LIVIU ORNEA

CURBE ŞI SUPRAFEŢE REGULATE

EDITURA UNIVERSITĂŢII BUCUREŞTI
1995

LIVIU ORNEA

CURBE ŞI SUPRAFEŢE REGULATE
CULEGERE DE PROBLEME

EDITURA UNIVERSITĂŢII BUCUREŞTI
-1995-

Referenţi ştiinţific: Prof. dr. Stere Ianuş
Conf. dr. Adriana Turtoi

ISBN-973-575-029-5

Introducere

Cartea aceasta nu este nici mai mult nici mai puţin decît anunţă titlul ei: o culegere de probleme. Conţine, în cea mai mare parte, rezultate clasice selectate, mai ales, din lucrările [Ca] şi [Va].

Am încercat să evit intersecţiile mari cu texte accesibile în limba română. Nu am inclus, de aceea, exerciţii standard care apar, de obicei, ca exemple în cursurile utilizate acum la noi.

Cartea se adresează în primul rînd studenţilor din primul semestru al anului al doilea. Ea se vrea un complement, sper util, al cursului, un ajutor pentru seminar, iar nu o colecţie exhaustivă de rezultate în domeniu. Materialul acoperă programa cursului de Geometrie diferenţială (vezi, de exemplu, [Ia]). O bună parte din el a fost parcursă în cadrul seminariilor ţinute la grupele de cercetare. Soluţiile prezentate, cu puţine excepţii, fac apel numai la noţiunile teoretice predate în această perioadă. Sper ca cele cîteva probleme care depăşesc cadrul strict al programei să trezească interesul pentru lecturi ulterioare.

Cer iertare cititorului pentru că, din motive tehnice, am renunţat la ilustraţiile care, fără îndoială, ar fi uşurat parcurgerea textului.

Cuprins

CAPITOLUL 1. CURBE REGULATE

1.1 Curbe în E^3.

Notaţii:

$\gamma : I \to E^3$, curbă parametrizată regulată, de clasă C^∞

s, parametrul canonic pe curbă

$\boldsymbol{t}$, vectorul tangent

$\boldsymbol{n}$, vectorul normal principal

$\boldsymbol{b}$, vectorul binormal

k, curbura

τ, torsiunea

În lipsa unei alte precizări, curbele considerate sînt presupuse parametrizate canonic; vectorii tangent, normal principal, binormal ca şi curbura şi torsiunea sînt funcţii de s. Vom omite, în general, scrierea argumentului pentru aceste funcţii.

1.1.1 *Să se parametrizeze canonic curba*

$$\gamma(t) = (e^t \cos t, \quad e^t \sin t, \quad e^t), \qquad t \in R$$

şi să se calculeze curbura şi torsiunea ei.

Soluţie Avem

$$\gamma'(t) = (e^t \cos t - e^t \sin t,\ \ e^t \cos t + e^t \sin t,\ \ e^t)$$

deci $|\gamma(t)| = \sqrt{3}\, e^t$. Atunci funcţia lungime de arc este $s(t) = \sqrt{3}\, e^t$ şi inversa ei $t(s) = \frac{1}{\sqrt{3}} \ln s$. Deci, parametrizarea canonică a curbei este:

$$\gamma(s) = \left(\frac{s}{\sqrt{3}} \cos \ln \frac{s}{\sqrt{3}},\ \ \frac{s}{\sqrt{3}} \sin \ln \frac{s}{\sqrt{3}},\ \ \frac{s}{\sqrt{3}}\right), \qquad s \in \mathrm{R}_+$$

Atunci:

$$t = \gamma'(s) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\cos \ln \frac{s}{\sqrt{3}} - \sin \ln \frac{s}{\sqrt{3}}\right),\right.$$

$$\left.\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\cos \ln \frac{s}{\sqrt{3}} + \sin \ln \frac{s}{\sqrt{3}}\right),\ \ \frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$

$$\gamma''(s) = \left(-\frac{1}{s}\left(\cos \ln \frac{s}{\sqrt{3}} + \sin \ln \frac{s}{\sqrt{3}}\right),\ \ \frac{1}{s}\left(\cos \ln \frac{s}{\sqrt{3}} - \sin \ln \frac{s}{\sqrt{3}}\right),\ \ 0\right)$$

deci,

$$k(s) = |\gamma''| = \frac{\sqrt{2}}{s}$$

şi vectorii normal şi binormal sînt, respectiv:

$$n = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos \ln \frac{s}{\sqrt{3}} + \sin \ln \frac{s}{\sqrt{3}}\right),\ \ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos \ln \frac{s}{\sqrt{3}} - \sin \ln \frac{s}{\sqrt{3}}\right),\ \ 0\right)$$

$$b = t \times n = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(\cos \ln \frac{s}{\sqrt{3}} - \sin \ln \frac{s}{\sqrt{3}}\right),$$

$$-\frac{1}{\sqrt{6}}\left(\cos \ln \frac{s}{\sqrt{3}} + \sin \ln \frac{s}{\sqrt{3}}\right),\ \ \frac{2}{\sqrt{6}}\Big)$$

În fine, torsiunea este:

$$\tau(s) = -< \frac{db}{ds}, n > = -\frac{1}{\sqrt{3}\, s}$$

1.1.2 *Se consideră curba de intersecţie dintre un cilindru şi o sferă (*fereastra Viviani*), descrisă prin:*

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2,\ \ x^2 + y^2 - ay = 0,\ \ a > 0.$$

Să se determine punctele ei regulate şi să se găsească ecuaţia tangentei în punctul $M(a/2, a/2, a/\sqrt{2})$.

Soluţie Imaginea curbei pe sferă e formată din patru arce delimitate de punctele $A(0,a,0)$, $B(0,0,a)$, $C(0,0,-a)$. Matricea jacobiană a aplicaţiei $F : R^3 \to R^2$, $F(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2 = a^2, x^2+y^2-ay)$ are rang maxim (2) în orice punct al domeniului de definiţie cu excepţia lui A. Acesta e singurul punct singular. Pentru a găsi ecuaţia tangentei parametrizăm curba. Pentru aceasta pornim de la ecuaţiile parametrice ale sferei (coordonate sferice, fie ele t, v) şi le impunem să verifice şi ecuaţia cilindrului. Un calcul simplu conduce la $\sin t = \sin v$. Atunci ecuaţiile parametrice ale ferestrei Viviani vor fi:

$$x = \pm a \sin t \cos t, \quad y = a \sin^2 t, \quad z = \pm a \cos t.$$

Ecuaţia tangentei în punctul M este:

$$\frac{X-\frac{a}{2}}{0} = \frac{Y-\frac{a}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{Z-\frac{a}{2}}{-1}.$$

1.1.3 *Se consideră curba dată ca intersecţie a cilindrilor*

$$x^2+y^2 = r^2, \quad y^2+z^2 = r^2.$$

Să se scrie ecuaţiile tangentei şi ale planului osculator în $M(r\sqrt{2}/2, r\sqrt{2}/2, r\sqrt{2}/2)$. *Să se calculeze curbura şi torsiunea în acest punct.*

Soluţie Observăm că $x = \pm z$, deci ecuaţiile parametrice ale curbei sînt:

$$x = r\cos t, \quad y = r\sin t, \quad z = \pm \sin t.$$

Punctul M corespunde lui $t = \pi/4$ şi $x =$. Atunci ecuaţia tangentei în M rezultă

$$\frac{x-\frac{r\sqrt{2}}{2}}{1} = \frac{y-\frac{r\sqrt{2}}{2}}{-1} = \frac{z-\frac{r\sqrt{2}}{2}}{1},$$

iar ecuaţia planului osculator este $x = z$. Pentru a calcula curbura şi torsiunea folosim formulele într-o parametrizare oarecare şi obţinem în M $k = 4/(3\sqrt{3}r)$, $\tau = 0$.

1.1.4 *Fie γ o curbă fără puncte de inflexiune şi α imaginea ei sferică (curba sferică descrisă de vectorul paralel cu cel tangent unitar al lui γ). Să se găsească parametrul natural pe α şi să i se calculeze curbura.*

Soluţie Fie s parametrul natural pe γ. Atunci $\alpha(s) = \boldsymbol{t}(s)$ şi $d\alpha/ds = k(s)\boldsymbol{n}(s)$. Deci $| d\alpha/ds | = k$. Parametrul natural pe α este $\sigma = s/k$ ($k \neq 0$ pentru că γ nu are puncte de inflexiune). Curbura lui α este $| d^2\alpha/d\sigma^2 |$. Avem:

$$\frac{d^2\alpha}{d\sigma^2} = \frac{d}{d\sigma}\boldsymbol{n} = \frac{d}{ds}\boldsymbol{n}\frac{ds}{d\sigma} = k(-k\boldsymbol{t}(s) + \tau\boldsymbol{b}(s)).$$

Deci curbura lui α este $k\sqrt{k^2 + \tau^2}$.

1.1.5 *Să se arate că există un vector* $\boldsymbol{d}$ *(numit* vectorul lui Darboux*) astfel încît formulele lui Frenet se pot pune sub forma:*

$$\frac{d\boldsymbol{t}}{ds} = \boldsymbol{d} \times \boldsymbol{t}, \quad \frac{d\boldsymbol{n}}{ds} = \boldsymbol{d} \times \boldsymbol{n}, \quad \frac{d\boldsymbol{b}}{ds} = \boldsymbol{d} \times \boldsymbol{b}$$

Soluţie Considerăm reperul Frenet ataşat punctului curent de pe curbă şi exprimăm vectorul $\boldsymbol{d}$ în acest reper:

$$\boldsymbol{d} = a\boldsymbol{t} + b\boldsymbol{n} + c\boldsymbol{b}$$

cu a, b, c funcţii de s. Primele două ecuaţii devin, respectiv:

$$k\boldsymbol{n} = -b\boldsymbol{b} + c\boldsymbol{n}$$

$$-k\boldsymbol{t} + \tau\boldsymbol{b} = a\boldsymbol{b} - k\boldsymbol{t}$$

de unde scoatem

$$a = \tau, \quad b = 0, \quad c = k$$

Se verifică imediat că vectorul

$$\boldsymbol{d} = \tau\boldsymbol{t} + k\boldsymbol{b}$$

satisface şi a treia ecuaţie din enunţ.

1.1.6 *Să se arate că dacă toate normalele unei curbe parametrizate trec printr-un punct fix, atunci imaginea curbei este conţinută într-un cerc şi reciproc.*

Soluţie Condiţia din enunţ e echivalentă cu $\gamma(s) + r(s)\boldsymbol{n}(s) = ct.$ Derivînd şi folosind formulele lui Frenet se obţine $r = ct., \tau = 0$ şi $k = 1/r$. Reciproca e banală.

1.1.7 *Să se arate că dacă toate planele normale la o curbă parametrizată trec printr-un punct fix P, atunci imaginea curbei este conținută într-o sferă cu centrul în P și reciproc.*

Soluție Condiția impusă e echivalentă cu $\gamma(s)+r(s)\boldsymbol{b}(s)+p(s)\boldsymbol{n}(s)=P=ct.$ Prin derivare găsim

$$\boldsymbol{t}+r'\boldsymbol{b}-r\tau\boldsymbol{n}+p'\boldsymbol{n}+p(-k\boldsymbol{t}+\tau\boldsymbol{b})=0.$$

Deci:

$$1-pk=0, p'-r\tau=0, r'+p\tau=0.$$

Atunci, din a doua relație avem $pp'=rp\tau$ și din a treia $rr'=-rp\tau$. De aici deducem $rr'+pp'=0$, adică $r^2+p^2=ct.$. Dar $r^2+p^2=\mid\gamma(s)-P\mid$ ceea ce încheie demonstrația. Reciproca este evidentă.

1.1.8 *O curbă sferică este un arc de cerc dacă și numai dacă are curbura constantă.*

Soluție Necesitatea este evidentă. Reciproc, presupunem γ curbă sferică și cu curbura constantă. Atunci, conform problemei anterioare și cu aceleași notații, $p=1/k=ct.$ deci $r\tau=0$ și $r'+p\tau=0$ ceea ce implică $\tau=0$, adică γ e o curbă plană. Cum singurele curbe plane cu curbura constantă sînt arcele de cerc, soluția e completă.

1.1.9 *O curbă γ se numește* elice *dacă tangenta în orice punct face unghi constant cu o direcție fixă. Presupunînd torsiunea nenulă peste tot, să se demonstreze echivalența următoarelor afirmații:*
i) γ e elice;
ii) $k/\tau=ct.$;
iii) toate normalele sînt paralele cu un plan fix;
iv) toate binormalele fac unghi constant cu o direcție fixă.

Soluție Fie $\boldsymbol{a}$ versorul direcției fixe din enunț. Avem $<\boldsymbol{a},\boldsymbol{t}>=\cos\theta$, cu θ un unghi constant. Derivînd aici și folosind prima formulă Frenet găsim $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{n}$, deci $i)\Rightarrow iii)$. În plus, avem $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{t}\cos\theta+\boldsymbol{b}\sin\theta$. Derivînd și această relație, din prima și a treia formulă Frenet rezultă $k/\tau=\tan\theta$, deci $i)\Rightarrow ii)$. Celelalte implicații se demonstrează similar.

Să mai observăm că un exemplu de elice necirculară a apărut în exercițiul 1.1.1: acolo $k/\tau=-\sqrt{2/3}$.

1.1.10 *Fie $\gamma : I \to E^3$ o curbă regulată parametrizată, nu neapărat canonic, cu curbura și torsiunea nicăieri nule. γ se numește* curbă Bertrand *dacă există $\gamma_1 : I \to E^3$ astfel încît normalele în fiecare $t \in I$ să fie coliniare. γ_1 se numește* vecină Bertrand *a lui γ. Să se arate că:*

i) $\gamma_1(t) = \gamma(t) + r\boldsymbol{n}(t)$ cu $r = ct$.

ii) γ e curbă Bertrand dacă și numai dacă

$$Ak(t) + B\tau(t) = 1, t \in I \tag{1.1}$$

cu A, B constante nenule.

iii) Dacă γ are cel puțin două vecine Bertrand, atunci are o infinitate de vecine Bertrand și e o elice circulară.

Soluție Fără a restrînge generalitatea, putem presupune γ parametrizată canonic (parametrul s nu va fi, însă, parametru canonic și pe γ_1). Derivînd (1.1) obținem:

$$\gamma_1' = [1 - r(s)k(s)]\boldsymbol{t}(s) + r'(s)\boldsymbol{n}(s) + r(s)\tau(s)\boldsymbol{b}(s)$$

Cum $\boldsymbol{n}$ e normal și la γ_1, $< \gamma_1', \boldsymbol{n} >= 0$. Deci, ecuația anterioară implică $r' = ct$, adică i). Fie, în continuare, s_1 parametrul canonic pe γ_1. Avem:

$$0 = \frac{d}{ds} < \boldsymbol{t}, \boldsymbol{t}_1 >=< k\boldsymbol{n}, \boldsymbol{t}_1 > + < \boldsymbol{t}, \frac{ds_1}{ds}\boldsymbol{n} >$$

Deci

$$< \boldsymbol{t}, \boldsymbol{t}_1 >= \cos\theta = ct.$$

Pe de altă parte,

$$\cos\theta =< \frac{d\gamma_1}{ds}\frac{ds}{ds_1}, \boldsymbol{t} >= (1 - rk)\frac{ds}{ds_1},$$

$$\sin\theta =|< \boldsymbol{t} \times \boldsymbol{t}_1 >|=| r\tau\frac{ds}{ds_1} | .$$

Avem, așadar:

$$\frac{1 - rk}{r\tau} = ct. = \frac{B}{r}$$

şi luînd $A = r$ obţinem (1.1). Reciproc, în (1.1) punem $A = r$ şi definim $\gamma_1 = \gamma + r\boldsymbol{n}$. Avem:

$$\frac{d\gamma_1}{ds} = (1 - rk)\boldsymbol{t} + r\tau\boldsymbol{b} = B\tau\boldsymbol{t} = \tau(B\boldsymbol{t} + r\boldsymbol{b}).$$

Deci, un vector tangent la γ_1, de lungime 1 este:

$$\frac{B\boldsymbol{t} + r\boldsymbol{b}}{\sqrt{B^2 + r^2}} = \boldsymbol{t}_1 = \frac{d\gamma_1}{ds_1}.$$

În fine,

$$\frac{d\boldsymbol{t}_1}{ds} = \frac{1}{\sqrt{B^2 + r^2}}(\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}B + \frac{d\boldsymbol{b}}{ds}r) = M\boldsymbol{n}(s).$$

ceea ce demonstrează *ii*). Pentru a proba *iii*) observă întîi că o elice circulară, de ecuaţie $(a\cos(s/c), \cos(s/c), bs/c)$ cu $a^2 + b^2 = c^2$ este o curbă Bertrand. Pe de altă parte, dacă γ are două vecine Bertrand distincte, atunci există constantele reale nenule r, r_1 a.î. $1 - rk = cr\tau$ şi $1 - r_1 k = c_1 r_1 \tau$ cu $c \neq c_1$. Derivînd aceste relaţii găsim $k' = ct.$, $\tau' = ct.$. Dar, conform *Teoremei fundamentale a teoriei curbelor*, elicea circulară e singura curbă cu torsiune şi curbură constante.

1.1.11 *Se numesc* curbe Cesaro *curbele ale căror torsiune şi curbură satisfac o relaţie de forma:*

$$ak^2 + 2bk\tau + c\tau^2 + 2dk + 2e\tau = 0,$$

unde a, b, c, d, e sînt constante reale. Să se arate că dacă normalele principale ale unei curbe γ sînt binormalele alteia, atunci γ e curbă Cesaro.

Soluţie A doua curbă din enunţ are ecuaţia

$$\gamma_1(s) = \gamma(s) + \lambda\boldsymbol{n},$$

s parametru natural pe γ. Punem $ds_1/ds = \varphi$. Derivăm şi obţinem

$$varphi\boldsymbol{t}_1 = (1 - \lambda k)\boldsymbol{t} + \lambda'\boldsymbol{n} + \lambda\tau\boldsymbol{b}. \tag{1.2}$$

Pe de altă parte, planul osculator al lui γ_1 e paralel cu planul rectifiant al lui γ (în punctele corespunzătoare), deci ecuaţia anterioară implică $\lambda' = 0$, adică $\lambda = ct$. Derivînd în ecuaţia (1.2) găsim

$$(1 - \lambda k)k - \lambda\tau^2 = 0,$$

ceea ce încheie demonstraţia.

1.1.12 *Fie γ_1 o curbă regulată şi γ_2, γ_3 curbele definite prin*

$$\gamma_2(s) = \int \boldsymbol{b}_1(s)ds$$

$$\gamma_3(s) = \gamma_1(s)\cos\theta + \gamma_2(s)\sin\theta$$

unde θ este un unghi constant.

i) Să se găsească triedrul Frenet pentru γ_2 şi γ_3 în funcţie de cel al lui γ_1.

ii) Să se arate că dacă γ_1 are curbură constantă, atunci γ_2 are torsiune constantă, iar γ_3 este o curbă Bertrand.

Soluţie Avem $\boldsymbol{t}_2 = \boldsymbol{b}_1$, deci şi $s_2 = s_1$. Apoi $k_2\boldsymbol{n}_2 = -\tau_1\boldsymbol{n}_1$, de unde $\boldsymbol{n}_2 = -\varepsilon\boldsymbol{n}_1, k_2 = -\varepsilon\tau_1, (\varepsilon = \pm 1)$. Cele două normale au acelaşi sens dacă şi numai dacă τ_1 e negativă. Vectorul binormal este $\boldsymbol{b}_2 = -\varepsilon\boldsymbol{t}_1$ şi $\tau_2 = \varepsilon k_1$ ceea ce demonstrează şi prima afirmaţie de la *ii*). Pentru γ_3 se obţine $\boldsymbol{t}_3 = \boldsymbol{t}_1\cos\theta + \boldsymbol{b}_1\sin\theta$, deci $s_3 = s_1$. Derivînd aici găsim $k_3\boldsymbol{n}_3 = (k_1\cos\theta - \tau_1\sin\theta)\boldsymbol{n}_1$, de unde $k_3 = \varepsilon(k_1\cos\theta - \tau_1\sin\theta)$ şi $\boldsymbol{n}_3 = \varepsilon\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{t}_3 \times \boldsymbol{n}_3 = \varepsilon(\cos\theta\boldsymbol{b}_1 - \sin\theta\boldsymbol{t}_1)$. Din a treia formulă Frenet rezultă acum $\tau_3 = \cos\theta\tau_1 + \sin\theta k_1$, deci $\varepsilon k_3\cos\theta + \tau_3\sin\theta = k_1$, ceea ce arată că dacă $k_1 = ct.$, atunci γ_3 e o curbă Bertrand.

1.1.13 *Fie γ o curbă cu torsiunea nicăieri nulă. Să se arate că:*

i) Vectorul binormal $\boldsymbol{b}$ determină univoc curbura şi modulul torsiunii.

ii) Vectorul normal principal determină univoc curbura şi torsiunea.

Soluţie Din a treia ecuaţie a lui Frenet, $d\boldsymbol{b}/ds = -\tau\boldsymbol{n}$ deducem $|\tau| = |d\boldsymbol{b}/ds|$, deci modulul şi , în consecinţă, pătratul torsiunii sînt determinate. Derivînd încă o dată găsim:

$$\frac{d^2}{ds^2}\boldsymbol{b} = k\tau\boldsymbol{t} - \tau'\boldsymbol{n} - \tau^2\boldsymbol{b}$$

şi deci:

$$k^2 = \frac{\frac{d^2}{ds^2}b - | \tau' |^2 - \tau^4}{\tau^2}$$

Rămîne să determinăm $| \tau' |^2$ pornind de la b şi $| \tau |$. Avem $| \tau' | = | \frac{(\tau^2)'}{2\tau} |$ ceea ce încheie demonstraţia punctului i). Pentru ii), observăm întîi că

$$\frac{< n \times \frac{d}{ds}n, \frac{d^2}{ds^2}n >}{| \frac{d}{ds}n |^2} = \frac{\frac{k}{\tau}}{(\frac{k}{\tau})^2 + 1}$$

De aici, prin integrare, se determină raportul k/τ. Cum k e pozitiv, avem astfel determinat şi semnul torsiunii. Pe de altă parte $| dn/ds |^2 = k^2 + \tau^2$, relaţie din care se determină k.

1.1.14 Forma canonică locală a unui arc de curbă. *Să se scrie ecuaţiile unui arc de curbă regulată într-o vecinătate a unui punct s_0, raportate la axele triedrului Frenet în $\gamma(s_0)$.*

Soluţie Presupunem, ca de obicei γ parametrizată canonic. Mai mult, putem presupune $s_0 = 0$. Dezvoltăm funcţia γ în serie Taylor în jurul lui 0. Avem:

$$\gamma(s) = \gamma(0) + s\gamma'(0) + \frac{s^2}{2}\gamma''(0) + \frac{s^3}{6}\gamma'''(0) + R, \qquad \lim_{s \to 0} R = 0$$

Dar $\gamma'(0) = t, \gamma''(0) = kn, \gamma'''(0) = k't + k(-kt + \tau b)$ (cu toate funcţiile din membrul drept calculate în 0) şi deci:

$$\gamma(s) - \gamma(0) = (s - \frac{s^3}{6}k^2)t + (k\frac{s^2}{2} + k'\frac{s^3}{6})n + k\tau\frac{s^3}{6}b + R$$

Facem acum o translaţie a reperului din E^3 a. î. $\gamma(0) = 0$. Atunci coordonatele lui $\gamma(s)$ în reperul Frenet în punctul $\gamma(0)$ sînt:

$$\begin{cases} x(s) &= s - \frac{1}{6}k^2 s^3 + R_x \\ y(s) &= \frac{1}{2}ks^2 + k'\frac{1}{6}s^3 + R_y \\ z(s) &= \frac{1}{6}k\tau s^3 + R_z \end{cases}$$

cu R_x, R_y, R_z de acelaşi ordin de mărime cu s^3.

