

CARMINA PLOSCEANU

BOGDAN IORGA

GABRIELA GUGHEA

OPTICĂ

CULEGERE DE PROBLEME

EDITURA UNIVERSITĂȚII DIN BUCUREȘTI

- 1999 -



BIBLIOTECA CENTRALA
UNIVERSITARA
București

Cota TI 471 599

Inventar C199903847

CARMINA PLOSCEANU

BOGDAN IORGA

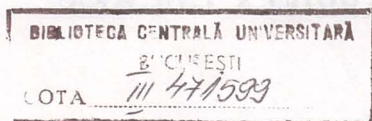
GABRIELA GUGHEA

OPTICĂ

CULEGERE DE PROBLEME

EDITURA UNIVERSITĂȚII DIN BUCUREȘTI
- 1999 -

Referenți științifici: Conf. dr. PAULINA MARIAN
Șef. lucr. dr. VALER SCRIDONESI



456/99

CARMINA PLOSCEANU - cap. 1, 2, 3, 4
BOGDAN IORGA - cap. 5, 6
GABRIELA GUGHEA - cap.7

Tehnoredactarea computerizată a fost realizată de către autori.

B.C.U. București



C199903847

© Editura Universității din București
Șos. Panduri, 90-92, București - 76235; Telefon/Fax 410.23.84

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale

PLOSCEANU, CARMINA

**Optica: culegere de probleme / Carmina Plosceanu, Gabriela Gughea;
Bogdan Iorga**

București: Editura Universității din București, 1999

216 p.; 24 cm.

ISBN 973-575-305-7

I. Gughea, Gabriela

II. Iorga Bogdan

535(075.8)(076)

CUPRINS

<i>Prefața</i>	5
1 . Unde electromagnetice în vid	7
Probleme rezolvate	7
Probleme propuse	43
2. Starea de polarizare a luminii	48
Probleme rezolvate	48
Probleme propuse	58
3. Optica mediilor izotrope	61
Probleme rezolvate	61
Probleme propuse	84
4. Optica mediilor anizotrope	88
Probleme rezolvate	88
Probleme propuse	125
5. Interferența luminii	128
Probleme rezolvate	128
Probleme propuse	144
6. Difracția luminii.....	155
Probleme rezolvate	155
Probleme propuse	162
7. Optica geometrică	170
Probleme rezolvate	170
Probleme propuse	195

PREFAȚĂ

Prezenta culegere de probleme se adresează tuturor studenților din Facultatea de Chimie dar mai ales studenților anului II de la secția de Chimie-fizică care urmează cursul de optică. Deasemenea culegerea conține probleme legate de optica cristalelor lichide fiind în acest fel utilă și studenților din anul IV chimie-fizică ce urmează cursul de cristale lichide. Ea poate fi folosită în aceeași măsură și de studenții de la alte facultăți din învățământul superior care urmează un curs de fizică.

Lucrarea este structurată după programa analitică a cursului de optică și conține șapte capitole (Unde electromagnetice în vid, Starea de polarizare a luminii, Optica mediilor izotrope, Optica mediilor anizotrope, Interferența luminii, Difrakția luminii, Optică geometrică). Fiecare capitol al culegerii conține un număr de probleme rezolvate și altele propuse spre rezolvare. Autorii s-au străduit să realizeze o culegere de probleme cu dificultate graduală, de la probleme care solicită mai puțin imaginația la probleme cu grad de dificultate mai ridicat. Multe probleme sunt însoțite de o reprezentare și interpretare grafică a rezultatelor, grație utilizării unor programe de aplicații matematice pe calculator. În lucrare mărimile vectoriale sunt reprezentate prin litere îngroșate (bold).

Culegerea conține în proporție de mai mult de 50% probleme originale, iar capitolul „Optica mediilor anizotrope” este alcătuit din probleme create special, fiind destinat studenților de la cursul de Cristale lichide sau tuturor aceluia care doresc să aprofundeze aspecte ale opticii materialelor anizotrope.

Considerând că această culegere de probleme corespunde unei necesități resimțite de studenții Facultății de Chimie, autorii au convingerea că ea le va fi de un real folos în înțelegerea fenomenelor optice.

Autorii

1. UNDE ELECTROMAGNETICE IN VID

PROBLEME REZOLVATE

1.1. Utilizând setul de ecuații ale lui Maxwell, scrise pentru câmpul electromagnetic în vid, să se găsească ecuația de propagare a undelor electromagnetice în vid.

Rezolvare:

Ecuațiile lui Maxwell pentru vid ($\rho = 0, j = 0$) sunt:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (1.1.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (1.1.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (1.1.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (1.1.4)$$

Pentru a obține ecuația de propagare a câmpului electric \mathbf{E} al unde electromagnetice se va proceda la eliminarea lui \mathbf{H} din relațiile (1.1.1) - (1.1.2), aplicând operatorul rotor ecuației (1.1.1):

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{H}) \quad (1.1.5)$$

Ținând cont că, pentru orice vector \mathbf{C} , există relația:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{C}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{C}) - (\nabla \cdot \nabla)\mathbf{C}$$

vom putea scrie că:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - (\nabla \cdot \nabla)\mathbf{E}$$

Deoarece $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ rezultă că

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -(\nabla \cdot \nabla)\mathbf{E} = -\nabla^2 \mathbf{E} \quad (1.1.6)$$

Pe de altă parte, utilizând relația (1.1.2) avem că:

$$\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{H}) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (1.1.7)$$

Înlocuind (1.1.6) și (1.1.7) în relația (1.1.5) se obține ecuația de propagare:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (1.1.8)$$

sau:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (1.1.9)$$

unde $c = (\epsilon_0 \mu_0)^{-1/2}$ este viteza undelor electromagnetice în vid.

