\alpha(t)} = {}^T S\, {}^T\beta(t) \left({}^T S\right)^{-1} \left(\overline{S}\right)^{-1} \overline{\beta(t)}\,\overline{S} = {}^T S\, {}^T\beta(t)\overline{\beta(t)} S = {}^T S \overline{S} = I_n,$$

ceea ce ne arată că

$$\alpha(t) \in U(n), \ (\forall)t \in [0,1].$$

Am obţinut faptul că

$$\alpha(t) \in SU(n) = U(n) \cap SL(n,\mathbb{C}), \ (\forall)t \in [0,1].$$

Prin urmare, $\alpha : [0,1] \to SU(n)$ este un drum continuu ce uneşte $\alpha(0) = S^{-1}\beta(0)S = I_n$ cu $\alpha(1) = S^{-1}\beta(1)S = S^{-1}BS = A$.

În concluzie, orice element al lui $SU(n)$ poate fi unit cu I_n printr-un drum continuu conţinut în $SU(n)$. Rezultă că *grupul Lie $SU(n)$ este liniar conex.*

ii) Se procedează ca la punctul precedent, doar că $S, B \in U(n)$ şi nu mai apare condiţia $\lambda_1 + ... + \lambda_n = 0$.

iii) Fie $A \in SO(n)$, deci ${}^T AA = I_n$ şi $\det A = 1$.
Există o matrice $B \in SO(n)$, cu proprietatea că $C = B^{-1}AB$ este de forma $C = diag\ (I_p, r_1, ..., r_q)$, unde avem:

$$r_j = \begin{pmatrix} \cos 2\pi\lambda_j & -\sin 2\pi\lambda_j \\ \sin 2\pi\lambda_j & \cos 2\pi\lambda_j \end{pmatrix},\ p + 2q = n.$$

Considerăm aplicaţia $\beta : [0,1] \to GL(n, \mathbb{R})$, definită prin:

$$\beta(t) = diag\ (I_p, r_1(t), ..., r_q(t)),$$

unde

$$r_j(t) = \begin{pmatrix} \cos 2\pi t\lambda_j & -\sin 2\pi t\lambda_j \\ \sin 2\pi t\lambda_j & \cos 2\pi t\lambda_j \end{pmatrix}.$$

Este evident că β este un drum continuu şi că $\beta(0) = I_n$, $\beta(1) = C$. Pentru orice $t \in [0,1]$, avem $\beta(t) \in SL(n, \mathbb{R})$, căci

$$\det \beta(t) = \det I_p \cdot \det r_1(t) ... \det r_q(t) = 1.$$

Avem

$${}^T\beta(t) \cdot \beta(t) = diag\ ({}^T I_p \cdot I_p, {}^T r_1(t) \cdot r_1(t), ..., {}^T r_q(t) \cdot r_q(t)) = I_n,$$

ceea ce ne arată că $\beta(t) \in O(n)$, $(\forall)t \in [0,1]$.

Prin urmare, β este un drum continuu ce uneşte I_n cu C şi este conţinut în $SO(n) = O(n) \cap SL(n, \mathbb{R})$.

Fie $\alpha : [0,1] \to GL(n, \mathbb{R})$, $\alpha(t) = B\beta(t)B^{-1}$.
Avem $\alpha(0) = BI_nB^{-1} = I_n$, $\alpha(1) = BCB^{-1} = A$. Prin urmare, α este un drum continuu ce uneşte I_n cu A. Deoarece $(\forall)t \in [0,1]$, avem:

$$\det \alpha(t) = \det B \det \beta(t) \det B^{-1} = 1;$$

rezultă $\alpha(t) \in SL(n, \mathbb{R})$.

Din ${}^T\alpha(t)\alpha(t) = \left({}^TB\right)^{-1} {}^T\beta(t)^T B \cdot B\beta(t)B^{-1} = I_n$, rezultă că $\alpha(t) \in O(n)$. Prin urmare,

$$\alpha(t) \in O(n) \cap SL(n, \mathbb{R}) = SO(n), \ (\forall)t \in [0, 1].$$

Rezultă că orice element din $SO(n)$ poate fi unit cu I_n printr-un drum continuu conţinut în $SO(n)$. În concluzie, $SO(n)$ *este liniar conex.*

iv) Fie $A = \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in O(n)$. Este evident că $\det A = -1$. Presupunem că $O(n)$ ar fi liniar conex. Atunci ar exista o aplicaţie continuă $\alpha : [0, 1] \to O(n)$, astfel încât $\alpha(0) = I_n$ şi $\alpha(1) = A$.

Fie $\lambda : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $\lambda(t) = \det \alpha(t)$. Atunci $\lambda(t) \neq 0$, $(\forall)t \in [0, 1]$, $\lambda(0) = 1$, $\lambda(1) = \det \alpha(1) = \det A = -1$ şi λ este continuă. Aceste condiţii sunt incompatibile. Deci *grupul Lie* $O(n)$ *nu este liniar conex.*

4.2. DEFINIŢIE. Fie X un spaţiu topologic.

i) X *se numeşte* **conex** *dacă* X *nu se poate reprezenta ca reuniune a doi deschişi (sau închişi) disjuncţi, nevizi.*

ii) X *se numeşte* **local liniar conex** *dacă* X *admite un sistem fundamental de vecinătăţi liniar conexe.*

iii) X *se numeşte* **local conex** *dacă admite un sistem fundamental de vecinătăţi conexe.*

iv) *Fie* $x \in X$. **Componenta conexă** *a lui* x *în* X *este reuniunea tuturor submulţimilor conexe ale lui* X *care conţin pe* x.

4.3. PROPOZIŢIE.

i) *Orice spaţiu liniar conex este conex.*

ii) *Orice spaţiu conex şi local liniar conex este liniar conex.*

Demonstraţie.

i) Fie X un spaţiu liniar conex. Vom arăta că două puncte arbitrare din X aparţin aceleiaşi componente conexe.

Fie $x, y \in X$.

Fie $c : [0, 1] \to X$ un drum continuu cu $c(0) = x$ şi $c(1) = y$. Deoarece imaginea continuă a unei mulţimi conexe este mulţime conexă, rezultă că $c([0, 1])$ este mulţime conexă. Deoarece $x, y \in c([0, 1])$, $(\forall)x, y \in X$ rezultă că X are o singură componentă conexă.

ii) Fie $x \in X$ şi $X_x = \{y \in X \mid \exists\omega : [0,1] \to X$ continuă, astfel încât $\omega(0) = x$, $\omega(1) = y\}$ componenta liniar conexă a lui x.

Arătăm că X_x este mulţime deschisă, adică $(\forall)y \in X_x$, există V vecinătate deschisă a lui y astfel încât $V \subset X_x$.

Fie $y \in X_x$. Evident, din construcţie $X_x = X_y$.

Cum X este local liniar conexă, rezultă că există V vecinătate deschisă, liniar conexă astfel încât $V \subset X_y$.

Aşadar $V \subset X_x$.

De asemenea, $X \setminus X_x$ este mulţime deschisă.

Fie $z \in X \setminus X_x$. Atunci $X_z \cap X_x = \varnothing$.
Presupunem prin absurd că $\exists u \in X_z \cap X_x$. Atunci

$$\begin{aligned} \exists\omega &: [0,1] \to X \text{ astfel încât } \omega(0) = x,\ \omega(1) = u \\ \exists\eta &\quad [0,1] \to X \text{ astfel încât } \eta(0) = u,\ \eta(1) = z. \end{aligned}$$

Rezultă că $\omega*\eta : [0,1] \to X, \omega*\eta(0) = x, \omega*\eta(1) = z$ şi $z \in X_x$. Contradicţie.

Pentru orice $z \in X \setminus X_x$, avem $X_z \subset X \setminus X_x$ mulţime deschisă. Deci $X = X_x \cup (X \setminus X_x)$. Contradicţie, X fiind conexă.

În concluzie, $X \setminus X_x = \varnothing$ şi $X = X_x$, aşadar X este liniar conexă.

4.4. EXEMPLE.

4.4.1. Considerăm mulţimea $G = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ (a se vedea exemplul 2.2.9, Cap. I). Ştim că G, înzestrat cu legea de compoziţie

$$\mu : G \times G \to G, \quad \mu(a,b) = ab + a + b,$$

este un grup. Deoarece G este varietate analitică de dimensiune unu, rezultă că G devine grup Lie de dimensiune unu. Deoarece avem

$$G = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty),$$

rezultă că grupul Lie G *nu este conex.*

4.4.2. Considerăm mulţimea $G = \mathbb{R}^4 \setminus \{x^3 = -1\}$ şi aplicaţia $\mu : G \times G \to G$ definită prin:

$$\mu : \begin{cases} x''^1 = x^1 + x'^1 + x^1 x'^3 \\ x''^2 = x^2 + x'^2 + 2x^2 x'^3 + x^2 \left(x'^3\right)^2 \\ x''^3 = x^3 + x'^3 + x^3 x'^3 \\ x''^4 = x^4 + x'^4 + 2x^4 x'^3 + x^4 \left(x'^3\right)^2 \end{cases}$$

Este evident că $G = \mathbb{R}^4 \setminus \{(x^1, x^2, x^3, x^4) \in \mathbb{R}^4 \mid x^3 = -1\}$ este mulţime deschisă în varietatea $\mathbb{R}^4$, deci G este varietate analitică de dimensiune patru. Se constată uşor că μ este o lege de grup în mulţimea punctelor lui G. Deoarece aplicaţia μ este analitică, rezultă că G este grup Lie de dimensiune patru. Notăm:

$$\begin{aligned} G_1 &= \{\left(x^1, x^2, x^3, x^4\right) \in \mathbb{R}^4 \mid x^3 < -1\}, \\ G_2 &= \{\left(x^1, x^2, x^3, x^4\right) \in \mathbb{R}^4 \mid x^3 > -1\}. \end{aligned}$$

Este evident că G_1 şi G_2 sunt mulţimi deschise în G. Deoarece avem $G = G_1 \cup G_2$, rezultă că grupul Lie G *nu este conex.*

4.4.3. Ştim că varietatea

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 \neq 0\},$$

înzestrată cu legea de compoziţie

$$\mu : G \times G \to G, \quad \mu\left((x, y), (x', y')\right) = (xx' + yy', xy' + x'y),$$

devine un grup Lie de dimensiune doi. Este evident că:

$$\begin{aligned} G_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 < 0\} \text{şi} \\ G_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 > 0\} \end{aligned}$$

sunt mulţimi deschise în G. Deoarece avem $G = G_1 \cup G_2$ rezultă că grupul Lie G *nu este conex.*

4.5. PROPOZIŢIE. *Grupul Lie $GL(n, \mathbb{R})$ nu este conex.*

Demonstraţie. Ştim că varietatea

$$GL(n,\mathbb{R}) = \{a \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \det a \neq 0\}$$

înzestrată cu operaţia de înmulţire a matricelor devine un grup Lie de dimensiune n^2 (a se vedea exemplul 2.2.7, Cap. I). Este uşor de văzut că

$$\begin{aligned} GL(n,\mathbb{R})^- &= \{a \in GL(n,\mathbb{R}) \mid \det a < 0\} \text{şi} \\ GL(n,\mathbb{R})^+ &= \{a \in GL(n,\mathbb{R}) \mid \det a > 0\} \end{aligned}$$

sunt mulţimi deschise în $GL(n,\mathbb{R})$.

Deoarece $GL(n,\mathbb{R}) = GL(n,\mathbb{R})^- \cup GL(n,\mathbb{R})^+$, rezultă că grupul Lie $GL(n,\mathbb{R})$ nu este conex.

4.6. OBSERVAŢII.

4.6.1. Folosind propoziţiile 4.3 i) şi 4.1 rezultă că:

i) *grupul Lie $SU(n)$ este conex,*

ii) *grupul Lie $U(n)$ este conex,*

iii) *grupul Lie $SO(n)$ este conex.*

4.6.2. *Grupul Lie $O(n)$ are două componente conexe; componenta conexă a unităţii grupului Lie $O(n)$ este $SO(n)$.*

4.7. DEFINIŢIE. *O submulţime Y a unui spaţiu topologic X se numeşte* **compactă** *dacă fiecare acoperire deschisă a sa conţine o subacoperire finită. În particular, X este compact, dacă orice acoperire deschisă a sa are o subacoperire finită.*

4.8. OBSERVAŢIE.

i) O submulţime Y a spaţiului topologic X este compactă dacă şi numai dacă Y este compact ca spaţiu, cu topologia indusă.

ii) Imaginea continuă a unui spaţiu compact este un spaţiu compact.

iii) Fie X şi Y două spaţii topologice. Atunci produsul $X \times Y$ este compact dacă şi numai dacă X şi Y sunt spaţii compacte.

iv) O mulţime a lui $\mathbb{R}^n$ este compactă dacă şi numai dacă este mărginită şi închisă.

4.9. PROPOZIŢIE.

i) *Grupul Lie* $\mathbb{R}^n$ (a se vedea exemplul 2.2.1, Cap. I) *este necompact.*

ii) *Grupurile Lie* $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ *şi* $\mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ (a se vedea exemplele 2.2.2 şi 2.2.4, Cap. I) *sunt necompacte.*

iii) *Grupurile Lie* S^1 *şi* S^3 (a se vedea exemplele 2.2.3 şi 2.2.5, Cap. I) *sunt compacte.*

iv) *Grupul Lie* $GL(n, \mathbb{R})$ (a se vedea exemplul 2.2.7) *este necompact.*

v) *Grupul Lie* $O(n)$ *este compact.*

vi) *Grupul Lie* $SO(n)$ *este compact.*

vii) *Grupul Lie* $U(n)$ *este compact.*

viii) *Grupul Lie* $SU(n)$ *este compact.*

Demonstraţie.

i) - iv) Evident.

v) Fie $A = \left(a^i_j\right) \in O(n)$. Condiţia ${}^T A A = I_n$ se scrie

$$\sum_{i=1}^{n} a^i_j a^i_k = \delta_{jk}.$$

De aici rezultă:

$$\left(a^1_j\right)^2 + ... + \left(a^n_j\right)^2 = 1, \ (\forall) j \in \{1, 2, ..., n\}.$$

Prin urmare, trebuie să avem:

$$-1 \leq a^i_j \leq 1, \ (\forall) i, j \in \{1, 2, ..., n\}.$$

Rezultă că $O(n)$ este mărginit.

Deoarece $O(n)$ este închis în $GL(n, \mathbb{R})$, rezultă că $O(n)$ este compact.

vi) Deoarece $SO(n)$ este submulţime închisă în compactul $O(n)$, rezultă că $SO(n)$ este compact.

vii) Fie $A = \left(a^i_j\right) \in U(n)$. Condiţia $A^{-1} = \widetilde{A}$ se mai scrie sub forma ${}^T A \overline{A} = I_n$, sau sub forma:

$$\sum_{k=1}^{n} a^k_i \overline{a}^k_j = \delta_{ij}, \ (\forall) i, j \in \{1, ..., n\}.$$

Rezultă

$$\sum_{k=1}^{n} \left|a_i^k\right|^2 = 1, \text{ deci } \left|a_i^k\right| \leq 1, \ (\forall) i, k \in \{1, ..., n\}.$$

Prin urmare $U(n)$ este submulţime mărginită în $GL(n, \mathbb{C})$. Cum $U(n)$ este şi închisă, rezultă că $U(n)$ este compactă.

viii) $SU(n)$ este închis în compactul $U(n)$. Rezultă că $SU(n)$ este compact.

4.10. DEFINIŢIE. *Fie X un spaţiu topologic şi fie $c, c' : [0,1] \to X$ două aplicaţii continue, astfel încât $c'(0) = c(1)$. Se numeşte* **compunerea drumurilor** *c şi c' un drum notat $c * c'$, definit prin formula*

$$c * c'(t) = \begin{cases} c(2t), \text{ dacă } 0 \leq 2t \leq 1 \\ c'(2t-1), \text{ dacă } 1 \leq 2t \leq 2. \end{cases}$$

4.11. DEFINIŢIE. *Fie X un spaţiu topologic şi fie $c, c' : [0,1] \to X$ două aplicaţii continue cu $c(0) = c'(0)$ şi $c(1) = c'(1)$. Vom spune că c şi c' sunt* **omotope** *(se scrie $c \simeq c'$) dacă există o aplicaţie continuă*
$b : [0,1] \times [0,1] \to X$, astfel încât să avem:

i) $b(t, 0) = c(t)$, $(\forall) t \in [0,1]$,
ii) $b(t, 1) = c'(t)$, $(\forall) t \in [0,1]$,
iii) $b(0, s) = c(0) = c'(0)$, $b(1, s) = c(1) = c'(1)$, $(\forall) s \in [0,1]$.

4.12. OBSERVAŢIE.

i) Omotopia drumurilor este o relaţie de echivalenţă. Clasa de echivale omotopică a unui drum $c : [0,1] \to X$ o vom nota prin $[c]$.

ii) Reamintim că dacă X este un spaţiu topologic şi $x_0 \in X$, atunci un drum $c : [0,1] \to X$ este închis în punctul $x_0 \in X$ dacă $c(0) = c(1) = x_0$.

iii) Fie X un spaţiu topologic şi $x_0 \in X$ un punct fixat. Să considerăm mulţimea $\Pi(X, x_0)$ a claselor de drumuri închise în punctul $x_0 \in X$. Definim legea de compoziţie

$$* : \Pi(X, x_0) \times \Pi(X, x_0) \to \Pi(X, x_0)$$

prin $[c] * [c'] = [c * c']$, unde $[c], [c'] \in \Pi(X, x_0)$. Se constată că perechea $(\Pi(X, x_0), *)$ este un grup. Acest grup se numeşte **grupul Poincaré** al spaţiului X cu punctul bază x_0. Elementul neutru al acestui grup este $[E_{x_0}] = 1_{x_0}$, unde

$$E_{x_0} : [0,1] \to X,\ E_{x_0}(t) = x_0,\ (\forall)t \in [0,1].$$

iv) Dacă X este spaţiu topologic liniar conex, atunci grupurile fundamentale în puncte diferite sunt izomorfe, printr-un izomorfism de conjugare.

Într-adevar, fie x_0, $x_1 \in X$ şi $\alpha : [0,1] \to X$ drum continuu, $\alpha(0) = x_0$, $\alpha(1) = x_1$.

Aplicaţia

$$\alpha_* : \Pi_1(X, x_0) \to \Pi_1(X, x_1)$$

definită prin

$$\alpha_* ([\sigma]) = \left[\alpha^{-1} * \sigma \circ \alpha\right],\ (\forall)\,[\sigma] \in \Pi_1(X, x_0),$$

este un izomorfism de grupuri.

v) Fie X şi Y două spaţii topologice şi $f : X \to Y$ aplicaţie continuă astfel încât $f(x_0) = y_0$

Aplicaţia

$$f_\# : \Pi_1(X, x_0) \to \Pi_1(Y, y_0),$$

definită prin

$$f_\# ([\omega]) = [f \circ \omega],$$

este homomorfism de grupuri.

4.13. DEFINIŢIE. *Fie X un spaţiu liniar conex. X se numeşte* **simplu conex** *dacă grupul Poincaré* $\Pi(X, x_0)$ *este trivial,* $(\forall)x_0 \in X$.

4.14. *Fie X şi Y două spaţii topologice şi $f_0, f_1 : X \to Y$ două aplicaţii continue. Aplicaţiile f_0 şi f_1 se numesc* **omotope** *dacă există o aplicaţie continuă*

$$F : X \times [0,1] \to Y,$$

astfel încât $(\forall)x \in X$ *să avem* $F(x,0) = f_0(x)$ *şi* $F(x,1) = f_1(x)$ (F se numeţte **omotopie** a lui f_0 cu f_1 şi se notează $F : f_0 \simeq f_1$).

4.15. EXEMPLE.

4.15.1. Considerăm spaţiul topologic $\mathbb{R}^n$ şi aplicaţiile $f_0,\ f_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f_0(x) = x$, $f_1(x) = 0$, $(\forall)x \in \mathbb{R}^n$. Definim aplicaţia $F : \mathbb{R}^n \times [0,1] \to \mathbb{R}^n$, prin $F(x,t) = (1-t)x$, $(\forall)x \in \mathbb{R}^n$, $(\forall)t \in [0,1]$. Deoarece avem
$F(x,0) = x = f_0(x)$ şi $F(x,1) = 0 = f_1(x)$, $(\forall)x \in \mathbb{R}^n$ rezultă că $F : f_0 \simeq f_1$.

4.15.2. Considerăm aplicaţiile continue $f_0, f_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Definim aplicaţia $F : \mathbb{R}^n \times [0,1] \to \mathbb{R}^n$, prin

$$F(x,t) = (1-t)f_0(x) + tf_1(x),\ (\forall)t \in [0,1],\ (\forall)x \in \mathbb{R}^n.$$

Este evident că $F(x,0) = f_0(x)$ şi $F(x,1) = f_1(x)$.
Prin urmare, F este omotopie a lui f_0 cu f_1, deci $F : f_0 \simeq f_1$.

4.16. DEFINIŢIE. *Un spaţiu topologic* X *se numeşte* **contractibil** *dacă aplicaţia identică* Id_X *este omotopă cu o aplicaţie constantă* $X \to \{x_0\}$. *O omotopie dintre aceste două aplicaţii se numeşte* **contracţia lui** X **în** x_0.

4.17. Exemplu. Spaţiul $\mathbb{R}^n$ este contractibil la orice $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

În adevăr, este uşor de văzut ca aplicaţia

$$F : \mathbb{R}^n \times [0,1] \to \mathbb{R}^n,\ F(x,t) = (1-t)x + tx_0$$

este o omotopie între $Id_{\mathbb{R}^n}$ şi aplicaţia constantă $\mathbb{R}^n \to \{x_0\}$, $(\forall)x_0 \in \mathbb{R}^n$.

4.18. PROPOZIŢIE. Fie X un spaţiu contractibil. Atunci:

i) X este spaţiu liniar conex,

ii) X este spaţiu simplu conex.

Demonstraţie. Deoarece X este spaţiu contractibil la $x_0 \in X$, rezultă că există o aplicaţie continuă

$$b : X \times [0,1] \to X,$$

astfel încât

$$b(x,0) = x,\ b(x,1) = x_0.$$

i) Fie două puncte arbitrare $x_1, x_2 \in X$. Definim aplicaţia

$$f_{x_1,x_2} : [0,1] \to X$$

prin

$$f_{x_1,x_2}(t) = \begin{cases} b(x_1, 2t), & \text{dacă } 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ b(x_2, 2-2t), & \text{dacă } \frac{1}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

Deoarece avem

$$\begin{aligned} f_{x_1,x_2}(0) &= b(x_1,0) = x_1 \text{şi} \\ f_{x_1,x_2}(1) &= b(x_2,0) = x_2, \end{aligned}$$

rezultă că f_{x_1,x_2} este un drum continuu care uneşte punctele x_1 şi x_2. Deci X este liniar conex.

ii) Vom folosi următoarea teoremă de topologie:

"Fie X, Y două spaţii topologice şi $f, g : X \to Y$ aplicaţii continue, astfel încât $f(x_0) = g(x_0) = y_0$.

Dacă f şi g sunt omotope, atunci $f_\#, g_\# : \Pi_1(X, x_0) \to \Pi_1(Y, y_0)$ sunt egale."

Deoarece $Id_X \sim \varepsilon_{x_0}$, unde $\varepsilon_{x_0} : X \to \{x_0\}$, $\varepsilon_{x_0}(x) = x_0$, rezultă că $(Id_X)_\# = (\varepsilon_{x_0})_\#$, deci

$$\Pi_1(X, x_0) = \Pi_1(\{x_0\}, x_0) = 1_{x_0}.$$

Aşadar X este simplu conex.

4.19. <u>PROPOZIŢIE</u>. *Grupul Lie $\mathbb{R}^n$ este simplu conex.*

<u>Demonstraţie</u>. Se aplică punctul ii) din propoziţia anterioară şi exemplul 4.17.

4.20. <u>PROPOZIŢIE</u>. *Pentru $n \ge 2$, sfera S^n este un spaţiu simplu conex.*

Demonstraţie. Fie $U_N = S^n \setminus \{N\}$ şi $U_S = S^n \setminus \{S\}$, unde $N = (0, ..., 0, 1)$ şi $S = (0, ..., 0, -1)$. Ştim că U_N şi U_S sunt homeomorfe cu $\mathbb{R}^n$ (prin proiecţii stereografice). Deci U_N şi U_S sunt contractibile. Conform propoziţiei 4.18, U_N şi U_S sunt simplu conexe. În plus, $U_N \cap U_S$ este homeomorf cu $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, şi pentru $n \geq 2$, $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ este un spaţiu liniar conex. Vom folosi în continuare următoarea teoremă de topologie: "Fie X un spaţiu topologic, liniar conex şi fie X_1, X_2 două subspaţii deschise, liniar conexe, astfel încât $X = X_1 \cup X_2$ şi $U = X_1 \cap X_2$ este o mulţime nevidă, liniar conexă. Dacă X_1 şi X_2 sunt simplu conexe, atunci X este simplu conex."

Luând $X = S^n$, $X_1 = U_N$, $X_2 = U_S$ obţinem că S^n este un spaţiu simplu conex.

4.21. Corolar. *Grupul Lie S^3 este simplu conex.*

4.22. PROPOZIŢIE. *Grupul Lie $SU(n)$ este simplu conex.*

Demonstraţie. Am văzut la punctul 2.2.3 că $SU(n)$ este grup Lie. Fie H subgrupul lui $SU(n)$ format din matricele de forma $h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}$, unde u este o matrice de ordinul $n-1$. Vom arăta că H este izomorf cu $SU(n-1)$. În adevăr, dacă $h \in G = SU(n)$, atunci avem $\widetilde{h}h = I_n$ ($\widetilde{h}$ este conjugata matricei transpuse lui h) şi $\det h = 1$. Rezultă $\widetilde{u}u = 1$ şi $\det u = 1$, deci $u \in SU(n-1)$. Prin urmare, avem următoarea aplicaţie bijectivă:

$$H \to SU(n-1), \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} \to u.$$

Se ştie că spaţiul cât G/H este homeomorf cu sfera unitate S din spaţiul complex $\mathbb{C}^n$ ([35], p. 278). Dar S este homeomorfă cu S^{2n-1}, deci spaţiul cât G/H este homeomorf cu S^{2n-1} (a se vedea şi Cap. VII, punctul 1.12.6).

Pentru a arăta că G este simplu conex vom folosi faptul că $S^n (n > 1)$ este conex şi simplu conex. De asemenea, vom mai folosi următoarea teorema de topologie:

"Fie G un grup topologic conex şi local conex, iar H un subgrup închis local conex al lui G. Presupunem că G este local simplu conex (adică fiecare punct are o vecinătate simplu conexă) şi că H şi G/H sunt simplu conexe. Atunci G este simplu conex."

Avem $SU(1) = \{I_1\}$ şi deci $SU(1)$ este conex şi simplu conex. În continuare avem

$$SU(2)/SU(1) \simeq S^3$$

şi, cum S^3 este conex şi simplu conex, obţinem că $SU(2)$ este conex şi simplu conex. Procedând prin inducţie după n, şi utilizând cele de mai sus, obţinem că $SU(n)$ este simplu conex.

CAPITOLUL III

OPERATORI DIFERENŢIALI STÂNG INVARIANŢI PE UN GRUP LIE

§ 1. OPERATORI DIFERENŢIALI PE O VARIETATE ANALITICĂ

1.0. Fie doi multiindici:

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n, \ \beta = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n) \in \mathbb{N}^n.$$

Atunci:

$$\alpha + \beta = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, ..., \alpha_n + \beta_n) \in \mathbb{N}^n.$$

Norma multiindicelui α este numărul întreg pozitiv

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n.$$

Se spune că $\alpha \leq \beta$ dacă şi numai dacă $\alpha_i \leq \beta_i$, oricare ar fi $i \in \{1, 2, ..., n\}$.

1.1. Fie M o varietate analitică cu n dimensiuni şi fie $\mathcal{F}(M)$ inelul funcţiilor reale, analitice definite pe M.

DEFINIŢIE. *Se numeşte* **operator diferenţial de rang** r **pe** M *orice aplicaţie*

$$D : \mathcal{F}(M) \to \mathcal{F}(M),$$

care, pentru orice hartă (U, h) *a varietăţii* M, *se scrie sub forma*

$$D(f) \,|_U = \sum_{|\alpha| \leq r} a_\alpha D_\alpha \left(f \,|_U\right), \ (\forall) f \in \mathcal{F}(M),$$

unde $a_\alpha \in \mathcal{F}(U)$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, $x^1, x^2, ..., x^n$ *sunt funcţiile coordonate asociate hărţii* (U, h), *iar*

$$D_\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial (x^1)^{\alpha_1} \partial (x^2)^{\alpha_2} ... \partial (x^n)^{\alpha_n}}.$$

1.2. DEFINIŢIE. *Fie* D *un operator diferenţial de rang* r *pe varietatea analitică* M, *şi fie* (U, h) *o hartă a varietăţii* M. *Se numeşte* **restricţia lui** D **la** U *un operator diferenţial*

$$D' : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(U)$$

astfel încât

$$D'(f) = \sum_{|\alpha| \leq r} a_\alpha D_\alpha(f), \; (\forall) f \in \mathcal{F}(U).$$

Notaţie:

$$D' = D \mid_{\mathcal{F}(U)} .$$

1.3. PROPOZIŢIE. *Fie* M *o varietate analitică conexă. Fie* D_1 *şi* D_2 *doi operatori diferenţiali pe* M. *Considerăm o hartă locală* (U, h) *a lui* M. *Dacă* $D_1 \mid_{\mathcal{F}(U)} = D_2 \mid_{\mathcal{F}(U)}$, *atunci* $D_1 = D_2$.

Demonstraţie. Pentru orice funcţie $f \in \mathcal{F}(M)$, avem:

$$D_1(f) \mid_U = D_1 \mid_{\mathcal{F}(U)} (f \mid_U) = D_2 \mid_{\mathcal{F}(U)} (f \mid_U) = D_2(f) \mid_U .$$

Prin urmare, funcţiile $D_1, D_2 \in \mathcal{F}(M)$ coincid pe o mulţime deschisă U a lui M. Deoarece varietatea M este conexă, rezultă $D_1(f) = D_2(f)$, oricare ar fi $f \in \mathcal{F}(M)$. Obţinem deci $D_1 = D_2$.

1.4. OBSERVAŢIE. Este uşor de văzut că dacă D este un operator diferenţial de rang r, atunci D este operator diferenţial de rang r', oricare ar fi $r' \geq r$. De aceea se introduce următoarea

DEFINIŢIE. *Se numeşte* **ordinul unui operator** *diferenţial* D *cel mai mic rang al lui* D.

Notaţie. Mulţimea operatorilor diferenţiali pe varietatea analitică M se notează cu $OD(M)$. În cele ce urmează vom folosi notaţia $\alpha! = \alpha_1!...\alpha_n!$, oricare ar fi $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$.

1.5. PROPOZIŢIE. *Fie* $D, D' \in OD(M)$. *Presupunem că* D *(respectiv* D'*) este de ordin* r *(respectiv* r'*). Atunci* $D \circ D'$ *este operator diferenţial de ordin* $r + r'$.

Demonstraţie. Pentru orice hartă (U, h) a varietăţii M şi orice $f \in \mathcal{F}(M)$, avem:

$$D(f)\,|_U = \sum_{|\alpha| \le r} a_\alpha D_\alpha\,(f\,|_U)\,,\ \ D'(f)\,|_U = \sum_{|\alpha'| \le r'} a'_{\alpha'} D_{\alpha'}(f\,|_U),$$

unde $a_\alpha, a'_{\alpha'} \in \mathcal{F}(U)$, iar $D_\alpha, D_{\alpha'}$ sunt operatori locali (construiţi la punctul 1.1).

În continuare vom folosi **formula lui Leibniz**:

$$D_\alpha(h'h'') = \sum_{\beta'+\beta''=\alpha} \frac{\alpha!}{\beta'!\beta''!} D_{\beta'}(h') D_{\beta''}(h''),\ \ (\forall) h', h'' \in \mathcal{F}(U).$$

Pentru orice funcţie $f \in \mathcal{F}(M)$, avem:

$$(D \circ D'(f))\,|_U = (D\,(D'\,(f)))\,|_U = D\,|_{\mathcal{F}(U)}\,(D'\,(f)\,|_U) =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{|\alpha| \le r} a_\alpha D_\alpha \left(\sum_{|\alpha'| \le r'} a'_{\alpha'} D_{\alpha'}\,(f\,|_U) \right) = \\
&= \sum_{\substack{|\alpha| \le r \\ |\alpha'| \le r'}} a_\alpha D_\alpha\,(a'_{\alpha'} D_{\alpha'}\,(f\,|_U)) = \\
&= \sum_{\substack{|\alpha| \le r \\ |\alpha'| \le r' \\ \beta'+\beta''=\alpha}} a_\alpha \frac{\alpha!}{\beta'!\beta''!} D_{\beta'}(a'_{\alpha'}) D_{\beta''} \circ D_{\alpha'}\,(f\,|_U) = \\
&= \sum_{|\alpha''| \le r+r'} a''_{\alpha''} D_{\alpha''}\,(f\,|_U)\,,
\end{aligned}$$

unde $\alpha'' = \beta'' + \alpha'$, şi unde am folosit notaţia

$$a''_{\alpha''} = \sum_{\substack{|\alpha|\leq r \\ |\alpha'|\leq r' \\ \alpha+\alpha'\geq\alpha'' \\ \alpha'\leq\alpha''}} a_\alpha \frac{\alpha!}{(\alpha+\alpha'-\alpha'')!\,(\alpha''-\alpha')!} D_{\alpha-\alpha''+\alpha'}\left(a'_{\alpha'}\right).$$

Egalitatea

$$(D \circ D'(f))\,|_U = \sum_{|\alpha''|\leq r+r'} a''_{\alpha''} D_{\alpha''}(f\,|_U)$$

ne arată că $D \circ D'$ este un operator diferenţial de ordin $r + r'$.

1.6. PROPOZIŢIE. *Mulţimea $OD(M)$ a operatorilor diferenţiali pe varietatea M poate fi structurată ca algebră peste corpul $\mathbb{R}$ al numerelor reale, operaţiile fiind:*

i) *adunarea operatorilor*

$$(D + D')(f) = D(f) + D'(f),\ f \in \mathcal{F}(M),$$

ii) *înmulţirea unui operator cu un număr real*

$$(\lambda D)(f) = \lambda D(f),\ \lambda \in \mathbb{R},\ f \in \mathcal{F}(M),$$

iii) *înmulţirea operatorilor*

$$(DD')(f) = D \circ D'(f),\ f \in \mathcal{F}(M).$$

Demonstraţie. Se verifică fără dificultate că operaţiile definite conduc la elemente ale lui $OD(M)$. De asemenea, se verifică uşor axiomele unei algebre.

Algebra $OD(M)$ este asociativă. Ea are element unitate

$$S_{[0]} : f \in \mathcal{F}(M) \to S_{[0]}(f) = f \in \mathcal{F}(M),$$

unde $[0] = (0, 0, ..., 0) \in \mathbb{N}^n$.

1.7. APLICAŢII.

1.7.1. *Forma generală a unui operator diferenţial de ordinul zero.*

Fie M o varietate analitică reală. Presupunem că M este conexă.

Fie $D \in OD(M)$ un operator de ordin zero. Atunci, oricare ar fi harta (U, h) a varietăţii M, şi oricare ar fi $f \in \mathcal{F}(M)$, avem:

$$D(f)\mid_U = a_{[0]} D_{[0]}\,(f\mid_U) = a_{[0]} f\mid_U,$$

unde $a_{[0]} \in \mathcal{F}(U)$, iar $D_{[0]} = S_{[0]}\mid_{\mathcal{F}(U)}$. Dacă luăm

$$f = 1_M : x \in M \to 1_M(x) = 1 \in \mathbb{R},$$

atunci obţinem $a_{[0]} = D(1_M)\mid_U$. Este uşor de văzut că avem

$$D(f) = af,\ (\forall) f \in \mathcal{F}(M),$$

unde $a = D(1_M) \in \mathcal{F}(M)$. Prin urmare, operatorul diferenţial D de ordinul zero se scrie

$$D = a,$$

unde $a \in \mathcal{F}(M)$.

1.7.2. *Forma generală a unui operator diferenţial de ordinul unu.*

Fie $D \in OD(M)$ un operator de ordinul unu. Într-o hartă locală (U, h) a varietăţii M, operatorul D se scrie, oricare ar fi $f \in \mathcal{F}(M)$:

$$D(f)\mid_U = a_{[0]} D_{[0]}\,(f\mid_U) + a^i \frac{\partial}{\partial x^i}(f\mid_U) = a_{[0]} f\mid_U + a^i \frac{\partial}{\partial x^i}(f\mid_U),$$

unde $x^1, x^2, ..., x^n$ sunt funcţiile coordonate ataşate hărţii (U, h), $a^1, a^2, ..., a^n \in \mathcal{F}(U)$, $a_{[0]} = D(1_M)\mid_U \in \mathcal{F}(U)$. Fie $(\overline{U}, \overline{h})$ o altă hartă a varietăţii M. Atunci avem:

$$D(f)\mid_{\overline{U}} = \overline{a}_{[0]} f\mid_{\overline{U}} + \overline{a}^i \frac{\partial}{\partial \overline{x}^i}\,(f\mid_{\overline{U}}),\ (\forall) f \in \mathcal{F}(M),$$

unde $\overline{a}_{[0]} = D(1_M)\mid_{\overline{U}}, \overline{a}^1, \overline{a}^2, ..., \overline{a}^n \in \mathcal{F}(\overline{U})$ şi unde $\overline{x}^1, \overline{x}^2, ..., \overline{x}^n$ sunt funcţiile coordonate asociate hărţii $(\overline{U}, \overline{h})$. Presupunem că $\overline{U} \cap U \neq \varnothing$.

Atunci, pe $\overline{U} \cap U$, avem:

$$\overline{a}_{[0]}\mid_{\overline{U}\cap U} = a_{[0]}\mid_{\overline{U}\cap U} = D(1_M)\mid_{\overline{U}\cap U} .$$

Rezultă că pe $\overline{U} \cap U$ avem:

$$a^i \frac{\partial}{\partial x^i} = \overline{a}^i \frac{\partial}{\partial \overline{x}^i}.$$

Obţinem

$$\overline{a}^i = \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^j} a^j,$$

ceea ce ne arată că $a^1, a^2, ..., a^n$ sunt componentele unui câmp X de vectori tangenţi varietăţii M. Putem deci să scriem operatorul D sub forma:

$$D(f) = af + X(f),\ (\forall) f \in \mathcal{F}(M).$$

sau

$$D = a + X,$$

unde a (respectiv X) este privit ca operator diferenţial de ordin zero (respectiv unu).

§ 2. ALGEBRA OPERATORILOR DIFERENŢIALI STÂNG INVARIANŢI PE UN GRUP LIE

2.1. Fie G un grup Lie, $L(G)$ algebra sa Lie, $OD(G)$ algebra operatorilor diferenţiali pe varietatea analitică G. Am văzut că $X \in L(G) \Leftrightarrow (L_a)_* (X) = X$, $(\forall)a \in G$. Se constată uşor că un element X este câmp stâng invariant pe grupul Lie G dacă şi numai dacă oricare ar fi $f \in \mathcal{F}(G)$, avem:

$$X(f \circ L_a) = X(f) \circ L_a, \ (\forall)a \in G.$$

DEFINIŢIE. *Fie G un grup Lie. Un operator $D \in OD(G)$ se numeşte* **stâng invariant** *dacă $(\forall)f \in \mathcal{F}(G)$, avem:*

$$D(f \circ L_a) = D(f) \circ L_a, \ (\forall)a \in G,$$

unde L_a este translaţia la stânga, definită de elementul $a \in G$.

2.2. PROPOZIŢIE. *Mulţimea $J(G)$ a operatorilor diferenţiali stâng invarianţi este o subalgebră a algebrei $OD(G)$.*

Demonstraţie. Fie $D, D' \in J(G)$. Pentru orice $f \in \mathcal{F}(G)$, şi orice $a \in G$, avem:

$$\begin{aligned}(D + D')(f \circ L_a) &= D(f \circ L_a) + D'(f \circ L_a) = D(f) \circ L_a + D'(f) \circ L_a = \\ &= (D(f) + D'(f)) \circ L_a = (D + D')(f) \circ L_a,\end{aligned}$$

deci $D+D' \in J(G)$. Analog obţinem $\lambda D \in J(G)$, $(\forall)\lambda \in \mathbb{R}$. Să arătăm acum că produsul operatorilor diferenţiali stâng invarianţi D şi D' este un operator diferenţial stâng invariant. Pentru orice $f \in \mathcal{F}(G)$, şi orice $a \in G$, avem:

$$\begin{aligned}(DD')(f \circ L_a) &= D \circ D'(f \circ L_a) = D(D'(f \circ L_a)) = D(D'(f) \circ L_a) = \\ &= D(D'(f)) \circ L_a = (DD')(f) \circ L_a.\end{aligned}$$

2.3. Observaţie.

2.3.1. $S_{[0]} \in J(G)$. În adevăr,

$$
\begin{aligned}
S_{[0]}(f \circ L_a) &= f \circ L_a, \ (\forall) f \in \mathcal{F}(G), \ (\forall) a \in G, \\
S_{[0]}(f) \circ L_a &= f \circ L_a, \ (\forall) f \in \mathcal{F}(G), \ (\forall) a \in G.
\end{aligned}
$$

Deci $J(G)$ este o subalgebră cu element unitate $S_{[0]}$.

2.3.2. Pentru orice $D \in J(G)$, avem:

$$
D(f)(x) = D(f) \circ L_x(e) = D(f \circ L_x)(e).
$$

Rezultă că dacă ştim cât este $D(f)(e)$, pentru orice $f \in \mathcal{F}(G)$, atunci ştim cât este $D(f)(x)$, oricare ar fi $x \in G$ şi oricare ar fi $f \in \mathcal{F}(G)$.

2.3.3. Este evident că $L(G) \subset J(G)$. Rezultă că suma şi produsul a oricăror câmpuri stâng invariante se află în $J(G)$.

2.4. OBSERVAŢIE. Fie $\{E_1, ..., E_n\}$ o bază în algebra Lie $L(G)$ a grupului Lie G. Un câmp $X \in L(G)$ se scrie $X = X^i E_i$, unde X^i sunt constante reale. Ştim că $X \in J(G)$. Rezultă că $X^p \in J(G)$.

Vom pune în evidenţă o formula asemănătoare binomului lui Newton generalizat.

Punem

$$
(X^i E_i)^p = \sum_{|\alpha|=p} (X^1)^{\alpha_1} ... (X^n)^{\alpha_n} S_\alpha, \tag{2.1}
$$

unde $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, iar S_α este o sumă de produse de operatori E_i. Vom indica (prin inducţie) cum se calculează S_α. Este evident că pentru $p = 0$ se obţine operatorul stâng invariant $S_{[0]}$ (=elementul unitate al algebrei $J(G)$). Observăm că pentru $p = 1$ membrul stâng din (2.1) se scrie

$$
X^1 E_1 + ... + X^n E_n,
$$

iar membrul drept din (2.1) se scrie

$$
X^1 S_{[1]} + ... + X^n S_{[n]},
$$

unde $[i]=(0,...,0,1,0,...,0)$ este multiindicele cu toate componentele nule în afară de componenta de pe locul i, care este egală cu 1. Este evident că dacă luăm $S_{[i]}=E_i$, $i=1,2,...,n$, atunci egalitatea (2.1) este adevărată pentru $p=1$.

Scriem (2.1) pentru $p-1$:

$$(2.1') \qquad \left(X^i E_i\right)^{p-1} = \sum_{|\beta|=p-1} \left(X^1\right)^{\beta_1} ... \left(X^n\right)^{\beta_n} S_\beta.$$

Vrem să găsim relaţia care există între S_α, cu $|\alpha|=p$, şi S_β, cu $|\beta|=p-1$, ştiind că (2.1′) implică (2.1), unde

$$\left(X^i E_i\right)^p = \left(X^i E_i\right)\ \left(X^j E_j\right)^{p-1}.$$

Înmulţim (2.1′) cu $X^i E_i$ şi rezultă

$$\left(X^i E_i\right)^p = \sum_{i=1}^{n} \sum_{|\beta|=p-1} \left(X^1\right)^{\beta_1} ... \left(X^n\right)^{\beta_n} X^i E_i S_\beta.$$

Se observă că operatorul $E_i S_\beta$ este de ordinul p. Membrul drept din ultima egalitate trebuie să coincidă cu membrul drept din relaţia (2.1). Rezultă că trebuie să avem

$$(2.2) \quad \sum_{|\alpha|=p} \left(X^1\right)^{\alpha_1} ... \left(X^n\right)^{\alpha_n} S_\alpha = \sum_{|\beta|=p-1} \left(X^1\right)^{\beta_1} ... \left(X^n\right)^{\beta_n} X^1 E_1 S_\beta + \\ + ... + \sum_{|\beta|=p-1} \left(X^1\right)^{\beta_1} ... \left(X^n\right)^{\beta_n} X^n E_n S_\beta.$$

Fixăm un multiindice $\alpha=(\alpha_1,...,\alpha_n)$, cu $|\alpha|=p$. Fie $i_1,...,i_t \in \{1,...,n\}$, astfel încât $i_1 < i_2 < ... < i_t$ şi $\alpha_{i_1} \neq 0,...,\alpha_{i_t} \neq 0$.

Considerăm următorii multiindici de lungime $p-1$:

$$\underset{i_1}{\beta} = \alpha - [i_1], ..., \underset{i_t}{\beta} = \alpha - [i_t].$$

În membrul stâng al relaţiei (2.2) coeficientul monomului

$$\left(X^{i_1}\right)^{\alpha_{i_1}} \dots \left(X^{i_t}\right)^{\alpha_{i_t}}$$

este S_α. Pentru a scrie coeficientul monomului $(X^{i_1})^{\alpha_{i_1}} \dots (X^{i_t})^{\alpha_{i_t}}$ din membrul drept al relaţiei (2.2), suntem conduşi să considerăm suma următoare:

$$\left(X^{i_1}\right)^{\underset{i_1}{\beta}_{i_1}} \dots \left(X^{i_t}\right)^{\underset{i_1}{\beta}_{i_t}} X^{i_1} E_{i_1} S_{\underset{i_1}{\beta}} + \dots + \left(X^{i_1}\right)^{\underset{i_t}{\beta}_{i_1}} \dots \left(X^{i_t}\right)^{\underset{i_t}{\beta}_{i_t}} X^{i_t} E_{i_t} S_{\underset{i_t}{\beta}},$$

care mai poate fi crisă sub forma

$$\left(X^{i_1}\right)^{\alpha_{i_1}} \dots \left(X^{i_t}\right)^{\alpha_{i_t}} \left(E_{i_1} S_{\underset{i_1}{\beta}} + \dots + E_{i_t} S_{\underset{i_t}{\beta}}\right).$$

Rezultă că trebuie să luăm

$$(2.3) \qquad S_\alpha = E_{i_1} S_{\underset{i_1}{\beta}} + \dots + E_{i_t} S_{\underset{i_t}{\beta}}.$$

Aceasta este formula de recurenţă care permite să trecem de la S_β cu $|\beta| = p - 1$, la S_α cu $|\alpha| = p$.

2.5. APLICAŢIE. Fie $\alpha = [i_1 i_2]$ (respectiv $\alpha = [i_1 i_2 i_3]$) multiindicele ale cărui componente sunt nule în afară de $\alpha_{i_1} = \alpha_{i_2} = 1$ (respectiv $\alpha_{i_1} = \alpha_{i_2} = \alpha_{i_3} = 1$). Ne propunem să scriem operatorii S_α, unde α este unul dintre multiindicii următori:
1) $\alpha = [i_1]$, 2) $\alpha = [i_1 i_2]$, 3) $\alpha = [i_1 i_2 i_3]$.

1) Este evident că $S_{[i]} = E_i$.

2) Considerăm următorii multiindici de normă unu:

$$\underset{i_1}{\beta} = \alpha - [i_1] = [i_2], \quad \underset{i_2}{\beta} = \alpha - [i_2] = [i_1].$$

Conform ultimei observaţii, rezultă că avem:

$$S_{[i_1 i_2]} = E_{i_1} S_{\underset{i_1}{\beta}} + E_{i_2} S_{\underset{i_2}{\beta}} = E_{i_1} E_{i_2} + E_{i_2} E_{i_1}.$$

3) Considerăm următorii multiindici de normă doi:

$$\underset{i_1}{\beta} = \alpha - [i_1] = [i_2 i_3]\,, \underset{i_2}{\beta} = \alpha - [i_2] = [i_1 i_3]\,, \underset{i_3}{\beta} = \alpha - [i_3] = [i_1 i_2]\,.$$

Folosind formula (2.3), rezultă că avem:

$$\begin{aligned} S_{[i_1 i_2 i_3]} &= E_{i_1} S_{\underset{i_1}{\beta}} + E_{i_2} S_{\underset{i_2}{\beta}} + E_{i_3} S_{\underset{i_3}{\beta}} = E_{i_1} S_{[i_2 i_3]} + E_{i_2} S_{[i_1 i_3]} + E_{i_3} S_{[i_1 i_2]} = \\ &= E_{i_1} E_{i_2} E_{i_3} + E_{i_1} E_{i_3} E_{i_2} + E_{i_2} E_{i_1} E_{i_3} + \\ &\quad + E_{i_2} E_{i_3} E_{i_1} + E_{i_3} E_{i_1} E_{i_2} + E_{i_3} E_{i_2} E_{i_1}. \end{aligned}$$

2.6. Operatorii S_α introduşi la 2.4 sunt operatori stâng invarianţi pe grupul Lie G, deoarece ei apar ca sume de produse de câmpuri vectoriale stâng invariante.

PROPOZIŢIE. $\{S_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}^n}$ *constituie o bază în algebra* $J(G)$.

Demonstraţie. În primul rând vom arăta că orice operator stâng invariant se exprimă în funcţie de S_α. Fie $(W_e, \log)$ o hartă normală în jurul elementului neutru $e \in G$, şi fie $x^1, ..., x^n$ coordonatele canonice asociate hărţii $(W_e, \log)$.

Fie $E_1, ..., E_n$ câmpurile vectoriale stâng invariante pe G, definite prin:

$$E_i(e) = \frac{\partial}{\partial x^i} \big|_e \quad, i = 1, 2, ..., n.$$

Este evident că $\{E_1, E_2, ..., E_n\}$ este o bază pentru algebra Lie $L(G)$ a grupului Lie G. Ştim că coordonatele canonice ale unui punct $x = \exp x^i E_i \in W_e$ sunt x^i.

Fie $D \in J(G)$. Avem:

$$(2.4) \quad D(f)(e) = \sum_{|\alpha| \le r} a_\alpha(e) D_\alpha \left(f \,|_{W_e}\right)(e), \;\; (\forall) f \in \mathcal{F}(G),$$

unde

$$(2.5) \qquad D_\alpha(f)(e) = \left(\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial \left(x^1\right)^{\alpha_1} ... \partial \left(x^n\right)^{\alpha_n}} (f) \right)(e)$$

(am notat $D_\alpha(f)$ în loc de $D_\alpha(f\mid_{W_e})$).

În continuare vom folosi următoarea convenţie: dacă (U,h) este o hartă a varietăţii G, şi dacă $f\in\mathcal{F}(G)$, atunci scriem:

$$(2.5') \qquad f(p)=f\circ h^{-1}(h(p)),\ (\forall)p\in U.$$

Dacă luăm $h=\log$, $h^{-1}=\exp$, din (2.5) avem:

$$(2.6) \quad D_\alpha(f)(e)=\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial(x^1)^{\alpha_1}\ldots\partial(x^n)^{\alpha_n}}f\left(\exp x^iE_i\right)|_{x^1=\ldots=x^n=0}\,.$$

Pe de altă parte, formula lui Taylor

$$f(\exp tX)=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{t^p}{p!}X^p(f)(e),$$

pentru $t=1$ şi $X=x^iE_i$, se scrie:

$$(2.7) \qquad f\left(\exp x^iE_i\right)=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{p!}\left(x^iE_i\right)^p(f)(e).$$

Ţinând seama de egalitatea

$$\left(x^iE_i\right)^p=\sum_{|\alpha|=p}\left(x^1\right)^{\alpha_1}\ldots\left(x^n\right)^{\alpha_n}S_\alpha,$$

şi de formula (2.7), egalitatea (2.6) devine

$$D_\alpha(f)(e)=\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial(x^1)^{\alpha_1}\ldots\partial(x^n)^{\alpha_n}}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{p!}\sum_{|\beta|=p}\left(x^1\right)^{\beta_1}\ldots\left(x^n\right)^{\beta_n}S_\beta(f)(e)\,|_{x^1=\ldots=x^n=0}$$

sau

$$(2.8) D_\alpha(f)(e)=\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial(x^1)^{\alpha_1}\ldots\partial(x^n)^{\alpha_n}}\sum_{|\beta|=0}^{\infty}\frac{1}{|\beta|!}\left(x^1\right)^{\beta_1}\ldots\left(x^n\right)^{\beta_n}S_\beta(f)(e)\,|_{x^1=\ldots=x^n}$$

În membrul drept din (2.8) vom deriva termen cu termen şi calculăm în punctul $x^1 = 0, ..., x^n = 0$. Vom obţine de fiecare dată zero, în afară de cazul în care $\alpha = \beta$. Din (2.8) gasim:

$$(2.9) \qquad D_\alpha(f)(e) = \frac{\alpha_1!...\alpha_n!}{|\alpha|!} S_\alpha(f)(e).$$

Din (2.9) şi (2.4) rezultă:

$$(2.9') \qquad D(f)(e) = \sum_{|\alpha| \le r} a_\alpha(e) \frac{\alpha_1!...\alpha_n!}{|\alpha|!} S_\alpha(f)(e).$$

Deoarece D, S_α sunt operatori stâng invarianţi, pentru orice $a \in G$ şi orice $f \in \mathcal{F}(G)$, avem:

$$D(f \circ L_a) = D(f) \circ L_a, \quad S_\alpha(f \circ L_a) = S_\alpha(f) \circ L_a.$$

În relaţia (2.9′) luăm în locul funcţiei f funcţia $f \circ L_a$, şi obţinem:

$$D(f \circ L_a)(e) = \sum_{|\alpha| \le r} a_\alpha(e) \frac{\alpha_1!...\alpha_n!}{|\alpha|!} S_\alpha(f \circ L_a)(e)$$

sau

$$(2.10) \qquad D(f)(a) = \sum_{|\alpha| \le r} c_\alpha \frac{\alpha_1!...\alpha_n!}{|\alpha|!} S_\alpha(f)(a),$$

unde $c_\alpha = a_\alpha(e)$ sunt constante reale. Deoarece egalitatea (2.10) are loc $(\forall) f \in \mathcal{F}(G)$, rezultă:

$$D = \sum_{|\alpha| \le r} c_\alpha \frac{\alpha_1!...\alpha_n!}{|\alpha|!} S_\alpha.$$

Rezultă că operatorii diferenţiali stâng invarianţi pe G sunt generaţi de operatorii S_α (care se exprima în funcţie de $E_1, ..., E_n$). În definitiv, putem spune că operatorii diferenţiali stâng invarianţi pe grupul Lie G sunt generaţi de câmpurile vectoriale stâng invariante.

Până acum am arătat că $\{S_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{N}^n}$ constituie un sistem de generatori pentru algebra $J(G)$.

Să arătăm acum că orice număr finit de elemente din $\{S_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{N}^n}$ sunt liniar independente. Fie

$$S_{\underset{1}{\alpha}}, ..., S_{\underset{k}{\alpha}} \in \{S_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{N}^n},$$

unde $S_{\underset{1}{\alpha}}, ..., S_{\underset{k}{\alpha}}$ sunt distincte.
Presupunem că există $\lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{R}$, astfel încât

$$\lambda_1 S_{\underset{1}{\alpha}} + ... + \lambda_k S_{\underset{k}{\alpha}} = 0.$$

Fie $(W_e, \log)$ o hartă în jurul elementului neutru $e \in G$, şi fie $x^1, ..., x^n$ funcţiile coordonate asociate hărţii $(W_e, \log)$. Din ultima egalitate avem:

$$\lambda_1 S_{\underset{1}{\alpha}} \,|_{\mathcal{F}(W_e)} + ... + \lambda_k S_{\underset{k}{\alpha}} \,|_{\mathcal{F}(W_e)} = 0.$$

Pentru orice funcţie $f \in \mathcal{F}(G)$ avem:

$$(2.11) \qquad \lambda_1 S_{\underset{1}{\alpha}}(f)(e) + ... + \lambda_k S_{\underset{k}{\alpha}}(f)(e) = 0.$$

Din (2.9) şi (2.11) rezultă:

$$(2.12) \qquad \mu_1 D_{\underset{1}{\alpha}}(f)(e) + ... + \mu_k D_{\underset{k}{\alpha}}(f)(e) = 0,$$

unde am notat:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \lambda_1 \frac{\left|\underset{1}{\alpha}\right|!}{\underset{1}{\alpha}!}, ..., \mu_k = \lambda_k \frac{\left|\underset{k}{\alpha}\right|!}{\underset{k}{\alpha}!} \\ \underset{1}{\alpha} &= \left(\underset{1}{\alpha_1}, ..., \underset{1}{\alpha_n}\right), ..., \underset{k}{\alpha} = \left(\underset{k}{\alpha_1}, ..., \underset{k}{\alpha_n}\right). \end{aligned}$$

Putem să renumerotăm multiindicii $\underset{1}{\alpha}, \ldots, \underset{k}{\alpha}$ astfel încât să avem:

$$\left|\underset{1}{\alpha}\right| \leq \ldots \leq \left|\underset{k}{\alpha}\right|.$$

Considerăm funcţia analitică

$$f_1 : W_e \to \mathbb{R}$$

definită prin:

$$f_1(x) = \left(x^1\right)^{\underset{1}{\alpha_1}} \ldots \left(x^n\right)^{\underset{1}{\alpha_n}} \quad , x \in W_e. \tag{2.13}$$

Luând în (2.12), în locul funcţiei f funcţia f_1 definită prin (2.13), şi folosind convenţia (2.5′), obţinem:

$$\mu_1 \left\{ \frac{\partial^{\left|\underset{1}{\alpha}\right|}}{\partial \left(x^1\right)^{\underset{1}{\alpha_1}} \ldots \partial \left(x^n\right)^{\underset{1}{\alpha_n}}} \left(x^1\right)^{\underset{1}{\alpha_1}} \ldots \left(x^n\right)^{\underset{1}{\alpha_n}} \right\}\Bigg|_{x^1=\ldots=x^n=0} + \ldots +$$

$$+\mu_k \left\{ \frac{\partial^{\left|\underset{k}{\alpha}\right|}}{\partial \left(x^1\right)^{\underset{k}{\alpha_1}} \ldots \partial \left(x^n\right)^{\underset{k}{\alpha_n}}} \left(x^1\right)^{\underset{1}{\alpha_1}} \ldots \left(x^n\right)^{\underset{1}{\alpha_n}} \right\}\Bigg|_{x^1=\ldots=x^n=0} = 0.$$

Se observă că toţi termenii sunt nuli în afară de primul termen, din care obţinem:

$$\mu_1 \underset{1}{\alpha_1}! \ldots \underset{1}{\alpha_n}! = 0.$$

Din ultima egalitate rezultă $\mu_1 = 0$, ceea ce implică $\lambda_1 = 0$. Repetăm raţionamentul, luând în (2.12) în locul funcţiei f funcţia analitică

$$f_2 : W_e \to \mathbb{R}$$

definită prin

$$f_2(x) = \left(x^1\right)^{\frac{\alpha_1}{2}} \dots \left(x^n\right)^{\frac{\alpha_n}{2}} \quad , x \in W_e.$$

Va rezulta $\lambda_2 = 0$. Analog obţinem $\lambda_3 = \dots = \lambda_k = 0$. Rezultă că $\{S_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}^n}$ constituie o bază în algebra $J(G)$.

2.7. Menţinem notaţiile de la 2.4; deci avem relaţia

$$(2.3') \qquad S_\alpha = E_{i_1} S_{\alpha - [i_1]} + \dots + E_{i_t} S_{\alpha - [i_t]}$$

PROPOZIŢIE.

i) *În membrul drept al formulei* (2.3′) *sunt* $\frac{|\alpha|!}{\alpha_1! \dots \alpha_n!}$ *termeni.*

ii) *Fiecare termen din membrul drept al formulei* (2.3′) *are exact* $|\alpha|$ *factori* E_i.

Demonstraţie. i) Pentru $|\alpha| = 1$ afirmaţia este evident adevărată, căci avem $\alpha = [i_k]$ şi $S_{[i_k]} = E_{i_k}$.

Presupunem acum că membrul drept al formulei (2.3′) are $\frac{(p-1)!}{\alpha_1! \dots \alpha_n!}$ termeni, pentru orice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ cu $|\alpha| = p - 1$. Fie $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ cu $|\alpha| = p$, fie $i_1, \dots, i_t \in \{1, \dots, n\}$ cu $1 \le i_1 < \dots < i_t \le n$, şi fie $\alpha_{i_1} \neq 0, \dots, \alpha_{i_t} \neq 0$. Avem formula:

$$S_\alpha = E_{i_1} S_{\alpha - [i_1]} + \dots + E_{i_t} S_{\alpha - [i_t]}.$$

Din ipoteza de inducţie avem că pentru orice $k \in \{1, \dots, t\}$ fiecare $S_{\alpha - [i_k]}$ are un număr de termeni egal cu

$$\frac{(p-1)!}{\alpha_{i_1}! \dots \alpha_{i_{k-1}}! \, (\alpha_{i_k} - 1)! \alpha_{i_{k+1}}! \dots \alpha_{i_t}!}.$$

Rezultă că S_α va avea un număr de termeni egal cu

$$\frac{(p-1)!}{(\alpha_{i_1} - 1)! \alpha_{i_2}! \dots . \alpha_{i_t}!} + \dots + \frac{(p-1)!}{\alpha_{i_1}! \dots \alpha_{i_{t-1}}! \, (\alpha_{i_t} - 1)!} = \frac{(p-1)!}{\alpha_{i_1}! \dots \alpha_{i_t}!} (\alpha_{i_1} + \dots + \alpha_{i_t})$$
$$= \frac{|\alpha|!}{\alpha_1! \dots \alpha_{i_t}!}.$$

ii) Fie $w_k = E_{i_k} S_{\alpha-[i_k]}$, $k \in \{1, ..., t\}$ un termen din membrul drept al formulei (2.3'). Vom arăta că w_k are $|\alpha|$ factori E_i.

Pentru $|\alpha| = 1$ afirmaţia este adevărată.

Presupunând că afirmaţia este adevărată pentru multiindici α cu $|\alpha| = p - 1$, se obţine uşor că afirmaţia ii) este adevărată pentru multiindici de lungime p.

2.8. Lemă. *Pentru orice $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, avem formula:*

$$S_\alpha = \frac{|\alpha|!}{\alpha_1!...\alpha_n!} E_1^{\alpha_1} ... E_n^{\alpha_n} + \text{termeni de ordin mai mic decât } |\alpha| . \tag{2.14}$$

Demonstraţie. Pentru $|\alpha| = 0$ egalitatea este evidentă.