1.1.15 *Pentru orice $s_0 \in I$ există un subinterval J care-l conține și astfel încît $\gamma(J)$ se află de o singură parte a planului rectifiant.*

Soluție Este o aplicație directă a formei canonice locale. Într-adevăr, cum $k > 0$, $y(s) \geq 0$ pentru s suficient de mic și $y(s) = 0$ dacă și numai dacă $s = 0$.

1.1.16 *Planul osculator în s_0 e poziția limită a planului determinat de t și $\gamma(s_0 + h)$ cînd $h \to 0$. Să se deducă de aici că planul osculator în s_0 e poziția limită și pentru planul determinat de punctele $\gamma(s_0), \gamma(s_0 + h_1), \gamma(s_0 + h_2)$ cînd h_1, h_2 tind la 0.*

Soluție Luînd $s_0 = 0$ și $\gamma(0) = 0$, un plan care trece prin t are, în reperul Frenet, ecuația $z = cy$ sau $y = 0$. Aceasta din urmă este ecuația planului rectifiant și iese din discuție (motivați !). Dacă $z = cy$ trece prin $\gamma(h)$ atunci:

$$c = \frac{z}{y} = \frac{\frac{k\tau h^3}{6} + \ldots}{\frac{kh^2}{2} + \frac{k'h^3}{6} + \ldots},$$

deci $c \to 0$ cînd $h \to 0$. A doua caracterizare se obține din prima observînd că, atunci cînd $h_1 \to 0$, coarda determinată de $\gamma(s_0)$ și $\gamma(s_0 + h_1)$ tinde la tangenta în s_0.

1.1.17 *Fie $k(s_0) \neq 0$. Să se arate că în planul osculator în punctul $\gamma(s_0)$ există un unic cerc care are un contact de ordinul 3 cu curba (intersectează curba în trei puncte confundate). Cercul acesta se numește* cerc osculator *sau de* curbură*; raza sa este $1/k(s_0)$ și se numește* raza de curbură.

Soluție Ca mai sus, presupunem $s_0 = 0$ și $\gamma(s_0) = 0$. Considerăm E^3 raportat la reperul Frenet în punctul $\gamma(0)$. Cercul căutat trebuie să fie tangent curbei în $\gamma(0)$, deci va avea centrul pe direcția normală la curbă. Ecuația unui cerc din planul osculator în $\gamma(0)$ este:

$$\begin{cases} (X^2 + (Y - R)^2 & = & R^2 \\ Z & = & 0 \end{cases}$$

punctele de intersecţie cu curba sînt soluţiile ecuaţiei:

$$x(s)^2 + (y(s) - R)^2 = R^2$$

Înlocuim aici $x(s), y(s)$ din *forma canonică locală* neglijînd termenii de grad mai mare sau egal cu trei:

$$(s^2 + O(2)) + (k\frac{s^2}{2} - R + O(2))^2 = R^2$$

$$s^2(1 - Rk) + O(2) = 0$$

Avem contact de ordinul trei dacă şi numai dacă $1 - Rk = 0$. Deci, cercul cerut există şi are raza egală cu inversul curburii în punctul considerat. În particular, am găsit, astfel, o interpretare geometrică a curburii.

1.1.18 *Cercul osculator în s_0 e poziţia limită a cercului determinat de punctele $\gamma(s_0), \gamma(s_0 + h_1), \gamma(s_0 + h_2)$ cînd h_1, h_2 tind la 0.*

Soluţie Poziţia limită a cercului considerat e un cerc din planul osculator (cf. problemei 1.1.16) care are contact de ordinul trei cu γ în $\gamma(s_0)$ (prin construcţie). Dar cercul osculator este unic cu această proprietate.

1.1.19 *Fie $k(s_0) \neq 0, \tau(s_0) \neq 0$. Există o unică sferă (numită* sferă osculatoare *care are un contact de ordinul patru cu curba în $\gamma(s_0)$. Raza ei este $\sqrt{R^2 + (R'T)^2}$, unde $R = 1/k(s_0), T = 1/\tau(s_0)$.*

Soluţie Centrul sferei căutate se va afla în planul normal. Cu convenţiile din problema precedentă, ecuaţia sferei este:

$$X^2 + (Y - A)^2 + (Z - B)^2 = r^2$$

cu $A^2 + B^2 = r^2$. punctele ei de intersecţie cu γ vor fi soluţiile ecuaţiei:

$$X(s)^2 + (Y(s) - a)^2 + (Z(s) - B)^2 = r^2$$

Înlocuim aici $x(s), y(s), z(s)$ din *forma canonică locală*, dezvoltăm pătratele şi păstrăm doar termenii de grad mai mic sau egal cu 3. Obţinem:

$$(k'A + k\tau B)\frac{s^3}{3} + (1 - kA)s^2 + O(3) = 0$$

Existența unui contact de ordinul patru este echivalentă cu anularea coeficienților lui s^2 și s^3. Găsim, astfel, $A = \frac{1}{k} = R, B = -k'/(k^2\tau) = R'T$.

1.1.20 *Fie γ cu torsiune și derivata curburii nicăieri nule. Atunci imaginea lui γ este situată pe o sferă dacă și numai dacă $R^2 + (R'T)^2 = ct.$ (cu $R = 1/k, T = 1/\tau$.)*

Soluție Dacă $\mathrm{Im}(\gamma)$ se află pe o sferă, atunci aceasta este chiar sfera osculatoare în fiecare punct, deci expresia din enunț este constantă. Reciproc, să considerăm curba descrisă de centrelor sferelor osculatoare:

$$c(s) = \gamma(s) + R\boldsymbol{n} + R'T\boldsymbol{b}$$

Avem

$$c'(s) = (R\tau + (TR')')\boldsymbol{b}$$

și , pe de altă parte, derivînd $R^2 + (R'T)^2 = ct.$ obținem:

$$R\tau + (TR')' = 0$$

deoarece am presupus $k' \neq 0$. Deci $c(s) = c = ct.$ și $\mathrm{Im}(\gamma)$ se află pe sfera de centru c și rază $\sqrt{R^2 + (R'T)^2}$.

1.1.21 *Să se arate că planele normale la curba*

$$\gamma(t) = (a\sin^2(t), a\sin(t)\cos(t), a\cos(t))$$

trec prin origine. Să se calculeze curbura și torsiunea lui γ și să se arate că e o curbă sferică.

Soluție Curba nu e parametrizată canonic. Se utilizează formulele care exprimă elementele triedrului Frenet, curbura și torsiunea într-o parametrizare oarecare. Ultima afirmație rezultă aplicînd criteriul anterior.

1.1.22 *Să se arate că integrarea sistemului de ecuații diferențiale reprezentat de formulele lui Frenet se poate reduce la integrarea unei ecuații Riccati cu coeficienți complecși .*

Să se aplice această metodă pentru determinarea arcelor de curbă cu curbura și torsiunea constante.

Soluţie Fie $\boldsymbol{t} = (t_1, t_2, t_3), \boldsymbol{n} = (n_1, n_2, n_3), \boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$. Punem:

$$p_i = \frac{t_i + \sqrt{-1}\, n_i}{1 - b_i} = \frac{1 + b_i}{t_i - \sqrt{-1}\, n_i}$$

$$\overline{p}_i = \frac{1}{q_i} = \frac{t_i - \sqrt{-1}\, n_i}{1 - b_i} = \frac{1 + b_i}{t_i + \sqrt{-1}\, n_i}$$

cu $i = 1, 2, 3$. Se arată acum că funcţiile p_i, q_i sînt soluţiile ecuaţiei Riccati:

$$\frac{dy}{ds} = \frac{\sqrt{-1}}{2}\tau y^2 - \sqrt{-1}\, ky - \frac{\sqrt{-1}}{2}\tau$$

Arcele de curbă cu curbura şi torsiunea constante sînt arce de elice circulară.

1.2 Curbe în E^2. Proprietăţi locale.

În acest paragraf, în lipsa unei alte menţiuni, $\gamma : I \to E^2$ va fi o curbă plană parametrizată canonic, k curbura ei (cu semn).

1.2.1 *Fie T dreapta tangentă în $p = \gamma(s_0)$ la γ. Fie L o paralelă la $\mathbf{n}(s_0)$ la distanţă d de p. Fie h lungimea segmentului determinat pe L de p şi intersecţia cu T. Să se arate că*

$$| k(s_0) | = \lim_{h \to 0} \frac{2h}{d^2}$$

Soluţie Presupunem $s_0 = 0$. Alegem un sistem de coordonate cu originea O în p şi cu axele orientate, respectiv, după $\mathbf{t}(s_0)), \mathbf{n}(s_0)$. Atunci ecuaţiile canonice locale ale lui γ (vezi problema 1.1.14) vor fi:

$$x(s) = s + R_x, \quad y(s) = \pm \frac{ks^2}{2} + R_y$$

cu R_x, R_y tinzînd la zero odată cu s^2 şi semnul lui y depinzînd de orientare. Atunci:

$$| k | = \lim_{s \to 0} \frac{2 \mid y(s) \mid}{s^2} = \lim_{s \to 0} \frac{2h}{d^2}.$$

1.2.2 *Fie $\gamma : (a, b) \to E^2$. Presupunem că există $s_0 \in (a, b)$ astfel ca distanţa $| \gamma(s_0) |$ de la originea lui E^2 la imaginea lui γ să atingă un maxim în s_0. Să se arate că $| k(s_0) | \geq 1/ | \gamma(s_0) |$.*

Soluţie Fie $r = d(O, \gamma(s_0))$. Atunci cercul de centru O şi rază r e tangent la γ în $\gamma(s_0)$ şi nu mai taie curba în alt punct. Mai mult, orice segment $O\gamma(s)$, s suficient de apropiat de s_0, întîlneşte acest cerc în interiorul segmentului. Se poate aplica acum rezultatul din problema anterioară.

1.2.3 *Fie $F(x, y, a) = 0$ o familie de curbe diferenţiabile regulate indexată după parametrul a. Să se determine (dacă există) o curbă tangentă tuturor curbelor din familia dată (*înfăşurătoarea *familiei considerate).*

Soluţie Să presupunem existenţa înfăşurătorii G şi fie $x = x(a), y = y(a)$ coordonatele unui punct curent M de pe G, punct de contact cu curba C_a din familia dată. Tangenta în punctul M la C_a are coeficientul unghiular $-\frac{\partial F}{\partial x}/\frac{\partial F}{\partial y}$. Coeficientul unghiular al tangentei în M la înfăşurătoarea G este $\frac{\partial y}{\partial a}/\frac{\partial x}{\partial a}$. Cei doi coeficienţi unghiulari trebuie să fie egali, deci:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial a} = 0$$

Dar coordonatele lui M verifică identic şi ecuaţia familiei date, adică trebuie să avem $F(x(a), y(a), a) = 0$. Derivăm aici în raport cu a şi ţinem seama de ecuaţia anterioară. Găsim, în fine, ecuaţiile înfăşurătoarei:

$$F(x, y, a) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial a} = 0.$$

Ecuaţia ei implicită se obţine prin eliminarea parametrului a. Să observăm că, pentru o curbă plană, planul osculator coincide cu planul curbei. Atunci orice curbă plană e înfăşurătoarea cercurilor ei osculatoare (vezi problema 1.1.17).

1.2.4 *Să se determine înfăşurătoarea unei familii de drepte variabile pe care axele de coordonate determină un segment de lungime constantă l (*astroida*).*

Soluţie Să notăm cu A, respectiv B intersecţiile unei drepte din familie cu axele Ox, Oy. Parametrizînd dreptele date după unghiul $\theta = \widehat{OAB}$ ecuaţia familiei de drepte va fi

$$x \sin\theta + y \cos\theta = l \sin\theta \cos\theta$$

iar derivata ei în raport cu θ (cf. problemei 1.2.3)

$$x \cos\theta - y \cos\theta = l \cos 2\theta.$$

De aici găsim imediat ecuaţiile parametrice ale astroidei:

$$x = l\cos^3\theta, \quad y = l\sin^3\theta$$

şi ecuaţia implicită

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = l^{\frac{2}{3}}$$

sau, încă, sub formă raţională:

$$(x^2 + y^2 - l^2)^3 + 27l^2x^2y^2 = 0.$$

1.2.5 *Fie* $\gamma : I \to E^2$ *o curbă plană şi* t *un parametru arbitrar pe ea. Presupunînd curbura nicăieri nulă, se poate defini curba:*

$$\beta(t) = \gamma(t) + \frac{1}{k(t)}\boldsymbol{n}(t)$$

numită evoluta *lui* γ.

i) Să se arate că tangenta în t *la evoluta lui* γ *este normala în* t *la* γ. *(Deci evoluta unei curbe este înfăşurătoarea normalelor ei).*

ii) Se consideră normalele în două puncte vecine, diferite, t_1, t_2 *ale lui* γ. *Să se arate că atunci cînd* $t_1 \to t_2$, *punctul de intersecţie al normalelor converge la un punct de pe imaginea evolutei.*

Soluţie Să presupunem γ parametrizată canonic. Atunci, din formulele lui Frenet pentru o curbă plană ($\frac{d}{ds}\boldsymbol{t} = k\boldsymbol{n}$, $\frac{d}{ds}\boldsymbol{n} = -k\boldsymbol{t}$) găsim:

$$\frac{d\beta}{ds} = -\frac{k'(s)}{k(s)^2}\boldsymbol{n}$$

ceea ce probează *i*). Pentru *ii*) găsim întîi relaţia dintre parametrul canonic s pe γ şi parametrul canonic S pe evolută. Considerăm β ca funcţie de s prin intermediul lui S. Prin derivarea ecuaţiei din enunţ obţinem:

$$\frac{d\beta}{dS}\frac{dS}{ds} = -\frac{k'(s)}{k(s)^2}\boldsymbol{n}(s)$$

Cum $\mid \frac{d\beta}{dS} \mid = \mid \boldsymbol{n}(s) \mid = 1$, rezultă

$$\frac{dS}{ds} = -\frac{k'(s)}{k(s)^2}$$

de unde, prin integrare şi după orientarea convenabilă a evolutei, $S = R + a$ cu $a = ct.$ şi $R = 1/k$. Atunci lungimea arcului de pe evolută $\beta(t_1)\beta(t_2)$ este $R(t_1) - R(t_2)$. Rezultă că, atunci cînd $t_1 \to t_2$, arcul $\beta(t_1)\beta(t_2)$ tinde la un punct ceea ce demonstrează *ii*).

1.2.6 *Să se determine evoluta unei elipse.*

Soluţie Considerăm elipsa raportată la axele sale, descrisă de ecuaţiile

$$x(t) = a\cos t, \quad y(t) = b\sin t.$$

Atunci ecuaţia normalei este

$$a(x - a\cos t)\sin t + b(y - b\sin t)\cos t = 0.$$

Pentru a afla înfăşurătoarea acestei famili de drepte derivăm în raport cu t ecuaţia anterioară:

$$a(x - a\cos t)\cos t + b(y - b\sin t)\sin t = 0$$

şi eliminăm t între ecuaţia obţinută şi cea a normalei la elipsă. Găsim ecuaţia implicită:

$$(ax)^{\frac{2}{3}} + (by)^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{4}{3}}, \quad c^2 = a^2 - b^2$$

Curba aceasta se numeşte *astroidă alungită.*

1.2.7 *Să se determine evoluta* cicloidei *descrise parametric prin:*

$$x(t) = a(t - \sin t), \quad y(t) = a(1 - \cos t)$$

Soluţie Se obţine $\beta(t) = (a(t + \sin t), -a(1 - \cos t))$, deci tot o cicloidă.

1.2.8 *Curba β se numeşte* evolventă *a curbei γ dacă γ este evoluta lui β. Să se determine ecuaţiile evolventei. Să se observe că o curbă dată are o infinitate de evolvente.*

Soluţie Dacă s e parametrul canonic pe evolventa β, ţinînd seama de relaţia liniară care există între lungimile de arc pe curbă şi pe evolută (vezi soluţia problemei 1.2.5), se obţine:

$$\beta(s) = \gamma(s) + (a - s)\mathbf{t}, \quad a = ct.$$

Cum a e o constantă arbitrară, provenind dintr-o integrare, există o familie infinită de evolvente, parametrizată după a.

1.2.9 *Să se arate că evoluta* tractricei

$$\gamma(t) = (\cos t, \cos t + \ln \tan \frac{t}{2})$$

este catenara*:*

$$\beta(t) = (\cosh t, t)$$

Să se calculeze curbura tractricei şi să se arate că segmentul de pe tangenta la tractrice determinat de punctul de contact şi intersecţia cu Oy are lungime constantă.

Soluţie Calcul direct.

1.3 Curbe în E^2. Proprietăţi globale.

1.3.1 *Fie AB un segment de lungime strict mai mică decît l şi C o curbă care uneşte punctele A şi B în astfel ca împreună cu AB să mărginească o arie maximă. Atunci C e un arc de cerc care trece prin A şi B.*

Soluţie Observăm întîi că există un cerc c în care AB e o coardă şi unul dintre arcele a, b determinate de ea are lungimea l. Fie acesta arcul a. Considerăm curba închisă formată din arcele b şi C. Aceasta e diferenţiabilă doar pe porţiuni dar, examinînd demonstraţia *Inegalităţii izoperimetrice*, se constată că e aplicabilă şi unor asemenea curbe. Fixăm acum arcul b şi lăsăm C să varieze în mulţimea tuturor curbelor de lungime l care unesc A cu B. Din teorema menţionată rezultă că cercul este curba din această mulţime care mărgineşte aria cea mai mare. Cum b e fix, avem că arcul de cerc a este soluţia problemei.

1.3.2 *Fie γ o curbă conţinută în interiorul unui cerc C de rază r. Să se arate că există cel puţin un punct pe γ în care curbura satisface $\mid k \mid \geq 1/r$.*

Soluţie Considerăm familia cercurilor concentrice cu C, interioare lui şi conţinînd Imγ. Este o familie care depinde continuu de parametrul $a \in [0, r]$, raza unui cerc din familie. Fie $f(p, a)$ funcţia cu valori pozitive care asociazăunui punct p de pe γ şi cercului de rază a distanţa de la γ la acest cerc. Se vede uşor că f e continuă, deci îşi atinge minimul în cel puţin un punct (p_0, a_0). Cercul de rază a_0 este tangent la γ în p_0. Intuitiv, "strîngem" cercul C pînă atinge prima oară γ. Acum enunţul rezultă din problema 1.2.1

1.3.3 *Fie $\alpha(s) \in [0, 2\pi)$ unghiul orientat dintre axa Ox şi $t(s)$. Această funcţie nu e continuă în punctele în care tangenta la curbă e paralelă cu Ox. Să se arate că pe orice subinterval închis $[a, b] \subset I$ există funcţii continue $\theta(s)$ care satisfac relaţia $\theta(s) = \alpha(s) + 2m(s)\pi$, cu $m(s)$ întreg.*

O asemenea funcţie e complet determinată de alegerea arbitrară a lui $m(a)$. Două asemenea funcţii diferă prin $2\pi h$, cu h constantă întreagă.

Soluţie Funcţia $t(s)$ e uniform continuă pe $[a,b]$. Există, deci, $\delta > 0$ atfel ca $| s - s' |$ să implice că $t(s')$ aparţine semicercului deschis cu centrul în $t(s)$ (unde am notat la fel tangenta unitară la curbă şi raza vectoare paralelă cu ea în cercul unitate centrat în origine). Alegem acum o diviziune $a < s_1 < \ldots < s_n < b$ a intervalului $[a,b]$ de normă strict inferioară lui δ. Definim $\theta(a)$ fixînd în mod arbitrar un $m(a)$ întreg. Există o unică funcţie $\theta(s)$ pe $[a,s_1]$, continuă, de formă $\alpha(s) + 2m(s)\pi$ şi asfel încît $| \theta(s) - \theta(a) | < \pi/2$. Această din urmă condiţie poate fi îndeplinită datorită felului în care a fost aleasă diviziunea. Pe de altă parte, dacă ar mai exista o funcţie θ' cu aceleaşi proprietăţi am avea:

$$| \theta(s) - \theta'(s) | < | \theta(s) - \theta(a) | + | \theta'(s) - \theta(a) | < \pi$$

deci cele două valori $\theta(s), \theta'(s)$ nu pot măsura acelaş unghi $\alpha(s)$. Deci există o unică funcţie $\theta(s)$ ca mai sus. Continuitatea ei este clară. Cunoaştem acum valoarea $m(s_1)$. Cu ea reluăm construcţia pe intervalul $[s_1, s_2]$ şi aşa mai departe. Deci θ poate fi definită într-un număr finit de paşi. Dacă $\theta(s)$ şi $\theta'(s)$ sînt două astfel de funcţii, diferenţa lor e o funcţie continuă cu valori întregi, deci constantă. Acum soluţia e completă.

De fapt, e adevărat mai mult:

1.3.4 *Există o funcţie unghiulară θ (notaţiile din problema anterioară) diferenţiabilă pe întreg intervalul de definiţie.*

Soluţie Funcţia θ construită în problema precedentă verifică ecuaţiile:

$$\frac{dx}{ds} = cos\theta, \quad \frac{dy}{ds} = sin\theta$$

de unde

$$\theta = \arctan \frac{y'}{x'}$$

deci este local derivabilă. Din formulele lui Frenet rezultă acum

$$k(s) = \frac{d\theta}{ds}$$

Considerăm acum curba dată γ şi-i calculăm curbura (în acest calcul nu intervine funcţia unghiulară). Construim un nou arc de curbă γ_1 astfel: determinăm întîi o funcţie unghiulară diferenţiabilă prin formula

$$\theta_1(s) = \theta(s_0) + \int_{s_0}^{s} k(s)ds;$$

punem apoi:

$$x_1(s) = x(s_0) + \int_{s_0}^{s} cos\theta_1(s)ds$$

$$y_1(s) = y(s_0) + \int_{s_0}^{s} sin\theta_1(s)ds$$

Prin construcţie această curbă are funcţia unghiulară diferenţiabilă. Pe de altă parte, din *Teorema fundamentală a teoriei curbelor*, avînd aceeaşi curbură şi intersectîndu-se în s_0, γ şi γ_1 coincid.

De acum încolo vom considera funcţia unghiulară θ diferenţiabilă.

1.3.5 *O curbă plană diferenţiabilă şi închisă e convexă dacă şi numai dacă e simplă şi curbura ei are semn constant. (O curbă e convexă dacă tangenta în orice punct lasă curba de o singură parte a ei).*

Soluţie Fie L lungimea totală a curbei γ. Deoarece $k = \theta'$ pe $[0, L]$, k nu schimbă semnul dacă şi numai dacă θ e monotonă.

Să presupunem curba simplă şi , fixînd convenabil orientarea, $k \geq 0$. Dacă, prin absurd, γ nu e convexă, fie s_0 astfel ca dreapta tangentă T în acest punct mai taie curba în cel puţin alt punct. Fie $h : [o, L] \to \boldsymbol{R}$ funcţia care măsoară distanţa de la $\gamma(s)$ la T, cu semne diferite în cele două semiplane determinate de T. h e continuă şi îşi atinge maximul şi minimul în puncte aflate în semiplane diferite. Tangentele T_1, T_2 în aceste puncte sînt paralele cu T şi cel puţin două din aceste trei tangente au aceeaşi orientare. Pe de altă parte, dacă $\boldsymbol{t}(s_1) = \boldsymbol{t}(s_2)$, $\boldsymbol{t}(s) = ct.$ pe $[s_1, s_2]$ şi deci, $\gamma_{[s_1,s_2]}$ e un segment de-a lungul căruia există o tangentă unică. Vedem astfel că γ s-ar afla de o singură parte a lui T, în contradicţie cu alegerea făcută. Unde am folosit simplitatea curbei γ?