O ecuație de propagare similară se obține, prin același procedeu, și pentru câmpul \mathbf{H} al unei electromagnetice:

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0 \quad (1.1.10)$$

1.2. Să se arate că dacă câmpurile \mathbf{E} și \mathbf{H} ale unei electromagnetice sunt date de expresiile:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \quad (1.2.1)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \quad (1.2.2)$$

unde ω este frecvența unghiulară a undei, \mathbf{k} vectorul de undă, iar vectorii \mathbf{E}_0 și \mathbf{H}_0 sunt vectori constanți care nu depind de coordonate și timp, atunci:

1) ecuațiile lui Maxwell au forma:

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \mu_0 \omega \mathbf{H}$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{H} = -\epsilon_0 \omega \mathbf{E}$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{H} = 0$$

2) $\mathbf{E} \perp \mathbf{k}$, $\mathbf{H} \perp \mathbf{k}$

3) $\mathbf{E} \perp \mathbf{H}$

Rezolvare:

1) Dacă câmpurile $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ și $\mathbf{H}(\mathbf{r},t)$ sunt date de expresiile (1.2.1-1.2.2), unde $\mathbf{r}=x\mathbf{e}_x+y\mathbf{e}_y+z\mathbf{e}_z$, $\mathbf{k}=k_x\mathbf{e}_x+k_y\mathbf{e}_y+k_z\mathbf{e}_z$, \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y , \mathbf{e}_z - versorii direcțiilor x,y,z , atunci

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -ikE \quad (1.2.3)$$

și

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = i\omega\mathbf{E} \quad (1.2.4)$$

Astfel acțiunea operatorului ∇ se reduce la înmulțirea cu $-ik$ iar a operatorului $\partial/\partial t$ la înmulțirea cu $i\omega$. În acest caz ecuațiile lui Maxwell (1.1.1-1.1.4) devin:

$$-i(\mathbf{k} \times \mathbf{E}) = -i\mu_0\omega\mathbf{H} \quad (1.2.5)$$

$$-i(\mathbf{k} \times \mathbf{H}) = i\varepsilon_0\omega\mathbf{E} \quad (1.2.6)$$

$$-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (1.2.7)$$

$$-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (1.2.8)$$

sau :

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \mu_0\omega\mathbf{H} \quad (1.2.9)$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{H} = -\varepsilon_0\omega\mathbf{E} \quad (1.2.10)$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (1.2.11)$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (1.2.12)$$

2) Din (1.2.11) și (1.2.12) rezultă că $\mathbf{E} \perp \mathbf{k}$, $\mathbf{H} \perp \mathbf{k}$, adică transversalitatea undelor electromagnetice.

3) Din (1.2.9) rezultă că \mathbf{H} este perpendicular pe planul determinat de vectorii \mathbf{k} și \mathbf{E} , adică $\mathbf{E} \perp \mathbf{H}$ (ortogonalitatea câmpurilor \mathbf{E} și \mathbf{H}).

1.3. Să se găsească soluția ecuației de propagare:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \quad (1.3.1)$$

pentru o funcție scalară $\Phi(z,t)$ de formă oarecare.

Rezolvare:

Vom rezolva problema pentru un caz general când $\Phi(z,t)$ are o formă arbitrară, nu neapărat periodică. În acest caz, făcând schimbarea de variabile:

$$\xi = z - ct \quad \text{și} \quad \eta = z + ct \quad (1.3.2)$$

obținem:

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial z} = \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \quad (1.3.3)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = -c \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + c \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \quad (1.3.4)$$

Se împart membrii relației (1.3.4) cu “c”:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{\partial \phi}{\partial \xi} + \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \quad (1.3.5)$$

Dacă se scad relațiile (1.3.3) și (1.3.5) și respectiv se adună, se obține că:

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 2 \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 2 \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \quad (1.3.6)$$

adică

$$\frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} = 2 \frac{\partial}{\partial \xi} \quad \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} = 2 \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (1.3.7)$$

Atunci:

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) = \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (1.3.8)$$

Ținând cont de relațiile (1.3.6) - (1.3.8) avem că:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) = 0 \quad (1.3.9)$$

În acest fel, rezolvarea ecuației (1.3.1) o înlocuim prin rezolvarea ecuației:

$$4 \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) = 0 \quad (1.3.10)$$

astfel că prin integrare se obține:

$$\phi = \phi_1(\xi) + \phi_2(\eta) \quad (1.3.11)$$

sau:

$$\phi(z, t) = \phi_1(z + ct) + \phi_2(z - ct) \quad (1.3.12)$$

Funcțiile Φ_1 și Φ_2 au o formă arbitrară. Funcția Φ_2 reprezintă o undă progresivă, care se propagă cu viteza "c" în sensul pozitiv al axei Oz. Funcția Φ_1 reprezintă unda regresivă, care se propagă cu viteza "c" în sensul negativ al axei Oz, iar expresia (1.3.12) descrie o superpoziție a celor două unde.