Presupunem că formula (2.14) este adevărată pentru multiindici de lungime $p - 1$. Vom arăta că (2.14) este adevărată pentru multiindici de lungime p. Fie $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ cu $|\alpha| = p$, şi fie $i_1, ..., i_t \in \{1, ..., n\}$, cu $1 \leq i_1 < ... < i_t \leq n$ şi astfel încât $\alpha_{i_1} \neq 0, ..., \alpha_{i_t} \neq 0$. Avem:

$$\begin{aligned}
S_\alpha &= E_{i_1} S_{\alpha-[i_1]} + ... + E_{i_t} S_{\alpha-[i_t]} = \\
&= E_{i_1} \frac{(p-1)!}{(\alpha_{i_1} - 1)! \alpha_{i_2}! .... \alpha_{i_t}!} E_{i_1}^{\alpha_{i_1}-1} E_{i_2}^{\alpha_{i_2}} ... E_{i_t}^{\alpha_{i_t}} + ... + \\
&\quad + E_{i_t} \frac{(p-1)!}{\alpha_{i_1}! ... \alpha_{i_{t-1}}! \, (\alpha_{i_t} - 1)!} E_{i_1}^{\alpha_{i_1}} ... E_{i_{t-1}}^{\alpha_{i_{t-1}}} E_{i_t}^{\alpha_{i_t}-1} + \\
&\quad + \text{termeni de ordin mai mic decât } p \\
&= \frac{(p-1)!}{\alpha_{i_1}! .... \alpha_{i_t}!} \left(\alpha_{i_1} E_{i_1} E_{i_1}^{\alpha_{i_1}-1} E_{i_2}^{\alpha_{i_2}} ... E_{i_t}^{\alpha_{i_t}} + ... + \alpha_{i_t} E_{i_t} E_{i_1}^{\alpha_{i_1}} ... E_{i_{t-1}}^{\alpha_{i_{t-1}}} E_{i_t}^{\alpha_{i_t}-1} \right) + \\
&\quad + \text{termeni de ordin mai mic decât } p.
\end{aligned}$$

În continuare vom folosi formula:

$$E_{i_1} ... E_{i_t} = E_{i_2} E_{i_1} E_{i_3} ... E_{i_t} + [E_{i_1}, E_{i_2}] E_{i_3} ... E_{i_t}.$$

Cu ajutorul acestei formule noi, putem muta operatorii E_{i_k} ($k \in \{1, ..., t\}$) de pe primul loc pe locul pe care-l dorim, modificându-se doar termenii de ordin mai mic decât p. Obţinem:

$$S_\alpha = \frac{(p-1)!}{\alpha_{i_1}!....\alpha_{i_t}!} E_{i_1}^{\alpha_{i_1}} ... E_{i_t}^{\alpha_{i_t}} (\alpha_{i_1} + ... + \alpha_{i_t}) + \\ + \text{termeni de ordin mai mic decât } p,$$

şi deci am obţinut:

$$S_\alpha = \frac{p!}{\alpha_{i_1}!....\alpha_{i_t}!} E_1^{\alpha_1} ... E_n^{\alpha_n} + \text{ termeni de ordin mai mic decât } p.$$

Prin urmare, formula (2.14) este adevărată $(\forall)\alpha \in \mathbb{N}^n$.

2.9. Menţinem notaţiile din Lema 2.8.

PROPOZIŢIE. $\{E_1^{\alpha_1}...E_n^{\alpha_n} \mid \alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{N}\}$ *constituie o bază în algebra operatorilor diferenţiali stâng invarianţi pe grupul Lie* G.

Demonstraţie. Vom arăta (prin inducţie după $|\alpha|$) că $\{E_1^{\alpha_1}...E_n^{\alpha_n} \mid \alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{N}\}$ constituie un sistem de generatori pentru $J(G)$. Ştim că $\{S_\alpha \mid \alpha \in \mathbb{N}^n\}$ constituie sistem de generatori pentru $J(G)$. Vom folosi formula (2.14).

Pentru $|\alpha| = 0$ afirmaţia este evident adevărată.

Presupunem că $\{E_1^{\alpha_1}...E_n^{\alpha_n} \mid \alpha_1 + ... + \alpha_n \leq p-1\}$ constituie un sistem de generatori pentru operatorii stâng invarianţi de ordin mai mic sau egal cu $p-1$. Vom arăta că $\{E_1^{\alpha_1}...E_n^{\alpha_n} \mid \alpha_1 + ... + \alpha_n \leq p\}$ constituie un sistem de generatori pentru operatorii stâng invarianţi de ordin mai mic sau egal cu p. Fie $D \in J(G)$, un operator de ordin p. Ştim că D se scrie

$$D = \sum_{|\alpha| \leq p} d_\alpha S_\alpha,$$

unde $d_\alpha \in \mathbb{R}$. Scriem formula (2.14) sub forma

$$S_\alpha = \frac{|\alpha|!}{\alpha_1!...\alpha_n!} E_1^{\alpha_1} ... E_n^{\alpha_n} + M_\alpha,$$

unde M_α este un operator stâng invariant de ordin mai mic decât p. Din ipoteza de inducţie avem:

$$M_\alpha = \sum_{|\beta| \leq p-1} c_{\alpha\beta} E_1^{\beta_1} ... E_n^{\beta_n}.$$

Din ultimele două egalităţi avem:

$$S_\alpha = \frac{|\alpha|!}{\alpha_1! ... \alpha_n!} E_1^{\alpha_1} ... E_n^{\alpha_n} + \sum_{|\beta| \leq p-1} c_{\alpha\beta} E_1^{\beta_1} ... E_n^{\beta_n}.$$

Rezultă că operatorul D se scrie

$$D = \sum_{|\alpha| \leq p} A_\alpha E_1^{\alpha_1} ... E_n^{\alpha_n},$$

şi deci $\{E_1^{\alpha_1} ... E_n^{\alpha_n} \mid \alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n\}$ constituie un sistem de generatori pentru $J(G)$.

Să arătăm acum că orice număr finit de elemente din $\{E_1^{\alpha_1} ... E_n^{\alpha_n} \mid \alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{N}\}$ sunt liniar independente. Fie elementele distincte

$$E_1^{\underset{1}{\alpha_1}} ... E_n^{\underset{1}{\alpha_n}}, ..., E_1^{\underset{k}{\alpha_1}} ... E_n^{\underset{k}{\alpha_n}} \in \{E_1^{\alpha_1} ... E_n^{\alpha_n} \mid \alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{N}\}.$$

Putem presupune (eventual în urma unei renumerotări a multiindicilor că avem

$$\left|\underset{1}{\alpha}\right| = ... = \left|\underset{s}{\alpha}\right| > \left|\underset{s+1}{\alpha}\right| = ... = \left|\underset{s+m}{\alpha}\right| > ...$$

Presupunem că există numerele reale $\lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{R}$, astfel încât

$$\lambda_1 E_1^{\underset{1}{\alpha_1}} ... E_n^{\underset{1}{\alpha_n}} + ... + \lambda_k E_1^{\underset{k}{\alpha_1}} ... E_n^{\underset{k}{\alpha_n}} = 0.$$

Folosind formula (2.14), avem:

$$0 = \mu_1 S_{\underset{1}{\alpha}} + ... + \mu_k S_{\underset{k}{\alpha}} + \text{termeni de ordin mai mic decât } \left|\underset{1}{\alpha}\right|,$$

unde am folosit notaţia $\mu_i = \lambda_i \frac{\underset{i}{\alpha_1}!\ldots\underset{i}{\alpha_n}!}{\left|\underset{i}{\alpha}\right|!}$, $i \in \{1, ..., k\}$. Deoarece orice operator $D \in J(G)$ de ordin r se scrie $D = \sum\limits_{|\beta| \leq r} c_\beta S_\beta$, rezultă egalitatea:

$$\mu_1 S_{\underset{1}{\alpha}} + ... + \mu_k S_{\underset{k}{\alpha}} + \sum_{|\beta| < \left|\underset{1}{\alpha}\right|} c_\beta S_\beta = 0.$$

Folosind ultima egalitate şi urmând o cale analoagă cu cea folosită în demonstraţia propoziţiei 2.6, se obţine $\mu_1 = ... = \mu_k = 0$, adică $\lambda_1 = ... = \lambda_k = 0$, ceea ce ne arată că operatorii

$$E_1^{\underset{1}{\alpha_1}} ... E_n^{\underset{1}{\alpha_n}}, ..., E_1^{\underset{k}{\alpha_1}} ... E_n^{\underset{k}{\alpha_n}}$$

sunt liniar independenţi. Prin urmare, $\{E_1^{\alpha_1} ... E_n^{\alpha_n} \mid \alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n\}$ constituie o bază în algebra $J(G)$.

CAPITOLUL IV

ALGEBRA ÎNFĂŞURĂTOARE UNIVERSALĂ A UNEI ALGEBRE LIE

§ 1. CONSTRUCŢIA ALGEBREI ÎNFĂŞURĂTOARE UNIVERSALE. PROPRIETATEA DE UNIVERSALITATE.

1.1. DEFINIŢIE. *Fie g o algebră Lie reală, şi fie A o algebră asociativă peste corpul $\mathbb{R}$. O aplicaţie liniară*

$$h : g \to A$$

*se numeşte $L-$***homomorfism** *dacă*

$$h([x,y]) = h(x)h(y) - h(y)h(x), \ (\forall)x, y \in g.$$

Observaţie. Am văzut mai înainte că dacă A este o algebră asociativă peste corpul numerelor reale, atunci spaţiul vectorial real A, împreună cu operaţia

$$[\ ,\ ] : (a,b) \in A \times A \to [a,b] = ab - ba \in A$$

este o algebră Lie reală (am notat cu ab produsul elementelor $a, b \in A$). Este uşor de văzut că $L-$homomorfismul $h : g \to A$ este un homomorfism de algebre Lie.

1.2. Fie g un spaţiu vectorial real de dimensiune finită n. Notăm

$$T^r(g) = \underbrace{g \otimes \dots \otimes g}_{\text{de } r \text{ ori}} = \{f : \underbrace{g \times \dots \times g}_{\text{de } r \text{ ori}} \to \mathbb{R} \mid f \text{ este poliliniară}\}.$$

Fie $x_r \in T^r(g)$, $y_s \in T^s(g)$. Notăm cu $x_r \otimes y_s$ produsul tensorial al aplicaţiilor x_r şi y_s, adică aplicaţia

$$x_r \otimes y_s : \underbrace{g \times ... \times g}_{\text{de } r+s \text{ ori}} \to \mathbb{R}$$

definită prin formula:

$$x_r \otimes y_s \left(u_1, ..., u_r, w_1, ..., w_s\right) = x_r \left(u_1, ..., u_r\right) y_s \left(w_1, ..., w_s\right).$$

Este evident că $x_r \otimes y_s \in T^{r+s}(g)$.
Notăm $T(g) = \bigoplus\limits_{r=0}^{\infty} T^r(g)$, unde $T^0(g) = \mathbb{R}$, $T^1(g) = g$.

$T(g)$ este un spaţiu vectorial real în mod natural. Un element $x \in T(g)$ se scrie sub forma

$$x = x_0 + x_1 + ... + x_r + ...,$$

unde $x_0 \in T^0(g) = \mathbb{R}$, $x_1 \in T^1(g) = g$, $x_2 \in g \otimes g = T^2(g), ...$ şi unde toţi x_r sunt nuli, în afara unui număr finit. Operaţiile în raport cu care $T(g)$ este spaţiu vectorial sunt:

a) adunarea

$$(x, y) \in T(g) \times T(g) \to x + y = x_0 + y_0 + x_1 + y_1 + ... \in T(g),$$

b) înmulţirea cu un scalar

$$(\lambda, x) \in \mathbb{R} \times T(g) \to \lambda x = \lambda x_0 + \lambda x_1 + ... \in T(g).$$

Mai mult, $T(g)$ este o algebră. Înmulţirea a două elemente $x, y \in T(g)$ se notează $x \otimes y$ şi se face după regula de înmulţire a polinoamelor. $T(g)$ este o algebră asociativă cu element unitate $1 \in \mathbb{R}$.

Algebra $T(g)$ se numeşte **algebra tensorială a spaţiului vectorial** g.

Exerciţiu (*proprietatea de universalitate a algebrei* $T(g)$). Notăm cu $\varphi : g \to T(g)$ incluziunea. Fie A o algebră asociativă cu element unitate e. Atunci, pentru orice aplicaţie liniară $h : g \to A$, există un unic homomorfism de algebre asociative $\tilde{h} : T(g) \to A$, astfel încât

$$\widetilde{h} \circ \varphi = h \text{şi } \widetilde{h}(1) = e.$$

1.3. Definiţie. *Fie A o algebră şi $J \subset A$ un subspaţiu vectorial. J se numeşte* **ideal stâng** *dacă $x \in J$ implică $xy \in J$, $(\forall) y \in A$.*

Analog se defineşte **idealul drept.** *Un ideal care este în acelaşi timp stâng şi drept se numeşte* **ideal bilateral.**

1.4. **Construcţia algebrei înfăşurătoare universale a unei algebre Lie.**

Fie g o algebră Lie reală, şi fie $T(g)$ algebra tensorială a spaţiului vectorial g. Considerăm mulţimea

$$M = \{x \otimes y - y \otimes x - [x, y] \mid x, y \in g\} \subset T(g),$$

şi fie J idealul bilateral generat de M. Un element oarecare $z \in J$ se scrie

$$z = \sum_{i=1}^{r} a_i \otimes b_i \otimes c_i,$$

unde $a_i \in T(g)$, b_i este generator ($b_i \in M$), $c_i \in T(g)$, iar r este un număr natural oarecare (este evident că numărul r diferă de la un element la altul).

Notaţie. $U(g) = T(g)/J$ (factorizare ca spaţiu vectorial).

DEFINIŢIE. *Algebra factor $U(g) = T(g)/J$ se numeşte* **algebra înfăşurătoare universală** *a algebrei Lie g.*

Evident, $U(g)$ este o algebră asociativă, cu element unitate $\widehat{1}$. Operaţiile în raport cu care $U(g)$ este algebră sunt definite prin relaţiile:

$$\begin{aligned} \widehat{x} + \widehat{y} &= \widehat{x + y} \\ \lambda \widehat{x} &= \widehat{\lambda x} \\ \widehat{x}\widehat{y} &= \widehat{x \otimes y}. \end{aligned}$$

Se constată uşor că cele trei operaţii nu depind de alegerea reprezentanţilor.

1.5. PROPOZIŢIE. *Fie* $\varphi : g \to T(g)$ *incluziunea, şi fie*

$$p : x \in T(g) \to p(x) = \widehat{x} = x + J \in U(g)$$

homomorfismul canonic (de algebre asociative). Atunci aplicaţia

$$i = p \circ \varphi : g \to U(g)$$

este un $L-$*homomorfism.*

Demonstraţie. Deoarece i este compunere de aplicaţii liniare, rezultă că i este liniară. Pentru orice $x, y \in g$, avem:

$$x \otimes y - y \otimes x - [x, y] \in J.$$

Rezultă că $p(x \otimes y - y \otimes x - [x, y]) = \widehat{0}$.
Deoarece p este homomorfism de algebre asociative, rezultă:

$$p(x)p(y) - p(y)p(x) - p([x, y]) = \widehat{0},$$

sau

$$p(\varphi(x))\, p(\varphi(y)) - p(\varphi(y))\, p(\varphi(x)) - p(\varphi([x, y])) = \widehat{0},$$

şi, înlocuind $p \circ \varphi = i$, obţinem că i este un $L-$homomorfism.

1.6. PROPOZIŢIE. **(proprietatea de universalitate a algebrei înfăşurătoare universale)**. *Fie* g *o algebră Lie,* $T(g)$ *algebra sa tensorială,* $U(g) = T(g)/J$ *algebra înfăşurătoare universală a algebrei Lie* g, $i = p \circ \varphi : g \to U(g)$ $L-$*homomorfismul din propoziţia anterioară.*

Considerăm o algebră asociativă A *cu element unitate* e*. Atunci, pentru orice* $L-$*homomorfism* $h : g \to A$, *există un unic homomorfism de algebre asociative* $\overline{h} : U(g) \to A$, *astfel încât*

$$\overline{h} \circ i = h \text{ şi } \overline{h}(\widehat{1}) = e.$$

Demonstraţie. Aplicăm proprietatea de universalitate a algebrei $T(g)$. Rezultă că există un unic homomorfism de algebre asociative

$$\widetilde{h} : T(g) \to A,$$

astfel încât

$$\widetilde{h} \circ \varphi = h \text{şi } \widetilde{h}(1) = e,$$

sau

$$\widetilde{h}(x) = h(x),\ (\forall) x \in g \text{şi } \widetilde{h}(1) = e.$$

$$\begin{tikzcd}
g \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\varphi"'] & A \\
T(g) \arrow[ur, "\widetilde{h}"] \arrow[d, "p"'] & \\
U(g) \arrow[uur, "\overline{h}"] &
\end{tikzcd}$$

Vom arăta că $\widetilde{h}$ duce pe J în elementul nul din A. Fie b un generator al lui J, deci b este de forma:

$$b = x \otimes y - y \otimes x - [x, y] \quad , x, y \in g.$$

Deoarece $\widetilde{h}$ este homomorfism, iar h este $L-$homomorfism rezultă:

$$\begin{aligned}
\widetilde{h}(b) &= \widetilde{h}\,(x \otimes y - y \otimes x - [x, y]) = \\
&= \widetilde{h}\,(x)\,\widetilde{h}\,(y) - \widetilde{h}\,(y)\,\widetilde{h}\,(x) - \widetilde{h}\,([x, y]) = \\
&= h(x)h(y) - h(y)h(x) - h([x, y]) = 0.
\end{aligned}$$

Deci $\widetilde{h}$ duce un generator al lui J în elementul nul din A.

Fie acum un element oarecare $z \in J$, deci z se scrie sub forma

$$z = \sum_{i=1}^{r} a_i \otimes b_i \otimes c_i,$$

unde $a_i, c_i \in T(g)$, b_i este un generator al lui J, iar r este un număr natural oarecare. Deoarece $\widetilde{h}$ este homomorfism de algebre asociative, avem:

$$\widetilde{h}(z) = \sum_{i=1}^{r} \widetilde{h}(a_i)\widetilde{h}(b_i)\widetilde{h}(c_i) = 0,$$

unde am folosit faptul că b_i este generator pentru J şi $\widetilde{h}(b_i) = 0$.

Definim aplicaţia

$$\overline{h} : U(g) \to A,$$

prin formula

$$\overline{h}(\widehat{x}) = \widetilde{h}(x).$$

Este uşor de văzut că definiţia aplicaţiei $\overline{h}$ este independentă de alegerea reprezentantului din $\widehat{x}$.

În adevăr, fie $x + j \in \widehat{x}$, unde $j \in J$. Avem:

$$\overline{h}(\widehat{x}) = \widetilde{h}(x + j) = \widetilde{h}(x) + \widetilde{h}(j) = \widetilde{h}(x).$$

Din faptul că $\widetilde{h}(J) = 0$, rezultă că $\widetilde{h}$ se factorizează la un homomorfism

$$\overline{h} : T(g)/J \to A.$$

Din faptul că $\widetilde{h}(1) = e$, rezultă că $\overline{h}(\widehat{1}) = e$.

Să verificăm comutativitatea diagramei. Pentru orice $x \in g$, avem:

$$\overline{h}\circ i(x)=\overline{h}\circ p\circ\varphi(x)=\overline{h}\circ p(x)=\overline{h}(\widehat{x})=\widetilde{h}(x)=\widetilde{h}\circ\varphi(x)=h(x),$$

deci $\overline{h}\circ i=h$.

Singurul lucru pe care-l mai avem de arătat este unicitatea lui $\overline{h}$. Să presupunem că mai există o aplicaţie

$$h':U(g)\to A,$$

astfel încât $h'\circ i=h$ şi $h'(\widehat{1})=e$. Din proprietatea de universalitate a algebrei $T(g)$ rezultă că există un unic homomorfism de algebre asociative $\widetilde{h}:T(g)\to A$, astfel încât

$$\widetilde{h}\circ\varphi=h \text{şi } \widetilde{h}(1)=e.$$

Folosind egalitatea $h'\circ p\circ\varphi=h$, rezultă că $h'\circ p=\widetilde{h}$. Prin urmare, pentru orice $x\in T(g)$, avem $h'\circ p(x)=\widetilde{h}(x)$, sau $h'(\widehat{x})=\widetilde{h}(x)$, $(\forall)\widehat{x}\in U(g)$. Rezultă $h'=\overline{h}$.

Q.E.D.

1.7. PROPOZIŢIE. *Algebra $U(g)$ este determinată până la un izomorfism de proprietatea de universalitate.*

Demonstraţie. Presupunem că există un $L-$homomorfism $i':g\to A'$ (=algebra asociativă cu element unitate e') satisfăcând următoarea proprietate de universalitate: pentru orice $L-$homomorfism $h:g\to A$ (=algebra asociativă cu element unitate e), există un unic homomorfism de algebre asociative $\overline{h'}:A'\to A$, astfel încât $\overline{h'}\circ i'=h$ şi $\overline{h'}(e')=e$.

Vom demonstra că algebra A' este izomorfă cu $U(g)$.

Deoarece A' este algebra asociativă cu element unitate e', iar $i':g\to A'$ este $L-$homomorfism, din proprietatea de universalitate a algebrei $U(g)$, rezultă că există un unic homomorfism $\overline{i'}:U(g)\to A'$, astfel încât să avem:

$$\overline{i'}\circ i=i' \text{şi } \overline{i'}(\widehat{1})=e'. \tag{1.1}$$

$$\begin{tikzcd} g \arrow[r, "i'"] \arrow[d, "i"'] & A' \\ U(g) \arrow[ur, "\overline{i'}"'] & \end{tikzcd}$$

Deoarece $U(g)$ este o algebră asociativă cu element unitate $\widehat{1}$, iar $i : g \to U(g)$ este un $L-$homomorfism, din proprietatea de universalitate a algebrei A', rezultă că există un unic homomorfism $\bar{i} : A' \to U(g)$, astfel încât să avem:

$$(1.2) \qquad \bar{i} \circ i' = i, \ \bar{i}(e') = \widehat{1}.$$

$$\begin{tikzcd} g \arrow[r, "i"] \arrow[d, "i'"'] & U(g) \\ A' \arrow[ur, "\bar{i}"'] & \end{tikzcd}$$

Din (1.1) şi (1.2), rezultă:

$$\bar{i} \circ \overline{i'} = Id_{U(g)} \text{şi } \overline{i'} \circ \bar{i} = Id_{A'}.$$

Rezultă că aplicaţia $\bar{i}$ este inversabilă şi $(\bar{i})^{-1} = \overline{i'}$. Deoarece homomorfismul $\bar{i} : A' \to U(g)$ este bijectiv, rezultă că algebrele A' şi $U(g)$ sunt izomorfe.

Q.E.D.

1.8. <u>OBSERVAŢIE</u>. Pentru $r \neq s$ avem:

$$T^r(g) \cap T^s(g) = \{0\} =$$

=spaţiul vectorial format din elementul $0 \in T(g)$ (pe $T^r(g)$ şi $T^s(g)$ le privim scufundate în $T(g)$).

Această proprietate nu este adevărată pentru $U(g)$, în sensul că dacă r şi s sunt distincte, atunci $p(T^r(g)) \cap p(T^s(g))$ este, în general, diferit de $\{\widehat{0}\}$. Pentru a ne convinge de aceasta să urmărim exemplul de mai jos.

Fie $x, y \in g$, cu $[x,y] \neq 0$. Avem: $x \otimes y - y \otimes x - [x,y] \in J$. Rezultă:

$$p(x)p(y) - p(y)p(x) = p([x,y]).$$

Avem:

$$[x,y] \neq 0,\ p([x,y]) \in p\left(T^1(g)\right) \text{ şi } p(x)p(y) - p(y)p(x) \in \left(T^2(g)\right).$$

Deci, în general, $p(T^r(g)) \cap p(T^s(g))$ este definit de $\{p(0)\}$. Prin urmare, $U(g)$ nu este egal cu $\bigoplus_{r=o}^{\infty} p(T^r(g))$.

Introducem pentru fiecare r de la 0 la ∞ următorul subspaţiu vectorial:

$$U^r(g) = p\left(\bigoplus_{h=0}^{r} T^h(g)\right).$$

Elementele lui $U^r(g)$ se numesc elementele de rang r în $U(g)$. Avem:

$$\begin{aligned} U(g) &= \bigcup_{r=0}^{\infty} U^r(g), \\ U^0(g) &\subset U^1(g) \subset \dots \subset U^r(g) \subset \dots \end{aligned}$$

1.9. Menţinem notaţiile de la observaţia 1.8.

<u>LEMĂ</u>. *Fie* Π *grupul permutărilor indicilor* $1, \dots, r$. *Atunci, oricare ar fi vectorii* $x_1, \dots, x_r \in g$, *avem*

$$p(x_1 \otimes \dots \otimes x_r) = \frac{1}{r!} p\left(\sum_{\pi \in \Pi} x_{\pi(1)} \otimes \dots \otimes x_{\pi(r)}\right) + y,$$

unde $y \in U^{r-1}(g)$.

Demonstraţie. Fie Σ submulţimea lui Π a permutărilor de forma:

$$(1.3) \quad \{1,...,s-1,s,...,r\} \to \{1,...,s-2,s,s-1,s+1,...,r\}.$$

Se constată uşor că Π este generat de Σ. Pentru $\pi \in \Pi$, avem $\pi = \sigma_k \circ ... \circ \sigma_1$, unde $\sigma_1,...,\sigma_k \in \Sigma$. Presupunem că σ_1 este transpoziţia (1.3). Dacă pe elementul

$$x_s \otimes x_{s-1} - x_{s-1} \otimes x_s - [x_s, x_{s-1}] \in J$$

îl inmulţim la stânga cu $x_1 \otimes ... \otimes x_{s-2}$, şi la dreapta cu $x_{s+1} \otimes ... \otimes x_r$, obţinem un element din J pe care-l notăm cu $-u_1$, deci

$$\begin{aligned} -u_1 &= x_1 \otimes ... \otimes x_{s-2} \otimes x_s \otimes x_{s-1} \otimes x_{s+1} \otimes ... \otimes x_r - x_1 \otimes ... \otimes x_r - \\ &\quad -x_1 \otimes ... \otimes x_{s-2} \otimes [x_s, x_{s-1}] \otimes x_{s+1} \otimes ... \otimes x_r. \end{aligned}$$

De aici rezultă

$$x_1 \otimes ... \otimes x_r - x_{\sigma_1(1)} \otimes ... \otimes x_{\sigma_1(r)} = u_1 + v_1,$$

unde $u_1 \in J$, $v_1 = -x_1 \otimes ... \otimes x_{s-2} \otimes [x_s, x_{s-1}] \otimes x_{s+1} \otimes ... \otimes x_r \in T^{r-1}(g)$. Aplicăm acelaşi raţionament elementelor

$$y_1 = x_{\sigma_1(1)}, \ \ldots, \ y_r = x_{\sigma_1(r)},$$

şi obţinem

$$x_{\sigma_1(1)} \otimes ... \otimes x_{\sigma_1(r)} - x_{\sigma_2 \circ \sigma_1(1)} \otimes ... \otimes x_{\sigma_2 \circ \sigma_1(r)} = u_2 + v_2,$$

unde $u_2 \in J$, $v_2 \in T^{r-1}(g)$. Repetăm raţionamentul şi vom obţine în final

$$x_{\sigma_{k-1} \circ ... \circ \sigma_1(1)} \otimes ... \otimes x_{\sigma_{k-1} \circ ... \circ \sigma_1(r)} - x_{\pi(1)} \otimes ... \otimes x_{\pi(r)} = u_k + v_k,$$

unde $u_k \in J$, $v_k \in T^{r-1}(g)$, $\pi = \sigma_k \circ ... \circ \sigma_1$.
Folosind ultimele egalităţi, obţinem

$$x_1 \otimes ... \otimes x_r - x_{\pi(1)} \otimes ... \otimes x_{\pi(r)} = u_\pi + v_\pi,$$

unde $u_\pi = \sum_{i=1}^{k} u_i \in J$, $v_\pi = \sum_{i=1}^{k} v_i \in T^{r-1}(g)$, $\pi = \sigma_k \circ ... \circ \sigma_1 \in \Pi$. În continuare, obţinem

$$p(x_1 \otimes ... \otimes x_r) = p\left(x_{\pi(1)} \otimes ... \otimes x_{\pi(r)}\right) + p(v_\pi)$$

unde $p(v_\pi) \in p(T^{r-1}(g))$, deci $p(v_\pi) \in U^{r-1}(g)$.
Scriem ultima egalitate pentru toate permutările $\pi \in \Pi$ şi, apoi adunând, obţinem

$$r!p(x_1 \otimes ... \otimes x_r) = \sum_{\pi \in \Pi} p\left(x_{\pi(1)} \otimes ... \otimes x_{\pi(r)}\right) + y_1,$$

unde $y_1 = \sum_{\pi \in \Pi} p(v_\pi) \in U^{r-1}(g)$. Am obţinut tocmai formula ce trebuia stabilită, unde $y = \frac{1}{r!} y_1 \in U^{r-1}(g)$.

1.10. În continuare vom nota cu $S^r(g)$ mulţimea tensorilor simetrici din $T^r(g)$, deci

$$S^r(g) = \{t \in T^r(g) \mid t \text{ este simetric}\}.$$

Notăm $S(g) = \bigoplus_{r=0}^{\infty} S^r(g)$. Evident, $S(g)$ este subspaţiu vectorial al algebrei $T(g)$ (numit subspaţiul vectorial al tensorilor simetrici).

<u>LEMĂ</u>. *Menţinem notaţiile de mai înainte. Fie q restricţia la $S(g)$ a proiecţiei canonice*

$$p : x \in T(g) \to p(x) = \widehat{x} \in U(g).$$

Atunci q este aplicaţie surjectivă.

Demonstraţie. Vom arăta prin inducţie că aplicaţia

$$q : S(g) = \bigoplus_{r=0}^{\infty} S^r(g) \to U(g) = \bigcup_{r=0}^{\infty} U^r(g)$$

este surjectivă.

Pentru $r = 0$ se observă că q stabileşte o surjectie între $S^0(g) = T^0(g) = \mathbb{R}$ şi $U^0(g) = q(\mathbb{R})$, deoarece q duce elementul 1 din $T(g)$ $(1 \in S(g))$ în elementul $\widehat{1}$ din $U(g)$ ($\widehat{1}$ se gaseste în $U^0(g) = q(\mathbb{R})$).

Un element oarecare din $U^0(g)$ se scrie sub forma $\lambda \cdot \widehat{1}$, cu $\lambda \in \mathbb{R}$, şi avem: $\lambda \cdot \widehat{1} = \lambda \cdot q(1) = q(\lambda \cdot 1)$.

Presupunem acum că q stabileşte o surjectie între $S^0(g) \oplus ... \oplus S^{r-1}(g)$ şi $U^{r-1}(g)$. Să arătăm că q stabileşte o surjecţie între

$$S^0(g) \oplus ... \oplus S^r(g) \text{ şi } U^r(g).$$

Fie $x \in T^0(g) \oplus ... \oplus T^r(g)$. Elementul x se scrie

$$x = x' + \sum_i \lambda_i x_1^i \otimes ... \otimes x_r^i,$$

unde

$$x' \in T^0(g) \oplus ... \oplus T^{r-1}(g), \; \lambda_i \in \mathbb{R}, \; x_1^i, ..., x_r^i \in T^1(g).$$

Atunci $p(x)$ se scrie:

$$p(x) = p(x') + \sum_i \lambda_i p\left(x_1^i \otimes ... \otimes x_r^i\right).$$

Deoarece $p(x') \in U^{r-1}(g)$, din ipoteza de inducţie rezultă că $p(x')$ se scrie:

$$p(x') = q(x''), \; x'' \in \bigoplus_{h=0}^{r-1} S^h(g).$$

Rezultă:

$$p(x) = q(x'') + \sum_i \lambda_i p\left(x_1^i \otimes ... \otimes x_r^i\right).$$

Mai rămâne să demonstrăm că pentru orice element $x_1 \otimes ... \otimes x_r$, unde $x_1, ..., x_r \in g$, există $z \in \bigoplus_{h=0}^{r} S^h(g)$, astfel încât

$$p(x_1 \otimes ... \otimes x_r) = q(z).$$

Din lema 1.9 ştim că avem

$$p(x_1 \otimes ... \otimes x_r) = p\left(\frac{1}{r!}\sum_{\pi\in\Pi} x_{\pi(1)} \otimes ... \otimes x_{\pi(r)}\right) + y,$$

unde $y \in U^{r-1}(g)$. Din ipoteza de inducţie, avem:

$$y = q(y'), \text{ cu } y' \in \bigoplus_{h=0}^{r-1} S^h(g).$$

Rezultă că putem scrie

$$p(x_1 \otimes ... \otimes x_r) = p(y_1) + q(y').$$

Deoarece $y_1 \in S^r(g)$, avem

$$p(y_1) = q(y_1),$$

şi deci obţinem

$$p(x_1 \otimes ... \otimes x_r) = q(z),$$

unde am notat $z = y_1 + y' \in \bigoplus_{h=0}^{r} S^h(g)$.

Prin urmare, aplicaţia

$$q : S(g) \to U(g)$$

este surjectivă.

1.11. Fie g o algebră Lie reală şi fie $\{E_1, ..., E_n\}$ o bază a spaţiului vectorial g. Fiecărui multiindice $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$ cu $|\alpha| = r$, îi asociem un element $E_\alpha \in S^r(g)$, în felul următor:

construim un şir de indici $i_1, ..., i_r$ cu $1 \leq i_1 \leq ... \leq i_r \leq n$, astfel:

$$(i_1, ..., i_r) = \left(\underbrace{1, ..., 1}_{\alpha_1}, \underbrace{2, ..., 2}_{\alpha_2}, ..., \underbrace{n, ..., n}_{\alpha_n} \right),$$

unde, dacă $\alpha_k = 0$, atunci subşirul în care se repetă k de α_k ori dispare, şi apoi punem:

$$E_\alpha = \frac{1}{r!} \sum_{\pi \in \Pi} E_{i_{\pi(1)}} \otimes ... \otimes E_{i_{\pi(r)}} \in S^r(g),$$

unde Π este grupul permutărilor indicilor $1, ..., r$.

Exerciţiu. $\{E_\alpha \mid |\alpha| = r\}$ *este o bază în* $S^r(g)$.

1.12. Fie $\{E_1, ..., E_n\}$ o bază în algebra Lie g, şi fie

$$p : x \in T(g) \to p(x) = \widehat{x} \in U(g)$$

homomorfismul canonic de algebre asociative considerat mai sus.

Notăm $f_i = p(E_i)$, oricare ar fi $i \in \{1, ..., n\}$.

Fiecărui multiindice $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ îi asociem un element $f_\alpha \in U(g)$, prin formula:

$$f_\alpha = (f_1)^{\alpha_1} ... (f_n)^{\alpha_n}.$$

PROPOZIŢIE. *Mulţimea* $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{N}^n}$ *formează un sistem de generatori pentru* $U(g)$.

Demonstraţie. Fie indicii $i_1, ..., i_r \in \{1, ..., n\}$ construiţi la 1.11, unde $r = |\alpha|$. Avem:

$$f_\alpha = (f_1)^{\alpha_1} ... (f_n)^{\alpha_n} = f_{i_1} ... f_{i_r} = p(E_{i_1}) ... p(E_{i_r}) = p(E_{i_1} \otimes ... \otimes E_{i_r}).$$

Folosind lema 1.9, obţinem

$$f_\alpha = p\left(\frac{1}{r!}\sum_{\pi\in\Pi} E_{i_{\pi(1)}} \otimes ... \otimes E_{i_{\pi(r)}}\right) + f'_\alpha,$$

unde $f'_\alpha \in U^{r-1}(g)$. Deoarece aplicaţia

$$q : S(g) \to U(g)$$

este surjectivă, rezultă că ultima egalitate se poate scrie sub forma

$$f_\alpha = p(E_\alpha) + q(f''_\alpha),$$

unde $f''_\alpha \in \bigoplus_{h=0}^{r-1} S^h(g)$. Deoarece $E_\alpha \in S^r(g)$, rezultă

$$(1.4) \qquad f_\alpha = q(E_\alpha + f''_\alpha), \ f''_\alpha \in \bigoplus_{h=0}^{r-1} S^h(g), \ \text{unde } |\alpha| = r.$$

Să arătăm acum că $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{N}^n}$ formează un sistem de generatori pentru $U(g)$. Ştim că $\{E_\alpha \mid \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| = r\}$ constituie un sistem de generatori pentru $S^r(g)$. Notăm

$$E'_\alpha = E_\alpha + f''_\alpha.$$

Vom arăta prin inducţie că $\{E'_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{N}^n}$ este un sistem de generatori pentru $S(g) = \bigoplus_{r=0}^{\infty} S^r(g)$.

Pentru $r = 0$, afirmaţia este evidentă, deoarece $E_{[0]} = 1$, iar $S^0(g) = \mathbb{R}$.

Presupunem că $\{E'_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{N}^n}$, cu $|\alpha| \leq r-1$, formează un sistem de generatori pentru $\bigoplus_{h=0}^{r-1} S^h(g)$, şi să arătăm că $\{E'_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{N}^n}$, cu $|\alpha| \leq r$, formează un sistem de generatori pentru $\bigoplus_{h=0}^{r} S^h(g)$.

Fie $\alpha \in \mathbb{N}^n$, cu $|\alpha| = r$. Atunci $f''_\alpha \in \bigoplus_{h=0}^{r-1} S^h(g)$. Din ipoteza de inducţie, avem

$$f''_\alpha = \sum_{\substack{\beta \\ |\beta|\leq r-1}} c_{\alpha\beta} E'_\beta\ ,$$

unde $c_{\alpha\beta}$ sunt constante. Rezultă:

$$E_\alpha = E'_\alpha - \sum_{\substack{\beta \\ |\beta|\leq r-1}} c_{\alpha\beta} E'_\beta\ .$$

Folosind ipoteza de inducţie, şi din faptul că $\{E_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{N}^n}$, cu $|\alpha| = r$, formează un sistem de generatori pentru $S^r(g)$, rezultă că $\{E'_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{N}^n}$, cu $|\alpha| \leq r$, formează un sistem de generatori pentru $\bigoplus_{h=0}^{r} S^h(g)$.

În concluzie, $\{E'_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{N}^n}$ este un sistem de generatori pentru $S(g) = \bigoplus_{h=0}^{\infty} S^h(g)$.

Deoarece aplicaţia $q : S(g) \to U(g)$ este surjecţie liniară, rezultă că $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{N}^n}$, unde $f_\alpha = q(E'_\alpha)$, este sistem de generatori pentru $q(S(g)) = U(g)$.

§ 2. TEOREMA BIRKHOFF-WITT

TEOREMĂ. (**Birkhoff-Witt**). *Algebra operatorilor diferenţiali stâng invarianţi pe grupul Lie G este izomorfă cu algebra înfăşurătoare universală a algebrei Lie $L(G)$ a lui G.*

Demonstraţie. Am văzut că orice câmp stâng invariant $X \in L(G)$ poate fi privit ca un operator diferenţial stâng invariant de ordinul unu.

Fie $J(G)$ algebra operatorilor diferenţiali stâng invarianţi pe grupul Lie G. Considerăm incluziunea

$$j : X \in L(G) \to j(X) = X \in J(G).$$

Pentru orice $X, Y \in L(G)$ avem:

$$j([X,Y]) = [X,Y] = XY - YX = j(X)\,j(Y) - j(Y)\,j(X),$$

deci j este un $L-$homomorfism.

Fie $T(L(G))$ algebra tensorială a spaţiului vectorial $L(G)$, şi fie $U(L(G))$ algebra înfăşurătoare universală a algebrei Lie $L(G)$. Considerăm incluziunea $\varphi : L(G) \to T(L(G))$, şi fie

$$p : X \in T(L(G)) \to \widehat{X} = p(X) \in U(L(G))$$

homomorfismul canonic. Atunci $i = p \circ \varphi : L(G) \to U(L(G))$ este un $L-$homomorfism.

$$\begin{tikzcd}
L(G) \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\varphi"'] & J(G) \\
T(L(G)) \arrow[d, "p"'] & \\
U(L(G)) \arrow[uur, "\overline{j}"'] &
\end{tikzcd}$$

Conform proprietăţii de universalitate pentru $U(L(G))$, există un unic homomorfism de algebre asociative

$$\overline{j}:U(L(G))\to J(G),$$

astfel încât:

$$\overline{j}\circ i=j \text{ şi } \overline{j}\left(\widehat{1}\right)=S_{[0]}\ ,$$

unde $S_{[0]}$ este elementul unitate al algebrei $J(G)$,

$$S_{[0]}:f\in\mathcal{F}(G)\to S_{[0]}(f)=1\cdot f=f\in\mathcal{F}(G).$$

Vom arăta că $\overline{j}$ este izomorfism.
Este suficient să arătăm că $\overline{j}$ duce o bază a lui $U(L(G))$ într-o bază a lui $J(G)$. Vom arăta că $\overline{j}$ duce $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{N}^n}$ (unde $f_{[0]}=\widehat{1}$, $n=\dim L(G)$) într-o bază a lui $J(G)$, apoi vom arăta că $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{N}^n}$ este bază în $U(g)$.

Am văzut că dacă $\{E_1,...,E_n\}$ este o bază fixată a algebrei Lie $L(G)$, şi dacă notăm $f_i=p(E_i)$, $i=1,...,n$, atunci pentru orice multiindice
$\alpha=(\alpha_1,...,\alpha_n)\in\mathbb{N}^n$ luăm

$$f_\alpha=(f_1)^{\alpha_1}...(f_n)^{\alpha_n},$$

unde produsele sunt în $U(g)$. Avem:

$$\begin{aligned}\overline{j}(f_\alpha) &= \overline{j}((f_1)^{\alpha_1}...(f_n)^{\alpha_n})=\overline{j}((f_1)^{\alpha_1})...\overline{j}((f_n)^{\alpha_n})=\\ &= \left(\overline{j}(f_1)\right)^{\alpha_1}...\left(\overline{j}(f_n)\right)^{\alpha_n}=\left(\overline{j}\circ p(E_1)\right)^{\alpha_1}...\left(\overline{j}\circ p(E_n)\right)^{\alpha_n}=\\ &= \left(\overline{j}\circ p\circ\varphi(E_1)\right)^{\alpha_1}...\left(\overline{j}\circ p\circ\varphi(E_n)\right)^{\alpha_n}=\\ &= \left(\overline{j}\circ i(E_1)\right)^{\alpha_1}...\left(\overline{j}\circ i(E_n)\right)^{\alpha_n}=(j(E_1))^{\alpha_1}...(j(E_n))^{\alpha_n}=\\ &= E_1^{\alpha_1}...E_n^{\alpha_n}.\end{aligned}$$

Am obţinut egalitatea:

$$\overline{j}(f_\alpha)=E_1^{\alpha_1}...E_n^{\alpha_n}. \tag{2.1}$$

Cu ajutorul formulei (2.1) se arată uşor că orice număr finit de elemente din $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{N}^n}$ sunt liniari independente. Fie k elemente distincte

$$f_{\underset{1}{\alpha}}, ..., f_{\underset{k}{\alpha}} \in \{f_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{N}^n} \ .$$

Presupunem că există numerele reale $\lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{R}$, astfel încât să avem:

$$\lambda_1 f_{\underset{1}{\alpha}} + ... + \lambda_k f_{\underset{k}{\alpha}} = 0.$$

Aplicând $\overline{j}$, obţinem:

$$\lambda_1 \overline{j}\left(f_{\underset{1}{\alpha}}\right) + ... + \lambda_k \overline{j}\left(f_{\underset{k}{\alpha}}\right) = 0. \tag{2.2}$$

Folosind (2.1), (2.2) şi propoziţia 2.9 din capitolul precedent rezultă $\lambda_1 = ... = \lambda_k = 0$, deci $f_{\underset{1}{\alpha}}, ..., f_{\underset{k}{\alpha}}$ sunt liniar independenţi.

Folosind propoziţia 1.12 rezultă că $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{N}^n}$ formează o bază în algebra $U(L(G))$. Deci homomorfismul de algebre asociative $\overline{j} : U(L(G)) \to J(G)$ duce baza $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{N}^n}$ a lui $U(L(G))$ într-o bază a lui $J(G)$. Rezultă că $\overline{j}$ este un izomorfism de algebre.

CAPITOLUL V

DETERMINAREA UNUI GRUP LIE DE CĂTRE ALGEBRA SA LIE

§ 1. FORMULA TAYLOR.

1.1. OBSERVAŢIE. Fie G un grup Lie de dimensiune n, $L(G)$ algebra sa Lie, $(W_e, \log)$ o hartă a varietăţii G în jurul elementului neutru e al grupului G.

Pentru X şi Y fixaţi în $L(G)$, considerăm funcţia

$$\varphi : I_\varepsilon \times I_\varepsilon \to G,\ I_\varepsilon = (-\varepsilon, \varepsilon),\ \varepsilon > 0$$

definită prin:

$$\varphi(t,s) = \exp tX \exp sY.$$

Fie $f \in \mathcal{F}(W_e)$. Considerăm funcţia analitică de două variabile

$$\psi = f \circ \varphi : I_\varepsilon \times I_\varepsilon \to \mathbb{R}.$$

Este cunoscută de la analiză *formula clasică a lui Taylor* pentru funcţii analitice de două variabile

$$(1.1) \qquad \psi(t,s) = \sum_{p,q=0}^{\infty} \frac{t^p}{p!} \frac{s^q}{q!} \frac{\partial^{p+q}\psi}{\partial t^p \partial s^q} \Big|_{t=s=0}.$$

1.2. PROPOZIŢIE. **(formula Taylor).** *Cu notaţiile de mai sus, avem*

$$(1.1') \qquad f(\exp tX \exp sY) = \sum_{p,q=0}^{\infty} \frac{t^p}{p!} \frac{s^q}{q!} X^p Y^q (f)(e),$$

unde am folosit notaţia $X(f) = X|_{\mathcal{F}(W_e)}(f)$.

Demonstraţie. Fie $\alpha : I_\varepsilon \times W_\varepsilon \to G$ un grup de transformări locale cu un parametru al câmpului X. Pentru $x \in W_e$ curba

$$\alpha_x : I_\varepsilon \to G,\ \alpha_x(t) = \alpha(t, x)$$

este traiectorie a câmpului X, deci

$$\dot{\alpha}_x(t) = X_{\alpha_x(t)}, (\forall)\, t \in I_\varepsilon.$$

De aici rezultă

$$(\alpha_x)_* \left(\frac{d}{dt}|_t\right)(f) = X_{\alpha_x(t)}(f),$$

sau

$$\frac{d}{dt} f(\alpha(t, x)) = X(f)(\alpha(t, x)).$$

Folosind ultima egalitate, rezultă:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(x \exp tX) &= \frac{d}{dt} f(x\alpha_e(t)) = \frac{d}{dt} f(\alpha(t, x)) = X(f)(\alpha(t, x)) = \\ &= X(f)(x\alpha_e(t)) = X(f)(x \exp tX). \end{aligned}$$

Am obţinut formula

$$\frac{d}{dt} f(x \exp tX) = X(f)(x \exp tX). \tag{1.2}$$

Înlocuind în (1.2) funcţia f cu $X(f), X^2(f), ..., X^{q-1}(f)$, obţinem egalităţile:

$$\begin{aligned} &\tfrac{d}{dt} X(f)(x \exp tX) = X^2(f)(x \exp tX) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\tfrac{d}{dt} X^{q-1}(f)(x \exp tX) = X^q(f)(x \exp tX). \end{aligned} \tag{1.2'}$$

Pe de altă parte, derivând relaţia (1.2) în raport cu t şi ţinând seama de (1.2'), rezultă

$$(1.3)\qquad \frac{d^2}{dt^2} f\left(x \exp tX\right) = X^2\left(f\right)\left(x \exp tX\right).$$

Analog obţinem:

$$(1.4)\qquad \frac{d^q}{dt^q} f\left(x \exp tX\right) = X^q\left(f\right)\left(x \exp tX\right).$$

Pentru $t = s$ şi $X = Y$, relaţia (1.4) se scrie:

$$(1.4')\qquad \frac{d^q}{ds^q} f\left(x \exp sY\right) = Y^q\left(f\right)\left(x \exp sY\right).$$

Considerăm acum funcţia $h \in \mathcal{F}\left(W_e\right)$, definită prin:

$$(1.5)\qquad h\left(x\right) = \frac{d^q}{ds^q}\left(f\left(x \exp sY\right)|_{s=0}\right) = Y^q\left(f\right)\left(x\right).$$

Scriem relaţia (1.4), pentru $p = q$ şi $f = h$:

$$(1.6)\qquad \frac{d^p}{dt^p} h\left(x \exp tX\right) = X^p\left(h\right)\left(x \exp tX\right).$$

Pentru $x = e$ şi $t = 0$, din (1.6) avem:

$$(1.7)\qquad \frac{d^p}{dt^p} h\left(\exp tX\right)|_{t=0} = X^p\left(h\right)\left(e\right).$$

Pentru $x = \exp tX$, relaţia (1.5) se scrie:

$$(1.5')\qquad h\left(\exp tX\right) = \frac{d^q}{ds^q} f\left(\exp tX \exp sY\right)|_{s=0}.$$

Folosind relaţiile $(1.5')$ şi (1.5), din (1.7) obţinem:

$$\frac{d^p}{dt^p}\left(\frac{d^q}{ds^q} f\left(\exp tX \exp sY\right)\,|_{s=0}\right)\,|_{t=0}= X^p Y^q\left(f\right)\left(e\right).$$

Deci am arătat că

$$\frac{\partial^{p+q}\psi}{\partial t^p \partial s^q}\,|_{t=s=0}= X^p Y^q\left(f\right)\left(e\right). \tag{1.8}$$

Din (1.8) şi (1.1) se obţine *formula lui Taylor* $(1.1')$.

§ 2. FORMULA CAMPBELL-HAUSDORFF

În cele ce urmează vom nota cu G un grup Lie de dimensiune n, $J(G)$ algebra operatorilor diferenţiali stâng invarianţi pe G, $U(L(G))$ algebra înfăşurătoare universală a algebrei Lie $L(G)$ a grupului Lie G.

Fixăm o bază $\{E_1, ..., E_n\}$ în algebra Lie $L(G)$ a grupului Lie G. Fie $(W_e, \log)$ o hartă locală a varietăţii G în jurul elementului neutru e al grupului G. Fie $x, y \in W_e$, cu $xy \in W_e$.

Avem:

$$x = \exp x^i E_i, \ y = \exp y^i E_i, \ xy = \exp (xy)^i E_i.$$

Fie $\theta^1, ..., \theta^n$ funcţiile coordonate canonice, deci

$$\theta^i : W_e \to \mathbb{R}, \quad \theta^i(x) = x^i, i = \overline{1,n}.$$

Avem: $\theta^i(xy) = (xy)^i$. Scriem formula lui Taylor (1.1′) pentru $f = \theta^i$, $t = s = 1$, $X = x^i E_i$, $Y = y^i E_i$:

$$(2.1) \qquad (xy)^i = \sum_{p,q=0}^{\infty} \frac{1}{p!}\frac{1}{q!} \left(x^k E_k\right)^p \left(y^j E_j\right)^q \left(\theta^i\right)(e).$$

Ţinând seama de formulele

$$\left(x^i E_i\right)^p = \sum_{|\alpha|=p} x^\alpha S_\alpha, \quad \left(y^i E_i\right)^q = \sum_{|\beta|=q} y^\beta S_\beta,$$

unde $x^\alpha = (x^1)^{\alpha_1} ... (x^n)^{\alpha_n}$, $y^\beta = (y^1)^{\beta_1} ... (y^n)^{\beta_n}$, iar $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, ..., \beta_n) \in \mathbb{N}^n$, din (2.1) obţinem:

$$(2.2) \qquad (xy)^i = \sum_{\alpha,\beta\in\mathbb{N}^n} \frac{1}{|\alpha|!}\frac{1}{|\beta|!} x^\alpha y^\beta S_\alpha S_\beta \left(\theta^i\right)(e).$$

Deoarece $\{S_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{N}^n}$ constituie o bază în algebra $J(G)$, rezultă că avem

$$(2.3)\, S_\alpha S_\beta = \sum_{|\gamma|\leq|\alpha|+|\beta|} s^\gamma_{\alpha\beta} S_\gamma,$$

unde $s^\gamma_{\alpha\beta}$ sunt constante reale.

Datorită faptului că algebrele $U(L(G))$ şi $J(G)$ sunt izomorfe (teorema Birkhoff-Witt), rezultă că putem să calculăm produsul $S_\alpha S_\beta$ în $U(L(G))$. Prin urmare, coeficienţii $s^\gamma_{\alpha\beta}$ depind de algebra Lie $L(G)$. Ţinând seama de (2.2) şi (2.3), obtinem:

$$(2.4) \qquad (xy)^i = \sum_{|\gamma|\leq|\alpha|+|\beta|} \frac{1}{|\alpha|!} \frac{1}{|\beta|!} x^\alpha y^\beta s^\gamma_{\alpha\beta} S_\gamma \left(\theta^i\right)(e).$$

Folosind formula

$$D_\gamma(f)(e) = \frac{\gamma_1!...\gamma_n!}{|\gamma|!} S_\gamma(f)(e), \ \ (\forall) f \in \mathcal{F}(W_e),$$

din (2.4) rezultă:

$$(2.4') \qquad (xy)^i = \sum_{|\gamma|\leq|\alpha|+|\beta|} \frac{1}{|\alpha|!} \frac{1}{|\beta|!} x^\alpha y^\beta s^\gamma_{\alpha\beta} \frac{|\gamma|!}{\gamma_1!...\gamma_n!} D_\gamma\left(\theta^i\right)(e).$$

Deoarece avem:

$$D_\gamma\left(\theta^i\right)(e) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } \gamma = [i] \\ 0, & \text{dacă } \gamma \neq [i] \end{cases}$$

din (2.4′) rezultă:

$$(2.5) \qquad (xy)^i = \sum_{\substack{\alpha,\beta\in\mathbb{N}^n \\ |\alpha|+|\beta|\geq 1}} \frac{1}{|\alpha|!} \frac{1}{|\beta|!} x^\alpha y^\beta s^{[i]}_{\alpha\beta}.$$

Formula (2.5) ne arată că legea de grup a lui G este determinată în vecinătatea elementului neutru e al grupului G de către algebra Lie $L(G)$ a lui G. Scriem pe larg formula (2.5), şi avem

$$
\begin{aligned}
(2.6) \qquad (xy)^i \;=\; & s^{[i]}_{[j][0]} x^{[j]} y^{[0]} + s^{[i]}_{[0][k]} x^{[0]} y^{[k]} + \frac{1}{2} s^{[i]}_{\alpha[0]} x^{\alpha} y^{[0]} + \\
& + \frac{1}{2} s^{[i]}_{[0]\beta} x^{[0]} y^{\beta} + s^{[i]}_{[j][k]} x^{[j]} y^{[k]} + \\
& + \text{termenii de ordin mai mare sau egal cu trei,}
\end{aligned}
$$

unde $|\alpha| = |\beta| = 2$. Deoarece $S_{[0]}$ este operator identitate, avem egalităţile:

$$
\begin{aligned}
S_{[0]} S_{[k]} &= S_{[k]}, \quad S_{[j]} S_{[0]} = S_{[j]}, \\
S_{\alpha} S_{[0]} &= S_{\alpha}, \quad S_{[0]} S_{\beta} = S_{\beta}.
\end{aligned}
$$

Din ultimele egalităţi obţinem:

$$
(2.6') \qquad s^{[i]}_{[j][0]} = \delta^i_j, \quad s^{[i]}_{[0][k]} = \delta^i_k,
$$

$$
(2.6'') \qquad s^{[i]}_{\alpha[0]} = 0, \quad s^{[i]}_{[0]\beta} = 0,
$$

unde $|\alpha| = |\beta| = 2$. Pentru calcularea coeficientului $s^{[i]}_{[j][k]}$, scriem

$$
S_{[j]} S_{[k]} = \sum_{|\gamma| \leq 2} s^{\gamma}_{[j][k]} S_{\gamma},
$$

sau

$$
(2.7) \qquad S_{[j]} S_{[k]} = s^{[0]}_{[j][k]} S_{[0]} + s^{[i]}_{[j][k]} S_{[i]} + \left(s^{[hi]}_{[j][k]} S_{[hi]} + s^{\alpha}_{[j][k]} S_{\alpha} \right),
$$

unde multiindicele α are toate componentele nule, în afară de una singură care este egală cu doi.

Pe de altă parte, din egalitatea

$$
[E_j, E_k] = E_j E_k - E_k E_j,
$$

obţinem:

$$E_j E_k = \frac{1}{2}[E_j, E_k] + \frac{1}{2}(E_j E_k + E_k E_j).$$

Ultima egalitate se poate scrie sub forma

$$S_{[j]}S_{[k]} = \frac{1}{2}c^i_{jk}S_{[i]} + \frac{1}{2}S_{[jk]}, \tag{2.8}$$

unde c^i_{jk} sunt constantele de structură ale algebrei Lie $L(G)$, relative la baza fixată $\{E_1, ..., E_n\}$.

Relaţiile (2.7) şi (2.8) ne arată că avem

$$s^{[i]}_{[j][k]} = \frac{1}{2}c^i_{jk}. \tag{2.9}$$

Deoarece $x^{[0]} = y^{[0]} = 1$, $x^{[i]} = x^i$, $y^{[i]} = y^i$, din (2.6), (2.6′) şi (2.9) obţinem:

$$\begin{aligned} (xy)^i \;&=\; x^i + y^i + \frac{1}{2}c^i_{jk}x^j y^k + \\ &\qquad + \text{termenii de ordin mai mare sau egal cu trei.} \end{aligned} \tag{2.10}$$

Formula (2.10) este numită *formula lui Campbell-Hausdorff*. Ea exprimă operaţia de înmulţire în grupul G (în vecinătatea elementului neutru), în funcţie de croşet.

Dacă înmulţim formula (2.10) cu E_i şi sumăm în raport cu i, obţinem:

$$\begin{aligned} Z \;&=\; X + Y + \frac{1}{2}[X, Y] + \\ &\qquad + \text{termenii de ordin mai mare sau egal cu trei,} \end{aligned} \tag{2.10′}$$

unde $X = x^i E_i$, $Y = y^i E_i$, $Z = (xy)^i E_i$.

§ 3. GRUPURI LIE LOCAL IZOMORFE TEOREMA FUNDAMENTALĂ A LUI LIE

3.1. DEFINIŢIE. *Două* **grupuri Lie** G *şi* G' *se numesc* **local izomorfe** *dacă există vecinătăţile deschise* U *a lui* $e \in G$, U' *a lui* $e' \in G'$ *şi un difeomorfism* $f : U \to U'$, *astfel încât:*

(a) $x,\ y,\ xy \in U$ *implică* $f(xy) = f(x) f(y) \in U'$,
(b) $x',\ y',\ x'y' \in U'$ *implică* $f^{-1}(x'y') = f^{-1}(x') f^{-1}(y') \in U$.

În cele ce urmează, ca aplicaţie a teoremei lui Birkhoff-Witt, dăm următoarea teoremă:

3.2. TEOREMA (LIE). *Fie* G *şi* G' *două grupuri Lie şi fie* $L(G)$ *şi* $L(G')$ *algebrele lor Lie. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) G *şi* G' *sunt local izomorfe,*
(ii) $L(G)$ *şi* $L(G')$ *sunt izomorfe.*

Demonstraţie: (i) $\Rightarrow$ (ii). Deoarece G şi G' sunt local izomorfe, există vecinătăţile deschise U a lui $e \in G$, U' a lui $e' \in G'$ şi un difeomorfism $f : U \to U'$, astfel încât să avem (a) şi (b).

Vom asocia fiecărui câmp $X \in L(G)$ un câmp $X' \in L(G')$. Fie $X \in L(G)$. Atunci $X|_U \in \mathcal{X}(U)$. Rezultă că $f_*(X|_U) \in \mathcal{X}(U')$. Vom arăta că $f_*(X|_U)$ se prelungeşte la un unic câmp $X' \in L(G')$. În adevăr, deoarece $X \in L(G)$, el determină un unic grup de transformări cu un parametru $\alpha : \mathbb{R}\times G \to G$, $\alpha(t,a) = a\alpha_e(t)$ unde

$$\alpha_e : t \in \mathbb{R} \to \alpha_e(t) = \alpha(t,e) \in G$$

este un homomorfism de grupuri Lie, şi avem:

$$(\alpha_e)_*\left(\frac{d}{dt}\right) = X.$$

Rezultă că există un interval $I_\varepsilon = (-\varepsilon,\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, astfel încât

$$\alpha_e\,|_{I_\varepsilon}\colon I_\varepsilon \to U \subset G$$

este un homomorfism local. Definim aplicaţia

$$\overline{\alpha} : I_\varepsilon \to U' \subset G'$$

prin formula

$$\overline{\alpha} = f \circ \alpha_e\,|_{I_\varepsilon}\ .$$

Pentru orice $t, t' \in I_\varepsilon$, cu $t + t' \in I_\varepsilon$, avem:

$$\begin{aligned}
\overline{\alpha}\,(t+t') &= f \circ \alpha_e\,|_{I_\varepsilon}\,(t+t') = f\,(\alpha_e\,|_{I_\varepsilon}\,(t)\,\alpha_e\,|_{I_\varepsilon}\,(t')) = \\
&= f\,(\alpha_e\,|_{I_\varepsilon}\,(t))\,f\,(\alpha_e\,|_{I_\varepsilon}\,(t')) = \overline{\alpha}\,(t)\,\overline{\alpha}\,(t')\,,
\end{aligned}$$

deci

$$\overline{\alpha} : I_\varepsilon \to U' \subset G'$$

este un homomorfism local. Homomorfismul local $\overline{\alpha}$ se extinde la un unic homomorfism

$$\alpha'_{e'} : \mathbb{R} \to G'.$$

Considerăm acum grupul de transformări cu un parametru

$$\alpha' : \mathbb{R} \times G' \to G',$$

definit prin

$$\alpha'\,(t, a') = a'\alpha'_{e'}\,(t)\,.$$

Fie X' câmpul stâng invariant asociat acţiunii α', deci

$$X' = (\alpha'_{e'})_* \left(\frac{d}{dt}\right).$$

Avem:

$$X' |_{U'} = (\alpha'_{e'})_* \left(\frac{d}{dt}\right) |_{U'} = \overline{\alpha}_* \left(\frac{d}{dt}\right) = (f \circ \alpha_e |_{I_\varepsilon}) \left(\frac{d}{dt}\right) =$$

$$= f_* \left((\alpha_e |_{I_\varepsilon}) \left(\frac{d}{dt}\right)\right) = f_* \left((\alpha_e)_* \left(\frac{d}{dt}\right) |_U\right) = f_* (X |_U).$$

Deci X' are proprietatea

$$X' |_{U'} = f_* (X |_U).$$

În plus, câmpul X' cu această proprietate este unic. În adevăr, să presupunem că există $X'' \in L(G')$ cu

$$X'' |_{U'} = f_* (X |_U).$$

Rezultă $X''(e') = X'(e')$ şi deoarece X' şi X'' sunt câmpuri stâng invariante, obţinem $X'' = X'$.

Notăm cu h aplicaţia care asociază (pe calea de mai sus) fiecărui câmp stâng invariant $X \in L(G)$ câmpul stâng invariant

$$X' \in L(G'), \text{ cu } X' |_{U'} = f_* (X |_U).$$

Vom nota $h(X) = X'$. Să arătăm că aplicaţia

$$h : X \in L(G) \to h(X) \in L(G'),$$

unde

$$h(X) |_{U'} = f_* (X |_U)$$

este un izomorfism de algebre Lie.

Pentru orice $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, şi orice $X, Y \in L(G)$, avem:

$$\begin{aligned} h(\lambda_1 X + \lambda_2 Y)|_{U'} &= f_*((\lambda_1 X + \lambda_2 Y)|_U) = f_*(\lambda_1 X|_U + \lambda_2 Y|_U) = \\ &= \lambda_1 f_*(X|_U) + \lambda_2 f_*(Y|_U) = \lambda_1 h(X)|_{U'} + \lambda_2 h(Y)|_{U'} = \\ &= (\lambda_1 h(X) + \lambda_2 h(Y))|_{U'} . \end{aligned}$$

Rezultă:

$$h(\lambda_1 X + \lambda_2 Y)(e') = (\lambda_1 h(X) + \lambda_2 h(Y))(e')$$

şi deoarece $h(\lambda_1 X + \lambda_2 Y)$, $\lambda_1 h(X) + \lambda_2 h(Y) \in L(G)$, obţinem

$$h(\lambda_1 X + \lambda_2 Y) = \lambda_1 h(X) + \lambda_2 h(Y),$$

adică aplicaţia h este liniară.

Deoarece f este difeomorfism, rezultă că f este imersie ($\Longleftrightarrow f_*$ este injecţie). Pentru $X, Y \in L(G)$ au loc implicaţiile:

$$\begin{aligned} h(X) &= h(Y) \Rightarrow h(X)|_{U'} = h(Y)|_{U'} \Rightarrow f_*(X|_U) = f_*(Y|_U) \Rightarrow \\ &\Rightarrow X|_U = Y|_U \Rightarrow X(e) = Y(e) \Rightarrow X = Y. \end{aligned}$$

Prin urmare, aplicaţia h este injectivă.