Reciproc, presupunem γ convexă. Dacă, prin absurd, există $s_1 < s_0 < s_2$ astfel că θ e crescătoare pe $[s_1, s_0]$ şi descrescătoare pe $[s_0, s_2]$, găsim două puncte vecine cu s_0, $s_1' < s_0 < s_1''$ cu $\theta(s_1') = \theta(s_1'')$. Cum indicele unei curbe simple închise este 1 (vezi *Teorema tangentelor*, de exemplu în [Ma]), există un punct s_1''' cu $\theta(s_1') = -\theta(s_1''')$. Dar o curbă convexă nu poate avea trei tangente paralele deoarece una dintre ele le-ar separa pe celelalte două. Două dintre aceste tangente trebuind să coincidă, obţinem o dreaptă care e tangentă curbei în două puncte distincte. Datorită convexităţii rezultă acum că γ e un segment între aceste puncte. Deci $\theta(s) = ct.$ pe $[s_1', s_1'']$, în contradicţie cu alegerea punctelor s_1', s_1''.

1.3.6 *Să se arate că interiorul unei curbe simple, închise, convexe este o mulţime convexă.*

Soluţie Fie, prin absurd, p, q două puncte din interiorul lui γ astfel că segmentul pq intersectează $\mathrm{Im}\gamma$. Atunci dreapta D determinată de p şi q taie curba în cel puţin patru puncte. Orientînd sistemul de coordonate în aşa fel ca D să fie paralelă cu Ox, vedem că există trei tangente paralele cu D. Dar, după cum am văzut în demonstraţia problemei anterioare, aşa ceva nu e posibil pentru o curbă convexă decît dacă cele trei tangente coincid (ca drepte). Nici acest lucru nu e posibil, deoarece nu toate trei se află într-un acelaşi semiplan determinat de D.

1.3.7 *O curbă închisă, cu curbura strict pozitivă şi cu cel puţin o autointersecţie are indicele mai mare sau egal cu 2.*

Soluţie Fie L lungimea totală a curbei şi p un punct de autointersecţie. Putem presupune $p = \gamma(0)$. Deci există $s_0 \in (0, L)$ cu $\gamma(0) = \gamma(s_0) = \gamma(L)$. Cum curbura este pozitivă, $\theta(s_0) > \theta(0)$ şi $\theta(L) = \theta(0) + 2\pi$. Există, deci, un punct $p' = \gamma(s_1)$, $s_1 < s_0$, în care $\theta(s_1) = \theta(0) + \pi$, adică tangenta în p' e paralelă cu una dintre tangentele în p. Atunci variaţia totală a unghiului pe arcul $pp'p = \gamma(0)\gamma(s_1)\gamma(s_0)$ este $\pi + \theta(s_0) - \theta(0) > \pi$. Cum variaţia unghiului pe celălalt arc închis de curbă cu capătul în p (arcul care nu-l conţine pe p') este cel puţin π (acelaşi raţionament ca mai sus dacă mai există o autointersecţie etc.) variaţia totală a unghiului pe γ va fi $> 2\pi$. Dar variaţia totală e un multiplu întreg de 2π, indicele curbei. Deci indicele este cel puţin 2.

1.3.8 *Fie $\gamma : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ o curbă plană, regulată, simplă. Dacă:*

i) curbura lui γ e strict pozitivă,

ii) $\lim_{s\to\pm\infty} \mid \gamma(s) \mid = \infty$ *(adică γ se extinde indefinit în ambele direcţii), atunci curbura ei totală $\int k(s)ds \leq \pi$.*

Soluţie Să presupunem, prin absurd, contrariul: curbura totală e strict superioară lui π.

Arătăm întîi că există cel puţin două puncte în care tangentele la curbă sînt paralele. Fie $S = \{(s_1, s_2); s_1, s_2 \in \boldsymbol{R}, s_1 < s_2\}$ şi $f : S \to \boldsymbol{R}, f(s_1, s_2) = \theta(s_2) - \theta(s_1)$. Deoarece $k(s) > 0$, f ia numai valori pozitive. Dacă $f(s_1, s_2) < \pi$ pentru orice s_1, s_2, atunci $\int k(s)ds = \lim_{s_1,s_2\to\pm\infty} k(s)ds = \lim_{s_1,s_2\to\pm\infty} f(s_1, s_2) \leq \pi$, contradicţie. Fie, deci $P = \gamma(s_1), Q = \gamma(s_2)$ punctele în care tangentele la curbă T_1, T_2 sînt paralele. Cum θ e o funcţie strict crescătoare ($k > 0$), T_1 şi T_2 sînt invers orientate. Dacă ar mai exista o tangentă paralelă cu ele într-un punct $s_3 \in (s_1, s_2)$, atunci $\theta(s_1) = \theta(s_3)$ sau $\theta(s_2) = \theta(s_3)$ şi deci $\theta(s)$ ar fi constantă pe $[s_1, s_3]$ sau pe $[s_3, s_2]$; în acest caz curba ar fi segment de dreaptă pe unul din cele două intervale, contradicţie cu ipoteza de curbură strict pozitivă. Deci, între s_1 şi s_2 nu mai există nici o tangentă paralelă cu T_1, T_2 şi porţiunea de curbă dintre P şi Q e cuprinsă în banda determinată de cele două tangente.

Studiem acum comportarea lui γ cînd $s \to \infty$. Cum θ e strict crescătoare, curba se îndepărtează de dreapta T_2 apropiindu-se de T_1. Dacă T_1 sau o dreaptă paralelă cu T_1 ar fi asimptotă pentru γ, am avea, pentru $s > s_2$, $\theta(s) < \theta(s_1) + \pi$ şi totodată, $\theta(s) > \theta(s_2) = \theta(s_1) + \pi$, contradicţie. Deci există un punct $R = \gamma(s_3)$ în care γ taie T_1.

Pe de altă parte, pe arcul de curbă dintre $-\infty$ şi s_1 avem $\theta(s) < \theta(s_1)$. Deci, ca mai sus, nici o paralelă la T_1 nu poate fi asimptotă (caz în care $\theta(s) > \theta(s_1)$). Deci γ taie dreapta T_1 într-un punct $M = \gamma(s_0)$. Cum γ nu are autointersecţii, M se află între P şi R. Există, în consecinţă, un punct $s_4 \in (s_0, s_1)$astfel încît tangenta în el e paralelă şi la fel orientată cu T_1. Atunci, între s_4 şi s_1, curba este un segment de dreaptă, contradicţie. Demonstraţia e acum completă.

Obsevaţie. Partea finală a demonstraţiei admite şi următoarea variantă (nu e unica!): considerăm arcul de cerc C prin M şi R care are în punctele respective vectorii tangenţi $\boldsymbol{t}(s_0)$ şi $\boldsymbol{t}(s_3)$. Rezultă că C e astfel orientat încît să aibă curbură pozitivă. Curba compusă din arcul C şi arcul lui γ cuprins între T_1 şi T_2 este simplă, închisă şi are curbură strict pozitivă. Deci e convexă (conform problemei anterioare), contradicţie cu faptul că T_1 o taie în trei puncte distincte.

Următoarele două probleme fac parte din articolul [Ba].

1.3.9 *Orice cerc sau dreaptă S în plan determină exact două componente conexe D_1, D_2 cu proprietatea că $\overline{D_i} = D_i$ (aceasta rezultă din Axioma de separare în plan cînd S e o dreaptă şi din Teorema lui Jordan cînd S e cerc). Spunem că o mulţime A din plan are proprietatea (C2) dacă $A \cap \overline{D_i}$ e conexă prin arce pentru orice cerc sau dreaptă S (cu alte cuvinte, orice cerc sau dreaptă separă A în cel mult două părţi).*

Să se arate că cercurile, discurile închise şi semiplanele închise au (C2).

Soluţie Un cerc A intersectează un alt cerc sau o dreaptă în cel mult două puncte. Deci $A \cap \overline{D_i}$ poate fi un arc închis de cerc, întregul cerc A sau mulţimea vidă. Toate aceste mulţimi sînt conexe prin arce. Fie acum A un disc închis şi p, q în $A \cap \overline{D_i}$. Atunci segmentul $[pq]$ taie D_2 după un sement deschis (ab) ale cărui capete sînt pe S (segmentul va fi vid dacă S e o dreaptă). Dacă S e cerc, atunci unul dintre arcele ab de pe el trebuie să fie în A, pentru că un cerc are (C2). Atunci putem uni p şi q prin drumul format de segmentul $[pa]$, arcul ab şi segmentul $[qb]$. Demonstraţia pentru semiplanul închis e analoagă.

1.3.10 *O curbă C simplă, închisă care are (C2) e un cerc.*

Soluţie Fie $p \in C$ şi $O(p)$ cercul osculator în p. Raza sa este $1/k(p)$. Cum $O(p)$ are contact de ordinul 2 cu C în p, urmează că pentru orice alt cerc S tangent la C în p există o vecinătate U a lui p în C astfel ca $U - \{p\} \subset D_i$ pentru o componentă conexă D_i, complementară lui S. Putem descrie familia de cercuri tangente la C în p prin $S(p,k) =$ cercul cu centrul $p + (1/k)\mathbf{n}(p)$ şi rază $\mid 1/k \mid$. Astfel $S(p,0)$ reprezintă tangenta la C în p şi $S(p,k(p)) = O(p)$. Deoarece curbura unei curbe închise e mărginită, cercurile $S(p,k)$ cu $\mid k \mid$ suficient de mare vor intîlni C numai în p. Să notăm $k_1(p), k_2(p)$ cele două numere reale cu proprietatea că $S(p,k) \cap C \neq \{p\}$ dacă $k_1(p) < k < k_2(p)$ şi $S(p,k) \cap C =$

$\{p\}$ dacă $k < k_1(p)$ sau $k > k_2(p)$. Deci C e cuprinsă între cercurile tangente $S(p, k_1(p))$ şi $S(p, k_2(p))$. Dar, deoarece C are (C2), $k_1(p) = k$. Într-adevăr, în caz contrar $\overline{D}_i(p, k(p)) \cap U = \{p\}$ pentru o vecinătate U a lui p în C. Atunci $\overline{D}_i(p, k(p)) \cap (C - U)$ e nevidă, altfel am putea găsi o valoare mai mare pentru $k_1(p)$. Dar asta înseamnă că $\overline{D}_i(p, k(p)) \cap C$ e neconexă, contradicţie. Cu un raţionament similar se arată că şi $k_2(p) = k(p)$, deci C care stă între $S(p, k_1(p))$ şi $S(p, k_2(p))$ trebuie să coincidă cu $O(p)$.

Observaţie Rezultatul rămîne adevărat şi pentru curbe continue (cf. loc. cit.).

Problema care urmează a fost propusă în [Jo]. Prezentăm soluţia autorului.

1.3.11 *Fie γ o curbă plană simplă, închisă cu curbura nenulă. Fie s parametrul canonic pe γ şi L lungimea curbei. Dacă A este aria interiorului lui γ şi $R = 1/k$, atunci:*

$$A \le \frac{1}{2}\int_0^L R(s)ds + \frac{L}{8}\int_0^L | R'(s) | ds.$$

Soluţie Conform observaţiei de după problema 2.2.30, există un cerc de rază $r \le L/4$ care include C. Putem presupune că centrul acestui cerc se află în originea reperului. Atunci

$$| \gamma(s) | \le r < \frac{L}{4}, \quad 0 \le s \le L.$$

Aplicînd formula lui Green obţinem:

$$A = \frac{1}{2}\int_0^L (xy' - yx')ds = -\frac{1}{2}\int_0^L < \boldsymbol{n}, \gamma > ds.$$

Cum $\boldsymbol{n}(s) = R(s)\gamma''(s)$, avem mai departe:

$$A = \frac{1}{2}\int_0^L R < \gamma'', \gamma > =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^L R\left[< \gamma', \gamma' > - \frac{d}{ds}, \gamma', \gamma' > \right] ds.$$

Despărţim integrala de mai sus într-o diferenţă de două integrale; pe cea de-a doua o integrăm prin părţi. Rezultă:

$$A = \frac{1}{2}\int_0^L R\,ds + \frac{1}{2}\int_0^L < \gamma', \gamma > R'ds.$$

Dar

$$|< \gamma', \gamma >| \leq |\gamma'||\gamma| \leq 4 < \frac{1}{4},$$

de unde rezultă inegalitatea propusă. Să mai observăm că inegalitatea din enunţ devine egalitate dacă şi numai dacă $r' = 0$, adică dacă şi numai dacă γ e un cerc.

CAPITOLUL 2. SUPRAFEŢE REGULATE

Notaţii:

S, suprafaţă regulată de clasă C^∞

(U, h), parametrizare locală cu coordonatele $u, v \in U$

h_u, h_v, derivatele parţiale ale lui h în raport cu u, v

$g = (g_{ij})$, prima formă fundamentală

$b = (b_{ij})$, a doua formă fundamentală

K, H, curbura gaussiană, curbura medie

k_1, k_2, curburile principale

k_g, τ_g, curbura geodezică, torsiunea geodezică

S^2, sfera de rază 1 cu centrul în origine

2.1 Exemple. Generalităţi.

2.1.1 *Să se arate că următoarele submulţimi ale lui E^3 sînt suprafeţe regulate şi să se indice o parametrizare în fiecare caz:*

1. Cilindrul circular drept de rază r;

2. Torul T^2, generat prin rotaţia unui cerc $S^1(r)$ de rază r în jurul unei drepte din planul său, situate la distanţă $a > r$ de centrul cercului;

3. Elipsoidul de semiaxe a, b, c. Care este numărul minim de hărţi necesare pentru a-l acoperi?

Soluţie Cilindrul circular de rază r este mulţimea

$$\{(x,y,z) \in R^3\,;\, x^2+y^2=r^2\}$$

şi poate fi acoperit cu o singură parametrizare:

$$f(u,v)=(r\cos u, r\sin u, v), \quad (u,v)\in R^2.$$

Considerăm cercul S^1 în planul yz, cu centrul în $(0,a,0)$ şi-l rotim în jurul axei Oz. Torul T^2 este mulţimea soluţiilor ecuaţiei

$$z^2=r^2-(\sqrt{x^2+y^2}-a)^2.$$

Deci T^2 este $f^{-1}(r^2)$ unde $f: R^3 \to R$ e dată prin

$$f(x,y,z)=z^2+(\sqrt{x^2+y^2}-a)^2.$$

Cum punctele de forma $(0,0,z)$ nu sînt pe tor şi

$$df=\left[2z, \frac{2y(\sqrt{x^2+y^2}-a)}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{2x(\sqrt{x^2+y^2}-a)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]$$

se constată că r^2 e o valoare regulată pentru f. Deci T^2, preimaginea sa, e o suprafaţă regulată. El poate fi acoperit cu trei parametrizări locale de forma:

$$h(u,v)=((r\cos u+a)\cos v, (r\cos u+a)\sin v, r\sin u), \quad 0<u,v<2\pi$$

Elipsoidul de ecuaţie

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

este preimaginea lui 1 prin funcţia $f: R^3 \to R$,

$$f(x,y,z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$$

pentru care 1 este valoare regulată. Elipsoidul este o submulţime compactă a lui R^3, deci poate fi acoperit cu cel puţin două hărţi. De exemplu, cu două hărţi geografice de tipul:

$$h(u,v)=(a\sin u\cos v, b\sin u\sin v, c\cos v), \quad 0<u<\pi, 0<v<2\pi$$

2.1.2 *Fie P un punct care se deplasează pe axa Oz pornind din $(0,0,0)$ şi Q un punct care se deplasează cu aceeaşi viteză ca şi P, pe o paralelă la axa Oy, pornind din $(a,0,0), a \neq 0$. Să se descrie printr-o ecuaţie implicită locul dreptei determinate de P şi Q. Este aceasta o suprafaţă regulată?*

Soluţie Ecuaţiile parametrice ale dreptei care uneşte punctele $P(t) = (0,0,t)$ şi $Q(t) = (a,t,0)$ este $x/a = y/t = (t-z)/t$. Eliminînd parametrul t se obţine ecuaţia implicită $xy+xz-ay=0$ care reprezintă un paraboloid hiperbolic. Deci e o suprafaţă regulată.

2.1.3 *Să se arate prin calcul că dacă prin punctul M al suprafeţei S trece o dreaptă d care e conţinută în întregime în S, atunci $d \subset T_M S$.*

Soluţie Putem presupune că d este axa Oz. Atunci ecuaţia lui S va fi

$$F(x,y,z) = xf(x,y,z) + yg(x,y,z) = 0,$$

cu f, g indefinit diferenţiabile. Ecuaţia planului tangent în $M = M(0,0,a)$ va fi:

$$XF_x(M) + YF_y(M) + (Z-a)F_z(M) = 0.$$

Cum $F_z(0,0,a) = 0$, ecuaţia se reduce la $XF_x(M) + YF_y(M) = 0$ ceea ce demonstrează enunţul.

2.1.4 *Fie S o suprafaţă regulată şi $p \in S$. Să se arate că există o vecinătate V a lui p în S care este graficul unei funcţii explicite avînd una dintre formele $x = h(y,z)$, $y = g(x,z)$, $z = f(x,y)$.*

Soluţie Fie $\varphi : U \to S$, U deschis în R^2, o parametrizare a lui S în jurul lui p. Notînd componentele lui φ cu $x(u,v), y(u,v), z(u,v)$ şi $q = \varphi^{-1}(p)$, ştim că măcar unul dintre determinanţii iacobieni $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$, $\frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)}$, $\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}$ e nenul în q. Fie, de exemplu, primul dintre ei diferit de 0 în q şi fie π proiecţia lui R^3 pe planul xy. Aplicăm *Teorema funcţiei inverse* lui $\pi \circ \varphi$ şi ,din presupunerea făcută, deducem existenţa unor vecinătăţi V_1 a lui p, V_2 a lui $\pi \circ \varphi(q)$ între care $\pi \circ \varphi$ este un difeomorfism. Deci restricţia lui $V = \varphi(V_1)$ e bijectivă şi există $(\pi \circ \varphi)^{-1} : V_2 \to V_1$

diferenţiabilă. În plus, cum φ e homeomorfism, V e vecinătate a lui p în S. Compunem acum funcţia $(\pi \circ \varphi)^{-1}$ cu $(u,v) \mapsto z(u,v)$ şi găsim că V e graficul funcţiei $z = z(u(x,y), v(x,y)) = f(x,y)$. Celelalte două cazuri se tratează asemănător.

2.1.5 *Să se arate că un con circular drept cu o pînză nu e o suprafaţă regulată.*

Soluţie Fie conul descris de ecuaţia implicită

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (x,y) \in R^2.$$

Dacă ar fi o suprafaţă regulată ar fi, în vecinătatea punctului $(0,0,0)$, graficul unei funcţii diferenţiabile avînd una dintre formele $y = h(x,z)$, $x = g(y,z)$, sau $z = f(z,y)$. Al treilea caz nu poate avea loc pentru că f ar trebui să coincidă, pe o vecinătate a lui $(0,0,0)$ cu $\sqrt{x^2 + y^2}$ care nu e diferenţiabilă în $(0,0)$. Primele două forme se exclud, de asemenea, pentru că proiecţiile conului pe planele de coordonate xz, respectiv yz nu sînt bijective.

2.1.6 *Să se arate că un con cu două pînze nu e o suprafaţă regulată.*

Soluţie Fie C un con cu două pînze şi , presupunînd că este suprafaţă regulată, $h : U \to R^3$ o parametrizare în jurul virfului V (cu U deschis în R^2). Fără a restrînge generalitatea putem presupune că U este un disc deschis centrat în origine şi $h(0,0) = V$. Cum h este continuă, $h(U)$ este o mulţime conexă care conţine V. Pe de altă parte, $U \backslash \{(0,0)\}$ e, încă, o mulţime conexă în timp ce imaginea sa prin h, $h(U) \backslash V$ e neconexă. Aceasta e o contradicţie deoarece h e continuă.

2.1.7 *Dacă S se poate reprezenta ca preimagine de valoare regulată prin două funcţii diferenţiabile, atunci diferenţialele lor sînt dependente în orice punct din S.*

Soluţie Fie $f_1, f_2 : R^3 \to R$ diferenţiabile şi a_1, a_2 valori regulate pentru f_1, f_2 astfel încît $S = f_1^{-1}(a_1) = f_2^{-1}(a_2)$. Dacă df_{1p} este independentă de df_{2p} în orice punct $p \in S$, atunci (a_1, a_2) este valoare regulată pentru funcţia $f : R^3 \to R^2$, $f = (f_1, f_2)$. În consecinţă $f^{-1}(a_1, a_2)$ este o curbă regulată. Dar $f^{-1}(a_1, a_2) = S$, contradicţie.

2.1.8 *Fie S o suprafaţă şi $F : R^3 \to R$ o funcţie diferenţiabilă. Dacă $p \in S$ e un punct regulat al lui F şi în acelaşi timp, un punct de extrem al lui $F_{|S}$, atunci T_pS coincide cu spaţiul tangent la mulţimea de nivel a lui f prin p (adică $T_pS = T_pF^{-1}(F(p))$).*

Soluţie Fie (U, h) o parametrizare locală a lui S în jurul lui p, $h(0,0) = p$. Restricţia f a lui F la S se exprimă, pe imaginea lui U, prin $f(x,y,z) = F(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$. Cum p e punct de extrem al lui f, $df(p) = 0$. Dar $df(p) = (< dF(p), h_u(0,0) >, < dF(p), h_v(0,0) >)$. Rezultă că $dF(p)$ e perpendicular pe $h_u(0,0)$ şi pe $h_v(0,0)$, deci e perpendicular pe T_pS. Cum $dF(p)$ este normal şi la $F^{-1}(F(p))$, soluţia e completă.

2.1.9 *Fie S o suprafaţă regulată şi $p_0 \notin S$ un punct din R^3. Să se arate că cel mai scurt segment care uneşte p_0 cu S, dacă există, este perpendicular pe S. Aceeaşi proprietate are loc pentru cel mai lung segment între p_0 şi S.*

Soluţie Considerăm funţia diferenţiabilă $f : S \to R$ dată prin $f(q) = \| q - p_0 \|$. Dacă p_0p este un cel mai scurt (sau un cel mai lung) segment de la p_0 la S, atunci p e un punct de extrem pentru f. Deci $df(p)w = 0$, pentru orice vector w din T_pS. Fie w vectorul viteză al unei curbe γ pe S: $w = \gamma'(0)$. Dar:

$$df(p)w = (f \circ \gamma)'(0) = \frac{d}{dt} \| \gamma(t) - p_0 \| (0) = 2 < p - p_0, w > .$$

Deci segmentul $p - p_0$ e perpendicular pe orice vector din T_pS, ceea ce trebuia demonstrat.