Dacă soluțiile Φ_1 și Φ_2 ale ecuației de propagare sunt funcții armonice, atunci unda se numește armonică plană, iar unda progresivă poate fi pusă sub forma:

$$\phi_2(z - ct) = \phi_2 \left[-c \left(t - \frac{z}{c} \right) \right] = A \cos \left[\omega \left(t - \frac{z}{c} \right) \right] \quad (1.3.13)$$

1.4. Să se găsească soluția ecuației de propagare pentru câmpul electric al unei unde electromagnetice care se propagă în direcția Oz, utilizând metoda separării variabilelor.

Să se arate că suprafața de undă este plană.

Rezolvare: Pentru undele care se propagă în direcția Oz ecuația de propagare (1.1.9) se scrie sub forma:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (1.4.1)$$

Câmpul electric \mathbf{E} al unei unde electromagnetice oscilează, dat fiind proprietatea de transversalitate a undelor electromagnetice, în planul xOy perpendicular pe direcția de propagare Oz. Pentru a simplifica problema vom considera o direcție de oscilație a câmpului \mathbf{E} bine determinată, astfel că vom lucra în continuare cu o funcție scalară $E(z, t)$.

Aplicând metoda separării variabilelor putem scrie :

$$E(z, t) = f(z) g(t)$$

Prin urmare:

$$\frac{\partial^2 E(z,t)}{\partial z^2} = g(t) \frac{\partial^2 f(z)}{\partial z^2}, \quad (1.4.2)$$

$$\frac{\partial^2 E(z,t)}{\partial t^2} = f(z) \frac{\partial^2 g(t)}{\partial t^2}$$

Înlocuind (1.4.2) în ecuația de propagare (1.4.1), se obține:

$$g \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} f \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} = 0 \quad (1.4.3)$$

Împărțind (1.4.3) cu produsul funcțiilor $f(z)g(t)$:

$$\frac{1}{f} \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{1}{g} \frac{\partial^2 g}{\partial t^2}$$

sau

$$\frac{c^2}{f} \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{1}{g} \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} = \text{const.} = -\omega^2 \quad (1.4.4)$$

Se obțin astfel ecuațiile:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} f = 0 \quad (1.4.5)$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial t^2} + \omega^2 g = 0$$

Dacă se notează $\omega^2/c^2 = k^2$, unde k este numărul de undă, atunci soluțiile ecuațiilor (1.4.5) sunt:

$$f(z) = A_1 e^{ikz} + B_1 e^{-ikz} \quad (1.4.6)$$

$$g(t) = A_2 e^{i\omega t} + B_2 e^{-i\omega t}$$

unde A_1, B_1, A_2, B_2 sunt constante. Soluția generală poate fi pusă sub forma:

$$E(z,t) = f(z)g(t) = E_0 e^{\pm i(\omega t \pm kz)} \quad (1.4.7)$$

unde E_0 este amplitudinea undei. Funcția (1.4.7) descrie, în general, o undă armonică plană, de pulsație ω care se propagă în direcția Oz. Funcția $E(z,t) = E_0 e^{i(\omega t - kz)}$ descrie o undă progresivă, care se propagă îndepărtându-se de sursă, iar funcția $E(z,t) = E_0 e^{i(\omega t + kz)}$ reprezintă o undă regresivă (reflectată) care se apropie de sursă.

Alte forme ale funcției (1.4.7) sunt:

$$E(z, t) = a \cos(\omega t - kz)$$

$$E(z, t) = b \sin(\omega t - kz) \quad (1.4.8)$$

b) Locul geometric al punctelor din spațiu, pentru care faza undei este constantă, se numește suprafață de undă.

Se observă că faza undei, $\varphi = (\omega t - kz)$, este constantă ($\varphi = \text{const.}$) la un moment "t" fixat, în punctele pentru care $z = \text{const.}$

Prin urmare, suprafețele de undă, în cazul propagării undei în direcția Oz, sunt planele $z = \text{const.}$ ($z = z_1, z = z_2$ etc.) și unda descrisă prin (1.4.7) este o undă plană.

1.5. Să se găsească soluția ecuației de propagare a undelor sferice, emise de o sursă punctiformă în vid. Să se arate că forma suprafețelor de undă este sferică.

Rezolvare:

Utilizând expresia laplaceanului în coordonate sferice, ecuația de propagare a undelor electromagnetice este:

$$\frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$$

Dacă propagarea are loc într-un mediu izotrop în toate direcțiile, \mathbf{E} nu mai depinde de θ și φ ci numai de r .