Deoarece U şi U' sunt difeomorfe rezultă că $\dim U = \dim U'$, deci şi $\dim G = \dim G'$. În definitiv avem o injecţie liniară $h : L(G) \to L(G')$ între două spaţii vectoriale de aceeaşi dimensiune. Rezultă că h este izomorfism liniar.

Să arătăm că h este izomorfism de algebre Lie. Pentru $X, Y \in L(G)$ rezultă $[X, Y] \in L(G)$, şi avem:

$$\begin{aligned} h([X,Y])|_{U'} &= f_*([X,Y]|_U) = f_*([X|_U, Y|_U]) = \\ &= [f_*(X|_U), f_*(Y|_U)] = [h(X)|_{U'}, h(Y)|_{U'}] = \\ &= [h(X), h(Y)]|_{U'} . \end{aligned}$$

Rezultă:

$$h([X,Y])(e') = [h(X), h(Y)](e').$$

Deoarece câmpurile $h([X,Y])$ şi $[h(X), h(Y)]$ sunt stâng invariante, obţinem:

$$h([X,Y]) = [h(X), h(Y)],$$

deci h este izomorfism de algebre Lie.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Presupunem că G şi G' sunt două grupuri Lie ale căror algebre Lie $L(G)$ şi $L(G')$ sunt izomorfe.

Fie $\{E_1, ..., E_n\}$ (respectiv $\{E'_1, ..., E'_n\}$) o bază în algebra Lie $L(G)$ (respectiv $L(G')$).

Identificăm algebrele Lie $L(G)$ şi $L(G')$ prin izomorfismul dat; atunci

$$E'_i = E_i,\ i \in \{1, ..., n\}.$$

Fie V_0 o vecinătate suficient de mică a lui 0 în $L(G) = L(G')$, cu proprietatea că $X \in V_0 \Rightarrow -X \in V_0$, şi astfel încât să avem difeomorfismele:

$$\begin{array}{lll} \exp & : & V_0 \to W_e = \exp V_0 \\ \exp' & & V_0 \to W'_{e'} = \exp' V_0. \end{array}$$

Fie log (respectiv log$'$) inversa aplicaţiei exp (respectiv exp$'$). Evident că $(W_e, \log)$ şi $(W'_{e'}, \log')$ sunt hărţi ale lui G, respectiv G'. Definim aplicaţia

$$f : W_e \to W'_{e'}$$

prin formula

$$f\left(\exp x^i E_i\right) = \exp' x^i E_i.$$

Este evident că punctul $x = \exp x^i E_i \in W_e$ are aceleaşi coordonate canonice ca şi punctul $x' = f(x) = \exp' x^i E_i$. De asemenea, este evident că f este inversabilă. Să arătăm că f este difeomorfism analitic.

Considerăm aplicaţia

$$\log' \circ f \circ \log^{-1} : \log\left(W_e \cap f^{-1}(W'_{e'})\right) \to \log'\left(W'_{e'} \cap f(W_e)\right).$$

Deoarece $f^{-1}(W'_{e'}) = W_e$, $f(W_e) = W'_{e'}$, $\log W_e = \log' W'_{e'} = V_0$, avem:

$$\log' \circ f \circ \log^{-1} : V_0 \to V_0.$$

Pentru orice $x^i E_i \in V_0$, avem:

$$\log' \circ f \circ \log^{-1}\left(x^i E_i\right) = \log' \circ f\left(\exp x^i E_i\right) = \log'\left(\exp' x^i E_i\right) = x^i E_i.$$

Rezultă că $\log' \circ f \circ \log^{-1} = Id_{V_0}$. Deoarece Id_{V_0} este aplicaţie analitică rezultă că f este aplicaţie analitică. Analog obţinem că f^{-1} este aplicaţie analitică. Prin urmare $f : W_e \to W'_{e'}$ este difeomorfism analitic.

Notăm cu $\mu : G \times G \to G$, respectiv $\mu' : G' \times G' \to G'$, legea de grup în G, respectiv G'. Este evident că aplicaţiile μ şi μ' sunt continue.

Deoarece $\mu'(e', e') = e'$ şi $W'_{e'}$ este vecinătate deschisă a lui e' în G', rezultă că $\mu'^{-1}(W'_{e'})$ este vecinătate deschisă a lui (e', e') în $G' \times G'$. Rezultă că există o vecinătate deschisă $U'_{e'}$ a lui e' conţinută în $W'_{e'}$, astfel încât

$$(e', e') \in U'_{e'} \times U'_{e'} \subset \mu'^{-1}(W'_{e'}), \text{ adică } \mu'(U'_{e'} \times U'_{e'}) \subset W'_{e'}.$$

Fie $U_e = f^{-1}(U'_{e'})$. Deoarece $f : W_e \to W'_{e'}$, este difeomorfism analitic, şi din $f(e) = e'$ rezultă că U_e este vecinătate deschisă a lui e în W_e. Deoarece aplicaţia $\mu : U_e \times U_e \to G$ este continuă, rezultă că $\mu^{-1}(U_e)$ este mulţime deschisă în $U_e \times U_e$. Deoarece $(e, e) \in \mu^{-1}(U_e)$, există o vecinătate deschisă $\widetilde{U_e} \subset U_e$ cu $(e, e) \in \widetilde{U_e} \times \widetilde{U_e} \subset \mu^{-1}(U_e)$. Avem deci:

$$\mu(x, y) \in U_e, \ \ (\forall)\, x, y \in \widetilde{U_e}.$$

Fie $\widetilde{U'_{e'}} = f\left(\widetilde{U_e}\right)$. Este evident că $U'_{e'}$ este vecinătate deschisă a lui e' în $U'_{e'}$. În plus, $f : \widetilde{U_e} \to \widetilde{U'_{e'}}$ este difeomorfism analitic.

Vom arăta că $f : \widetilde{U_e} \to \widetilde{U'_{e'}}$, verifică condiţia (a) din definiţia 3.1.

Fie $x, y \in \widetilde{U_e}$ cu $xy \in \widetilde{U_e}$. Avem $x' = f(x) \in \widetilde{U'_{e'}}$, $y' = f(y) \in \widetilde{U'_{e'}}$. Rezultă $x'y' = f(x) f(y) \in \mu'\left(\widetilde{U'_{e'}}, \widetilde{U'_{e'}}\right) \subset W'_{e'}$, deci putem aplica formula Campbell-Hausdorff (2.5).

Pentru grupul G avem formula:

$$(xy)^i = \sum_{\substack{\alpha,\beta \in \mathbb{N}^n \\ |\alpha|+|\beta| \geq 1}} \frac{1}{|\alpha|!} \frac{1}{|\beta|!} x^\alpha y^\beta s^{[i]}_{\alpha\beta}.$$

Pentru grupul G' avem:

$$(x'y')^i = \sum_{\substack{\alpha,\beta\in\mathbb{N}^n \\ |\alpha|+|\beta|\geq 1}} \frac{1}{|\alpha|!}\frac{1}{|\beta|!} x'^{\alpha} y'^{\beta} s^{[i]}_{\alpha\beta}.$$

Deoarece algebrele Lie $L(G)$ şi $L(G')$ sunt izomorfe, rezultă că şi algebrele $J(G)$ şi $J(G')$ sunt izomorfe.

Deoarece algebrele $J(G)$ şi $J(G')$ sunt izomorfe în ultimele două formule, apar aceleaşi constante $s^{[i]}_{\alpha\beta}$ (deoarece le-am calculat cu ajutorul aceleaşi baze). În plus, avem:

$$x'^{\alpha} = \left(x'^{1}\right)^{\alpha_1} \dots \left(x'^{n}\right)^{\alpha_n} = \left(x^{1}\right)^{\alpha_1} \dots \left(x^{n}\right)^{\alpha_n} = x^{\alpha} \text{şi } y'^{\beta} = y^{\beta}.$$

Rezultă

$$(x'y')^i = (xy)^i$$

sau

$$(f(x)\, f(y))^i = (xy)^i.$$

Deoarece xy şi $f(xy)$ au aceleaşi coordonate canonice, din ultima egalitate rezultă

$$(f(x)\, f(y))^i = (f(xy))^i,$$

adica:

$$f(x)\, f(y) = f(xy).$$

Prin urmare, aplicaţia f verifică condiţia (a) din definiţia 3.1.

Să arătăm în continuare că difeomorfismul

$$f : \widetilde{U_e} \to \widetilde{U'_{e'}}$$

verifică condiţia (b) din definiţia 3.1.

Fie $x', y' \in \widetilde{U'_{e'}}$, cu $x'y' \in \widetilde{U'_{e'}}$. Notăm $x = f^{-1}(x') \in f^{-1}\left(\widetilde{U'_{e'}}\right) = \widetilde{U_e}$ şi $y = f^{-1}(y') \in f^{-1}\left(\widetilde{U'_{e'}}\right) = \widetilde{U_e}$.

Rezultă $xy \in \widetilde{U_e}$. $\widetilde{U_e} \subset W_e$, deci vom putea utiliza formula lui Campbell-Hausdorff (2.5). Procedând ca mai sus, rezultă că

$$f^{-1}(x')\, f^{-1}(y') = f^{-1}(x'y') \in \widetilde{U_e},$$

deci $f : \widetilde{U_e} \rightarrow \widetilde{U'_{e'}}$ verifică condiţia (b) din definiţia 3.1. Prin urmare, grupurile Lie G şi G' sunt local izomorfe.

3.3. Enunţăm în finalul acestui paragraf o teoremă importantă de grupuri Lie.

TEOREMĂ (Lie). *Fie g o algebra Lie reală finit dimensională. Atunci există un unic grup Lie G simplu conex, a cărui algebră Lie este izomorfă cu g.*

Demonstraţia acestei teoreme a fost dată de Ado şi poate fi urmărită în [38].

CAPITOLUL VI

REPREZENTĂRI

§ 1. REPREZENTĂRI. GRUPUL LINIAR ADJUNCT.

Fie G un grup Lie, $L(G)$ algebra sa Lie. Fie V un spaţiu vectorial de dimensiune finită.

1.1. DEFINIŢIE. *Se numeşte* **reprezentare** *a grupului Lie G pe spaţiul vectorial V, un homomorfism de grupuri Lie*

$$h : G \to GL(V),$$

unde $GL(V)$ este grupul Lie al endomorfismelor nesingulare de la V în V.

1.2. OBSERVAŢIE. Dacă $h : G \to GL(V)$ este o reprezentare a grupului Lie G pe spaţiul vectorial V, atunci se obţine homomorfismul de algebre Lie

$$h_* : L(G) \to L(GL(V)),$$

care este numit **derivata reprezentării** h.

1.3. DEFINIŢIE. *Se numeşte* **reprezentare a algebrei Lie** $L(G)$ *pe spaţiul vectorial V, un homomorfism de algebre Lie*

$$L(G) \to L(GL(V)).$$

1.4. OBSERVAŢIE. *Derivata reprezentării $h : G \to GL(V)$ este o reprezentare a algebrei Lie $L(G)$ pe spaţiul vectorial V.*

1.5. Fie $x \in G$. *Automorfismul interior* (considerat în exemplul 7.2.5 din cap. I)

$$I_x : y \in G \to I_x(y) = xyx^{-1} \in G$$

defineşte *automorfismul interior*

$$Ad\ x = (I_x)_* : L(G) \to L(G)$$

al algebrei Lie $L(G)$.

PROPOZIŢIE. *Aplicaţia*

$$Ad : G \to Aut\ L(G),\ x \to Ad\ x$$

este homomorfism de grupuri Lie.

Demonstraţie. Din egalitatea $I_x \circ I_y = I_{xy}$, $(\forall)\, x, y \in G$ rezultă

$$(I_x)_* \circ (I_y)_* = (I_{xy})_*,$$

adică

$$(Ad\ x) \circ (Ad\ y) = Ad\ (xy),$$

deci Ad este homomorfism de grupuri.

Să arătăm acum că aplicaţia Ad este continuă în elementul neutru $e \in G$. Din egalitatea $I_x(y) = xyx^{-1}$, rezultă $\lim\limits_{x \to e} I_x = Id_G$. De aici obţinem $\lim\limits_{x \to e} (I_x)_* = Id_{L(G)} = (I_e)_*$, adică $\lim\limits_{x \to e} Ad\ x = Ad\ e$ şi deci aplicaţia Ad este continuă în e.

Să arătăm acum că aplicaţia Ad este continuă într-un punct $x_0 \in G$. Observăm că x tinde către x_0 dacă şi numai dacă xx_0^{-1} tinde către e. Avem

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} Ad\ x &= \lim_{x \to x_0} \left((Ad\ x) \circ \left(Ad\ x_0^{-1}\right) \circ (Ad\ x_0) \right) = \\ &= \lim_{xx_0^{-1} \to e} \left(\left(Ad\ xx_0^{-1}\right) \circ (Ad\ x_0) \right) = Ad\ x_0, \end{aligned}$$

deci aplicaţia Ad este continuă în punctul x_0. Rezultă că $Ad : G \to AutL(G)$ este homomorfism de grupuri topologice. Folosind propoziţia 1.7 (cap. III), obţinem că aplicaţia Ad este homomorfism de grupuri Lie.

1.6. OBSERVAŢIE. Deoarece

$$Ad : G \to AutL(G)$$

este homomorfism de grupuri Lie rezulltă (conform propoziţiei 3.12, cap. II) că *Ad G este grup Lie.*

1.7. DEFINIŢIE. *Grupul Lie Ad G se numeşte* **grupul liniar adjunct.**

§ 2. REPREZENTĂRI ADJUNCTE. APLICAŢII LA GRUPURILE LIE ABELIENE

2.1. OBSERVAŢIE. Menţinem notaţiile din § 1. *Aplicaţia* $Ad : G \to GL(L(G))$ *este o reprezentare a grupului Lie* G *pe spaţiul vectorial* $L(G)$.

2.2. DEFINIŢIE. *Reprezentarea*

$$Ad : G \to GL(L(G))$$

se numeşte **reprezentarea adjunctă** *a grupului Lie* G.

2.3. PROPOZIŢIE. *Aplicaţia*

$$ad : L(G) \to gl(L(G)), \quad (ad\ X)(Y) = [X, Y]$$

este un homomorfism de algebre Lie.

Demonstraţie. Este evident că pentru orice $X, Y \in L(G)$ şi orice $\lambda \in \mathbb{R}$, avem:

$$\begin{aligned} ad\ (X+Y) &= ad\ X + ad\ Y, \\ ad\ \lambda X &= \lambda ad\ X \end{aligned}$$

Folosind identitatea Jacobi, obţinem:

$$\begin{aligned} (ad\ ([X,Y]))(Z) &= [[X,Y], Z] = [X,[Y,Z]] - [Y,[X,Z]] = \\ &= (ad\ X)([Y,Z]) - (ad\ Y)([X,Z]) = \\ &= (ad\ X\ ad\ Y - ad\ Y\ ad\ X)(Z) = \\ &= [ad\ X, ad\ Y](Z). \end{aligned}$$

Am obţinut egalitatea

$$ad\ ([X,Y]) = [ad\ X, ad\ Y]$$

şi deci aplicaţia *ad* este homomorfism de algebre Lie.

2.4. DEFINIŢIE. *Reprezentarea ad a algebrei Lie $L(G)$ pe spaţiul vectorial $L(G)$ definită prin*

$$(ad\ X)(Y) = [X,Y], \ (\forall) X,Y \in L(G),$$

se numeşte **reprezentarea adjunctă** *a lui $L(G)$.*

2.5. PROPOZIŢIE.
i) $Ad_* = ad$;
ii) *Pentru orice $X \in L(G)$ avem:*

$$\exp(ad\ X) = Ad\ (\exp X).$$

Demonstraţie.
i) A se vedea [31], p.178.
ii) Se foloseşte formula

$$h \circ \exp = \exp \circ h_*,$$

unde $h : G \to G'$ este un homomorfism de grupuri Lie.

2.6. PROPOZIŢIE. *Fie G un grup Lie, $x \in G$ şi fie automorfismul interior:*

$$I_x : y \in G \to I_x y = xyx^{-1} \in G.$$

Următoarea diagrama este comutativă:

$$\begin{tikzcd}
L(G) \arrow[r, "Adx"] \arrow[d, "exp"'] & L(G) \arrow[d, "exp"] \\
G \arrow[r, "I_x"'] & G
\end{tikzcd}$$

Demonstraţie. Ştim că $h = I_x$ este homorfism de grupuri Lie. Se foloseşte formula $h \circ \exp = \exp \circ h_*$.

2.7. PROPOZIŢIE. *Fie G un grup Lie, $L(G)$ algebra sa Lie. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) *Reprezentarea adjunctă a lui G este trivială (i.e. $Ad\ x = Id_{L(G)}$, $(\forall)\, x \in G$).*

(ii) *Câmpurile de vectori invariante la stânga şi cele invariante la dreapta coincid.*

Demonstraţie. (i)⇒(ii). Deoarece $Ad\ x = Id_{L(G)}$, rezultă $(I_x)_* = Id_{L(G)}$, unde

$$I_x : y \in G \to I_x(y) = xyx^{-1} \in G.$$

Folosind egalitatea $I_x = L_x \circ R_{x^{-1}}$, obţinem: $(L_x)_* \circ (R_{x^{-1}})_* = Id_{L(G)}$. De aici rezultă: $(L_x)_* = (R_x)_*$, $(\forall)\, x \in G$.

(ii)⇒(i). Din egalitatea $(L_x)_* = (R_x)_*$ rezultă $(L_x \circ R_{x^{-1}})_* = (Id_G)_* = Id_{L(G)}$, adică $Ad\ x = (I_x)_* = Id_{L(G)}$.

2.8. PROPOZIŢIE. *Fie G un grup Lie, $L(G)$ algebra sa Lie. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) *Reprezentarea adjunctă a lui $L(G)$ este trivială (i.e. $ad\ X = 0$, $(\forall)\, X \in L(G)$).*

(ii) *Algebra $L(G)$ este abeliană.*

Demonstraţie. (i)⇔(ii). $ad\ X = 0 \Leftrightarrow (ad\ X)(Y) = 0 \Leftrightarrow [X, Y] = 0$.

2.9. PROPOZIŢIE. *Fie G un grup Lie conex, $L(G)$ algebra sa Lie. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) *G este abelian.*

(ii) *Reprezentarea adjunctă a lui G este trivială.*

(iii) *Câmpurile vectoriale stâng invariante şi cele drept invariante coincid.*

(iv) *Reprezentarea adjunctă a lui $L(G)$ este trivială.*

(v) *Algebra Lie $L(G)$ este abeliană.*

Demonstraţie. (ii)⇔(iii). Propoziţia 2.7.

(iv)⇔(v). Propoziţia 2.8.

(i)⇒(ii). Deoarece G este abelian, rezultă: $I_x(y) = xyx^{-1} = y$. Obţinem $I_x = Id_G$, deci $Ad\ x = (I_x)_* = Id_{L(G)}$.

(ii)⇒(i). Din $Ad\ x = Id_{L(G)}$, $(\forall)\, x \in G$, rezultă $(I_x)_* = (Id_G)_*$. Deoarece G este conex, obţinem $I_x = Id_G$, deci $I_x(y) = y \Leftrightarrow xyx^{-1} = y \Leftrightarrow xy = yx$.

(iv)$\Rightarrow$(ii). Deoarece $ad\ X = 0$, $(\forall)\, X \in L(G)$, rezultă: $ad = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow Ad_* = 0$. Deoarece G este conex, din ultima egalitate obţinem (propoziţia 8.11 ii), cap. I) $Ad\ x = Id_{L(G)}$, $(\forall)\, x \in G$.

(ii)$\Rightarrow$(iv). Din $Ad\ x = Id_{L(G)}$, $(\forall)\, x \in G$, rezultă că $Ad_* = 0$, adică $ad = 0$, deci $ad\ X = 0$, $(\forall)\, X \in L(G)$.

§ 3. FORMA KILLING. GRUPURI LIE SEMISIMPLE

3.1. DEFINIŢIE. *Fie G un grup Lie, $L(G)$ algebra sa Lie. Se numeşte* **forma Killing** *a algebrei Lie $L(G)$ aplicaţia*

$$B^K : L(G) \times L(G) \to \mathbb{R},$$

definită prin

$$B^K(X,Y) = Tr\left((ad\ X) \circ (ad\ Y)\right), X, Y \in L(G).$$

3.2. PROPOZIŢIE. i) *Forma Killing este o aplicaţie biliniară simetrică, invariantă la toate automorfismele algebrei Lie $L(G)$.*

ii) *Pentru orice câmpuri $X, Y, Z \in L(G)$, avem:*

$$B^K([X,Y], Z) = B^K(X, [Y,Z]).$$

Demonstraţie. i) Este evident că avem:

$$ad\ (k_1 X + k_2 Y) = k_1 ad\ X + k_2 ad\ Y,\ \ (\forall)\, k_1, k_2 \in \mathbb{R},\ \ (\forall)\, X, Y \in L(G).$$

De aici rezultă ca B^K este biliniară. Pentru orice $X, Y \in L(G)$, avem

$$B^K(X,Y) = Tr\left((ad\ X) \circ (ad\ Y)\right) = Tr\left((ad\ Y) \circ (ad\ X)\right) = B^K(Y,X)$$

şi deci aplicaţia B^K este simetrică.

Să arătăm că B^K este invariantă la automorfimele lui $L(G)$, adică să arătăm că

$$B^K(h(X), h(Y)) = B^K(X,Y),\ \ (\forall)\, X, Y \in L(G),$$

unde h este un automorfism al algebrei Lie $L(G)$.

Fie $h : L(G) \to L(G)$ un automorfism, adică h este un izomorfism liniar care comută cu croşetul. Pentru $X, Y \in L(G)$, avem:

$$\begin{aligned}(h \circ (ad\ X))(Y) &= h([X,Y]) = [h(X), h(Y)] = (ad\ h(X))(h(Y)) = \\ &= ((ad\ h(X)) \circ h)(Y).\end{aligned}$$

Am obţinut egalitatea:

$$h \circ (ad\ X) = (ad\ h(X)) \circ h.$$

De aici rezultă

$$ad\ h(X) = h \circ (ad\ X) \circ h^{-1}.$$

În continuare avem

$$\begin{aligned}B^K(h(X), h(Y)) &= Tr((ad\ h(X)) \circ (ad\ h(Y))) = \\ &= Tr\left(h \circ (ad\ X) \circ h^{-1} \circ h \circ (ad\ Y) \circ h^{-1}\right) = \\ &= Tr\left((h \circ (ad\ X) \circ (ad\ Y)) \circ h^{-1}\right) = \\ &= Tr\left(h^{-1} \circ (h \circ (ad\ X) \circ (ad\ Y))\right) = \\ &= Tr((ad\ X) \circ (ad\ Y)) = \\ &= B^K(X, Y),\end{aligned}$$

unde am folosit egalitatea

$$Tr(ST) = Tr(TS),$$

cu T şi S endomorfisme.

ii) Vom folosit proprietăţile urmei

$$Tr(S + TU) = TrS + Tr(TU) = TrS + Tr(UT) = Tr(S + UT).$$

Ţinând seama de identitatea lui Jacobi, pentru orice câmpuri $X, Y, Z \in L(G)$, avem:

$$\begin{aligned}(ad\ [X,Y])(Z) &= [[X,Y],Z] = [X,[Y,Z]] - [Y,[X,Z]] = \\ &= ((ad\ X)\circ(ad\ Y))(Z) - ((ad\ Y)\circ(ad\ X))(Z) = \\ &= [ad\ X, ad\ Y](Z).\end{aligned}$$

Am obţinut egalitatea $ad\ [X,Y] = [ad\ X, ad\ Y]$ pentru $X, Y \in L(G)$. De aici rezultă:

$$\begin{aligned}B^K([X,Y],Z) &= Tr((ad\ [X,Y])\circ(ad\ Z)) = Tr([ad\ X, ad\ Y]\circ ad\ Z) = \\ &= Tr((ad\ X)\circ(ad\ Y)\circ(ad\ Z) - (ad\ Y)\circ(ad\ X)\circ(ad\ Z)) \\ &= Tr((ad\ X)\circ(ad\ Y)\circ(ad\ Z) - (ad\ X)\circ(ad\ Z)\circ(ad\ Y)) \\ &= Tr((ad\ X)\circ[ad\ Y, ad\ Z]) = Tr((ad\ X)\circ(ad\ [Y,Z])) = \\ &= B^K(X,[Y,Z]).\end{aligned}$$

3.3. DEFINIŢIE. *Fie $L \subset L(G)$. L se numeşte* **ideal** *dacă L este subspaţiu vectorial şi dacă $(\forall) X \in L$, $(\forall) Y \in L(G)$, avem $[X,Y] \in L$.*

Un ideal $L \subset L(G)$ se numeşte **propriu** *dacă $L \neq L(G)$ şi $L \neq \{0\}$.*

3.4. DEFINIŢIE. *O* **algebră Lie** *se numeşte* **simplă** *dacă este neabeliană şi nu conţine ideale proprii.*

3.5. DEFINIŢIE. *O* **algebră Lie** *se numeşte* **semisimplă** *dacă forma sa Killing este nedegenerată.*

3.6. DEFINIŢIE. *Un* **grup Lie** *se numeşte* **simplu** *(respectiv* **semisimplu***) dacă algebra sa Lie este simplă (respectiv semisimplă).*

3.7. EXEMPLU. *Fie $G = \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ grupul Lie din exemplul 2.2.4 (cap. I). Ne propunem următoarele:*

(i) *Să scriem o bază în $L(G)$.*

(ii) *Să arătăm că grupul Lie G nu este simplu.*

(iii) *Să scriem forma Killing a lui G şi să arătăm că G nu este grup Lie semisimplu.*

(i) Legea în raport cu care G devine grup este:

$$\left(\left(a^1, a^2, a^3, a^4\right), \left(a'^1, a'^2, a'^3, a'^4\right)\right) \to \left(a''^1, a''^2, a''^3, a''^4\right),$$

unde

$$\begin{cases} a''^1 = a^1 a'^1 - a^2 a'^2 - a^3 a'^3 - a^4 a'^4 \\ a''^2 = a^3 a'^4 - a^4 a'^3 + a^1 a'^2 + a'^1 a^2 \\ a''^3 = a^4 a'^2 - a^2 a'^4 + a^1 a'^3 + a'^1 a^3 \\ a''^4 = a^2 a'^3 - a^3 a'^2 + a^1 a'^4 + a^4 a'^1 . \end{cases}$$

G este mulţime deschisă în varietatea $\mathbb{R}^4$, deci G este varietate analitică de dimensiune patru. Structura de grup şi structura de varietate analitică ale lui G sunt compatibile. Deci G este grup Lie de dimensiune patru.

Fie x^i $(i = 1, 2, 3, 4)$ funcţiile coordonate asociate hărţii (G, Id_G). Atunci $\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^4}\right\}$ formează o bază în $\mathcal{F}(G)$ −modul $\mathcal{X}(G)$. Un câmp $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \in \mathcal{X}(G)$, unde $X^i \in \mathcal{F}(G)$, este stâng invariant dacă

$$X(a) = (L_a)_* (X_e), \ \ (\forall)\, a \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\},$$

unde $e = (1, 0, 0, 0)$ este elementul neutru al grupului G şi unde L_a este translaţia stângă a grupului Lie G definită de elementul $a \in G$. Aplicând vectorul $X(a)$ funcţiei coordonate x^i, obţinem:

$$(*) \qquad X(a)\left(x^i\right) = X_e\left(x^i \circ L_a\right), \ \ (\forall)\, a \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}.$$

Pentru orice $a' \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$, avem:

$$x^i \circ L_a(a') = x^i(aa') = a''^i, \ i \in \{1, 2, 3, 4\},$$

sau, pe larg:

$$\begin{aligned} x^1 \circ L_a(a') &= x^1(a)\, x^1(a') - x^2(a)\, x^2(a') - x^3(a)\, x^3(a') - x^4(a)\, x^4(a') \\ x^2 \circ L_a(a') &= x^3(a)\, x^4(a') - x^4(a)\, x^3(a') + x^1(a)\, x^2(a') + x^1(a')\, x^2(a) \\ x^3 \circ L_a(a') &= x^4(a)\, x^2(a') - x^2(a)\, x^4(a') + x^1(a)\, x^3(a') + x^1(a')\, x^3(a) \\ x^4 \circ L_a(a') &= x^2(a)\, x^3(a') - x^3(a)\, x^2(a') + x^1(a)\, x^4(a') + x^4(a)\, x^1(a'). \end{aligned}$$

Rezultă:

$$\begin{aligned}
x^1 \circ L_a &= x^1(a)\, x^1 - x^2(a)\, x^2 - x^3(a)\, x^3 - x^4(a)\, x^4 \\
x^2 \circ L_a &= x^3(a)\, x^4 - x^4(a)\, x^3 + x^1(a)\, x^2 + x^2(a)\, x^1 \\
x^3 \circ L_a &= x^4(a)\, x^2 - x^2(a)\, x^4 + x^1(a)\, x^3 + x^3(a)\, x^1 \\
x^4 \circ L_a &= x^2(a)\, x^3 - x^3(a)\, x^2 + x^1(a)\, x^4 + x^4(a)\, x^1.
\end{aligned}$$

Calculăm membrul drept din $(*)$. Avem:

$$\begin{aligned}
X_e\left(x^1 \circ L_a\right) &= x^1(a)\, X_e^1 - x^2(a)\, X_e^2 - x^3(a)\, X_e^3 - x^4(a)\, X_e^4 \\
X_e\left(x^2 \circ L_a\right) &= x^3(a)\, X_e^4 - x^4(a)\, X_e^3 + x^1(a)\, X_e^2 + x^2(a)\, X_e^1 \\
X_e\left(x^3 \circ L_a\right) &= x^4(a)\, X_e^2 - x^2(a)\, X_e^4 + x^1(a)\, X_e^3 + x^3(a)\, X_e^1 \\
X_e\left(x^4 \circ L_a\right) &= x^2(a)\, X_e^3 - x^3(a)\, X_e^2 + x^1(a)\, X_e^4 + x^4(a)\, X_e^1.
\end{aligned}$$

Rezultă că pentru orice $a \in G$, avem:

$$X(a) = X^i(a)\, \frac{\partial}{\partial x^i}\, |_a = X_e\left(x^i \circ L_a\right) \frac{\partial}{\partial x^i}\, |_a =$$

$$= \left(x^1(a)\, X_e^1 - x^2(a)\, X_e^2 - x^3(a)\, X_e^3 - x^4(a)\, X_e^4\right) \frac{\partial}{\partial x^1}\, |_a +$$

$$+ \left(x^3(a)\, X_e^4 - x^4(a)\, X_e^3 + x^1(a)\, X_e^2 + x^2(a)\, X_e^1\right) \frac{\partial}{\partial x^2}\, |_a +$$

$$+ \left(x^4(a)\, X_e^2 - x^2(a)\, X_e^4 + x^1(a)\, X_e^3 + x^3(a)\, X_e^1\right) \frac{\partial}{\partial x^3}\, |_a +$$

$$+ \left(x^2(a)\, X_e^3 - x^3(a)\, X_e^2 + x^1(a)\, X_e^4 + x^4(a)\, X_e^1\right) \frac{\partial}{\partial x^3}\, |_a .$$

Rezultă că orice câmp stâng invariant pe grupul $\mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ se scrie sub forma

$$X = X^i(e)\, E_i,$$

unde:

$$E_1 = x^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + x^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + x^3 \frac{\partial}{\partial x^3} + x^4 \frac{\partial}{\partial x^4}$$

$$E_2 = -x^2 \frac{\partial}{\partial x^1} + x^1 \frac{\partial}{\partial x^2} + x^4 \frac{\partial}{\partial x^3} - x^3 \frac{\partial}{\partial x^4}$$

$$E_3 = -x^3 \frac{\partial}{\partial x^1} - x^4 \frac{\partial}{\partial x^2} + x^1 \frac{\partial}{\partial x^3} + x^2 \frac{\partial}{\partial x^4}$$

$$E_4 = -x^4 \frac{\partial}{\partial x^1} + x^3 \frac{\partial}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial}{\partial x^3} + x^1 \frac{\partial}{\partial x^4}.$$

Fie $L(G)$ algebra Lie a grupului Lie $G = \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$. Ştim că aplicaţia

$$f : X \in L(G) \to f(X) = X_e \in T_e G$$

este un izomorfism liniar.

Deoarece $f(E_i) = E_i(e) = \frac{\partial}{\partial x^i}\,|_e$, rezultă că $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ formează o bază în algebra Lie $L(G)$.

Fie c^i_{jk} constantele de structură ale algebrei Lie $L(G)$ relative la baza $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$, deci $[E_j, E_k] = c^i_{jk} E_i$. Parantezele Poisson $[E_i, E_j]$ nenule sunt:

$$[E_2, E_3] = 2E_4, [E_2, E_4] = -2E_3, [E_3, E_4] = 2E_2.$$

Rezultă că constantele de structură sunt nule în afară de:

$$c^2_{34} = c^3_{42} = c^4_{23} = -c^2_{43} = -c^3_{24} = -c^4_{32} = 2.$$

(ii) Notăm $L = \{\alpha E_1 \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$. Vom arăta că L este ideal propriu, adică $L \neq L(G)$ şi $L \neq \{0\}$.

În adevăr, fie $X = \alpha E_1 \in L$ şi $Y = \beta^i E_i \in L(G)$, unde $\alpha, \beta^i \in \mathbb{R}$. Atunci $[X, Y] = \left[\alpha E_1, \beta^i E_i\right] = 0$, deoarece $[E_1, E_i] = 0$, $(\forall)\, i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Deoarece $L(G)$ este neabeliană şi conţine ideale proprii rezultă că algebra Lie $L(G)$ nu este simplă. Prin urmare $G = \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ nu este grup Lie simplu.

(iii) Vrem să scriem forma Killing

$$\begin{aligned} B^K &: L(G) \times L(G) \to \mathbb{R} \\ B^K(X,Y) &= Tr(Z \to ((ad\ X) \circ (ad\ Y))(Z)) \end{aligned}$$

Fie $\lambda^1, ..., \lambda^n$ 1–formele duale câmpurilor $E_1, ..., E_n$, deci $\lambda^i(E_j) = \delta^i_j$. Atunci $B^K(X,Y) = \lambda^i(((ad\ X) \circ (ad\ Y))(E_i))$.

Fie $X = \alpha^i E_i$, $Y = \beta^i E_i$, unde $\alpha^i, \beta^i \in \mathbb{R}$, $i \in \{1, ..., n\}$. Avem:

$$(ad\ Y)(E_i) = [Y, E_1] = \beta^i [E_i, E_1] = 0.$$

Rezultă că:

$$(ad\ X) \circ (ad\ Y)(E_1) = 0.$$

În continuare avem:

$$\begin{aligned} (ad\ Y)(E_2) = [Y, E_2] = \beta^i [E_i, E_2] = 2\left(\beta^4 E_3 - \beta^3 E_4\right) \\ (ad\ Y)(E_3) = [Y, E_3] = \beta^i [E_i, E_3] = 2\left(\beta^2 E_4 - \beta^4 E_2\right) \\ (ad\ Y)(E_4) = [Y, E_4] = \beta^i [E_i, E_4] = 2\left(\beta^3 E_2 - \beta^2 E_3\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ((ad\ X) \circ (ad\ Y))(E_2) &= 2(ad\ X)\left(\beta^4 E_3 - \beta^3 E_4\right) = \\ &= 2\beta^4 (ad\ X)(E_3) - 2\beta^3 (ad\ X)(E_4) = \\ &= 4\beta^4 \left(\alpha^2 E_4 - \alpha^4 E_2\right) - 4\beta^3 \left(\alpha^3 E_2 - \alpha^2 E_3\right) = \\ &= -4\left(\alpha^4\beta^4 + \alpha^3\beta^3\right) E_2 + 4\alpha^2\beta^3 E_3 + 4\alpha^2\beta^4 E_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ((ad\ X) \circ (ad\ Y))(E_3) &= 2\beta^2 (ad\ X)(E_4) - 2\beta^4 (ad\ X)(E_2) = \\ &= 4\beta^2 \left(\alpha^3 E_2 - \alpha^2 E_3\right) - 4\beta^4 \left(\alpha^4 E_3 - \alpha^3 E_4\right) = \\ &= 4\alpha^3\beta^2 E_2 - 4\left(\alpha^2\beta^2 + \alpha^4\beta^4\right) E_3 + 4\alpha^3\beta^4 E_4 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
((ad\ X)\circ(ad\ Y))(E_4) &= 2\beta^3(ad\ X)(E_2)-2\beta^2(ad\ X)(E_3)=\\
&= 4\beta^3\left(\alpha^4E_3-\alpha^3E_4\right)-4\beta^2\left(\alpha^2E_4-\alpha^4E_2\right)=\\
&= 4\alpha^4\beta^2E_2+4\alpha^4\beta^3E_3-4\left(\alpha^2\beta^2+\alpha^3\beta^3\right)E_4.
\end{aligned}
$$

Scriem acum forma Killing:

$$
\begin{aligned}
&B^K(X,Y)=\lambda^1(((ad\ X)\circ(ad\ Y))(E_1))+\lambda^2(((ad\ X)\circ(ad\ Y))(E_2))+\\
&+\lambda^3(((ad\ X)\circ(ad\ Y))(E_3))+\lambda^4(((ad\ X)\circ(ad\ Y))(E_4))=\\
&=-4\left(\alpha^4\beta^4+\alpha^3\beta^3\right)-4\left(\alpha^2\beta^2+\alpha^4\beta^4\right)-4\left(\alpha^2\beta^2+\alpha^3\beta^3\right).
\end{aligned}
$$

Prin urmare, forma Killing a grupului Lie $G=\mathbb{R}^4\setminus\{0\}$ se scrie:

$$B^K(X,Y)=-8\left(\alpha^2\beta^2+\alpha^3\beta^3+\alpha^4\beta^4\right).$$

Observăm că $\lambda^2(X)=\lambda^2(\alpha^iE_i)=\alpha^i\lambda^2(E_i)=\alpha^i\delta_i^2=\alpha^2$, deci avem:

$$B^K(X,Y)=-8\left\{\lambda^2(X)\lambda^2(Y)+\lambda^3(X)\lambda^3(Y)+\lambda^4(X)\lambda^4(Y)\right\}.$$

Rezultă că forma Killing căutată este:

$$B^K=-8\left(\lambda^2\otimes\lambda^2+\lambda^3\otimes\lambda^3+\lambda^4\otimes\lambda^4\right).$$

Observăm că avem:

$$B^K(E_1,Y)=0,\ \ (\forall)\,Y\in L(G).$$

Prin urmare, forma Killing este degenerată. Rezultă că grupul Lie $G=\mathbb{R}^4\setminus\{0\}$ nu este semisimplu.

3.8. EXEMPLU. Ne propunem să arătăm că sfera S^3 este un grup Lie simplu şi semisimplu. Mai întâi vom determina $L(S^3)$.

Fie $G = \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ cu structura de grup Lie folosită în exemplul precedent şi fie $G' = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ cu structura de grup Lie din ex. 2.2.9 (cap. I). Am văzut în exemplul 1.9.3' (cap. II) că aplicaţia

$$h : G \to G',\ h(x) = \|x\|^2 - 1$$

este un homomorfism de grupuri Lie şi că avem:

$$S^3 = \mathrm{Ker} h.$$

Conform propoziţiei 1.9.3, capitolul II, rezultă că:

$$L\left(S^3\right) = \mathrm{Ker} h_*.$$

Fie $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ baza algebrei Lie $L(G)$ determinată în exemplul anterior. Avem:

$$\left\| \begin{matrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ -x^2 & x^1 & x^4 & -x^3 \\ -x^3 & -x^4 & x^1 & x^2 \\ -x^4 & x^3 & -x^2 & x^1 \end{matrix} \right\| \bullet \left\| \begin{matrix} \frac{\partial}{\partial x^1} \\ \frac{\partial}{\partial x^2} \\ \frac{\partial}{\partial x^3} \\ \frac{\partial}{\partial x^4} \end{matrix} \right\|$$

Deoarece $E_i \in L(\mathbb{R}^4 \setminus \{0\})$ rezultă că $h_*(E_i) \in L(\mathbb{R} \setminus \{-1\})$, $(\forall)\, i \in \{1, 2, 3, 4\}$

Prin urmare, există constantele reale c_i, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, astfel încât $h_*(E_i) = c_i E$, unde $\{E\}$ este baza algebrei Lie $L(G')$ determinat în exemplul 6.12 (cap. I),

$$E = (t+1)\frac{d}{dt} \in L(\mathbb{R} \setminus \{-1\}).$$

Trebuie determinate constantele c_1, c_2, c_3 şi c_4.

Din egalitatea $h_*(E_1) = c_1 E$, rezultă:

$$h_*(E_1)(f') \circ h = c_1 E(f') \circ h,\quad (\forall)\, f' \in \mathcal{F}(G').$$

De aici şi din formula

$$h_*(E_1)(f') \circ h = E_1(f' \circ h), \ \ (\forall) f' \in \mathcal{F}(G').$$

(stabilită în propoziţia 7.7, cap. I), rezultă:

$$c_1 E(f') \circ h = E_1(f' \circ h), \ \ (\forall) f' \in \mathcal{F}(G').$$

Pentru orice $b \in S^3$, obţinem:

$$c_1 E(f')(h(b)) = E_1(f' \circ h)(b), \ \ (\forall) f' \in \mathcal{F}(G').$$

În particular, dacă luăm

$$f' : G' \to \mathbb{R}, \ f'(t) = t,$$

rezultă

$$c_1(1 + h(b)) = \left(x^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + x^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + x^3 \frac{\partial}{\partial x^3} + x^4 \frac{\partial}{\partial x^4} \right)\Bigg|_b \left(\|x\|^2 - 1 \right),$$

sau $c_1 \|b\|^2 = 2\|b\|^2$, ceea ce ne arată că avem $c_1 = 2$.

Observăm că pentru $k \in \{2, 3, 4\}$ avem:

$$E_k(b)\left(\|x\|^2 - 1 \right) = 0, \ \ (\forall) b \in S^3.$$

Rezultă $c_2 = c_3 = c_4 = 0$. Aceasta ne arată că avem:

$$h_*(E_2|_{S^3}) = h_*(E_3|_{S^3}) = h_*(E_4|_{S^3}) = 0.$$

Prin urmare, avem:

$$E_2|_{S^3}, E_3|_{S^3}, E_4|_{S^3} \in \mathrm{Ker} h_* = L\left(S^3\right).$$

Cum cele trei câmpuri sunt liniar independente, rezultă că $\{E_2 |_{S^3}, E_3 |_{S^3}, E_4 |_{S^3}\}$ formează o bază în algebra Lie $L(S^3) = \mathrm{Ker} h_*$. Avem deci

$$L\left(S^3\right) = \left\{X = \alpha^2 E_2 |_{S^3} + \alpha^3 E_3 |_{S^3} + \alpha^4 E_4 |_{S^3} \mid \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4 \in \mathbb{R}\right\}.$$

Constantele de structură c^i_{jk} $(i, j, k \in \{2, 3, 4\})$ ale algebrei Lie $L(S^3)$ sunt nule în afară de $c^2_{34} = c^3_{42} = -c^2_{43} = -c^3_{24} = -c^4_{32} = 2$.

Vom arăta acum că S^3 este un grup Lie simplu. Pentru aceasta vom arăta că $L(S^3)$ este o algebră Lie simplă, adică $L(S^3)$ nu conţine ideale proprii. Pentru simplitatea scrierii vom nota E_i în loc de $E_i |_{S^3}$, $i \in \{2, 3, 4\}$.

Să presupunem că există un ideal $L \subset L(S^3)$, $L \neq \{0\}$.
Fie $X = \alpha^2 E_2 + \alpha^3 E_3 + \alpha^4 E_4 \in L$, $X \neq 0$. Presupunem că $\alpha^2 \neq 0$. Deoarece L este ideal, avem $[X, E_3] \in L$, deci $2\alpha^2 E_4 - 2\alpha^4 E_2 \in L$. Cum L este ideal, rezultă

$$\left[2\alpha^2 E_4 - 2\alpha^4 E_2, E_2\right] \in L,$$

adică $4\alpha^2 E_3 \in L$. Deoarece $\alpha^2 \neq 0$, rezultă $E_3 \in L$. Cum $E_3 \in L$, avem $[E_3, E_2] = -2E_4 \in L$, adică $E_4 \in L$. Rezultă $[E_4, E_3] = -2E_2 \in L$, adică $E_2 \in L$. Am obţinut $E_4, E_2, E_3 \in L$, adică $L = L(S^3)$. Prin urmare algebra Lie $L(S^3)$ nu conţine ideale proprii şi deci S^3 este grup Lie simplu.

Pentru scrierea formei Killing a grupului Lie S^3 vom folosi formula

$$B^K(X, Y) = \sum_{i,j,k,s=2}^{4} \alpha^i \beta^j c^s_{jk} c^k_{is},$$

unde $X = \sum\limits_{i=2}^{4} \alpha^i E_i$, $Y = \sum\limits_{i=2}^{4} \beta^i E_i \in L(S^3)$.
Obţinem la fel ca în exemplul precedent:

$$B^K(X, Y) = -8\left(\alpha^2\beta^2 + \alpha^3\beta^3 + \alpha^4\beta^4\right).$$

Pentru orice $Y = \sum\limits_{i=2}^{4} \beta^i E_i \in L(S^3)$, avem:

$$B^K(E_i, Y) = -8\beta^i, \ i \in \{2, 3, 4\}.$$

Rezultă că

$$B^K(X,Y) = 0, \ \ (\forall)\, X \in L\left(S^3\right) \Leftrightarrow Y = 0_{L(S^3)}.$$

Prin urmare, *forma Killing* a grupului Lie S^3 *este nedegenerată. Rezultă că* S^3 *este grup Lie semisimplu.*

Observaţie. i) Fie $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ baza algebrei Lie $L(\mathbb{R}^4 \setminus \{0\})$, obţinută în exemplul 3.7. Baza algebrei Lie $L(S^3)$ se poate obţine imediat, observând că câmpurile E_2, E_3, E_4 sunt definite pe $\mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$, deci şi punctele sferei S^3. În plus, $E_2 \mid_{S^3}, E_3 \mid_{S^3}, E_4 \mid_{S^3}$ sunt tangente sferei S^3, deoarece făcând produsul scalar al vectorului $x = (x^1, x^2, x^3, x^4)$ (care indică vectorul de poziţie al unui punct oarecare din S^3) cu $E_i \mid_{S^3}(x)$, $i \in \{2,3,4\}$, obţinem:

$$< E_2 \mid_{S^3}(x), x >=< E_3 \mid_{S^3}(x), x >=< E_4 \mid_{S^3}(x), x >= 0.$$

ii) Fie G un grup Lie de dimensiune n şi fie $\{E_1, ..., E_n\}$ o bază în algebra Lie $L(G)$.

Notăm cu c^i_{jk} constantele de structură ale algebrei Lie $L(G)$ relative la baza considerată. Pentru $X = \alpha^i E_i$, $Y = \beta^j E_j \in L(G)$, vem:

$$(ad\ Y)(E_k) = [Y, E_k] = \beta^j [E_j, E_k] = \beta^j c^s_{jk} E_s,$$

$$((ad\ X) \circ (ad\ Y))(E_k) = [X, (ad\ Y)(E_k)] = \left[\alpha^i E_i, \beta^j c^s_{jk} E_s\right] = \alpha^i \beta^j c^s_{jk} c^m_{is} E_m.$$

Fie $\lambda^1, ..., \lambda^n$ 1−formele duale câmpurilor $E_1, ..., E_n$, deci $\lambda^i(E_j) = \delta^i_j$. Atunci forma Killing

$$\begin{aligned} B^K & \quad L(G) \times L(G) \to \mathbb{R}, \\ B^K(X,Y) &= Tr\left((ad\ X) \circ (ad\ Y)\right), \end{aligned}$$

se scrie

$$B^K(X,Y) = \lambda^i\left(\left((ad\ X)\circ(ad\ Y)\right)(E_i)\right).$$

Pentru $X = \alpha^i E_i$, $Y = \beta^i E_i$ avem:

$$B^K(X,Y) = \alpha^i \beta^j c^s_{jk} c^k_{is}.$$

Deoarece avem $\alpha^i = \lambda^i(X)$, $\beta^j = \lambda^j(Y)$, rezultă

$$B^K(X,Y) = \lambda^i(X)\lambda^j(Y)c^s_{jk}c^k_{is}, \ \ (\forall)\, X, Y \in L(G),$$

adică obţinem că forma Killing se scrie:

$$B^K = \lambda^i \otimes \lambda^j c^s_{jk} c^k_{is}.$$

CAPITOLUL VII

GUPURI LIE DE TRANSFORMĂRI

§ 1. ACŢIUNI ALE UNUI GRUP LIE ÎNTR-O VARIETATE ANALITICA. SPAŢII OMOGENE

Importanţa grupurilor de transformări în geometrie a fost pusă în evidenţă încă din secolul trecut, în lecţia inaugurală a lui *Felix Klein*, ţinută în anul 1872 la Universitatea din Erlangen, lecţie intitulată "Studiu comparativ asupra celor mai noi cercetări geometrice", cunoscută şi sub denumirea de **"Programul de la Erlangen"**.

1.1. DEFINIŢIE. *Fie G un grup Lie şi M o varietate analitică. Se numeşte* **acţiune la dreapta** *a grupului Lie G în varietatea analitică M orice aplicaţie*

$$T : M \times G \to M,$$

care verifică următoarele condiţii:

(a$_1$) *T este o aplicaţie analitică,*

(a$_2$) $T\left(T\left(p,a\right),b\right) = T\left(p,ab\right)$, $(\forall)\, a,b \in G$. $(\forall)\, p \in M$,

(a$_3$) $T\left(p,e\right) = p$, $(\forall)\, p \in M$.

Grupul Lie G se numeşte **grup Lie de transformări** *la dreapta pe varietatea M.*

Analog se definesc **acţiunile la stânga** *şi grupurile Lie de transformări la stânga.*

Observaţie. Acţiunile la dreapta şi la stânga pot fi puse în corespondenţă în modul următor:

Fie $T : M \times G \to M$ o acţiune la dreapta. Atunci aplicaţia

$$T' : G \times M \to M$$

definită prin

$$T'(a,p) = T\left(p, a^{-1}\right), \quad (\forall)\, p \in M, \quad (\forall)\, a \in G$$

este o acţiune la stânga.

În adevăr, aplicaţia T' este analitică, fiind compunere de aplicaţii analitice. În continuare avem:

$$T'(e,p) = T\left(p, e^{-1}\right) = T(p,e) = p, \quad (\forall)\, p \in M.$$

În plus, pentru orice $a, b \in G$ şi orice $p \in M$, rezultă:

$$\begin{aligned} T'(ab,p) &= T\left(p,(ab)^{-1}\right) = T\left(p, b^{-1}a^{-1}\right) = T\left(T\left(p,b^{-1}\right), a^{-1}\right) = \\ &= T\left(T'(b,p), a^{-1}\right) = T'\left(a, T'(b,p)\right). \end{aligned}$$

Prin urmare, aplicaţia T' este acţiune la stânga a grupului Lie G în varietatea M.

Analog se poate defini o acţiune la dreapta, plecând de la o acţiune la stânga.

1.2. <u>EXEMPLE</u>.

1.2.1. Fie G un grup Lie. Multiplicarea în grupul Lie G

$$\begin{array}{ccc} \mu & & G \times G \to G \\ (a,b) & \to & \mu(a,b) = ab \end{array}$$

este o acţiune la stânga (sau la dreapta) a grupului Lie G în varietatea analitică G.

1.2.2. Fie grupul Lie $G = GL(n, \mathbb{R})$ (considerat în cap. I ex. 2.7), şi varietatea analitică $M = \mathbb{R}^n$. Definim aplicaţia:

$$T : GL(n,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

prin

$$T(a,x) = ax,$$

adică, dacă $x \in \mathbb{R}^n$ este vectorul (x^i) şi $a \in GL(n, \mathbb{R})$ este matricea $\left\|a^i_j\right\|$, atunci $T(a, x) \in \mathbb{R}^n$ este vectorul $\left(a^i_j x^j\right)$.

Se verifică uşor condiţiile (a_1), (a_2) şi (a_3) din definiţia acţiunii la stânga. Acţiunea T se scrie explicit:

$$x'^i = a^i_j x^j,\ i \in \{1, ..., n\}$$

(acţiunea canonică a grupului $GL(n, \mathbb{R})$ în varietatea $\mathbb{R}^n$).

1.2.3. Considerăm acţiunea la stânga

$$T : O(n) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

definită prin

$$T\left(a, \left(x^1, ..., x^n\right)\right) = \left(a^1_i x^i, ..., a^n_i x^i\right).$$

Se constată uşor că sfera unitate

$$S^{n-1} = \left\{x = \left(x^1, ..., x^n\right) \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\right\}$$

este invariantă în raport cu acţiunea T, adică

$$T(a, x) \in S^{n-1},\ \ (\forall)\, x \in S^{n-1}.$$

În adevăr, dacă notăm

$$x' = T(a, x) = \left(x'^1, ..., x'^n\right),$$

atunci avem:

$$\begin{aligned} \|x'\|^2 &= \left(x'^1\right)^2 + ... + \left(x'^n\right)^2 = a^1_i x^i a^1_j x^j + ... + a^n_i x^i a^n_j x^j = \\ &= \sum_{k=1}^{n} a^k_i a^k_j x^i x^j = \delta_{ij} x^i x^j = \|x\|^2 = 1. \end{aligned}$$

Acţiunea T induce o acţiune la stânga

$$T' : O(n) \times S^{n-1} \to S^{n-1}$$

a grupului ortogonal $O(n)$ în varietatea S^{n-1}.

1.2.4. Fie G un grup Lie. Atunci aplicaţia

$$T : G \times G \to G$$

definita prin:

$$T(a,b) = aba^{-1}$$

este o acţiune la stânga a grupului Lie G în varietatea G.

În adevăr, din faptul că aplicaţiile $G \times G \to G$, $(a,b) \to ba^{-1}$ şi $G \times G \to G$, $(a,b) \to a$ sunt analitice, rezultă că aplicaţia $G \times G \to G \times G$, $(a,b) \to (a, ba^{-1})$ este analitică. Aplicaţia T este analitică, deoarece ea este compunerea aplicaţiilor analitice:

$$\begin{array}{ccl} G \times G & \to & G \times G \xrightarrow{\mu} G \\ (a,b) & \to & \left(a, ba^{-1}\right) \to \mu\left(a, ba^{-1}\right) = aba^{-1} = T(a,b) \end{array}$$

(am notat cu μ operaţia grupală în G).

Pentru orice $a, b, c \in G$, avem:

$$T(a, T(b,c)) = aT(b,c)\,a^{-1} = abcb^{-1}a^{-1} = (ab)\,c\,(ab)^{-1} = T(ab,c)\,.$$

În plus, pentru orice $a \in G$, avem:

$$T(e,a) = eae^{-1} = a.$$

Prin urmare T este acţiune la stânga a grupului Lie G în varietatea G.

1.2.5. Fie G un grup Lie. Atunci aplicaţia

$$T : (G \times G) \times G \to G$$

definită prin:

$$T((a,b),c) = acb^{-1}, \ \ (a,b) \in G \times G, \ c \in G$$

este o acţiune la stânga a grupului Lie $G \times G$ în varietatea G.

1.2.6. Fie G un grup Lie şi M o varietate analitică. Atunci aplicaţia:

$$T : (M \times G) \times G \to M \times G$$

definită prin:

$$T((x,a),b) = (x,ab), \ \ (x,a) \in M \times G, \ b \in G$$

este o acţiune la dreapta a grupului Lie G în varietatea $M \times G$.

1.2.7. Fie G un grup Lie, V un spaţiu vectorial de dimensiune finită şi fie

$$h : G \to GL(V)$$

o reprezentare a grupului Lie G pe spaţiul vectorial V, adică h este un homomorfism de grupuri Lie ($GL(V)$ este grupul Lie al endomorfismelor nesingulare de la V în V). V are o structură naturală de varietate analitică reală.

Definim aplicaţia

$$T : G \times V \to V$$

prin formula

$$T(a,v) = h(a)v, \ \ a \in G, \ v \in V.$$

Ştim că h este aplicaţie analitică. Deoarece $h(a)$ este aplicaţie liniară, rezultă că aplicaţia T este analitică.

Pentru orice $v \in V$, avem:

$$T(e,v) = h(e)v = v.$$

Pentru orice $a, b \in G$ şi orice $v \in V$, rezultă:

$$T(a, T(b,v)) = h(a)T(b,v) = h(a)h(b)v = h(ab)v = T(ab,v).$$

Prin urmare aplicaţia T este o acţiune la stânga a grupului Lie G în varietatea analitică V.

1.3. PROPOZIŢIE. *Fie G un grup Lie, M o varietate analitică şi fie*

$$T : M \times G \to M$$

o acţiune la dreapta a grupului Lie G în varietatea M. Atunci aplicaţia

$$T_* : TM \times TG \to TM$$

este o acţiune la dreapta a grupului Lie TG în varietatea analitică TM.

Demonstraţie. Ştim că aplicaţia T este analitică. Rezultă că şi aplicaţia T_* este analitică.

Fie μ operaţia grupală în G. Atunci

$$\mu_* : TG \times TG \to TG$$

este operaţia grupală în TG. Deoarece T este acţiune la dreapta, avem:

$$T(T(x,a), b) = T(x, \mu(a,b)), \quad (\forall)\, a, b \in G, \quad (\forall)\, x \in M.$$

Rezultă egalitatea:

$$T \circ (T \times Id_G) = T \circ (Id_M \times \mu).$$

Din ultima egalitate, obţinem:

$$T_* \circ (T_* \times Id_{TG}) = T_* \circ (Id_{TM} \times \mu_*) .$$

Pentru orice $X_x \in TM$, $Y_a \in TG$, $Z_b \in TG$, obţinem:

$$T_* (T_* (X_x, Y_a), Z_b) = T_* (X_x, \mu_* (Y_a, Z_b)) .$$

Ştim că vectorul $0_e \in T_eG$ este elementul neutru în raport cu legea μ_* (cap. I, propoziţia 3.6.). Folosind egalitatea

$$T(x, e) = x, \quad (\forall)\, x \in M,$$

obţinem:

$$T_* (X_x, 0_e) = X_x, \quad (\forall)\, X_x \in TM.$$

Rezultă că aplicaţia T_* este o acţiune la dreapta a grupului Lie TG în varietatea TM.

1.4. PROPOZIŢIE. *Fie $T : M \times G \to M$ o acţiune la dreapta a grupului Lie G în varietatea analitică M.*

i) *Pentru orice $a \in G$, aplicaţia*

$$T_a : x \in M \to T_a(x) = T(x, a) \in M$$

este difeomorfism analitic (T_a se numeşte translaţia la dreapta).

ii) *Mulţimea translaţiilor la dreapta $\{T_a \mid a \in G\}$ poate fi structurată ca un grup, operaţia de înmulţire fiind definită prin relaţia:*

$$T_a \cdot T_b = T_b \circ T_a = T_{ab}.$$

Acest grup va fi notat prin $T(G, M)$.

iii) *Fie $x \in M$, şi aplicaţia*

$$T_x : G \to M$$

definită prin:

$$T_x(a) = T(x,a).$$

Aplicaţia T_x este analitică. (Imaginea aplicaţiei T_x se numeşte **orbita** *punctului x în raport cu acţiunea T).*

iv) *Fie $x \in M$. Mulţimea*

$$H_x = \{a \in G \mid T_a(x) = x\}$$

este un subgrup Lie al grupului Lie G. (H_x se numeşte **subgrupul de stabilitate** *al punctului x în raport cu acţiunea T).*

Demonstraţie.

i) Aplicaţia T_a este analitică, deoarece am fixat un argument într-o aplicaţie analitică de două argumente. Pentru orice $a, b \in G$, avem:

$$T_a \circ T_b = T_{ba}.$$

Rezultă:

$$T_a \circ T_{a^{-1}} = T_e = Id_M \text{și } T_{a^{-1}} \circ T_a = T_e = Id_M.$$

Rezultă că aplicaţiile T_a şi $T_{a^{-1}}$ sunt inverse una alteia, deci $(T_a)^{-1} = T_{a^{-1}}$. Deoarece T_a şi $(T_a)^{-1}$ sunt aplicaţii analitice, rezultă că T_a este difeomorfism analitic.

ii) Verificările sunt triviale.

iii) Aplicaţia T_x este analitică, deoarece am fixat un argument într-o aplicaţie analitică de două argumente.

iv) Pentru orice $a, b \in H_x$, avem:

$$T_{ab^{-1}}(x) = T_{b^{-1}} \circ T_a(x) = T_{b^{-1}}(x) = T_{b^{-1}}(T_b(x)) = T_e(x) = x.$$

Prin urmare, $ab^{-1} \in H_x$, adică H_x este subgrup al grupului G.

Deoarece aplicaţia T_x este analitică, ea este continuă. Rezultă că $T_x^{-1}(\{x\}) = H_x$ este mulţime închisă în G. Conform teoremei lui Cartan, H_x este subgrup Lie al grupului Lie G.

1.5. PROPOZIŢIE. *Fie $T : M \times G \to M$ o acţiune la dreapta a grupului Lie G în varietatea analitică M.*

i) *Fie $x, x' \in M$. Dacă $x' \in \operatorname{Im} T_x$, atunci $\operatorname{Im} T_x = \operatorname{Im} T_{x'}$.*

ii) *Fie H_x subgrupul de stabilitate al unui punct $x \in M$, în raport cu acţiunea T. Dacă $H_x = G$, atunci orbita ce conţine punctul x se reduce la un punct.*

Demonstraţie.

i) Deoarece $x' \in \operatorname{Im} T_x$, rezultă că există $a' \in G$, astfel încât:

$$x' = T_x(a') = T_{a'}(x) \text{ şi } x = T_{a'^{-1}}(x').$$

Fie $y \in \operatorname{Im} T_{x'}$. Rezultă că există $a \in G$, astfel încât:

$$\begin{aligned} y &= T_{x'}(a) = T(x', a) = T(T_{a'}(x), a) = T(T(x, a'), a) = \\ &= T(x, a'a) = T_x(a'a) \in \operatorname{Im} T_x. \end{aligned}$$

Fie $z \in \operatorname{Im} T_x$. Rezultă că există $c \in G$, astfel încât:

$$\begin{aligned} z &= T_x(c) = T(x, c) = T\left(T_{a'^{-1}}(x'), c\right) = T\left(T\left(x', {a'}^{-1}\right), c\right) = \\ &= T\left(x', {a'}^{-1} c\right) = T_{x'}\left({a'}^{-1} c\right) \in \operatorname{Im} T_{x'}. \end{aligned}$$

Rezultă:

$$\operatorname{Im} T_{x'} = \operatorname{Im} T_x.$$

ii) Din $H_x = G$ rezultă $T_a(x) = x$, pentru orice $a \in G$, deci $\operatorname{Im} T_x = \{x\}$.

Observaţie. M este reuniunea disjunctă a orbitelor punctelor sale.

1.6. DEFINIŢIE. *Fie $T : M \times G \to M$ o acţiune la dreapta a grupului Lie G în varietatea analitică M.*

i) *Se spune că grupul* G **acţionează efectiv asupra lui** M, *dacă relaţia* $T_a = T_e$ *implică* $a = e$.

ii) *Spunem că grupul Lie* G **acţioneneaz㠖 tranzitiv** *în varietatea* M, *dacă pentru orice* $x, y \in M$, *există* $a \in G$, *astfel încât* $T_a(x) = y$.

iii) *Spunem că grupul Lie* G **acţionează simplu tranzitiv** *în varietatea* M, *dacă pentru orice* $x, y \in M$, *există un unic element* $a \in G$, *astfel încât* $T_a(x) = y$.

iv) *Spunem că grupul Lie* G **acţionează aproape liber** *în varietatea* M, *dacă pentru fiecare* $x \in M$ *grupul său de stabilitate* H_x *este discret.*

v) *Spunem că grupul Lie* G **acţionează liber** *în varietatea* M, *dacă relaţia* $T_a(x) = x$, *pentru cel puţin un punct* $x \in M$, *implică* $a = e$.

1.7. PROPOZIŢIE. *Fie* $T : M \times G \to M$ *o acţiune la dreapta a grupului Lie* G *în varietatea* M. *Atunci*

$$H_e = \{a \in G \mid T_a = Id_M\}$$

este divizor normal al lui G.