2.1.10 Banda lui Möbius. *Este suprafata obţinută prin identificarea laturilor opuse ale unui triunghi după ce, în prealabil, una dintre ele a fost simetrizată faţă de mijlocul ei. Să se scrie o parametrizare pentru această suprafaţă şi să se arate că e neorientabilă.*

Soluţie Pentru a o parametriza considerăm cercul $x^2 + y^2 = 4$ şi segmentul deschis AB în planul yOz descris de ecuaţiile $y = 2, | z | < 1$. Rotim mijlocul c al lui AB în jurul lui Oz şi , în acelaşi timp, rotim segmentul AB în jurul lui c în planul zOc. Mişcarea trebuie astfel făcută încît atunci cînd c a acoperit un unghi u, AB să se fi rotit cu $u/2$. Drept rezultat, cînd c revine în poziţia iniţială, AB s-a rotit cu $180°$. Se obţine parametrizarea:

$$h(u,v) = ((2 - v\sin\frac{u}{2})\sin u,\quad (2 - v\sin\frac{u}{2})\cos u,\quad v\cos\frac{u}{2})$$

cu $(u,v) \in (0,2\pi) \times (-1,1)$ şi u măsurat dinspre axa Oy. Se acoperă asfel toată suprafaţa în afara punctelor corespunzătoare lui $u = 0$. Pentru a o acoperi complet considerăm şi parametrizarea:

$$k(\varphi,\theta) = ((2 - \theta\sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}))\cos\varphi,$$

$$-(2 - \theta\sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}))\sin\varphi, \theta\cos(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}))$$

unde, acum, φ e măsurat dinspre axa Ox şi $\theta = v$. A doua parametrizare nu acoperă punctele cu $u = \pi/2$, dar acestea se află în imaginea primeia.

Intersecţia celor două hărţi este reuniunea mulţimilor S_1, S_2, unde

$$S_1 = \{h(u,v)\,;\ \frac{\pi}{2} < u < 2\pi\}$$

$$S_2 = \{h(u,v)\,;\ 0, u < \frac{\pi}{2}\}$$

Schimbările de coordonate sînt, respectiv, $(\varphi,\theta) = (u - \pi/2, v)$ în S_1 şi $(\varphi,\theta) = (3\pi/2 + u, -v)$ în S_2. Schimbarea de coordonate se face, deci, cu determinant pozitiv în S_1 şi cu determinant negativ în S_2. Aceasta nu este, însă, suficient pentru a conchide că Banda lui Möbius nu e orientabilă. Să presupunem că există un cîmp diferenţiabil de vectori normali unitari $N : S \to R^3$. Putem presupune că în orice punct acoperit de h avem

$$N(p) = \frac{h_u \times h_v}{| h_u \times h_v |}$$

unde indicele inferior reprezintă derivata parţială. La fel, pe imaginea lui k vom avea

$$N(p) = \frac{k_\varphi \times k_\theta}{| k_\varphi \times k_\theta |}$$

Cum jacobianul schimbării de coordonate va fi -1 în S_1 sau S_2, rezultă că $N(p) = -N(p)$ dacă p e din acea componentă a intersecţiei. Dar normala unitară nu se poate anula pentru că suprafaţă e regulată. Deci Banda lui Mõbius nu e orientabilă.

Exemplul acesta sugerează următoarea generalizare a cărei demonstraţie o lăsăm în seama cititorului:

2.1.11 *Fie S o suprafaţă regulată acoperită cu vecinătăţile de coordonate V_1, V_2. Dacă $V_1 \cap V_2$ are două componente conexe S_1, S_2 şi jacobianul schimbării de coordonate are semn diferit pe S_1 şi pe S_2. Atunci S e neorientabilă.*

2.1.12 *Să se arate că există suprafeţe regulate descrise ca $f^{-1}(a)$ cu f diferenţiabilă şi a valoare critică pentru f.*

Soluţie Considerăm $f : R^3 \to R$, $f(x,y,z) = z^3$. Avem $df_{(x,y,z)} = (0,0,2z)$ deci $rg(df(0,0,0)) = 0$. Cum $(0,0,0) \in f^{-1}(0)$, 0 nu e valoare regulată. Totuşi, $S = f^{-1}(0) = \{(x,y,0)\}$ = planul xOy e o suprafaţă regulată.

Următoarele două probleme vor pune în evidenţă condiţii suficiente ca o suprafaţă regulată să nu fie soluţie a problemei anterioare. Mai precis, se va vedea că orientabilitatea şi compacitatea sînt suficiente ca S să fie preimaginea unei valori regulate printr-o funcţie diferenţiabilă.

2.1.13 Existenţa vecinătăţilor tubulare pentru suprafeţe compacte orientabile. *Fie S o suprafaţă regulată, compactă, orientabilă. Atunci există $\varepsilon > 0$ astfel încît, cînd p şi q sînt din S, segmentele normale de lungime 2ε, centrate în p şi q, să fie disjuncte.*

Soluţie *Pasul 1. Construcţia locală.* Fie $h : U \to S$ o parametrizare în jurul unui punct $p = h(u_0, v_0)$. Construim o vecinătate tubulară a unei vecinătăţi W_p a lui p în S. Fie $F : U \times R \to R^3$ dată prin:

$$F(u,v,t) = h(u,v) + tN(u,v)$$

unde $N(u,v)$ e vectorul normal unitar la S în $h(u,v)$. Jacobianul lui F se calculează uşor şi se obţine $J(F) = | h_u \times h_v | \neq 0$. Conform teoremei funcţiei inverse există o vecinătate paralelipipedică de forma

$$u_0 - \delta < u_0 + \delta,\ u_0 - \delta < u_0 + \delta,\ -\varepsilon_p < t < \varepsilon_p,$$

în $U \times R$ pe care restricţia lui F e bijecţie cu inversa diferenţiabilă. Fie W_p imaginea prin F a dreptunghiului

$$u_0 - \delta < u_0 + \delta,\ u_0 - \delta < u_0 + \delta.$$

Cum F e bijectivă, segmentele de pe normală cu centrele în q din W şi de lungime $< 2\varepsilon_p$ nu se pot intersecta. Să observăm că orientarea lui S nu a intervenit la acest pas.

Pasul 2. Globalizarea construcţiei. Familia de vecinătăţi $\{W_p\}$ acoperă S. Cum S e compactă, există un număr δ (numărul Lebesgue al familiei) cu proprietatea că de îndată ce $p, q \in S$ sînt la distanţă (euclidiană) inferioară lui, atunci p şi q sînt în aceeaşi W_p. Îtr-adevăr, în caz contrar am putea construi două şiruri infinite de puncte $\{p_n\}$, $\{q_n\}$ cu $d(p_n, q_n) < 1/n$, p_n, q_n neaparţinînd aceleiaşi mulţimi W_p. Fie p şi q respectiv punctele limită ale celor două şiruri (ele există pentru că S e compactă). Rezultă $p = q \in W_{p_0}$ (pentru un anume p_0) şi atunci, într-o bilă centrată în p, de rază convenabilă pentru a fi în întregime inclusă în W_{p_0}, vor exista puncte p_n, q_n din cele două şiruri; contradicţie. Folosind din nou compacitatea lui S, alegem un număr finit, fie $W_1, ..., W_n$ care încă acoperă S. Fie acum ε orice număr mai mic decît $\min\{\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n, \frac{\delta}{2}\}$. Vom arăta că un ε asfel ales satisface condiţia din enunţ. Fie, deci, $p.q$ din S. Dacă ele sînt în aceeaşi W_i nu mai e nimic de demonstrat. Dacă $p \in W_i$, $q \in W_j$, $i \neq j$, atunci $d(p, q) \geq \delta$. Dacă segmentele de normală cu centrele în p şi q, de lungime 2ε s-ar întîlni într-un punct r, atunci:

$$2\varepsilon \geq d(p, r) + d(q, r) \geq d(p, q) \geq \delta$$

contrazicînd alegerea lui ε. Enunţul e, acum, complet demonstrat.

2.1.14 *Orice suprafaţă regulată, S, compactă şi orientabilă e preimaginea unei valori regulate printr-o funcţie diferenţiabilă definită pe un deschis conex $V \supset S$ din R^3.*

Soluţie Fie V o vecinătate tubulară a suprafeţei S (vezi construcţia anterioară). Fixăm o orientare pe S şi definim $g : V \to R$ prin $g(p) =$ distanţ orientată de la p la piciorul unicei normale la S care trece prin p. Evident $g^{-1}(0) = S$. Considerăm din nou funcţia F dată prin $F(u, v, t) = h(u, v) + tN(u, v)$. Ea era inversabilă pe un paralelipiped

Q, cu $\varepsilon < t < \varepsilon$ şi $F(Q) = V$. Dacă notăm componentele lui F^{-1} cu $(u = u(x,y,z), v = v(x,y,z), t = t(x,y,z))$, atunci $g(x,y,z) = t(x,y,z)$. Deci g e diferenţiabilă. 0 e valoare regulată pentru că dF^{-1} e nesingulară în $t = 0$.

2.1.15 *Fie V un deschis pe S şi X_1, X_2 două cîmpuri vectoriale diferenţiabile pe U, liniar independente în $p \in U$. Să se arate că că există o vecinătate W a lui p şi o parametrizare cu imaginea W, astfel ca liniile de coordonate să fie tangente cîmpurilor X_1, X_2.*

Soluţie Fie $U \subset V$ o vecinătate deschisă pe care sînt definite integralele prime locale f_1, f_2 ale lui X_1, X_2. Fie $\varphi : U \to R^2$ definită prin $\varphi(q) = (f_1(q), f_2(q))$. Atunci:

$$d\varphi_p X_1 = ((df_1)_p X_1, (df_2)_p X_1) = (0, a),$$

$$d\varphi_p X_2 = ((df_1)_p X_2, (df_2)_p X_2) = (b, 0).$$

Cum X_1, X_2 sînt liniar independente în p, rezultă $a \neq 0$, $b \neq 0$; deci, $d\varphi_p \neq 0$, astfel că φ e difeomorfism local în p. Atunci există o vecinătate deschisă W' a lui $\varphi(p)$ în R^2 aplicată difeomorf prin $h = \varphi^{-1}$ pe o vecinătate W a lui p, $W \subset V$. Atunci h e o parametrizare avînd curbele de coordonate $f_1 = ct.$, $f_2 = ct.$, ceea ce trebuia demonstrat.

2.1.16 *Să se arate că în jurul oricărui punct al unei suprafeţe regulate există parametrizări ortogonale.*

Soluţie Fie $p \in S$ şi (U, h) o parametrizare locală oarecare în jurul său. E suficient să aplică rezultatul anterior pentru cîmpurile $X_1 = h_u$, $X_2 = -(g_{12}/g_{11})h_u + h_v$ care sînt ortogonale.

2.2 Proprietăţi metrice. Curbura gaussiană

2.2.1 *Să se arate că într-o parametrizare ortogonală (i.e. $g_{12} = 0$) curbura gaussiană se calculează cu formula:*

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{g_{11}g_{22}}}\left(\frac{\partial}{\partial v}\frac{\frac{\partial g_{11}}{\partial v}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} + \frac{\partial}{\partial u}\frac{\frac{\partial g_{22}}{\partial u}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}\right).$$

În particular, într-o parametrizare izotermă ($g_{11} = g_{22} = \lambda, g_{12} = 0$) avem:

$$K = -\frac{1}{2\lambda^2}\Delta \log \lambda.$$

Soluţie Calcul direct, utilizînd ecuaţia lui Gauss şi Teorema Egregium.

2.2.2 *Să se scrie ecuaţiile lui Codazzi într-o parametrizare izotermă.*

Soluţie Fie (U, h) o parametrizare izotermă: $g_{11} = g_{22} = \lambda$, $g_{12} = 0$. Coeficienţii Christoffel iau forma:

$$\Gamma^1_{11} = \frac{1}{2}g^{11}\frac{\partial g_{11}}{\partial u},\ \ \Gamma^1_{12} = \frac{1}{2}g^{11}\frac{\partial g_{11}}{\partial v},\ \ \Gamma^1_{22} = -\frac{1}{2}g^{11}\frac{\partial g_{22}}{\partial u},$$

$$\Gamma^2_{11} = -\frac{1}{2}g^{22}\frac{\partial g_{11}}{\partial v},\ \ \Gamma^2_{12} = \frac{1}{2}g^{22}\frac{\partial g_{22}}{\partial u},\ \ \Gamma^1_{22} = \frac{1}{2}g^{22}\frac{\partial g_{22}}{\partial v}.$$

Pe de altă parte, cum $g^{11} = g^{22} = \lambda^{-1}$, curbura medie este:

$$H = \frac{1}{2g_{22}}(b_{11} + b_{22}).$$

Atunci ecuaţiile lui Codazzi devin:

$$\frac{\partial}{\partial u}\frac{b_{11} - b_{22}}{2} + \frac{\partial b_{12}}{\partial v} = \lambda\frac{\partial H}{\partial u},$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\frac{b_{11} - b_{22}}{2} - \frac{\partial b_{12}}{\partial u} = -\lambda\frac{\partial H}{\partial v}.$$

2.2.3 *Fie p un punct în care $K(p) \neq 0$ şi V o vecinătate a sa pe care K păstrează semn constant. Fie A aria unei regiuni B din V care conţine punctul p şi A' aria imaginii lui B prin aplicaţia lui Gauss pe sfera unitate. Atunci*

$$K(p) = \lim_{A \to 0} \frac{A'}{A},$$

unde limita e luată după un şir de regiuni B_n care converge la p.

Soluţie Fie (U, h) o parametrizare a cărei imagine cuprinde V. Atunci, dacă $D = h^{-1}(B)$, avem

$$A = \int_D | h_u \times h_v | \, dudv.$$

Cum aplicaţia lui Gauss poate fi privită ca o parametrizare locală a imaginii sale pe S^1, $N : U \to S^1$, avem şi :

$$A' = \int_D | N_u \times N_v | \, dudv.$$

Folosind formula lui Weingarten, deducem că

$$| N_u \times N_v | = K \, | h_u \times h_v | \, .$$

Notăm d aria regiunii D şi aplicînd teorema de medie pentru integrala dublă obţinem:

$$\lim_{A \to 0} \frac{A'}{A} = \lim_{d \to 0} \frac{A'/d}{A/d} = \frac{\lim_{d \to 0}(1/d) \int_D K \, | h_u \times h_v | \, dudv}{\lim_{d \to 0}(1/d) \int_D | h_u \times h_v | \, dudv} = K(p).$$

2.2.4 *Fie p un punct eliptic al unei suprafeţe S. Atunci p are o vecinătate situată de o aceeaşi parte a lui T_pS. Fie p un punct hiperbolic.. Atunci orice vecinătate a sa e situată de o parte şi de alta a lui T_pS. Să se arate, prin exemple, că reciproca nici unuia dintre rezultatele anterioare nu este adevărată.*

Soluţie Fie (U, h) o parametrizare în jurul lui p, $h(0,0) = p$. Considerăm funcţia $d : Im(h) \to R$ dată prin

$$d(q) = < h(u,v) - h(0,0), N_p >$$

Existența unei vecinătăți a lui p situate de o singură parte a lui T_pS revine la existența unei vecinătăți pe care d păstrează semn constant. Dezvoltăm h în serie Taylor în jurul lui $(0,0)$:

$$h(u,v) - h(0,0) = h_u u + h_v v + \frac{1}{2}(h_{uu}u^2 + h_{uv}uv + h_{vv}v^2) + O(2)$$

Atunci :

$$d(q) = \frac{1}{2}(b_{11}u^2 + b_{12}uv + b_{22}v^2) + O(2) =$$

$$= \frac{1}{2}b(w,w) + O(2),$$

unde $w = h_u u + h_v v$. Rezultă că d are semnul lui $b(w,w)$. Dacă p e eliptic, atunci curburile principale au același semn; cum acestea reprezintă extremele curburilor normale în p, curburile normale în orice direcție tangentă în p au același semn. Dar curbura normală în direcția w este $b(w,w)$. Deci $b(w,w)$ păstrează semn constant pe o vecinătate alui p. Analog se raționează cînd p e hiperbolic.

Punctele unui cilindru circular drept sînt, toate, parabolice (curburile principale sînt 0 și $1/R$). Cu toate acestea, cilindrul se află de o singură parte a planului tangent în orice punct.

Considerăm suprafața $z = x^3 - 3xy^2$. Se constată ușor că punctul $(0,0,0)$ e planar, dar în orice vecinătate a sa se află puncte de ambele părți ale planului tangent. Vezi, de asemenea, și exercițiul 2.2.7.

2.2.5 *Să se arate că într-un punct hiperbolic direcțiile principale sînt bisectoarele unghiurilor făcute de direcțiile asimptotice.*

Soluție Fie $p \in S$. Indicatoarea Dupin în p este mulțimea de vectori $w \in T_pS$ care verifică $b(w,w) = \pm 1$. Raportăm T_pS la reperul ortonormat format de vectorii principali e_1, e_2. Atunci indicatoarea lui Dupin ia forma:

$$\pm 1 = b(w,w) = b(\alpha e_1 + \beta e_2, \alpha e_1 + \beta e_2) = k_1\alpha^2 + k_2\beta^2.$$

Deci indicatoarea lui Dupin e, în general, o reuniune de conice în T_pS. Dacă p e un punct hiperbolic, atunci $k_1k_2 < 0$ și indicatoarea lui Dupin e o reuniune de două hiperbole avînd asimptote comune. E clar, de asemenea, că direcțiile asimptotice în p sînt asimptotele indicatoarei (de-a lungul lor, curbura normală e zero). Pe de altă parte, ecuațiile asimptotelor sînt $y = \pm\sqrt{k_1}/\sqrt{-k_2}$ deci demonstrația e completă.

2.2.6 *Să se arate că dacă curbura medie este nulă într-un punct neplanar, atunci există în acest punct două direcţii asimptotice ortogonale.*

Soluţie $H(p) = 0$ şi p neplanar implică faptul că p e hiperbolic. Deci curburile principale sînt nenule, egale şi de semn contrar. Am văzut în exerciţiul anterior că direcţiile asimptotice în p sînt asimptotele indicatoarei lui Dupin. Tot din exerciţiul anterir deducem că ecuaţiile acestor asimptote sînt $y = \pm x$, deci asimptotele sînt perpendiculare.

2.2.7 *Să se arate că dacă o suprafaţă e tangentă unui plan de-a lungul unei curbe C, atunci punctele acelei curbe sînt parabolice ori planare.*

Soluţie Evident C e o curbă plană. Vectorul ei normal principal în orice punct al ei este în planul tangent la suprafaţă (care e constant de-a lungul lui C, fie el π) si proiecţia lui pe vectorul normal la suprafaţă e nulă. Deci curbura normală în direcţia tangentă la C e nulă. Pe de altă parte, C are o vecinătate situată de o aceeaşi parte a lui π, deci curburile normale în orice punct al lui C au acelaşi semn. Atunci una dintre curburile principale de-a lungul lui C este 0, ceea ce demonstrează afirmaţia.

Situaţia din enunţ este exemplificată de cercul paralel superior de pe un tor.

2.2.8 *Daţi exemple de suprafeţe care au puncte parabolice izolate.*

Soluţie Fie S o suprafaţă ca în enunţ. Presupunem că punctul parabolic izolat e $(0,0,0)$ şi că S se expliciteazā într-o vecinătate a sa sub forma $z = f(x,y)$ cu $f(0,0) = 0, f_x(0,0) = 0, f_y(0,0) = 0$ (adică planul xOy e tangent la S în origine). $(0,0,0)$ e punct parabolic izolat dacă $f_{xx}^2 + f_{yy}^2 \neq 0$ în $(0,0)$ şi $f_{xx}^2 f_{yy}^2 - f_{xy}^2 = 0$ dacă şi numai dacă $x = y = 0$. Putem căuta f sub forma $f(x,y) = a(x) + b(y) + xy$. Condiţiile găsite devin :$a_{xx}^2 + b_{yy}^2 \neq 0$ şi $a_{xx}b_{yy} = 1$ doar în $(0,0)$. De exemplu, $a_{xx} = \cos x$, $b_{yy} = \cos y$ sînt soluţii convenabile, furnizînd parametrizarea $f(x,y) = \cos x + \cos y + xy - 2$; de asemenea $a_{xx} = x - 1$, $b_{yy} = y - 1$ cu $| x |< 1, | y |< 1$.

2.2.9 *Să se arate că se arate că curbura medie H în p e dată de formula:*

$$H = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} k_n(\theta)d\theta$$

unde $k_n(\theta)$ *e curbura normală într-o direcţie care face unghiul* θ *cu o direcţie fixă.*

Soluţie Putem presupune (eventual, în urma unei izometrii în E^3) că direcţia fixă este e_1, direcţia principală corespunzătoare curburii principale k_1. Atunci (relaţia lui Euler):

$$k_n(\theta) = k_1 \cos^2(\theta) + k_2 \sin^2(\theta).$$

Acum relaţia din enunţ rezultă imediat.

2.2.10 *Să se calculeze coeficienţii primei şi celei de-a doua forme fundamentale, curburile principale, curbura gaussiană şi curbura medie pentru suprafaţa lui Enneper:*

$$h(u,v) = (u - \frac{u^3}{3} + uv^2, \;\; v - \frac{v^3}{3} + u^2v, \;\; u^2 - v^2).$$

Să se arate că liniile de curbură sînt curbele coordonate.

Soluţie Prin calcul direct:

$$g_{11} = g_{22} = (1 + u^2 + v^2)^2, \;\; g_{12} = 0,$$

$$b_{11} = 2, \;\; b_{22} = -2, \;\; b_{12} = 0,$$
$$k_1 = -k_2 = 2(1 + u^2 + v^2)^{-2},$$
$$K = -4(1 + u^2 + v^2)^{-4}, \;\; H = 0.$$

În particular, suprafaţa lui Enneper e minimală. Ecuaţia liniilor de curbură este, în general:

$$(b_{12}g_{11} - b_{11}g_{12})(u')^2 + (b_{22}g_{11} - b_{11}g_{22})u'v' + (b_{22}g_{12} - b_{12}g_{22})(v')^2 = 0.$$

În cazul nostru devine:

$$-4(1 + u^2 + v^2)^2 u'v' = 0,$$

cu soluţiile $u = ct.$, $v = ct.$.

2.2.11 *Doi vectori tangenţi w_1, w_2 în p se numesc conjugaţi dacă $< dN_p w_1, w_2 > = 0$. Două direcţii se zic conjugate dacă există o pereche de vectori tangenţi conjugaţi şi paraleli cu direcţiile date.*

Să se arate că dacă p e neombilical şi θ, φ sînt, respectiv, unghiurile făcute de două direcţii tangente r_1, r_2 cu vectorul principal e_1 (corespunzător curburii principale k_1), atunci r_1, r_2 sînt conjugate dacă şi numai dacă

$$k_1 \cos\theta \cos\varphi + k_2 \sin\theta \sin\varphi = 0.$$

Soluţie În reperul ortonormat format de vectorii principali e_1, e_2 vectorii w_1, w_2 se exprimă prin:

$$w_1 = \cos\theta e_1 + \sin\theta e_2, \quad , w_2 = \cos\varphi e_1 + \sin\varphi e_2.$$

Cum $dN_p e_1 = k_1 e_1$, $dN_p e_2 = k_2 e_2$, ei sînt conjugaţi dacă şi numai dacă

$$0 =< dN_p w_1, w_2 >=< k_1 \cos\theta e_1 + k_2 \sin\theta e_, \cos\varphi e_1 + \sin\varphi e_2 >=$$

$$= k_1 \cos\theta \cos\varphi + k_2 \sin\theta \sin\varphi.$$

2.2.12 (Beltrami-Enneper) *Fie γ o curbă asimptotică cu curbură nicăieri nulă pe o suprafaţă S. Să se arate că modulul torsiunii lui γ este*

$$| \tau |= \sqrt{-K}.$$

Soluţie Fie p un punct pe γ. Curbura normală în p e zero (γ e asimptotică), deci vectorul normal principal al lui γ e ortogonal pe vectorul normal la suprafaţă. Astfel planul osculator e normal la N_p şi obţinem $N' = \tau \boldsymbol{n}$. Dacă e_1, e_2 sînt direcţiile principale în p, θ unghiul dintre e_1 şi tangenta la γ şi k_1, k_2 curburile principale în p, atunci (vezi exerciţiul anterior):

$$\tau^2 =| N' |^2 = k_1^2 \cos^2\theta + k_2^2 \sin^2\theta.$$

Cum o direcţie asimptotică e conjugată cu ea însăşi, avem:

$$k_1 \cos^2\theta = -k_2 \sin^2\theta.$$

De aici obţinem

$$\cos^2\theta = \frac{k_2}{k_2 - k_1}, \quad \sin^2\theta = -\frac{k_1}{k_1 - k_2},$$

relaţii care, înlocuite în formula lui τ ne dau $\tau^2 = -k_1 k_2$.