Ecuația de propagare a undelor devine în acest caz:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial r} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (1.5.1)$$

Deoarece:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial r} \right) = \frac{1}{r^2} \left(2r \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial r} + r^2 \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial r^2} \right) = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\mathbf{E})$$

ecuația (1.5.1) devine:

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\mathbf{E}) - \frac{r}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (1.5.2)$$

Făcând substituția $U = rE$ și observând că:

$$r \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (r\mathbf{E})$$

se obține:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0 \quad (1.5.3)$$

care reprezintă o ecuație analoagă cu (1.3.1) sau (1.4.1). Prin urmare, soluția ecuației (1.5.3) va fi de forma:

$$U(r, t) = ae^{i(\omega t \pm kr)}$$

de unde:

$$\mathbf{E}(r, t) = \frac{U}{r} = \frac{\mathbf{a}}{r} \cdot e^{i(\omega t \pm kr)} \quad (1.5.4)$$

Locul geometric al punctelor pentru care faza undei este constantă la un moment "t" fixat este $r = \text{const.}$ și reprezintă o sferă, de unde și denumirea de unde sferice.

1.6. Câmpul electric al unei unde electromagnetice oscilează în planul xy iar direcția de propagare \mathbf{k} a undei este Oz. Se cere:

- expresia câmpului electric al undei;
- să se calculeze rot \mathbf{E} ;
- să se găsească expresia câmpului magnetic \mathbf{H} al undei;
- să se găsească expresia vectorului lui Poynting \mathbf{S} ;
- să se deseneze vectorii \mathbf{E} , \mathbf{H} , \mathbf{S} și \mathbf{k} în sistemul de axe xyz;

Rezolvare:

a) Expresia vectorului $\mathbf{E}(z, t)$ este:

$$\mathbf{E}(z, t) = E_x \mathbf{e}_x + E_y \mathbf{e}_y = E_{ox} \cos(\omega t - kz) \mathbf{e}_x + E_{oy} \cos(\omega t - kz) \mathbf{e}_y$$

unde \mathbf{e}_x și \mathbf{e}_y sunt versorii direcțiilor Ox și Oy.

b) Rotorul vectorului \mathbf{E} este în general:

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = R_x^E \mathbf{e}_x + R_y^E \mathbf{e}_y + R_z^E \mathbf{e}_z \quad (1.6.1)$$

unde componentele vectorului rot \mathbf{E} sunt:

$$\begin{aligned} R_x^E &= \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ R_y^E &= \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ R_z^E &= \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \end{aligned} \quad (1.6.2)$$

Prin urmare, utilizând relațiile (1.6.2.), se obține :

$$\begin{aligned} R_x^E &= -kE_{0y} \sin(\omega t - kz) \\ R_y^E &= kE_{0x} \sin(\omega t - kz) \\ R_z^E &= 0 \end{aligned} \quad (1.6.3)$$

adică

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = R_x^E \mathbf{e}_x + R_y^E \mathbf{e}_y \quad (1.6.4)$$

c) Ținând cont de ecuația lui Maxwell:

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

vom scrie că:

$$\begin{aligned} R_x^E &= -\mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t} \\ R_y^E &= -\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} \\ R_z^E &= -\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t} \end{aligned} \quad (1.6.5)$$

de unde:

$$H_x = -\frac{1}{\mu_0} \int R_x^E dt$$

$$H_y = -\frac{1}{\mu_0} \int R_y^E dt \quad (1.6.6)$$

$$H_z = -\frac{1}{\mu_0} \int R_z^E dt$$

Prin integrare se obține:

$$H_x = -\frac{1}{\mu_0} \int R_x^E dt = -\frac{kE_{oy}}{\omega\mu_0} \cos(\omega t - kz)$$

$$H_y = -\frac{1}{\mu_0} \int R_y^E dt = -\frac{kE_{ox}}{\omega\mu_0} \cos(\omega t - kz) \quad (1.6.7)$$

$$H_z = 0$$

adică:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(z, t) &= H_x \mathbf{e}_x + H_y \mathbf{e}_y = \\ &= -H_{ox} \cos(\omega t - kz) \mathbf{e}_x + H_{oy} \cos(\omega t - kz) \mathbf{e}_y \end{aligned} \quad (1.6.8)$$

unde $H_{ox} = kE_{oy}/\omega\mu_0$ și $H_{oy} = kE_{ox}/\omega\mu_0$.

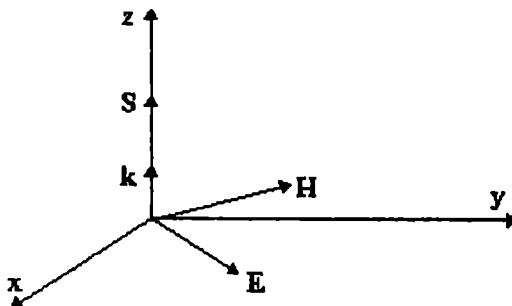


Fig.1.6

d) Vectorul lui Poynting \mathbf{S} , în cazul problemei noastre, este:

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ E_x & E_y & 0 \\ H_x & H_y & 0 \end{vmatrix} = (E_x H_y - E_y H_x) \mathbf{e}_z =$$

$$= \frac{k(E_{ox}^2 + E_{oy}^2)}{\omega \mu_0} \cos^2(\omega t - kz) \mathbf{e}_z \quad (1.6.9)$$

Valoarea medie a densității fluxului de energie este :

$$\langle S \rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau |S| dt = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{k(E_{ox}^2 + E_{oy}^2)}{\omega \mu_0} \cos^2(\omega t - kz) dt =$$

$$= \frac{k(E_{ox}^2 + E_{oy}^2)}{2\omega \mu_0} = \frac{(E_{ox}^2 + E_{oy}^2)}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} I \quad (1.6.10)$$

unde

$$I = \mathbf{E}^* \mathbf{E} = E_{ox}^2 + E_{oy}^2 \quad (1.6.11)$$

este intensitatea undei.

e) În fig.1.6 este prezentată dispoziția vectorilor \mathbf{E} , \mathbf{H} , \mathbf{S} , \mathbf{k} în raport cu sistemul de axe xyz , în care direcția de propagare a undei este Oz .