Demonstraţie. Pentru orice $a, b \in H_e$, avem:

$$T_{ab^{-1}} = T_{b^{-1}} \circ T_a = (T_b)^{-1} \circ T_a = (Id_M)^{-1} \circ Id_M = Id_M.$$

Prin urmare, avem $ab^{-1} \in H_e$.

Fie $a \in H_e$, $b \in G$. Avem

$$\begin{aligned} T_{bab^{-1}} &= T_{b^{-1}} \circ T_a \circ T_b = T_{b^{-1}} \circ Id_M \circ T_b = T_{b^{-1}} \circ T_b = \\ &= T_{bb^{-1}} = T_e = Id_M, \end{aligned}$$

şi deci $bab^{-1} \in H_e$. Rezultă că pentru orice $b \in G$, avem

$$bH_eb^{-1} \subset H_e,$$

şi deci He este un divizor normal al lui G.

1.8. PROPOZIŢIE. *Fie* $T : M \times G \to M$ *o acţiune la dreapta. Dacă grupul Lie* G *acţionează simplu tranzitiv, atunci translaţiile* T_a *(*$a \neq e$*) nu au puncte fixe.*

Demonstraţie. Presupunem $T_a(x) = x$. Deoarece acţiunea este simplu tranzitivă, folosind $T_e(x) = x$, $(\forall)\, x \in M$, obţinem $a = e$.

1.9. Exemplu. Fie $M = \mathbb{R}_+^* = (0, \infty)$ şi $G = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Este evident că M şi G sunt varietăţi analitice reale de dimensiune unu. G, împreună cu operaţia de înmulţire, formează grup cu elementul neutru $e = 1$. Deoarece operaţia grupală este analitică, rezultă că G (înzestrată cu cele două structuri) este grup Lie.

Considerăm aplicaţia

$$T : G \times M \to M,\ T(a, x) = \frac{x}{a^2}.$$

Ne propunem să arătăm că:

i) T este acţiune la stânga a grupului Lie G în varietatea M;

ii) acţiunea T este efectivă;

iii) T este acţiune tranzitivă;

iv) acţiunea T nu este simplu tranzitivă;

v) T nu este acţiune aproape liberă.

Soluţie:

i) T este aplicaţie analitică. Pentru orice $a, b \in G$, şi orice $x \in M$, avem:

$$T(a, T(b, x)) = T\left(a, \frac{x}{b^2}\right) = \frac{x}{a^2 b^2} = \frac{x}{(ab)^2} = T(ab, x).$$

În plus, $T(e, x) = \frac{x}{1} = x$, $(\forall)\, x \in M$. Rezultă că aplicaţia T este acţiune .

ii) $T_a = T_e \Leftrightarrow T_a(x) = T_e(x), (\forall)\, x \in M \Leftrightarrow T(a, x) = T(e, x)$, $(\forall)\, x \in M \Leftrightarrow \frac{x}{a^2} = \frac{x}{1}$, $(\forall)\, x \in M \Leftrightarrow a^2 = 1 \Leftrightarrow a = \pm 1$. Prin urmare, acţiunea T nu este efectivă.

iii) Pentru orice $x, y \in M$, există $a \in G$, cu $y = T(a, x) \Leftrightarrow y = \frac{x}{a^2} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow a^2 = \frac{x}{y}$. Deci acţiunea T este tranzitivă.

iv) Din rezolvarea punctului precedent rezultă că T nu este simplu tranzitivă.

v) Ştim că T este acţiune aproape liberă dacă subgrupul de stabilitate al oricărui punct $x \in M$ este trivial, deci $H_x = \{e\}$, $(\forall)\, x \in M$, unde

$$H_x = \{a \in G \mid T(a, x) = x\}.$$

Avem:

$$T(a,x) = x,\ \ (\forall)\, x \in M \Leftrightarrow \frac{x}{a^2} = x,\ \ (\forall)\, x \in M \Leftrightarrow a = \pm 1.$$

Rezultă că acţiunea T nu este aproape liberă.

1.10. PROPOZIŢIE. *Fie $T : M \times G \to M$ o acţiune la dreapta şi fie $T(G, M)$ grupul translaţiilor la dreapta.*

i) *Aplicaţia*

$$h : G \to T(G, M)$$

definită prin

$$h(a) = T_a$$

este un homomorfism de grupuri.

ii) *Dacă acţiunea T este efectivă, atunci h este izomorfism de grupuri.*

iii) *Există un izomorfism între grupul translaţiilor $T(G, M)$ şi grupul factor G/H_e.*

Demonstraţie.

i) Evident.

ii) Pentru orice $a, b \in G$, avem:

$$h(a) = h(b) \Leftrightarrow T_a = T_b \Leftrightarrow T_{ab^{-1}} = T_e \Leftrightarrow ab^{-1} = e \Leftrightarrow a = b.$$

Prin urmare homomorfismul h devine izomorfism.

iii) Se aplică proprietatea de universalitate a grupului factor.

1.11. PROPOZIŢIE. *Fie $T : M \times G \to M$ o acţiune la dreapta. Dacă grupul Lie G acţionează tranzitiv, atunci orice două subgrupuri de stabilitate sunt conjugate.*

Demonstraţie. Fie $x, y \in M$, şi fie H_x, H_y subgrupurile lor de stabilitate în raport cu acţiunea T. T fiind tranzitivă, există $a \in G$, astfel încât

$$T(x, a) = y.$$

Avem:

$$H_y = H_{T(x,a)} = \{b \in G \mid T(T(x,a), b) = T(x,a)\}.$$

Deoarece T este acţiune, egalitatea

$$T(T(x,a), b) = T(x,a)$$

se scrie

$$T(x, ab) = T(x,a),$$

sau

$$T\left(x, \left(aba^{-1}\right)\right) = x.$$

Rezultă că $b \in H_{T(x,a)}$ dacă şi numai dacă $aba^{-1} \in H_x$, adică dacă şi numai dacă $b \in a^{-1}H_x a$, deci

$$H_y = a^{-1}H_x a.$$

OBSEVAŢIE. Fie $T : M \times G \to M$ o acţiune la dreapta a grupului Lie G $(\dim G = r)$ în varietatea analitică M $(\dim M = n)$. În coordonate locale acţiunea lui G pe M este dată prin

$$y^i = T^i\left(x^1, ..., x^n, a^1, ..., a^r\right),\ i = 1, ..., n,$$

unde $x^1, ..., x^n$ sunt coordonatele punctului $p \in M$, $y^1, ..., y^n$ sunt coordonatele punctului $T(p,a)$ în hărţi locale pe M, iar $a^1, ..., a^r$ sunt coordonatele elementului $a \in G$, într-o hartă locală în vecinătatea elementului neutru $e \in G$, astfel că coordonatele lui e în această hartă locală sunt nule. Este evident că T^i sunt funcţii analitice, $(\forall)\, i = 1, ..., n$.

1.12. Prezentăm în continuare câteva definiţii şi observaţii referitoare la spaţiile omogene.

1.12.1. Reamintim că o **acţiune** (la stânga) $T : G \times M \to M$ se numeşte **tranzitivă** dacă $(\forall) p_1, p_2 \in M$, $(\exists) a \in G$, astfel încât $T(a, p_1) = p_2$.

DEFINIŢIE. *O varietate analitică M pe care acţionează un grup Lie G, astfel încât acţiunea este tranzitivă, se numeşte* **spaţiu omogen** *al lui G.*

1.12.2. EXEMPLE.

i) G este spaţiu omogen al său.

ii) Dacă H este subgrup închis al grupului Lie G, atunci G/H este varietate analitică reală. Aplicaţia

$$T : G \times G/H \to G/H,\ T(a, bH) = abH$$

este acţiune. Această acţiune este tranzitivă, deoarece oricare ar fi $a, b \in G$, avem $T(ba^{-1}, aH) = bH$. Prin urmare G/H *este spaţiu omogen al lui G.*

1.12.3. Fie $T : G \times M \to M$ o acţiune a grupului Lie G în varietatea analitică M. Fie $p \in M$, şi fie

$$H_p = \{a \in G \mid T(a, p) = p\}$$

subgrupul de stabilitate al punctului p. Ştim că H_p este subgrup închis. Conform teoremei lui Chevalley, G/H_p este varietate analitică reală. Obţinem o aplicaţie naturală

$$f : G/H_p \to M,\ f(aH_p) = T(a, p).$$

Această aplicaţie este bine definită, deoarece

$$aH_p = bH_p \Rightarrow b^{-1}aH_p = H_p \Rightarrow b^{-1}a \in H_p \Rightarrow T\left(b^{-1}a, p\right) = p.$$

Folosind aceasta, avem

$$T(a, p) = T\left(bb^{-1}a, p\right) = T\left(b, T\left(b^{-1}a, p\right)\right) = T(b, p),$$

deci $T(a, p) = T(b, p)$, adică $f(aH_p) = f(bH_p)$.

Să observăm acum că următoarea diagramă este comutativă:

$$
\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "T_p"] \arrow[d, "\pi"'] & M \\
G/H_p \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}
$$

În adevăr, pentru orice $a \in G$, avem:

$$f \circ \pi (a) = f (aH_p) = T (a, p) = T_p (a) .$$

1.12.4. PROPOZIŢIE. *Fie* $T : G \times M \to M$ *o acţiune tranzitivă,* $p \in M$ *şi* H_p *subgrupul de stabilitate al punctului* p. *Atunci:*

i) *aplicaţia* $f : G/H_p \to M$, $f (aH_p) = T (a, p)$ *este un difeomorfism analitic.*

ii) *aplicaţia* $G \to M$, $a \to T_p (a)$ *este submersie analitică.*

Demonstraţie. i) Aplicaţia f este injectivă, deoarece avem:

$$
\begin{aligned}
f (aH_p) &= f (bH_p) \Rightarrow T (a,p) = T (b,p) \Rightarrow T \left(b^{-1}a, p\right) = \\
&= T \left(b^{-1}, T (a,p)\right) = T \left(b^{-1}, T (b,p)\right) = T (e,p) = p,
\end{aligned}
$$

deci $b^{-1}a \in H_p$. Din $b^{-1}aH_p = H_p$, rezultă $aH_p = bH_p$, şi deci aplicaţia f este injectivă.

Deoarece G acţionează tranzitiv pe M, rezultă că aplicaţia f este surjectivă. Obţinem deci că varietăţile M şi G/H_p sunt difeomorfisme.

1.12.5. Observaţie. i) Din această propoziţie rezultă că *un spaţiu omogen se poate scrie mereu sub forma* G/H, *unde* G *este un grup Lie, iar* H *este un subgrup închis al acestuia.* (a se vedea definiţia 3.7, cap. II).

ii) Rezultate similare obţinem în cazul acţiunilor la dreapta.

1.12.6. EXEMPLE. (*Sferele ca varietăţi cât*).

Avem:

(1.1) $S^n = O (n + 1) /O (n) = SO (n + 1) /SO (n)$,

(1.2) $S^{2n+1} = U (n + 1) /U (n) = SU (n + 1) /SU (n)$,

(1.3) $S^{4n+3} = Sp (n + 1) /Sp (n)$.

În adevăr, considerăm acţiunea $O (n + 1) \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ (a se vedea exemplul 1.2.3). Această acţiune induce o acţiune a grupului $O (n + 1)$ pe sfera unitate $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Este uşor de văzut că această acţiune este tranzitivă.

Fie punctul $p = (1, 0, ..., 0) \in S^n$, şi fie H_p subgrupul de stabilitate al punctului p.

Fie $A \in H_p$. Avem $pA = p$. Scriem A sub forma $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, cu $a \in \mathbb{R}$, d matrice de tipul (n, n), $d \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, $b \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$, $c \in \mathcal{M}_{1\times n}(\mathbb{R})$.

Fie $O_n = (0, ..., 0)$ vectorul cu n componente nule. Avem:

$$\begin{pmatrix} 1 & O_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & O_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & O_n \end{pmatrix}.$$

Rezultă că trebuie să avem $a = 1$, $b = O_n$. Fie ${}^TA$ transpusa matricei A. Condiţia $A^TA = I_{n+1}$ se scrie:

$$\begin{pmatrix} 1 & O_n \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & {}^Tc \\ O_n & {}^Td \end{pmatrix} = I_{n+1} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & c \\ c & c^Tc + d^Td \end{pmatrix} = I_{n+1}.$$

Rezultă $c =^T O_n$ şi $d^Td = I_n$, deci $d \in O(n)$. Prin urmare, grupul de stabilitate al punctului p este:

$$H_p = \left\{ A \in O(n+1) \mid A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}, d \in O(n) \right\} \simeq O(n).$$

Deci avem $S^n = O(n+1)/O(n)$, adică prima egalitate din (1.1).

Analog pentru $SO(n+1)$ se consideră izometriile lui $\mathbb{R}^{n+1}$ care păstrează orientarea. Grupul Lie $SO(n+1)$ acţionează tranzitiv pe S^n, iar grupul de stabilitate în acest caz este izomorf cu $SO(n)$.

Observăm că (1.2) este cazul analog celui anterior, în care se consideră $\mathbb{C}^{n+1} \simeq \mathbb{R}^{2n+2}$.

Pentru (1.3) se utilizează corpul cuaternionilor $\mathbb{H}$, iar $Sp(n)$ corespunde izometriilor lui $\mathbb{H}^n$ cu produsul scalar

$$\langle q, q' \rangle = \sum_{i=1}^{n} q_i \overline{q_i}'.$$

Pentru a încheia justificarea, observăm că:

$$\mathbb{H}^{n+1} \simeq \mathbb{C}^{2n+2} \simeq \mathbb{R}^{4n+4}.$$

§ 2. CÂMPURI DE VECTORI ASOCIATE UNEI ACŢIUNI

2.1. Fie $T : M \times G \to M$ o acţiune la dreapta a grupului Lie G în varietatea analitică M, şi fie X un câmp stâng invariant pe grupul Lie G, deci $X \in L(G)$. Definim aplicaţia

$$\widetilde{X} : M \to TM$$

prin formula

$$(2.1) \qquad \widetilde{X}_p = (T_p)_* (X_e),$$

unde $T_p(a) = T(p, a)$, $p \in M$, $a \in G$. Se constată uşor că aplicaţia

$$(p \to X_p) : M \to TM$$

este analitică. Rezultă că $\widetilde{X} \in \mathcal{X}(M)$.

DEFINIŢIE. *Câmpul de vectori* $\widetilde{X}$ *se numeşte* **câmpul fundamental de vectori tangenţi** *generat de* X.

2.2. LEMĂ. *Fie* $T : M \times G \to M$ *o acţiune, şi fie* $Y \in L(G)$. *Atunci, pentru orice* $f \in \mathcal{F}(M)$, *avem*

$$(2.2) \qquad \widetilde{Y}(f) \circ T_p = Y(f \circ T_p), \quad (\forall)\, p \in M,$$

unde $\widetilde{Y}$ *este câmpul fundamental de vectori tangenţi generat de* Y.

Demonstraţie. Observăm mai întâi că are loc egalitatea:

$$(2.3) \qquad T_{T(p,a)} = T_p \circ L_a, \quad (\forall)\, p \in M, \quad (\forall)\, a \in G.$$

În adevăr, pentru orice $b \in G$, avem:

$$T_{T(p,a)}(b) = T(T(p,a), b) = T(p, ab) = T_p(ab) = T_p \circ L_a(b).$$

Folosind formulele (2.1) şi (2.3) rezultă, $(\forall)\, a \in G$:

$$\begin{aligned} \widetilde{Y}(f) \circ T_p(a) &= \widetilde{Y}(f)(T(p,a)) = \widetilde{Y}_{T(p,a)}(f) = \left(T_{T(p,a)}\right)_*(Y_e)(f) = \\ &= (T_p \circ L_a)_*(Y_e)(f) = (T_p)_*(Y_a)(f) = Y_a(f \circ T_p) = \\ &= Y(f \circ T_p)(a). \end{aligned}$$

2.3. PROPOZIŢIE. *Menţinem notaţiile de mai sus. Aplicaţia*

$$u : L(G) \to \mathcal{X}(M), \; u(X) = \widetilde{X}$$

este un homomorfism de algebre Lie.

Demonstraţie. Pentru orice $X, Y \in L(G)$, şi orice $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, avem:

$$\begin{aligned} u(c_1X + c_2Y)(p) &= (c_1\widetilde{X + c_2}Y)_p = (T_p)_*((c_1X + c_2Y)(e)) = \\ &= (T_p)_*(c_1X_e + c_2Y_e) = c_1(T_p)_*(X_e) + c_2(T_p)_*(Y_e) = \\ &= c_1\widetilde{X_p} + c_2\widetilde{Y}_p = \left(c_1\widetilde{X} + c_2\widetilde{Y}\right)(p) = \\ &= (c_1u(X) + c_2u(Y))(p), \end{aligned}$$

deci

$$u(c_1X + c_2Y) = c_1u(X) + c_2(Y).$$

Să arătăm acum că pentru orice $X, Y \in L(G)$, avem:

$$(2.4) \qquad [u(X), u(Y)] = u([X, Y]).$$

Vom folosi formula (2.2) stabilită în lema precedentă. Pentru orice $f \in \mathcal{F}(M)$, şi orice $p \in M$, avem:

$$
\begin{aligned}
[u(X), u(Y)](f)(p) &= \left[\widetilde{X}, \widetilde{Y}\right]_p (f) = \widetilde{X_p}\left(\widetilde{Y}(f)\right) - \widetilde{Y}_p\left(\widetilde{X}(f)\right) = \\
&= \left((T_p)_* (X_e)\right)\left(\widetilde{Y}(f)\right) - \left((T_p)_* (Y_e)\right)\left(\widetilde{X}(f)\right) = \\
&= X_e\left(\widetilde{Y}(f) \circ T_p\right) - Y_e\left(\widetilde{X}(f) \circ T_p\right) = \\
&= X_e\left(Y\left(f \circ T_p\right)\right) - Y_e\left(X\left(f \circ T_p\right)\right) = \\
&= [X, Y]_e \left(f \circ T_p\right) = (T_p)_* \left([X, Y]_e\right)(f) = \\
&= \widetilde{[X, Y]}_p (f) = \widetilde{[X, Y]}(f)(p) = \\
&= u([X, Y])(f)(p),
\end{aligned}
$$

şi cum punctul p şi funcţia f au fost alese arbitrar, obţinem egalitatea (2.4), deci u este homomorfism de algebre Lie.

2.4. PROPOZIŢIE. *Fie $T : M \times G \to M$ o acţiune la dreapta a grupului Lie G în varietatea analitică M, şi fie $X \in L(G)$. Definim aplicaţia*

$$
\alpha : \mathbb{R} \times M \to M
$$

prin $\alpha(t, p) = T(p, \exp tX)$. Atunci:

i) *α este o acţiune la stânga a grupului aditiv Lie $\mathbb{R}$ în varietatea M.*

ii) *Dacă Y este câmpul de vectori asociat acţiunii α, adică*

$$
Y_p = (\alpha_p)_* \left(\frac{d}{dt}\,|_{t=0}\right),
$$

atunci $Y = \widetilde{X}$, unde $\widetilde{X_p} = (T_p)_* (X_e)$.

iii) *Dacă acţiunea T este efectivă atunci aplicaţia*

$$
u : L(G) \to \mathcal{X}(M),\ u(X) = \widetilde{X}
$$

este homomorfism injectiv de algebre Lie.

iv) *Dacă acţiunea T ste liberă, atunci oricare ar fi $X \in L(G) \setminus \{0\}$, avem $\widetilde{X}_p \neq 0$, $(\forall)\, p \in M$.*

Demonstraţie. i) Fie $\rho_X : \mathbb{R} \to G$ homomorfismul de grupuri Lie generat de câmpul X. Avem

$$\alpha(t,p) = T \circ (Id_M \times \rho_X)(p,t)$$

şi deci aplicaţia α este analitică.

Pentru $t, t' \in \mathbb{R}$ avem:

$$\begin{aligned} \alpha(t, \alpha(t', p)) &= \alpha(t, T(p, \exp t'X)) = T(T(p, \exp t'X), \exp tX) = \\ &= T(p, \exp(t'+t)X) = \alpha(t'+t, p). \end{aligned}$$

În plus, avem $\alpha(0,p) = T(p,e) = p$, adică α este o acţiune la stânga a lui $\mathbb{R}$ în M.

ii) Pentru orice $p \in M$, avem:

$$\begin{aligned} Y_p &= (\alpha_p)_* \left(\frac{d}{dt}\,|_{t=0}\right) = (T_p \circ \rho_X)_* \left(\frac{d}{dt}\,|_{t=0}\right) = \\ &= (T_p)_* \left((\rho_X)_* \left(\frac{d}{dt}\,|_{t=0}\right)\right) = (T_p)_* (X_e) = \widetilde{X}_p. \end{aligned}$$

Rezultă $Y = \widetilde{X}$.

iii) Fie $\widetilde{X} = 0$. Ecuaţiile diferenţiale ale traiectoriilor câmpului $\widetilde{X}$ se scriu $\frac{dx^i}{dt} = 0$, $i \in \{1, ..., n\}$, $n = \dim M$. Rezultă $x^i = c^i$, $i \in \{1, ..., n\}$. Dacă notăm $x^i(0) = x_0^i$, rezultă $x^i = x_0^i$. Rezultă că traiectoria centrată în punctul $p_0 = (x_0^1, ..., x_0^n)$ este curba parametrizată

$$\alpha_{p_0} : \mathbb{R} \to M,\ \alpha_{p_0}(t) = \left(x_0^1, ..., x_0^n\right).$$

Variem punctul p_0 în M şi obţinem acţiunea

$$\alpha : \mathbb{R} \times M \to M,\ \alpha(t,p) = p,\ \ (\forall)\, t \in \mathbb{R},\ \ (\forall)\, p \in M.$$

Din $\alpha(t,x) = x$ avem $T(x, \exp tX) = x$, sau $T_{\exp tX}(x) = T_e(x)$. Deoarece egalitatea are loc oricare ar fi $x \in M$, rezultă $T_{\exp tX} = T_e$. Cum acţiunea T este efectivă, rezultă $\exp tX = e$. Deoarece ultima egalitate are loc pentru orice $t \in \mathbb{R}$, obţinem $X = 0$. Prin urmare, din $\widetilde{X} = u(X) = 0$, am obţinut $X = 0$, deci aplicaţia

$$u : L(G) \to \mathcal{X}(M), \; X \to u(X) = \widetilde{X}$$

este injectivă.

iv) Fie $X \in L(G)$, $X \neq 0$ şi $\widetilde{X} = u(X) \in \mathcal{X}(M)$. Presupunem că există $p_0 \in M$, astfel încât $\widetilde{X}_{p_0} = 0$. Atunci $\alpha(t, p_0) = p_0$, sau $T(p_0, \exp tX) = p_0$. Rezultă $T_{\exp tX}(p_0) = p_0$, adică $\exp tX \in H_{p_0}$.

Ştim că acţiunea T este liberă, adică grupul de stabilitate H_p al oricărui punct $p \in M$ este $H_p = \{e\}$. Rezultă $\exp tX = e$, $(\forall)\, t \in \mathbb{R}$, adică $X = 0$, ceea ce este absurd.

2.5. OBSERVAŢIE.

2.5.1. Din propoziţia anterioară (punctul iii)) rezultă că dacă grupul Lie G acţionează (la dreapta) efectiv pe varietatea M, atunci aplicaţia

$$u : L(G) \to \mathcal{X}(M), \; X \to u(X) = \widetilde{X}$$

este un homomorfism injectiv de algebre Lie. În acest caz algebra Lie $L(G)$ se identifică cu subalgebra Lie $u(L(G))$ a lui $\mathcal{X}(M)$.

2.5.2. Fie $T' : G \times M \to M$ o acţiune la stânga a grupului Lie G în varietatea analitică M. Presupunem că acţiunea T' este efectivă, adică relaţia $T_a = T_e$ implică $a = e$. Este evident că pentru orice $p \in M$, aplicaţia

$$T'_p : G \to M, \; T'_p(a) = T'(a, p), \; a \in G$$

este analitică. Considerăm aplicaţia

$$\begin{aligned} u' : L(G) &\to \mathcal{X}(M), \\ X &\to \widetilde{\widetilde{X}} = u'(X), \end{aligned}$$

unde câmpul $\widetilde{\widetilde{X}}$ este definit prin

$$\widetilde{\widetilde{X}}_p = \left(T'_p\right)_* (X_e), \;\; (\forall)\, p \in M.$$

Se constată uşor că aplicaţia u' este un homomorfism de spaţii vectoriale.

Definim aplicaţia

$$T : M \times G \to M,$$

prin formula $T(p,a) = T'(a^{-1},p)$. Este uşor de văzut că aplicaţia T este acţiune efectivă la dreapta.

Fie aplicaţia

$$u : L(G) \to \mathcal{X}(M),\ u(X) = \widetilde{X},$$

unde $\widetilde{X}_p = (T_p)_*(X_e)$, $T_p(a) = T(p,a)$, $a \in G$, $p \in M$.

Deoarece acţiunea T este efectivă, rezultă că aplicaţia u este un homomorfism de algebre Lie.

Deoarece avem $T(p,a) = T'(a^{-1},p)$, rezultă egalitatea $T'_p = T_p \circ j$. Folosind formula

$$j_*(X_a) + (L_{a^{-1}})_* \circ (R_{a^{-1}})_*(X_a) = 0_{a^{-1}},$$

stabilită în lema 3.7 (cap. I), avem $j_*(X_e) = -X_e$.

Folosind ultimele două egalităţi, obţinem:

$$\widetilde{\widetilde{X}}_p = (T'_p)_*(X_e) = (T_p \circ j)_*(X_e) = -(T_p)_*(X_e) = -\widetilde{X}_p.$$

Prin urmare obţinem:

$$\widetilde{\widetilde{X}} = -\widetilde{X}.$$

Pentru $X, Y \in L(G)$ avem

$$\begin{aligned}[u'(X), u'(Y)] &= \left[\widetilde{\widetilde{X}}, \widetilde{\widetilde{Y}}\right] = \left[\widetilde{X}, \widetilde{Y}\right] = [u(X), u(Y)] = u([X,Y]) = \\ &= \widetilde{[X,Y]} = -\widetilde{\widetilde{[X,Y]}} = -u'([X,Y]),\end{aligned}$$

adică u' este antihomomorfism de algebre Lie.

2.6. Exemple.

2.6.1. Fie G un grup Lie. Ştim că multiplicarea în grupul Lie G,

$$\mu : G \times G \to G,\ \mu(a,b) = ab$$

este o acţiune la stânga (sau la dreapta) a grupului Lie G în varietatea analitică G. Ne propunem să determinăm câmpurile fundamentale de vectori tangenţi când $\mu = T$ este acţiune la dreapta. Avem $T : G \times G \to G$, $T(x,a) = xa$. Rezultă $T_x(a) = xa = L_x(a)$, $(\forall)\, a \in G$. Prin urmare avem $T_x = L_x$, $(\forall)\, x \in G$. Rezultă:

$$\widetilde{X}_x = (T_x)_*(X_e) = (L_x)_*(X_e) = X_x,\ \ (\forall)\, x \in G.$$

Obţinem $\widetilde{X} = X$, $(\forall)\, X \in L(G)$.

2.6.2. Considerăm transformările planului $\mathbb{R}^2$ în el însuşi, date prin ecuaţiile

$$(2.5)\qquad \begin{cases} y^1 = ax^1 + bx^2 \\ y^2 = cx^1 + dx^2 \end{cases}$$

unde $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ şi $ad - bc = 1$. Vom arăta că (2.5) sunt ecuaţiile unui grup Lie de transformări la stânga (numit **grupul centroafin unimodular**), şi vom determina algebra sa Lie.

Condiţia $ad - bc = 1$ implică faptul că numai trei parametrii sunt esenţiali. Dacă scriem transformările (2.5) sub forma

$$(2.5')\qquad \begin{cases} y^1 = (a+1)\,x^1 + bx^2, \\ y^2 = cx^1 + \frac{bc+1}{1+a}x^2, \end{cases}$$

atunci transformarea identică se obţine pentru $a = b = c = 0$.

Transformările (2.5') sunt definite într-o vecinătate a elementului neutru $e = (0,0,0)$. Notăm cu $T_{(a,b,c)}$ transformarea (2.5'). Fie $T_{(a',b',c')}$ transformarea de parametrii a', b', c'. Vom arăta că compunerea celor două transformări $T_{(a,b,c)}$ şi $T_{(a',b',c')}$ este o transformare de aceeaşi formă. În adevăr,

$$
\begin{aligned}
y'^{1} &= (a'+1)\,y^{1}+b'y^{2}=(a'+1)\,(a+1)\,x^{1}+(a'+1)\,bx^{2}+\\
&\quad +b'cx^{1}+\frac{b'\,(bc+1)}{1+a}x^{2}.
\end{aligned}
$$

Deci

$$
y'^{1}=(a'a+a'+a+b'c+1)\,x^{1}+\left[(a'+1)\,b+\frac{b'\,(bc+1)}{1+a}\right]x^{2}.
$$

În continuare avem:

$$
y'^{2}=c'y^{1}+\frac{b'c'+1}{a'+1}y^{2}=c'\,(a+1)\,x^{1}+c'bx^{2}+c\frac{b'c'+1}{a'+1}x^{1}+\frac{bc+1}{a+1}\frac{b'c'+1}{a'+1}x^{2}.
$$

Deci

$$
y'^{2}=\left[c'\,(a+1)+c\frac{b'c'+1}{a'+1}\right]x^{1}+\left[c'b+\frac{bc+1}{a+1}\frac{b'c'+1}{a'+1}\right]x^{2}.
$$

Am obţinut

$$
\begin{cases}
y'^{1}=(a''+1)\,x^{1}+b''x^{2}\\
y'^{2}=c''x^{1}+\left(c'b+\frac{bc+1}{a+1}\frac{b'c'+1}{a'+1}\right)x^{2},
\end{cases}
$$

unde

$$
(2.6)\qquad
\begin{cases}
a''=a'a+a'+a+b'c\\
b''=(a'+1)\,b+\frac{b'(bc+1)}{1+a}\\
c''=c'\,(a+1)+c\frac{b'c'+1}{a'+1}.
\end{cases}
$$

Un calcul simplu ne arată că transformarea $T_{(a'',b'',c'')}$ este de aceeaşi formă.

Căutăm inversa transformării $T_{(a,b,c)}$. Făcând $a''=b''=c''=0$ în formulele de mai sus, obţinem:

$$a' = \frac{bc-a}{1+a},\ b' = -b,\ c' = -c.$$

Prin urmare inversa transformării de parametrii (a, b, c) este o transformare de aceeaşi formă, de parametrii

$$\left(\frac{bc-a}{1+a}, -b, -c\right).$$

În definitiv avem un grup Lie G, de dimensiune trei, care acţionează la stânga pe $\mathbb{R}^2$ (legea de grup este dată de formulele (2.6)). Formulele (2.5') mai pot fi scrise sub forma

$$\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+1 & b \\ c & \frac{1+bc}{1+a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix},$$

deci este vorba de un grup Lie G care acţionează la stânga pe $\mathbb{R}^2$. Să arătăm că acţiunea T este efectivă (i.e. $T_{(a,b,c)} = T_{(0,0,0)} \Rightarrow a = b = c = 0$). Relaţiile

$$\begin{cases} (a+1)\,x^1 + bx^2 = x^1 \\ cx^1 + \frac{bc+1}{a+1} x^2 = x^2 \end{cases},\quad (\forall)\, x^1, x^2 \in \mathbb{R}$$

se scriu

$$\begin{cases} ax^1 + bx^2 = 0 \\ cx^1 + \frac{bc-a}{a+1} x^2 = 0 \end{cases},\quad (\forall)\, x^1, x^2 \in \mathbb{R}.$$

De aici obţinem $a = b = c = 0$, adică acţiunea grupului Lie G în varietatea $\mathbb{R}^2$ este efectivă.

Vrem să determinăm algebra Lie a grupului Lie G.

Reamintim că dacă $T : M \times G \to M$ este o acţiune la dreapta a grupului Lie G în varietatea analitică M, atunci aplicaţia

$$u : L(G) \to \mathcal{X}(M),\ u(X) = \widetilde{X}$$

este un homomorfism de algebre Lie, unde câmpul $\widetilde{X} \in \mathcal{X}(M)$ este definit prin

$$\widetilde{X}(p) = \widetilde{X}_p = (T_p)_{*,e}(X_e).$$

În plus, dacă acţiunea T este efectivă, atunci homomorfismul u este injectiv şi, în acest caz, algebra Lie $L(G)$ se identifică cu subalgebra $u(L(G))$ a lui $\mathcal{X}(M)$.

În cazul în care T acţionează la stânga, atunci aplicaţia u este antihomomorfism de algebre Lie (adică u este aplicaţie liniară şi $u([X,Y]) = -[u(x), u(Y)]$), iar dacă T acţionează efectiv, aplicaţia u este injectivă.

Fie (a,b,c) un sistem de coordonate locale în jurul elementului neutru e al grupului Lie G. Notăm cu $\left\{\underset{1}{X}, \underset{2}{X}, \underset{3}{X}\right\}$ baza algebrei Lie $L(G)$, care în e ne dă:

$$\underset{1}{X}(e) = \frac{\partial}{\partial a}|_e; \; \underset{2}{X}(e) = \frac{\partial}{\partial b}|_e; \; \underset{3}{X}(e) = \frac{\partial}{\partial c}|_e.$$

Determinăm câmpurile $\underset{1}{\widetilde{X}}, \underset{2}{\widetilde{X}}, \underset{3}{\widetilde{X}} \in \mathcal{X}(M)$ cu ajutorul formulei

$$\underset{i}{\widetilde{X_p}} = (T_p)_{*,e}\left(\underset{i}{X_e}\right), \; p \in \mathbb{R}^2, \; i \in \{1,2,3\}.$$

Fie x^1, x^2 funcţiile coordonate ale varietăţii $M = \mathbb{R}^2$. Avem:

$$\underset{i}{\widetilde{X_p}}\left(x^j\right) = \underset{i}{\widetilde{X_p^j}} = (T_p)_{*,e}\left(\underset{i}{X_e}\right)\left(x^j\right) = \underset{i}{X_e}\left(x^j \circ T_p\right).$$

Rezultă

$$\begin{aligned}
\underset{1}{\widetilde{X_p^1}} &= \frac{\partial}{\partial a}|_e\left(x^1 \circ T_p\right) = x^1, \\
\underset{2}{\widetilde{X_p^2}} &= \frac{\partial}{\partial a}|_e\left(x^2 \circ T_p\right) = -x^2.
\end{aligned}$$

Rezultă

$$
\begin{aligned}
\underset{1}{\widetilde{X}} &= x^1 \frac{\partial}{\partial x^1} - x^2 \frac{\partial}{\partial x^2}, \\
\underset{2}{\widetilde{X_p^1}} &= \frac{\partial}{\partial b} |_e \left(x^1 \circ T_p\right) = x^2, \\
\underset{2}{\widetilde{X_p^2}} &= \frac{\partial}{\partial b} |_e \left(x^2 \circ T_p\right) = 0.
\end{aligned}
$$

Rezultă

$$
\begin{aligned}
\underset{2}{\widetilde{X}} &= x^2 \frac{\partial}{\partial x^1}, \\
\underset{3}{\widetilde{X_p^1}} &= \frac{\partial}{\partial c} |_e \left(x^1 \circ T_p\right) = 0, \\
\underset{3}{\widetilde{X_p^2}} &= \frac{\partial}{\partial c} |_e \left(x^2 \circ T_p\right) = x^1.
\end{aligned}
$$

Rezultă

$$
\underset{3}{\widetilde{X}} = x^1 \frac{\partial}{\partial x^2}.
$$

Printr-un calcul simplu, se obţine:

$$
\left[\underset{1}{\widetilde{X}}, \underset{2}{\widetilde{X}}\right] = -2\underset{2}{\widetilde{X}}, \quad \left[\underset{1}{\widetilde{X}}, \underset{3}{\widetilde{X}}\right] = 2\underset{3}{\widetilde{X}}, \quad \left[\underset{2}{\widetilde{X}}, \underset{3}{\widetilde{X}}\right] = -\underset{1}{\widetilde{X}}.
$$

Câmpurile $\underset{1}{\widetilde{X}}, \underset{2}{\widetilde{X}}, \underset{3}{\widetilde{X}}$ generează liniar o subalgebră Lie L (de dimensiune 3) a algebrei Lie $\mathcal{X}\left(\mathbb{R}^2\right)$.

Conform observaţiei anterioare, algebra Lie $L(G)$ se identifică cu algebra Lie $L = u(L(G))$ (u este *antihomomorfism*). Parantezele Poisson ale câmpurilor din baza algebrei Lie $L(G)$ sunt date de

$$
\left[\underset{1}{X}, \underset{2}{X}\right] = 2\underset{2}{X}, \quad \left[\underset{1}{X}, \underset{3}{X}\right] = -2\underset{3}{X}, \quad \left[\underset{2}{X}, \underset{3}{X}\right] = \underset{1}{X}.
$$

2.6.3. Fie M o varietate analitică reală, $\dim M = 2$ si fie $X_1, X_2 \in \mathcal{X}(M)$ exprimate local prin

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x^1},\ X_2 = e^{x^1}\frac{\partial}{\partial x^2}.$$

Avem $[X_1, X_2] = X_2$, deci câmpurile X_1 şi X_2 generează liniar subalgebra Lie de dimensiune doi

$$L = \left\{\lambda^1 X_1 + \lambda^2 X_2 \mid \lambda^1, \lambda^2 \in \mathbb{R}\right\}.$$

Ne propunem să determinăm grupul Lie de transformări la dreapta pe M care are algebra Lie izomorfă cu L.

Aflăm acţiunea generată de X_1. Scriem ecuaţiile diferenţiale ale traiectoriilor câmpului X_1 :

$$\frac{dx^1}{dt} = 1,\ \frac{dx^2}{dt} = 0,\ \text{cu } x^1(0) = x_0^1,\ x^2(0) = x_0^2.$$

Rezultă:

$$x^1 = t + x_0^1,\ x^2 = x_0^2.$$

Deci traiectoria centrată în punctul x_0 este curba

$$\begin{aligned} \alpha_{1_{x_0}} &: \mathbb{R} \to M, \\ \alpha_{1_{x_0}}(t) &= \left(t + x_0^1,\ x_0^2\right). \end{aligned}$$

Variem punctul x_0 în M şi obţinem acţiunea

$$\alpha_1\left(t, \left(x^1, x^2\right)\right) = \left(t + x^1, x^2\right).$$

Pentru câmpul X_2 avem de integrat sistemul:

$$\frac{dx^1}{dt} = 0,\ \frac{dx^2}{dt} = e^{x^1},\ \text{cu } x^1(0) = x_0^1,\ x^2(0) = x_0^2.$$

Rezultă:

$$x^1 = x_0^1,\ x^2 = e^{x^1} t + x_0^2.$$

Prin urmare traiectoria centrată în punctul (x_0^1, x_0^2) este curba

$$\alpha_{2_{\left(x_0^1, x_0^2\right)}}(t) = \left(x_0^1, e^{x_0^1} t + x_0^2\right).$$

Obţinem acţiunea:

$$\begin{aligned} &\alpha_2 : \mathbb{R} \times M \to M, \\ &\alpha_2\left(t, (x^1, x^2)\right) = \left(x^1, e^{x^1} t + x^2\right). \end{aligned}$$

Am obţinut deci acţiunile:

$$\begin{aligned} &\alpha_1, \alpha_2 : \mathbb{R} \times M \to M, \\ &\alpha_1\left(t_1, (x^1, x^2)\right) = \left(t_1 + x^1, x^2\right), \\ &\alpha_2\left(t_2, (x^1, x^2)\right) = \left(x^1, e^{x^1} t_2 + x^2\right). \end{aligned}$$

În continuare avem:

$$\begin{aligned} \alpha_2\left(t_2, \alpha_1\left(t_1, \left(x^1, x^2\right)\right)\right) &= \alpha_2\left(t_2, \left(t_1 + x^1, x^2\right)\right) = \left(t_1 + x^1, e^{t_1 + x^1} t_2 + x^2\right) = \\ &= \left(t_1 + x^1, e^{t_1} t_2 e^{x^1} + x^2\right). \end{aligned}$$

Notăm $t_1 = a$, $e^{t_1} t_2 = b$. Obţinem ecuaţiile grupului Lie de transformări (la dreapta):

$$T_{(a,b)} : \begin{cases} y^1 = x^1 + a \\ y^2 = b e^{x^1} + x^2. \end{cases}$$

Fie o a doua transformare $T_{(a',b')}$. Avem

$$\begin{aligned} T_{(a',b')} \circ T_{(a,b)}(x) &= T_{(a',b')}\left(x^1 + a, be^{x^1} + x^2\right) = \\ &= \left(x^1 + a + a', b'e^{x^1+a} + be^{x^1} + x^2\right) = \\ &= \left(x^1 + a + a', (b'e^a + b)\, e^{x^1} + x^2\right) = \\ &= T_{(a'',b'')}(x)\,, \end{aligned}$$

unde

$$\begin{cases} a'' = a + a' \\ b'' = b'e^a + b. \end{cases}$$

T fiind acţiune la dreapta, avem:

$$T_{(a',b')} \circ T_{(a,b)} = T_{(a,b)(a',b')}.$$

Rezultă că înmulţirea în grupul Lie căutat este:

$$(a,b) \bullet (a',b') = (a + a', b + b'e^a)\,.$$

Elementul neutru al grupului este $e = (0,0)$, iar $(a,b)^{-1} = (-a, -be^{-a})$.
Grupul Lie căutat este $\mathbb{R}^2$, cu legea

$$(a,b) \bullet (a',b') = (a + a', b + b'e^a)\,.$$

Să arătăm că algebra Lie a grupului Lie $\mathbb{R}^2$ obţinut este izomorfă cu L. Fie x^1, x^2 funcţiile coordonate ale varietăţii $\mathbb{R}^2$. Vom folosi formula:

$$X(a) = (L_a)_*(X_e)\,.$$

Avem:

$$X^i(a) = X(a)\left(x^i\right) = X_e\left(x^i \circ L_a\right).$$

Legea de grup este dată de:

$$\begin{cases} a''^1 = a^1 + a'^1 \\ a''^2 = a^2 + a'^2 e^{a^1}. \end{cases}$$

Avem:

$$\begin{aligned} x^1 \circ L_a(a') &= x^1(aa') = a''^1 = x^1(a) + x^1(a'), \\ x^2 \circ L_a(a') &= x^2(a) + x^2(a') e^{x^1}(a). \end{aligned}$$

Rezultă:

$$\begin{aligned} x^1 \circ L_a &= x^1(a) \cdot 1 + x^1, \\ x^2 \circ L_a &= x^2(a) \cdot 1 + x^2 e^{x^1(a)}. \end{aligned}$$

În continuare obţinem:

$$\begin{aligned} X^1(a) &= X_e\left(x^1 \circ L_a\right) = X_e^1, \\ X^2(a) &= X_e\left(x^2 \circ L_a\right) = X_e\left(x^2 e^{x^1(a)}\right) = e^{x^1(a)} X_e^2. \end{aligned}$$

Avem deci:

$$\begin{aligned} X^1 &= X_e^1, \\ X^2 &= e^{x^1} X_e^2. \end{aligned}$$

Rezultă că un câmp $X \in L(\mathbb{R}^2)$ se scrie

$$X = X_e^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + e^{x^1} X_e^2 \frac{\partial}{\partial x^2},$$

sau

$$X = c^i E_i,$$

unde

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{\partial}{\partial x^1}, \\ E_2 &= e^{x^1}\frac{\partial}{\partial x^2}. \end{aligned}$$

Acum este evident că algebra Lie L este izomorfă cu $L(\mathbb{R}^2)$.

§ 3. TEOREMELE LUI LIE.

În acest paragraf prezentăm cele trei teoreme clasice ale lui Lie. Pentru aceasta folosim [48], [49], [55].

Fie $T : G \times M \to M$ o acţiune la stânga a grupului Lie G ($\dim G = r$) în varietatea analitică M ($\dim M = n$).

Fie $f : U \to G$ şi $h : V \to M$ parametrizări pentru G şi M, unde U este mulţimea deschisă în $\mathbb{R}^r$, V este mulţime deschisă în $\mathbb{R}^n$ şi astfel încât $e \in W = f(U)$.

Considerăm elemente $a, a' \in W$ şi $x \in D = h(V)$, astfel încât $aa' \in W$ şi $T(a,x)$, $T(a',x) \in D$.

Ştim că operaţia grupală

$$\mu : G \times G \to G,\ c = \mu(a,b) = ab \in G$$

este aplicaţie analitică. Aplicaţia μ este reprezentată analitic prin relaţiile

$$c^i = \mu^i\left(a^1, ..., a^r, b^1, ..., b^r\right),\ i \in \{1, ..., r\},$$

unde funcţiile μ^i sunt analitice.

Acţiunea

$$T : G \times M \to M,\ y = T(a,x) = ax$$

este reprezentată analitic prin relaţiile:

$$y^\lambda = T^\lambda\left(a^1, ..., a^r, x^1, ..., x^n\right), \lambda \in \{1, ..., n\}. \tag{3.1}$$

Presupunem, în cele ce urmează, că avem dată o acţiune analitică a grupului Lie G ($\dim G = r$) în varietatea analitică M ($\dim M = n$). Păstrăm notaţiile anterioare. Indicii i, j, k, m, l, h, s vor lua valori cuprinse între 1 şi r, iar indicii λ, γ vor lua valori cuprinse între 1şi n.

3.1. Teorema I (**S. LIE**). *Există funcţiile* $\xi_i^\lambda(y)$ *şi* $\omega_j^i(a)$, *astfel încât din (3.1) avem*

$$\frac{\partial y^\lambda}{\partial a^i} = \xi_j^\lambda(y)\,\omega_i^j(a), \tag{3.2}$$

unde ξ_j^λ *verifică relaţiile*

$$\frac{\partial \xi_s^\lambda}{\partial y^\gamma}\xi_r^\gamma - \frac{\partial \xi_r^\lambda}{\partial y^\gamma}\xi_s^\gamma = \xi_i^\lambda c_{rs}^i, \tag{3.3}$$

iar ω_j^i *satisfac ecuaţiile lui Maurer-Cartan*

$$\frac{\partial \omega_j^i}{\partial a^l} - \frac{\partial \omega_l^i}{\partial a^j} = c_{rs}^i\omega_j^r\omega_l^s, \tag{3.4}$$

cu c_{rs}^i *constante reale (numite constantele de structură ale grupului).*

Demonstraţie. Fie $y = ax$, $z = by = bax = cx$, unde am notat $c = ba$.

În coordonate locale avem:

$$\begin{aligned} y^\lambda &= T^\lambda(a,x); \\ z^\gamma &= T^\gamma(b,y) = T^\gamma(c,x); \\ c^i &= \mu^i(b,a). \end{aligned}$$

Fixăm elementele $x \in M$, $c \in G$. Deoarece $z = cx$ rezultă că avem şi z fixat. Lăsăm să varieze elementele a, b, y, legate prin formulele:

$$z = by, \; c = ba.$$

Diferenţiem relaţiile

$$z^\gamma = T^\gamma(b,y), \; c^i = \mu^i(b,a)$$

şi ţinând seama că am fixat z şi c, deci $dz^\gamma = 0$, $dc^l = 0$, obţinem:

$$(3.5) \qquad \frac{\partial T^\gamma}{\partial b^i}(b,y)\,db^i + \frac{\partial T^\gamma}{\partial y^\lambda}(b,y)\,dy^\lambda = 0$$

şi

$$(3.6) \qquad \frac{\partial \mu^l}{\partial b^i}(b,a)\,db^i + \frac{\partial \mu^l}{\partial a^j}(b,a)\,da^j = 0.$$

Matricea $\left(\frac{\partial T^\gamma}{\partial y^\lambda}\right)_{1\le\gamma,\lambda\le n}$ este nesingulară, deoarece ea este matricea iacobiană a aplicaţiei

$$y \to T(b,y) = by,$$

care este un difeomorfism, având ca inversă aplicaţia

$$y' \to b^{-1}y'.$$

Matricea $\left(\frac{\partial \mu^i}{\partial b^j}\right)_{1\le i,j\le r}$ este nesingulară, deoarece ea este matricea iacobiană a aplicaţiei

$$b \to \mu(b,a) = ba$$

care este un difeomorfism, având ca inversă aplicaţia

$$b' \to b'a^{-1}.$$

Fie $\widetilde{\left(\frac{\partial T^\lambda}{\partial y^\gamma}\right)}_{1\le\lambda,\gamma\le n}$ inversa matricei $\left(\frac{\partial T^\gamma}{\partial y^\lambda}\right)_{1\le\lambda,\gamma\le n}$, şi fie $\widetilde{\left(\frac{\partial \mu^i}{\partial b^l}\right)}_{1\le i,l\le r}$ inversa matricei $\left(\frac{\partial \mu^l}{\partial b^i}\right)_{1\le i,l\le r}$. Dacă înmulţim relaţiile (3.5) cu $\widetilde{\frac{\partial T^\lambda}{\partial y^\gamma}}$, iar relaţiile (3.6) cu $\widetilde{\frac{\partial \mu^i}{\partial b^l}}$ şi dacă sumăm, obţinem:

$$\begin{aligned}\widetilde{\frac{\partial T^\lambda}{\partial y^\gamma}}\cdot\frac{\partial T^\gamma}{\partial b^i}(b,y)\,db^i+dy^\lambda &= 0;\\ db^i+\widetilde{\frac{\partial\mu^i}{\partial b^l}}\cdot\frac{\partial\mu^l}{\partial a^j}(b,a)\,da^j &= 0.\end{aligned}$$

Introducem notaţiile:

$$\begin{aligned}&(3.7) \qquad & dy^\lambda &= F_i^\lambda(b,y)\,db^i;\\ &(3.8) \qquad & db^i &= G_j^i(b,a)\,da^j.\end{aligned}$$

Înlocuim (3.8) în (3.7) şi obţinem:

$$dy^\lambda = F_i^\lambda(b,y)\,G_j^i(b,a)\,da^j.$$

Deoarece $c = ba$, avem $b = ca^{-1}$, deci

$$(3.9) \qquad dy^\lambda = F_i^\lambda\left(ca^{-1},y\right)G_j^i\left(ca^{-1},a\right)da^j.$$

Alegem $c = a$ şi notăm

$$(3.10) \qquad \xi_i^\lambda(y) = F_i^\lambda(e,y)\,,\ \omega_j^i(a) = G_j^i(e,a)\,.$$

Ţinând seama de (3.10), din (3.9) obţinem:

$$dy^\lambda = \xi_i^\lambda(y)\,\omega_j^i(a)\,da^j.$$

Avem deci

$$(3.11) \qquad \frac{\partial y^\lambda}{\partial a^j} = \xi_i^\lambda(y)\,\omega_j^i(a)\,,$$

adică tocmai (3.2).

Dacă derivăm în raport cu a^l, din (3.11) rezultă:

$$\frac{\partial^2 y^\lambda}{\partial a^l \partial a^j} = \frac{\partial \xi_i^\lambda}{\partial y^\gamma}\frac{\partial y^\gamma}{\partial a^l}\omega_j^i + \xi_i^\lambda \frac{\partial \omega_j^i}{\partial a^l}.$$

Ţinând seama de (3.11), avem:

$$\text{(3.12)} \qquad \frac{\partial^2 y^\lambda}{\partial a^l \partial a^j} = \frac{\partial \xi_i^\lambda}{\partial y^\gamma}\xi_m^\gamma \omega_l^m \omega_j^i + \xi_i^\lambda \frac{\partial \omega_j^i}{\partial a^l}.$$

Deoarece avem

$$\frac{\partial^2 y^\lambda}{\partial a^l \partial a^j} = \frac{\partial^2 y^\lambda}{\partial a^j \partial a^l},$$

din (3.12) obţinem:

$$\frac{\partial \xi_i^\lambda}{\partial y^\gamma}\xi_m^\gamma \omega_l^m \omega_j^i + \xi_i^\lambda \frac{\partial \omega_j^i}{\partial a^l} = \frac{\partial \xi_i^\lambda}{\partial y^\gamma}\xi_m^\gamma \omega_j^m \omega_l^i + \xi_i^\lambda \frac{\partial \omega_l^i}{\partial a^j},$$

sau:

$$\text{(3.13)} \qquad \left(\frac{\partial \xi_m^\lambda}{\partial y^\gamma}\xi_i^\gamma - \frac{\partial \xi_i^\lambda}{\partial y^\gamma}\xi_m^\gamma\right)\omega_j^m \omega_l^i = \left(\frac{\partial \omega_l^i}{\partial a^j} - \frac{\partial \omega_j^i}{\partial a^l}\right)\xi_i^\lambda.$$

Considerăm acum acţiunea la stânga $\mu : G \times G \to G$ dată de legea de grup a lui G. Fie $u^1, ..., u^r$ coordonatele locale în G date de parametrizarea f. Aplicând demonstraţia de mai sus, obţinem

$$\frac{\partial u^h}{\partial a^j} = \eta_i^h(u)\,\omega_j^i(a),$$

unde $\eta_i^h(u) = \underset{2}{\widetilde{\mu}}{}_l^h(e,u)\,\underset{1}{\mu}{}_i^l(e,u)$, (a se vedea notaţiile introduse la (3.7) şi (3.8))

$$\omega_j^i(a) = \underset{1}{\widetilde{\mu}}{}_l^i(e,a)\,\underset{2}{\widetilde{\mu}}{}_j^l(e,a),$$

şi unde am folosit notaţiile $\underset{1}{\mu_j^l} = \frac{\partial\mu^l}{\partial a^j}$ (derivarea făcându-se după primele r componente), şi $\underset{2}{\mu_l^h} = \frac{\partial\mu^h}{\partial b^l}$ (derivarea făcându-se după ultimele r componente).

Deoarece matricele $\left(\underset{1}{\mu_l^i}\right)$ şi $\left(\underset{2}{\mu_j^l}\right)$ sunt inversabile, rezultă că şi $\left(\omega_j^i(a)\right)$ este inversabilă. Fie $\widetilde{\omega}$ inversa lui ω.

Înmulţim relaţiile (3.13) cu $\widetilde{\omega}_k^j\widetilde{\omega}_s^l$ şi sumând, obţinem:

$$\frac{\partial\xi_k^\lambda}{\partial y^\gamma}\xi_s^\gamma - \frac{\partial\xi_s^\lambda}{\partial y^\gamma}\xi_k^\gamma = \xi_i^\lambda\left(\frac{\partial\omega_l^i}{\partial a^j} - \frac{\partial\omega_j^i}{\partial a^l}\right)\widetilde{\omega}_k^j\widetilde{\omega}_s^l. \tag{3.14}$$

Notăm

$$c_{ks}^i = \left(\frac{\partial\omega_j^i}{\partial a^l} - \frac{\partial\omega_l^i}{\partial a^j}\right)\widetilde{\omega}_k^j\widetilde{\omega}_s^l. \tag{3.15}$$

Vom arăta că c_{ks}^i sunt constante. Repetând raţionamentul pentru acţiunea $\mu : G \times G \to G$, obţinem

$$\frac{\partial\eta_s^\lambda}{\partial u^\gamma}\eta_k^\gamma - \frac{\partial\eta_k^\lambda}{\partial u^\gamma}\eta_s^\gamma = c_{ks}^i\eta_i^\lambda, \tag{3.16}$$

unde $\eta(u)$ este inversa matricei $\omega(u)$. Prin urmare, matricea $\left(\eta_i^h(u)\right)_{1\leq h,i\leq r}$ este nesingulaă, deci η^h sunt liniar independente. Derivăm (3.16) în raport cu a^j.Membrul stâng din (3.16) nu depinde de a^j, deci obţinem:

$$0 = \eta_i^\lambda\frac{\partial c_{ks}^i}{\partial a^j}. \tag{3.17}$$

Deoarece η^λ sunt liniar independente, din (3.17) obţinem

$$\frac{\partial c_{ks}^i}{\partial a^j} = 0,$$

adică c_{ks}^i sunt constante. Acum relaţiile (3.14) devin tocmai (3.3).

Dacă înmulţim (3.15) cu $\omega_j^k \omega_l^s$ şi sumăm, obţinem:

$$\frac{\partial \omega_j^i}{\partial a^l} - \frac{\partial \omega_l^i}{\partial a^j} = c_{ks}^i \omega_j^k \omega_l^s,$$

adică tocmai **ecuaţiile lui Maurer-Cartan.**

3.2. Teorema II **(S. LIE).** *Dacă se introduc câmpurile ξ_i de vectori tangenţi la M, definite local prin*

$$\xi_i = \xi_i^\lambda \frac{\partial}{\partial y^\lambda},$$

şi formele Pfaff ω^i pe G, definite local prin

$$\omega^i = \omega_j^i da^j,$$

atunci avem:

$$[\xi_i, \xi_j] = c_{ij}^k \xi_k$$

şi

$$d\omega^i = -\frac{1}{2} c_{jk}^i \omega^j \wedge \omega^k.$$

Demonstraţie. Avem:

$$\begin{aligned}
[\xi_i, \xi_j] &= \xi_i(\xi_j) - \xi_j(\xi_i) = \xi_i^\lambda \frac{\partial}{\partial y^\lambda}\left(\xi_j^\gamma \frac{\partial}{\partial y^\gamma}\right) - \xi_j^\gamma \frac{\partial}{\partial y^\gamma}\left(\xi_i^\lambda \frac{\partial}{\partial y^\lambda}\right) = \\
&= \xi_i^\lambda \frac{\partial \xi_j^\gamma}{\partial y^\lambda}\frac{\partial}{\partial y^\gamma} + \xi_i^\lambda \xi_j^\gamma \frac{\partial^2}{\partial y^\lambda \partial y^\gamma} - \xi_j^\gamma \frac{\partial \xi_i^\lambda}{\partial y^\gamma}\frac{\partial}{\partial y^\lambda} - \xi_j^\gamma \xi_i^\lambda \frac{\partial^2}{\partial y^\gamma \partial y^\lambda} = \\
&= \left(\xi_i^\gamma \frac{\partial \xi_j^\lambda}{\partial y^\gamma} - \xi_j^\gamma \frac{\partial \xi_i^\lambda}{\partial y^\gamma}\right)\frac{\partial}{\partial y^\lambda} = \left(c_{ij}^k \xi_k^\lambda\right)\frac{\partial}{\partial y^\lambda} = \\
&= c_{ij}^k \xi_k.
\end{aligned}$$

Diferenţiind relaţiile $\omega^i = \omega^i_j da^j$, obţinem:

$$\begin{aligned} d\omega^i &= \frac{\partial \omega^i_j}{\partial a^k} da^k \wedge da^j = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \omega^i_j}{\partial a^k} - \frac{\partial \omega^i_k}{\partial a^j}\right) da^k \wedge da^j = \\ &= -\frac{1}{2} c^i_{hs}\omega^h_k \omega^s_j da^k \wedge da^j = \\ &= -\frac{1}{2} c^i_{hs}\omega^h \wedge \omega^s. \end{aligned}$$

3.3. Teorema III (**S. LIE**). *Constantele de structură ale grupului sunt antisimetrice*

$$c^i_{jk} = -c^i_{kj},$$

şi satisfac relaţiile pătratice ale lui Lie:

$$c^i_{sj}c^s_{kh} + c^i_{sk}c^s_{hj} + c^i_{sh}c^s_{jk} = 0.$$

Demonstraţie. Ştim din teorema II că $[\xi_k, \xi_h] = c^s_{kh}\xi_s$. Paranteza Poisson fiind antisimetrică $[\xi_h, \xi_k] = -[\xi_k, \xi_h]$, rezultă $c^s_{hk}\xi_s = -c^s_{kh}\xi_s$. Deoarece $\xi_1, ..., \xi_r$ sunt liniar independenţi, obţinem:

$$c^s_{hk} = -c^s_{kh}.$$

Pentru stabilirea relaţiilor pătratice ale lui Lie vom folosi identitatea lui Jacobi:

$$[[\xi_i, \xi_j], \xi_k] + [[\xi_j, \xi_k], \xi_i] + [[\xi_k, \xi_i], \xi_j] = 0.$$

De aici rezultă:

$$c^s_{ij}[\xi_s, \xi_k] + c^s_{jk}[\xi_s, \xi_i] + c^s_{ki}[\xi_s, \xi_j] = 0,$$

sau

$$\left(c^s_{ij}c^h_{sk} + c^s_{jk}c^h_{si} + c^s_{ki}c^h_{sj}\right)\xi_h = 0.$$

Deoarece $\xi_1, ..., \xi_r$ sunt liniar independenţi, obţinem relaţiile pătratice ale lui Lie.

CAPITOLUL VIII

CONEXIUNI LINIARE ŞI PSEUDOCONEXIUNI INVARIANTE PE UN GRUP LIE.

§ 1. CONEXIUNI LINIARE STÂNG INVARIANTE PE UN GRUP LIE. CONEXIUNILE CARTAN-SCHOUTEN.

1.1. DEFINIŢIE. *Fie G un grup Lie şi fie ∇ o conexiune liniară pe G. Spunem că ∇ este* **conexiune stâng invariantă** *pe G, dacă:*

$$(1.1)\qquad (L_a)_*(\nabla_X Y) = \nabla_{(L_a)_*(X)}(L_a)_*(Y), \ (\forall)\, X, Y \in \mathcal{X}(G), \ a \in G.$$

Observaţie. Analog se definesc **conexiunile liniare drept invariante.** O **conexiune liniară** pe grupul Lie G care este simultan stâng şi drept invariantă se numeşte **bi-invariantă**.

1.2. PROPOZIŢIE. *Fie G un grup Lie şi fie $\{E_1, ..., E_n\}$ o bază în algebra Lie $L(G)$.*

Considerăm o conexiune liniară ∇ pe varietatea G. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(i) *∇ este conexiune stâng invariantă pe G,*

(ii) $\nabla_X Y \in L(G)$, $(\forall)\, X, Y \in L(G)$,

(iii) $\nabla_{E_i} E_j \in L(G)$, $(\forall)\, i, j \in \{1, ..., n\}$.

Demonstraţie. (i) $\Rightarrow$ (ii). Deoarece ∇ este stâng invariantă, avem (1.1). În particular, pentru $X, Y \in L(G)$, din (1.1) obţinem

$$(L_a)_*(\nabla_X Y) = \nabla_X Y, \ (\forall)\, a \in G,$$

ceea ce ne arată că $\nabla_X Y \in L(G)$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Deoarece $\nabla_X Y \in L(G)$, oricare ar fi $X, Y \in L(G)$, rezultă $\nabla_{E_i} E_j \in L(G)$, oricare ar fi $i, j \in \{1, ..., n\}$.

(iii) $\Rightarrow$ (ii). Fie $X, Y \in L(G)$, deci $X = a^i E_i$, $Y = b^i E_i$, unde $a^1, ..., a^n$, $b^1, ..., b^n$ sunt constante reale. Din $\nabla_{E_i} E_j \in L(G)$, obţinem $a^i b^j \nabla_{E_i} E_j \in L(G)$, adică $\nabla_X Y \in L(G)$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Vom folosi formulele:

$$(L_a)_*(fX) = (f \circ L_{a^{-1}})(L_a)_*(X)$$

şi

$$(L_a)_*(X)(f') = X(f' \circ L_a) \circ L_{a^{-1}},$$

unde $f, f' \in \mathcal{F}(G)$, $X \in \mathcal{X}(G)$, $a \in G$.