2.2.13 *Dacă suprafețele regulate S_1, S_2 se intersectează după o curbă regulată C, atunci curbura k a lui C în p satisface relația:*

$$k^2 \sin^2 \theta = k_{n1}^2 + k_{n2}^2 - 2k_{n1}k_{n2}\cos\theta,$$

unde k_{ni} sînt curburile normale în p de-a lungul tangentei la C pe S_i, iar θ e unghiul dintre vectorii normali N_{p1}, N_{p2} la cele două suprafețe.

Soluție Fie $T_1 = k_{n1}N_{p2}, T_2 = k_{n2}N_{p1}$. Atunci:

$$| T_1 - T_2 | = | < k\boldsymbol{n}, N_{p1} > N_{p2} - < k\boldsymbol{n}, N_{p2} > N_{p1} | =$$

$$= \sqrt{k_{n1}^2 + k_{n2}^2 - 2k_{n1}k_{n2}\cos\theta}.$$

Pe de altă parte, vectorii $N_{p1}, N_{p2}, \boldsymbol{n}$ fiind unitari, avem:

$$| \sin\theta | = | N_{p1} \times N_{p2} | = | \boldsymbol{n} \times (N_{p1} \times N_{p2}) | =$$

$$= | < \boldsymbol{n}, N_{p2} > N_{p1} - < \boldsymbol{n}, N_{p1} > N_{p2} |,$$

ceea ce încheie demonstrația.

2.2.14 (Joachimstahl) *Fie două suprafețe regulate S_1, S_2 care se intersectează după o curbă regulată C și fac unghiul $\theta(p)$ în fiecare $p \in C$. Dacă C e linie de curbură pe S_1, atunci θ e constant dacă și numai dacă C e linie de curbură și pe S_2.*

Soluție Fie $\boldsymbol{t}$ vectorul viteză al curbei, presupus vector principal pe S_1. Derivăm relația $< N_1, N_2 > = \cos\theta$ și ținem seama că $dN_{i_p}\boldsymbol{t} = \frac{dN_i}{dt}(C(t))$. Cum $dN_1\boldsymbol{t}$ e coliniar cu $\boldsymbol{t}$, obținem:

$$\theta = ct. \Leftrightarrow N_1 \perp dN_2\boldsymbol{t},$$

adică $dN_2\boldsymbol{t}$ e tangent la S_1. Dar singura direcție tangentă ambelor suprafețe $\boldsymbol{t}$ ceea ce încheie demonstrația.

2.2.15 *Să se arate că meridianele torului sînt linii de curbură.*

Soluție Un meridian al torului e intersecția torului cu un plan care trece prinaxa de rotație. Cum în plan orice direcție e principală, meridianul respectiv e linie de curbură în planul considerat. Pe de altă parte, planul acesta e ortogonal torului. Aplicînd rezultatul anterior, deducem că meridianul e linie de curbură și pe tor.

2.2.16 *Se consideră suprafaţa parametrizată*

$$h(u,v) = (\sin u \cos v, \quad \sin u \sin v, \quad \cos u + \log \tan \frac{u}{2} + \varphi(v)),$$

cu φ o funcţie diferenţiabilă. Să se arate că liniile de coordonate $v =$ ct. sînt linii de curbură.

Soluţie Observăm întîi că, dacă notăm $(x(u), y(u), z(u))$ o curbă $v =$ ct., atunci există $A = -\tan v$ astfel ca $Ax + y = 0$. Deci fiecare curbă $v =$ ct. e plană şi planul care o conţine, π_v, trece prin axa Oz. Calculînd vectorul normal unitar la suprafaţa dată şi făcînd produsul scalar cu vectorul normal unitar la planul π_v găsim $\cos\theta = \varphi'(1+\varphi'^2)^{-1/2}$. Deci π_v taie suprafaţa sub un unghi constant. Ţinînd seama că orice curbă plană e linie de curbură în plan, putem aplica din nou rezultatul 2.2.14.

2.2.17 (Dupin) *Trei familii de suprafeţe formează un sistem triplu ortogonal în $U \subset E^3$ dacă prin fiecare $p \in U$ trece cîte o singură suprafaţă din fiecare familie şi dacă cele trei suprafeţe care trec prin p sînt două cîte două ortogonale. Să se arate că suprafeţele unui sistem triplu ortogonal se intersectează după linii de curbură.*

Soluţie Fie S_1, S_2, S_3 cele trei suprafeţe care trec prin p şi $C_1 = S_2 \cap S_3$ etc... Fie τ_{12}, τ_{13} torsiunea geodezică a curbei C_1 pe S_2, respectiv pe S_3. Fie N_{g12}, (respectiv N_{g13}) vector unitar tangent la S_2, (respectiv S_3) şi ortogonal pe C_1 (vezi construcţia triedrului Darboux). Atunci

$$\tau_{1i} = < \frac{dN_i}{dt}, N_{g1i} >, \quad i = 2,3$$

Cum $N_2 \perp N_3$, deducem $\tau_{12} = \tau_{13}$. Fie τ_1 această valoare comună. Analog arătăm că torsiunea geodezică a lui C_2 (respectiv C_3) e aceeaşi pe S_1, S_3 (respectiv pe S_1, S_2). Fie aceste valori τ_2, τ_3. Folosind din nou faptul că vectorii N_i sînt ortogonali doi cîte doi, deducem $\tau_1 + \tau_2 = 0$, $\tau_2 + \tau_3 = 0$, $\tau_1 + \tau_3 = 0$. Deci torsiunea geodezică a curbelor de intersecţie e nulă pe fiecare suprafaţă ceea ce înseamnă că C_i sînt linii de curbură.

2.2.18 *Să se calculeze coeficienţii primei şi celei de-a doua forme fundamentale, curburile principale şi curbura gaussiană pentru o suprafaţă de rotaţie. Aceleaşi cerinţe pentru o suprafaţă dată explicit. Să se observe, în particular, că meridianele şi paralelele unei suprafeţe de rotaţie sînt linii de curbură.*

Soluţie Fie

$$h(u,v) = (\varphi(v)\cos u, \varphi(v)\sin u, \psi(v)),$$

(unde $\varphi > 0$ şi v e parametru canonic pe curba generatoare : $\varphi'^2 + \psi'^2 = 1$) o parametrizare locală pentru o suprafaţă de rotaţie. Avem:

$$h_u = (-\varphi\sin u, \varphi\cos u, 0),$$

$$h_v = (\varphi'\cos u, \varphi'\sin u, \psi'),$$
$$N = (\psi'\cos u, \psi'\sin u, -\varphi\varphi'),$$
$$g_{11} = \varphi^2, \quad g_{12} = 0, \quad g_{22} = 1,$$
$$h_{11} = (-\varphi\cos u, -\varphi\sin u, 0),$$
$$h_{12} = (-\varphi'\sin u, \varphi'\cos u, 0),$$
$$h_{22} = (\varphi''\cos u, \varphi''\sin u, \psi''),$$
$$b_{11} = -\varphi\varphi', \quad b_{12} = 0, \quad b_{22} = \varphi''\psi' - \varphi'\psi'',$$
$$k_1 = -\frac{\psi'}{\varphi}, \quad k_2 = \varphi''\psi' - \varphi'\psi'',$$
$$K = -\frac{\psi'(\varphi''\psi' - \varphi'\psi'')}{\varphi}.$$

Derivînd relaţia $\varphi'^2 + \psi'^2 = 1$ şi înlocuind în ultima formulă găsim:

$$K = -\frac{\varphi''}{\varphi}.$$

Pentru o suprafaţă dată explicit prin $h(u,v) = (u, v, f(u,v))$, obţinem:

$$h_u = (1, 0, f_u), \quad h_v = (0, 1, h_v),$$
$$N = \frac{1}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}}(-f_u, -f_v, 1),$$
$$g_{11} = 1 + f_u^2, \quad g_{12} = f_u f_v, \quad g_{22} = 1 + f_v^2,$$
$$h_{uu} = (0, 0, f_{uu}), \quad h_{uv} = (0, 0, f_{uv}), \quad h_{vv} = (0, 0, f_{vv}),$$

$$b_{11} = \frac{f_{uu}}{\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}},$$

$$b_{12} = \frac{f_{uv}}{\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}},$$

$$b_{22} = \frac{f_{vv}}{\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}},$$

$$K = \frac{f_{uu}f_{vv} - f_{uv}^2}{(1+f_u^2+f_v^2)^2}.$$

2.2.19 *Să se clasifice suprafeţele de rotaţie cu curbură gaussiană constantă* 1, 0 *sau* −1.

Soluţie Problema revine la clasificarea curbelor generatoare $\gamma(v) = (f(v), g(v))$ cu $f > 0$ şi $f'^2 + g'^2 = 1$ (putem presupune curba parametrizată canonic. Din problema anterioară ştim expresia curburii gaussiene:

$$K = -\frac{f'}{f''}.$$

Deci, în general, f e soluţie a ecuaţiei diferenţiale:

$$(*) \qquad f'' + kf' = 0,$$

iar g este

$$g(v) = \int_0^v \sqrt{1 - f'^2(t)}dt,$$

cu v astfel ca radicalul de sub integrală să aibă sens.

Pentru $K = 1$, soluţiile lui (*) sînt:

$$f(v) = C_1 \cos v + C_2 \sin v, \quad C_i = ct.$$

Dacă introducem, în plus, restricţia ca suprafaţa să taie ortogonal planul xOy, găsim soluţia generală sub forma:

$$\gamma(v) = (C \cos v, \int_0^v \sqrt{1 - C^2 \sin^2(t)}dt, \ \ C = f(0).$$

Pentru $K = 0$ se obţine $f'' = 0$ deci f e liniară. Suprafeţele de rotaţie cu curbură gaussiană nulă sînt, deci: cilindri, conuri (mai puţin vîrful) şi plane.

Pentru $K = -1$, (*) furnizează:

$$f(v) = C_1 e^v + C_2 e^{-v}, \quad C_i = ct.$$

Atunci forma generală a lui γ e una dintre următoarele trei:

$$\gamma(v) = (C \cosh v, \int_0^v \sqrt{1 - C^2 \sinh^2(t)}dt,$$

$$\gamma(v) = (C \sinh v, \int_0^v \sqrt{1 - C^2 \cosh^2(t)}dt,$$

$$\gamma(v) = (e^v, \int_0^v \sqrt{1 - e^{2t}}dt.$$

Observăm că ultima ecuaţie găsită e cea a tractricei. Deci suprafaţa generată, în acest caz, este pseudosfera.

2.2.20 (Kashdan-Warner) *Fie S o suprafaţă de rotaţie avînd curba generatoare $(0,\ \varphi(v),\ \psi(v))$, $v \in [0, l]$, cu $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$, $\varphi > 0$. Pentru ca S să fie regulată şi în poli, cerem, în plus, ca $\varphi'(0) = 1$, $\varphi'(l) = -1$. Să se arate că :*

$$\int_0^l K' \varphi^2 dv = 0.$$

Să se deducă de aici că nu există suprafeţe de rotaţie compacte cu curbura gaussiană monoton crescătoare.

Soluţie Avem (cf. 2.2.18) $\varphi'' = -K\varphi$. Atunci

$$(\varphi'^2 + k\varphi^2)' = 2\varphi'\varphi'' + K'\varphi^2 + 2K\varphi\varphi' = K'\varphi^2.$$

Integrînd această relaţie o obţinem pe cea din enunţ. Ultima afirmaţie este, acum, evidentă dacă ţinem seama că, S fiind compactă, are cel puţin un punct eliptic (în care K e strict pozitivă), deci K e strict crescătoare.

2.2.21 *Să se arate că orice suprafaţă compactă are un punct eliptic. În particular, nu existe suprafeţe compacte cu curbură gaussiană strict negativă.*

Soluţie Fie S o suprafaţă compactă. Atunci există o sferă $S(O,R)$ în care S este inclusă. Micşorînd progresiv raza acestei sfere, găsim o alta, S', concentrică, de rază $r \leq R$ care e tangentă într-un punct p la S (aici folosim din nou compacitatea lui S). S şi S' au aceeaşi direcţie normală N în p. Un plan prin N intersectează S' după un cerc mare C' şi S după o curbă plană C. Cum C e, pe o vecinătate a lui p, în interiorul lui C', curbura sa în p e mai mare sau egală cu $1/r$. Deci toate curburile normale sînt strict pozitive, astfel că p e un punct eliptic.

O altă soluţie se poate obţine după cum urmează: se consideră un punct p_0 în afara lui S şi funcţia diferenţiabilă $f : S \to R$, $f(p) = \frac{1}{2} \mid p - p_0 \mid^2$. Se arată că punctul q_0 în care f are un maxim local (acesta există pentru că S e compactă) e eliptic.

2.2.22 *Să se arate că în jurul unui punct neombilical există o parametrizare cu linii de curbură.*

Soluţie Fie p un punct neombilical pe S şi (U,h) o parametrizare oarecare în jurul său. O curbă $\gamma(t) = h(u(t),v(t))$ e linie de curbură dacă şi numai dacă

$$dN\gamma'(t) = k(t)\gamma'(t).$$

Echivalent:

$$\frac{g_{12}b_{12} - g_{22}b_{11}}{det(g)^2}u' + \frac{g_{12}b_{22} - g_{22}b_{12}}{det(g)^2}v' = ku',$$

$$\frac{g_{12}b_{11} - g_{11}b_{12}}{det(g)^2}u' + \frac{g_{12}b_{12} - g_{11}b_{22}}{det(g)^2}v'kv'.$$

Eliminăm k între aceste ecuaţii şi obţinem ecuaţia liniilor de curbură sub forma:

$$(b_{12}g_{11} - b_{11}g_{12})(u')^2 + (b_{22}g_{11} - b_{11}g_{22})u'v' + (b_{22}g_{12} - b_{12}g_{22})(v')^2 = 0.$$

Deoarece p e neombilical, operatorul Weingarten are valori proprii distincte. Cu alte cuvinte polinomul $det(b_{ij} - \lambda g_{ij})$ are discriminantul nenul:

$$(g_{11}b_{22} + b_{11}g_{22} - 2g_{12}b_{12})^2 - 4det(g)det(b) \neq 0.$$

Aceasta asigură descompunerea ecuaţiei liniilor de curbură în două ecuaţii:

$$Au' + Bv' = 0,$$

$$Au' + Cv' = 0,$$

cu A, B, C soluţii ale sistemului:

$$A^2 = b_{12}g_{11} - b_{11}g_{12},$$

$$A(B + D) = b_{22}g_{11} - b_{11}g_{22},$$

$$BD = b_{22}g_{12} - b_{12}g_{22}.$$

Fiecare dintre cele două ecuaţii diferenţiale găsite anterior defineşte cîte un cîmp vectorial X_1, X_2. Acestea sînt independente, iar traiectoriile lor sînt linii de curbură. Nu ne rămîne acum decît să aplicăm rezultatul din problema 2.1.15.

2.2.23 *Să se arate că în vecinătatea unui punct hiperbolic există parametrizări cu liniile de coordonate asimptotice. Să se construiască efectiv o asemenea parametrizare pe paraboloidul hiperbolic* $z = x^2 - y^2$.

Soluţie Fie $p \in S$ un punct hiperbolic şi (U, h) o parametrizare iniţială în jurul său. Utilizăm aceeaşi metodă ca în exerciţiul anterior: descompunem ecuaţia liniilor asimptotice:

$$b_{11}u'^2 + 2b_{12}u'v' + b_{22}v'^2 = 0$$

în produsul a doi factori liniari:

$$(Au' + Bv')(Au' + Cv') = 0.$$

Acest lucru e posibil deoarece condiţia de hiperbolicitate în p e echivalentă cu $b_{12}^2 - b_{11}b_{22} > 0$. Deci ecuaţia liniilor asimptotice furnizează două ecuaţii diferenţiale liniare:

$$Au' + Bv' = 0, \quad Au' + Cv' = 0,$$

fiecare dintre ele determinînd un cîmp diferenţiabil de direcţii, independente pe vecinătatea considerată. Se aplică acum, din nou, rezultatul 2.1.15.

Fie $h(u,v) = (u, v, u^2 - v^2)$ parametrizare (globală) a paraboloidului hiperbolic. Folosind formulele din problema 2.2.18, obţinem:

$$b_{11} = -b_{22} = 2(1 + 4u^2 + 4v^2)^{-1/2}, \quad b_{12} = 0.$$

Atunci ecuaţia liniilor asimptotice este:

$$2(1 + 4u^2 + 4v^2)^{-1/2}(u'^2 - v'^2) = 0.$$

Ea se factorizează în

$$u' \pm v' = 0.$$

Aceste două cîmpuri de direcţii au curbele integrale:

$$u \pm v = ct.$$

deci funcţiile $f_1(u,v) = u + v$, $f_2(u,v) = u - v$ sînt integrale prime pentru ele. Punem

$$\overline{u} = u + v, \quad \overline{v} = u - v$$

şi obţinem parametrizarea (globală) căutată.

2.2.24 *Să se arate că, în jurul fiecărui punct, orice suprafaţă regulată se poate explicita sub forma:*

$$z = \frac{1}{2!}(a_{11}x^2 + a_{22}y^2) + + \frac{1}{3!}(b_{111}x^3 + 3b_{112}x^2y + 3b_{122}xy^2 + b_{222}y^3) + \ldots \tag{2.3}$$

unde am pus:

$$a_{11} = k_1, \quad a_{22} = k_2, \quad b_{111} = \frac{\partial}{\partial x}k_1,$$

$$b_{112} = \frac{\partial}{\partial y}k_1, \quad b_{122} = \frac{\partial}{\partial x}k_2, \quad b_{222} = \frac{\partial}{\partial y}k_2,$$

k_1, k_2 fiind curburile principale în punctul considerat.

Soluţie Fie p un punct al suprafeţei considerate. Se ştie că există o parametrizare locală (U, h) în care S are forma explicită $h(u,v) = (u, v, f(u,v))$ (după o eventuală rotaţie a axelor reperului fix din E^3). Putem, de asemenea, presupune că reperul $Oxyz$ are centrul în $p = h(0,0) = (0,0,0)$ şi axa Oz e orientată după vectorul normal în p, N_p. Folosind expresia lui N găsită în exerciţiul 2.2.18 deducem că, deoarece N_p e orientat pe Oz, avem

$$f_u(p) = f_v(p) = 0.$$

Dezvoltăm $h(u,v)$ în serie Taylor în jurul lui $(0,0)$:

$$h(u,v) = h(0,0) + h_u u + h_v v + \frac{1}{2}(h_{uu}u^2 + 2h_{uv}uv + h_{vv}v^2 +$$

$$\frac{1}{6}(h_{uuu}u^3 + 3h_{uuv}u^2v + 3h_{uvv}uv^3 + h_{vvv}v^3) + O(3)$$

unde toţi coeficienţii sînt calculaţi în p. Vom avea $< h(u,v), N_p >= z$. Pe de altă parte:

$$< h(u,v), N_p >= \frac{1}{2}(b_{11}u^2 + 2b_{12}uv + b_{22}v^2) + +\frac{1}{6}(< h_{uuu}, N_p > u^3 +$$

$$+3 < h_{uuv}, N_p > u^2v + 3 < h_{uvv}, N_p > uv^3 + < h_{vvv}, N_p > v^3) + O(3).$$

Pentru calculul produselor scalare din rîndul al doilea al formulei procedăm astfel:

$$< h_{uuu}, N_p >= \frac{\partial}{\partial u} < h_u u, N_p > - < h_{uu}, N_u(p) > .$$

Dar:

$$N_u(p) = \frac{1}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}}(-f_{uu}, -f_{vu}, 0),$$

aşa încît

$$< h_{uuu}, N_p >= \frac{\partial}{\partial u} < h_u u, N_p >= \frac{\partial}{\partial u} b_{11}.$$

Analog găsim:

$$< h_{uuv}, N_p >= \frac{\partial}{\partial v} b_{11},$$

$$< h_{uvv}, N_p >= \frac{\partial}{\partial v} b_{12},$$

$$< h_{vvv}, N_p >= \frac{\partial}{\partial v} b_{22}.$$

În sfîrşit, orientăm acum axele Ox, Oy dupa direcţiile principale în p. Atunci $b_{12}(p) = 0, b_{11}(p) = k_1, b_{22}(p) = k_2$ ceea ce încheie demonstraţia.

2.2.25 *Să se arate că două suprafeţe cu aceeaşi curbură gaussiană constantă sînt local izometrice.*

Soluţie Vom arăta că în vecinătatea oricărui punct curbura gaussiană determină univoc coeficienţii primei forme fundamentale.

Fie $p \in S$. Considerăm în jurul său o parametrizare semigeodezică, i.e.

$$g_{11} = 1, \quad g_{22} = 0, \quad g_{22}(0, v) = 1, \quad \frac{\partial g_{22}}{\partial u}\Big|_{u=0} = 0.$$

În această parametrizare curbura gaussiană se exprimă astfel:

$$K = -\frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial^2}{\partial u^2} \sqrt{g_{22}}.$$

Deci, pentru $K = ct.$, g_{22} e soluţia ecuaţiei diferenţiale:

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2} \sqrt{g_{22}} + K \sqrt{g_{22}} = 0.$$

Pentru $K > 0$ aceasta are soluţia generală:

$$\sqrt{g_{22}} = c_1(v) \cos(\sqrt{K} u) + c_2(v) \sin(\sqrt{K} u)$$

care, laolaltă cu condiţiile iniţiale impuse, furnizează:

$$g_{22} = \cos^2(\sqrt{K} u).$$

Pentru $K < 0$ se obţine

$$g_{22} = \cosh^2(-\sqrt{K} u),$$

iar pentru $K = 0$ găsim $g_{22} = 1$.

2.2.26 *Să se arate că curbura geodezică a unei curbe pe o suprafață se poate exprima numai în funcție de coeficienții primei forme fundamentale.*

Soluție Fie γ o curbă parametrizată canonic pe suprafață S. Putem presupune că imaginea sa este situată în imaginea unei parametrizări (U,h). Deci $\gamma(s)=h(u(s),v(s))$. Pentru comoditatea scrierii vom nota acum $u^1=u$, $u^2=v$ și vom folosi convenția de sumare a lui Einstein. Curbura geodezică a lui γ e, prin definiție,

$$k_g = <\gamma'', N\times t> = \left(N, t, \frac{d}{ds}t\right),$$

unde (a,b,c) reprezintă produsul mixt al vectorilor a,b,c. Datorită prezenței lui N, în produsul mixt anterior se poate înlocui γ'' cu partea sa tangentă. Folosind formula lui Gauss deducem pentru aceasta:

$$tg\left(\frac{d}{ds}t\right) = \left(\frac{d^2u^k}{ds^2} + \Gamma^k_{ij}\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds}\right)h_k.$$

Atunci:

$$\begin{aligned}
k_g &= \frac{1}{|h_1\times h_2|}\Bigg(h_1\times h_2,\\
&\frac{du^1}{ds}h_1 + \frac{du^2}{ds}h_2, \left(\frac{d^2u^1}{ds^2} + \Gamma^1_{ij}\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds}\right)h_1 +\\
&+\left(\frac{d^2u^2}{ds^2} + \Gamma^2_{ij}\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds}\right)h_2\Bigg) =\\
&= \frac{1}{|h_1\times h_2|}\left\langle h_1\times h_2, \frac{du^1}{ds}\left(\Gamma^2_{ij}\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds}\right)h_1\times h_2 +\right.\\
&+ \left.\frac{du^2}{ds}\left(\Gamma^1_{ij}\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds}\right)h_2\times h_1\right\rangle -\\
&= |h_1\times h_2|\left[\frac{du^1}{ds}\left(\Gamma^2_{ij}\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds}\right) - \frac{du^2}{ds}\left(\Gamma^1_{ij}\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds}\right)\right].
\end{aligned}$$

În fine,

$$| h_1 \times h_2 |^2 = | h_1 |^2 | h_2 |^2 - < h_1, h_2 >^2 = det(g)^2$$

ceea ce încheie demonstrația.