1.7. Într-un mediu izotrop se propagă o undă electromagnetică după o direcție \mathbf{k} , aflată în planul xy . Câmpul electric al undei oscilează după direcția Oz . Se cere:

- expresia câmpului electric \mathbf{E} al undei;
- să se calculeze rot \mathbf{E} ;
- să se găsească expresia câmpului magnetic \mathbf{H} al undei;
- să se găsească expresia vectorului lui Poynting și valoarea medie a densității fluxului de energie transportată de undă;
- să se deseneze vectorii \mathbf{E} , \mathbf{H} , \mathbf{S} și \mathbf{k} în sistemul de axe xyz ;

Rezolvare:

a) Deoarece propagarea are loc după o direcție aflată în planul xy , produsul scalar $\mathbf{k}\mathbf{r}$ este $\mathbf{k}\mathbf{r} = k_x x + k_y y$, iar expresia câmpului electric \mathbf{E} al unde, polarizată după Oz , va fi:

$$\mathbf{E}(x, y, t) = E_z \mathbf{e}_z = E_0 \cos[\omega t - (k_x x + k_y y)] \mathbf{e}_z \quad (1.7.1)$$

b) Ținând cont de expresiile (1.6.2), componentele vectorului rot \mathbf{E} sunt:

$$\begin{aligned} R_x^E &= k_y E_0 \sin[\omega t - (k_x x + k_y y)] \\ R_y^E &= -k_x E_0 \sin[\omega t - (k_x x + k_y y)] \\ R_z^E &= 0 \end{aligned} \quad (1.7.2)$$

adică

$$\text{rot}\mathbf{E} = R_x^E \mathbf{e}_x + R_y^E \mathbf{e}_y \quad (1.7.3)$$

c) Componentele vectorului \mathbf{H} se determină utilizând relațiile (1.6.6). Astfel:

$$\begin{aligned} H_x &= \frac{k_y E_0}{\omega \mu_0} \cos[\omega t - (k_x x + k_y y)] \\ H_y &= -\frac{k_x E_0}{\omega \mu_0} \cos[\omega t - (k_x x + k_y y)] \\ H_z &= 0 \end{aligned} \quad (1.7.4)$$

d) Vectorul lui Poynting este:

$$\begin{aligned} \mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 0 & 0 & E_z \\ H_x & H_y & 0 \end{vmatrix} = \\ &= -E_z H_y \mathbf{e}_x + E_z H_x \mathbf{e}_y = S_x \mathbf{e}_x + S_y \mathbf{e}_y \end{aligned} \quad (1.7.5)$$

iar valoarea instantanee $|\mathbf{S}|$, este:

$$|\mathbf{S}| = \sqrt{S_x^2 + S_y^2} = \frac{E_0^2}{\omega \mu_0} \sqrt{k_x^2 + k_y^2} \cos^2[\omega t - (k_x x + k_y y)]$$

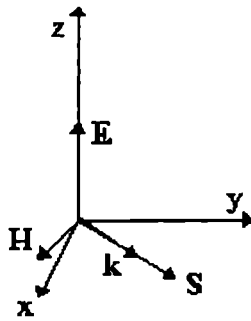


Fig.1.7.

Valoarea medie a densității fluxului de energie este:

$$\begin{aligned} \langle S \rangle &= \frac{E_0^2}{\omega\mu_0} \sqrt{k_x^2 + k_y^2} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \cos^2[\omega t - (k_x x + k_y y)] dt = \\ &= \frac{E_0^2}{2\omega\mu_0} \sqrt{k_x^2 + k_y^2} \end{aligned}$$

e) În fig.1.7. este prezentată dispunerea spațială a vectorilor E , H , S și k .

1.8. Câmpul magnetic al unei unde electromagnetice care se propagă în vid, în direcția Oz este:

$$\mathbf{H}(z, t) = H_0 \cos(\omega t - kz) \mathbf{e}_x \quad (1.8.1)$$

Se cere:

- să se găsească expresia câmpului E electric al unde;
- să se calculeze $\text{div}E$;
- să se găsească expresia vectorului lui Poynting și să se prezinte dispoziția spațială a vectorilor E , H , S și k ;

Rezolvare:

a) Ținând cont de ecuația lui Maxwell:

$$\text{rot}H = \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \quad (1.8.2)$$

vom putea determina componentele câmpului electric \mathbf{E} al undei:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \int (\text{rot}\mathbf{H}) dt \quad (1.8.3)$$

Componentele vectorului $\text{rot}\mathbf{H}$ se determină astfel:

$$\text{rot}\mathbf{H} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = R_x^H \mathbf{e}_x + R_y^H \mathbf{e}_y + R_z^H \mathbf{e}_z$$

unde

$$\begin{aligned} R_x^H &= \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \\ R_y^H &= \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \\ R_z^H &= \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \end{aligned} \quad (1.8.4)$$