Fie $X, Y \in \mathcal{X}(G)$. Avem $X = X^i E_i$, $Y = Y^j E_j$, unde $X^1, ..., X^n, Y^1, ..., Y^n \in \mathcal{F}(G)$. Rezultă:

$$\begin{aligned}
&\nabla_{(L_a)_*(X)}(L_a)_*(Y) = \nabla_{(L_a)_*(X^i E_i)}(L_a)_*(Y^j E_j) = \\
&\quad = \nabla_{(X^i \circ L_{a^{-1}})E_i}(Y^j \circ L_{a^{-1}}) E_j = \\
&\quad = (X^i \circ L_{a^{-1}})(Y^j \circ L_{a^{-1}}) \nabla_{E_i} E_j + (X^i \circ L_{a^{-1}}) E_i (Y^j \circ L_{a^{-1}}) E_j = \\
&\quad = (X^i Y^j \circ L_{a^{-1}}) \nabla_{E_i} E_j + (X^i \circ L_{a^{-1}})((L_a)_*(E_i))(Y^j \circ L_{a^{-1}}) E_j = \\
&\quad = (X^i Y^j \circ L_{a^{-1}}) \nabla_{E_i} E_j + (X^i \circ L_{a^{-1}})(E_i(Y^j \circ L_{a^{-1}}) \circ L_{a^{-1}}) E_j = \\
&\quad = (X^i Y^j \circ L_{a^{-1}}) \nabla_{E_i} E_j + (X^i \circ L_{a^{-1}})(E_i(Y^j) \circ L_{a^{-1}}) E_j.
\end{aligned}$$

Pe de altă parte, avem:

$$\begin{aligned}
(L_a)_*(\nabla_X Y) &= (L_a)_*\left(\nabla_{X^i E_i} Y^j E_j\right) = \\
&= (L_a)_*\left(X^i Y^j \nabla_{E_i} E_j\right) + (L_a)_*\left(X\left(Y^j\right) E_j\right) = \\
&= \left(X^i Y^j \circ L_{a^{-1}}\right) \nabla_{E_i} E_j + \left(X\left(Y^j\right) \circ L_{a^{-1}}\right) E_j = \\
&= \left(X^i Y^j \circ L_{a^{-1}}\right) \nabla_{E_i} E_j + \left(X^i \circ L_{a^{-1}}\right)\left(E_i\left(Y^j\right) \circ L_{a^{-1}}\right) E_j.
\end{aligned}$$

Prin urmare, avem

$$\nabla_{(L_a)_*(X)}(L_a)_*(Y) = (L_a)_*(\nabla_X Y), \quad (\forall)\, X, Y \in \mathcal{X}(G), \quad (\forall)\, a \in G,$$

adică ∇ este o conexiune stâng invariantă pe grupul Lie G.

1.3. <u>PROPOZIŢIE</u>. *Fie ∇ o conexiune liniară pe un grup Lie G. Definim conexiunile liniare*

$$ {}^t\nabla,\ {}^s\nabla : \mathcal{X}(G) \times \mathcal{X}(G) \to \mathcal{X}(G) $$

prin:

$$ {}^t\nabla_X Y = \nabla_Y X + [X,Y],\ {}^s\nabla = \frac{1}{2}\left(\nabla + {}^t\nabla\right),\ (\forall)\, X,Y \in \mathcal{X}(G). $$

(${}^t\nabla$ este transpusa conexiunii ∇, iar ${}^s\nabla$ este conexiunea simetrică asociată lui ∇). Dacă ∇ este stâng invariantă, atunci şi conexiunile liniare ${}^t\nabla$ şi ${}^s\nabla$ sunt stâng invariante.

Demonstraţie. Este evident că ${}^t\nabla$ şi ${}^s\nabla$ sunt conexiuni liniare pe G. Deoarece ∇ este stâng invariantă, avem $(\forall)\, X,Y \in \mathcal{X}(G)$:

$$ \begin{aligned} {}^t\nabla_{(L_a)_*(X)}(L_a)_*(Y) &= \nabla_{(L_a)_*(Y)}(L_a)_*(X) + [(L_a)_*(X),(L_a)_*(Y)] = \\ &= (L_a)_*(\nabla_Y X + [X,Y]) = (L_a)_*\left({}^t\nabla_X Y\right), \end{aligned} $$

adică ${}^t\nabla$ este stâng invariantă. Analog demonstrăm că conexiunea liniară ${}^s\nabla$ este stâng invariantă.

1.4. PROPOZIŢIE. *Fie G un grup Lie, $L(G)$ algebra sa Lie. Considerăm o bază $\{E_1,...,E_n\}$ a spaţiului vectorial $L(G)$. Atunci:*

(i) *există şi sunt unice conexiunile liniare:*

$$ \overset{-}{\nabla}, \overset{+}{\nabla}, \overset{\circ}{\nabla} : \mathcal{X}(G) \times \mathcal{X}(G) \to \mathcal{X}(G), $$

care pe $L(G)$ sunt definite prin:

(1.2) $\quad \overset{-}{\nabla}_{E_i} E_j = 0,\ (\forall)\, i,j \in \{1,...,n\}.$

(1.2′) $\quad \overset{+}{\nabla}_{E_i} E_j = [E_i,E_j],\ (\forall)\, i,j \in \{1,...,n\}.$

(1.2″) $\quad \overset{\circ}{\nabla}_{E_i} E_j = \frac{1}{2}[E_i,E_j],\ (\forall)\, i,j \in \{1,...,n\}.$

(ii) *conexiunile liniare $\overset{-}{\nabla}, \overset{+}{\nabla}, \overset{\circ}{\nabla}$ sunt stâng invariante.*

(iii) *conexiunile liniare* $\overset{-}{\nabla}, \overset{+}{\nabla}$ *şi* $\overset{\circ}{\nabla}$ *admit aceleaşi curbe autoparalele.*

(iv) *avem formulele:*

$$\overset{+}{T}(E_i, E_j) = -\overset{-}{T}(E_i, E_j) = [E_i, E_j], \ \overset{\circ}{T} = 0,$$

unde $\overset{-}{T}, \overset{+}{T}$ *şi* $\overset{\circ}{T}$ *sunt respectiv câmpurile tensoriale de torsiune ale conexiunilor* $\overset{-}{\nabla}, \overset{+}{\nabla}$ *şi* $\overset{\circ}{\nabla}$.

Demonstraţie.

i) Presupunem că $\overset{-}{\nabla}$ este o conexiune liniară pe G. Fie $X = X^i E_i$, $Y = Y^j E_j$ două câmpuri din $\mathcal{X}(G)$, deci $X^i, Y^j \in \mathcal{F}(G)$, $i, j = 1, ..., n$. Avem:

$$\overset{-}{\nabla}_X Y = \overset{-}{\nabla}_{X^i E_i} Y^j E_j = X^i Y^j \overset{-}{\nabla}_{E_i} E_j + X\left(Y^j\right) E_j$$

şi, folosind (1.2), obţinem formula:

$$\overset{-}{\nabla}_X Y = X\left(Y^j\right) E_j, \ \ (\forall)\, X, Y = Y^i E_i \in \mathcal{X}(G). \tag{1.3}$$

Se verifică fără dificultate că aplicaţia

$$\overset{-}{\nabla} : \mathcal{X}(G) \times \mathcal{X}(G) \to \mathcal{X}(G),$$

definită prin formula (1.3), este o conexiune liniară pe G.

Unicitatea lui $\overset{-}{\nabla}$ este evidentă.

Presupunem acum că $\overset{+}{\nabla}$ este o conexiune liniară pe G. Pentru orice câmpuri $X = X^i E_i$, $Y = Y^i E_i \in \mathcal{X}(G)$, avem:

$$\overset{+}{\nabla}_X Y = \overset{+}{\nabla}_{X^i E_i} Y^j E_j = X^i Y^j \overset{+}{\nabla}_{E_i} E_j + X\left(Y^j\right) E_j.$$

Ţinând seama de (1.2′), obţinem formula:

$$\overset{+}{\nabla}_X Y = X^i Y^j [E_i, E_j] + X\left(Y^j\right) E_j. \tag{1.4}$$

Se verifică fără dificultate că aplicaţia

$$\overset{+}{\nabla} : \mathcal{X}(G) \times \mathcal{X}(G) \to \mathcal{X}(G),$$

definită prin formula (1.4), este o conexiune liniară pe G.

Unicitatea lui $\overset{+}{\nabla}$ este evidentă.

Presupunem acum că $\overset{\circ}{\nabla}$ este o conexiune liniară pe G. Pentru orice câmpuri $X = X^i E_i$, $Y = Y^i E_i \in \mathcal{X}(G)$, avem:

$$\overset{\circ}{\nabla}_X Y = X^i Y^j \overset{\circ}{\nabla}_{E_i} E_j + X\left(Y^j\right) E_j.$$

Ţinând seama de (1.2″), obţinem formula:

$$\overset{\circ}{\nabla}_X Y = \frac{1}{2} X^i Y^j \left[E_i, E_j\right] + X\left(Y^j\right) E_j. \tag{1.5}$$

Se verifică uşor că aplicaţia

$$\overset{\circ}{\nabla} : \mathcal{X}(G) \times \mathcal{X}(G) \to \mathcal{X}(G),$$

definită prin formula (1.5), este o conexiune liniară pe G.

Unicitatea lui $\overset{\circ}{\nabla}$ este evidentă.

ii) Deoarece $E_i \in L(G)$, rezultă $[E_i, E_j] \in L(G)$ şi deci

$$\overset{-}{\nabla}_{E_i} E_j \in L(G), \ \overset{+}{\nabla}_{E_i} E_j \in L(G), \ \overset{\circ}{\nabla}_{E_i} E_j \in L(G).$$

Folosind propoziţia 1.2, obţinem că conexiunile liniare $\overset{-}{\nabla}, \overset{+}{\nabla}$, şi $\overset{\circ}{\nabla}$ sunt stâng invariante.

iii) Fie ${}^s\overset{-}{\nabla}$, ${}^s\overset{+}{\nabla}$, ${}^s\overset{\circ}{\nabla}$ conexiunile simetrice asociate lui $\overset{-}{\nabla}$, $\overset{+}{\nabla}$ şi $\overset{\circ}{\nabla}$.

Pentru orice $X = X^i E_i$, $Y = Y^i E_i \in \mathcal{X}(G)$, avem:

$${}^s\overset{-}{\nabla}_X Y = {}^s\overset{+}{\nabla}_X Y = {}^s\overset{\circ}{\nabla}_X Y = \frac{1}{2}\left\{X\left(Y^i\right) E_i + Y\left(X^i\right) E_i + [X, Y]\right\}.$$

Folosind observaţia 1.27 ii) cap. I, rezultă că conexiunile liniare $\overset{-}{\nabla}, \overset{+}{\nabla}$, şi $\overset{\circ}{\nabla}$ admit aceleaşi curbe autoparalele.

iv) Se folosesc formulele de la 1.24 (cap. I).

Observaţie. i) Conexiunile $\overset{-}{\nabla}, \overset{+}{\nabla}$, şi $\overset{\circ}{\nabla}$ au fost considerate de E. Cartan şi J. Schouten, de aceea sunt numite **conexiunile Cartan-Schouten.**

ii) Fie $\overset{-}{R}, \overset{+}{R}$ şi $\overset{\circ}{R}$ câmpurile tensoriale de curbură ale conexiunilor $\overset{-}{\nabla}, \overset{+}{\nabla}, \overset{\circ}{\nabla}$. Atunci obţinem:

$$\overset{-}{R} = 0 = \overset{+}{R}, \ \overset{\circ}{R}(E_i, E_j) E_k = \frac{1}{4}[[E_i, E_j], E_k].$$

1.5. PROPOZIŢIE. *Fie ∇ şi $\overset{-}{\nabla}$ două conexiuni liniare simetrice pe un grup Lie G.*

Presupunem că ∇ şi $\overset{-}{\nabla}$ admit aceleaşi curbe autoparalele, adică există o $1-$formă $\omega \in \Lambda^1(G)$, astfel încât să avem formula Weyl:

$$\overset{-}{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \omega(X) Y + \omega(Y) X, \ (\forall) X, Y \in \mathcal{X}(G). \tag{1.6}$$

i) *Dacă ∇ şi ω sunt stâng invariante, atunci şi $\overset{-}{\nabla}$ este stâng invariantă.*

ii) *Dacă ∇ şi $\overset{-}{\nabla}$ sunt stâng invariante, atunci şi ω este stâng invariantă.*

Demonstraţie.

i) Se ştie că $1-$forma ω este stâng invariantă dacă $\omega(X)$ =const., $(\forall) X \in L(G)$. Fie $\{E_1, ..., E_n\}$ o bază în algebra Lie $L(G)$. Deoarece ∇ şi ω sunt stâng invariante, avem:

$$\nabla_{E_i} E_j \in L(G), \ \omega(E_i) = \text{const.}, \ (\forall) i, j \in \{1, ..., n\}. \tag{1.7}$$

Folosind relaţia (1.6), rezultă:

$$\overset{-}{\nabla}_{E_i} E_j = \nabla_{E_i} E_j + \omega(E_i) E_j + \omega(E_j) E_i. \tag{1.8}$$

Din (1.7) şi (1.8) obţinem $\bar{\nabla}_{E_i} E_j \in L(G)$, adică conexiunea $\bar{\nabla}$ este stâng invariantă.

ii) Deoarece ∇ şi $\bar{\nabla}$ sunt conexiuni stâng invariante, avem:

$$(1.9) \qquad (L_a)_* (\nabla_X Y) = \nabla_X Y, \ (L_a)_* \left(\bar{\nabla}_X Y\right) = \bar{\nabla}_X Y, \ (\forall) X, Y \in L(G).$$

Din (1.6) şi (1.9) obţinem:

$$(1.10) \ \bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + (L_a)_* (\omega(X) Y + \omega(Y) X), (\forall) X, Y \in L(G), (\forall) a \in G.$$

Din (1.10) şi (1.6) rezultă, pentru orice $a \in G$, relaţia:

$$(1.11) \qquad (L_a)_* (\omega(X) Y + \omega(Y) X) = \omega(X) Y + \omega(Y) X, \ (\forall) X, Y \in L(G).$$

Relaţia (1.11) ne arată că:

$$(1.12) \qquad \omega(X) Y + \omega(Y) X \in L(G), \ (\forall) X, Y \in L(G).$$

În particular, pentru $Y = X$, din (1.12) obţinem

$$\omega(X) X \in L(G), \ (\forall) X \in L(G),$$

ceea ce ne arată că $\omega(X)$ =const., $(\forall) X \in L(G)$, adică 1−forma ω este stâng invariantă.

1.6. PROPOZIŢIE. *Fiecărei conexiuni liniare stâng invariante pe un grup Lie G îi corespunde o unică aplicaţie $\mathbb{R}-$biliniară $L(G) \times L(G) \to L(G)$ şi reciproc, fiecărei aplicaţii $\mathbb{R}-$biliniare $L(G) \times L(G) \to L(G)$ îi corespunde o unică conexiune liniară stâng invariantă pe grupul Lie G.*

<u>Demonstraţie</u>. Fie ∇ o conexiune liniară stâng invariantă pe G. Pentru orice $X, Y \in L(G)$, câmpul vectorial

$$b(X,Y) = \nabla_X Y$$

este stâng invariant şi este evident că aplicaţia

$$b : (X,Y) \in L(G) \times L(G) \to b(X,Y) = \nabla_X Y \in L(G)$$

este $\mathbb{R}-$biliniară.

Reciproc, fie $b : L(G) \times L(G) \to L(G)$ o aplicaţie $\mathbb{R}-$biliniară şi să arătăm că există o unică conexiune liniară stâng invariantă ∇ pe G, cu

$$\nabla_X Y = b(X,Y), \ \ (\forall)\, X, Y \in L(G).$$

Alegem o bază $\{E_1, ..., E_n\}$ în $L(G)$. Notăm

$$b(E_i, E_j) = b_{ij}^k E_k.$$

Presupunem că conexiunea liniară ∇ există. Vom scrie

$$\nabla_{E_i} E_j = b_{ij}^k E_k.$$

Să căutăm o formulă pentru ∇. Fie $X = X^i E_i, Y = Y^i E_i \in \mathcal{X}(G)$, unde $X^i, Y^j \in \mathcal{F}(G)$, $i, j \in \{1, ..., n\}$. Avem:

$$\nabla_X Y = \nabla_{X^i E_i} Y^j E_j = X^i Y^j \nabla_{E_i} E_j + X\left(Y^j\right) E_j = X^i Y^j b_{ij}^k E_k + X\left(Y^j\right) E_j.$$

Se constată cu uşurinţă că aplicaţia

$$\nabla : \mathcal{X}(G) \times \mathcal{X}(G) \to \mathcal{X}(G)$$

definită prin

$$\nabla_X Y = X^i Y^j b_{ij}^k E_k + X\left(Y^j\right) E_j, \;\; (\forall)\, X = X^i E_i, Y = Y^i E_i \in \mathcal{X}(G)$$

este o conexiune liniară pe varietatea G. Unicitatea lui ∇ este evidentă. Prin urmare aplicaţiei $\mathbb{R}-$biliniare b îi corespunde o unică conexiune liniară stâng invariantă ∇ pe grupul Lie G.

1.7. PROPOZIŢIE. *Fie $\{E_1, ..., E_n\}$ o bază în algebra Lie $L(G)$ a unui grup Lie G, şi fie*

$$b : L(G) \times L(G) \to L(G)$$

o aplicaţie $\mathbb{R}-$biliniară. Să se arate că:

i) *există şi sunt unice conexiunile liniare*

$$\overset{-}{\nabla}, \overset{+}{\nabla}, \overset{\circ}{\nabla} : \mathcal{X}(G) \times \mathcal{X}(G) \to \mathcal{X}(G),$$

care pe $L(G)$ sunt definite prin:

$$\overset{-}{\nabla}_{E_i} E_j = 0, \;\; \overset{+}{\nabla}_{E_i} E_j = b(E_i, E_j), \;\; \overset{\circ}{\nabla}_{E_i} E_j = \frac{1}{2} b(E_i, E_j),$$

pentru orice indici $i, j \in \{1, ..., n\}$.

ii) *dacă aplicaţia $\mathbb{R}-$biliniară b este antisimetrică, atunci conexiunile liniare $\overset{-}{\nabla}, \overset{+}{\nabla}, \overset{\circ}{\nabla}$ admit aceleaşi curbe autoparalele.*

iii) *conexiunile $\overset{-}{\nabla}, \overset{+}{\nabla}$ şi $\overset{\circ}{\nabla}$ sunt stâng invariante.*

iv) *curburile conexiunilor $\overset{+}{\nabla}$ şi $\overset{\circ}{\nabla}$* sunt, în general, distincte.

Demonstraţie.

i) Se procedează ca la propoziţia 1.4 i).

Pentru $X = X^i E_i$, $Y = Y^i E_i \in \mathcal{X}(G)$, se obţin formulele următoare:

$$\begin{aligned} \overset{-}{\nabla}_X Y &= X\left(Y^i\right) E_i; \\ \overset{+}{\nabla}_X Y &= X^i Y^j b(E_i, E_j) + X\left(Y^j\right) E_j; \\ \overset{\circ}{\nabla}_X Y &= \frac{1}{2} X^i Y^j b(E_i, E_j) + X\left(Y^j\right) E_j. \end{aligned}$$

ii) Fie ${}^s\overset{-}{\nabla}$, ${}^s\overset{+}{\nabla}$ şi ${}^s\overset{\circ}{\nabla}$ conexiunile simetrice asociate respectiv lui $\overset{-}{\nabla}, \overset{+}{\nabla}$ şi $\overset{\circ}{\nabla}$. Pentru orice $X = X^i E_i$, $Y = Y^i E_i \in \mathcal{X}(G)$, avem:

$$
\begin{aligned}
&(1.13)\quad {}^s\overset{-}{\nabla}_X Y = \frac{1}{2}\left\{X\left(Y^j\right)E_j + Y\left(X^i\right)E_i + [X,Y]\right\};\\
&(1.14)\quad {}^s\overset{+}{\nabla}_X Y = \frac{1}{2}\left\{\left(b^k_{ij} + b^k_{ji}\right)X^iY^jE_k + X\left(Y^i\right)E_i + Y\left(X^i\right)E_i + [X,Y]\right\};\\
&(1.15)\quad {}^s\overset{\circ}{\nabla}_X Y = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\left(b^k_{ij} + b^k_{ji}\right)X^iY^jE_k + X\left(Y^i\right)E_i + Y\left(X^i\right)E_i + [X,Y]\right.
\end{aligned}
$$

Folosind formulele (1.13), (1.14) şi (1.15), obţinem că dacă aplicaţia $\mathbb{R}$−biliniară b este antisimetrică, atunci

$$
{}^s\overset{-}{\nabla} = {}^s\overset{+}{\nabla} = {}^s\overset{\circ}{\nabla},
$$

ceea ce ne arată că conexiunile $\overset{-}{\nabla}, \overset{+}{\nabla}$ şi $\overset{\circ}{\nabla}$ admit aceleaşi curbe autoparalele.

iii) Se foloseşte propoziţia 1.6.

iv) Avem:

$$
\begin{aligned}
\overset{+}{R}(E_i,E_j)E_k &= \overset{+}{\nabla}_{E_i} b^r_{jk}E_r - \overset{+}{\nabla}_{E_j} b^r_{ik}E_r - \overset{+}{\nabla}_{c^r_{ij}E_r}E_k =\\
&= \left(b^r_{jk}b^s_{ir} - b^r_{ik}b^s_{jr} - c^r_{ij}b^s_{rk}\right)E_s,\\
\overset{\circ}{R}(E_i,E_j)E_k &= \frac{1}{2}\left(\overset{\circ}{\nabla}_{E_i} b^r_{jk}E_r - \overset{\circ}{\nabla}_{E_j} b^r_{ik}E_r\right) - \overset{\circ}{\nabla}_{c^r_{ij}E_r}E_k =\\
&= \frac{1}{4}\left(b^r_{jk}b^s_{ir} - b^r_{ik}b^s_{jr} - 2c^r_{ij}b^s_{rk}\right)E_s,
\end{aligned}
$$

unde c^i_{jk} sunt constantele de structură ale algebrei Lie $L(G)$ relative la baza considerată. Dacă notăm

$$
\begin{aligned}
\overset{+}{R}(E_i,E_j)E_k &= \overset{+}{R}{}^s_{kij}E_s,\\
\overset{\circ}{R}(E_i,E_j)E_k &= \overset{\circ}{R}{}^s_{kij}E_s,
\end{aligned}
$$

atunci avem:

$$(1.16)\ \overset{+}{R}{}^{s}_{kij} = b^{r}_{jk}b^{s}_{ir} - b^{r}_{ik}b^{s}_{jr} - c^{r}_{ij}b^{s}_{rk},$$
$$(1.17)\ \overset{\circ}{R}{}^{s}_{kij} = \frac{1}{4}\left(b^{r}_{jk}b^{s}_{ir} - b^{r}_{ik}b^{s}_{jr} - 2c^{r}_{ij}b^{s}_{rk}\right).$$

Din (1.16) şi (1.17) obţinem iv).

1.8. OBSERVAŢIE. i) Fie $X \in T_eG$. Ştim că există un unic câmp $\widetilde{X} \in L(G)$, astfel încât $\widetilde{X}(e) = X$. Deoarece $\widetilde{X}(a) = (L_a)_*(X)$, $(\forall)\, a \in G$, rezultă $\widetilde{X}(a)(f) = (L_a)_*(X)(f)$, $(\forall)\, f \in \mathcal{F}(G)$, adică

$$\widetilde{X}(f)(a) = X(f \circ L_a), \quad (\forall)\, f \in \mathcal{F}(G), \quad (\forall)\, a \in G.$$

Fie $\gamma : \mathbb{R} \to G$ o curbă analitică, astfel încât:

$$\gamma(0) = e, \ \dot{\gamma}(0) = X.$$

Din egalitatea:

$$X = \gamma_*\left(\frac{d}{dt}\,|_{t=0}\right),$$

rezultă pentru orice $a \in G$, şi orice $f \in \mathcal{F}(G)$:

$$\begin{aligned} X(f \circ L_a) &= (L_a)_*(X)(f) = (L_a \circ \gamma)_*\left(\frac{d}{dt}\,|_{t=0}\right)(f) = \\ &= \frac{d}{dt}\,|_{t=0}\,(f(L_a \circ \gamma(t))) = \left\{\frac{d}{dt}f(a\gamma(t))\right\}_{t=0}. \end{aligned}$$

Am obţinut deci egalitatea:

$$\widetilde{X}(f)(a) = \left\{\frac{d}{dt}f(a\gamma(t))\right\}_{t=0}, \quad (\forall)\, a \in G, \quad (\forall)\, f \in \mathcal{F}(G).$$

ii) Fie $X, Y \in T_eG$ şi fie $\widetilde{X}, \widetilde{Y} \in L(G)$, cu $\widetilde{X}(e) = X$, $\widetilde{Y}(e) = Y$. Atunci $\left[\widetilde{X}, \widetilde{Y}\right] \in L(G)$.

Vectorul $\left[\widetilde{X},\widetilde{Y}\right](e)$ îl vom nota cu $[X,Y]$. Este clar că spaţiul vectorial T_eG cu operaţia $(X,Y)\to[X,Y]$ este o algebră Lie reală.

1.9. PROPOZIŢIE. *Fie G un grup Lie. Există o corespondenţă bijectivă între mulţimile:*

$$\{\nabla:\mathcal{X}(G)\times\mathcal{X}(G)\to\mathcal{X}(G)\mid \nabla \text{ este conexiune stâng invariantă pe } G\},$$
$$\{b:T_eG\times T_eG\to T_eG\mid b \text{ este } \mathbb{R}-\text{biliniară}\},$$

dată de

$$b(X,Y)=\left(\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}\right)(e),\ \ (\forall)\,X,Y\in T_eG.$$

Fie $X\in T_eG$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(i) $b(X,X)=0$,

(ii) *curba autoparalelă $t\to\gamma_X(t)$ este un homomorfism analitic al lui $\mathbb{R}$ în G, unde γ_X este curba $\nabla-$autoparalelă ce trece prin e şi este tangentă vectorului X.*

Demonstraţie. Vom urma aceeaşi cale ca la demonstraţia propoziţiei 1.6.

Dându-se o aplicaţie $\mathbb{R}-$biliniară

$$b:T_eG\times T_eG\to T_eG$$

definim ∇ prin

$$\nabla_{\widetilde{E_i}}\widetilde{E_j}=b\widetilde{(E_i,E_j)},\ \ (\forall)\,i,j\in\{1,...,n\},\tag{1.18}$$

unde $\{E_1,...,E_n\}$ este o bază în T_eG, iar $\widetilde{E_i}\in L(G)$, $\widetilde{E_i}(e)=E_i$, $(\forall)\,i\in\{1,...,n\}$. Fie $X,Y\in T_eG$ şi fie $\widetilde{X}=X^i\widetilde{E_i}$, $\widetilde{Y}=Y^i\widetilde{E_i}$, unde $X^i,Y^j\in\mathcal{F}(G)$. Dacă notăm $b(E_i,E_j)=b_{ij}^kE_k$, atunci obţinem formula:

$$\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}=X^iY^jb_{ij}^k\widetilde{E_k}+\widetilde{X}\left(Y^i\right)\widetilde{E_i},\ \ (\forall)\,\widetilde{X},\widetilde{Y}\in\mathcal{X}(G).\tag{1.19}$$

Se constată uşor că ∇, definită prin formula (1.19), este o conexiune liniară stâng invariantă pe G. Unicitatea lui ∇ este evidentă.

Reciproc, fiind dată o conexiune liniară stâng invariantă ∇ pe G, definim aplicaţia

$$b : T_eG \times T_eG \to T_eG$$

prin formula

$$b(X,Y) = \left(\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}\right)(e).$$

Este evident că b este $\mathbb{R}-$biliniară.

Fie $X \in T_eG$ şi fie $\widetilde{X} \in L(G)$, cu $\widetilde{X}(e) = X$. Local, ştim că există traiectorii ale câmpului $\widetilde{X}$, adică există $\varepsilon > 0$, şi

$$\Gamma : [0,\varepsilon] \to G,$$

cu

$$(1.20) \qquad \Gamma(0) = e,\ \overset{\bullet}{\Gamma}(s) = \widetilde{X}_{\Gamma(s)},\ \ (\forall)\, s \in [0,\varepsilon].$$

Prin inducţie, definim $\Gamma(t)$ pentru $t \geq 0$ prin formula

$$(1.21) \qquad \Gamma(t) = \Gamma(n\varepsilon)\,\Gamma(t - n\varepsilon),\ \text{dacă } t \in [n\varepsilon, n\varepsilon + \varepsilon],\ n \in \mathbb{N}.$$

Pentru $t \in [n\varepsilon, n\varepsilon + \varepsilon]$ avem

$$(1.21') \qquad L_{(\Gamma(n\varepsilon))^{-1}} \circ \Gamma(t) = \Gamma \circ L_{-n\varepsilon}(t),$$

unde $L_{(\Gamma(n\varepsilon))^{-1}}$ (resp. $L_{-n\varepsilon}$) este translaţia stângă a grupului Lie G (resp. $\mathbb{R}$) definită de elementul $(\Gamma(n\varepsilon))^{-1} \in G$ (resp. $-n\varepsilon \in \mathbb{R}$). Din $(1.21')$ obţinem

$$(1.21'') \qquad \Gamma(t) = L_{\Gamma(n\varepsilon)} \circ \Gamma \circ L_{-n\varepsilon}(t).$$

Ştim că curba analitică Γ verifică condiţiile:

$$(1.22) \qquad \Gamma(0)=e,\ \overset{\bullet}{\Gamma}(s)=\widetilde{X}_{\Gamma(s)},\ \ (\forall)\, s\in[0,\varepsilon].$$

Deoarece $t\in[n\varepsilon, n\varepsilon+\varepsilon]$, rezultă $t-n\varepsilon\in[0,\varepsilon]$ şi, folosind (1.22), obţinem:

$$(1.23) \qquad \overset{\bullet}{\Gamma}(t-n\varepsilon)=\widetilde{X}_{\Gamma(t-n\varepsilon)}.$$

Folosind propoziţia 4.10 i), cap. I, avem:

$$(1.24) \qquad (L_{-n\varepsilon})_*\left(\frac{d}{dt}\,|_t\right)=\frac{d}{dt}\,|_{t-n\varepsilon}\,.$$

Ţinând seama de relaţiile $(1.21'')$, (1.23) şi (1.24), rezultă:

$$\begin{aligned}
\overset{\bullet}{\Gamma}(t) &= \Gamma_*\left(\frac{d}{dt}\,|_t\right)=\left(L_{\Gamma(n\varepsilon)}\right)_*\circ\Gamma_*\circ(L_{-n\varepsilon})_*\left(\frac{d}{dt}\,|_t\right)=\\
&= \left(L_{\Gamma(n\varepsilon)}\right)_*\circ\Gamma_*\left(\frac{d}{dt}\,|_{t-n\varepsilon}\right)=\left(L_{\Gamma(n\varepsilon)}\right)_*\left(\overset{\bullet}{\Gamma}(t-n\varepsilon)\right)=\\
&= \left(L_{\Gamma(n\varepsilon)}\right)_*\left(\widetilde{X}_{\Gamma(t-n\varepsilon)}\right).
\end{aligned}$$

Deoarece $\widetilde{X}\in L(G)$, avem:

$$\begin{aligned}
\overset{\bullet}{\Gamma}(t) &= \left(L_{\Gamma(n\varepsilon)}\right)_*\circ\left(L_{\Gamma(t-n\varepsilon)}\right)_*\left(\widetilde{X_e}\right)=\left(L_{\Gamma(n\varepsilon)\Gamma(t-n\varepsilon)}\right)_*\left(\widetilde{X_e}\right)=\\
&= \left(L_{\Gamma(t)}\right)_*\left(\widetilde{X_e}\right)=\widetilde{X}_{\Gamma(t)}.
\end{aligned}$$

Am obţinut egalitatea

$$\overset{\bullet}{\Gamma}(t)=\widetilde{X}_{\Gamma(t)},\ \ (\forall)\, t\in[n\varepsilon, n\varepsilon+\varepsilon],\ n\in\mathbb{N}.$$

Prin urmare (1.20) este adevărată, pentru orice $s\geq 0$.

(i) $\Rightarrow$ (ii). Deoarece $b(X,X)=0$, rezultă $\left(\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{X}\right)(e)=b(X,X)=0$. Deoarece $\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{X}\in L(G)$, egalitatea $\left(\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{X}\right)(e)=0$ implică $\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{X}=0$, adică câmpul $\widetilde{X}$ este $\nabla-$autoparalel. Prin urmare arcul de curbă $\Gamma(t)$ $(t \geq 0)$ este un arc de curbă $\nabla-$autoparalelă.

Din unicitatea curbei $\nabla-$autoparalele ce trece prin punctul $e = \Gamma(0)$ şi este tangentă vectorului $X \in T_eG$, rezultă

$$\Gamma(t) = \gamma_X(t), \quad (\forall)\, t \geq 0$$

(γ_X este curba $\nabla-$autoparalelă ce trece prin punctul $e = \gamma(0) = \gamma_X(0)$ şi este tangentă vectorului $X \in T_eG$).

Se ştie că pentru fiecare conexiune liniară ∇, avem $\gamma_X(-t) = \gamma_{-X}(t)$. Deoarece $b(-X, -X) = 0$, rezultă că $\gamma_X(t)$ este definită pentru orice $t \in \mathbb{R}$. Să arătăm că aplicaţia analitică

$$\gamma_X : \mathbb{R} \to G$$

este homomorfism de grupuri.

Fie $s \geq 0$ şi fie curbele:

$$t \to \gamma_X(t+s), \; t \to \gamma_X(s)\,\gamma_X(t).$$

Ambele curbe trec prin punctul $\gamma_X(s)$. În acest punct curba $t \to \gamma_X(t+s)$ este tangentă vectorului $\dot{\gamma}_X(s)$, iar curba $t \to \gamma_X(s)\,\gamma_X(t)$ are ca vector tangent, vectorul $\left(L_{\gamma_X(s)}\right)_*(X)$. Folosind relaţia (1.20), avem:

$$\left(L_{\gamma_X(s)}\right)_*(X) = \widetilde{X}_{\gamma_X(s)} = \dot{\gamma}_X(s).$$

Deoarece conexiunea ∇ este stâng invariantă, curbele

$$t \to \gamma_X(t+s) \text{ şi } t \to \gamma_X(s)\,\gamma_X(t)$$

sunt curbe $\nabla-$autoparalele. Deoarece ambele curbe $\nabla-$autoparalele trec prin punctul $\gamma_X(s)$ şi sunt tangente vectorului

$$\dot{\gamma}_X(s) = \left(L_{\gamma_X(s)}\right)_*(X) = \widetilde{X}_{\gamma_X(s)},$$

rezultă

$$\gamma_X(t+s) = \gamma_X(s)\gamma_X(t), \quad (\forall)\, s \geq 0, \quad (\forall)\, t \in \mathbb{R}.$$

Ţinând seama de egalitatea

$$\gamma_{-X}(t) = \gamma_X(-t),$$

obţinem:

$$\gamma_X(s+t) = \gamma_X(s)\gamma_X(t), \quad (\forall)\, s,t \in \mathbb{R}.$$

Prin urmare curba autoparalelă $t \to \gamma_X(t)$ este subgrup cu un parametru.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Fie $h : \mathbb{R} \to G$ un subgrup cu un parametru al grupului Lie G, astfel încât

$$\overset{\bullet}{h}(0) = X.$$

Deoarece $h(t+s) = h(t)\,h(s)$, obţinem:

$$h(0) = e, \ \overset{\bullet}{h}(s) = \widetilde{X}_{h(s)}, \quad (\forall)\, s \in \mathbb{R}.$$

În particular, dacă curba autoparalelă $t \to \gamma_X(t)$ este subgrup cu un parametru, avem

$$\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{X} = 0$$

pe curba $\gamma_X(t)$. Rezultă:

$$b(X,X) = \left(\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{X}\right)(e) = 0.$$

COROLAR. *Fie $X \in T_eG$. Atunci există un unic subgrup cu un parametru $h : \mathbb{R} \to G$, astfel încât $\overset{\bullet}{h}(0) = X$.*

Demonstraţie. Fie ∇ o conexiune liniară pe G, pentru care $b(X,X)=0$ şi fie $t \to \gamma_X(t)$ curba $\nabla-$autoparalelă ce trece prin e şi este tangentă vectorului X. Atunci $h=\gamma_X$ este un subgrup cu un parametru al lui G, cu proprietăţile cerute în corolar.

În adevăr, din propoziţia anterioară, avem

$$\overset{\bullet}{\gamma}_X(s) = \widetilde{X}_{\gamma_X(s)},$$

unde $\widetilde{X} \in L(G)$, $\widetilde{X}(e) = X$. Deoarece $\overset{\bullet}{\gamma}_X(0) = \widetilde{X}_{\gamma_X(0)} = \widetilde{X}_e = X$, avem $\overset{\bullet}{h}(0) = X$.

Din $h(0)=e$, $\overset{\bullet}{h}(0) = X$ şi $b(X,X)=0$ obţinem că $t \to h(t)$ este o curbă $\nabla-$autoparalelă. Deoarece există o unică curbă $\nabla-$autoparalelă ce trece prin e şi este tangentă vectorului X, obţinem $h=\gamma_X$.

1.10. Vom prezenta în continuare un exerciţiu rezolvat.

Exerciţiu. *Considerăm mulţimea* $G=\mathbb{R}^4 - \{x^3=-1\}$ *şi aplicaţia* $\mu : G\times G \to G$ *definită prin:*

$$(*) \qquad \begin{cases} x''^1 = x^1 + x'^1 + x^1 x'^3 \\ x''^2 = x^2 + x'^2 + 2x^2 x'^3 + x^2\left(x'^3\right)^2 \\ x''^3 = x^3 + x'^3 + x^3 x'^3 \\ x''^4 = x^4 + x'^4 + 2x^4 x'^3 + x^4\left(x'^3\right)^2 \end{cases}$$

(i) *Să se arate că G cu legea dată este un grup Lie.*

(ii) *Să se determine câmpurile vectoriale stâng invariante* E_1, E_2, E_3, E_4 *care în elementul neutru e al grupului G iau valorile* $\frac{\partial}{\partial x^1}\big|_e$, $\frac{\partial}{\partial x^2}\big|_e$, $\frac{\partial}{\partial x^3}\big|_e$, $\frac{\partial}{\partial x^4}\big|_e$.

(iii) *Să se afle constantele de structură relative la baza considerată.*

(iv) *Să se determine grupul de transformări cu un parametru al unui câmp oarecare* $X \in L(G)$.

(v) *Să se afle subgrupurile cu un parametru ale grupului Lie G.*

(vi) *Să se scrie aplicaţia exponenţială pentru grupul Lie G.*

(vii) *Se consideră pe G conexiunile liniare* $\overset{-}{\nabla}, \overset{+}{\nabla}, \overset{\circ}{\nabla}$ *definite prin relaţiile* (1.2), (1.2$'$) *şi* (1.2$''$). *Să se arate că* $\overset{-}{\nabla}, \overset{+}{\nabla}, \overset{\circ}{\nabla}$ *admit aceleaşi curbe autoparalele.*

(viii) *Să se scrie ecuaţiile parametrice ale curbelor autoparalele ale conexiunii* $\bar{\nabla}$.

Rezolvare.

(i) Evident, $\mathbb{R}^4 - \{x^3 = -1\}$ este o mulţime deschisă în varietatea $\mathbb{R}^4$, deci $\mathbb{R}^4 - \{x^3 = -1\}$ este o varietate analitică de dimensiune patru. Se constată fără dificultate că μ este o lege de grup în mulţimea punctelor lui G.

Elementul neutru al grupului G este $e = (0,0,0,0)$. Deoarece μ este aplicaţie analitică, rezultă că G este un grup Lie de dimensiune patru.

(ii) Fie E_i ($i \in \{1,2,3,4\}$) câmpurile de vectori stâng invarianţi care verifică condiţia $E_i(e) = \frac{\partial}{\partial x^i} |_e$. Avem:

$$E_i(a) = (L_a)_* \left(\frac{\partial}{\partial x^i} |_e\right),\ i \in \{1,2,3,4\}.$$

De aici rezultă $E_i^j(a) = E_i(a)(x^j) = (L_a)_* \left(\frac{\partial}{\partial x^i} |_e\right)(x^j)$, deci

$$(*') \qquad E_i^j(a) = \frac{\partial}{\partial x^i} |_e \left(x^j \circ L_a\right),\ i,j \in \{1,2,3,4\}.$$

Pentru orice $a' \in G$, avem $x^i \circ L_a(a') = x^i(aa')$, $i \in \{1,2,3,4\}$. Folosind $(*)$, rezultă:

$$\begin{aligned}
\left(x^1 \circ L_a\right)(a') &= x^1(aa') = x^1(a) + x^1(a') + x^1(a)x^3(a'),\\
\left(x^2 \circ L_a\right)(a') &= x^2(aa') = x^2(a) + x^2(a') + 2x^2(a)x^3(a') + x^2(a)\left(x^3(a')\right)^2\\
\left(x^3 \circ L_a\right)(a') &= x^3(aa') = x^3(a) + x^3(a') + x^3(a)x^3(a'),\\
\left(x^4 \circ L_a\right)(a') &= x^4(aa') = x^4(a) + x^4(a') + 2x^4(a)x^3(a') + x^4(a)\left(x^3(a')\right)^2
\end{aligned}$$

De aici obţinem

$$\begin{aligned}
x^1 \circ L_a &= x^1(a)\cdot 1 + x^1 + x^1(a)x^3,\\
x^2 \circ L_a &= x^2(a)\cdot 1 + x^2 + 2x^2x^3 + x^2(a)\left(x^3\right)^2,\\
x^3 \circ L_a &= x^3(a)\cdot 1 + x^3 + x^3(a)x^3,\\
x^4 \circ L_a &= x^4(a)\cdot 1 + x^4 + 2x^4(a)x^3 + x^4(a)\left(x^3\right)^2
\end{aligned}$$

Folosind acum relaţiile $(*')$, avem: $E_1^1(a) = \frac{\partial}{\partial x^1} |_e \left(x^1 \circ L_a\right) = 1$. Analog găsim $E_1^2(a) = 0$, $E_1^3(a) = 0$, $E_1^4(a) = 0$. În continuare obţinem:

$$
\begin{aligned}
E_2^1(a) &= 0,\ E_2^2(a)=1,\ E_2^3(a)=0,\ E_2^4(a)=0,\\
E_3^1(a) &= x^1(a),\ E_3^2(a)=2x^2(a),\ E_3^3(a)=1+x^3(a),\ E_3^4(a)=2x^4(a),\\
E_4^1(a) &= 0,\ E_4^2(a)=0,\ E_4^3(a)=0,\ E_4^4(a)=1.
\end{aligned}
$$

Prin urmare, câmpurile vectoriale stâng invariante căutate sunt:

$$
\begin{aligned}
E_1 &= \frac{\partial}{\partial x^1},\\
E_2 &= \frac{\partial}{\partial x^2},\\
E_3 &= x^1\frac{\partial}{\partial x^1}+2x^2\frac{\partial}{\partial x^2}+\left(1+x^3\right)\frac{\partial}{\partial x^3}+2x^4\frac{\partial}{\partial x^4},\\
E_4 &= \frac{\partial}{\partial x^4}.
\end{aligned}
$$

(iii) Este evident că E_1, E_2, E_3, E_4 formează o bază în algebra Lie a câmpurilor vectoriale stâng invariante pe grupul Lie G. Avem:

$$[E_1, E_3] = E_1,\ \ [E_2, E_3] = 2E_2,\ \ [E_3, E_4] = -2E_4,$$

deci constantele de structură relative la baza $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ sunt:

$$c_{13}^1 = -c_{31}^1 = 1,\ c_{23}^2 = -c_{32}^2 = c_{43}^4 = -c_{34}^4 = 2,$$

celelalte fiind zero.

(iv) Vrem să determinăm grupul de transformări cu un parametru al unui câmp oarecare $X = a^1E_1 + a^2E_2 + a^3E_3 + a^4E_4 \in L(G)$, unde $a^1, a^2, a^3, a^4 \in \mathbb{R}$. Ţinând seama de relaţiile de mai sus, câmpul X se scrie:

$$X = \left(a^1 + a^3x^1\right)\frac{\partial}{\partial x^1} + \left(a^2 + 2a^3x^2\right)\frac{\partial}{\partial x^2} + a^3\left(1+x^3\right)\frac{\partial}{\partial x^3} + \left(a^4 + 2a^3x^4\right)\frac{\partial}{\partial x^4}.$$

Scriem ecuaţiile diferenţiale ale traiectoriilor câmpului X :

$$(**)\qquad \begin{cases} \overset{\bullet}{x}^1(t) = a^1 + a^3 x^1(t) \\ \overset{\bullet}{x}^2(t) = a^2 + 2a^3 x^2(t) \\ \overset{\bullet}{x}^3(t) = a^3\left(1 + x^3(t)\right) \\ \overset{\bullet}{x}^4(t) = a^4 + 2a^3 x^4(t)\,. \end{cases}$$

<u>Cazul $a^3 = 0$</u>. Din $(**)$, obţinem:

$$\begin{cases} x^1(t) = a^1 t + b^1 \\ x^2(t) = a^2 t + b^2 \\ x^3(t) = b^3 \\ x^4(t) = a^4 t + b^4, \end{cases}$$

unde b^1, b^2, b^3, b^4 sunt constante reale. Dacă notăm $x_0^i = x^i(0)$, obţinem $b^i = x_0^i, i \in \{1,2,3,4\}$. Deci traiectoria centrată în punctul $p_0 = (x_0^1, x_0^2, x_0^3, x_0^4)$ este curba parametrizată

$$\alpha_{p_0} : \mathbb{R} \to G,\ \alpha_{p_0}(t) = \left(a^1 t + x_0^1, a^2 t + x_0^2, x_0^3, a^4 t + x_0^4\right).$$

Variind punctul $p_0 \in G$, obţinem acţiunea $\alpha : \mathbb{R} \times G \to G$, dată prin

$$(***)\qquad \alpha(t,p) = \alpha_p(t) = \left(a^1 t + x^1, a^2 t + x^2, x^3, a^4 t + x^4\right),$$

unde $p = (x^1, x^2, x^3, x^4) \in G$.

<u>Cazul $a^3 \neq 0$</u>. Sistemul $(**)$ se scrie

$$\begin{cases} \overset{\bullet}{x}^1 = a^3\left(x^1 + \frac{a^1}{a^3}\right) \\ \overset{\bullet}{x}^2 = 2a^3\left(x^2 + \frac{a^2}{2a^3}\right) \\ \overset{\bullet}{x}^3 = a^3\left(x^3 + 1\right) \\ \overset{\bullet}{x}^4 = 2a^3\left(x^4 + \frac{a^4}{2a^3}\right). \end{cases}$$

De aici rezultă

$$\begin{cases} x^1(t) = b^1 e^{ta^3} - \frac{a^1}{a^3} \\ x^2(t) = b^2 e^{2ta^3} - \frac{a^2}{2a^3} \\ x^3(t) = b^3 e^{ta^3} - 1 \\ x^4(t) = b^4 e^{2ta^3} - \frac{a^4}{2a^3}, \end{cases}$$

unde $b^1, b^2, b^3, b^4 \in \mathbb{R}$. Dacă notăm $x_0^i = x^i(0)$, obţinem:

$$b^1 = x_0^1 + \frac{a^1}{a^3},\ b^2 = x_0^2 + \frac{a^2}{2a^3},\ b^3 = x_0^3 + 1,\ b^4 = x_0^4 + \frac{a^4}{2a^3}.$$

Deci traiectoria centrată în punctul $p_0 = (x_0^1, x_0^2, x_0^3, x_0^4)$ este curba parametrizată $\alpha_{p_0} : \mathbb{R} \to G$, definită prin:

$$\begin{aligned} \alpha_{p_0}(t) &= \left(\left(x_0^1 + \frac{a^1}{a^3} \right) e^{ta^3} - \frac{a^1}{a^3}, \left(x_0^2 + \frac{a^2}{2a^3} \right) e^{2ta^3} - \frac{a^2}{2a^3}, \right. \\ &\qquad \left. \left(x_0^3 + 1 \right) e^{ta^3} - 1, \left(x_0^4 + \frac{a^4}{2a^3} \right) e^{2ta^3} - \frac{a^4}{2a^3} \right). \end{aligned}$$

Variind punctul $p_0 \in G$, obţinem acţiunea $\alpha : \mathbb{R} \times G \to G$, dată prin

$$\begin{aligned} (***') \quad \alpha(t,p) &= \alpha_p(t) = \left(\left(x^1 + \frac{a^1}{a^3} \right) e^{ta^3} - \frac{a^1}{a^3}, \left(x^2 + \frac{a^2}{2a^3} \right) e^{2ta^3} - \frac{a^2}{2a^3}, \right. \\ &\qquad \left. \left(x^3 + 1 \right) e^{ta^3} - 1, \left(x^4 + \frac{a^4}{2a^3} \right) e^{2ta^3} - \frac{a^4}{2a^3} \right), \end{aligned}$$

unde $p = (x^1, x^2, x^3, x^4) \in G$.

(v) Pentru $p = e = (0,0,0,0)$, din $(***)$ şi $(***')$, obţinem următoarele

v₁) Dacă $a_3 = 0$, atunci subgrupul cu un parametru generat de câmpul X este:

$$\rho_X = \alpha_e : \mathbb{R} \to G,\ \rho_X(t) = \left(ta^1, ta^2, 0, ta^4 \right).$$

v₂) Dacă $a_3 \neq 0$, atunci subgrupul cu un parametru generat de câmpul X este $\rho_X : \mathbb{R} \to G$,

$$\rho_X(t) = \left(\frac{a^1}{a^3} \left(e^{ta^3} - 1 \right), \frac{a^2}{2a^3} \left(e^{2ta^3} - 1 \right), e^{ta^3} - 1, \frac{a^4}{2a^3} \left(e^{2ta^3} - 1 \right) \right).$$

(vi) Ştim că aplicaţia exponenţială $\exp : L(G) \to G$ este dată prin $\exp X = \rho_X(1)$, unde $\rho_X : \mathbb{R} \to G$ este subgrupul cu un parametru generat de câmpul X.

vi$_1$) Dacă $a_3 = 0$, atunci $\exp X = (a^1, a^2, 0, a^4)$.

vi$_2$) Dacă $a_3 \neq 0$, atunci obţinem:

$$\exp X = \left(\frac{a^1}{a^3}\left(e^{a^3} - 1\right), \frac{a^2}{2a^3}\left(e^{2a^3} - 1\right), e^{a^3} - 1, \frac{a^4}{2a^3}\left(e^{2a^3} - 1\right) \right).$$

(vii) Se foloseşte propoziţia 1.4.

(viii) Avem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^1} &= E_1, \\ \frac{\partial}{\partial x^2} &= E_2, \\ \frac{\partial}{\partial x^3} &= \frac{1}{1+x^3}\left(-x^1 E_1 - 2x^2 E_2 + E_3 - 2x^4 E_4\right), \\ \frac{\partial}{\partial x^4} &= E_4. \end{aligned}$$

Notăm cu $\overline{\Gamma}^i_{jk}$ componentele conexiunii $\overline{\nabla}$, deci:

$$\overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = -\overline{\Gamma}^k_{ji} \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Avem:

$$\overline{\Gamma}^1_{31} = \frac{1}{2}\overline{\Gamma}^2_{32} = \frac{1}{2}\overline{\Gamma}^4_{34} = \overline{\Gamma}^3_{33} = \frac{1}{1+x^3},$$

componentele nescrise fiind nule.

Ecuaţiile diferenţiale ale curbelor autoparalele ale conexiunii $\overline{\nabla}$ sunt:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2x^1}{dt^2} - \frac{1}{1+x^3}\frac{dx^1}{dt}\frac{dx^3}{dt} &= 0,\\
\frac{d^2x^2}{dt^2} - \frac{2}{1+x^3}\frac{dx^2}{dt}\frac{dx^3}{dt} &= 0,\\
\frac{d^2x^3}{dt^2} - \frac{1}{1+x^3}\left(\frac{dx^3}{dt}\right)^2 &= 0,\\
\frac{d^2x^4}{dt^2} - \frac{2}{1+x^3}\frac{dx^3}{dt}\frac{dx^4}{dt} &= 0.
\end{aligned}$$

Ecuaţiile parametrice ale curbelor autoparalele situate în planul $x^3 = a^3$ $(= ct. \neq -1)$ sunt

$$\begin{cases} x^1 = a^1 t + a'^1 \\ x^2 = a^2 t + a'^2 \\ x^3 = a^3 \\ x^4 = a^4 t + a'^4 \end{cases}$$

unde

$$\left(a^1\right)^2 + \left(a^2\right)^2 + \left(a^3\right)^2 + \left(a^4\right)^2 > 0.$$

Ecuaţia a treia a sistemului se poate scrie sub forma:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{x}^3}{1+x^3}\right) = 0.$$

De aici rezultă:

$$\frac{\dot{x}^3}{1+x^3} = a\,(= ct.)\,.$$

Din a treia ecuaţie a sistemului rezultă:

$$x^3 = e^{at+b} - 1,\ a, b \in \mathbb{R}.$$

Vom presupune $a \neq 0$. Înlocuind valoarea lui x^3 în prima, a doua şi a patra ecuaţie a sistemului, obţinem:

$$\begin{aligned} x^1 &= a^1 e^{at+b} + b^1 \\ x^2 &= a^2 e^{2(at+b)} + b^2 \\ x^4 &= a^4 e^{2(at+b)} + b^4 \end{aligned}$$

unde $a^1, a^2, a^4, b^1, b^2, b^4 \in \mathbb{R}$.

Făcând schimbarea de parametru $s = at + b$, ecuaţiile parametrice ale curbelor autoparalele ale conexiunii $\overline{\nabla}$ se scriu:

$$\begin{cases} x^1 = a^1 e^s + b^1 \\ x^2 = a^2 e^{2s} + b^2 \\ x^3 = e^s - 1 \\ x^4 = a^4 e^{2s} + b^4 \end{cases}$$

1.11. PROPOZIŢIE. *Fie ∇ o conexiune liniară stâng invariantă pe grupul Lie G şi fie $b : L(G) \times L(G) \to L(G)$ aplicaţia $\mathbb{R}-$biliniară dată de $b(X,Y) = \nabla_X Y$, $(\forall)\, X, Y \in L(G)$.*

Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(i) *conexiunea ∇ este bi-invariantă;*

(ii) *aplicaţia b este $Ad\, G-$invariantă, adică satisface relaţia*

$$(Ada)(b(X,Y)) = b((Ada)(X), (Ada)(Y)), \quad (\forall)\, a \in G, \quad (\forall)\, X, Y \in L(G).$$

Demonstraţie.

(i) $\Rightarrow$ (ii). Deoarece ∇ este bi-invariantă, avem

$$\begin{aligned} \nabla_{(R_a)_*(X)} (R_a)_* (Y) &= (R_a)_* (\nabla_X Y), \\ \nabla_{(L_a)_*(X)} (L_a)_* (Y) &= (L_a)_* (\nabla_X Y), \end{aligned}$$

pentru orice $a \in G$, şi orice $X, Y \in \mathcal{X}(G)$.

Pentru $X, Y \in L(G)$ şi $a \in G$, avem:

$$
\begin{aligned}
b\left((Ada)(X),(Ada)(Y)\right) &= \nabla_{(Ada)(X)}(Ada)(Y) = \\
&= \nabla_{\left(R_{a^{-1}}\right)_*\circ(L_a)_*(X)}\left(R_{a^{-1}}\right)_*\circ(L_a)_*(Y) = \\
&= \nabla_{\left(R_{a^{-1}}\right)_*(X)}\left(R_{a^{-1}}\right)_*(Y) = \left(R_{a^{-1}}\right)_*\left(\nabla_X Y\right) = \\
&= \left(R_{a^{-1}}\circ L_a\right)_*\left(\nabla_X Y\right) = (Ada)\left(\nabla_X Y\right) = \\
&= (Ada)\left(b(X,Y)\right).
\end{aligned}
$$

(ii) $\Rightarrow$ (i). Fie $\{E_1,...,E_n\}$ o bază în $L(G)$. Pentru $X = E_i$ şi $Y = E_j$, din (ii) obţinem

$$
b\left((Ada)(E_i),(Ada)(E_j)\right) = (Ada)\left(b(E_i,E_j)\right),
$$

sau

$$
\nabla_{(R_a)_*(E_i)}(R_a)_*(E_j) = (R_a)_*\left(\nabla_{E_i}E_j\right),\ \ (\forall)\,a\in G.
$$

Pentru $X,Y \in \mathcal{X}(G)$, avem $X = X^iE_i$, $Y = Y^jE_j$, unde $X^1,...,X^n$, $Y^1,...,Y^n \in \mathcal{F}(G)$. Utilizând formula

$$
(R_a)_*(fX) = \left(f\circ R_{a^{-1}}\right)(R_a)_*(X),\ \ (\forall)\,f\in\mathcal{F}(G),
$$

obţinem

$$
\begin{aligned}
&\nabla_{(R_a)_*(X)}(R_a)_*(Y) = \nabla_{(R_a)_*(X^iE_i)}(R_a)_*(Y^jE_j) = \\
&= \nabla_{\left(X^i\circ R_{a^{-1}}\right)(R_a)_*(E_i)}\left(Y^j\circ R_{a^{-1}}\right)(R_a)_*(E_j) = \\
&= \left(X^iY^j\circ R_{a^{-1}}\right)\nabla_{(R_a)_*(E_i)}(R_a)_*(E_j) + \\
&\quad + \left(X^i\circ R_{a^{-1}}\right)\left\{(R_a)_*(E_i)\left(Y^j\circ R_{a^{-1}}\right)\right\}(R_a)_*(E_j) = \\
&= \left(X^iY^j\circ R_{a^{-1}}\right)(R_a)_*\left(\nabla_{E_i}E_j\right) + \left(X^i\circ R_{a^{-1}}\right)\left\{E_i\left(Y^j\right)\circ R_{a^{-1}}\right\}(R_a)_*(E_j) = \\
&= \left(X^iY^j\circ R_{a^{-1}}\right)(R_a)_*\left(\nabla_{E_i}E_j\right) + \left\{X\left(Y^j\right)\circ R_{a^{-1}}\right\}(R_a)_*(E_j),
\end{aligned}
$$

unde am utilizat formula $(R_a)_*(X)(f) = X\left(f\circ R_a\right)\circ R_{a^{-1}}$.

Pe de altă parte, pentru orice $a\in G$ şi orice $X,Y\in\mathcal{X}(G)$, avem:

$$\begin{aligned}(R_a)_*(\nabla_X Y) &= (R_a)_*\left(\nabla_{X^iE_i}Y^jE_j\right) = (R_a)_*\left\{X^iY^j\nabla_{E_i}E_j + X\left(Y^j\right)E_j\right\} = \\ &= \left(X^iY^j \circ R_{a^{-1}}\right)\left((R_a)_*(\nabla_{E_i}E_j)\right) + \left\{X\left(Y^j\right)\circ R_{a^{-1}}\right\}(R_a)_*(E_j\end{aligned}$$

Acum este uşor de văzut că avem

$$\nabla_{(R_a)_*(X)}(R_a)_*(Y) = (R_a)_*(\nabla_X Y), \quad (\forall)\, a \in G, \quad (\forall)\, X, Y \in \mathcal{X}(G),$$

adică conexiunea ∇ este drept invariantă. În concluzie, ∇ este o conexiune bi-invariantă.

§ 2. ALGEBRE DE DEFORMARE ASOCIATE UNUI GRUP LIE.

În acest paragraf vom nota cu G un grup Lie de dimensiune n şi cu $L(G)$ algebra Lie a lui G. Fie $\{E_1, ..., E_n\}$ o bază fixată în spaţiul vectorial $L(G)$.

2.1. Am văzut în paragraful precedent că există şi sunt unice conexiunile liniare stâng invariante $\overset{-}{\nabla}, \overset{+}{\nabla}$ şi $\overset{\circ}{\nabla}$ pe G, care pe $L(G)$ sunt definite prin

$$\overset{-}{\nabla}_{E_i} E_j = 0, \ \overset{+}{\nabla}_{E_i} E_j = [E_i, E_j], \ \overset{\circ}{\nabla}_{E_i} E_j = \frac{1}{2}[E_i, E_j],$$

oricare ar fi indicii $i, j \in \{1, ..., n\}$.

PROPOZIŢIE. *Considerăm câmpurile tensoriale* $\overset{-}{A} = \overset{-}{\nabla} - \overset{\circ}{\nabla}$, $\overset{+}{A} = \overset{+}{\nabla} - \overset{\circ}{\nabla}$, $A = \overset{+}{\nabla} - \overset{-}{\nabla} \in \mathcal{T}_2^1(G)$. *Atunci:*

(i) *toate elementele algebrei de deformare* $\mathcal{U}\left(G, \overset{-}{A}\right)$ *sunt câmpuri* $2-$*nilpotente;*

(ii) *toate elementele algebrei de deformare* $\mathcal{U}\left(G, \overset{+}{A}\right)$ *sunt câmpuri* $2-$*nilpotente;*

(iii) *toate elementele algebrei de deformare* $\mathcal{U}(G, A)$ *sunt câmpuri* $2-$*nilpotente;*

(iv) *Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(a) *Algebra* $\mathcal{U}\left(G, \overset{-}{A}\right)$ *este asociativă;*

(b) *Algebra* $\mathcal{U}\left(G, \overset{+}{A}\right)$ *este asociativă;*

(c) *Algebra* $\mathcal{U}(G, A)$ *este asociativă;*

(d) *Curbura conexiunii* $\overset{\circ}{\nabla}$ *este nulă.*

Demosntraţie. Pentru orice $X = X^i E_i$, $Y = Y^i E_i \in \mathcal{X}(G)$, avem:

$$(2.1) \qquad A(X,Y) = X^i Y^j [E_i, E_j] = 2\overset{+}{A}(X,Y) = -2\overset{-}{A}(X,Y).$$

De aici obţinem

$$A(X,X)=\overset{+}{A}(X,X)=\overset{-}{A}(X,X)=0,\ \ (\forall)\,X\in\mathcal{X}(G),$$

adică tocmai (i), (ii) şi (iii).

(iv) Fie $\overset{\circ}{R}\in\mathcal{T}_3^1(G)$ câmpul tensorial de curbură al conexiunii $\overset{\circ}{\nabla}$. Avem:

$$\begin{aligned}\overset{\circ}{R}(E_i,E_j)E_k &= \overset{\circ}{\nabla}_{E_i}\overset{\circ}{\nabla}_{E_j}E_k-\overset{\circ}{\nabla}_{E_j}\overset{\circ}{\nabla}_{E_i}E_k-\overset{\circ}{\nabla}_{[E_i,E_j]}E_k=\\ &= \frac{1}{2}\overset{\circ}{\nabla}_{E_i}[E_j,E_k]-\frac{1}{2}\overset{\circ}{\nabla}_{E_j}[E_i,E_k]-\overset{\circ}{\nabla}_{C_{ij}^hE_h}E_k=\\ &= \frac{1}{4}C_{jk}^h[E_i,E_h]-\frac{1}{4}C_{ik}^h[E_j,E_k]-\frac{1}{2}C_{ij}^hC_{hk}^sE_s=\\ &= \frac{1}{4}\left(C_{jk}^hC_{ij}^s-C_{ik}^hC_{jk}^s-2C_{ij}^hC_{hk}^s\right)E_s.\end{aligned}$$

Folosind relaţiile pătratice ale lui Lie:

$$C_{jk}^hC_{hi}^s+C_{ki}^hC_{hj}^s+C_{ij}^hC_{hk}^s=0,$$

obţinem formula:

$$\overset{\circ}{R}(E_i,E_j)E_k=-\frac{1}{4}C_{ij}^hC_{hk}^sE_s. \tag{2.2}$$

(a) $\Leftrightarrow$ (b) $\Leftrightarrow$ (c). Se folosesc egalităţile (2.1).

(c) $\Leftrightarrow$ (d). Algebra $\mathcal{U}(G,A)$ este asociativă dacă şi numai dacă oricare ar fi $i,j,k\in\{1,...,n\}$, avem:

$$A(E_i,A(E_j,E_k))=A(A(E_i,E_j),E_k),$$

sau

$$[E_i,[E_j,E_k]]=[[E_i,E_j],E_k]. \tag{2.3}$$

Ţinând seama de identitatea lui Jacobi, din (2.3) rezultă că $[[E_i,E_k],E_j]=0$, sau $C_{ik}^sC_{sj}^r=0$. Aceste egalităţi, împreună cu (2.2), ne arată că avem $\overset{\circ}{R}(E_i,E_j)E_k=0$, oricare ar fi $i,j,k\in\{1,...,n\}$, adică $\overset{\circ}{R}=0$.