Următoarele probleme (cf. [Ca]) sînt aplicații ale Teoremei lui Gauss-Bonnet.

2.2.27 *Fie S o suprafață orientabilă cu curbura gaussiană nepozitivă și γ_1, γ_2 două geodezice care izvorăsc din același punct p. Atunci ele nu se pot întîlni din nou într-un punct q astfel încît să mărginească o regiune simplă (i.e. homeomorfă cu un disc) D a lui S. În particular, pe o astfel de suprafață nu există geodezice simple, închise care să mărginească regiuni simple.*

Soluție Dacă afirmația nu e adevărată putem aplica Teorema Gauss-Bonnet regiunii simple D a cărei caracteristică Euler-Poincaré e 1. Notînd θ_1, θ_2 unghiurile exterioare ale lui D avem:

$$\int_D K + \theta_1 + \theta_2 = 2\pi.$$

Dar cele două geodezice nu pot fi tangente nici în p nici în q (pentru că sînt distincte); deci unghiurile θ_i sînt strict inferioare lui π. Curbura gaussiană fiind nepozitivă, integrala ei este nepozitivă și membrul stîng al egalității de mai sus e strict inferior lui 2π, contradicție.

2.2.28 *Fie S o suprafață cu curbură gaussiană strict negativă, homeomorfă cu un cilindru. Atunci ea conține cel mult o geodezică închisă simplă.*

Soluție Un cilindru e, topologic, un plan din care s-a eliminat un punct. Fie, deci, f un homeomorfism al lui S pe un plan P fără un punct q. Fie C o geodezică simplă, închisă pe S. Conform rezultatului anterior, C nu poate mărgini o regiune simplă pe S. Atunci $f(C)$ e frontiera unei regiuni simple a lui P care conține q. Fie acum C' o a doua geodezică simplă, închisă a lui S. Dacă $C \cap C' \neq \emptyset$, intersecția are loc în cel puțin două puncte și determină cel puțin trei regiuni închise mărginite de arce din C, C'. Punctul q se află în imaginea a numai uneia dintre aceste regiuni, deci două dintre ele sînt simple, contradicţie cu rezultatul 2.2.27. Deci $C \cap C' = \emptyset$. Ca mai sus, $f(C')$ e frontiera unei regiuni simple a lui P care conţine q. Atunci $f(C)$ şi $f(C')$ detrmină o regiune homeomorfă cu o coroană circulară D, centrată în q. Avem $\chi(D) = 0$ şi

$$0 > \int_{f^{-1}(D)} K = 2\pi\chi(D) = 0,$$

contradicţie.

2.2.29 (Jacobi) *Fie $\gamma : I \to R^3$ o curbă regulată, simplă, închisă cu curbură nenulă. Fie $\boldsymbol{n}(I)$ imaginea curbei descrise pe sfera S^2 de vectorul normal unitar al lui γ (aceasta se numeşte indicatoarea normalelor). Dacă $\boldsymbol{n}(I)$ e simplă, atunci împarte S^2 în două regiuni de arii egale.*

Soluţie Presupunem γ parametrizată canonic cu s şi fie $\bar{s}$ parametrul canonic pe curba sferică $\boldsymbol{n}(s)$. Atunci curbura geodezică a lui $\boldsymbol{n}(s)$ este

$$\overline{k}_g = < \frac{d^2}{d\bar{s}^2}\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n} \times \frac{d}{d\bar{s}}\boldsymbol{n} > .$$

Avem:

$$\frac{d}{d\bar{s}}\boldsymbol{n} = \frac{d}{ds}\boldsymbol{n}\frac{ds}{d\bar{s}} = (-k\boldsymbol{t} - \tau\boldsymbol{b})\frac{ds}{d\bar{s}},$$

$$\frac{d^2}{d\bar{s}^2}\boldsymbol{n} = (-k\boldsymbol{t} - \tau\boldsymbol{b})\frac{d^2}{d\bar{s}^2} + (-k'\boldsymbol{t} - \tau'\boldsymbol{b})\left(\frac{ds}{d\bar{s}}\right)^2 - (k^2 + \tau^2)\boldsymbol{n}\left(\frac{ds}{d\bar{s}}\right)^2,$$

$$\left(\frac{ds}{d\bar{s}}\right)^2 = \frac{1}{k^2 + \tau^2},$$

unde $'$ reprezintă derivarea în raport cu s. În final, pentru curbura geodezică, obţinem formula:

$$\overline{k}_g = \frac{ds}{d\bar{s}} < (k\boldsymbol{b} - \tau\boldsymbol{t}), \frac{d}{d\bar{s}}\boldsymbol{n} >= \left(\frac{ds}{d\bar{s}}\right)^3 (-k\tau' - k'\tau) =$$

$$= -\frac{\tau' k - k'\tau}{k^2 + \tau^2}\frac{ds}{d\bar{s}} = -\frac{d}{ds}\arctan\left(\frac{\tau}{k}\right)\frac{ds}{d\bar{s}}.$$

Aplicăm acum Teorema Gauss-Bonnet uneia dintre regiunile mărginite de $\boldsymbol{n}(I)$ (fie ea D) pe S^2 (ţinînd seama de $K = 1$):

$$2\pi = \int_D K d\sigma + \int_{\partial D} \overline{k}_g d\overline{s} = \int_D d\sigma = aria(D).$$

Cum aria sferei este 4π, soluţia e completă.

Următorul rezultat este o generalizare a teoremei lui Fenchel şi a fost demonstrat întî de B. Segre în [Se]. Ulterior, a fost redemonstrat, independent, în [Ru-Sa]. Prezentăm demonstraţia din al doilea articol.

2.2.30 *Fie C o curbă închisă pe S^2 avînd lungimea totală $L < 2\pi$. Atunci există un punct $m \in S^2$ astfel încît distanţa sferică de la m la orice punct al curbei să fie $\leq 2\pi$. Egalitatea are loc dacă şi numai dacă C e un arc de meridian de lungime $L/2$ parcurs în ambele sensuri.*

Soluţie Fie d distanţa sferică. Pentru $a, b \in S^2$, $d(a,b)$ este lungimea geodezicei minimale între a şi b, adică lungimea arcului scurt de meridian dintre a şi b (pe care îl vom nota simplu ab). Fie m mijlocul unui arc ab (acesta există şi e unic. Să dovedim întî că dacă $d(a,b) < \pi$, atunci

$$2d(m,x) \leq d(a,x) + d(b,x) \tag{2.4}$$

pentru orice punct $x \in C$. Pentru aceasta, fie x' simetricul lui x faţă de m. Din relaţiile evidente $d(x',a) = d(x,b)$, $2d(m,x) < \pi$ şi $d(x',x) = d(x',m) + d(m,x) = 2d(m,x)$, rezultă

$$2d(m,x) = d(x',x) \leq d(x',a) + d(a,x) = d(a,x) + d(x,b).$$

Fie acum a, $b \in C$ puncte care împart C în două arce de aceeaşi lungime $L(ab) = L(ba) = 1/2L$. Cum $d(a,b) \leq L(ab)$ şi $L \leq 2\pi$, deducem $d(a,b) < \pi$. Deci putem aplica observaţia anterioară mijlocului m al arcului (scurt) ab şi unui punct x situat pe arcul ab. Presupunem $2d(m,x) < \pi$ şi avem:

$$L(ax) \geq d(a,x), \quad L(xb) \geq d(x,b), \tag{2.5}$$

$$L(ax) + L(xb) = L(ab) = \frac{1}{2}L,$$

de unde rezultă

$$d(m,x) \leq \frac{1}{4}L.$$

Astfel, funcţia $f : C \to R$, $f(x) = d(m,x)$ nu ia valori în intervalul deschis $(L/4, \pi/2)$. Dar f e continuă şi C conexă; atunci $d(m,x) \leq L/4$ pentru orice x din C sau $d(m,x) \geq \pi/2$ pentru orice x din C. Al doilea caz e, evident, exclus pentru că $2d(m,a) = d(a,b) < \pi$.

Dacă există un m cu $d(m,x) = L/4$, atunci avem egalităţi şi în (2.5). Atunci ax şi xb sînt arce de meridian, iar relaţia (2.4) implică $x'x = x'a + ax$, deci a, b sînt pe arcul de meridian determinat de x şi x'. Demonstraţia e completă.

Observaţie În demonstraţie nu s-au folosit toate proprietăţile lui S^2. O examinare atentă a soluţiei arată că (în afara generalizării imediate la n dimensiuni), rezultatul rămîne adevărat dacă se înlocuieşte S^2 cu un spaţiu metric oarecare (M,d) căruia i se poate ataşa un numă r pozitiv cu proprietăţile: a) orice pereche (a,b) cu $d(a,b) < r$ are exact un mijloc m; b) pentru orice $m \in M$, bila de centru m şi rază $r/2$ admite o izometrie involutivă (simetrie) în ea însăşi care interschimbă două puncte dacă şi numai dacă m e mijlocul lor. Desigur, în locul lungimii arcului se poate lua o funcţională aditivă definită pe o clasă convenabilă de curbe, continuă într-un sens care se poate preciza şi a cărei valoare pe un arc ab să fie $\geq d(a,b)$. În particular, rezultatul este adevărat pentru curbe plane.

Următoarele două probleme constituie generalizări ale inegalităţii izoperimetrice la curbe pe suprafeţe. Rezultatele fac parte din articolul [Re].

2.2.31 *Fie S o suprafaţă (U,h) o parametrizare locală a sa, γ o curbă regulată mărginind un domeniu Jordan R în U a cărei imagine Γ prin h e o curbă regulată, simplă, închisă, de lungime L pe S. Fie A aria domeniului mărginit pe S de Γ. Atunci, pentru orice punct h_0 de pe Γ are loc inegalitatea:*

$$L^2 - 4\pi A - 4\pi \int_R H\sqrt{det(g)} < h - h_0, N > dudv \geq 0; \tag{2.6}$$

Fie $0 \leq s \leq L$ parametrul natural [illegible]
inegalitatea de mai sus devine egalitate dacă şi numai dacă

$$< \Gamma(s) - \Gamma(0), N(s) >= 0, \quad \Gamma(s) - \Gamma(0) = f(s) \sin \frac{\pi s}{L}, \tag{2.7}$$

pentru orice s, unde f e o soluţie a ecuaţiei diferenţiale:

$$f' = \frac{\pi}{L} N \times f. \tag{2.8}$$

În particular, dacă are loc egalitatea pentru o curbă Γ de-a lungul căreia cîmpul vectorial normal N e constant, atunci Γ e un cerc de rază $L/(2\pi)$.

Soluţie Fie, pentru început, h_1 un vector constant arbitrar şi $h_1 = h - h_0$. Formula lui Green ne dă:

$$\int_0^L < h_1 \times h', N > ds = \int_R [< h_1 \times h_v, N >_u - < h_1 \times h_u, N >_v] dudv.$$

Pe de altă parte:

$$< h_1 \times h_v, N >_u - < h_1 \times h_u, N >_v =$$

$$=< h_1 \times h_v, N_u > - < h_1 \times h_u, N_v > +2 < h_u \times h_v, N >,$$

de unde, exprimînd derivatele lui N cu formula Weingarten:

$$< h_1 \times h_v, N >_u - < h_1 \times h_u, N >_v =$$

$$= 2H\sqrt{det(g)} < n, h_1 > +2\sqrt{det(g)}.$$

Cum $A = \int_R \sqrt{det(g)}$, avem relaţia:

$$A = \frac{1}{2} \int_0^L < h_1 \times h', N > ds - \int_R H \sqrt{det(g)} < N, h_1 > dudv. \tag{2.9}$$

De acum încolo vom presupune că h_0 este vectorul constant $\Gamma(0) = \Gamma(L)$. Atunci, deoarece $h_1' = h'$ şi $| h' | = 1$, rezultă din (2.9) că membrul stîng al inegalităţii (2.6) este:

$$J = L \int_0^L \left[| h_1' |^2 - \frac{2\pi}{L} < h_1 \times h_1', N > \right] ds,$$

unde $h(s) = h(u(s), v(s)) = \Gamma(s)$.

Fie acum $f_a(s)$, $a = 1,2,3$ trei soluţii reale ale ecuaţiei (2.7), alese astfel ca matricea $F = col[f_1, f_2, f_3]$ să fie ortogonală în $s = 0$. Dar, dacă f_a, f_b sînt soluţii ale lui (2.7), atunci $(f_a f_b)' = f_a' f_b + f_a f_b' = 0$; în consecinţă F e ortogonală pe întreg intervalul $[0, L]$. Se poate, deci, defini unic funcţia vectorială $w = (w_1, w_2, w_3)$ prin ecuaţia:

$$h_1 = f_b w_b = \sum_{a=1}^{3} f_a w_a, \quad b = 1,2,3$$

În plus, din $h_1(0) = 0 = h_1(L)$ avem $w_a(0) = w(a(L) = 0$, iar ortogonalitatea lui F implică $| w |^2 = | h_1 |^2$. Obţinem, acum, următorul şir de egalităţi:

$$h_1' = f_a' w_a + f_a w_a' =$$

$$= \frac{\pi}{L} < N \times f_a, w_a > + f_a w_a' = \frac{\pi}{L}(N \times h_1) + f_a w_a',$$

$$| h_1' |^2 = \frac{\pi^2}{L^2} | N \times h_1 |^2 + 2\frac{\pi}{L} < N \times h_1, f_a > w_a' + | w' |^2,$$

$$< h_1 \times h_1', N > = < N \times h_1, h_1' > = \frac{\pi}{L} | N \times h_1 |^2 + < N \times h_1, g_a > w_a',$$

$$| h_1 |^2 - 2\frac{\pi}{L} < h_1 \times h_1', N > = | w' |^2 - \frac{\pi^2}{L^2} | N \times h_1 |^2 =$$

$$= | w' |^2 - \frac{\pi^2}{L^2} | w |^2 + \frac{\pi^2}{L^2} < N, h_1 >^2 .$$

Deci J satisface inegalitatea

$$J \geq \int_0^L \left[| w' |^2 - \frac{\pi^2}{L^2} | w |^2 \right] ds, \tag{2.10}$$

cu egalitate dacă şi numai dacă $< N, h_1 > = 0$ pe $[0, L]$. Folosim acum următorul rezultat demonstrat în [Ha-Li-Po], pag.185, 164: *dacă η e o funcţie cu valori reale, absolut continuă pe $[0, L]$, care verifică $\eta(0) = \eta(L) = 0$, cu derivata de pătrat integrabil pe acest interval, atunci*

$$\int_0^L \left[\eta'^2 - \frac{\pi^2}{L^2} \eta^2 \right] ds \geq 0$$

cu egalitate dacă şi numai dacă $\eta(s) = c\sin\frac{\pi s}{L}$. Pentru demonstraţie se foloseşte identitatea:

$$\eta'^2 - \frac{\pi^2}{L^2}\eta^2 = \left[\frac{\pi\eta^2}{L}\cot\frac{\pi s}{L}\right]' + \left[\eta' - \frac{\pi\eta}{L}\cot\frac{\pi s}{L}\right]'$$

şi faptul că, în condiţiile date, $\eta(s) = O(\sqrt{s})$ cînd $s \to 0^+$ şi $\eta(s) = O(\sqrt{L-s})$ cînd $s \to L^-$. Revenind la inegalitatea (2.10), în virtutea rezultatului citat, membrul său drept e nenegativ şi egal cu 0 dacă şi numai dacă $w = c\sin(\pi s/L)$, unde $c = (c_1, c_2, c_3)$ e un vector constant. Avem, deci, $J \geq 0$, cu egalitate dacă şi numai dacă relaţia (2.7) are loc cu $f = f_a c_a$.

În fine, să presupunem că are loc egalitatea în (2.6) pentru o curbă Γ de-a lungul căreia N e constant. Atunci Γ e o curbă plană. Fie p, q vectori unitari definiţi de relaţiile: $<N, p>= 0$, $q = N \times p$. Se vede uşor că funcţiile f_a, soluţii ale ecuaţiei (2.8), cu proprietatea că matricea F e ortogonală în $s = 0$ se pot alege de forma:

$$f_1(s) = N(s),$$
$$f_2(s) = p\cos(\frac{\pi s}{L}) + q\sin(\frac{\pi s}{L}),$$
$$f_3(s) = q\cos(\frac{\pi s}{L}) - p\sin(\frac{\pi s}{L}).$$

De asemenea, soluţia cea mai generală f a lui (2.8) cu $<N, f>= 0$ pe $[0, L]$ e de forma

$$f(s) = \lambda\left[p\cos(\alpha + \frac{\pi s}{L}) + q\sin((\alpha + \frac{\pi s}{L})\right],$$

unde λ, α sînt constante reale, $\lambda \geq 0$. Din $h(s) - h_0 = f(s)\sin(\pi s/L)$ rezultă $\lambda = L/\pi$, astfel că Γ are ecuaţia

$$\Gamma(s) = h_0 + \frac{L}{\pi}\left[p\cos(\alpha + \frac{\pi s}{L}) + q\sin((\alpha + \frac{\pi s}{L})\right]\sin(\frac{\pi s}{L}),$$

deci Γ e un cerc de rază $L/(2\pi)$ şi centru

$$O = h_0 + \frac{L}{2\pi}(-p\sin\alpha + q\cos\alpha).$$

Demonstraţia e, în sfîrşit, completă.

2.2.32 *În aceleași ipoteze din problema anterioară, dacă S e, în plus, minimală, atunci*

$$L^2 - 4\pi A \geq 0;$$

egalitatea are loc numai dacă Γ e un cerc și S e discul mărginit de el.

Soluție Inegalitatea din enunț rezultă imediat făcînd $H = 0$ în inegalitatea (2.6). Dacă $L^2 - 4\pi A = 0$, atunci avem egalitate în (2.6) pentru orice h_0 pe Γ. Rezultă, în particular, $< h(s) - h_0, N >= 0$, deci N e un vector constant N_0 de-a lungul lui Γ. Demonstrația anterioară arată că Γ e un cerc de rază $L/(2\pi)$. Dacă A_0 e aria discului D mărginit de Γ, atunci $A_0 = L^2/(4\pi) = A$. Rămîne de văzut că acest lucru nu e posibil decît dacă S coincide cu acest disc. Folosim din nou formula lui Green pentru discul D:

$$A_0 = \frac{1}{2}\left|\int_0^L < h(s) \times h'(s), N_0 > ds\right| = \left|\int_D < h_u \times h_v, N_0 > dudv\right|;$$

Acum inegalitatea lui Schwartz arată că $A = A_0 = \int_D \mid h_u \times h_v \mid dudv$ dacă și numai dacă $h_u \times h_v = N_0$ pe întreg D deci S coincide cu D.

Observație Inegalitate izoperimetrică pentru curbe pe suprafețe minimale a fost demonstrată întîi de T. Carleman, în Math. Zeitschrift (1921), folosind teoreme de reprezentare pentru suprafețele minimale. Soluția de mai sus are avantajul elementarității. Menționăm că o inegalitate izoperimetrică pe suprafețe de curbură gaussiană negativă a fost demonstrată de E.F. Beckenbach și F. Radó în Transactions A.M.S. (1933).

2.3 Caracterizări ale sferei

2.3.1 *O suprafaţă compactă cu curbură gaussiană pozitivă e homeomorfă cu o sferă.*

Soluţie Conform Teoremei Gauss-Bonnet, caracteristica Euler-Poincaré a suprafeţei e strict pozitivă. Sfera e singura suprafaţă compactă cu această proprietate.

2.3.2 *Dacă toate punctele unei suprafeţe regulate, conexe S sînt ombilicale, atunci S e o porţiune de sferă sau de plan.*

Soluţie Fie $p \in S$ şi (U, h) o parametrizare locală în jurul lui p astfel ca $V = Im(h)$ să fie conexă. În fiecare $q \in V$ curburile principale sînt egale: $k_1(q) = k_2(q) = k(q)$. Conform Teoremei lui Rodriguez, valorile proprii ale operatorului Weingarten sînt egale. Deci, diferenţiala aplicaţiei lui Gauss este, în fiecare punct, proporţională cu operatorul identic: $dN_q = k(q)I$. Avem, deci:

$$N_u = kh_u, N_v = kh_v.$$

Derivăm prima ecuaţie în raport cu v, a doua în raport cu u şi ţinem seama că derivatele mixte de ordinul 2 sînt egale. Scăzînd ecuaţiile obţinute găsim:

$$k_v h_u = k_u h_v$$

şi de aici

$$k_u = k_v = 0.$$

Deci $k = ct.$ pe V.

Dacă $k = 0$, atunci $N_u = N_v = 0$, adică $N = N_0 = ct.$ pe V. Rezultă imediat

$$< h(u, v), N_0 >= ct.$$

ceea ce înseamnă că V face parte dintr-un plan.

Dacă $k \neq 0$ pe V, atunci punctul $O = h(u,v) - \frac{1}{k}N(u,v)$ e fix şi

$$| h(u,v) - O |^2 = \frac{1}{k^2}$$

adică V este inclusă în sfera de centru O şi rază $1/k$.

Aceasta rezolvă problema local. Fie acum r un punct diferit de p. S, fiind conexă, e şi conexă prin arce. Considerăm o curbă care uneşte p cu r şi o acoperim cu o mulţime finită de domenii de parametrizare V_i (se poate, deoarece curba e compactă în R^3). Acum, dacă o asemenea vecinătate e inclusă într-un plan (respectiv într-o sferă), toate vecinătăţile din acoperire trebuie să fie incluse în acelaşi plan (respectiv în aceeaşi sferă). În particular, p şi r fac parte din acelaşi plan (respectiv în aceeaşi sferă). Cum r a fost ales arbitrar, problema e complet rezolvată.