Utilizând relațiile (1.8.4) se obține:

$$\begin{aligned} R_x^H &= 0 \\ R_y^H &= kH_0 \sin(\omega t - kz) \\ R_z^H &= 0 \end{aligned} \quad (1.8.5)$$

Prin urmare

$$E_y = \frac{1}{\epsilon_0} \int R_y^H dt = -\frac{kH_0}{\omega\epsilon_0} \cos(\omega t - kz) \quad (1.8.6)$$

adică:

$$\mathbf{E}(z, t) = -E_0 \cos(\omega t - kz) \mathbf{e}_y \quad (1.8.7)$$

unde $E_0 = kH_0/\omega\epsilon_0$ este amplitudinea câmpului electric.

b) Pentru calculul divergenței vom utiliza relația:

$$\text{div}\mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \quad (1.8.8)$$

Prin urmare, în cazul problemei date:

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0 \quad (1.8.9)$$

ceea ce indică un câmp fără surse.

c) În cazul acestei probleme, vectorul lui Poynting este dat de:

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 0 & E_y & 0 \\ H_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = -E_y H_x \mathbf{e}_z = \quad (1.8.10)$$

$$= \frac{kH_0^2}{\omega\epsilon_0} \cos^2(\omega t - kz) \mathbf{e}_z$$

În figura 1.8 este prezentată dispunerea spațială a vectorilor \mathbf{E} , \mathbf{H} , \mathbf{S} , \mathbf{k} într-un sistem de axe xyz .

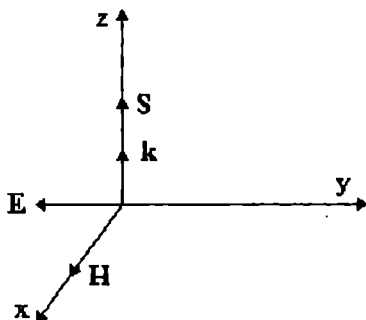


Fig.1.8

1.9. Să se scrie expresia câmpului electric al unei unde electromagnetice plane de frecvență unghiulară ω ce se propagă în vid:

- în direcția Oy și este polarizată după Ox ;
- în direcția Oy și este polarizată după Oz ;
- în direcția Oy și este polarizată în planul (xz) ;
- în direcția Ox și este polarizată după Oz ;

Rezolvare:

a) Câmpul electric al undei va depinde în acest caz de coordonata y și de timp și poate fi exprimat prin:

$$\mathbf{E}(y, t) = E_{ox} e^{i(\omega t - ky)} \cdot \mathbf{e}_x \quad (1.9.1)$$

unde \mathbf{e}_x este versorul direcției Ox .

b) Expresia câmpului electric al undei este:

$$\mathbf{E}(y, t) = E_{oz} e^{i(\omega t - ky)} \cdot \mathbf{e}_z \quad (1.9.2)$$

unde \mathbf{e}_z este versorul direcției Oz .

c) Deoarece \mathbf{E} oscilează în planul (xz) , vom avea:

$$\mathbf{E}_o = E_x \mathbf{e}_x + E_z \mathbf{e}_z$$

de unde:

$$\mathbf{E}(y, t) = (E_{ox} \mathbf{e}_x + E_{oz} \mathbf{e}_z) e^{i(\omega t - ky)} \quad (1.9.3)$$

și

$$\text{tg} \theta = \frac{E_{oz}}{E_{ox}}$$

d) În acest caz:

$$\mathbf{E}(x, t) = E_{oz} e^{i(\omega t - kx)} \cdot \mathbf{e}_z \quad (1.9.4)$$

1.10. Care sunt valorile maxime ale câmpurilor electric și magnetic în cazul unui fascicul laser cu intensitatea de:

a) 10^{13} W/m^2 (laser cu CO_2)

b) 10^{-3} W/m^2 (laser cu He-Ne)

Se dau: $\epsilon_o = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$, $\mu_o = 4 \pi 10^{-7} \text{ H/m}$.

Rezolvare:

Intensitatea radiației, reprezentând energia transportată de unda electromagnetică în unitatea de timp pe unitatea de suprafață, este dată de modulul vectorului lui Poynting \mathbf{S} .

Valoarea medie în timp a acestei energii este:

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_o}{\mu_o}} E_o^2 \quad (1.10.1)$$

unde E_o este amplitudinea undei, iar $I = E_o^2$ este intensitatea undei.

Prin urmare:

$$E_0 = \left[2 \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \langle S \rangle \right]^{1/2} \quad (1.10.2)$$

Prin calcul se obține:

a) $E_0 = 8.68 \cdot 10^7$ V/m și

$$H_0 = (\epsilon_0 / \mu_0)^{1/2} E_0 = 2.29 \cdot 10^5 \text{ A/m sau } B_0 = \mu_0 H_0 = 0.287 \text{ T}$$

b) $E_0 = 0.868$ V/m și $B_0 = 2.9 \cdot 10^{-9}$ T.