Corolar. Considerăm câmpurile tensoriale $\bar{A} = \bar{\nabla} - \overset{\circ}{\nabla}$, $\overset{+}{A} = \overset{+}{\nabla} - \overset{\circ}{\nabla}$, $A = \overset{+}{\nabla} - \bar{\nabla} \in \mathcal{T}_2^1(G)$, unde $\bar{\nabla}, \overset{+}{\nabla}$ şi $\overset{\circ}{\nabla}$ sunt conexiunile Cartan-Schouten considerate în propoziţia anterioară. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(i) algebra $\mathcal{U}(G, A)$ este asociativă;

(ii) curbura mixtă ρ asociată perechii $\left(\bar{\nabla}, \overset{+}{\nabla}\right)$ este nulă;

(iii) curbura de deformare K asociată perechii $\left(\bar{\nabla}, \overset{+}{\nabla}\right)$ este nulă;

(iv) algebra $\mathcal{U}\left(G, \bar{A}\right)$ este asociativă;

(v) curbura mixtă $\bar{\rho}$ asociată perechii $\left(\bar{\nabla}, \overset{\circ}{\nabla}\right)$ este nulă;

(vi) curbura de deformare $\bar{K}$ asociată perechii $\left(\bar{\nabla}, \overset{\circ}{\nabla}\right)$ este nulă;

(vii) algebra $\mathcal{U}\left(G, \overset{+}{A}\right)$ este asociativă;

(viii) curbura mixta $\overset{+}{\rho}$ asociată perechii $\left(\overset{+}{\nabla}, \overset{\circ}{\nabla}\right)$ este nulă;

(ix) curbura de deformare $\overset{+}{K}$ asociată perechii $\left(\overset{+}{\nabla}, \overset{\circ}{\nabla}\right)$ este nulă.

Demonstraţie. Folosind (2.1), rezultă:

$$A(E_i, E_j) = 2\overset{+}{A}(E_i, E_j) = -2A(E_i, E_j) = [E_i, E_j].$$

De aici obţinem:

$$(2.1') \qquad \begin{aligned} K(E_i, E_j) E_k &= 4\overset{+}{K}(E_i, E_j) E_k = 2\bar{K}(E_i, E_j) E_k = \\ &= \frac{1}{4}[[E_i, E_j], E_k]. \end{aligned}$$

(i) $\Leftrightarrow$ (iii) $\Leftrightarrow$ (iv) $\Leftrightarrow$ (vi) $\Leftrightarrow$ (vii) $\Leftrightarrow$ (ix). Se folosesc relaţiile (2.1′) şi propoziţia anterioară.

(i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (v) $\Leftrightarrow$ (viii). Prin calcul direct găsim

$$\rho(E_i, E_j) E_k = \frac{1}{2}[E_k, [E_i, E_j]] \text{ şi } \rho = 2\overset{+}{\rho} = 2\bar{\rho} = 2\overset{\circ}{R},$$

unde $\overset{\circ}{R}$ este câmpul tensorial de curbură al conexiunii $\overset{\circ}{\nabla}$. Utilizând ultimele relaţii şi propoziţia 2.1, obţinem rezultatul căutat.

2.2. Am văzut în paragraful precedent că dacă

$$b : L(G) \times L(G) \to L(G)$$

este o aplicaţie $\mathbb{R}-$biliniară, atunci există şi sunt unice conexiunile liniare stâng invariante $\overset{-}{\nabla}, \overset{+}{\nabla}$ şi $\overset{\circ}{\nabla}$ pe G, care pe $L(G)$ sunt definite prin

$$\overset{-}{\nabla}_{E_i} E_j = 0,\ \overset{+}{\nabla}_{E_i} E_j = b(E_i, E_j),\ \overset{\circ}{\nabla}_{E_i} E_j = \frac{1}{2} b(E_i, E_j),$$

pentru orice indici $i, j \in \{1, ..., n\}$.

<u>PROPOZIŢIE</u>. *Menţinem notaţiile de mai sus.*

(i) *Dacă notăm* $\overset{-}{A} = \overset{-}{\nabla} - \overset{\circ}{\nabla}$, $\overset{+}{A} = \overset{+}{\nabla} - \overset{\circ}{\nabla}$, $A = \overset{+}{\nabla} - \overset{-}{\nabla}$, *atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i$_1$) *algebra* $\mathcal{U}\left(G, \overset{-}{A}\right)$ *este comutativă şi asociativă;*

(i$_2$) *algebra* $\mathcal{U}\left(G, \overset{+}{A}\right)$ *este comutativă şi asociativă;*

(i$_3$) *algebra* $\mathcal{U}(G, A)$ *este comutativă şi asociativă;*

(i$_4$) b *este simetrică şi* $\overset{+}{R} = 2\overset{\circ}{R}$, *unde* $\overset{+}{R}$ *(resp.* $\overset{\circ}{R}$*) este câmpul tensorial de curbură al conexiunii* $\overset{+}{\nabla}$ *(resp.* $\overset{\circ}{\nabla}$*).*

(ii) *Dacă notăm* $b(E_i, E_j) = b_{ij}^k E_k$, *atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(ii$_1$) $\mathcal{U}\left(G, \overset{-}{A}\right)$ *este o algebră Lie;*

(ii$_2$) $\mathcal{U}\left(G, \overset{+}{A}\right)$ *este o algebră Lie;*

(ii$_3$) $\mathcal{U}(G, A)$ *este o algebră Lie;*

(ii$_4$) $b_{ij}^k + b_{ji}^k = 0$ *şi* $b_{jk}^r b_{ir}^s + b_{ki}^r b_{jr}^s + b_{ij}^r b_{kr}^s = 0.$

(iii) *Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(iii$_1$) *toate elementele algebrei* $\mathcal{U}\left(G, \overset{-}{A}\right)$ *sunt câmpuri speciale;*

(iii$_2$) *toate elementele algebrei* $\mathcal{U}\left(G, \overset{-}{A}\right)$ *sunt câmpuri speciale;*

(iii$_3$) *toate elementele algebrei* $\mathcal{U}\left(G, A\right)$ *sunt câmpuri speciale;*

(iii$_4$) $b = 0$;

(iii$_5$) $\overset{+}{\nabla} = \overset{\circ}{\nabla}$;

(iii$_6$) $\overset{+}{\nabla} = \overset{-}{\nabla}$;

(iii$_7$) $\overset{-}{\nabla} = \overset{\circ}{\nabla}$.

Demonstraţie.

(i$_1$) $\Leftrightarrow$ (i$_2$) $\Leftrightarrow$ (i$_3$). Se folosesc egalităţile $A = -2\overset{-}{A} = 2\overset{+}{A}$.

(i$_1$) $\Leftrightarrow$ (i$_4$). Dacă algebra $\mathcal{U}(G, A)$ este simultan comutativă şi asociativă, atunci trebuie să avem:

$$(2.4) \qquad b_{ij}^{k} = b_{ji}^{k}, \; b_{kj}^{r} b_{ir}^{h} - b_{ik}^{r} b_{rj}^{h} = 0.$$

Ţinând seama de (1.16), (1.17) si (2.4), rezultă că algebra $\mathcal{U}\left(G, \overset{-}{A}\right)$ este simultan comutativă şi asociativă dacă şi numai dacă b este simetrică şi $\overset{+}{R} = 2\overset{\circ}{R}$.

(ii) Pentru orice $X, Y \in L(G)$, avem formulele:

$$2\overset{-}{A}(X,Y) = -2\overset{+}{A}(X,Y) = -b_{ij}^{k} X^{i} Y^{j} E_{k} = -A(X,Y).$$

(ii$_1$) $\Leftrightarrow$ (ii$_2$) $\Leftrightarrow$ (ii$_3$), (ii$_4$) $\Leftrightarrow$ (ii$_1$). Evident.

(ii$_1$) $\Leftrightarrow$ (ii$_4$). Deoarece algebra $\mathcal{U}\left(G, \overset{-}{A}\right)$ este anticomutativă, rezultă $b_{ij}^{k} + b_{ji}^{k} = 0$. Identitatea lui Jacobi

$$\overset{-}{A}\left(X, \overset{-}{A}(Y,Z)\right) + \overset{-}{A}\left(Y, \overset{-}{A}(Z,X)\right) + \overset{-}{A}\left(Z, \overset{-}{A}(X,Y)\right) = 0$$

ne conduce la $b_{jk}^{r} b_{ir}^{s} + b_{ki}^{r} b_{jr}^{s} + b_{ij}^{r} b_{kr}^{s} = 0$.

(iii) Se folosesc relaţiile $A = 2\overset{+}{A} = -2\overset{-}{A}$.

2.3. Menţinem notaţiile de la 2.2.

PROPOZIŢIE. *Fie* $X \in \mathcal{X}(G)$. *Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) *X este câmp principal în algebra* $\mathcal{U}\left(G, \overset{-}{A}\right)$;

(ii) *X este câmp principal în algebra* $\mathcal{U}\left(G, \overset{+}{A}\right)$;

(iii) *X este câmp principal în algebra* $\mathcal{U}(G, A)$.

Demonstraţie. Se folosesc egalităţile $A = -2\overset{-}{A} = 2\overset{+}{A}$ şi definiţia 1.32.2 din capitolul I.

2.4. Menţinem notaţiile de la 2.1.

PROPOZIŢIE. Fie G un grup Lie conex. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(i) Grupul G este abelian;

(ii) Reprezentarea adjunctă a lui G este trivială;

(iii) Algebra $\mathcal{U}\left(G, \overset{-}{A}\right)$ este abeliană;

(iv) Algebra $\mathcal{U}\left(G, \overset{+}{A}\right)$ este abeliană;

(v) Algebra $\mathcal{U}(G, A)$ este abeliană;

(vi) Algebra $L(G)$ este abeliană;

(vii) Reprezentarea adjunctă a lui $L(G)$ este trivială;

(viii) Câmpurile stâng şi drept invariante coincid;

(ix) Toate elementele $\mathcal{F}(G)$ –modulului $\mathcal{T}_1^1(G)$ sunt derivări în algebra $\mathcal{U}(G, A)$;

(x) Toate elementele $\mathcal{F}(G)$ –modulului $\mathcal{T}_1^1(G)$ sunt derivări în algebra $\mathcal{U}\left(G, \overset{-}{A}\right)$;

(xi) Toate elementele $\mathcal{F}(G)$ –modulului $\mathcal{T}_1^1(G)$ sunt derivări în algebra $\mathcal{U}\left(G, \overset{+}{A}\right)$.

Demonstraţie. Se folosesc rezultatele din § 2 (cap. VI) şi 1.35 (cap. I).

§ 3. CONEXIUNI LINIARE INVARIANTE PE SPAŢII REDUCTIVE.

Fie G un grup Lie şi H un subgrup închis al său. Notăm cu $L(G)$ şi $L(H)$ algebrele lor Lie.

3.1. DEFINIŢIE. *Spaţiul omogen G/H se numeşte* **reductiv** *dacă există un subspaţiu $M \subset L(G)$ astfel încât să avem:*

i) $L(G) = M \oplus L(H)$;

ii) $(Adh)(M) \subset M$, $(\forall)\, h \in H$.

3.2. OBSERVAŢIE. i) În continuare presupunem că H este normal, adică $aH = Ha$, $(\forall)\, a \in G$. Atunci G/H admite o unică structură de grup Lie, astfel încât proiecţia canonică

$$\pi : G \to G/H,\ a \to \widehat{a} = aH$$

este homomorfism de grupuri Lie. Putem identifica M cu $L(G/H) \simeq T_{\widehat{e}}(G/H)$.

ii) Fie $T_a : G/H \to G/H$, $T_a(bH) = abH$.

Avem egalitatea $T_a \circ \pi = \pi \circ L_a$. T_a este analitică, $(\forall)\, a \in G$. Deoarece $(T_a)^{-1} = T_{a^{-1}}$ rezultă că T_a este difeomorfism analitic.

Pentru orice $a \in G$, considerăm aplicaţia:

$$D_a : G/H \to G/H,\ D_a(bH) = bHa = baH.$$

3.3. PROPOZIŢIE. *Fie H un subgrup închis şi normal al grupului Lie G. Atunci:*

i) *următoarea diagramă este comutativă*

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "R_a"] \arrow[d, "\pi"'] & G \arrow[d, "\pi"] \\ G/H \arrow[r, "D_a"'] & G/H \end{tikzcd}$$

ii) *D_a este homeomorfism;*

iii) D_a *este difeomorfism.*

Demonstrație.

i) $D_a \circ \pi(b) = D_a(bH) = baH = \pi(ba) = \pi \circ R_a(b)$. Avem deci

$$\pi \circ R_a = D_a \circ \pi, \quad (\forall)\, a \in G.$$

ii)

$$\begin{aligned} D_a \circ D_{a^{-1}}(bH) &= D_a\left(ba^{-1}H\right) = \left(ba^{-1}\right) aH = bH, \\ D_{a^{-1}} \circ D_a(bH) &= D_{a^{-1}}(baH) = (ba)\, a^{-1}H = bH. \end{aligned}$$

Rezultă

$D_{a^{-1}} \circ D_a = D_a \circ D_{a^{-1}} = Id_{G/H}$, deci aplicațiile D_a și $D_{a^{-1}}$ sunt inverse una alteia și avem $(D_a)^{-1} = D_{a^{-1}}$. Rezultă că D_a este aplicație bijectivă. Deoarece π este continuă și deschisă, iar R_a este difeomerfism analitic, rezultă că D_a este aplicație continuă și deschisă, deci D_a este homeomorfism.

iii) Deoarece $\pi \circ R_a$ este analitică, iar π este submersie analitică surjectivă, egalitatea $D_a \circ \pi = \pi \circ R_a$ ne arată că D_a este analitică, $(\forall)\, a \in G$ și deci D_a este difeomorfism analitic.

3.4. OBSERVAȚIE. i) Deoarece G/H este grup Lie, există un izomorfism liniar între $T_{\widehat{e}}(G/H)$ și $L(G/H)$, unde $\widehat{e} = \pi(e)$.

Deoarece aplicația $\pi_{*,e} : T_eG \to T_{\widehat{e}}(G/H)$ este surjectivă, rezultă că pentru orice vector $\widetilde{X} \in T_{\widehat{e}}(G/H)$, există $X \in T_eG$, astfel încât $\widetilde{X} = \pi_{*,e}(X)$. Ținând seama de izomorfismele $L(G) \simeq T_eG$ și $L(G/H) \simeq T_{\widehat{e}}(G/H)$, rezultă că există $X^* \in L(G)$ și $\widetilde{X^*} \in L(G/H)$, astfel încât $X_e^* = X$ și $\widehat{X_{\widehat{e}}^*} = \widetilde{X}$. Avem deci $\widetilde{X_{\widehat{e}}^*} = \pi_{*,e}(X_e^*)$.

ii) Din egalitățile $T_a \circ \pi = \pi \circ L_a$ și $D_a \circ \pi = \pi \circ R_a$ obținem

$$\begin{aligned} (T_a)_{*,\widehat{e}} \circ \pi_{*,e} &= \pi_{*,a} \circ (L_a)_{*,e} \text{ și} \\ (D_a)_{*,\widehat{e}} \circ \pi_{*,e} &= \pi_{*,a} \circ (R_a)_{*,e}. \end{aligned}$$

iii) Fie $h \in H$ și $\widetilde{X^*} \in L(G/H)$. Atunci, folosind ultimele două egalități, obținem:

$$
\begin{aligned}
\left(D_{h^{-1}}\right)_* (T_h)_{*,\hat{e}} \left(\widetilde{X^*_{\hat{e}}}\right) &= \left(D_{h^{-1}}\right)_* (T_h)_* \circ \pi_{*,e} (X^*_e) = \\
&= \left(D_{h^{-1}}\right)_* \circ \pi_{*,e} \circ (L_h)_{*,e} (X^*_e) = \\
&= \pi_* \circ \left(R_{h^{-1}}\right)_* \circ (L_h)_{*,e} (X^*_e) = \\
&= \pi_* \circ (Adh) (X^*_e) = (Adh) \left(\widetilde{X^*_{\hat{e}}}\right),
\end{aligned}
$$

unde

$$
(Adh) \left(\widetilde{X^*_{\hat{e}}}\right) = \pi_{*,e} \circ (Adh) (X^*_e), \quad (\forall)\, h \in H.
$$

Am obţinut următoarea egalitate:

$$
(Adh) \left(\widehat{X^*_{\hat{e}}}\right) = \left(D_{h^{-1}}\right)_* \circ (T_h)_* (X^*_{\hat{e}}), \quad (\forall)\, h \in H.
$$

iv) Aplicaţia $T : G \times (G/H) \to G/H$, $T(a, bH) = T_a(bH) = abH$ este o acţiune la stânga a grupului Lie G în varietatea G/H. Rezultă că aplicaţia

$$
\begin{aligned}
T \qquad & H \times (G/H) \to G/H, \\
T(h, bH) &= T_h(bH) = hbH = hHb = Hb = bH
\end{aligned}
$$

este o acţiune la stânga a grupului Lie H în varietatea G/H.

v) Aplicaţia $D : (G/H) \times H \to G/H$, $D(bH, h) = bhH$ este o acţiune la dreapta a grupului Lie H în varietatea G/H.

3.5. DEFINIŢIE. *Fie $\nabla : \mathcal{X}(G/H) \times \mathcal{X}(G/H) \to \mathcal{X}(G/H)$ o conexiune liniară pe G/H.*

3.5.1. *Spunem că ∇ este* **invariantă** *pe G/H (faţă de difeomorfismul T_h) dacă:*

$$
(T_h)_* (\nabla_X Y) = \nabla_{(T_h)_*(X)} (T_h)_* (Y), \quad (\forall)\, h \in H, \quad (\forall)\, X, Y \in \mathcal{X}(G/H).
$$

3.5.2. *Spunem că ∇ este* **invariantă** *pe G/H (faţă de difeomorfismul D_h) dacă:*

$$(D_h)_*(\nabla_X Y) = \nabla_{(D_h)_*(X)}(D_h)_*(Y),\ \ (\forall)\, h \in H,\ \ (\forall)\, X, Y \in \mathcal{X}(G/H).$$

3.5.3. *Spunem că ∇ este* **bi-invariantă** *pe G/H dacă este invariantă atât faţă de D_h, $(\forall)\, h \in H$, cât şi faţă de T_h, $(\forall)\, h \in H$.*

3.6. PROPOZIŢIE. *Fie G/H un spaţiu reductiv. Există o bijecţie între mulţimea conexiunilor bi-invariante pe G/H şi mulţimea aplicaţiilor $\mathbb{R}-$biliniare*

$$\alpha : M \times M \to M,\ M = L(G/H)$$

ce satisfac condiţia:

$$(Adh)(\alpha(X,Y)) = \alpha((Adh)(X), (Adh)(Y)),\ \ (\forall)\, h \in H.$$

(ultima egalitate ne spune că α este $AdH-$invariantă).

Demonstraţie. Fie ∇ o conexiune bi-invariantă pe G/H. Definim aplicaţia $\alpha : M \times M \to M$ prin:

$$\alpha\left(\widetilde{X^*}, \widetilde{Y^*}\right) = \left(\nabla_{\widetilde{X^*}} \widetilde{Y^*}\right)_{\widehat{e}},\ \ (\forall)\, \widetilde{X^*}, \widetilde{Y^*} \in M = L(G/H) \simeq T_{\widehat{e}}(G/H).$$

Să arătăm că α este $AdH-$invariantă. Fie $h \in H$. Avem

$$\begin{aligned}
(Adh)\left(\alpha\left(\widetilde{X^*}, \widetilde{Y^*}\right)\right) &= (Adh)\left(\nabla_{\widetilde{X^*}} \widetilde{Y^*}\right)_{\widehat{e}} = (D_{h^{-1}})_* \circ (T_h)_* \left(\nabla_{\widetilde{X^*}} \widetilde{Y^*}\right)_{\widehat{e}} = \\
&= (D_{h^{-1}})_* \left(\nabla_{(T_h)_*\left(\widetilde{X^*}\right)} (T_h)_* \left(\widetilde{Y^*}\right)\right)_{\widehat{e}} = \\
&= \left(\nabla_{(Adh)\left(\widetilde{X^*}\right)} (Adh)\left(\widetilde{Y^*}\right)\right)_{\widehat{e}} = \\
&= \alpha\left((Adh)\left(\widetilde{X^*}\right), (Adh)\left(\widetilde{Y^*}\right)\right),
\end{aligned}$$

adică α este $AdH-$invariantă.

Considerăm acum o aplicaţie $\alpha : M \times M \to M$, $\mathbb{R}-$biliniară, $AdH-$invariai
Vom arăta că aplicaţiei α i se poate asocia, prin relaţia

$$\alpha\left(\widetilde{X^*}, \widetilde{Y^*}\right) = \nabla_{\widetilde{X^*}} \widetilde{Y^*},\ \ (\forall)\, \widetilde{X^*}, \widetilde{Y^*} \in M,$$

o conexiune liniară ∇ bi-invariantă pe G/H.

Considerăm o bază $\left\{\widetilde{E_1^*},...,\widetilde{E_p^*}\right\}$ în $L(G/H)$, unde $p = \dim G - \dim H$. Definim

$$\nabla_{\widetilde{E_i^*}}\widetilde{E_j^*} = \alpha\left(\widetilde{E_i^*},\widetilde{E_j^*}\right),\ i,j \in \{1,...,p\}.$$

Fie $\widetilde{X^*},\widetilde{Y^*} \in L(G/H)$. Avem $\widetilde{X^*} = \widetilde{X^*}^i\widetilde{E_i^*}$ şi $\widetilde{Y^*} = \widetilde{Y^*}^j\widetilde{E_j^*}$, unde $\widetilde{X^*}^i,\widetilde{Y^*}^j \in \mathcal{F}(G/H)$. Avem: $\nabla_{\widetilde{X^*}}\widetilde{Y^*} = \widetilde{X^*}^i\widetilde{Y^*}^j\nabla_{\widetilde{E_i^*}}\widetilde{E_j^*} + \widetilde{X^*}\left(\widetilde{Y^*}^j\right)\widetilde{E_j^*}$. Deoarece $\nabla_{\widetilde{E_i^*}}\widetilde{E_j^*} \in M = L(G/H)$ rezultă că ∇ este stâng invariantă, adică invariantă faţă de difeomorfismul T_h, $(\forall)\, h \in H$. Să arătăm în continuare că ∇ este drept invariantă, adică invariantă faţă de difeomorfismul D_h, $(\forall)\, h \in H$. Fie $h \in H$. Avem:

$$\begin{aligned}
(D_{h^{-1}})_*\left(\nabla_{\widetilde{X^*}}\widetilde{Y^*}\right) &= (D_{h^{-1}})_*\left(\widetilde{X^*}^i\widetilde{Y^*}^j\nabla_{\widetilde{E_i^*}}\widetilde{E_j^*} + \widetilde{X^*}\left(\widetilde{Y^*}^j\right)\widetilde{E_j^*}\right) = \\
&= \left(\widetilde{X^*}^i\widetilde{Y^*}^j \circ D_h\right) \circ (D_{h^{-1}})_* \circ (T_h)_*\left(\nabla_{\widetilde{E_i^*}}\widetilde{E_j^*}\right) + \\
&\quad + \left(\widetilde{X^*}\left(\widetilde{Y^*}^j\right) \circ D_h\right)(D_{h^{-1}})_*\left(\widetilde{E_j^*}\right) = \\
&= \left(\widetilde{X^*}^i\widetilde{Y^*}^j \circ D_h\right)\nabla_{(D_{h^{-1}})_*(\widetilde{E_i^*})}(D_{h^{-1}})_*\left(\widetilde{E_j^*}\right) + \\
&\quad + \left(\widetilde{X^*}\left(\widetilde{Y^*}^j\right) \circ D_h\right)(D_{h^{-1}})_*\left(\widetilde{E_j^*}\right).
\end{aligned}$$

Pe de altă parte, avem:

$$\begin{aligned}
&\nabla_{(D_{h^{-1}})_*(\widetilde{X^*})}(D_{h^{-1}})_*\left(\widetilde{Y^*}\right) = \\
&\quad = \nabla_{\left(\widetilde{X^*}^i \circ D_h\right)(D_{h^{-1}})_*(\widetilde{E_i^*})}\left(\widetilde{Y^*}^j \circ D_h\right)(D_{h^{-1}})_*\left(\widetilde{E_j^*}\right) = \\
&\quad = \left(\widetilde{X^*}^i \circ D_h\right)\left(\widetilde{Y^*}^j \circ D_h\right)\nabla_{(D_{h^{-1}})_*(\widetilde{E_i^*})}(D_{h^{-1}})_*\left(\widetilde{E_j^*}\right) + \\
&\qquad + \left(\widetilde{X^*}^i \circ D_h\right)(D_{h^{-1}})_*\left(\widetilde{E_i^*}\right)\left(\widetilde{Y^*}^j \circ D_h\right)(D_{h^{-1}})_*\left(\widetilde{E_j^*}\right) = \\
&\quad = \left(\widetilde{X^*}^i\widetilde{Y^*}^j \circ D_h\right)\nabla_{(D_{h^{-1}})_*(\widetilde{E_i^*})}(D_{h^{-1}})_*\left(\widetilde{E_j^*}\right) + \\
&\qquad + \left(\widetilde{X^*}^i \circ D_h\right)\left(\widetilde{E_i^*}\left(\widetilde{Y^*}^j\right) \circ D_h\right)(D_{h^{-1}})_*\left(\widetilde{E_j^*}\right) = \\
&\quad = \left(\widetilde{X^*}^i\widetilde{Y^*}^j \circ D_h\right)\nabla_{(D_{h^{-1}})_*(\widetilde{E_i^*})}(D_{h^{-1}})_*\left(\widetilde{E_j^*}\right) + \\
&\qquad + \left(\widetilde{X^*}\left(\widetilde{Y^*}^j\right) \circ D_h\right)(D_{h^{-1}})_*\left(\widetilde{E_j^*}\right).
\end{aligned}$$

Am obţinut egalitatea

$$\begin{aligned}(D_{h^{-1}})_*\left(\nabla_{\widetilde{X^*}}\widetilde{Y^*}\right) &= \nabla_{(D_{h^{-1}})_*(\widetilde{X^*})}(D_{h^{-1}})_*\left(\widetilde{Y^*}\right), \\ (\forall)\, h &\in H,\ (\forall)\, \widetilde{X^*}, \widetilde{Y^*} \in L(G/H),\end{aligned}$$

ceea ce ne arată că ∇ este invariantă şi faţă de difeomorfismul D_h, $(\forall)\, h \in H$. Prin urmare, ∇ este bi-invariantă.

3.7. PROPOZIŢIE. *Fie ∇ o conexiune liniară bi-invariantă pe spaţiul omogen reductiv G/H, şi fie $\alpha : M \times M \to M$ aplicaţia $\mathbb{R}-$biliniară asociată lui ∇. Atunci expresiile tensorului de torsiune şi de curbură în punctul $\widehat{e} = \pi(e)$ sunt date de*

$$\begin{aligned}&T(X,Y) = \alpha(X,Y) - \alpha(Y,X) - [X,Y]_M;\\ &R(X,Y)Z = \alpha(X,\alpha(Y,Z)) - \alpha(Y,\alpha(X,Z)) -\\ &\qquad\qquad - \alpha([X,Y]_M, Z) - \left[[X,Y]_{L(H)}, Z\right],\end{aligned}$$

unde indicele M marchează componenta în descompunerea $L(G) = M \oplus L(H)$, iar $X, Y, Z \in M$.

Demonstraţie. Se folosesc formulele de definire ale tensorilor de torsiune şi de curbură, precum şi formulele:

$$\begin{aligned}[X,Y] &= [X,Y]_M + [X,Y]_{L(H)},\\ \alpha(X,Y) &= (\nabla_X Y)_{\widehat{e}}.\end{aligned}$$

3.8. OBSERVAŢIE. Fie G/H un spaţiu omogen reductiv, deci

$$L(G) = M \oplus L(H), \ \ (Adh)(M) \subset M, \ \ (\forall)\, h \in H.$$

Considerăm o conexiune liniară bi-invariantă ∇ pe G/H şi fie $\alpha : M \times M \to M$ aplicaţia $\mathbb{R}-$biliniară asociată lui ∇. Atunci imaginile subgrupurilor cu un parametru

$$\rho_X : \mathbb{R} \to G, \ \ X \in M$$

prin proiecţia canonică $\pi : G \to G/H$ sunt curbe autoparalele dacă şi numai dacă α satisface condiţia:

$$\alpha(X,X) = 0, (\forall)\, X \in M. \tag{3.1}$$

În adevăr, (3.1) are loc dacă şi numai dacă câmpul $X \in L(G)$ ce generează subgrupul cu un parametru $\rho_X : \mathbb{R} \to G$ satisface egalitatea $\nabla_X X = 0$.

3.9. PROPOZIŢIE. *Pe un spaţiu reductiv G/H există o unică conexiune liniară simetrică ∇ pentru care imaginile prin $\pi : G \to G/H$ ale subgrupurilor cu un parametru ale lui G sunt curbe $\nabla-$autoparalele. Aplicaţia $\mathbb{R}-$biliniară asociată lui ∇ este dată de:*

$$\alpha(X,Y) = \frac{1}{2}[X,Y]_M. \tag{3.2}$$

Demonstraţie. Este evident că din $\alpha(X,X) = 0$, rezultă

$$\alpha(X,Y) + \alpha(Y,X) = 0, \tag{3.3}$$

deci α este antisimetrică. Condiţia $T = 0$ se scrie:

$$\alpha(X,Y) - \alpha(Y,X) = [X,Y]_M. \tag{3.4}$$

Din (3.3) şi (3.4) se obţine (3.2).

§ 4. PSEUDOCONEXIUNI INVARIANTE PE GRUPURI LIE.

4.1. DEFINIŢIE. *Fie G un grup Lie şi $A \in \mathcal{T}_1^1(G)$.* **Câmpul tensorial** *A se numeşte* **stâng invariant** *dacă:*

$$(L_a)_*(A(X)) = A((L_a)_*(X)), \quad (\forall) X \in \mathcal{X}(G), \quad (\forall) a \in G.$$

4.2. DEFINIŢIE. *Fie G un grup Lie, $A \in \mathcal{T}_1^1(G)$ şi D^A* **o pseudoconexiune** *pe G. D^A se numeşte* **stâng invariantă** *dacă:*

i) *A este câmp tensorial stâng invariant;*

ii) *pentru orice $a \in G$ şi orice $X, Y \in \mathcal{X}(G)$, avem:*

$$(L_a)_*\left(D_X^A Y\right) = D_{(L_a)_*(X)}^A (L_a)_*(Y). \tag{4.1}$$

Observaţie. Analog se definesc **pseudoconexiunile drept invariante.** O conexiune pseudoconexiune pe grupul Lie G, care este simultan stâng şi drept invariantă se numeşte **bi-invariantă.**

4.3. PROPOZIŢIE. *Fie G un grup Lie cu n dimensiuni şi fie $\{E_1, ..., E_n\}$ o bază în algebra Lie $L(G)$ a grupului G. Fie D^A o pseudoconexiune pe G. Dacă câmpul tensorial $A \in \mathcal{T}_1^1(G)$ este stâng invariant, atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) *Pseudoconexiunea D^A este stâng invariantă;*

(ii) $D_X^A Y \in L(G)$, $(\forall) X, Y \in L(G)$;

(iii) $D_{E_i}^A E_j \in L(G)$, $(\forall) i, j \in \{1, ..., n\}$.

Demonstraţie. (i) $\Rightarrow$ (ii). Deoarece pseudoconexiunea D^A este stâng invariantă, avem (4.1).

În particular, pentru $X, Y \in L(G)$ din (4.1), obţinem:

$$(L_a)_*\left(D_X^A Y\right) = D_{(L_a)_*(X)}^A (L_a)_*(Y), \quad (\forall) a \in G.$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Deoarece $D_X^A Y \in L(G)$, oricare ar fi $X, Y \in L(G)$, rezultă $D_{E_i}^A E_j \in L(G)$, $(\forall) i, j \in \{1, ..., n\}$.

(iii) $\Rightarrow$ (ii). Fie $X, Y \in L(G)$, deci $X = a^i E_i$, $Y = b^j E_j$, unde $a^1, ..., a^n$, $b^1, ..., b^n$ sunt constante reale. Din $\nabla_{E_i} E_j \in L(G)$, obţinem $a^i b^j \nabla_{E_i} E_j \in L(G)$, adică $\nabla_X Y \in L(G)$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Trebuie să arătăm că:

$$(L_a)_* \left(D^A_X Y\right) = D^A_{(L_a)_*(X)} (L_a)_* (Y), \quad (\forall) X, Y \in \mathcal{X}(M).$$

Fie $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ două câmpuri arbitrare. Avem $X = X^i E_i$, $Y = Y^j E_j$, unde $X^i, Y^j \in \mathcal{F}(G)$, $(\forall) i, j \in \{1, ..., n\}$.

Pentru orice $a \in G$, avem:

$$\begin{aligned}
(L_a)_* \left(D^A_X Y\right) &= (L_a)_* \left(D^A_{X^i E_i} Y^j E_j\right) = (L_a)_* \left(X^i D^A_{E_i} Y^j E_j\right) = \\
&= (L_a)_* \left(X^i Y^j D^A_{E_i} E_j\right) + (L_a)_* \left(X^i A(E_i)\left(Y^j\right) E_j\right) = \\
&= \left(X^i Y^j \circ L_{a^{-1}}\right)\left((L_a)_* \left(D^A_{E_i} E_j\right)\right) + \left(X^i A(E_i)\left(Y^j\right) \circ L_{a^{-1}}\right) E_j = \\
&= \left(X^i Y^j \circ L_{a^{-1}}\right) D^A_{E_i} E_j + \left(X^i A(E_i)\left(Y^j\right) \circ L_{a^{-1}}\right) E_j.
\end{aligned}$$

Pe de altă parte, avem:

$$\begin{aligned}
D^A_{(L_a)_*(X)} (L_a)_* (Y) &= D^A_{(L_a)_*(X^i E_i)} (L_a)_* \left(Y^j E_j\right) = \\
&= D^A_{\left(X^i \circ L_{a^{-1}}\right) E_i} \left(Y^j \circ L_{a^{-1}}\right) E_j = \\
&= \left(X^i \circ L_{a^{-1}}\right) D^A_{E_i} \left(Y^j \circ L_{a^{-1}}\right) E_j = \\
&= \left(X^i Y^j \circ L_{a^{-1}}\right) D^A_{E_i} E_j + \left(X^i A(E_i)\left(Y^j\right) \circ L_{a^{-1}}\right) E_j.
\end{aligned}$$

Acum este uşor de văzut că am obţinut (i).

4.4. <u>OBSERVAŢIE</u>. 4.4.1. Pseudoconexiunile invariante pe un spaţiu omogen reductiv au fost studiate de R. A. Marinosci.

4.4.2. Rezultate noi privind pseudoconexiunile invariante pe grupuri Lie au fost obţinute de V. Obădeanu [49].

CAPITOLUL IX

METRICI PSEUDO-RIEMANNIENE INVARIANTE PE UN GRUP LIE

§ 1. METRICI PSEUDO-RIEMANNIENE STÂNG INVARIANTE ŞI BI-INVARIANTE PE UN GRUP LIE.

1.1. DEFINIŢIE. *Fie G un grup Lie de dimensiune n şi g o metrică pseudo-riemanniană pe G.*

Spunem că g este metrică **stâng invariantă** *dacă oricare ar fi $X, Y \in L(G)$ funcţia*

$$g(X,Y) : G \to \mathbb{R},\ a \to g(X,Y)(a)$$

este constantă.

Observaţie. Analog se definesc metricile **drept invariante**.

1.2. DEFINIŢIE. *O metrică pseudo-riemanniană pe grupul Lie G se numeşte* **bi-invariantă** *dacă ea este simultan stâng şi drept invariantă.*

1.3. PROPOZIŢIE. *Fie g o metrică pseudo-riemanniană pe un grup Lie G. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) *metrica g este stâng invariantă;*

(ii) *toate translaţiile la stânga sunt izometrii, adică*

$$g\left((L_a)_*(X),(L_a)_*(Y)\right) \circ L_a = g(X,Y),\ \ (\forall)\, X,Y \in \mathcal{X}(G),\ \ (\forall)\, a \in G.$$

Demonstraţie. (i) $\Rightarrow$ (ii). Fie $\{E_1, ..., E_n\}$ o bază în algebra Lie $L(G)$ a grupului Lie G şi fie $X, Y \in \mathcal{X}(G)$ două câmpuri oarecare. Avem $X = X^i E_i$ şi $Y = Y^j E_j$, unde $X^i, Y^j \in \mathcal{F}(G)$, $(\forall)\, i,j \in \{1, ..., n\}$. Pentru oricare $a, b \in G$, rezultă:

$$
\begin{aligned}
g\left(\left(L_a\right)_*(X), \left(L_a\right)_*(Y)\right) \circ L_a(b) &= g\left(\left(L_a\right)_*\left(X^i E_i\right), \left(L_a\right)_*\left(Y^j E_j\right)\right)(ab) = \\
&= g\left(\left(X^i \circ L_{a^{-1}}\right)\left(L_a\right)_*\left(E_i\right), \left(Y^j \circ L_{a^{-1}}\right)\left(L_a\right)_*\left(E_j\right)\right)(ab) = \\
&= \left(\left(X^i \circ L_{a^{-1}}\right)\left(Y^j \circ L_{a^{-1}}\right)\right)(ab)\, g\left(E_i, E_j\right)(ab) = \\
&= X^i(b)\, Y^j(b)\, g\left(E_i, E_j\right)(b) = g(X, Y)(b),
\end{aligned}
$$

unde am folosit egalitatea $g\left(E_i, E_j\right)(ab) = g\left(E_i, E_j\right)(b)$, $(\forall)\, a, b \in G$.

Prin urmare, am obţinut

$$
g\left(\left(L_a\right)_*(X), \left(L_a\right)_*(Y)\right) \circ L_a = g(X, Y),
$$

oricare ar fi $X, Y \in \mathcal{X}(G)$ şi $(\forall)\, a \in G$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Deoarece toate translaţiile la stânga sunt izometrii, pentru orice $X, Y \in \mathcal{X}(G)$ şi orice $a \in G$, avem:

$$
g\left(\left(L_a\right)_*(X), \left(L_a\right)_*(Y)\right) \circ L_a = g(X, Y).
$$

În particular, pentru $X, Y \in L(G)$ din egalitatea anterioară rezultă:

$$
g(X, Y)(ab) = g(X, Y)(b), \quad (\forall)\, a, b \in G.
$$

În particular, luând $b = e$, obţinem:

$$
g(X, Y) = \text{const.}, \quad (\forall)\, X, Y \in L(G).
$$

1.4. PROPOZIŢIE. *Fie* $\{E_1, \ldots, E_n\}$ *o bază în algebra Lie* $L(G)$ *a grupului Lie* G.

i) *Există şi este unică metrica Riemann*

$$
g : \mathcal{X}(G) \times \mathcal{X}(G) \to \mathcal{F}(G),
$$

care pe $L(G)$ *este definită prin:*

$$(1.1) \qquad g(E_i, E_j) = \delta_{ij};$$

ii) *Metrica Riemann g definită prin formula* (1.1) *este stâng invariantă;*

iii) *Fie ∇ conexiunea Levi-Civita asociată metricii Riemann g. Considerăm conexiunea liniară*

$$\overline{\nabla} : \mathcal{X}(G) \times \mathcal{X}(G) \to \mathcal{X}(G),$$

definită prin

$$\overline{\nabla}_{E_i} E_j = 0, \ \ (\forall)\, i, j \in \{1, ..., n\}.$$

Notăm $A = \overline{\nabla} - \nabla$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(iii$_1$) $\overline{\nabla} = \nabla$;

(iii$_2$) *Algebra Lie $L(G)$ este abeliană;*

(iii$_3$) *Reprezentarea adjunctă a lui $L(G)$ este trivială;*

(iii$_4$) *Toate elementele algebrei de deformare $U(G, A)$ sunt câmpuri speciale.*

Demonstraţie. i) Presupunem că g este o metrică Riemann pe varietatea G. Fie $X, Y \in \mathcal{X}(G)$. Avem

$$X = X^i E_i, \ Y = Y^j E_j,$$

unde $X^1, ..., X^n, Y^1, ..., Y^n \in \mathcal{F}(G)$. Folosind formula (1.1), rezultă:

$$\begin{aligned} g(X, Y) &= g\left(X^i E_i, Y^j E_j\right) = X^i Y^j g(E_i, E_j) = X^i Y^j \delta_{ij} = \\ &= X^1 Y^1 + ... + X^n Y^n. \end{aligned}$$

Am obţinut formula

$$(1.2) \qquad g(X, Y) = X^1 Y^1 + ... + X^n Y^n.$$

Ţinând seama de formula (1.2), rezultă:

$$\begin{aligned}(1.3) \qquad g(X,Y) &= g(Y,X) \\ (1.4) \qquad g(X,X) &= \left(X^1\right)^2 + ... + (X^n)^2 \geq 0 \\ (1.5) \qquad g(X,X) &= 0 \Leftrightarrow X = 0.\end{aligned}$$

Din (1.3), (1.4) şi (1.5) rezultă că aplicaţia

$$g : \mathcal{X}(G) \times \mathcal{X}(G) \to \mathcal{F}(G)$$

definită prin formula (1.2) este o metrică Riemann pe varietatea G. Unicitatea lui g este evidentă. În adevăr, dacă g' este o altă metrică Riemann ce verifică (1.1), obţinem:

$$g'(X,Y) = X^1Y^1 + ... + X^nY^n, \ \ (\forall)\, X, Y \in \mathcal{X}(G).$$

Rezultă $g' = g$.

ii) Se foloseşte formula (1.1) şi definiţia 1.1.

iii) Pentru orice $X, Y, Z \in \mathcal{X}(G)$, avem:

$$\begin{aligned}2g(\nabla_X Y, Z) &= X(g(Y,Z)) + Y(g(X,Z)) - Z(g(X,Y)) + \\ &+ g([X,Y], Z) + g([Z,X], Y) - g([Y,Z], X).\end{aligned}$$

În particular, pentru $X = E_i$, $Y = E_j$ şi $Z = E_k$, obţinem:

$$\begin{aligned}2g(\nabla_{E_i} E_j, E_k) &= E_i(\delta_{jk}) + E_j(\delta_{ik}) - E_k(\delta_{ij}) + \\ &+ g([E_i, E_j], E_k) + g([E_k, E_i], E_j) - g([E_j, E_k], E_i).\end{aligned}$$

Dacă notăm:

$$\nabla_{E_i} E_j = B^k_{ij} E_k, \ \ [E_k, E_i] = C^j_{ki} E_j,$$

atunci obţinem:

$$2B^s_{ij}\delta_{sk} = C^s_{ij}\delta_{sk} + C^s_{ki}\delta_{sj} - C^s_{jk}\delta_{si},$$

sau

$$(1.6) \qquad B_{ij}^k = \frac{1}{2}\left(C_{ij}^k - C_{jk}^i + C_{ki}^j\right).$$

(iii$_1$) $\Rightarrow$(iii$_2$). Din $\overline{\nabla} = \nabla$ obţinem $B_{ij}^k = 0$ şi, ţinând seama de (1.6), rezultă:

$$(1.7) \qquad C_{ij}^k - C_{jk}^i + C_{ki}^j = 0.$$

Din relaţiile (1.7), obţinem:

$$(1.7') \qquad C_{jk}^i - C_{ki}^j + C_{ij}^k = 0.$$

Adunând relaţiile (1.7) şi (1.7′), rezultă:

$$(1.8) \qquad C_{jk}^i = 0.$$

Relaţiile (1.8) ne arată că algebra Lie $L(G)$ este abeliană.

(iii$_2$) $\Rightarrow$ (iii$_1$). Este evident că relaţiile $[E_j, E_k] = 0$ implică $C_{jk}^i = 0$ şi deci $B_{jk}^i = 0$, adică $\overline{\nabla} = \nabla$.

(iii$_2$) $\Rightarrow$ (iii$_3$). Se foloseşte propoziţia 2.8 (Cap. V).

(iii$_1$) $\Rightarrow$ (iii$_4$). Se foloseşte definiţia 1.32.2.

COROLAR. *Dacă grupul Lie G este conex, atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) $\overline{\nabla} = \nabla$;

(ii) *Algebra Lie $L(G)$ este abeliană;*

(iii) *Reprezentarea adjunctă a lui $L(G)$ este trivială;*

(iv) *Câmpurile vectoriale stâng invariante şi cele drept invariante coincid;*

(v) *Reprezentarea adjunctă a lui G este trivială;*

(vi) *G este abelian;*

(vii) *Toate elementele algebrei de deformare $\mathcal{U}(G, A)$ sunt câmpuri speciale.*

Demonstraţie. Se foloseşte propoziţia anterioară şi propoziţia 2.9 (Cap. V).

Observaţie. Rezultate similare, precum şi alte rezultate referitoare la algebra de deformare $\mathcal{U}(G, A)$ pot fi urmărite în [26].

De asemenea, studiul unor obiecte geometrice în algebra de deformare asociată unui cuplu de conexiuni liniare stâng invariante pe un grup Lie, poate fi urmărit în [54].

1.5. PROPOZIŢIE. *Fie* $\{E_1, ..., E_n\}$ *o bază în algebra Lie* $L(G)$ *a grupului Lie* G. *Atunci:*

(i) *există o unică metrică pseudo-riemanniană de signatură* $\left(\underbrace{-,...,-}_{\nu \text{ ori}}, \underbrace{+,...,+}_{(n-\nu) \text{ ori}}\right)$, *cu proprietatea că*

$$g(E_i, E_j) = \delta_{ij}\varepsilon_j,$$

unde

$$\varepsilon_j = \begin{cases} 1, \text{ dacă } j = \nu + 1, ..., n \\ -1, \text{ dacă } j = 1, ..., \nu; \end{cases}$$

(ii) *metrica pseudo-riemanniană de la punctul precedent este stâng invariantă;*

(iii) *conexiunea Levi-Civita* ∇ *asociată metricii pseudo-riemanniene* g *este stâng invariantă. Dacă considerăm conexiunea* $\overline{\nabla}$ *definită prin*

$$\overline{\nabla}_{E_i} E_j = 0, \ \ (\forall)\, i, j \in \{1, ..., n\},$$

şi dacă notăm $A = \overline{\nabla} - \nabla$, *atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(iii_1) $\overline{\nabla} = \nabla$;

(iii_2) *Algebra Lie* $L(G)$ *este abeliană;*

(iii_3) *Reprezentarea adjunctă a lui* $L(G)$ *este trivială;*

(iii_4) *Toate elementele algebrei de deformare* $\mathcal{U}(G, A)$ *sunt câmpuri speciale.*

Demonstraţie. Se procedează ca la propoziţia 1.4.

Observaţie. Rezultate similare pot fi formulate şi pentru metricile pseudo-riemanniene drept invariante.

1.6. PROPOZIŢIE. *Fie g o metrică pseudo-riemanniană pe un grup Lie G şi fie ∇ conexiunea Levi-Civita asociată lui G. Dacă metrica g este stâng invariantă, atunci conexiunea ∇ este stâng invariantă.*

Demonstraţie. Ştim că conexiunea Levi-Civita asociată metricii g este definită prin formula

$$
\begin{aligned}
(1.9) \qquad 2g(\nabla_X Y, Z) &= X(g(Y,Z)) + Y(g(X,Z)) - Z(g(X,Y)) + \\
&+ g(X,[Z,Y]) + g(Z,[X,Y]) - g(Y,[X,Z]).
\end{aligned}
$$

Fie $\{E_1, ..., E_n\}$ o bază în $L(G)$. Dacă în (1.9) luăm $X = E_i$, $Y = E_j$, $Z = E_k$, atunci obţinem

$$
\begin{aligned}
(1.10) \quad 2g(\nabla_{E_i} E_j, E_k) &= E_i(g_{jk}) + E_j(g_{ik}) - E_k(g_{ij}) + g(E_i,[E_k,E_j]) + \\
&+ g(E_k,[E_i,E_j]) - g(E_j,[E_i,E_k]),
\end{aligned}
$$

unde

$$g_{ij} = g(E_i, E_j) \in \mathbb{R}.$$

Fie c^i_{jk} constantele de structură ale algebrei Lie $L(G)$, şi fie Γ^i_{jk} componentele conexiunii ∇, deci:

$$(1.11) \qquad [E_j, E_k] = c^i_{jk} E_i, \ \nabla_{E_j} E_k = \Gamma^i_{jk} E_i.$$

Din (1.10) şi (1.11), rezultă:

$$(1.12) \qquad 2g_{ks}\Gamma^s_{ij} = g_{is}c^s_{kj} + g_{ks}c^s_{ij} - g_{js}c^s_{ik}.$$

Deoarece g_{ij}, c^s_{kj} sunt constante, din relaţiile (1.12) obţinem Γ^s_{ij} =const. şi, folosind relaţiile (1.11), obţinem $\nabla_{E_i} E_j \in L(G)$, adică conexiunea ∇ este stâng invariantă.

Observaţie. În mod analog se demonstrează că *unei metrici pseudo-riemanniene, drept invariante i se asociază o conexiune Levi-Civita drept* *invariantă.* În concluzie, *unei metrici bi-invariante i se asociază o conexiune Levi-Civita bi-invariantă.*

1.7. PROPOZIŢIE.

(i) *Fie G un grup Lie şi $B : L(G) \times L(G) \to \mathbb{R}$ o formă $\mathbb{R}-$biliniară, simetrică, nedegenerată. Atunci există o unică metrică pseudo-riemanniană stâng invariantă*

$$g : \mathcal{X}(G) \times \mathcal{X}(G) \to \mathcal{F}(G)$$

cu aceeaşi signatură ca a lui B, astfel încât $g_e = B$ (adică g, pe $L(G) \times L(G)$, coincide cu B).

(ii) *Fiind dată o metrică pseudo-riemanniană stâng invariantă pe G, există o unică aplicaţie $B : L(G) \times L(G) \to \mathbb{R}$, cu proprietăţile de la* (i), *care să genereze pe g.*

Demonstraţie.

(i) Definim aplicaţia

$$g : \mathcal{X}(G) \times \mathcal{X}(G) \to \mathcal{F}(G)$$

prin formula

$$g(X,Y)(a) = B\left(\left(L_{a^{-1}}\right)_*(X_a), \left(L_{a^{-1}}\right)_*(Y_a)\right), \ (\forall)\, X, Y \in \mathcal{X}(G), \ a \in G,$$

unde $\left(L_{a^{-1}}\right)_* : T_aG \to T_eG$. Deoarece B este simetrică, rezultă că şi aplicaţia g este simetrică. Verificăm că g este $\mathcal{F}(G)-$liniară în primul argument. Pentru $X, Y \in \mathcal{X}(G)$, $f \in \mathcal{F}(G)$ şi $a \in G$, avem:

$$\begin{aligned} g(fX,Y)(a) &= B\left(\left(L_{a^{-1}}\right)_*(f(a)X_a), \left(L_{a^{-1}}\right)_*(Y_a)\right) = \\ &= f(a)\, g(X,Y)(a) = (fg(X,Y))(a). \end{aligned}$$

Am obţinut egalitatea:

$$g(fX,Y) = fg(X,Y), \ f \in \mathcal{F}(G), \ X, Y \in \mathcal{X}(G).$$

Analog obţinem:

$$g(X+Y,Z) = g(X,Z) + g(Y,Z).$$

Prin urmare, g este $\mathcal{F}(G)$ −liniară în primul argument. Cum g este simetrică, rezultă că g este $\mathcal{F}(G)$ −biliniară.

Să arătăm acum că g este nedegenerată. Presupunem că $g(X,Y) = 0$, $(\forall) Y \in \mathcal{X}(G)$, deci

$$g(X,Y)(a) = 0, \ \ (\forall) Y \in \mathcal{X}(G), \ \ (\forall) a \in G.$$

Rezultă

$$B\left(\left(L_{a^{-1}}\right)_* (X_a), \left(L_{a^{-1}}\right)_* (Y_a)\right) = 0, \ \ (\forall) Y \in \mathcal{X}(G), \ \ (\forall) a \in G.$$

Deoarece B este nedegenerată, iar

$$\left(L_{a^{-1}}\right)_* (T_a G) = T_e G \cong L(G), \ \ (\forall) a \in G,$$

rezultă

$$\left(L_{a^{-1}}\right)_* (X_a) = 0, \ \ (\forall) a \in G,$$

deci $X_a = 0$, $(\forall) a \in G$, adică $X = 0$.

Prin urmare, g este metrică pseudo-riemanniană pe G.

Verificăm că metrica g este stâng invariantă. Fie $\{E_1, ..., E_n\}$ o bază în algebra Lie $L(G)$. Pentru $X, Y \in \mathcal{X}(G)$, avem: $X = X^i E_i$, $Y = Y^j E_j$ cu $X^i, Y^j \in \mathcal{F}(G)$, $(\forall) i, j \in \{1, ..., n\}$.

Avem

$$\begin{aligned} g(X,Y)(a) &= B\left(\left(L_{a^{-1}}\right)_* (X_a), \left(L_{a^{-1}}\right)_* (Y_a)\right) = \\ &= B\left(\left(L_{a^{-1}}\right)_* \left(X^i(a) E_i(a)\right), \left(L_{a^{-1}}\right)_* \left(Y^j(a) E_j(a)\right)\right) = \\ &= X^i(a) Y^j(a) B\left(E_i(e), E_j(e)\right). \end{aligned}$$

Rezultă

$$g(X,Y) = B_{ij}X^iY^j,$$

unde am notat $B_{ij} = B(E_i(e), E_j(e)) \in \mathbb{R}$.

Pentru $X, Y \in L(G)$, avem $X = X^iE_i$, $Y = Y^jE_j$, cu X^i =const., Y^j =const., $(\forall)\, i, j \in \{1, ..., n\}$. Rezultă $g(X,Y)$ =const., $(\forall)\, X, Y \in L(G)$, adică metrica g este stâng invariantă.

Singurul lucru pe care-l mai avem de demonstrat este unicitatea lui g. Fie g şi $\overline{g}$ două metrici pseudo-riemanniene stâng invariante, astfel încât

$$g\,|_{L(G)\times L(G)} = \overline{g}\,|_{L(G)\times L(G)}\,.$$

Pentru $X = X^iE_i$, $Y = Y^jE_j \in \mathcal{X}(G)$, avem

$$g(X,Y) = X^iY^jg(E_i,E_j) = X^iY^j\overline{g}(E_i,E_j) = \overline{g}(X,Y),$$

deci $g = \overline{g}$.

Dacă $X \in L(G)$, avem $(L_{a^{-1}})_*(X_a) = X_e$. Rezultă $g_e = B$.

(ii) Fie g o metrică pseudo-riemanniană stâng invariantă pe grupul Lie G. Se constată uşor că aplicaţia $B = g\,|_{L(G)\times L(G)}$ verifică proprietăţile de la punctul (i).

Observaţii. i) Datorită izomorfismului $T_eG \to L(G)$, pentru $X \in L(G)$ am identificat X cu X_e.

ii) O propoziţie analoagă poate fi formulată şi pentru metricile pseudo-riemanniene drept invariante.

1.8. PROPOZIŢIE. *Fie G un grup Lie conex, g o metrică pseudo-riemanniană stâng invariantă pe G. Notăm cu $B : L(G) \times L(G) \to \mathbb{R}$ aplicaţia $\mathbb{R}-$biliniară, simetrică, nedegenerată asociată lui g (conform propoziţiei anterioare).*

Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(i) *Geodezicele prin e sunt subgrupuri cu un parametru;*

(ii) $B(X, [X,Y]) = 0$, $(\forall)\, X, Y \in L(G)$;

(iii) $B(X, [Y,Z]) = B([X,Y], Z)$, $(\forall)\, X, Y, Z \in L(G)$;

(iv) *g este invariantă faţă de translaţiile la dreapta;*

(v) *g este invariantă faţă de aplicaţia de inversare;*

(vi) $g\left(\left(I_a\right)_*(X), \left(I_a\right)_*(Y)\right) \circ I_a = g(X,Y)$, $(\forall)\, X,Y \in L(G)$, $(\forall)\, a \in G$, *unde* $I_a : G \to G$, $I_a(x) = axa^{-1}$, $a \in G$;

(vii) $g\left((adX)(Y), Z\right) + g\left(Y, (adX)(Z)\right) = 0$, $(\forall)\, X,Y,Z \in L(G)$.

Demonstraţie. (i) $\Rightarrow$ (ii). Deoarece geodezicele ce trec prin e sunt subgrupuri cu un parametru, avem

$$\nabla_{\overset{\bullet}{\widehat{\exp tX}}} \overset{\bullet}{\widehat{\exp tX}} = 0, \quad (\forall)\, X \in L(G).$$

Rezultă $\nabla_X X = 0$, $(\forall)\, X \in L(G)$.

Metrica g, fiind stâng invariantă, induce o conexiune Levi-Civita ∇ stâng invariantă. Conexiunea stâng invariantă ∇ este determinată de o aplicaţie $\mathbb{R}-$biliniară:

$$b : L(G) \times L(G) \to L(G), \; b(X,Y) = \nabla_X Y.$$

Prin urmare, avem:

$$b(X,X) = 0, \quad (\forall)\, X \in L(G).$$

Deoarece ∇ este conexiune metrică, avem:

$$Z\left(g(X,Y)\right) = g\left(\nabla_Z X, Y\right) + g\left(\nabla_Z Y, X\right), \quad (\forall)\, X,Y,Z \in \mathcal{X}(G).$$

Metrica g, fiind stâng invariantă, avem $g(X,Y)$ =const., $(\forall)\, X,Y \in L(G)$ şi deci avem $Z\left(g(X,Y)\right) = 0$, $(\forall)\, X,Y,Z \in L(G)$. Rezultă

$$g\left(\nabla_Z X, Y\right) + g\left(\nabla_Z Y, X\right) = 0, \quad (\forall)\, X,Y,Z \in L(G),$$

adică

$$B\left(b(Z,X), Y\right) + B\left(b(Z,Y), X\right) = 0, \quad (\forall)\, X,Y,Z \in L(G). \tag{1.13}$$

Pentru $Z = X$ de aici, avem

$$B(X, b(X, Y)) = 0, \ \ (\forall) X, Y \in L(G),$$

unde am folosit egalitatea $b(X, X) = 0$.

Conexiunea ∇, fiind simetrică, avem

$$\nabla_Z X - \nabla_X Z = [Z, X], \ \ (\forall) X, Z \in L(G),$$

adică

$$b(Z, X) - b(X, Z) = [Z, X], \ \ (\forall) X, Z \in L(G).$$

Rezultă

$$B(b(Z, X) - b(X, Z) - [Z, X], X) = 0, \ \ (\forall) X, Z \in L(G).$$

De aici, dacă ţinem seama de egalitatea $B(b(Z, X), X) = 0$, $(\forall) X, Z \in L(G)$, obţinem

$$B([Z, X], X) = 0, \ \ (\forall) X, Z \in L(G),$$

adică tocmai (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (i). Presupunem (ii) indeplinită. Pentru $Z = X$ din (1.13), rezultă:

$$B(b(X, X), Y) + B(b(X, Y), X) = 0, \ \ (\forall) X, Y \in L(G). \tag{1.14}$$

Din relaţia (1.13), pentru $Y = X$, obţinem:

$$B(b(Z, X), X) = 0, (\forall) X, Z \in L(G).$$

Cum conexiunea ∇ este simetrica, ultima egalitate se scrie

$$B(b(X, Z), X) + B([Z, X], X) = 0, \ \ (\forall) X, Z \in L(G)$$

şi ţinând seama de (ii), obţinem:

$$B(b(X, Z), X) = 0, \ \ (\forall) X, Z \in L(G).$$

De aici şi din relaţia (1.14), rezultă

$$B(b(X,X),Y)=0,\ \ (\forall)\,X,Y\in L(G)$$

şi deoarece B este nedegenerată, obţinem $b(X,X)=0$, $(\forall)\,X\in L(G)$, adică $\nabla_X X=0$, $(\forall)\,X\in L(G)$, ceea ce este echivalent cu faptul că geodezicele prin e sunt subgrupuri cu un parametru.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Ştim că

$$B(W,[W,Y])=0,\ \ (\forall)\,W,Y\in L(G).$$

Rezultă că avem:

$$B(X+Z,[X+Z,Y])=0,\ \ (\forall)\,X,Y,Z\in L(G).$$

De aici, pentru orice $X,Y,Z\in L(G)$, rezultă

$$B(X,[X,Y])+B(X,[Z,Y])+B(Z,[X,Y])+B(Z,[Z,Y])=0$$

şi, folosind (ii), obţinem

$$B(X,[Z,Y])+B(Z,[X,Y])=0,\ \ (\forall)\,X,Y,Z\in L(G),$$

adică tocmai (iii).

(iii) $\Rightarrow$ (ii). Pentru $Z=Y$, din (iii), obţinem

$$B([X,Y],Y)=0,\ \ (\forall)\,X,Y\in L(G),$$

adică tocmai (ii).

(iv) $\Rightarrow$ (v). Deoarece g este stâng invariantă, rezultă că translaţia la stânga L_a este izometrie, $(\forall)\,a\in G$. Condiţia (iv) arată că R_a este izometrie, $(\forall)\,a\in G$. Folosind formula

$$j_*(X_a)+(R_{a^{-1}})_*\circ(L_{a^{-1}})_*(X_a)=0_{a^{-1}},$$

stabilită în lema 3.7 (Cap. I), obţinem că şi aplicaţia de inversare este o izometrie, adică g este invariantă faţă de aplicaţia de inversare.

(v) $\Rightarrow$ (iv). Presupunem că avem îndeplinită condiţia (v), deci că j este o izometrie. Deoarece L_a este izometrie, pentru orice $a \in G$, rezultă că şi translaţia la dreapta

$$R_a = j \circ L_{a^{-1}} \circ j$$

este o izometrie, $(\forall)\, a \in G$, adică g este invariantă faţă de translaţiile la dreapta.

(iv) $\Rightarrow$ (vi). Avem: $I_a = L_a \circ R_{a^{-1}}$, $(\forall)\, a \in G$.

Deoarece g este invariantă faţă de translaţiile la stânga şi la dreapta, rezultă:

$$\begin{aligned} & g\left((I_a)_*(X), (I_a)_*(Y)\right) \circ I_a = \\ & \quad = g\left((L_a)_* \circ (R_{a^{-1}})_*(X), (L_a)_* \circ (R_{a^{-1}})_*(Y)\right) \circ (L_a \circ R_{a^{-1}}) = \\ & \quad = g\left((R_{a^{-1}})_*(X), (R_{a^{-1}})_*(Y)\right) \circ R_{a^{-1}} = g(X, Y). \end{aligned}$$

(vi) $\Rightarrow$ (iv). Se foloseşte egalitatea $I_a = L_a \circ R_{a^{-1}}$, $a \in G$.

(vi) $\Rightarrow$ (vii). Vom folosi formula [29]:

$$(adX)(Y) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \left(Ad(\exp tX)(Y)\right).$$

Pentru orice $X, Y, Z \in L(G)$, avem

$$g\left((adX)(Y), Z\right) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} g\left(Ad(\exp tX)(Y), Z\right) =$$

$$= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} g\left(Ad(\exp(-tX))\, Ad(\exp tX)(Y), Ad(\exp(-tX)(Z))\right) =$$

$$= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} g\left(Y, Ad(\exp(-tX))(Z)\right) = -g\left(Y, (adX)(Z)\right),$$

unde am folosit (vi) şi egalităţile:

$$Ada = (I_a)_*\,, \quad \exp(t+s)X = \exp tX \exp sX\,, \quad \exp 0 = e.$$

(vii) $\Rightarrow$ (vi). Prin ipoteză, avem:

$$g\left((adX)(Y), Z\right) = -g\left(Y, (adX)(Z)\right), \quad (\forall)\, X, Y, Z \in L(G).$$

Ţinând seama de egalitatea $Ad \circ \exp = \exp \circ ad$, pentru orice $X, Y, Z \in L(G)$, rezultă:

$$\begin{aligned} g\left(Ad(\exp X)(Y), Z\right) &= g\left(\exp(adX)(Y), Z\right) = \\ &= g\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(adX)^k}{k!}(Y), Z\right) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} g\left(Y, \frac{(-adX)^k}{k!}(Z)\right) = \\ &= g\left(Y, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-adX)^k}{k!}(Z)\right) = \\ &= g\left(Y, \exp(-adX)(Z)\right) = \\ &= g\left(Y, Ad(\exp(-X))(Z)\right) = \\ &= g\left(Y, Ad(\exp X)^{-1}(Z)\right). \end{aligned}$$

Am obţinut egalitatea

$$g\left(Ad(\exp X)(Y), Z\right) = g\left(Y, Ad(\exp X)^{-1}(Z)\right),$$

pentru orice $X, Y, Z \in L(G)$, şi, deoarece aplicaţia exponenţială realizează un difeomorfism analitic între o vecinătate V a lui $0 \in L(G)$ şi o vecinătate deschisă W a elementului neutru $e \in G$, rezultă relaţia

$$g\left((Ada)(Y), Z\right) = g\left(Y, \left(Ada^{-1}\right)(Z)\right),$$

pentru orice $a \in V$. Deoarece varietatea G este analitică şi conexă, conform principiului prelungirii analitice, ultima egalitate se extinde la întreg G. Dacă în ultima egalitate luăm

$$Y = Ad\left(a^{-1}\right)(X),$$

obţinem

$$g\left((Ada)\circ Ad\left(a^{-1}\right)(X), Z\right) = g\left(\left(Ada^{-1}\right)(X), \left(Ada^{-1}\right)(Z)\right),$$

adică

$$g(X, Z) = g\left(\left(Ada^{-1}\right)(X), \left(Ada^{-1}\right)(Z)\right).$$

(vii) $\Leftrightarrow$ (iii). Pentru orice $X, Y, Z \in L(G)$, avem

$$\begin{aligned} g(X, (adY)(Z)) + g((adY)(X), Z) &= g(X, [Y, Z]) + g([Y, X], Z) = \\ &= B(X, [Y, Z]) - B([X, Y], Z), \end{aligned}$$

şi este uşor de văzut că avem (vii) $\Leftrightarrow$ (iii).