2.3.3 *Să se arate că singura suprafaţă conexă, închisă în E^3, ale cărei primă şi a doua forme fundamentale sînt, respectiv, a doua şi prima formă fundamentale ale unei alte suprafeţe este sfera.*

Soluţie Să presupunem că există un punct $p \in S$ neombilical. Conform problemei 2.2.22 există o parametrizare cu linii de curbură în jurul său. Într-o asemenea parametrizare $g_{12} = 0$, $b_{12} = 0$, curburile principale sînt:

$$k_1 = \frac{b_{11}}{g_{11}}, \quad k_2 = \frac{b_{22}}{g_{22}}, \tag{2.11}$$

iar ecuaţiile lui Codazzi devin:

$$\frac{\partial b_{11}}{\partial v} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial v}(k_1 + k_2), \tag{2.12}$$

$$\frac{\partial b_{22}}{\partial u} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial u}(k_1 + k_2). \tag{2.13}$$

Prin ipoteză b_{ij}, respectiv g_{ij} sînt coeficienţii primei, respectiv celei de-a doua forme fundamentale ale unei alte suprafeţe (în particular forma a doua fundamentală e pozitiv definită, deci curbura gaussiană e strict pozitivă; asta implică, deja, că suprafaţa e homeomorfă cu o sferă, dar vrem să arătăm mai mult: că e chiar o sferă). Aceasta va avea curburile principale $1/k_1$, $1/k_2$. În plus, ecuaţiile Codazzi ale acestei a doua suprafețe se obțin din cele ale primeia inversînd rolurile lui b_{ij} și g_{ij}:

$$\frac{\partial g_{11}}{\partial v} = \frac{1}{2}\frac{\partial b_{11}}{\partial v}(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}),$$
$$\frac{\partial g_{22}}{\partial u} = \frac{1}{2}\frac{\partial b_{22}}{\partial u}(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}).$$

Deci:

$$\frac{\partial g_{11}}{\partial v} = \frac{1}{4}\frac{\partial g_{11}}{\partial v}(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2})(k_1 + k_2),$$
$$\frac{\partial g_{22}}{\partial u} = \frac{1}{4}\frac{\partial g_{22}}{\partial u}(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2})(k_1 + k_2).$$

Deoarece $k_1 \neq k_2$, relațiile anterioare implică:

$$\frac{\partial g_{11}}{\partial v} = \frac{\partial g_{22}}{\partial u} = 0.$$

Pe de altă parte, într-o parametrizare ortogonală (în particular în una cu linii de curbură), curbura gaussiană e dată de formula (vezi problema 2.2.1):

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{g_{11}g_{22}}}\left(\frac{\partial}{\partial v}\frac{\frac{\partial g_{11}}{\partial v}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} + \frac{\partial}{\partial u}\frac{\frac{\partial g_{22}}{\partial u}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}\right).$$

Suprafața noastră are, deci, curbura gaussiană nulă pe deschisul considerat, contradicție cu $K > 0$. Rămîne că p e ombilical. Astfel S are toate punctele ombilicale. Cum nu poate fi plană ($K > 0$), conchidem că S e o porțiune dintr-o sferă Σ. Fiind regulată, S e deschisă în Σ, în timp ce fiind închisă în E^3 e închisă și în Σ. Cum sfera e conexă, S coincide cu Σ.

2.3.4 *O suprafață compactă, conexă S cu curbura gaussiană constantă este o sferă.*

Soluție Demonstrația pe care o prezentăm este datorată lui S.S. Chern (cf. [Ca]). Prima demonstrație a fost dată de H. Liebmann în 1899.

Observăm întî că S, fiind compactă, are cel puțin un punct eliptic (cf. 2.2.21); în acest punct $K > 0$, deci K e pozitivă peste tot.

Fie acum k_1, k_2 curburile principale ale lui S. Cu convenția $k_1 \geq k_2$, acestea sînt funcții diferențiabile pe S. Datorită compacității, există un punct p în care k_1 își atinge un maxim local. Cum $k_1k_2 = K = ct. > 0$, k_2 are în p un minim local. Vom arăta că p e un punct ombilical. În caz contrar, există în jurul său o parametrizare cu linii de curbură. Curburile principale și ecuațiile lui Codazzi sînt date, acum, de formulele (2.11), (2.12), (2.13). Derivăm prima ecuație din (2.11) în raport cu v, pe a doua în raport cu u și găsim:

$$g_{11}\frac{\partial k_1}{\partial v} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial v}(k_2 - k_1),$$

$$g_{22}\frac{\partial k_2}{\partial u} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial u}(k_1 - k_2).$$

Înlocuim aceste expresii în formula curburii gaussiene din (2.2.1); rezultatul se poate pune sub forma:

$$-2Kg_{11}g_{22} = \frac{\partial^2 g_{11}}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial u^2} + A\frac{\partial g_{11}}{\partial v} + B\frac{\partial g_{22}}{\partial u},$$

unde A, B sînt funcții diferențiabile ale căror forme exacte nu au importanță pentru discuția noastră. Calculînd și derivatele parțiale de ordinul doi ale curburilor principale în funcție de cele ale coeficienților primei forme fundamentale, formula de mai sus devine:

$$-2Kg_{11}g_{22} = -\frac{2g_{11}}{k_1 - k_2}\frac{\partial^2 k_1}{\partial v^2} + \frac{2g_{22}}{k_1 - k_2}\frac{\partial^2 k_2}{\partial u^2} + \alpha\frac{\partial k_1}{\partial v} + \beta\frac{\partial k_2}{\partial u},$$

unde α, β sînt irelevante. Evaluăm egalitatea de mai sus în p. Derivatele parțiale ale curburilor principale se anulează în p deoarece acesta e punct de extrem local pentru amîndouă; $\frac{\partial^2 k_1}{\partial v^2}(p) < 0$ pentru că p e maxim local al lui k_1 și $\frac{\partial^2 k_2}{\partial u^2}(p) > 0$ pentru că p e minim local al lui k_2. Atunci membrul drept al ultimei egalități e strict pozitiv, în timp ce membrul stîng e negativ. Am ajuns la o contradicție care arată că p e ombilical.

Fie, acum, $q \neq p$. Avem șirul de inegalități:

$$k_1(p) \geq k_1(q) \geq k_2(q) \geq k_2(p).$$

Cum $k_1(p) = k_2(p)$, rezultă $k_1(q) = k_2(q)$, deci și q e ombilical. Suprafața este, deci o porțiune de sferă și argumentul utilizat în finalul demonstrației problemei anterioare arată că S e o sferă.

2.3.5 *O suprafaţă compactă, conexă S cu curbura gaussiană strict pozitivă şi curbură medie constantă este o sferă.*

Soluţie E suficient să observăm că în demonstraţia anterioară constanţa lui K a intervenit numai prin aceea că a asigurat că funcţia $k_2(k_1)$ e descrescătoare. Ori, acest lucru e implicat şi de ipotezele $K > 0$, $H = ct.$

2.3.6 (H. Hopf) *O suprafaţă regulată cu curbură medie constantă care e homeomorfă cu o sferă este o sferă.*

Soluţie Fie (U, h) o parametrizare izotermă pe S. Pentru $u, v \in U$, punem $\zeta = u + iv$ şi considerăm funcţia complexă $\varphi : U \to C$ dată prin:

$$\varphi(\zeta) = \varphi(u,v) = \frac{b_{11} - b_{22}}{2} - ib_{12} = \varphi_1 + i\varphi_2.$$

Atunci ecuaţiile lui Codazzi (vezi exerciţiul 2.2.2) se scriu:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial u} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} = \lambda \frac{\partial H}{\partial u},$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial v} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} = -\lambda \frac{\partial H}{\partial v},$$

deci φ e analitică (adică satisface condiţiile Cauchy-Riemann) dacă şi numai dacă $H = ct.$

Pe de altă parte, considerînd h şi N ca funcţii de ζ, din formula lui Gauss deducem următoarea expresie pentru φ:

$$\varphi(\zeta) = -2 < h_\zeta, N_\zeta >,$$

unde $\frac{\partial}{\partial \zeta} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial u} - i\frac{\partial}{\partial v})$.

Fie acum $f : V \subset C \to U \subset C$ o funcţie bijectivă dată prin $f(\eta = x + iy) = u + iv =$. Considerînd f ca o schimbare de coordonate pe S, se observă că noua parametrizare e izotermă dacă şi numai dacă f e analitică şi $f'(\eta) \neq 0$ (vezi problema 2.4.12). Punînd $\psi(\eta) = -2 < (hf)_\eta, N_\eta >$ deducem că pe intersecţia domeniilor acestor parametrizări are loc relaţia:

$$\varphi(\zeta) = \psi(\eta) \left(\frac{d\eta}{d\zeta}\right)^2. \tag{2.14}$$

În particular, sfera S^2 se poate acoperi (cu proiecţia stereografică) cu două parametrizări izoterme. Pe intersecţia domeniilor lor (sfera mai puţin polii), relaţia dintre parametrii complecşi corespunzători este $\eta = 1/\zeta$. Atunci, dacă pe fiecare vecinătate considerată există funcţiile analitice $\varphi(\zeta)$, $\psi(\eta)$ care satisfac (2.14), teorema lui Liouville demonstrează că $\varphi(\zeta) = 0$ (şi deci $\psi(\eta) = 0$.

Considerăm acum un difeomorfism conform $f : S \to S^2$. Existenţa sa rezultă din Teorema de uniformizare pentru suprafeţe riemanniene. Fie ζ, η parametrii complecşi pe S^2 construiţi mai sus şi $\overline{\zeta}$, $\overline{\eta}$ cei corespunzători prin f^{-1} pe S. Am văzut că $H = 0$ implică $\varphi(\overline{\zeta})$ analitică. La fel pentru $\psi(\overline{\eta})$. În plus, acestea sînt legate prin (2.14). Mutîndu-ne din nou pe S^2, deducem $\varphi = 0$, $\psi = 0$. Ţinînd seama de definiţia lui φ obţinem $b_{11} = b_{22}$, $b_{12} = 0$. în orice punct al lui S. Cum şi $g_{11} = g_{22}$, $b_{12} = 0$ (parametrizarea e izotermă), am ajuns la concluzia că fiecare punct e ombilical. Demonstraţia e completă.

Următoarele trei probleme fac parte din articolul [Sa] şi caracterizează sfera ca o suprafaţă care "conţine multe cercuri".

2.3.7 *Spunem că o suprafaţă S are* Proprietatea cercurilor n-tangente în punctul P, în direcţia t *(pe scurt, proprietatea t-n), dacă există o direcţie tangentă t la S în P asfel încît n plane distincte, dar nu mai multe, trecînd prin t, intersectează S după n cercuri, fiecare în unul dintre aceste plane. Altfel spus, există n arce distincte de cerc pe S, tangente în P. De exemplu, orice cilindru circular drept are t-2 pentru orice punct P şi orice direcţie tangentă t normală la generatoarea prin P.*

Să se arate că, local, în jurul unui punct cu proprietatea t-∞ pentru o singură direcţie tangentă t, suprafaţa este o sferă sau un plan.

Soluţie Fie O punctul care are proprietatea t-∞. Vom arăta că toate punctele unei vecinătăţi V ale lui O sînt ombilicale. Putem raporta E^3 la un reper triortonormat centrat în O asfel ca e_1 să fie orientat după direcţia tangentă t. Fie θ_1 unghiul dintre planul $\{e_1, e_2\}$ şi un plan oarecare π din fascicolul prin t. Atunci vectorul unitar

$$E_2 = e_2 \cos\theta_1 + e_3 \sin\theta_1 = E_2(\theta_1),$$

laolaltă cu e_1 constituie un reper în O pentru planul π. Se poate, deci, parametriza fascicolul prin t dupa θ_1.

Centrul C al cercului prin O tangent la t în planul $\pi(\theta_1)$ e dat, vectorial, prin $\overline{O}C = c(\theta_1) = r(\theta_1)E_2(\theta_1)$. Cum orice punct dintr-o vecinătate V, suficient de mică, în jurul lui O, se va afla pe unul dintre cercurile care trec prin O (O are t-∞), local S se poate parametriza prin

$$h(\theta_1, \theta_2) = c(\theta_1) + r(\theta_1)(e_1 \cos\theta_2 + E_2(\theta_1)\sin\theta_2) =$$
$$= r(\theta_1)(e_1 \cos\theta_2 + (1 + \sin\theta_2)E_2(\theta_1)).$$

Dacă, în plus, alegem e_2 pe direcţia normalei la S în O, atunci $r(0) = R_{0,t}$ e raza de curbură a secţiunii normale în O pe direcţia t. Deci, conform Teoremei lui Meusnier,

$$r(\theta_1) = R_{0,t}\cos(\theta_1).$$

Să observăm că avem $E_2'(\theta_1) = e_2 \times E_2(\theta_1)$. Astfel, punînd $E_3 = E_2'$ obţinem un triedru triortonormat $\{e_1, E_2(\theta_1), E_3(\theta_1)\}$ cu e_1 vector constant şi E_2, E_3 satisfăcînd aceeaşi ecuaţie diferenţială

$$E'' + E = 0.$$

Determinăm acum coeficienţii primei şi celei de-a doua forme fundamentale pentru parametrizarea h. Un calcul direct conduce la

$$\frac{b_{11}}{g_{11}} = \frac{b_{12}}{g_{12}} = \frac{b_{22}}{g_{22}} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2}},$$

deci fiecare punct al lui V e ombilical. Rezultatul anterior încheie demonstraţia.

2.3.8 *O suprafaţă regulată conexă ale cărei puncte au proprietatea t-2 în orice direcţie este o sferă sau un plan.*

Soluţie Din nou vom arăta că fiecare punct e ombilical. Fie p un punct arbitrar pe S, t un vector unitar tangent în p şi o parametrizare locală în jurul lui p de tipul celei găsite în problema 2.2.24. Fie e_1, e_2 versorii direcţiilor principale Ox, Oy respectiv şi e_3 versorul direcţiei normale (Oz). Atunci t se scrie:

$$t = e_1 \cos\alpha + e_2 \sin\alpha,$$

şi orice plan prin t e normal pe vectorul unitar

$$n = (e_3 \times t)\cos\beta + e_3 \sin\beta =$$

$$= -e_1 \sin\alpha\cos\beta + e_2\cos\alpha\cos\beta + e_3\sin\beta.$$

Atunci ecuaţia unui plan din fascicolul de suport t se scrie:

$$-x\sin\alpha\cos\beta + y\cos\alpha\cos\beta + z\sin\beta = 0.$$

Să observăm că dacă $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$, atunci $t = e_1$ deci, schimbînd între ele direcţiile principale, putem presupune $\alpha \neq \frac{\pi}{2}(mod\pi)$. La fel, dacă $\beta = \frac{\pi}{2} + k\pi$, atunci n coincide cu e_3 şi planul în cauză este cel tangent în p. Putem, astfel, admite şi $\beta \neq \frac{\pi}{2}(mod\pi)$. Atunci un plan din fascicol are ecuaţia:

$$mx - y + \lambda z = 0 \tag{2.15}$$

unde

$$m = \tan\alpha = ct., \quad \lambda = -\sec\alpha\tan\beta.$$

Putem considera λ drept parametru al fascicolului.

Fie γ curba de intersecţie a planului π_λ din fascicol cu S. O descriem, local, prin:

$$y = p_1 x + \frac{1}{2}p_2 x^2 + \frac{1}{6}p_3 x^3 + O(3). \tag{2.16}$$

Atunci (2.15) devine:

$$z = \frac{1}{\lambda}((p_1 - m)x + \frac{1}{2}p_2 x^2 + \frac{1}{6}p_3 x^3 + O(3)). \tag{2.17}$$

Substituim (2.16) şi (2.17) în (2.3) şi identificăm coeficienţii formei găsite cu cei din dezvoltarea (2.17). Rezultă:

$$p_1 = m,$$

$$p_2 = \lambda(a_{11} + a_{22}m^2),$$

$$p_3 = \lambda(3a_{22}m\lambda(a_{11} + a_{22}m^2) +$$

$$+(b_{111} + 3b_{112}m + 3b_{122}m^2 + b_{222}m^3)).$$

Dacă γ e un cerc, el coincide cu cercul osculator în p şi , deci, stă pe sfera Meusnier în p corespunzătoare direcţiei t. Aceasta este sfera tangenta la S în p, cu centrul pe normala N_p şi de rază egală cu inversul curburii normale în direcţia t; deci are ecuaţia

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2R_{p,t}z = 0.$$

cu $R_{p,t}$ ca în problema anterioară. Atunci dezvoltările (2.16) şi (2.17) trebuie să satisfacă această ultimă ecuaţie:

$$(1 = p_1^2 - \frac{1}{\lambda}R_{p,t}p_2)x^2 + (p_1p_2 - \frac{1}{3\lambda}R_{p,t}p_3)x^3 + ... = 0.$$

Aşadar, coeficienţii acestei dezvoltări trebuie să fie nuli:

$$1 + p_1^2 - \frac{1}{\lambda}R_{p,t}p_2 = 0,$$

$$p_1p_2 - \frac{1}{3\lambda}R_{p,t}p_3 = 0.$$

Se verifică uşor că prima ecuaţie e identic satisfăcută (este chiar formula lui Euler). Folosind valorile lui p_i găsite anterior, a doua ecuaţie devine:

$$3m(a_{11} + a_{22}m^2)(a_{11} - a_{22})\lambda$$
$$- (1 + m^2)(b_{111} + 3b_{112}m + 3b_{122}m^2 + b_{222}m^3) = 0. \qquad (2.18)$$

Cum S are proprietatea t-2 în p, există două plane din fascicol care taie suprafaţa după cîte un cerc. Atunci (2.18) e satisfăcută pentru două valori distincte ale parametrului λ. Deci:

$$m(a_{11} + a_{22}m^2)(a_{11} - a_{22}) = 0,$$

$$(1 + m^2)(b_{111} + 3b_{112}m + 3b_{122}m^2 + b_{222}m^3) = 0.$$

Mai mult, proprietatea t-2 are loc în orice direcţie tangentă t; aceasta înseamnă că ecuaţiile anterioare sînt satisfăcute pentru orice m. Rezultă:

$$a_{11} = a_{22},$$

$$b_{111} = b_{112} = b_{122} = b_{222} = 0.$$

Prima relaţie e suficientă pentru ceea ce avem de arătat: într- adevăr, ea e echivalentă cu

$$k_1(p) = k_2(p),$$

adică p e un punct ombilical. Cu aceasta demonstraţia e completă.

2.3.9 *Fie p un punct eliptic al suprafeţei regulate S. Dacă p are proprietatea t-n pentru orice n finit ≥ 2 într-o singură direcţie neprincipală, atunci e un punct ombilical.*

Soluţie Este o aplicaţie a ecuaţiei (2.18). Cum t e o direcţie neprincipală avem:

$$0 < m = \tan\alpha < \infty.$$

Cum p e eliptic, a_{11} şi a_{22} au acelaşi semn; deci:

$$a_{11} + a_{22}m^2 \neq 0.$$

Ca în demonstraţia anterioară, (2.18) e satisfăcută pentru cel puţin două valori ale parametrului λ şi ecuaţia anterioară implică, din nou, $a_{11} = a_{22}$.

În aceeaşi ordine de idei se înscriu şi problemele următoare, extrase din articolul [Ta].

2.3.10 *Fie S o suprafaţă simplu conexă. Dacă două cercuri pe ea au un singur punct comun p, atunci ele sînt tangente în p.*

Soluţie Fie C_1, C_2 cele două cercuri şi $p = C_1 \cap C_2$. Cum S e simplu conexă, $S - C_1 = S_1 \cup S_2$, $S_1 \cap S_2 = \emptyset$. Pe de altă parte, dacă intersecţia dintre C_1 şi C_2 nu e transversă (deci dacă p nu e punct de tangenţă) $C_2 \cap S_1 \neq \emptyset$ şi $C_1 \cap S_1 \neq \emptyset$. Atunci $C_2 - p = (C_2 \cap S_1) \cup (C_2 \cap S_2)$ ceea ce contrazice faptul $C_2 - p$ e conexă.

2.3.11 *Fie C_1, C_2, C_3 trei cercuri pe o suprafaţă S astfel că oricare două sînt tangente sau au două puncte comune. Atunci ele fac parte dintr-o sferă sau dintr-un plan.*

Soluţie Avem de analizat numai următoarele patru cazuri posibile, în funcţie de poziţiile relative ale celor trei cercuri.
(i) Dacă cele trei cercuri sînt tangente într-un punct p, atunci ele se află pe sfera de curbură (sfera lui Meusnier, care poate fi chiar un plan) în direcţia tangentei lor comune.
(ii) Fie C_1 tangent cu C_2 în p şi C_3 avînd două puncte comune cu măcar unul dintre ele. Atunci C_1 şi C_2 stau pe o sferă sau pe un plan M cu care C_3 va avea trei puncte comune, deci $C_3 \subset M$.
(iii) Oricare dintre cele trei cercuri au două puncte comune. Cum C_1 taie C_2 în două puncte, ele stau pe o sferă sau pe un plan, fie acestea M. Dacă $(C_1 \cup C_2) \cap C_3$ are cel puţin trei puncte, atunci C_3 e conţinută în S. Dacă intersecţia de mai sus e formată numai din două puncte, fie ele p, q, atunci tangentele la C_1, C_2, C_3 în p (resp. q) fac parte din $T_pM = T_pS$ (resp. $T_qM = T_qS$). Deci C_3 stă pe M.
(iv) Cele trei cercuri sînt tangente două cîte două. Fie M sfera sau planul care conţine C_1 şi C_2, $p_i = C_3 \cap C_i$, $(i = 1, 2)$ şi t_i dreapta tangentă la C_i în p_i. Cum C_3 e determinat de tangentele t_1, t_2 şi $p_i \in t_i$, C_3 e inclus în M.

2.3.12 *Fie S o suprafaţă şi p un punct al ei. Dacă există trei cercuri pe S prin p, oricare două tangente sau intersectîndu-se în două puncte, dar nu toate trei tangente, atunci p e ombilical.*

Soluţie Conform rezultatului anterior, cele trei cercuri stau pe o sferă sau pe un plan. Sînt posibile doar următoarele două cazuri.
(i) Oricare două dintre cele trei cercuri nu sînt tangente. Fie, atunci, $q \neq p$ unul dintre punctele de intersecţie. Considerăm o inversiune de pol q care duce p în p' şi transformă cele trei cercuri în trei drepte prin p' sau în două drepte şi un cerc, de asemenea tăindu-se în p'. Să observăm că planul osculator al cercului prin p' coincide cu planul tangent al imaginii lui S în p'. Aceasta înseamnă că direcţia tangentă la cerc în p' e asimptotică. De asemenea, cele două sau trei drepte obţinute în p' sînt linii asimptotice. Avem deci, în orice caz, trei direcţii asimptotice prin p'. Fiind nulă pe trei direcţii independente, forma a doua fundamentală e nulă în p'; în particular p' e un punct geodezic. Cum inversiunea e o transformare conformă, p va fi şi el ombilical.
(ii) Dacă două dintre cercurile în p sînt tangente, aplicăm o inversiune

ca mai sus; obţinem două drepte şi un cerc prin p', cercul fiind tangent uneia dintre drepte. Se poate arăta că direcţia tangentă acestui cerc e direcţie principală în p'. Atunci curbura gaussiană e zero. Dar cum există două direcţii asimptotice în p', acesta e, ca mai sus, un punct geodezic. Cu acelaşi argument, p e ombilical.

2.4 Clase speciale de suprafeţe.

2.4.1 *Fie $h(t, v) = a(t) + vw(t)$ o suprafaţă riglată cu $a(t)$.curbă directoare, $|w(t)| = 1$ şi $w'(t) \neq 0$.*

i) Să se arate că există pe suprafaţă o curbă $b(t)$ care nu depinde de alegerea directoarei a şi astfel încît $< b', w' >= 0$. (b se numeşte linia de întoarcere şi punctele sale se numesc puncte centrale). punctele singulare ale suprafeţei, dacă există, sînt pe linia de întoarcere şi sînt definite de $\lambda(t) = 0$.

ii) Să se arate că că $b' \times w = \lambda w'$ cu $\lambda(t) = \frac{<b' \times w, w'>}{<w', w'>}$ (λ se numeşte parametru de distribuţie).