În cazul a) câmpul electric este foarte intens ceea ce explică utilizarea radiației laserului cu CO_2 în aplicații tehnologice, iar câmpul magnetic are o valoare obișnuită.

În cazul laserului cu He-Ne, valorile câmpurilor electric și magnetic sunt mult mai slabe, neproducând efecte de încălzire.

1.11. Să se scrie expresia intensității undei rezultate din suprapunerea a două unde electromagnetice de aceeași frecvență, care se propagă în direcția Ox, ținând cont de direcția lor de polarizare:

a) după direcții paralele;

b) după direcții ortogonale;

c) după direcții care formează un unghi $\alpha = \pi/3$ între ele.

Rezolvare:

Ținând cont de starea de polarizare, câmpurile electrice ale celor două unde sunt:

$$\mathbf{E}_1 = E_{01} e^{i(\omega t - kx_1)}$$

$$\mathbf{E}_2 = E_{02} e^{i(\omega t - kx_2)} \quad (1.11.1)$$

Intensitatea undei rezultante este:

$$I = (\mathbf{E}_1^* + \mathbf{E}_2^*) \cdot (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2) = E_{01}^2 + E_{02}^2 + 2 \cdot \mathbf{E}_{01} \cdot \mathbf{E}_{02} \cos[k(x_2 - x_1)]$$

În expresia intensității intervine produsul scalar $\mathbf{E}_{01} \cdot \mathbf{E}_{02}$. Dacă α este unghiul dintre planele de oscilație ale câmpurilor \mathbf{E}_1 și \mathbf{E}_2 , atunci:

$$\mathbf{E}_{01} \cdot \mathbf{E}_{02} = E_{01} E_{02} \cos \alpha \quad (1.11.3)$$

și

$$I = E_{01}^2 + E_{02}^2 + 2E_{01}E_{02} \cos \alpha \cos(k \cdot \Delta x) \quad (1.11.4)$$

unde am notat cu $\Delta x = x_2 - x_1$ diferența de drum optic.

a) oscilații paralele: dacă direcțiile de oscilație ale câmpurile E_1 și E_2 sunt paralele, $\alpha = 0$ și în acest caz:

$$I = E_{01}^2 + E_{02}^2 + 2E_{01}E_{02} \cos(k \cdot \Delta x) \quad (1.11.5)$$

b) dacă câmpurile E_1 și E_2 sunt ortogonale ($\alpha = \pi/2$), atunci:

$$I = E_{01}^2 + E_{02}^2 \quad (1.11.6)$$

c) dacă planele în care oscilează câmpurile E_1 și E_2 fac între ele un unghi $\alpha = \pi/3$, atunci:

$$I = E_{01}^2 + E_{02}^2 + E_{01}E_{02} \cos(k \cdot \Delta x) \quad (1.11.7)$$

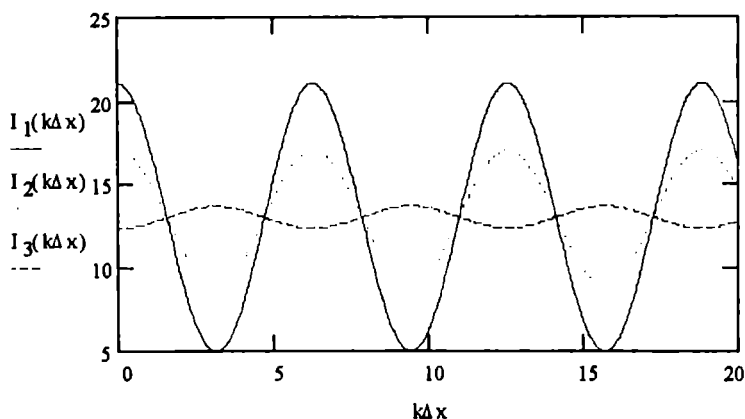


Fig.1.11

În fig.1.11. este prezentată dependența $I=I(k\Delta x)$ și anume $I_1=I_1(k\Delta x)$ pentru $\alpha_1=0$ (curba continuă), $I_2=I_2(k\Delta x)$ pentru $\alpha_2=\pi/3$ (curbă punctată), $I_3=I_3(k\Delta x)$ pentru $\alpha_3=\pi/1.9$ (reprezentată cu punct-linie). S-a considerat $E_{01}=2V/m$, $E_{02}=3V/m$. Se constată că pentru o valoare $k\Delta x$ fixată (adică într-un anumit punct unde se produce superpoziția undelor) valoarea intensității depinde semnificativ de unghiul α , adică de direcțiile de oscilație ale câmpurilor. Deasemenea și valorile maxime ale lui I depind de valorile lui α .

1.12. Două unde coerente ($\omega_1 = \omega_2 = \omega$), de amplitudini a_1 și a_2 se propagă pe aceeași direcție, Oz. Câmpurile electrice ale celor două unde oscilează după aceeași direcție și sunt:

$$E_1(z, t) = a_1 e^{i(\omega t - kz_1)} \quad (1.12.1)$$

$$E_2(z, t) = a_2 e^{i(\omega t - kz_2 - \varphi_0)}$$

Se cere:

a) Să se determine intensitatea undei rezultate din suprapunerea celor două unde într-un punct, până la care undele au străbătut distanțele z_1 respectiv z_2 .