1.9. Observaţie. Fie $\{E_1, ..., E_n\}$ o bază în algebra Lie $L(G)$. Atunci egalitatea (ii) din propoziţia anterioară se scrie

$$B(E_i, [E_i, E_j]) = 0 \Leftrightarrow c_{ij}^k B(E_i, E_k) = 0 \Leftrightarrow c_{ij}^k g_{ki} = 0,$$

unde $g_{ik} = B(E_i, E_k)$.

1.10. OBSERVAŢIE. Am văzut în propoziţia 1.4 că pe orice grup Lie există o metrică Riemann stâng invariantă. Acest rezultat rezultă şi folosind teorema Birkoff-Kakutami şi teorema Myers-Steenrod-Palais [26]. În adevăr, teorema Birkoff-Kakutami ne asigură că pe orice grup topologic G cu bază numărabilă (în particular, pe orice grup Lie) există o funcţie distanţă $d : G \times G \to \mathbb{R}$, cu $d(L_a(x), L_a(y)) = d(x, y)$, $(\forall)\, a, x, y \in G$, iar topologia spaţiului metric (G, d) coincide cu topologia iniţială a grupului topologic G.

Pe de altă parte, fie (M, g) şi (M', g') două spaţii Riemann, şi d (resp. d') distanţa indusă de g (resp. g'). Dacă $f : M \to M'$ este o izometrie surjectivă în sensul distanţei, adică

$$d'(f(x), f(y)) = d(x, y), \quad (\forall) x, y \in M,$$

atunci (conform teoremei Myers-Steenrod-Palais) rezultă că f este izometrie în sensul metricei, adică f este un difeomorfism analitic şi

$$g'(f_*(X), f_*(Y)) \circ f = g(X, Y), \quad (\forall) X, Y \in \mathcal{X}(M).$$

Deci pe orice grup Lie G există o funcţie distanţă faţă de care translaţiile stângi sunt izometrii, adică pe G există o metrică Riemann stâng invariantă.

1.11. În legatură cu existenţa metricilor Riemann bi-invariante, avem următoarea

PROPOZIŢIE. *Pe orice grup Lie compact G există o metrică bi-invariantă.*

Demontraţie. Din propoziţiile 1.4 şi 1.7, avem că pe G există cel puţin o metrică Riemann g_0 stâng invariantă. Definim funcţia
$g : \mathcal{X}(G) \times \mathcal{X}(G) \to \mathcal{F}(G)$,

$$g(X, Y) = \int_G g_0((R_a)_*(X), (R_a)_*(Y))\, d\mu(a).$$

Se verifică, prin calcul direct, că g este metrică Riemann bi-invariantă.

§ 2. CURBURA GRUPURILOR PSEUDO-RIEMANNIENE.

2.1. DEFINIŢIE. *Un grup Lie G împreună cu o metrică pseudo-riemanniană bi-invariantă se numeşte* **grup pseudo-riemannian.**

2.2. OBSERVAŢIE. 2.2.1. Fie g o metrică pseudo-riemanniană stâng invariantă pe un grup Lie G şi $B : L(G) \times L(G) \to \mathbb{R}$ forma biliniară, simetrică asociată lui g. Folosind propoziţia 1.8 şi observaţia 1.9, obţinem că *următoarele afirmaţii sunt echivalente*:

(i) (G, g) *este grup pseudo-riemannian;*

(ii) $B(X, [X, Z]) = 0$, $(\forall) X, Z \in L(G)$;

(iii) $B(X, [Y, Z]) = B([X, Y], Z)$, $(\forall) X, Y, Z \in L(G)$;

(iv) *geodezicele prin e sunt subgrupuri cu un parametru;*

(v) g *este invariantă faţă de aplicaţia de inversare;*

(vi) $g((I_a)_*(X), (I_a)_*(Y)) \circ I_a = g(X, Y)$, $(\forall) X, Y \in L(G)$, $(\forall) a \in G$, *unde* $I_a : G \to G$, $I_a(x) = axa^{-1}$, $a \in G$;

(vii) $g((adX)(Y), Z) + g(Y, (adX)(Z)) = 0$, $(\forall) X, Y, Z \in L(G)$;

(viii) $c_{ij}^k g_{ki} = 0$, *unde* c_{ij}^k *sunt constantele de structură ale algebrei Lie* $L(G)$ *relative la o bază* $\{E_1, ..., E_n\}$, *iar* $g_{ij} = g(E_i, E_j)$.

2.2.2. *Un grup Lie G împreună cu o metrică Riemann bi-invariantă se numeşte* **grup riemannian.**

2.3. PROPOZIŢIE. *Fie G un grup Lie, g o metrică pseudo-riemanniană stâng invariantă pe G, ∇ conexiunea Levi-Civita a spaţiului pseudo-riemannian (G, g), şi fie B şi b aplicaţiile $\mathbb{R}-$biliniare definite pe $L(G) \times L(G)$ cu valori în $\mathbb{R}$, respectiv $L(G)$ asociate lui g, respectiv ∇. Dacă notăm*

$$\begin{aligned} a(X, Y) &= \frac{1}{2}\{b(X, Y) - b(Y, X)\}, \\ S(X, Y) &= \frac{1}{2}\{b(X, Y) + b(Y, X)\}, \end{aligned}$$

atunci, oricare ar fi $X, Y, Z, W \in L(G)$, avem:

(i) $g(\nabla_X Y, Z) = \frac{1}{2}\{g([X, Y], Z) - g([Y, Z], X) + g([Z, X], Y)\}$;

(ii) $a(X, Y) = \frac{1}{2}[X, Y]$;

(iii) $B(S(X, Y), Z) = \frac{1}{2}\{B([Z, X], Y) + B(X, [Z, Y])\}$;

(iv)

$$\begin{aligned} g(X, R(Z,W)Y) &= \frac{1}{4}\{g(Y,[[Z,W],X]) - g([[Z,W],Y],X) - \\ &-g([[Y,X],Z],W) + g([[Y,X],W],Z)\} + \\ &+\frac{1}{4}\{g([Z,Y],[W,X]) - g([W,Y],[Z,X])\} + \\ &+\frac{1}{2}g([Y,X],[Z,W]) + g(S(X,W),S(Z,Y)) - \\ &-g(S(X,Z),S(W,Y)), \end{aligned}$$

unde $R \in \mathcal{T}_3^1(G)$ este câmpul tensorial de curbură al conexiunii ∇.

Demonstraţie. (i) Pentru orice câmpuri $X, Y, Z \in \mathcal{X}(G)$, avem:

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) &= X(g(Y,Z)) + Y(g(X,Z)) - Z(g(X,Y)) - \\ &-g(Y,[X,Z]) - g(X,[Y,Z]) + g(Z,[X,Y]). \end{aligned}$$

Pentru $X, Y, Z \in L(G)$ avem $g(Y,Z)$ =const., deci $X(g(Y,Z)) = 0$. Rezultă:

$$g(\nabla_X Y, Z) = \frac{1}{2}\{g([X,Y],Z) - g(X,[Y,Z]) + g([Z,X],Y)\}.$$

(ii) Conexiunea ∇, fiind simetrică, avem:

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y], \ (\forall)\, X, Y \in L(G).$$

Rezultă $a(X,Y) = \frac{1}{2}(b(X,Y) - b(Y,X)) = \frac{1}{2}(\nabla_X Y - \nabla_Y X) = \frac{1}{2}[X,Y]$.

(iii) Deoarece $S(X,Y) = \frac{1}{2}(\nabla_X Y + \nabla_Y X)$, rezultă

$$\begin{aligned} B(S(X,Y),Z) &= g(S(X,Y),Z) = \tfrac{1}{2}g(\nabla_X Y, Z) + \tfrac{1}{2}g(\nabla_Y X, Z) \overset{(i)}{=} \\ &\overset{(i)}{=} \tfrac{1}{4}\{g([X,Y],Z) - g(X,[Y,Z]) + g([Z,X],Y) + \\ &\quad + g([Y,X],Z) - g(Y,[X,Z]) + g([Z,Y],X)\} = \\ &= \tfrac{1}{2}\{g(X,[Z,Y]) + g(Y,[Z,X])\}. \end{aligned}$$

(iv) Se foloseşte identitatea lui Jacobi, precum şi formulele:

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z; \\ 2a(X,Y) &= b(X,Y) - b(Y,X); \\ 2S(X,Y) &= b(X,Y) + b(Y,X). \end{aligned}$$

2.4. PROPOZIŢIE. *Fie* (G, g) *un grup pseudo-riemannian. Notăm cu* ∇ *conexiunea Levi-Civita a spaţiului pseudo-riemannian* (G, g) *şi fie* $R \in \mathcal{T}_3^1(G)$ *câmpul tensorial de curbură al conexiunii* ∇. *Pentru orice câmpuri* $X, Y, Z \in L(G)$, *avem:*

(i) $\nabla_X Y + \nabla_Y X = 0$;

(ii) $\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X,Y]$;

(iii) $R(X,Y)Z = -\frac{1}{4}[[X,Y],Z]$;

(iv) $g(X, R(Z,W)Y) = \frac{1}{4} g([X,Y],[Z,W])$.

Demonstraţie. (i) Deoarece metrica g este bi-invariantă, conform observaţiei 2.2, avem

$$B(X,[Z,Y]) + B(Y,[Z,X]) = 0, \ \ (\forall)\, X,Y,Z \in L(G),$$

unde B este aplicaţia $\mathbb{R}-$biliniară definită pe $L(G) \times L(G)$, asociată lui g. Folosind propoziţia anterioară (punctul (iii)), obţinem:

$$B(S(X,Y),Z) = 0, \ \ (\forall)\, X,Y,Z \in L(G).$$

Deoarece B este nedegenerată, avem $S(X,Y) = 0$, $(\forall)\, X,Y \in L(G)$, adică

$$\nabla_X Y + \nabla_Y X = 0, \ \ (\forall)\, X,Y \in L(G).$$

(ii) Din punctul precedent rezultă $\nabla_X Y = -\nabla_Y X$, $(\forall)\, X,Y \in L(G)$. Deoarece conexiunea ∇ este simetrică, avem

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y], \ \ (\forall)\, X,Y \in L(G),$$

şi deci obţinem $2\nabla_X Y = [X,Y]$, adică (ii).

(iii) Vom folosi identitatea lui Jacobi şi egalitatea stabilită la punctul precedent. Pentru orice câmpuri $X, Y, Z \in L(G)$, avem:

$$\begin{aligned}
R(X,Y)Z &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z = \\
&= \frac{1}{2}\nabla_X [Y,Z] - \frac{1}{2}\nabla_Y [X,Z] - \nabla_{[X,Y]} Z = \\
&= \frac{1}{4}[X,[Y,Z]] - \frac{1}{4}[Y,[X,Z]] - \frac{1}{2}[[X,Y],Z] = \\
&= -\frac{1}{4}[X,[Z,Y]] - \frac{1}{4}[Y,[X,Z]] - \frac{1}{4}[Z,[Y,X]] - \frac{1}{4}[Z,[Y,X]] = \\
&= -\frac{1}{4}[Z,[Y,X]] = -\frac{1}{4}[[X,Y],Z].
\end{aligned}$$

(iv) Ţinând seama de punctul precedent, avem:

$$g(X, R(Z,W)Y) = -\frac{1}{4}g(X,[[Z,W],Y]) = \frac{1}{4}B(X,[Y,[Z,W]]).$$

Deoarece metrica g este bi-invariantă, conform observaţiei 2.2, avem:

$$B(X,[Y,[Z,W]]) = B([X,Y],[Z,W]), \quad (\forall)\, X,Y,Z,W \in L(G).$$

Rezultă $g(X, R(Z,W)Y) = \frac{1}{4}g([X,Y],[Z,W])$, adică (iv).

2.5. Menţinem notaţiile de la 2.3.

PROPOZIŢIE. *Fie G un grup Lie şi g o metrică Riemann stâng invariantă pe G. Fie $U, V \in L(G)$ două câmpuri ortonormale, adică $g(U,U) = g(V,V) = 1$, $g(U,V) = 0$. Atunci:*

(i) *curbura secţională a 2−planului generat de U şi V este*

$$\begin{aligned}
K_{U\wedge V} &= \frac{1}{2}\{g([[U,V],U],V) + g(U,[V,[U,V]])\} - \frac{3}{4}g([U,V],[U,V]) + \\
&+ g(S(U,V),S(U,V)) - g(S(U,U),S(V,V));
\end{aligned}$$

(ii) *dacă (G,g) este grup riemannian, atunci*

$$K_{U\wedge V} = \frac{1}{4}g([U,V],[U,V]);$$

(iii) *curbura secţională a grupului riemannian* (G, g) *este nenegativă şi este nulă dacă şi numai dacă algebra Lie* $L(G)$ *este abeliană.*

Demonstraţie. (i) Ştim că avem

$$K_{U \wedge V} = \frac{g(U, R(U,V)V)}{g(U,U)g(V,V) - g(U,V)^2}.$$

Deoarece câmpurile U şi V sunt ortonormale, rezultă

$$K_{U \wedge V} = g(U, R(U,V)V)$$

şi ţinând seama de propoziţia 2.3 (punctul (iv)), rezultă:

$$\begin{aligned} K_{U \wedge V} &= g(U, R(U,V)V) = \frac{1}{4}\{g(V, [[U,V],U]) - g([[U,V],V],U) - \\ &\quad -g([[V,U],U],V) + g([[V,U],V],U) + g([U,V],[V,U])\} + \\ &\quad +\frac{1}{2}g([V,U],[U,V]) + g(S(U,V),S(U,V)) - g(S(U,U),S(V,V)). \end{aligned}$$

De aici, dacă ţinem seama de faptul că croşetul este anticomutativ, se obţine uşor (i).

(ii) Dacă scriem relaţia (iv) din propoziţia anterioară pentru $Z = X = U$, $Y = W = V$, rezultă:

$$K_{U \wedge V} = g(U, R(U,V)V) = \frac{1}{4}g([U,V],[U,V]).$$

(iii) Vom folosi faptul că g este metrică Riemann. Avem:

$$K_{U \wedge V} = \frac{1}{4}g([U,V],[U,V]) \geq 0.$$

Rezultă $K_{U \wedge V} = 0 \Leftrightarrow g([U,V],[U,V]) = 0 \Leftrightarrow [U,V] = 0$, adică dacă şi numai dacă algebra Lie $L(G)$ este abeliană.

Observaţie. Din punctul (iii) al ultimei propoziţii rezultă că *un grup riemannian are întotdeauna curbură secţională pozitivă.* Vom vedea mai târziu că *există grupuri Lie înzestrate cu metrici Riemann stâng invariante, dar care nu sunt bi-invariante şi a căror curbură secţională este negativă.*

2.6. PROPOZIŢIE. *Fie (G,g) un grup pseudo-riemannian. Atunci tensorul lui Ricci este dat de relaţia*

$$Ric\,|_{L(G)} = -\frac{1}{4}B^K,$$

unde $Ric\,|_{L(G)}$ este restricţia la $L(G)$ a tensorului Ricci, iar B^K este forma Killing a algebrei Lie $L(G)$.

Demonstraţie. Se ştie că

$$Ric(X,Y) = Tr(Z \to R(Z,X)Y).$$

Conform propoziţiei 2.4 (punctul (iii)), rezultă:

$$R(Z,X)Y = -\frac{1}{4}[[Z,X],Y].$$

Prin urmare, pentru orice $X, Y \in L(G)$, avem:

$$\begin{aligned} Ric(X,Y) &= -\frac{1}{4}Tr(Z \to [[Z,X],Y]) = \\ &= -\frac{1}{4}Tr(Z \to (adY) \circ (adX)(Z)) = \\ &= -\frac{1}{4}Tr((adY) \circ (adX)) = -\frac{1}{4}B^K(X,Y). \end{aligned}$$

2.7. PROPOZIŢIE. *Fie G un grup Lie semisimplu, B^K forma Killing a algebrei Lie $L(G)$ şi metrica pseudo-riemanniană g pe G, definită prin:*

$$g(X,Y) = B^K(X,Y),\ (\forall)\, X, Y \in L(G). \tag{2.1}$$

Atunci (G,g) este un spaţiu Einstein.

Demonstraţie. Grupul Lie G fiind semisimplu, avem că B^K este nedegenerată. B^K este o formă biliniară, simetrică, nedegenerată. Este evident că g definit prin formula (2.1) este o metrică pseudo-riemanniană stâng invariantă pe G. Ştim că forma Killing verifică relaţia:

$$(2.2) \qquad B^K([X,Y],Z) = B^K(X,[Y,Z]), \quad (\forall)\, X,Y \in L(G).$$

Din (2.1) şi (2.2) rezultă

$$g([X,Y],Z) = g(X,[Y,Z]), \quad (\forall)\, X,Y,Z \in L(G),$$

şi folosind observaţia 2.2, obţinem că metrica g este bi-invariantă. Conform propoziţiei anterioare, avem:

$$Ric(X,Y) = \frac{1}{4} g(X,Y), \quad (\forall)\, X,Y \in L(G).$$

Ştim că g, $Ric \in \mathcal{T}_2^0(G)$ şi că varietatea G este paralelizabilă.

Fie $\{E_1, ..., E_n\}$ o bază în $L(G)$. Pentru $X, Y \in \mathcal{X}(G)$, avem $X = X^i E_i$, $Y = Y^j E_j$ cu X^i, $Y^j \in \mathcal{F}(G)$. Rezultă:

$$\begin{aligned} Ric(X,Y) &= Ric\left(X^i E_i, Y^j E_j\right) = X^i Y^j Ric(E_i, E_j) = \\ &= X^i Y^j \frac{1}{4} g(E_i, E_j) = \frac{1}{4} g(X,Y). \end{aligned}$$

Prin urmare, (G, g) este un spaţiu Einstein.

Observaţie. În încheierea acestui paragraf prezentăm:

i) exemple de grupuri riemanniene cu curbură nulă (ex. 2.8 şi 2.9);

ii) exemple de metrici Riemann stâng invariante care nu sunt bi-invariante (ex. 2.10 şi 2.13);

iii) exemplu de grup riemannian cu curbură neconstantă (ex. 2.11);

iv) exemplu de grup Riemann cu curbură constantă pozitivă (ex. 2.12);

v) exemple de metrici Riemann stâng invariante cu curbură constantă negativă (ex. 2.10 şi 2.13).

2.8. EXEMPLU. Considerăm grupul Lie $G = \mathbb{R}^2 - \{0\}$ (a se vedea ex. 2.2.2 (Cap. I)). Am văzut în ex. 8.15.3 (Cap. I) că o bază în algebra Lie $L(G)$ a grupului Lie G este $\{E_1, E_2\}$, unde

$$\begin{aligned} E_1 &= x^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + x^2 \frac{\partial}{\partial x^2}, \\ E_2 &= -x^2 \frac{\partial}{\partial x^1} + x^1 \frac{\partial}{\partial x^2}. \end{aligned}$$

Din ultimele două egalităţi rezultă:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x^1} &= \frac{x^1}{(x^1)^2+(x^2)^2}E_1 - \frac{x^2}{(x^1)^2+(x^2)^2}E_2,\\ \frac{\partial}{\partial x^2} &= \frac{x^2}{(x^1)^2+(x^2)^2}E_1 + \frac{x^1}{(x^1)^2+(x^2)^2}E_2.\end{aligned}$$

Considerăm pe G metrica Riemann

$$g:\mathcal{X}(G)\times\mathcal{X}(G)\to\mathcal{F}(G),$$

definită prin

$$g(E_i,E_j)=\delta_{ij}.$$

Fie $g_{ij}=g\left(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right)$. Avem:

$$\begin{aligned}g_{11} &= g_{22}=\frac{1}{(x^1)^2+(x^2)^2},\\ g_{12} &= g_{21}=0.\end{aligned}$$

Simbolurile lui Christoffel construite cu ajutorul lui g_{ij} sunt:

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}1\\11\end{vmatrix} &= -\begin{vmatrix}1\\22\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2\\12\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2\\21\end{vmatrix}=\frac{-x^1}{(x^1)^2+(x^2)^2},\\ \begin{vmatrix}2\\11\end{vmatrix} &= -\begin{vmatrix}1\\12\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1\\21\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}2\\22\end{vmatrix}=\frac{x^2}{(x^1)^2+(x^2)^2}.\end{aligned}$$

Deoarece $R^1_{21\,2}=0$, rezultă că $R_{12\,12}=0$ şi deci (G,g) *este un spaţiu cu curbură constantă nulă.*

Observaţii. i) Un calcul simplu ne arată că avem $[E_i,E_j]=0$, $(\forall)\, i,j\in\{1,2\}$, deci *algebra Lie* $L(G)$ *este abeliană.* Conform unei propoziţii anterioare, conexiunea Levi-Civita ∇ asociată metricii g este dată de $\nabla_{E_i}E_j=0$, $(\forall)\, i,j\in\{1,2\}$. Rezultă

$$R(E_i, E_j) E_k = \nabla_{E_i} \nabla_{E_j} E_k - \nabla_{E_j} \nabla_{E_i} E_k - \nabla_{[E_i, E_j]} E_k = 0,$$

ceea ce ne arată că

$$R(X, Y) Z = 0, \quad (\forall) X, Y, Z \in \mathcal{X}(G),$$

adică $R = 0$.

ii) Deoarece algebra Lie $L(G)$ este abeliană, iar relaţia

$$B(X, [Y, Z]) = B([X, Y], Z)$$

este satisfăcută $(\forall) X, Y, Z \in L(G)$, conform propoziţiei 1.8 obţinem că g *este metrică bi-invariantă pe* G. Conform unei propoziţii anterioare, câmpul tensorial de curbură este dat de relaţia

$$g(R(W, X) Y, Z) = -\frac{1}{4} g([W, X], [Y, Z])$$

şi este uşor de văzut că obţinem $R = 0$.

2.9. EXEMPLU. Considerăm mulţimea

$$G = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \left(y^2 - z^2\right) x \neq 0\right\}$$

şi aplicaţia $\mu : G \times G \to G$ definită prin

$$\mu((x, y, z), (x', y', z')) = (xx', yz' + y'z, yy' + zz').$$

Se constată uşor că μ este o lege de grup în mulţimea G. Evident, G este varietate analitică reală de dimensiune trei. Deoarece μ este aplicaţie analitică, rezultă că varietatea G cu legea dată este *grup Lie de dimensiune trei.*

O baza în algebra Lie $L(G)$ a grupului Lie G este $\{E_1, E_2, E_3\}$, unde [31]:

$$\begin{aligned} E_1 &= x^1 \frac{\partial}{\partial x^1}; \\ E_2 &= x^3 \frac{\partial}{\partial x^2} + x^2 \frac{\partial}{\partial x^3}; \\ E_3 &= x^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + x^3 \frac{\partial}{\partial x^3}. \end{aligned}$$

Se constată uşor că algebra Lie $L(G)$ este abeliană.

Relaţia $B(X,[Y,Z]) = B([X,Y],Z)$ (din propoziţia 1.8) este satisfăcută $(\forall) X,Y,Z \in L(G)$. Prin urmare, *g este metrică bi-invariantă pe G*. Conform unei propoziţii anterioare, câmpul tensorial de curbură este dat de relaţia

$$g(R(W,X)Y,Z) = -\frac{1}{4} g([W,X],[Y,Z]),$$

şi este uşor de văzut că obţinem $R = 0$.

2.10. EXEMPLU. Considerăm aplicaţia $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$\left(\left(a^1,a^2\right),\left(a'^1,a'^2\right)\right) \to \left(a''^1,a''^2\right),$$

unde

$$\begin{cases} a''^1 = a^1 + a'^1 k^{-a^2} \\ a''^2 = a^2 + a'^2 \end{cases}, \ k > 0, \ k \neq 1.$$

Ne propunem următoarele:

(i) Să arătăm că legea dată determină pe varietatea $\mathbb{R}^2$ o structură de grup Lie.

(ii) Să determinăm câmpurile vectoriale stâng invariante.

(iii) Să scriem o bază $\{E_1, E_2\}$ în algebra Lie $L(G)$ a grupului Lie $G = \mathbb{R}^2$, şi să se afle constantele de structură relative la baza considerată.

(iv) Să precizăm dacă spaţiul Riemann (G,g) este cu curbură constantă, unde g este metrică Riemann stâng invariantă definită prin $g(E_i,E_j) = \delta_{ij}$.

Soluţii. (i) Se verifică uşor că legea dată determină pe varietatea $\mathbb{R}^2$ o structură de grup Lie. Elementul neutru al grupului Lie G este $e = (0,0)$.

Aplicaţia de inversare $j : G \to G$ se scrie: $j(a) = a^{-1} = \left(-a^1 k^{a^2}, -a^2\right)$, unde $a = (a^1, a^2) \in G$.

(ii) Fie x^1, x^2 funcţiile coordonate ale varietăţii $\mathbb{R}^2$, şi fie $\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}\right\}$ baza canonică a $\mathcal{F}(\mathbb{R}^2)-$modulului $\mathcal{X}(\mathbb{R}^2)$. Un câmp $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^2)$ este stâng invariant dacă

$$(*) \qquad X(a) = (L_a)_*(X_e), \ (\forall)\, a \in \mathbb{R}^2,$$

unde $e = (0,0) \in \mathbb{R}^2$, iar L_a este translaţia stângă a grupului Lie $\mathbb{R}^2$ definită de elementul $a \in \mathbb{R}^2$. Folosind $(*)$, avem:

$$(*') \qquad X(a)\left(x^i\right) = X_e\left(x^i \circ L_a\right), \ (\forall)\, a \in \mathbb{R}^2.$$

Pentru orice $a' \in \mathbb{R}^2$, avem $x^i \circ L_a(a') = x^i(aa') = a''^i$, $i \in \{1,2\}$, sau pe larg:

$$\begin{aligned} x^1 \circ L_a(a') &= x^1(a) + x^1(a')\, k^{-x^2(a)}; \\ x^2 \circ L_a(a') &= x^2(a) + x^2(a'). \end{aligned}$$

Rezultă:

$$\begin{aligned} x^1 \circ L_a &= x^1(a) \cdot 1 + x^1 k^{-x^2(a)}; \\ x^2 \circ L_a &= x^2(a) \cdot 1 + x^2. \end{aligned}$$

Folosind $(*')$, avem:

$$\begin{aligned} X^1(a) &= X_e\left(x^1 \circ L_a\right) = X_e^1 k^{-x^2(a)}; \\ X^2(a) &= X_e\left(x^2 \circ L_a\right) = X_e^2. \end{aligned}$$

Obţinem:

$$X(a) = X^i(a) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_a = X_e^1 k^{-x^2(a)} \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_a + X_e^2 \frac{\partial}{\partial x^2} \Big|_a .$$

Rezultă că orice câmp stâng invariant pe grupul Lie $\mathbb{R}^2$ se scrie sub forma $X = X^1(e)\, k^{-x^2} \frac{\partial}{\partial x^1} + X^2(e) \frac{\partial}{\partial x^2}$, sau $X = X^i(e)\, E_i$, unde

$$
\begin{aligned}
E_1 &= k^{-x^2}\frac{\partial}{\partial x^1};\\
E_2 &= \frac{\partial}{\partial x^2}.
\end{aligned}
$$

(iii) Ştim că aplicaţia:

$$f : X \in L(G) \to f(X) = X(e) \in T_e G,\ G = \mathbb{R}^2$$

este izomorfism de spaţii vectoriale. Deoarece $f(E_i) = E_i(e) = \frac{\partial}{\partial x^i}\,|_e$, rezultă că $\{E_1, E_2\}$ formează o bază în algebra Lie $L(G)$ a grupului Lie $G = \mathbb{R}^2$. Avem $[E_1, E_2] = (\ln k)\,E_1$. Deci constantele de structură ale algebrei Lie $L(G)$ relative la baza considerată sunt nule în afară de $c^1_{12} = -c^1_{21} = \ln k$.

Folosind rezultatele de la punctul (ii), avem

$$\frac{\partial}{\partial x^1} = k^{x^2}E_1,\ \frac{\partial}{\partial x^2} = E_2,$$

unde $\{E_1, E_2\}$ este baza algebrei Lie $L(G)$ determinată mai sus. Componentele $g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)$ ale lui g sunt:

$$g_{11} = k^{2x^2},\ g_{12} = g_{21} = 0,\ g_{22} = 1.$$

Simbolurile lui Christoffel de prima speţă sunt toate nule în afară de

$$|12, 1| = |21, 1| = -\,|11, 2| = k^{2x^2}\ln k.$$

Deoarece avem $g^{11} = k^{-2x^2}$, $g^{12} = g^{21} = 0$, $g^{22} = 1$, rezultă că simbolurile lui Christoffel de speţa a doua sunt toate nule în afară de:

$$\left|\begin{matrix}1\\12\end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix}1\\21\end{matrix}\right| = \ln k,\ \left|\begin{matrix}2\\11\end{matrix}\right| = -k^{2x^2}\ln k.$$

Calculăm R^1_{212}. Avem:

$$R^1_{212} = \frac{\partial \left|\begin{matrix}1\\22\end{matrix}\right|}{\partial x^1} - \frac{\partial \left|\begin{matrix}1\\21\end{matrix}\right|}{\partial x^2} + \left|\begin{matrix}1\\11\end{matrix}\right| \left|\begin{matrix}1\\22\end{matrix}\right| + \left|\begin{matrix}1\\21\end{matrix}\right| \left|\begin{matrix}2\\22\end{matrix}\right| -$$

$$- \left|\begin{matrix}1\\12\end{matrix}\right| \left|\begin{matrix}1\\21\end{matrix}\right| - \left|\begin{matrix}1\\22\end{matrix}\right| \left|\begin{matrix}2\\21\end{matrix}\right| = -\left(\ln k\right)^2.$$

Rezultă:

$$R_{1212} = g_{11} R^1_{212} = -k^{2x^2} \left(\ln k\right)^2.$$

Deoarece $g_{11}g_{22} - \left(g_{12}\right)^2 = k^{2x^2}$, rezultă:

$$R_{1212} = K\left(g_{11}g_{22} - \left(g_{12}\right)^2\right),$$

unde $K = -\left(\ln k\right)^2$. Prin urmare, $(\mathbb{R}^2, g)$ este un *spaţiu cu curbură constantă negativă*.

Observaţie. La acelaşi rezultat se putea ajunge mai simplu. Fie ∇ conexiunea Levi-Civita asociată metricii g, $g\left(E_i, E_j\right) = \delta_{ij}$. Avem:

$$\begin{aligned}
g\left(\nabla_{E_1} E_1, E_1\right) &= \frac{1}{2}\left\{g\left(\left[E_1, E_1\right], E_1\right) - g\left(\left[E_1, E_1\right], E_1\right) + g\left(\left[E_1, E_1\right], E_1\right)\right\} = \\
&= 0 = g\left(\left(-\ln k\right) E_2, E_1\right), \\
g\left(\nabla_{E_1} E_1, E_2\right) &= \frac{1}{2}\left\{g\left(\left[E_1, E_1\right], E_2\right) - g\left(\left[E_1, E_2\right], E_1\right) + g\left(\left[E_2, E_1\right], E_1\right)\right\} = \\
&= \frac{1}{2}\left\{-g\left(\left(\ln k\right) E_1, E_1\right) - g\left(\left(\ln k\right) E_1, E_1\right)\right\} = \\
&= g\left(\left(-\ln k\right) E_2, E_2\right).
\end{aligned}$$

Am obţinut:

$$g\left(\nabla_{E_1} E_1, E_i\right) = g\left(\left(-\ln k\right) E_2, E_i\right), \quad (\forall)\, i \in \{1, 2\}.$$

Rezultă:

$$g\left(\nabla_{E_1}E_1 + (\ln k)\, E_2, E_i\right) = 0, \quad (\forall)\, i \in \{1,2\}\,.$$

Deoarece metrica g este nedegenerată, obţinem $\nabla_{E_1}E_1 = -(\ln k)\, E_2$. Analog obţinem:

$$\begin{aligned}
\nabla_{E_1}E_2 &= (\ln k)\, E_1, \\
\nabla_{E_2}E_1 &= \nabla_{E_2}E_2 = 0.
\end{aligned}$$

Partea simetrică a conexiunii ∇ este:

$$\begin{aligned}
S(E_1, E_1) &= -(\ln k)\, E_2; \\
S(E_2, E_2) &= 0; \\
S(E_1, E_2) &= S(E_2, E_1) = \frac{1}{2}(\ln k)\, E_1.
\end{aligned}$$

Folosind o propoziţie anterioară, obţinem:

$$K_{E_1 \wedge E_2} = \frac{1}{2}\left\{g\left(\left[\left[E_1, E_2\right], E_1\right], E_2\right) + g\left(E_1, \left[E_1, E_2\right]\right)\right\} -$$

$$-\frac{3}{4} g\left(\left[E_1, E_2\right], \left[E_1, E_2\right]\right) + g\left(S\left(E_1, E_2\right), S\left(E_1, E_2\right)\right) -$$

$$-g\left(S\left(E_2, E_2\right), S\left(E_1, E_1\right)\right) = -\ln^2 k.$$

Rezultă că *varietatea Riemann* (G, g) *este un spaţiu cu curbură constantă negativă* $-(\ln k)^2$.

Observaţie. Conform unei propoziţii anterioare, *metrica g nu poate fi bi-invariantă, deoarece curbura secţională este negativă.* Acest exemplu ne oferă o *metrică stâng invariantă care nu este bi-invariantă.* Este uşor de văzut că acest lucru putea fi verificat direct, arătând de exemplu că există $X, Y \in L(G)$, astfel încât

$$B(X,[X,Y]) \neq 0.$$

În adevăr, luând $X = E_1$ şi $Y = E_2$, avem:

$$g(E_1,[E_1,E_2]) = \ln k \neq 0.$$

(ştim din ipoteză că $k \neq 1$).

2.11. <u>EXEMPLU</u>. Considerăm grupul Lie $G = \mathbb{R}^4 - \{0\}$ (a se vedea exemplul 3.7 din Capitolul V). Am văzut că constantele de structură ale algebrei Lie $L(G)$ relative la baza fixată $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ sunt toate nule, în afară de $c_{34}^2 = c_{42}^3 = c_{23}^4 = -c_{43}^2 = -c_{24}^3 = -c_{32}^4 = 2$.

Considerăm pe G metrica g definită prin

$$g(E_i, E_j) = \delta_{ij},\ i,j \in \{1,2,3,4\}.$$

Ştim că metrica g este stâng invariantă. Vom arăta că g este bi-invariantă. Vom demonstra că condiţia

$$(*) \qquad \sum_{k=1}^{4} c_{ij}^k g_{kj} = 0$$

este verificată, $(\forall)\, i,j \in \{1,2,3,4\}$ şi, conform observaţiei 1.9, va rezulta că *g este metrică bi-invariantă.*

Deoarece $g_{ij} = \delta_{ij}$, condiţia $(*)$ se scrie

$$(*') \qquad c_{ij}^1\delta_{1j} + c_{ij}^2\delta_{2j} + c_{ij}^3\delta_{3j} + c_{ij}^4\delta_{4j} = 0.$$

Condiţia $(*')$ este evident satisfăcută, deci g este bi-invariantă. *Rezultă că (G,g) este un grup riemannian.*

<u>Observaţii</u>. i) *Grupul Riemann (G,g) nu este varietate cu curbură constantă.*

În adevăr, să presupunem că spaţiul (G,g) este cu curbură constantă. Rezultă că există $k \in \mathbb{R}$, astfel încât

$$K_{U\wedge V} = k, \quad (\forall)\, U, V \in \mathcal{X}(G).$$

Conform unei propoziţii anterioare, avem:

$$K_{U\wedge V} = \frac{1}{4} g\left([U,V], [U,V]\right).$$

Folosind această formulă, obţinem:

$$\begin{aligned} K_{E_2\wedge E_3} &= \frac{1}{4} g\left(2E_4, 2E_4\right) = 1, \\ K_{E_1\wedge E_2} &= \frac{1}{4} g\left([E_1, E_2], [E_1, E_2]\right) = 0. \end{aligned}$$

Egalităţile

$$K_{E_2\wedge E_3} = 1 \text{şi } K_{E_1\wedge E_2} = 0$$

contrazic presupunerea că spaţiul (G, g) este cu curbură constantă.

ii) *Grupul Riemann* (G, g) *nu este varietate Einstein.*

În adevăr, să presupunem că (G, g) este un spaţiu Einstein, deci există $c \in \mathbb{R}$, astfel încât

$$(*) \qquad Ric\,(X, Y) = cg\,(X, Y), \quad (\forall)\, X, Y \in \mathcal{X}(G).$$

Conform unei propoziţii anterioare, avem

$$Ric\,|_{L(G)} = -\frac{1}{4} B^K,$$

unde B^K este forma Killing a algebrei Lie $L(G)$. Conform exemplului 3.7 (Cap. V), rezultă

$$Ric\,|_{L(G)} = 2\left(\lambda^2 \otimes \lambda^2 + \lambda^3 \otimes \lambda^3 + \lambda^4 \otimes \lambda^4\right),$$

unde $\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3, \lambda^4$ sunt $1-$formele duale câmpurilor E_1, E_2, E_3, E_4, adică $\lambda^i(E_j) = \delta^i_j$, $(\forall)\, i,j \in \{1,2,3,4\}$. Prin liniaritate, obţinem:

$$Ric = 2\left(\lambda^2 \otimes \lambda^2 + \lambda^3 \otimes \lambda^3 + \lambda^4 \otimes \lambda^4\right).$$

Pentru $X = Y = E_1$, din ultima egalitate şi din $(*)$, rezultă:

$$\begin{aligned} c &= Ric(E_1, E_1) = \\ &= 2\left\{\lambda^2(E_1)\lambda^2(E_1) + \lambda^3(E_1)\lambda^3(E_1) + \lambda^4(E_1)\lambda^4(E_1)\right\} = 0. \end{aligned}$$

Analog, pentru $X = Y = E_2$, obţinem $c = Ric(E_2, E_2) = 2$, ceea ce contrazice presupunerea că (G, g) este spaţiu Einstein.

2.12. EXEMPLU. Considerăm grupul Lie S^3. Ştim că o bază în algebra Lie $L(S^3)$ este (a se vedea exemplul 3.8, Cap. VI) alcatuită din câmpurile $E_2|_{S^3}$, $E_3|_{S^3}$, $E_4|_{S^3}$. Considerăm metrica Riemann g pe S^3, definită prin:

$$g\left(E_i|_{S^3}, E_j|_{S^3}\right) = \delta_{ij},\ \ i,j \in \{2,3,4\}.$$

Este evident că *metrica g este stâng invariantă.* Vom arăta că *g este metrică bi-invariantă.* Acest lucru rezultă uşor dacă ţinem seama de faptul că condiţia

$$\sum_{k=1}^{3} c_{ij}^k g_{kj} = 0$$

este întotdeauna verificată (c_{ij}^k sunt constantele de structură ale algebrei Lie $L(S^3)$ relative la baza considerată).

Prin urmare, (S^3, g) este grup Riemann de dimensiune trei. Vom arăta că *grupul riemannian (S^3, g) este o varietate cu curbură constantă pozitivă.* Dacă notăm $E_i = E_i|_{S^3}$, $i \in \{2,3,4\}$, atunci, folosind propoziţia 2.5, rezultă:

$$\begin{aligned} K_{E_2 \wedge E_3} &= \frac{1}{4} g\left([E_2, E_3], [E_2, E_3]\right) = \frac{1}{4} g\left(c_{23}^4 E_4, c_{23}^4 E_4\right) = \\ &= \frac{1}{4} g(E_4, E_4) = 1. \end{aligned}$$

Analog obţinem:

$$K_{E_2\wedge E_4} = K_{E_3\wedge E_4} = 1.$$

Prin liniaritate se obţine

$$K_{X\wedge Y} = 1,$$

oricare ar fi câmpurile necoliniare $X, Y \in \mathcal{X}(S^3)$. Rezultă că (S^3, g) *este un spaţiu cu curbură constantă pozitivă* $K = 1$.

2.13. PROPOZIŢIE. *Considerăm un număr întreg* $n > 1$ *şi mulţimea*

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & sI_{n-1} \end{pmatrix} \mid v \in \mathbb{R}^{n-1}, s > 0 \right\} \subset GL(n, \mathbb{R}),$$

unde v *este un* $(n-1)$*−vector coloană, iar* I_{n-1} *este matricea unitate de ordinul* $n-1$. *Atunci:*

(i) G *este grup Lie;*

(ii) *matricele* $E_j = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e_j & 0 \end{pmatrix}$, $j < n$ *şi* $E_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-1} \end{pmatrix}$ *formează o bază în algebra Lie* $L(G)$ *a grupului Lie* G *(am notat cu* $\{e_1, ..., e_{n-1}\}$ *baza canonică a spaţiului* $\mathbb{R}^{n-1}$*);*

(iii) *dacă considerăm pe* G *metrica Riemann stâng invariantă* g, *definită prin* $g(E_i, E_j) = \delta_{ij}$, *atunci spaţiul Riemann* (G, g) *este cu curbură secţională constantă negativă;*

(iv) (G, g) *nu este grup riemannian.*

Demonstraţie. (i) Este evident că $I_n \in G$. Fie $A_1, A_2 \in G$. Avem

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & s_1 I_{n-1} \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & s_2 I_{n-1} \end{pmatrix},$$

unde $s_1 > 0$, $s_2 > 0$, iar v şi u sunt doi $(n-1)$−vectori coloană. Rezultă

$$A_1 A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v + s_1 u & s_1 s_2 I_{n-1} \end{pmatrix},\ A_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{v}{s_1} & \frac{1}{s_1} I_{n-1} \end{pmatrix},$$

şi este evident că $A_1A_2,\ A_1^{-1} \in G$. Rezultă că G este subgrup algebric al grupului $GL(n,\mathbb{R})$. Este uşor că G este varietate analitică reală. Operaţia grupală

$$\mu : G \times G \to G,\ \mu(A_1, A_2) = A_1A_2$$

este o aplicaţie analitică, deoarece componentele sunt funcţii analitice. Deci G este grup Lie.

(ii) Notăm

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ v & sI_{n-1} \end{pmatrix} \mid v \in \mathbb{R}^{n-1}, s \in \mathbb{R} \right\} \subset gl(n,\mathbb{R}) \cong L(GL(n,\mathbb{R})).$$

Vom arăta că $L(G) = L$. Arătăm mai întâi că $L(G) \subset L$. Pentru aceasta considerăm o curbă analitică

$$c : \mathbb{R} \to G,\ c(t) = \begin{pmatrix} s & 0 \\ v(t) & s(t) I_{n-1} \end{pmatrix},$$

cu proprietatea că $c(0) = e = I_n$. Avem:

$$\dot{c}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \dot{v}(t) & \dot{s}(t) I_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Rezultă $\dot{c}(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \dot{v}(0) & \dot{s}(0) I_{n-1} \end{pmatrix}$. Ştim că $\dot{c}(0) \in T_eG = L(G)$. Am obţinut $L(G) \subset L$.

Să arătăm acum că $L \subset L(G)$. Considerăm o matrice $A \in L$. Este evident că $A \in gl(n,\mathbb{R}) \cong L(GL(n,\mathbb{R}))$. Ştim că aplicaţia exponenţială a grupului Lie $GL(n,\mathbb{R})$ este

$$\exp : gl(n,\mathbb{R}) \to GL(n,\mathbb{R}),\ \exp A = I_n + \frac{A}{1!} + \ldots + \frac{A^r}{r!} + \ldots$$

Considerăm curba analitică

$$c : \mathbb{R} \to GL(n, \mathbb{R}), \ c(t) = \exp At.$$

Este evident că $c(0) = I_n$ şi $\overset{\bullet}{c}(0 = A)$. Vom arăta că $c(t) \in G$, $(\forall) t \in \mathbb{R}$. Deoarece $A \in L$, avem:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ v & sI_{n-1} \end{pmatrix}, \ s \in \mathbb{R}, \ v \in \mathbb{R}^{n-1}.$$

Se verifică prin inducţie că avem:

$$A^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ vs^{n-1} & s^n I_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Rezultă

$$\begin{aligned} c(t) &= \exp At = I + \frac{t}{1!}A + \frac{t^2}{2!}A^2 + \ldots + \frac{t^r}{r!}A^r + \ldots = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{t^k s^{k-1}}{k!}\right) & \left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{t^k s^k}{k!}\right) I_{n-1} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v\frac{e^{ts}-1}{s} & e^{ts} I_{n-1} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

şi cum $e^{ts} > 0$, obţinem $c(t) \in G$. Curba analitică

$$c : \mathbb{R} \to G, \ c(t) = \exp tA$$

verifică condiţiile

$$c(0) = I_n, \ \overset{\bullet}{c}(0) = A, \ \operatorname{Im} c \subset G.$$

Rezultă că $A \in L(G)$, deci $L \subset L(G)$. Prin urmare, $L(G) = L$.

(iii) Pentru orice $i, j \in \{1, \ldots, n-1\}$, avem:

$$[E_i, E_j] = E_i E_j - E_j E_i = 0, \ [E_n, E_j] = E_j.$$

Fie ∇ conexiunea Levi-Civita a spaţiului Riemann (G,g), unde $g(E_i,E_j)=\delta_{ij}$, cu $i,j\in\{1,...,n-1\}$, şi fie a, respectiv S partea antisimetrică, respectiv partea simetrică a conexiunii ∇.

Cazul I. $i,j\in\{1,...,n-1\}$, $i\neq j$. Avem $a(E_i,E_j)=\frac{1}{2}[E_i,E_j]=0$. Pentru $k\neq n$, rezultă:

$$\begin{aligned} g(S(E_i,E_j),E_k) &= \frac{1}{2}\{g([E_k,E_i],E_j)+g(E_i,[E_k,E_j])\}=0,\\ g(S(E_i,E_j),E_n) &= \frac{1}{2}\{g([E_n,E_i],E_j)+g(E_i,[E_n,E_j])\}=\\ &= \frac{1}{2}\{g(E_i,E_j)+g(E_i,E_j)\}=\delta_{ij}=0. \end{aligned}$$

Rezultă $g(S(E_i,E_j),E_s)=0$, $(\forall)\,s\in\{1,...,n\}$, deci avem

$$g(S(E_i,E_j),X)=0,\ \ (\forall)\,X\in L(G),$$

şi cum g este nedegenerată, obţinem $S(E_i,E_j)=0$. Prin urmare, avem:

$$\nabla_{E_i}E_j=a(E_i,E_j)+S(E_i,E_j)=0.$$

Cazul II. $i=j\in\{1,...,n-1\}$. Avem $a(E_i,E_j)=\frac{1}{2}[E_i,E_j]=0$. Pentru $k\neq n$, rezultă:

$$g(S(E_i,E_j),E_k)=\frac{1}{2}\{g([E_k,E_i],E_i)+g(E_i,[E_k,E_i])\}=0=g(E_n,E_k).$$

În continuare, avem:

$$g(S(E_i,E_j),E_n)=\frac{1}{2}\{g([E_n,E_i],E_i)+g(E_i,[E_n,E_i])\}=1=g(E_n,E_n).$$

În definitiv am obţinut relaţiile:

$$g(S(E_i,E_i),E_s)=g(E_n,E_s),\ \ (\forall)\,s\in\{1,...,n\}.$$

De aici rezultă $S(E_i, E_i) = E_n$. Obţinem $\nabla_{E_i} E_i = E_n$. Din cele două cazuri considerate rezultă:

$$\nabla_{E_i} E_j = \delta_{ij} E_n, \ \ (\forall)\, i, j \in \{1, ..., n-1\}.$$

În mod analog, se obţine:

$$\begin{aligned} \nabla_{E_i} E_n &= -E_i, \ \ (\forall)\, i \in \{1, ..., n-1\}; \\ \nabla_{E_n} E_s &= 0, \ \ (\forall)\, s \in \{1, ..., n\}. \end{aligned}$$

Calculăm curbura secţională a 2−planului generat de E_i şi E_n, folosind formula pusă în evidenţă în propoziţia 2.5. Avem:

$$K_{E_i \wedge E_n} = \frac{1}{2}\{g([[E_i, E_n], E_i], E_n) + g(E_i, [E_n, [E_i, E_n]])\} -$$

$$-\frac{3}{4} g([E_i, E_n], [E_i, E_n]) + g(S(E_i, E_n), S(E_i, E_n)) -$$

$$-g(S(E_i, E_i), S(E_n, E_n)) = -1.$$

Analog se arată că şi în celelalte cazuri *curbura secţională este constantă*, egală cu -1.

(iv) Observăm că avem $g(E_i, [E_i, E_n]) = -1$, deci condiţia (ii) din propoziţia 1.8 nu este îndeplinită. Aceasta ne arată că *metrica g nu este bi-invariantă şi deci (G, g) nu este grup riemannian.*

2.14. Fie G un grup Lie şi fie $\{E_1, ..., E_n\}$ o bază în algebra Lie $L(G)$. Considerăm conexiunile liniare $\overset{-}{\nabla}$, $\overset{+}{\nabla}$, $\overset{0}{\nabla}$ definite prin:

$$\overset{-}{\nabla}_{E_i} E_j = 0, \ \overset{+}{\nabla}_{E_i} E_j = [E_i, E_j], \ \overset{0}{\nabla}_{E_i} E_j = \frac{1}{2}[E_i, E_j], \ \ (\forall)\, i, j \in \{1, ..., n\}.$$

Fie g metrica stâng invariantă pe G, definită prin $g(E_i, E_j) = \delta_{ij}$. Notăm cu ∇ conexiunea Levi-Civita asociată lui g. Fie câmpurile tensoriale $\overset{-}{A}$, $\overset{+}{A}$, A, $\overset{-}{A'}$, $\overset{+}{A'}$, $A' \in \mathcal{T}_2^1(G)$ definite prin $\overset{-}{A} = \overset{-}{\nabla} - \overset{0}{\nabla}$, $\overset{+}{A} = \overset{+}{\nabla} - \overset{0}{\nabla}$, $A = \overset{+}{\nabla} - \overset{-}{\nabla}$, $\overset{-}{A'} = \overset{-}{\nabla} - \nabla$, $\overset{+}{A'} = \overset{+}{\nabla} - \nabla$, $A' = \overset{0}{\nabla} - \nabla$. Avem formulele

$$
\begin{aligned}
A(E_i, E_j) &= 2\overset{+}{A}(E_i, E_j) = -2\overset{-}{A}(E_i, E_j) = [E_i, E_j]; \\
2g(A'(E_i, E_j), E_k) &= g(E_j, [E_i, E_k]) - g([E_i, E_j], E_k) - g(E_i, [E_k, E_j]); \\
2g\left(\overset{+}{A'}(E_i, E_j), E_k\right) &= g([E_i, E_j], E_k) + g(E_j, [E_i, E_k]) - g(E_i, [E_k, E_j]); \\
2g(A'(E_i, E_j), E_k) &= g(E_j, [E_i, E_k]) - g(E_i, [E_k, E_j]).
\end{aligned}
$$

Este uşor de văzut că algebrele de deformare $\mathcal{U}(G, A), \mathcal{U}\left(G, \overset{-}{A}\right), \mathcal{U}\left(G, \overset{+}{A}\right)$ sunt anticomutative, iar algebra $\mathcal{U}(G, A')$ este comutativă.

<u>PROPOZIŢIE</u>. Considerăm algebrele de deformare $\mathcal{U}\left(G, \overset{+}{A'}\right), \mathcal{U}\left(G, \overset{-}{A'}\right)$, $\mathcal{U}(G, A'), \mathcal{U}\left(G, \overset{-}{A}\right), \mathcal{U}\left(G, \overset{+}{A}\right), \mathcal{U}(G, A)$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(i) toate elementele algebrei $\mathcal{U}(G, A)$ sunt câmpuri distinse;

(ii) toate elementele algebrei $\mathcal{U}\left(G, \overset{+}{A}\right)$ sunt câmpuri distinse;

(iii) toate elementele algebrei $\mathcal{U}\left(G, \overset{-}{A}\right)$ sunt câmpuri distinse;

(iv) toate elementele algebrei $\mathcal{U}\left(G, \overset{-}{A'}\right)$ sunt câmpuri distinse;

(v) pentru orice $i, j, k \in \{1, ..., n\}$, avem $c^i_{jk} + c^j_{ik} = 0$, unde c^i_{jk} sunt constantele de structură ale algebrei Lie $L(G)$ relative la baza $\{E_1, ..., E_n\}$.

(vi) metrica g este bi-invariantă.

<u>Demonstraţie</u>. (i) $\Rightarrow$ (v). Pentru orice $X, Y, Z \in \mathcal{X}(G)$, avem $g(A(Z, X), Y) + g(Z, A(Y, X)) = 0$. În particular, pentru $Z = E_i$, $X = E_j$, $Y = E_k$, obţinem (v).

(v) $\Rightarrow$ (i). Din (v) rezultă $c^s_{ki}\delta_{sj} + c^s_{ji}\delta_{sk} = 0$, sau

$$g([E_k, E_i], E_j) + g(E_k, [E_j, E_i]) = 0.$$

De aici obţinem

$$g\left(A\left(E_k, E_i\right), E_j\right) + g\left(E_k, A\left(E_j, E_i\right)\right) = 0, \quad (\forall)\, i, j, k \in \{1, ..., n\},$$

adică (i).

(i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii). Evident.

(iv) $\Leftrightarrow$ (v). Algebra $\mathcal{U}(G, A)$ este comutativă. Rezultă că toate elementele algebrei $\mathcal{U}(G, A')$ sunt câmpuri distinse dacă şi numai dacă $A' = 0 \Leftrightarrow c^i_{jk} + c^j_{ik} = 0$.

(v) $\Leftrightarrow$ (vi). Se foloseşte observaţia 2.2.

2.15. Exerciţiu. Fie $\mathbb{R}^4$ cu structura canonică de varietate analitică reală. Considerăm aplicaţia

$$\mu : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4,$$

definită prin

$$\mu\left(\left(a^1, a^2, a^3, a^4\right), \left(a'^1, a'^2, a'^3, a'^4\right)\right) = \left(a''^1, a''^2, a''^3, a''^4\right),$$

unde

$$\begin{cases} a''^1 = a^1 e^{ka'^3} + a'^1, \\ a''^2 = a^2 e^{-ka'^3} + a'^2, \\ a''^3 = a^3 + a'^3, \\ a''^4 = a^4 + a'^4 - h a^1 a'^2 e^{ka'^3}, \end{cases}$$

(k şi h sunt parametrii reali arbitrari). Se cere:

i) Să se arate că legea dată determină pe varietatea $\mathbb{R}^4$ o structură de grup Lie. Acest grup Lie va fi notat în continuare cu G.

ii) Să se scrie o bază $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ în algebra Lie $L(G)$ a grupului Lie G şi să se afle constantele de structură ale algebrei Lie $L(G)$ relative la baza considerată.

iii) Să se determine grupul de transformări cu un parametru asociat unui câmp stâng invariant $X \in L(G)$.

iv) Să se afle subgrupurile cu un parametru ale lui G.

v) Să se scrie aplicaţia exponenţială a grupului Lie G.

vi) Fie $a, b, c, d \in \{-1, 1\}$. Considerăm metrica pseudo-riemanniană stâng invariantă g pe G (a se vedea propoziţia 1.5) definită prin: $g(E_1, E_1) = a$, $g(E_2, E_2) = b$, $g(E_3, E_3) = c$, $g(E_4, E_4) = d$, $g(E_i, E_j) = 0$, unde $i \neq j$.

vi$_1$) Să se afle componentele $g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)$; $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$.

vi$_2$) Să se determine componentele conexiunii Levi-Civita a spaţiului pseudo-riemannian (G, g).

vi$_3$) Să se calculeze simbolurile lui Riemann de prima speţă şi componentele tensorului Ricci.

vi$_4$) Să se afle scalarul de curbură.

vi$_5$) Să se arate că metrica g este bi-invariantă dacă şi numai dacă G este grupul Lie aditiv $\mathbb{R}^4$ ($\Leftrightarrow k = h = 0$).

vii) Fie g' şi g'' două metrici pseudo-riemanniene de signatură (a, b, c, d) pe G, obţinute ca la punctul vi), corespunzătoare valorilor k', h' şi respectiv k'', h'' ale parametrilor k, h. Să se demonstreze că următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(vii$_1$) g' şi g'' conduc la aceeaşi conexiune Levi-Civita.

(vii$_2$) g' şi g'' conduc la acelaşi tensor de curbură.

(vii$_3$) g' şi g'' conduc la acelaşi tensor Ricci.

(vii$_4$) g' şi g'' admit aceleaşi geodezice.

(vii$_5$) $k' = k''$ şi $h' = h''$.

Soluţie. i) Se constată uşor că $(\mathbb{R}^4, \mu)$ este grup. Elementul neutru al acestui grup este $e = (0, 0, 0, 0)$. Aplicaţia de inversare este definită prin $j(a) = \left(-a^1 e^{-ka^3}, a^2 e^{ka^3}, -a^3, -a^4 + ha^1 a^2\right)$, unde $a = (a^1, a^2, a^3, a^4) \in G$. Se observă că componentele aplicaţiei μ sunt analitice, deci μ este aplicaţie analitică. Prin urmare, legea μ determină pe varietatea $\mathbb{R}^4$ o structură de grup Lie. Vom nota cu G acest grup Lie. G este conex, necompact. Avem, evident, $\dim G = 4$. Se observă că G este abelian dacă şi numai dacă $k = h = 0$, şi în acest caz G coincide cu grupul Lie aditiv $\mathbb{R}^4$.

ii) Fie x^1, x^2, x^3, x^4 funcţiile coordonate asociate hărţii (G, Id_G) pe G. Un câmp $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \in \mathcal{X}(G)$ este stâng invariant dacă şi numai dacă

$$X(a) = (L_a)_* (X_e), \quad (\forall)\, a \in G.$$

De aici rezultă:

$$X(a)\left(x^i\right) = X_e\left(x^i \circ L_a\right), \quad (\forall)\, a \in G, \; i \in \{1, 2, 3, 4\}.$$

Pentru orice $a = (a^1, a^2, a^3, a^4)$, $a' = \left(a'^1, a'^2, a'^3, a'^4\right) \in G$, avem:

$$x^i \circ L_a(a') = x^i(\mu(a, a')) = a''^i, \; i \in \{1, 2, 3, 4\}.$$

Rezultă:

$$\begin{aligned}
x^1 \circ L_a(a') &= x^1(a)\, e^{kx^3(a')} + x^1(a') \\
x^2 \circ L_a(a') &= x^2(a)\, e^{-kx^3(a')} + x^2(a') \\
x^3 \circ L_a(a') &= x^3(a) + x^3(a') \\
x^4 \circ L_a(a') &= x^4(a) + x^4(a') - hx^1(a)\, x^2(a')\, e^{kx^3(a')}.
\end{aligned}$$

Pentru orice $a \in G$, avem:

$$\begin{aligned}
x^1 \circ L_a &= x^1(a)\, e^{kx^3} + x^1 \\
x^2 \circ L_a &= x^2(a)\, e^{-kx^3} + x^2 \\
x^3 \circ L_a &= x^3(a) \cdot 1 + x^3 \\
x^4 \circ L_a &= x^4(a) \cdot 1 + x^4 - hx^1(a)\, e^{kx^3} x^2.
\end{aligned}$$

Folosind egalitățile $X^i(a) = X_e(x^i \circ L_a)$, $(\forall)\, a \in G$, obținem:

$$\begin{aligned}
X^1(a) &= x^1(a)\, kX_e^3 + X_e^1 \\
X^2(a) &= -kx^2(a)\, X_e^3 + X_e^2 \\
X^3(a) &= X_e^3 \\
X^4(a) &= X_e^4 - hx^1(a)\, X_e^2.
\end{aligned}$$

Avem deci

$$\begin{aligned}
X &= X^i \frac{\partial}{\partial x^i} = \left(X_e^1 + kX_e^3 x^1\right) \frac{\partial}{\partial x^1} + \left(X_e^2 - kX_e^3 x^2\right) \frac{\partial}{\partial x^2} + \\
&\quad + X_e^3 \frac{\partial}{\partial x^3} + \left(X_e^4 - hX_e^2 x^1\right) \frac{\partial}{\partial x^4},
\end{aligned}$$

unde $X_e = X_e^i \frac{\partial}{\partial x^i}\big|_e$. Deci un câmp $X \in L(G)$ se scrie:

$$X = X_e^1 E_1 + X_e^2 E_2 + X_e^3 E_3 + X_e^4 E_4,$$

unde

$$\begin{aligned}
E_1 &= \frac{\partial}{\partial x^1}\\
E_2 &= \frac{\partial}{\partial x^2} - hx^1 \frac{\partial}{\partial x^4}\\
E_3 &= kx^1 \frac{\partial}{\partial x^1} - kx^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x^3}\\
E_4 &= \frac{\partial}{\partial x^4}.
\end{aligned}$$

Ştim că aplicaţia $f : L(G) \to T_e G$, $f(Y) = Y_e$ este un izomorfism de spaţii vectoriale reale. Avem: $f(E_i) = E_i(e) = \frac{\partial}{\partial x^i} \big|_e$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Deoarece $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} \big|_e, \frac{\partial}{\partial x^2} \big|_e, \frac{\partial}{\partial x^3} \big|_e, \frac{\partial}{\partial x^4} \big|_e \right\}$ este bază în $T_e G$, rezultă că $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ este o bază în $L(G)$. Avem:

$$\begin{aligned}
[E_1, E_2] &= -hE_4, \;\; [E_1, E_3] = kE_1, \;\; [E_2, E_3] = -kE_2,\\
[E_1, E_4] &= [E_2, E_4] = [E_3, E_4] = 0.
\end{aligned}$$

Constantele de structură ale algebrei Lie $L(G)$, relative la baza $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ sunt nule, în afară de

$$c_{21}^4 = -c_{12}^4 = h, \;\; c_{13}^1 = -c_{31}^1 = k, \;\; c_{23}^2 = -c_{32}^2 = -k.$$

iii) Fie $X = a^1 E_1 + a^2 E_2 + a^3 E_3 + a^4 E_4 \in L(G)$, unde a^1, a^2, a^3, a^4 sunt constante reale. Scriem câmpul X sub forma:

$$X = \left(a^1 + a^3 kx^1\right) \frac{\partial}{\partial x^1} + \left(a^2 - a^3 kx^2\right) \frac{\partial}{\partial x^2} + a^3 \frac{\partial}{\partial x^3} + \left(a^4 - a^2 hx^1\right) \frac{\partial}{\partial x^4}.$$

Ecuaţiile diferenţiale ale traiectoriilor câmpului X sunt:

$$(*)\qquad \begin{cases} \overset{\bullet}{x}^1(t) = a^1 + a^3 k x^1(t) \\ \overset{\bullet}{x}^2(t) = a^2 - a^3 k x^2(t) \\ \overset{\bullet}{x}^3(t) = a^3 \\ \overset{\bullet}{x}^4(t) = a^4 - a^2 h x^1(t). \end{cases}$$

<u>Cazul $a^3 = 0$</u>. Din $(*)$, rezultă:

$$\begin{cases} x^1(t) = a^1 t + b^1, \\ x^2(t) = a^2 t + b^2, \\ x^3(t) = b^3, \\ x^4(t) = -\frac{1}{2} a^1 a^2 h t^2 + (a^4 - a^2 b^1 h)\, t + b^4, \end{cases}$$

unde b^1, b^2, b^3, b^4 sunt constante reale. Dacă notăm $x^i(0) = x_0^i$, obţinem $b^i = x_0^i$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Prin urmare, traiectoria centrată în punctul $p_0 = (x_0^1, x_0^2, x_0^3, x_0^4) \in G$ este curba parametrizată $\alpha_{p_0} : \mathbb{R} \to G$, dată prin

$$\alpha_{p_0}(t) = \left(a^1 t + x_0^1, a^2 t + x_0^2, x_0^3, -\frac{1}{2} a^1 a^2 h t^2 + \left(a^4 - a^2 h x_0^1\right) t + x_0^4 \right).$$

Variind punctul $p_0 \in G$, obţinem acţiunea asociată lui X :

$$\alpha : \mathbb{R} \times G \to G,$$

dată prin:

$$(**)\qquad \begin{aligned} \alpha(t, p) &= \alpha_p(t) = (a^1 t + x^1, a^2 t + x^2, x^3, \\ &\quad -\frac{1}{2} a^1 a^2 h t^2 + \left(a^4 - a^2 h x^1\right) t + x^4), \end{aligned}$$

unde $p = (x^1, x^2, x^3, x^4) \in G$.