Soluţie Cum b trebuie să stea pe suprafaţă o definim prin:

$$b(t) = a(t) + u(t)w(t),$$

ecuaţie în care urmează să determinăm u. Avem:

$$b' = a' + u'w + uw',$$

iar condiţia din enunţ devine:

$$0 =< b', w' >=< a', w' > +u < w', w' > .$$

Putem, deci, defini u prin:

$$u = -\frac{< a', w' >}{< w', w' >}.$$

Să arătăm acum că b nu depinde de alegerea lui a. Fie a_1 o altă curbă directoare, adică:

$$h(t, v) = a(t) + vw(t) = a_1(t) + sw(t)$$

cu $s = s(t)$. Notăm b_1 linia de întoarcere asociată lui a_1; din formulele anterioare deducem:

$$b - b_1 = (a - a_1) + \frac{< a - a_1, w' >}{< w', w' >} w.$$

Pe de altă parte

$$a - a_1 = (s - t)w(t),$$

de unde:

$$b - b_1 = \left[(s - v) + \frac{< (v - s)w', w' >}{< w', w' >}\right] w = 0,$$

ceea ce încheie demonstraţia punctului *i*). Pentru *ii*) considerăm b drept curbă directoare şi avem:

$$h_t = b' + uw', \quad h_u = w,$$

$$h_t \times h_u = b' \times w + uw' \times w.$$

Din relaţiile $< w', w >= 0, < w', b' >= 0$ deducem $b' \times w = \lambda w'$ pentru o anume funcţie λ care se găseşte făcînd în relaţia anterioară produsul scalar al ambilor membri cu w'. Acum putem scric:

$$| h_t \times h_u |^2 = | \lambda w' + uw' \times w |^2 =$$

$$= \lambda^2 | w' |^2 + u^2 | w' |^2 = (\lambda^2 + u^2) | w' |^2 .$$

Deci punctele singulare sînt caracterizate de $\lambda^2 + u^2 = 0$, adică se află pe linia de întoarcere $u = 0$ şi anume doar în punctele cu $\lambda(t) = 0$..

2.4.2 *Să se arate că o suprafaţă riglată are, în punctele regulate, curbură gaussiană negativă. Să se arate că liniile $u =$ ct. sînt asimptotice. În particular, o suprafaţă riglată nu are puncte eliptice; deci nu poate fi compactă.*

Soluţie Avem:

$$h_t = b' + uw', \quad h_u = w,$$

$$h_{tt} = b'' + uw'', \quad h_{uu} = 0, \quad h_{tu} = w'.$$

Coeficienţii primei forme fundamentale sînt:

$$g_{11} =< b', b' > + u^2 \quad g_{12} = 0, \quad g_{22} = 1,$$

iar cei ai celei de-a doua forme fundamentale:

$$b_{22} = 0, \quad b_{12} = \frac{< h_t \times h_u, h_u t >}{| h_t \times h_u |} = \frac{< b' \times w, w' >}{| h_t \times h_u |^2}$$

(deoarece $b_{22} = 0$ nu mai e necesar calculul lui b_{11}). Atunci:

$$K = -\frac{\lambda^2}{(\lambda^2 + u^2)^2} \leq 0.$$

Curbura gaussiană se anulează numai de-a lungul acelor generatoare care taie linia de întoarcere în puncte singulare. Deoarece $b_{22} = 0$ e clar că $t = ct.$ satisface sistemul de ecuaţii al liniilor asimptotice. Deoarece prin fiecare punct al suprafeţei trece o linie de coordonate $t = ct.$, rezultă că în fiecare punct există o curbură normală nulă; deci curburile principale nu pot fi, amîndouă, de acelaşi semn. Aceasta arată ca nu pot exista puncte eliptice. Pentru ultima afirmaţie se aplică exerciţiul 2.2.21.

Rezultatul următor se constituie într-o reciprocă parţială a celui dinainte.

2.4.3 *O suprafaţă local plată (i.e. $K = 0$ peste tot) fără puncte planare e riglată şi are un plan tangent fix de-a lungul oricărei generatoare (adică S e desfăşurabilă). Reciproc, o suprafaţă riglată al cărei plan tangent e constant de-a lungul oricărei generatoare e local plată.*

Soluţie Fie $p \in S$. Cum p nu e planar, putem presupune $k_1 = 0$, $k_2 \neq 0$. Atunci p nu e ombilical, deci există o parametrizare (U, h) în jurul său ale cărei linii de coordonate sînt linii de curbură. Făcînd, eventual, schimbarea de coordonate $\bar{t} = t$, $\bar{u} = \int g_{22}^2(0, u)du$, putem presupune $k_1 = 0$ de-a lungul liniilor $t = ct.$ şi u parametru canonic pe $t = ct.$ Astfel avem $g_{12} = b_{12} = 0$ şi conform formulei Weingarten:

$$N_t = -k_2 h_t, \quad N_u = 0, \quad < N_t, h_u >= 0.$$

De aici, prin diferenţiere, deducem $b_{22} =< N, h_{uu} >= 0$. Derivăm $< N_t, h_u >= 0$ în raport cu u, folosim $N_{uu} = N_{tu} = 0$ şi $N_t = -k_2 h_t$ şi obţinem $< h_t, h_{uu} >= 0$. Avem, apoi:

$$\frac{\partial < h_u, h_u >}{\partial t} = 2 < h_u, h_{21} >= -2 < h_t, h_{uu} >= 0,$$

deci $< h_u, h_u >$ nu depinde de u (considerăm U conex). Cum u e parametrul canonic pe $t = ct.$, avem $< h_u, h_u > (0, u) = 1$. Deci

$< h_u, h_u >= 1$. Derivînd aici rezultă $< h_u, h_{uu} >= 0$. În concluzie, vectorul h_{uu} este nul (avînd proiecţia nulă pe vectorii liniar independenţi h_t, h_u, N). Integrăm de două ori şi găsim $h = a(t) + uw(t)$, ceea ce trebuia demonstrat. Observăm că generatoarele sînt date de $t = ct$. Atunci, cum $N_u = 0$, N e constant de-a lungul oricărei generatoare, deci planul tangent e constant de-a lungul unei generatoare.

Reciproc, avem $N_u = 0$ din ipoteză şi $N_u = -lh_u$ din formula lui Weingarten. Deci h_u e vector propriu al operatorului Weingarten, corespunzător valorii proprii $k_1 = 0$. De aici rezultă $K = 0$.

2.4.4 *Fie p un punct al unei suprafeţe S local plate. E posibilă una dintre următoarele situaţii:*

i) p aparţine unei vecinătăţi deschise a lui S care face parte dintr-un plan;

ii) p aparţine unei vecinătăţi deschise a lui S care face parte dintr-un cilindru;

iii) p aparţine unei vecinătăţi deschise a lui S care face parte dintr-un con;

iv) p aparţine unei vecinătăţi deschise a lui S care face parte dintr-o suprafaţă generată de tangentele la o curbă spaţială;

v) p e limita unui şir de puncte care satisfac una dintre condiţiile ii) - iv).

Soluţie Să presupunem, întî, că p e planar. Dacă există o vecinătate a sa formată numai din puncte planare, sîntem în cazul i). Dacă nu, atunci p e limita unui şir de puncte neplanare (pentru că fiecare vecinătate a sa conţine puncte neplanare) şi ne aflăm în cazul v).

Fie, acum, p neplanar. Conform rezultatului anterior S e riglată: local punem $h(t, u) = a(t) + uw(t)$ cu liniile de coordonate linii de curbură şi u parametru canonic pe a. Putem, de asemenea, presupune $k_1 = 0$, $k_2 > 0$. Rezultă, în plus, $b_{12} = g_{12} = 0$. Atunci:

$$w' = \alpha a' + \beta w.$$

Înmulţim scalar cu w şi deducem $\beta = 0$. Adică:

$$w' = \alpha w', \;\; \alpha =< a', w' > .$$

Dacă $\alpha = 0$ pe o vecinătate deschisă a lui p, avem $w = ct.$ şi vecinătatea în cauză face parte dintr-un cilindru (care e, prin definiţie, o suprafaţă riglată cu generatoarele paralele). Aceasta e situaţia ii). Dacă $\alpha(p) = 0$ dar în orice vecinătate a lui p sînt puncte în care α nu se anulează, p e limita unui şir de puncte de acest tip, adică situaţia v). Fie acum $\alpha \neq 0$ pe o întreagă vecinătate a lui p. Determinăm o curbă care e tangentă în fiecare punct la generatoarele lui S. Aceasta ar trebui să aibă o ecuaţie de forma:

$$\gamma(t) = a(t) + c(t)w(t).$$

Vectorul ei tangent e coliniar cu w dacă şi numai dacă $c = -\alpha = - < a', w' >$. Sînt de considerat următoarele trei situaţii:

1. $\gamma' = 0$ pe o vecinătate a lui p (adică $\gamma(t)$ e un punct fix). Atunci această vecinătate face parte dintr-un con. Acesta este cazul iii).
2. $\gamma'(p) \neq 0$. Acesta este cazul iv).
3. $\gamma'(p) = 0$ şi p e limita unui şir de puncte cu $\gamma' \neq 0$. Acesta e, din nou, cazul v) ceea ce încheie demonstraţia.

Observaţie Folosind proprietăţile aplicaţiei exponenţiale se poate, de fapt, demonstra şi un rezultat global: *O suprafaţă completă (în sensul că orice geodezică se poate prelungi la întreg R) şi local plată este un plan sau un cilindru.*

2.4.5 *O curbă C pe S e linie de curbură dacă şi numai dacă normalele la S de-a lungul lui C generează o suprafaţă desfăşurabilă.*

Soluţie Fie (U, h) o parametrizare locală pentru S. Putem presupune că C se află în întregime situată în imaginea lui U (discuţia este locală). Fie $\gamma(t) = h(u(t), v(t))$ o parametrizare a lui C. E clar că normala $N(t)$ la S în lungul lui C generează o suprafaţă riglată care se poate parametriza prin:

$$h_1(t, \xi) = \gamma(t) + \xi N(t).$$

Această suprafaţă va fi desfăşurabilă dacă şi numai dacă planul tangent de-a lungul oricărei generatoare e constant. Ori, e uşor de văzut că aceasta e echivalent cu

$$det(\gamma', N, N') = 0.$$

Dacă C e linie de curbură, atunci, din Teorema lui Rodriguez, N' e coliniar cu γ' şi relaţia anterioară e satisfăcută. Reciproc, cum γ' e perpendicular pe N care, la rîndul lui, e perpendicular pe N' rămîne că γ' trebuie să fie coliniar cu N' şi Teorema lui Rodriguez se aplică din nou.

2.4.6 *Să se arate că o geodezică plană e linie de curbură.*

Soluţie De-a lungul unei geodezice vectorii normal principal şi normal la suprafaţă sînt coliniari. Atunci normala la suprafaţă generează un cilindru. Dar cilindrul este o suprafaţă desfăşurabilă. Rezultatul anterior încheie demonstraţia.

2.4.7 *Să se arate că normala principală şi binormala unei curbe regulate nu pot descrie suprafeţe desfăşurabile decît dacă e vorba de o curbă plană.*

Soluţie Normala principală (respectiv binormala) curbei γ generează suprafaţă $h(t,u) = \gamma(t) + un$ (respectiv $h(t,u) = \gamma(t) + ub$). Condiţia ca această suprafaţă să fie desfăşurabilă este $det(\gamma', n', n) = 0$ (respectiv $det(\gamma', b', b) = 0$). Ambele ecuaţii conduc la $\tau = 0$.

2.4.8 *Să se arate că elicoidul*

$$h(u,v) = (v\cos u, \quad v\sin u, \quad au)$$

şi catenoidul

$$\overline{h}(u,v) = (a\cosh v\cos u, \quad a\cosh v\sin u, \quad av)$$

sînt suprafeţe minimale local izometrice. Să se determine liniile asimptotice şi liniile de curbură ale elicoidului şi liniile asimptotice ale catenoidului.

Pentru elicoid găsim :

$$g_{11} = 1, \quad g_{12} = 0, \quad g_{22} = u^2 + a^2,$$

$$b_{11} = b_{22} = 0, \quad b_{12} = -\frac{a}{\sqrt{1+v^2}},$$

$$k_1 = -k_2 = a(v^2 + a^2)^{-2}, \quad H = 0.$$

Pentru catenoid:

$$g_{11} = g_{22} = \cosh^2 v, \quad g_{12} = 0,$$

deci parametrizarea dată este izotermă (adică $g_{11} = g_{22}, g_{12} = 0$). Se ştie, în plus, că într-o parametrizare izotermă vectorul curbură medie este:

$$\mathrm{H} = \frac{h_{uu} + h_{vv}}{2g_{11}}.$$

Se verifică imediat că, pentru catenoid, $\overline{h}_{uu} + \overline{h}_{vv} = 0$, adică vectorul curbură medie e nul şi suprafaţa rezultă minimală. O izometrie locală între catenoid şi elicoid este

$$f(\overline{h}(u,v)) = (h(u, \sinh v)).$$

Liniile asimptotice ale elicoidului sînt $u = ct., v = ct.$ (chiar curbele de coordonate), iar liniile de curbură sînt:

$$\log(v + \sqrt{v^2 + c^2}) \pm u = ct.$$

Liniile asimptotice ale catenoidului au ecuaţiile

$$u \pm v = ct.$$

2.4.9 *Să se determine toate suprafeţele de rotaţie minimale.*

Soluţie Căutăm o curbă C dată pintr-o funcţie $y = f(x)$ care, rotită în jurul lui Ox, să descrie o suprafaţă minimală. Cum pe o suprafaţă de rotaţie curbele paralele şi cele meridiane sînt linii de curbură (cf. 2.2.18), curbura curbei $y = f(x)$ este egală şi de semn contrar cu curbura normală a cercului generat de rotaţia punctului $f(x)$. Curbura lui C este

$$\frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}},$$

iar curbura normală a cercului paralel este proiecţia pe vectorul normal unitar N a curburii cercului $(1/y)$. Avem, astfel, ecuaţia:

$$\frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} = -\frac{1}{y}\cos\varphi,$$

unde φ e unghiul dintre normala la suprafaţă şi normala la cerc, adică unghiul dintre N şi perpendiculara din $f(x)$ pe Ox. Observînd că $\cos\varphi = -cos\theta$, unde $\tan\theta = y'$, ecuaţia anterioară devine:

$$\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} = \frac{1}{y}\frac{1}{(1+y'^2)^{1/2}}.$$

Există cel puţin un punct pe C unde $f'(x) \neq 0$. Într-o vecinătate a unui asemenea punct, ecuaţia de mai sus se poate înmulţi cu y' şi capătă forma:

$$\frac{2y'y''}{1+y'^2} = \frac{2y'}{y}.$$

Punem aici $z = 1 + y'^2$ şi obţinem:

$$\frac{z'}{z} = \frac{2y'}{y},$$

de unde:

$$\log z = \log(ky)^2, \quad k = ct.$$

Rezultă

$$1 + y'^2 = (ky)^2.$$

Prin integrare se găseşte, în fine:

$$y = \frac{1}{k}\cosh(kx + c), \quad c = ct.$$

Deci, în vecinătatea unui punct în care $f'(x) \neq 0$ curba căutată e un lănţişor (sau catenară). Dar atunci singurul punct în care $f' = 0$ e $x = 0$. Dacă cerem, în plus, ca suprafaţă să fie concxă, ea rezultă un catenoid. Deci singura suprafaţă de rotaţie minimală, concxă e catenoidul.

2.4.10 *Să se arate că , în afara planului, singura suprafaţă minimală riglată e elicoidul.*

Soluţie Fie

$$h(t,u) = \gamma(t) + uw(t), \quad |\, w \,|=|\, \gamma' \,|= 1, \quad <\gamma', w>= 0,$$

o parametrizare locală a unei suprafeţe riglate minimale care nu e un plan. Prin calcul direct se obţin următoarele expresii pentru coeficienţii primei şi celei de-a doua forme fundamentale:

$$g_{11} = 1 + 2u < \gamma', w' > + u^2 < w', w' >, \quad g_{12} = 0, \quad g_{22} = 1,$$
$$b_{11} = g_{11}^{-1/2} < (\gamma'' + uw'') \times (\gamma' + uw'), w >,$$
$$b_{12} = g_{11}^{-1/2} < w' \times \gamma', w >, \quad b_{22} = 0.$$

Atunci $H = 0$ implică $b_{11} = 0$. În acest caz ecuaţia liniilor asimptotice se reduce la $b_{12}t'u' = 0$. Cum suprafaţa nu este un plan, avem $b_{12} \neq 0$, deci curbele de coordonate printr-un punct q sînt linii asimptotice (ortogonale). Una dintre ele, $t = ct.$ este generatoarea prin acel punct. Atunci cealaltă linie asimptotică nu poate fi o dreaptă. Există, deci, un punct pe ea cu torsiunea nenulă. Pe de altă parte, curbura normală a unei linii asimptotice fiind nulă, vectorul normal principal la curbă e perpendicular pe normala la suprafaţă. Astfel, planul osculator la o linie asimptotică e chiar planul tangent la suprafaţă. Conchidem că, în cazul nostru, generatoarele $t = ct.$ sînt normalele principale ale curbelor $u = ct.$ Aceasta înseamnă că $u = ct.$ e o familie infinită de curbe Bertrand. Dar singura curbă care are o infinitate de vecine Bertrand e elicea circulară. Aceasta rezolvă problema local. Dar cum elicea circulară are torsiune constantă, două astfel de elici care se intersectează trebuie să coincidă, ceea ce încheie demonstraţia.

2.4.11 (reprezentarea Weierstrass a unei suprafeţe minimale.)
Fie (U, h), $h(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ o parametrizare locală a unei suprafeţe S. Identificăm (u, v) din U cu numărul complex $\zeta = u + iv$ şi punem

$$\varphi_1(\zeta) = x_u - iy_v, \quad \varphi_2(\zeta) = y_u - iy_v, \quad \varphi_3(\zeta) = z_u - iz_v.$$

Să se arate că parametrizarea h e izotermă dacă şi numai dacă

$$\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 \equiv 0. \tag{2.19}$$

În acest caz suprafaţa e minimală dacă şi numai dacă φ_i sînt analitice. Reciproc, fie $D \subset C$ un deschis conex şi simplu conex şi $\varphi_j : D \to C$, $j = \overline{1,3}$, olomorfe, verificînd (2.19) şi

$$| \varphi_1 |^2 + | \varphi_2 |^2 + | \varphi_3 |^2 = F \neq 0. \tag{2.20}$$

Soluţie Urmăm soluţia din monografia [Os]). Considerăm o parametrizare izotermă şi funcţiile analitice φ_i definite mai sus; acestea satisfac (2.19). Punem:

$$f = \varphi_1 - i\varphi_2, \quad g = \frac{\varphi_3}{\varphi_1 - i\varphi_2}.$$

(g există pentru că suprafaţa e regulată). Se verifică uşor că:

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}f(1-g^2), \quad \varphi_2 = \frac{i}{2}f(1+g^2), \quad \varphi_3 = fg.$$

De asemenea, g e meromorfă iar f e analitică şi are un zero de ordin cel puţin $2m$ în fiecare punct în care g are un pol de ordin m. Funcţia λ (factorul conform) care apare în expresia primei forme fundamentale dintr-o parametrizare izotermă va fi:

$$\lambda = \left[\frac{|f|(1+|g|^2)}{2}\right]^2,$$

iar vectorul normal are expresia:

$$N = \left(\frac{2Re(g)}{1+|g|^2}, \frac{2Im(g)}{1+|g|^2}, \frac{|g|^2-1}{1+|g|^2}\right).$$

Deci, suprafaţa nefiind plan, g' nu poate fi identic nulă. Ţinînd seama că (vezi problema 2.2.1)

$$K = -\frac{\Delta \log \lambda}{\lambda^2},$$

avem

$$K = -\left[\frac{4|g'|}{|f|(1+|g|^2)^2}\right]^2.$$

Cum g' e anlitică şi neidentic nulă, ea are numai zerouri izolate.

2.4.14 *Să se arate că suprafaţa lui Scherk*

$$h(u,v) = \left(arg\frac{\zeta+i}{\zeta-i}, \ arg\frac{\zeta+1}{\zeta-1}, \ \log\left|\frac{\zeta^2+1}{\zeta^2-1}\right|\right)$$

(unde $\zeta \neq \pm1, \pm i$ şi $arg\zeta$ e unghiul orientat dintre axa reală şi ζ) e minimală.

Soluţie Utilizăm caracterizarea din problema 2.4.11. Un calcul elementar conduce la:

$$\tan arg\frac{\zeta+i}{\zeta-i}=\frac{2u}{u^2+v^2-1},$$

$$\tan arg\frac{\zeta+1}{\zeta-1}=\frac{-2v}{u^2+v^2-1},$$

$$\log\mid\frac{\zeta^2+1}{\zeta^2-1}\mid=\frac{1}{2}\log\frac{(u^2-v^2+1)^2+4u^2v^2}{(u^2+v^2-1)^2+4u^2v^2}.$$

Avem, deci:

$$\varphi_1=-\frac{2}{1+\zeta^2},\quad \varphi_2=-\frac{2i}{1-\zeta^2},\quad \varphi_3=\frac{4\zeta}{1-\zeta^4}.$$

Se verifică fără dificultate că $\varphi_1^2+\varphi_2^2+\varphi_3^2\equiv 0$ şi φ_i sînt analitice (nu depind de $\overline{\zeta}$) ceea ce arată că suprafaţa lui Scherck e minimală. Să mai observă că o reprezentare explicită pentru această suprafaţă este $z=\log\frac{\cos y}{\cos x}$.

2.4.15 *Nu există suprafeţe minimale compacte în E^3.*

Soluţie Orice suprafaţă compactă în E^3 are un punct eliptic (cf. problemei 2.2.21); în acest punct curburile principale sînt nenule şi de acelaşi semn, deci curbura medie nu se poate anula.

Bibliografie

[Ba] T. Banchoff, *The spherical two-piece property and tight surfaces in spheres*, J. Diff. Geom. **4** (1970), 193-205.

[Ca] M. P. do Carmo, Differential geometry of curves and surfaces, Prentice-Hall, 1976.

[Do] A. Dobrescu, Curs de geometrie diferenţială, vol. I, II, Litografia Învăţămîntului, Iaşi, 1956.

[Dr-Wo] Ş. Dragomir, J. C. Wood, Sottovarietà minimali ed applicazioni armoniche, Quaderni dell'Unione Matematica Italiana, 1989.

[Ha-Li-Po] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Pólya, Inequalities, Cambridge Univ. Press, 1934.

[Ia] S. Ianuş, Curs de geometrie diferenţială, Universitatea Bucureşti, 1981.

[Jo] M. H. Johnson, A. M. M., **81** (1974), 169.

[Ma] M. Martin, Introducere în geometria diferenţială a curbelor şi suprafeţelor, Universitatea Bucureşti, 1976.

[Os] R. Osserman, A survey of minimal surfaces, Van Nostrand, 1969

[Re] W. T. Reid, *The isoperimetric inequality and associated boundary problems*, Jour. Math. Mech., **8**, (1959), 897 - 905.

[Ru-Sa] H. Rutishauser, H. Samelson, *Sur le rayon d'une sphère dont la surface contient une courbe fermée*, C. R. Acad. Sci. Paris, **227** (1948), 775-757.

[Sa] G. Saban, *Tangent circles on surfaces in Euclidean 3-space*, J. of Geom., **17** (1981), 102-127.

[Se] B. Segre, *Sui circoli geodetichi di una superficie a curvatura totale costante, che contengono nell'interno una linea assegnata*, Bolletino U.M.I., **13** (1934), 279-283.

[Ta] N. Takeuchi, *A sphere as a surface which contains many circles*, J. of Geom., **24** (1985), 123-130.

[Va] I. Vaisman, A first course in differential geometry, Marcel Dekker, 1984.

Tiparul s-a efectuat sub c-da nr. 171/1995
la Tipografia Editurii Universităţii Bucureşti

ISBN 973-575-029-5

Lei 1920