<u>Cazul $a^3 \neq 0$</u>. Vom studia două subcazuri:

<u>Subcazul $k = 0$</u>. Din $(*)$ rezultă

$$\begin{cases} x^1(t) = a^1 t + b^1, \\ x^2(t) = a^2 t + b^2, \\ x^3(t) = a^3 t + b^3, \\ x^4(t) = -\frac{1}{2} t^2 a^1 a^2 h + (a^4 - a^2 h b^1)\, t + b^4, \end{cases}$$

unde b^1, b^2, b^3, b^4 sunt constante reale. Dacă notăm $x_0^i = x^i(0)$, obţinem $b^i = x_0^i$, $i \in \{1,2,3,4\}$. Prin urmare, traiectoria centrată în punctul $p_0 = (x_0^1, x_0^2, x_0^3, x_0^4) \in G$ este curba parametrizată $\alpha_{p_0} : \mathbb{R} \to G$, dată prin:

$$\alpha_{p_0}(t) = \left(a^1 t + x_0^1, a^2 t + x_0^2, a^3 t + x_0^3, -\frac{1}{2} t^2 a^1 a^2 h + \left(a^4 - a^2 h x_0^1\right) t + x_0^4 \right).$$

Variind punctul $p_0 \in G$, obţinem grupul de transformări cu un parametru, asociat câmpului $X \in L(G)$, ca fiind aplicaţia $\alpha : \mathbb{R} \times G \to G$, $\alpha(t,p) = \alpha_p(t)$, dată prin:

$$(**') \qquad \begin{aligned} \alpha(t,p) = {} & (a^1 t + x^1, a^2 t + x^2, a^3 t + x^3, \\ & -\frac{1}{2} t^2 a^1 a^2 h + \left(a^4 - a^2 h x^1\right) t + x^4), \end{aligned}$$

unde $p = (x^1, x^2, x^3, x^4) \in G$.

Subcazul $k \neq 0$. Sistemul $(*)$ se scrie:

$$\begin{cases} \dot{x}^1(t) = a^3 k \left(x^1(t) + \frac{a^1}{k a^3} \right) \\ \dot{x}^2(t) = -a^3 k \left(x^2(t) - \frac{a^2}{k a^3} \right) \\ \dot{x}^3(t) = a^3 \\ \dot{x}^4(t) = a^4 - a^2 h x^1(t). \end{cases}$$

De aici rezultă:

$$\begin{cases} x^1(t) = b^1 e^{a^3 k t} - \frac{a^1}{k a^3}, \\ x^2(t) = b^2 e^{-a^3 k t} + \frac{a^2}{k a^3}, \\ x^3(t) = a^3 t + b^3, \\ x^4(t) = \left(a^4 + \frac{a^1 a^2 h}{k a^3} \right) t - \frac{a^2 h b^1}{a^3 k} e^{a^3 k t} + b^4, \end{cases}$$

unde b^1, b^2, b^3, b^4 sunt constante reale. Dacă notăm $x^i(0) = x_0^i$, obţinem:

$$b^1 = x_0^1 + \frac{a^1}{ka^3},\ b^2 = x_0^2 - \frac{a^2}{ka^3},\ b^3 = x_0^3,\ b^4 = x_0^4 + \frac{a^2 h}{a^3 k}\left(x_0^1 + \frac{a^1}{ka^3}\right).$$

Prin urmare, traiectoria centrată în punctul $p_0 = (x_0^1, x_0^2, x_0^3, x_0^4) \in G$ este curba $\alpha_{p_0} : \mathbb{R} \to G$, având ecuaţiile parametrice:

$$\begin{cases} x^1 = \left(x_0^1 + \frac{a^1}{ka^3}\right) e^{a^3 kt} - \frac{a^1}{ka^3}, \\ x^2 = \left(x_0^2 - \frac{a^2}{ka^3}\right) e^{-a^3 kt} + \frac{a^2}{ka^3}, \\ x^3 = a^3 t + x_0^3, \\ x^4 = x_0^4 + \left(a^4 + \frac{a^1 a^2 h}{ka^3}\right) t + \frac{a^2 h}{a^3 k}\left(x_0^1 + \frac{a^1}{ka^3}\right)\left(1 - e^{a^3 kt}\right). \end{cases}$$

Variem punctul p_0 în G şi obţinem grupul de transformări cu un parametru asociat lui X, ca fiind aplicaţia $\alpha : \mathbb{R} \times G \to G$, dată prin:

$$(**'') \quad \alpha(t,p) = \left(\left(x^1 + \frac{a^1}{ka^3}\right) e^{a^3 kt} - \frac{a^1}{ka^3}, \left(x^2 - \frac{a^2}{ka^3}\right) e^{-a^3 kt} + \frac{a^2}{ka^3},\right.$$
$$\left. a^3 t + x^3, x^4 + \left(a^4 + \frac{a^1 a^2 h}{ka^3}\right) t + \frac{a^2 h}{a^3 k}\left(x^1 + \frac{a^1}{ka^3}\right)\left(1 - e^{a^3 kt}\right)\right),$$

unde $p = (x^1, x^2, x^3, x^4) \in G$.

iv) Utilizând relaţiile $(**)$, $(**')$ şi $(**'')$, obţinem următoarele rezultate:

iv$_1$) Dacă $a^3 = 0$, atunci subgrupul cu un parametru generat de câmpul X este:

$$\rho_X = \alpha_e : \mathbb{R} \to G,\ \rho_X(t) = \left(a^1 t, a^2 t, 0, -\frac{1}{2} a^1 a^2 h t^2 + a^4 t\right).$$

iv$_2$) Dacă $a^3 \neq 0$ şi $k = 0$, atunci subgrupul cu un parametru generat de câmpul X este:

$$\rho_X = \alpha_e : \mathbb{R} \to G,\ \rho_X(t) = \left(a^1 t, a^2 t, a^3 t, -\frac{1}{2} t^2 a^1 a^2 h + a^4 t\right).$$

iv$_3$) Dacă $a^3 \neq 0$ şi $k \neq 0$, atunci subgrupul cu un parametru $\rho_X = \alpha_e : \mathbb{R} \to G$, generat de câmpul X, este dat prin:

$$\begin{aligned}\rho_X(t) &= \left(\frac{a^1}{ka^3}\left(e^{a^3kt}-1\right), \frac{a^2}{ka^3}\left(1-e^{-a^3kt}\right), a^3t,\right.\\ &\left.\left(a^4+\frac{a^1a^2h}{ka^3}\right)t+\frac{a^1a^2h}{(ka^3)^2}\left(1-e^{a^3kt}\right)\right).\end{aligned}$$

v) Ţinând seama de rezultatele de la punctul precedent, avem:
v$_1$) Dacă $a^3=0$, atunci

$$\exp X=\rho_X(1)=\left(a^1,a^2,0,-\frac{1}{2}a^1a^2h+a^4\right).$$

v$_2$) Dacă $a^3\neq 0$ şi $k=0$, avem:

$$\exp X=\left(a^1,a^2,a^3,-\frac{1}{2}a^1a^2h+a^4\right).$$

v$_3$) Dacă $a^3\neq 0$ şi $k\neq 0$, avem:

$$\begin{aligned}\exp X &= \left(\frac{a^1}{ka^3}\left(e^{a^3k}-1\right), \frac{a^2}{ka^3}\left(1-e^{-a^3k}\right), a^3,\right.\\ &\left. a^4+\frac{a^1a^2h}{ka^3}+\frac{a^1a^2h}{(a^3k)^2}\left(1-e^{a^3k}\right)\right).\end{aligned}$$

vi) Folosind rezultatele de la punctul ii), rezultă:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x^1} &= E_1,\\ \frac{\partial}{\partial x^2} &= E_2+hx^1E_4,\\ \frac{\partial}{\partial x^3} &= -kx^1E_1-kx^2E_2+E_3-khx^1x^2E_4,\\ \frac{\partial}{\partial x^4} &= E_4.\end{aligned}$$

vi$_1$) Egalităţile anterioare ne conduc la:

$$
\begin{aligned}
g_{11} &= a,\ g_{22} = b + h^2\left(x^1\right)^2 d,\ g_{44} = d,\ g_{13} = -akx^1,\\
g_{24} &= hdx^1,\ g_{12} = g_{14} = 0,\ g_{23} = bkx^2 + dkh^2\left(x^1\right)^2 x^2,\\
g_{34} &= kdhx^1x^2,\ g_{33} = c + ak^2\left(x^1\right)^2 + bk^2\left(x^2\right)^2 + dk^2h^2\left(x^1\right)^2\left(x^2\right)^2 .
\end{aligned}
$$

vi$_2$) Deoarece $\det\left(g_{ij}\right) \in \{-1, 1\}$, din vi$_1$), rezultă:

$$
\begin{aligned}
g^{11} &= a + ck^2\left(x^1\right)^2,\ g^{12} = -ck^2x^1x^2,\ g^{13} = ckx^1,\\
g^{24} &= -bhx^1,\ g^{14} = g^{34} = 0,\ g^{23} = -ckx^2,\\
g^{22} &= b + ck^2\left(x^2\right)^2,\ g^{33} = c,\ g^{44} = d + bh^2\left(x^1\right)^2 .
\end{aligned}
$$

Simbolurile lui Christoffel de speţa a doua Γ^i_{jr} construite cu g, sunt date prin:

$$
\begin{aligned}
\Gamma^1_{11} &= -ack^2x^1,\ \Gamma^2_{12} = \frac{1}{2}bdh^2x^1,\ \Gamma^2_{34} = -\frac{1}{2}bdkhx^1,\ \Gamma^3_{13} = ack^2x^1,\\
\Gamma^4_{14} &= -\frac{1}{2}dbh^2x^1,\ \Gamma^1_{13} = ack^3\left(x^1\right)^2,\ \Gamma^4_{34} = \frac{1}{2}bdkh^2\left(x^1\right)^2,\ \Gamma^1_{24} = -\frac{1}{2}adh,\\
\Gamma^2_{14} &= \frac{1}{2}bdh,\ \Gamma^3_{11} = -ack,\ \Gamma^3_{22} = bck,\\
\Gamma^1_{33} &= -k^2x^1\left\{1 + ack^2\left(x^1\right)^2 + adh^2\left(x^2\right)^2 - bck^2\left(x^2\right)^2\right\},\ \Gamma^1_{34} = -\frac{1}{2}adkhx^2,\\
\Gamma^2_{22} &= -bck^2x^2,\ \Gamma^3_{23} = bck^2x^2,\ \Gamma^2_{13} = kx^1x^2\left\{\frac{1}{2}bdh^2 - ack^2\right\},\\
\Gamma^3_{33} &= ck^3\left\{b\left(x^2\right)^2 - a\left(x^1\right)^2\right\},\ \Gamma^2_{23} = -\frac{1}{2}bk\left\{dh^2\left(x^1\right)^2 + 2ck^2\left(x^2\right)^2\right\},\\
\Gamma^2_{33} &= -k^2x^2\left\{1 + bck^2\left(x^2\right)^2 + bdh^2\left(x^1\right)^2 - ack^2\left(x^1\right)^2\right\},\\
\Gamma^1_{23} &= kx^1x^2\left\{bck^2 - adh^2\right\},\ \Gamma^1_{22} = x^1\left\{bck^2 - adh^2\right\},\\
\Gamma^4_{13} &= \frac{1}{2}khx^2\left\{1 - bdh^2\left(x^1\right)^2\right\},\ \Gamma^2_{11} = ack^2x^2,\ \Gamma^4_{12} = \frac{1}{2}dh\left\{d - bh^2\left(x^1\right)^2\right\},\\
\Gamma^4_{33} &= bk^2hx^1x^2\left\{b + dh^2\left(x^1\right)^2\right\},\ \Gamma^4_{23} = \frac{1}{2}dkhx^1\left\{d + bh^2\left(x^1\right)^2\right\}.
\end{aligned}
$$

(componentele nescrise sunt nule).

vi$_3$) Simbolurile lui Riemann de prima speţă, nenule, sunt:

$$
\begin{aligned}
R_{1212} &= abck^2 - \frac{3}{4}dh^2 + \frac{1}{4}bh^4\left(x^1\right)^2, \ R_{1213} = \frac{1}{4}kx^2\left\{abck^2 - 3dh^2 + bh^4\left(x^1\right)^2\right\}\\
R_{1214} &= \frac{1}{4}bh^3x^1, \ R_{1223} = kx^1\left\{abck^2 - \frac{5}{4}h^2\right\} + \frac{1}{4}bkh^4\left(x^1\right)^3,\\
R_{1234} &= -\frac{1}{4}bkh^3\left(x^1\right)^2,\\
R_{1313} &= -ak^2 + \left(x^2\right)^2\left\{abck^4 - \frac{3}{4}dk^2h^2\right\} + \left(x^1x^2\right)^2 + \frac{1}{4}bk^2h^4\left(x^1x^2\right)^2,\\
R_{1314} &= \frac{1}{4}bkh^3x^1x^2, \ R_{1323} = \frac{1}{4}k^2x^1x^2\left\{4abck^2 - 5dh^2 + bh^4\left(x^1\right)^2\right\},\\
R_{1324} &= -\frac{1}{2}dkh, \ R_{1334} = -\frac{1}{4}k^2hx^2\left\{2d + bh^2\left(x^1\right)^2\right\}, \ R_{1414} = \frac{1}{4}bh^2,\\
R_{2424} &= \frac{1}{4}ah^2, \ R_{1434} = -\frac{1}{4}bkh^2x^1, \ R_{1423} = -\frac{1}{4}kh\left\{2d - bh^2\left(x^1\right)^2\right\},\\
R_{2323} &= -bk^2 - \frac{7}{4}dk^2h^2\left(x^1\right)^2 + abck^4\left(x^1\right)^2 + \frac{1}{4}bk^2h^4\left(x^1\right)^4,\\
R_{2334} &= \frac{1}{4}k^2hx^1\left\{2d - bh^2\left(x^1\right)^2\right\}, \ R_{2434} = \frac{1}{4}akh^2x^2,\\
R_{3434} &= \frac{1}{4}k^2h^2\left\{b\left(x^1\right)^2 + a\left(x^2\right)^2\right\}.
\end{aligned}
$$

Componentele nenule ale tensorului Ricci sunt:

$$
\begin{aligned}
R_{11} &= -\frac{1}{2}bdh^2, \ R_{44} = \frac{1}{2}abh^2, \ R_{13} = \frac{1}{2}bdkh^2x^1, \ R_{24} = \frac{1}{2}abh^3x^1,\\
R_{22} &= -\frac{1}{2}h^2\left\{ad - abh^2\left(x^1\right)^2\right\}, \ R_{23} = -\frac{1}{2}kh^2x^2\left\{ad - abh^2\left(x^1\right)^2\right\},\\
R_{33} &= -\frac{1}{2}k^2\left\{4 + bdh^2\left(x^1\right)^2 + adh^2\left(x^2\right)^2 - abh^4\left(x^1\right)^2\left(x^2\right)^2\right\},\\
R_{34} &= \frac{1}{2}abkh^3x^1x^2.
\end{aligned}
$$

vi$_4$) Scalarul de curbură este

$$\rho = -\frac{1}{2}abdh^2 - 2ck^2.$$

vi_5) Este evident că metrica g este stâng invariantă. Presupunem că g este bi-invariantă. Atunci, folosind propoziţia 1.8, avem:

$$g([X,Y],Z)+g(Y,[X,Z])=0,\ \ (\forall)\,X,Y,Z\in L(G).$$

Pentru $X=E_i$, $Y=E_j$, $Z=E_s$, obţinem:

$$c_{ij}^{r}g(E_r,E_s)+c_{is}^{r}g(E_j,E_r)=0.$$

De aici rezulta $k=h=0$.

Reciproc, dacă $h=k=0$, atunci metrica g este bi-invariantă.

vii) Vom utiliza relaţiile stabilite la punctul vi).

(vii_5)$\Rightarrow$(vii_1)$\Rightarrow$(vii_2)$\Rightarrow$(vii_3), (vii_5)$\Rightarrow$(vii_4), (vii_1)$\Rightarrow$(vii_4). Evident, (vii_4)$\Rightarrow$(vii_1). Fie $\Gamma'^{\,i}_{js}$ şi $\Gamma''^{\,i}_{js}$ simbolurile lui Christoffel de speţa a doua, construite cu ajutorul lui g' şi respectiv g''. Prin ipoteză, g' şi g'' admit aceleaşi geodezice, deci avem formulele lui Weyl

$$\Gamma''^{\,i}_{js}=\Gamma'^{\,i}_{js}+\delta^i_j\omega_s+\delta^i_s\omega_j,$$

unde ω_k sunt componentele unei 1$-$forme. Dacă în ultimele formule facem $i=j$ şi sumăm, obţinem:

$$\sum_{i=1}^{4}\left(\Gamma''^{\,i}_{is}-\Gamma'^{\,i}_{is}\right)=(n+1)\,\omega_s.$$

Utilizând expresiile obţinute pentru simbolurile lui Christoffel, din ultimele relaţii rezultă $\omega=0$, ceea ce ne arată că $\Gamma''^{\,i}_{js}=\Gamma'^{\,i}_{js}$, adică ($vii_1$).

(vii_3)$\Rightarrow$(vii_5). Egalităţile $R'_{ij}=R''_{ij}$ implică $k'=k''$ şi $h'=h''$.

§ 3. REZULTATE RECENTE PRIVIND METRICILE PSEUDO-RIEMANNIENE STÂNG INVARIANTE PE UN GRUP LIE DIN CLASA σ. TEOREMA LUI MILNOR. TEOREMA LUI NOMIZU. TEOREMA LUI PRIPOAE.

3.0. În acest paragraf prezentăm câteva rezultate recente legate de curbura secţională a unei varietăţi cu metrică pseudo-riemanniană indefinită (de signatură $(-,...,+,...,-)$).

Aceste rezultate sunt legate de numele lui J. Milnor [31] şi K. Nomizu [48]. Rezultatul principal al paragrafului este conţinut în teorema 3.7 şi a fost obţinut de G. Pripoae [61].

Fie (M,g) o varietate diferenţiabilă $n-$dimensională cu o metrică pseudo-riemanniană, de signatură $(-,...,+,...)$ (excludem cazul pozitiv definit). Un *vector* $X \in T_xM$ se numeşte *spaţial*, *temporal*, respectiv *luminos* (nul), după cum

$$g(X,X) > 0,\ g(X,X) < 0,\ \text{resp. } g(X,X) = 0.$$

Un subspaţiu se numeşte *nedegenerat* de signatură γ dacă restricţia lui g la el este nedegenerată şi are signatura γ.

3.1. LEMĂ. Dacă $\{X,Y\}$ este bază a unui $2-$plan $\pi \subset T_xM$, atunci π este nedegenerat dacă şi numai dacă

$$g(X,X)\,g(Y,Y) - g(X,Y)^2 \neq 0. \tag{3.1}$$

Demonstraţie. Suficienţa. Fie relaţia (3.1). Presupunem, prin absurd, că $g\,|_\pi$ este degenerată, deci că există $w \in \pi$, nenul, cu

$$g(W,X) = 0,\ (\forall)\, X \in \pi. \tag{3.2}$$

Completăm pe W până la o bază a lui π, $\{W,V\}$. Din (3.2) rezultă

$$g(W,W)\,g(V,V) - g(W,V)^2 = 0,$$

ceea ce contrazice ipoteza (3.1).

Necesitatea. Presupunem că π este nedegenerat şi că

$$g(X,X)\,g(Y,Y) - g(X,Y)^2 = 0. \tag{3.3}$$

Notăm cu

$$U = g(Y,Y)\,X - g(X,Y)\,Y.$$

Evident

$$g(U,Y) = 0,$$

iar din (3.3) rezultă $g(U,X) = 0$. Notăm cu $\pi^{\perp}$ complementul ortogonal al lui π relativ la restricţia lui g la T_xM. Cum π este nedegenerat, rezultă şi $\pi^{\perp}$ nedegenerat, iar $U \in \pi^{\perp}$. Pe de altă parte, prin definiţie, $U \in \pi$, deci $U = 0$.

Am obţinut că X şi Y sunt proporţionali, în contradicţie cu faptul că $\{X, Y\}$ este bază.

În concluzie, (3.3) este falsă.

Observaţie. Pentru un 2–plan nedegenerat, curbura secţională se defineşte prin

$$K(\pi) = \frac{g(R(X,Y)Y,X)}{g(X,X)\,g(Y,Y) - g(X,Y)^2},$$

unde $\{X, Y\}$ este bază a lui π. Se arată imediat că această mărime este independentă de bază. Fie R_0 un tensor de tip $(1,3)$ definit prin:

$$R_0(X,Y)Z = g(Y,Z)\,X - g(X,Z)\,Y, \quad X,Y,Z \in T_xM.$$

3.2. LEMĂ. *Toate 2–planele nedegenerate în T_xM au curbura secţională egală (cu c) dacă şi numai dacă*

$$R = cR_0.$$

Demonstraţie. Dacă $R = cR_0$, este evident că are loc $K(\pi) = c$, pentru orice 2−plan nedegenerat π.

Reciproc, presupunem că avem $K(\pi) = c$, pentru orice 2−plan nedegenerat $\pi \subset T_xM$.

Dacă $\{X, Y\}$ este bază a lui π, atunci:

$$(3.4) \qquad g(R(X,Y)Y,X) = g(cR_0(X,Y)Y,X).$$

Dacă X şi Y sunt liniar dependenţi, evident că relaţia (3.4) este adevărată.

Presupunem că $\{X, Y\}$ este bază pentru un 2−plan degenerat π. Folosim lema 3.1. Deoarece $g(X,X)g(Y,Y) - g(X,Y)^2$ este un polinom în componentele lui X şi Y (relative la o bază fixată în T_xM), mulţimea zerourilor lui este rară, adică complementarea ei este densă), deci există $X_n, Y_n \in T_xM$, $X_n \to X$, $Y_n \to Y$, astfel ca $\pi_x = sp\{X_n, Y_n\}$ să fie nedegenerat. Trecând la limită în

$$(3.4') \qquad g(R(X_n,Y_n)Y_n,X_n) = g(cR_0(X_n,Y_n)Y_n,X_n),$$

obţinem că (3.4) are loc pentru orice $X, Y \in T_xM$. Aplicăm acum rezultatul clasic din demonstraţia teoremei Schur (vexi [26], I, p. 198-200).

3.3. Observaţie. La fel ca în cazul riemannian se demonstrează teorema lui Schur: "Dacă (M, g) este o varietate pseudo-riemanniană, conexă, de dimensiune $n \geq 3$ şi orice punct este punct de izotropie (adică curbura secţională în punctul respectiv este aceeaşi, oricare ar fi 2−planul nedegenerat), atunci (M, g) este cu curbură sectională constantă".

3.4. Definiţie. *Fie G un grup Lie necomutativ de dimensiune $n \geq 3$. Spunem că G* **este din clasa** σ *dacă pentru orice două câmpuri stâng invariante $X, Y \in L(G)$, $[X, Y]$ este combinaţie liniară de X şi Y.*

3.5. TEOREMA LUI MILNOR [31]. *Orice metrică Riemann stâng invariantă pe un grup Lie din clasa σ are curbura secţională constantă k. Dacă G este conex, atunci $k = 0$ dacă şi numai dacă grupul este abelian, şi $k < 0$ dacă grupul este neabelian.*

Demonstraţie. Fie g o metrică Riemann stâng invariantă pe un grup Lie G de clasă σ. Fie $l : L(G) \to \mathbb{R}$, liniară, astfel încât

$$[X,Y] = l(X)Y - l(Y)X, \ \ (\forall) X, Y \in L(G).$$

Alegem o bază ortonormată $\{E_1, ..., E_n\}$ în $L(G)$ relativ la g, deci $g(E_i, E_j) = \delta_{ij}$, şi fie $\{\omega^1, ..., \omega^n\}$ baza duală din $(L(G))^*$. Deoarece $l \in (L(G))^*$, există $l_1, ..., l_n \in \mathbb{R}$, astfel încât

$$l = l_1\omega^1 + ... + l_n\omega^n.$$

Vom nota $l' = l_1E_1 + ... + l_nE_n$. Fie c_{ij}^k constantele de structură ale algebrei Lie $L(G)$ relative la baza $\{E_1, ..., E_n\}$. Avem:

$$\begin{aligned}
[E_i, E_j] &= c_{ij}^k E_k, \\
[E_i, E_j] &= l(E_i)E_j - l(E_j)E_i = l_iE_j - l_jE_i.
\end{aligned}$$

Rezultă

$$c_{ij}^k = \delta_j^k l_i - \delta_i^k l_j, \ \ (\forall) i, j, k \in \{1, ..., n\}.$$

Fie ∇ conexiunea Levi-Civita asociată lui g. Dacă notăm

$$\nabla_{E_i} E_j = \Gamma_{ij}^k E_k,$$

atunci avem:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{ij}^k &= \frac{1}{2}\left(c_{ij}^k + c_{kj}^i + c_{ki}^j\right) = \frac{1}{2}\left(\delta_{ij}l_k - \delta_{ik}l_j + \delta_{ij}l_k - \delta_j^k l_i + \delta_j^k l_i - \delta_i^k l_j\right) = \\
&= \delta_{ij}l_k - \delta_i^k l_j.
\end{aligned}$$

Am obţinut:

$$\Gamma_{ij}^k = \delta_{ij}l_k - \delta_i^k l_j.$$

Folosind aceasta, obţinem:

$$\begin{aligned}
\nabla_{E_i}\nabla_{E_j}E_k &= \nabla_{E_i}\left(\Gamma^r_{jk}E_r\right) = \Gamma^r_{jk}\Gamma^s_{ir}E_s = \left(\delta_{jk}l_r - \delta^r_j l_k\right)\left(\delta_{ir}l_s - \delta^s_i l_r\right)E_s = \\
&= \left(\delta_{jk}l_i l_s - \delta_{ij}l_k l_s - \delta_{jk}\delta^s_i \sum_{r=1}^{n} l_r l_r + \delta^s_i l_j l_k\right)E_s.
\end{aligned}$$

Analog obţinem:

$$\nabla_{E_j}\nabla_{E_i}E_k = \left(\delta_{ik}l_j l_s - \delta_{ij}l_k l_s - \delta_{ik}\delta^s_j \sum_{r=1}^{n} l_r l_r + \delta^s_j l_i l_k\right)E_s.$$

În continuare, avem:

$$\begin{aligned}
\nabla_{[E_i,E_j]}E_k &= \nabla_{c^r_{ij}E_r}E_k = c^r_{ij}\Gamma^s_{rk}E_s = \left(\delta^r_j l_i - \delta^r_i l_j\right)\left(\delta_{rk}l_s - \delta^s_r l_k\right)E_s = \\
&= \left(\delta_{jk}l_i l_s - \delta^s_j l_i l_k - \delta_{ik}l_j l_s + \delta^s_i l_j l_k\right)E_s.
\end{aligned}$$

Fie R câmpul tensorial de curbură al conexiunii ∇ :

$$R\left(E_i, E_j\right)E_k = \nabla_{E_i}\nabla_{E_j}E_k - \nabla_{E_j}\nabla_{E_i}E_k - \nabla_{[E_i,E_j]}E_k.$$

Ţinând seama de calculele de mai sus, obţinem:

$$R\left(E_i, E_j\right)E_k = \sum_{r=1}^{n} l_r l_r\left(\delta_{ik}E_j - \delta_{jk}E_i\right).$$

Dar

$$\begin{aligned}
\sum_{r=1}^{n} l_r l_r &= \sum_{i,r=1}^{n} \delta_{ri}l_i l_r = \sum_{i,r=1}^{n} g\left(E_r, E_i\right)l_i l_r = g\left(\sum_{r=1}^{n} l_r E_r, \sum_{i=1}^{n} l_i E_i\right) = \\
&= g\left(l', l'\right) = \|l'\|^2.
\end{aligned}$$

Am obţinut:

$$R(E_i, E_j) E_k = \|l'\|^2 \{g(E_i, E_k) E_j - g(E_j, E_k) E_i\}.$$

Rezultă:

$$R(X,Y) Z = \|l'\|^2 \{g(X,Z) Y - g(Y,Z) X\}, \quad (\forall) X, Y, Z \in \mathcal{X}(G).$$

Fie $R \in \mathcal{T}_4^0(G)$, definit prin $R(X,Y,Z,W) = g(X, R(Z,W)Y)$. Rezultă:

$$\begin{aligned} R(X,Y,X,Y) &= g(X, R(X,Y)Y) = \|l'\|^2 g(X, g(X,Y)Y - g(Y,Y)X) = \\ &= \|l'\|^2 \left\{(g(X,Y))^2 - g(X,X)g(Y,Y)\right\}. \end{aligned}$$

Pentru doi vectori liniar independenţi $X_a, Y_a \in T_aG$, notăm $\pi = sp(X_a, Y_a)$. Curbura secţională $K(\pi)$ este:

$$K(\pi) = \frac{R(X_a, Y_a, X_a, Y_a)}{g_a(X_a, X_a) g_a(Y_a, Y_a) - g_a(X_a, Y_a)} = -\|l'\|^2.$$

În concluzie, spaţiul Riemann (G, g) are curbura secţională constantă negativă $K = -\|l'\|^2$. Avem $K = 0 \Leftrightarrow l' = 0 \Leftrightarrow l = 0 \Leftrightarrow [X,Y] = 0$, $(\forall) X, Y \in L(G) \Leftrightarrow L(G)$ este abeliană $\overset{G \text{ conex}}{\Leftrightarrow}$ G este abelian.

Dacă G este neabelian, atunci $l \neq 0 \Leftrightarrow l' \neq 0 \Leftrightarrow K < 0$.

3.6. Observaţie. Dacă g este o metrică lorentziană (adică de signatură $(-, +, \ldots, +)$) pe grupul Lie $G \in \sigma$, stâng invariantă, atunci o teoremă datorată lui K. Nomizu [48] ne asigură că g este, de asemenea, cu curbură secţională constantă, dar nu neapărat negativă. Prezentăm în continuare o generalizare a teoremelor Milnor şi Nomizu.

3.7. TEOREMĂ (G. PRIPOAE) [61]. *Orice metrică pseudo-riemanniană stâng invariantă pe un grup Lie conex din clasa σ are curbura secţională constantă.*

Demonstraţie. Pasul I. ([31], p. 312-313). Fixăm pe $X \in L(G)$. Aplicaţia $ad(X)$ induce o aplicaţie liniară (notată la fel) de la $L(G)/_{\mathbb{R}X}$ în el însuşi, cu proprietatea că fiecare vector este dus într-un multiplu de-al său. (Am notat cu $\mathbb{R}X$ subspaţiul generat de X). Deci

$$[X,Y] = h(X,Y)\cdot Y,$$

pentru orice $Y \in L(G)/_{\mathbb{R}X}$. Arătăm că h nu depinde decât de X.

Fie $Y, Z \in L(G)/_{\mathbb{R}X}$ liniar independenţi. Din egalităţile evidente

$$h(X, Y+Z)\cdot(Y+Z) = [X, Y+Z] = h(X,Y)\cdot Y + h(X,Z)\cdot Z,$$

rezultă $h(X,Y) = h(X,Z)$.

Analog rezultă că $h(X, aY) = h(X,Y)$, pentru orice $a \in \mathbb{R}$. În concluzie, h nu depinde decât de X. Putem calcula $h(X) = (n-1)^{-1}\cdot trace\ ad(X)$. Se observă deci că h depinde liniar de X. Schimbăm rolurile lui X şi Y şi calculăm $[X,Y]$ modulo $\mathbb{R}Y$. Pentru X şi Y liniar independenţi, rezultă că $h \in \Lambda^1(G)$ şi

$$(3.5)\ [X,Y] = h(X)\cdot Y - h(Y)X,\ \ X, Y \in L(G).$$

(formula este în mod evident adevărată şi pentru X, Y liniar dependenţi).

Pasul II. Presupunem că g este metrică de signatură γ. Fie π un 2−plan nedegenerat şi $\{u, v\}$ o bază ortonormală a lui π, cu $u, v \in L(G)$. Considerăm $\{e_1, ..., e_n\}$ o bază ortonormală a lui $L(G)$, cu $e_1 := u$, $e_2 := v$. Deci $g(e_i, e_j) = \varepsilon_i \delta_{ij}$, unde primele γ constante ε_i sunt (-1), ultimele $(n-\gamma)$ fiind $(+1)$. Notăm C_{ij}^k constantele de structură asociate acestei baze, adică satisfăcând relaţia

$$[e_i, e_j] = C_{ij}^k \cdot e_k.$$

Determinăm forma generală a curburii secţionale $K(\pi) \overset{\text{not}}{=} K(e_1, e_2)$. Formula lui Koszul pentru conexiunea Levi-Civita a unei metrici stâng invariante este

$$2g(\nabla_X Y, Z) = g([X,Y], Z) + g([Z,X], Y) - g([Y,Z], X),$$

unde $X, Y, Z \in L(G)$. În particular,

$$\nabla_{e_i} e_j = \frac{1}{2}\varepsilon_k \left(C^k_{ij} \cdot \varepsilon_k + C^j_{ki} \cdot \varepsilon_j - C^i_{jk} \cdot \varepsilon_i\right) \cdot e_k.$$

Calculăm $K(e_1, e_2)$. Avem:

$$\begin{aligned} K(e_1, e_2) &= \frac{g(R(e_1, e_2) e_2, e_1)}{g(e_1, e_1) \cdot g(e_2, e_2)} = \\ &= \varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdot g\left(\nabla_{e_1} \nabla_{e_2} e_2 - \nabla_{e_2} \nabla_{e_1} e_2 - \nabla_{[e_1, e_2]} e_2, e_1\right). \end{aligned}$$

De aici obţinem:

$$\begin{aligned} (3.6) \quad K(e_1, e_2) &= \varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdot \sum_{k=1}^{n} \{\frac{1}{2} C^k_{12} \left(-C^k_{12} \cdot \varepsilon_k + C^1_{2k} \cdot \varepsilon_1 + C^2_{k1} \cdot \varepsilon_2\right) - \\ &\quad -\frac{1}{4} \cdot \varepsilon_k \left(C^k_{12} \cdot \varepsilon_k - C^1_{2k} \cdot \varepsilon_1 + C^2_{k1} \cdot \varepsilon_2\right) \cdot \\ &\quad \cdot \left(C^k_{12} \cdot \varepsilon_k + C^1_{2k} \cdot \varepsilon_1 - C^2_{k1} \cdot \varepsilon_2\right) - \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_k \cdot C^2_{k2} \cdot C^1_{k1}\}. \end{aligned}$$

Pasul III. Relaţia (3.5) se mai scrie

$$(3.5') \qquad C^k_{ij} = h_i \delta^k_j - h_j \delta^k_i,$$

cu notaţia $h_i = h(e_i)$. Remarcăm faptul că $C^i_{jk} = 0$ pentru $i \neq j \neq k \neq i$, şi că $h_i = C^j_{ij}$ pentru $j \neq i$ (fără sumare!). 1–forma h este stâng invariantă, deci

$$\|h\|^2 := \sum_{i=1}^{n} (h_i)^2 \cdot \varepsilon_i = \text{const}.$$

Înlocuind (3.5′) în (3.6), obţinem:

$$\begin{aligned} K(\pi) &= -\left\{\left(C^2_{12}\right)^2 \cdot \varepsilon_1 + \left(C^1_{12}\right) \cdot \varepsilon_2 + \sum_{K \geq 3} \varepsilon_k \cdot C^2_{k2} \cdot C^1_{k1}\right\} = \\ &= -\left\{\varepsilon_1 (h_1)^2 + \varepsilon_2 \cdot (h_2)^2 + \sum_{k \geq 3} \varepsilon_k \cdot (h_k)^2\right\} = -\|h\|^2. \end{aligned}$$

Rezultă că curbura secţională depinde numai de structura de algebră Lie şi de metrică, şi că este independentă de alegerea 2−planului π. Din teorema Schur, rezultă afirmaţia teoremei.

3.8. Observaţie. (i) Ipoteza "metrică stâng invariantă" este necesară. În adevăr, dacă aplicăm o transformare conformă (neomotetică) a unei metrici stâng invariante pe $G \in \sigma$, noua metrică nu mai este, în general, stâng invariantă, iar curbura secţională nu mai este constantă.

(ii) Pe un grup Lie $G \in \sigma$, o distribuţie (în sens Chevalley) generată de orice r câmpuri de vectori independenţi din $L(G)$ defineşte o foliaţie r−dimensională $(2 \leq r \leq n)$. Grupurile Lie din clasa σ au şi alte proprieăţi interesante: de exemplu, sunt singurele grupuri Lie care admit metrici riemanniene, stâng invariante, cu curbură secţională de semn constant ([22]).

CAPITOLUL X

STRUCTURI APROAPE SIMPLECTICE ŞI STRUCTURI APROAPE COMPLEXE STÂNG INVARIANTE PE UN GRUP LIE

În capitolul precedent am studiat comportarea matricilor pseudo - riemanniene stâng invariante pe grupuri Lie. Acest studiu se poate relua pentru orice $G-$structură stâng invariantă, în particular - aşa cum vom vedea în continuare - pentru structurile simplectice şi Kähler (precum şi generalizări ale lor).

§ 1. STRUCTURI APROAPE SIMPLECTICE STÂNG INVARIANTE. TEOREMA MEDINA - REVOY.

Fie G un grup Lie cu n dimensiuni, $L(G)$ algebra sa Lie şi $\Omega \in \Lambda^2(G)$ o $2-$formă diferenţială nedegenarată pe G.

1.1. DEFINIŢIE. *Ω se numeşte* **structură aproape simplectică stâng invariantă** *dacă Ω este invariantă la translaţiile la stânga, adică*

$$\Omega\left((L_a)_*(X),(L_a)_*(Y)\right)\circ L_a=\Omega(X,Y), \quad (\forall)\, X,Y\in \mathcal{X}(G), \quad (\forall)\, a\in G.$$

Dacă, în plus, Ω este închisă, ea se numeşte **structură simplectică stâng invariantă pe** G.

Observaţie. Analog se pot defini structuri simplectice invariante la dreapta.

1.2. DEFINIŢIE. *O structură simplectică pe grupul Lie G se numeşte* **bi-invariantă** *dacă ea este simultan stâng şi drept invariantă.*

1.3. EXEMPLE.

1.3.1. Fie $\mathbb{R}^{2k}$ cu structura canonică de grup Lie abelian şi $\Omega \in \Lambda^2\left(\mathbb{R}^{2k}\right)$, definită prin

$$\Omega = dx^1\wedge dx^{k+1}+\ldots+dx^k\wedge dx^{2k}.$$

Atunci Ω este o structură simplectică bi-invariantă pe $\mathbb{R}^{2k}$.

1.3.2. Fie G un grup Lie de dimensiune $n = 2m$ şi $\{E_1, ..., E_{2m}\}$ o bază în algebra sa Lie. Fie $\{\omega^1, ..., \omega^{2m}\}$ baza duală în $\Lambda^1(G)$, formată din 1–forme stâng invariante, şi verificând relaţiile

$$\omega^i(E_j) = \delta^i_j$$

Atunci

$$\Omega = \omega^1 \wedge \omega^{m+1} + ... + \omega^m \wedge \omega^{2m}$$

este o 2–formă nedegenerată, stâng invariantă pe G, deci defineşte o structură aproape simplectică stâng invariantă pe grupul Lie G.

1.4. OBSERVAŢIE.

1.4.1. Fie Ω o 2–formă nedegenerată pe grupul Lie G. Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(i) Ω este o structură aproape simplectică stâng invariantă pe grupul Lie G;

(ii) $\Omega(X, Y) =$ constant, $(\forall) X, Y \in L(G)$;

(iii) $\Omega(E_i, E_j) =$ constant, $(\forall) i, j \in \{1, ..., n\}$, unde $\{E_1, ..., E_n\}$ este o bază fixată în $L(G)$.

1.4.2. Ca o consecinţă a rezultatului precedent avem: mulţimea structurilor aproape simplectice pe un grup Lie G este în corespondenţă bijectivă cu mulţimea 2–formelor alternate, nesingulare pe $L(G)$.

Analog, mulţimea structurilor simplectice pe G este în corespondenţă bijectivă cu mulţimea 2–formelor alternate, nesingulare şi închise pe $L(G)$.

1.5. PROPOZIŢIE. *Fie G un grup Lie înzestrat cu o structură aproape simplectică Ω stâng invariantă. Atunci:*

i) *există o unică conexiune liniară stâng invariantă ∇ pe G care satisface egalitatea*

$$\Omega(\nabla_X Y, Z) = -\Omega(Y, [X, Z]), \; X, Y, Z \in L(G); \tag{1.1}$$

ii) *conexiunea ∇ este plată;*

iii) *conexiunea ∇ este simetrică dacă şi numai dacă Ω este simplectică;*

iv) *dacă Ω este simplectică, atunci $\nabla_X \Omega = 0$ dacă şi numai dacă algebra Lie $L(G)$ este abeliană.*

Demonstraţie. i) Pasul 1. Presupunem că ∇ există. Fie $\{E_1, ..., E_n\}$ o bază a lui $L(G)$ şi $A, B, C \in \mathcal{X}(G)$. Avem $A = A^i E_i$, $B = B^j E_j$, $C = C^k E_k$, cu A^i, B^j, $C^k \in \mathcal{F}(G)$. Determinăm operatorul ∇ prin relaţia

$$\Omega(\nabla_A B, C) = -A^i C^k \Omega(B, [E_i, E_k]) + A(B^j)\,\Omega(E_j, C). \tag{1.2}$$

Să verificăm faptul că operatorul ∇ din (1.2) satisface cele patru axiome din definiţia conexiunii liniare (Koszul). Liniaritatea în prima variabilă şi aditivitatea în a doua variabilă sunt evidente.

Fie $f \in \mathcal{F}(G)$. Atunci avem:

$$\begin{aligned}\Omega(\nabla_A fB, C) &= -A^i C^k f\Omega(B, [E_i, E_k]) + A(B^j)\,f\Omega(E_j, C) + A(f)\,\Omega(B, C) = \\ &= \Omega(f\nabla_A B + A(f)\,B, C).\end{aligned}$$

Am obţinut egalitatea:

$$\Omega(\nabla_A fB, C) = \Omega(f\nabla_A B + A(f)\,B, C).$$

Deoarece Ω este nedegenerată, deducem:

$$\nabla_A fB = f\nabla_A B + A(f)\,B.$$

Pasul 2. Definim conexiunea liniară ∇ prin relaţia (1.2). Se verifică uşor egalitatea (1.1), pentru orice câmpuri de vectori $X, Y, Z \in L(G)$.

Pasul 3. Arătăm că conexiunea liniară ∇ este stâng invariantă. Fie $\{E_1, ..., E_n\}$ o bază în algebra Lie $L(G)$. Dacă punem $\nabla_{E_i} E_j = \Gamma_{ij}^s E_s$, $\Omega(E_i, E_j) = \Omega_{ij}$, atunci avem:

$$\Omega(\nabla_{E_i} E_j, E_k) = \Gamma_{ij}^s \Omega_{sk}.$$

Pe de altă parte, avem:

$$\Omega(\nabla_{E_i} E_j, E_k) = -\Omega(E_i, [E_j, E_k]).$$

Rezultă

$$\Gamma_{ij}^{s} = -\Omega\left(E_i, [E_j, E_k]\right)\Omega^{ks} = \text{const.},$$

unde $\left(\Omega^{ks}\right)_{1\leq k,s\leq n}$ este inversa matricei $\left(\Omega_{ij}\right)_{1\leq i,j\leq n}$.

Deoarece $\Gamma_{ij}^{s} = \text{const.}$, rezultă că conexiunea ∇ este stâng invariantă.

Pasul 4 (Unicitatea). Presupunem că mai există o conexiune liniară $\widetilde{\nabla}$ care verifică (1.1). Atunci obţinem:

$$\Omega\left(\widetilde{\nabla}_A B, C\right) = \Omega\left(\nabla_A B, C\right), (\forall)\, A, B, C \in \mathcal{X}(G).$$

Deoarece Ω este nedegenerată, obţinem $\widetilde{\nabla} = \nabla$.

ii) În continuare, folosind relaţia (1.1) şi identitatea lui Jacobi, rezultă:

$$\begin{aligned}
\Omega\left(R(X,Y)Z, W\right) &= \Omega\left(\nabla_X\nabla_Y Z, W\right) - \Omega\left(\nabla_Y\nabla_X Z, W\right) - \Omega\left(\nabla_{[X,Y]}Z, W\right) = \\
&= -\Omega\left(\nabla_Y Z, [X,W]\right) + \Omega\left(\nabla_X Z, [Y,W]\right) + \Omega\left(Z, [[X,Y], W]\right. \\
&= \Omega\left(Z, [Y,[X,W]]\right) - \Omega\left(Z, [X,[Y,W]]\right) + \Omega\left(Z, [[X,Y], W]\right) \\
&= \Omega\left(Z, [[X,Y], W] + [[Y,W], X] + [[W,X], Y]\right) = \\
&= \Omega(Z, 0) = 0.
\end{aligned}$$

Am obţinut egalitatea:

$$\Omega\left(R(X,Y)Z, W\right) = 0,\ \ (\forall)\, X, Y, Z, W \in L(G).$$

Deoarece Ω este nedegenerată, obţinem:

$$R(X,Y)Z = 0,\ \ (\forall)\, X, Y, Z \in L(G),$$

adică $R = 0$.

iii) Folosind din nou relaţia (1.1), rezultă:

$$\begin{aligned}
\Omega\left(T(X,Y), Z\right) &= \Omega\left(\nabla_X Y, Z\right) - \Omega\left(\nabla_Y X, Z\right) - \Omega\left([X,Y], Z\right) = \\
&= -\Omega\left(Y, [X,Z]\right) + \Omega\left(X, [Y,Z]\right) + \Omega\left(Z, [X,Y]\right) = \\
&= d\Omega(X, Y, Z).
\end{aligned}$$

Din egalitatea $\Omega(T(X,Y),Z) = d\Omega(X,Y,Z)$, $(\forall)\, X,Y,Z \in \mathcal{X}(G)$, rezultă că Ω este simplectică dacă şi numai dacă conexiunea ∇ este fără torsiune.

iv) Presupunem că Ω este simplectică. Atunci, pentru orice $X,Y,Z \in L(G)$, avem:

$$(\nabla_X \Omega)(Y,Z) = -d\Omega(X,Y,Z) - \Omega([Y,Z],X) = -\Omega([Y,Z],X).$$

Din $(\nabla_X \Omega)(Y,Z) = -\Omega([Y,Z],X)$, $(\forall)\, X,Y,Z \in L(G)$, deducem că $\nabla_X \Omega = 0$ dacă şi numai dacă $[Y,Z] = 0$, $(\forall)\, Y,Z \in L(G)$, deci dacă şi numai dacă algebra Lie $L(G)$ este abeliană.

Observaţie. Din propoziţia anterioară rezultă că pentru o structură simplectică Ω putem defini o conexiune canonică local euclidiană, care generează o structură afină invariantă pe G.

1.6. TEOREMA MEDINA - REVOY. *Fie G un grup Lie, $<\,,\,>$ o metrică pseudo-riemanniană bi-invariantă şi Ω o structură simplectică stâng invariantă pe G.*

Atunci există o metrică stâng invariantă g pe G, de acelaşi indice ca $<\,,\,>$, având drept conexiune Levi-Civita exact conexiunea canonică asociată lui Ω.

Demonstraţie. Fie $D \in \mathcal{T}_1^1(G)$ câmpul de tensori definit prin

$$\Omega(X,Y) = <D(X),Y>, \quad (\forall)\, X,Y \in L(G).$$

Deoarece Ω şi $<\,,\,>$ sunt nedegenerate, rezultă că D este inversabilă.

Observăm că

$$\nabla_a = D^{-1} \circ ad(a) \circ D, \; a \in L(G)$$

defineşte o conexiune liniară pe G, invariantă la stânga.

Deoarece metrica $<\,,\,>$ este bi-invariantă, rezultă că avem:

$$<ad(a)(X),Y> + <X, ad(a)(Y)> = 0.$$

Folosind aceasta şi definiţia lui D, avem:

$$
\begin{aligned}
\Omega(\nabla_X Y, Z) &= \Omega\left(D^{-1}\circ ad(X)\circ D(Y), Z\right) =< ad(X)\circ D(Y), Z >= \\
&= < [X, D(Y)], Z >= - < D(Y), [X, Z] >= \\
&= -\Omega(Y, [X, Z]).
\end{aligned}
$$

Deducem că ∇ este exact conexiunea asociată în mod canonic lui Ω (conform cu (1.1)). Definim $g \in \mathcal{T}_2^0(G)$, prin:

$$
g(X, Y) =< D(X), D(Y) > .
$$

Deoarece Ω este stâng invariantă, rezultă că D este stâng invariant. Folosind aceasta şi faptul că $< , >$ este bi-invariantă, rezultă că g este stâng invariantă.

Câmpul tensorial D este nedegenerat, deci g are acelaşi indice ca şi $< , >$. În continuare să calculăm $\nabla_X g$. Avem:

$$
\begin{aligned}
(\nabla_X g)(Y, Z) &= \nabla_X g(Y, Z) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z) = \\
&= - < D(\nabla_X Y), D(Z) > - < D(Y), D(\nabla_X Z) >= \\
&= - < ad(X)\circ D(Y), D(Z) > - < D(Y), ad(X)\circ D(Z) \\
&= - < [X, D(Y)], D(Z) > - < D(Y), [X, D(Z)] >= \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Deoarece Ω este structură simplectică, conform propoziţiei 1.5 iii), rezultă ∇ simetrică; fiind conexiune metrică, rezultă că ∇ este exact conexiunea Levi-Civita asociată metricii stâng invariante g.

§ 2. STRUCTURI APROAPE COMPLEXE STÂNG INVARIANTE PE GRUPURI LIE

2.1. Fie G un grup Lie şi $J \in \mathcal{T}_1^1(G)$ o structură aproape complexă, adică $J^2 = -\delta$, unde δ este tensorul lui Kronecker. În acest caz dimensiunea grupului Lie G este, în mod necesar, pară.

DEFINIŢIE. *Structura aproape complexă J se numeşte* **stâng invariantă** *dacă*

$$(L_a)_*(J) = J, \quad (\forall)\, a \in G.$$

2.2. DEFINIŢIE. *Fie G un grup Lie. Dacă g este o metrică pseudo-riemanniană stâng invariantă pe G, iar J este o structură aproape complexă stâng invariantă pe grupul Lie G, atunci spunem că G este înzestrat cu o* **structură aproape hermitiană stâng invariantă.** *(În acest caz Ω, definită prin*

$$\Omega(X,Y) = g(J(X),Y), (\forall)\, X,Y \in L(G),$$

este o structură aproape simplectică stâng invariantă).

Observaţie. Analog se definesc celelalte structuri derivate stâng invariante (aproape Kähler, complexe, Kähler, local conform Kähler şi altele).

2.3. OBSERVAŢIE.

2.3.1. Fie (G,g,J) un grup Lie cu o structură Kähler invariantă la stânga. Atunci

$$\Omega(X,Y) = g(J(X),Y)$$

defineşte o structură simplectică Ω invariantă la stânga pe grupul Lie G.

2.3.2. Din faptul că J este structură aproape complexă stâng invariantă pe G, rezultă că J duce câmpuri de vectori stâng invariante în câmpuri de vectori stâng invariante. Deci:

$$X \in L(G) \Rightarrow J(X) \in L(G).$$

2.4. PROPOZIŢIE. *Fie G un grup Lie şi g o metrică Riemann bi-invariantă pe G. Considerăm o structură aproape complexă stâng invariantă J pe G, astfel încât (G, g, J) să fie varietate Kähler.*

Atunci conexiunea liniară ∇ asociată formei simplectice $\Omega \in \Lambda^2(G)$, $\Omega(X, Y) = g(J(X), Y)$ este exact conexiunea Levi-Civita asociată lui g. În plus, conexiunea ∇ este plată.

Demonstraţie. Este o consecinţă a teoremei Medina-Revoy.

BIBLIOGRAFIE

1. Adams J. F. - *Lectures on Lie Groups.* Benjamin, New York (1969).

2. Ado I. D. - *The representation of Lie algebras by matrices.* Uspekhi Mat. Nauk (N. S.) 2, No. 6 (22) 1947, 159-173. Amer. Math. Soc. Transl. No. 2 (1949).

3. Andreian C. - *Teoria funcţiilor de mai multe variabile complexe.* E. D. P., Bucureşti (1971).

4. Bejancu A. - *Grupuri Lie - Banach şi generalizări* (teză de doctorat), Iaşi. (1973).

5. Berger M. - *Généralités sur les groupes de Lie. Groupes de Lie compacts.* Université de Nice (1964-1965).

6. Boboc N. - *Funcţii complexe.* E. D. P., Bucureşti (1969).

7. Boju V. şi Popescu M. - *Probleme de geometria varietăţilor diferenţiabile,* Ed. Tehnică, Bucureşti (1978).

8. Bourbaki N. - *Eléments de Mathématique, XXVI. Groupes et Algèbres de Lie.* Herman, Paris (1960).

9. Cartan E. - *Oeuvres complètes, vols. I-VI.* Gauthier-Villars, Paris (1952).

10. Chevalley C. - *Theory of Lie groups, vol. I.* Princeton University Press (1948).

11. Cohn P. M. - *Lie Groups.* Cambridge Univ. Press, London and New York (1957).

12. Colojoară I. - *Elemente de analiză matematică.* Centrul de multiplicare al Universităţii Bucureşti (1972).

13. Craioveanu M. - *Lecţii de topologie, Vol. I.* Universitatea Timişoara (1979).

14. Craioveanu M., Puta M. - *Introducere în geometria spectrală.* Ed. Academiei, Bucureşti (1988).

15. Cristescu R. - *Analiză funcţională.* E. D. P., Bucureşti (1983).

16. Cuculescu I. - *Algebre Lie.* Ed. Academiei, Bucureşti (1963).

17. Dardie J. M., Medina A. - *Groupes de Lie à structure symplectique invariante.* Sém. G. Darboux, 1990-1991, Univ. Montpellier, II.

18. Dobrescu A. - *Proprietăţi tensoriale ale grupurilor Lie* (teză de doctorat). Bucureşti (1957).

19. Galbură Gh. - *Algebră.* E.D.P. Bucureşti (1972).

20. Gheorghiev Gh., Miron R., Papuc D. - *Geometrie analitică şi diferenţială, Vol. II.* E.D.P. Bucureşti (1969).

21. Gheorghiev Gh., Oproiu V. - *Varietăţi diferenţiabile finit şi infinit dimensionale, Vol. I, II.* Ed. Academiei R.S.R. (1976, 1979).

22. Greub W., Halperin S., Vanstone R. - *Connections, Curvature and Cohomology, Vol. II.* Acad. Press, New York and London (1973).

23. Helgason S. - *Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces.* Academic Press, New York (1978).

24. Ianuş S. - *Geometrie diferenţială cu aplicaţii în teoria relativităţii.* Ed. Academiei R.S.R., Bucureşti, (1983).

25. Ion D. I., Radu N. - *Algebră.* E.D.P., Bucureşti (1975).

26. Kobayashi S. and Nomizu K. - *Foundations of Differential Geometry, 2 vols.* Interscience, New York, (1963, 1969).

27. Matsumoto K. and Pripoae G. T. - *Examples of invariant Semi-Riemannian Metrics on 4−dimensional Lie groups* (în curs de apariţie).

28. Medina A. - *Groupes de Lie munis de métriques bi-invariantes.* Tohoku Math. J. 37 (1985), p. 405 - 421.

29. Medina A., Revoy P. - *Groupes de Lie à structure symplectique invariante. Symplectic Geometry, Groupoids and Integrable Systems.* Sém., Sud-Rhodesien, M.S.R.I., Berkley, Springer (1991), p. 247 - 266.

30. Mihai I. - *Capitole speciale de geometria varietăţilor complexe.* Ed. Universităţii Bucureşti (1994).

31. Milnor J. - *Curvatures of left invariant metrics on Lie groups.* Advances in Math. 21 (1976), p. 293 - 329.

32. Mirică Şt. - *Ecuaţii diferenţiale.* Centrul de multiplicare al Universităţii Bucureşti, Fascicola I (1978), Fascicola II (1979).

33. Miron R. - *Introducere în geometria diferenţială, Vol. I.* Centrul de multiplicare al Universităţii "Alexandru Ioan Cuza", Iaşi, (1971).

34. Miron R., Anastasiei M. - *Vector bundles. Lagrange spaces. Applications to the theory of relativity.* Ed. Academiei, Bucureşti (1987).

35. Miron R., Pop I. - *Topologie algebrică.* Ed. Academiei, Bucureşti, (1974).

36. Montgomery D., Zippin L. - *Topological Transformation Groups.* Wiley, Interscience, New York (1955).

37. Müller D. - *Isometries of Bi-Invariant Pseudo-Riemannians Metrics on Lie Groups.* Geom. Ded. 29 (1989), p. 65 - 96.

38. Naimark M., Stern A. - *Théorie des representation des groupes.* Mir. Moscova (1979).

39. Nicolescu L. - *Obiecte geometrice în algebra de deformare a două conexiuni liniare stâng invariante pe un grup Lie.* Stud. Cerc. Mat., t. 37, 4, 1985, p. 342 - 346.

40. Nicolescu L. - *Grupuri Lie.* Editura Universităţii Bucureşti, 1994.

41. Nicolescu L., Popovici I. - *Grupuri şi algebre Lie (Exemple. Aplicaţii geometrice).* Centrul de multiplicare al Univesităţii Bucureşti, Fascicola I, (1981).

42. Nicolescu L. - *Champs m-distingués sur une variété de Riemann.* Stud. Cerc. Mat. Tom 42, nr. 5-6, 1990, p. 449 - 464.

43. Nicolescu L., Pop I., Pripoae G. - *Culegere de probleme de geometrie (capitole speciale de varietăţi diferenţiabile şi topologie algebrică).* Tipografia Universităţii Bucureşti, 1986.

44. Nicolescu L., Pripoae G., Zara C. - *Teoreme şi probleme de grupuri Lie.* Editura Universităţii din Bucureşti (1996).

45. Nicolescu L., Pop. I., Pripoae G. - *Culegere de probleme de grupuri Lie.* Tipografia Universităţii Bucureşti, 1987.

46. Nicolescu L., Pripoae G. - *Culegere de probleme de geometrie diferenţială.* Tipografia Universităţii Bucureşti, 1987.

47. Nicolescu M. - *Analiză Matematică, vol. I-III.* Ed. Tehnică, Bucureşti (1957 - 1960).

48. Nomizu K. - *Left-invariant Lorentz metrics on Lie groups.* Osaka J. Math. 16 (1979), p. 143 - 150.

49. Obădeanu V. - *Introducere în analiza pe varietăţi.* Tipografia Universităţii Timişoara, vol. I (1981), vol. II (1985).

50. Obădeanu V., Souli A. - *Quasi-connexions linéaires sur des groupes de Lie.* Univ. Timişoara, Sem. Geom. Top. nr. 86, 1985.

51. Papuc D., Albu A. - *Elemente de geometrie diferenţială globală.* E.D.P. Bucureşti (1973).

52. Pham Mau Quan - *Introduction a la géométrie des variétés differentiables.* Dunod, Paris (1969).

53. Pontreaghin L.S. - *Grupuri topologice.* Inst. Româno-Sovietic, Bucureşti (1956).

54. Poor W. - *Differential geometric structures* (1981).

55. Pop I. - *Varietăţi diferenţiabile. Culegere de probleme.* Centrul de multiplicare al Universităţii "Alexandru Ioan Cuza", Iaşi (1975).

56. Pop I. - *Coomologie de Rham. Grupuri Lie.* Centrul de multiplicare al Universităţii "Alexandru Ioan Cuza", Iaşi (1978).

57. Pop I. - *Topologie algebrică.* Ed. Ştiinţifică, Bucureşti (1990).

58. Popovici I., Iordănescu R., Turtoi A. - *Gradări simple Jordan şi Lie considerate în geometria diferenţială.* Ed. Academiei, Bucureşti (1971).

59. Postnikov M. - *Lie Groups and Lie Algebras.* Mir, Moscova (1982).

60. Pripoae G. - *Studiul sistemelor diferenţiale involutive şi neinvolutive pe varietăţi Lorentz* (teză de doctorat). Univ. Timişoara (1991).

61. Pripoae G. - *Une propriété des groupes de Lie de la classe σ. J.* Indian Math. Soc., Vol. 58 (1992), nr. 3, p. 187 - 190.

62. Pripoae G. - *Propriétés de rigidité concernant la courbure des métriques indefinies.* J. Geom. Phys. 7 (1990).

63. Stavre P. - *Capitole speciale de geometrie diferenţială. Varietăţi pseudo-riemanniene.* Ed. Radical, Craiova (2001).

64. Teleman K., Teleman M. - *Elemente de teoria grupurilor cu aplicaţii în topologie şi fizică.* Ed. Ştiinţifică, Bucureşti (1973).

65. Teleman K. - *Geometrie diferenţială locală şi globală.* Ed. Tehnică, Bucureşti (1974).

66. Teleman K. - *Metode şi rezultate în geometria diferenţială modernă.* Ed. Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, (1979).

67. Teleman K. - *Introducere în geometria diferenţială.* Tipografia Universităţii Bucureşti, (1986).

68. Teleman K. - *Sur les equations de Maurer-Cartan.* Rev. Romm. De Math. Pures et Appl. t. XI. Nr. 7 (1966), p. 839 - 842.

69. Teodorescu I. - *Analiză, teoria funcţiilor şi ecuaţii diferenţiale.* Centrul de multiplicare al Universităţii Bucureşti (1974).

70. Teodorescu P., Nicorovici-Porumbaru - *Aplicaţii ale teoriei grupurilor în mecanică şi fizică.* Ed. Tehnică, Bucureşti (1985).

71. Tondeur Ph. - *Introduction to Lie groups and transformations* (1965).

72. Turtoi A. - *Aplicaţii ale algebrei şi geometriei în teoria spinorilor.* Ed. Tehnică (1989).

73. Ţarină M. - *Grupuri Lie.* Tipografia Universităţii din Cluj-Napoca (1987).

74. Udrişte C. - *Linii de câmp.* Ed. Tehnică (1988).

75. Varadarajan V.S. - *Lie Groups, Lie Algebras and Their Representations.* Pretice - Hall, Inc.

76. Vrănceanu G., Martin M., Nicolescu L. - *Geometria algebrelor de deformare.* Tipografia Universităţii Bucureşti (1983).

77. Vrănceanu G. - *Lecţii de geometrie diferenţială, Vol. III.* Ed. Academiei, Bucureşti (1960).

78. Wolf J.A. - I*sotropic manifolds of indefinite metrics.* Comment. Math. Helv. 39 (1964), p. 21 - 64.

Tiparul s-a executat sub c-da nr. 1157/2004 la
Tipografia Editurii Universității din București

DATA RESTITUIRII

~~07 MAI. 2004~~		
12. MAI. 2005		
18. MAR. 2006		
27. MAR. 2007		
28. MAR. 2007		
17. APR. 2007		
17. MAR. 2011		

240.000 lei

ISBN 973-575-852-0

Lei 240000