Care sunt valorile maxime și minime ale intensității ?

b) Pentru ce valori ale $\Delta z = z_2 - z_1$ se obțin maximele și minimele de intensitate dacă $\varphi_0 = 0$. Să se reprezinte grafic $I = I(k\Delta z)$ pentru $\varphi_0 = 0, \pi/3, \pi$.

c) Care este intensitatea medie a undei rezultante dacă undele sunt incoerente?

Rezolvare:

a) Intensitatea undei rezultante se definește ca fiind:

$$I = \mathbf{E}^* \cdot \mathbf{E} \quad (1.12.2)$$

Oscilațiile fiind paralele, câmpul electric al undei rezultante este:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = \left[a_1 e^{-ikz_1} + a_2 e^{-i(kz_2 + \varphi_0)} \right] e^{i\omega t} \quad (1.12.3)$$

iar

$$\mathbf{E}^* = \mathbf{E}_1^* + \mathbf{E}_2^* = \left[a_1 e^{ikz_1} + a_2 e^{i(kz_2 + \varphi_0)} \right] e^{-i\omega t} \quad (1.12.4)$$

Efectuând calculele se obține:

$$I = \mathbf{E}^* \cdot \mathbf{E} = a_1^2 + a_2^2 + a_1 a_2 e^{i(k\Delta z + \varphi_0)} + a_1 a_2 e^{-i(k\Delta z + \varphi_0)}$$

sau:

$$I = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(k\Delta z + \varphi_0) \quad (1.12.5)$$

Dacă $\varphi_0 = \text{const.}$, atunci:

$$I = I_{\max} = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 = (a_1 + a_2)^2 \quad (1.12.6)$$

pentru $(k\Delta z + \varphi_0) = 2n\pi$ și

$$I = I_{\min} = a_1^2 + a_2^2 - 2a_1 a_2 = (a_1 - a_2)^2 \quad (1.12.7)$$

pentru $(k\Delta z + \varphi_0) = (2n+1)\pi$. Dacă ținem cont că intensitățile celor două unde sunt $I_1 = a_1^2$ și $I_2 = a_2^2$ atunci ecuația (1.12.5) se mai scrie:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(k \cdot \Delta z + \varphi_0) \quad (1.12.8)$$

b) Dacă $\varphi_0 = 0$, atunci:

$$I_{\max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \quad (1.12.9)$$

pentru:

$$k \cdot \Delta z = 2n\pi \quad \text{sau} \quad \Delta z = \frac{2n\pi}{k} = 2n \frac{\lambda}{2}$$

respectiv:

$$I_{\min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2} \quad (1.12.10)$$

pentru:

$$k \cdot \Delta z = (2n+1)\pi \quad \text{sau} \quad \Delta z = (2n+1) \frac{\lambda}{2}$$

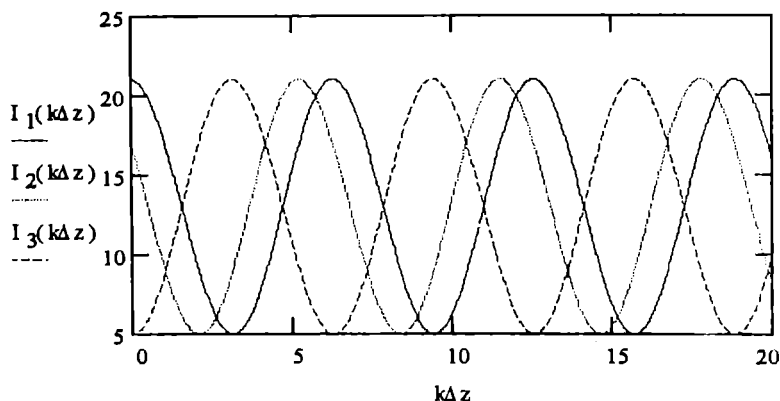


Fig. 1.12

În fig.1.12. este prezentată dependența $I = I(k\Delta z)$ și anume $I_1 = I_1(k\Delta z)$ pentru $\varphi_0 = 0$ (curba continuă), $I_2 = I_2(k\Delta z)$ pentru $\varphi_0 = \pi/3$ (curba punctată), $I_3 = I_3(k\Delta z)$ pentru $\varphi_0 = \pi$ (curba linie-întreruptă). S-a considerat $a_1 = 2V/m$, $a_2 = 3V/m$. Se constată că pentru o valoare $k\Delta z$ fixată (adică într-un anumit punct unde se produce superpoziția undelor) valoarea intensității depinde semnificativ de mărimea fazelor inițiale. Valorile maxime ale lui I nu se modifică.

c) Dacă $\varphi_0 = \varphi_0(t)$ și variază aleatoriu și foarte rapid în timp, undele sunt necoerente. Atunci intensitatea unei rezultante va varia în timp datorită termenului $\cos(k\Delta z + \varphi_0)$ din expresia (1.12.5). Valoarea medie a intensității, evaluată pe un interval de timp $\tau \gg T$ (T -perioada undelor), este:

$$\langle I \rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau I dt = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \cos(k\Delta z + \varphi_0) dt \quad (1.12.11)$$

Deoarece valoarea medie a cosinusului este nulă pe durata unei perioade de variație a sa, obținem că:

$$I = a_1^2 + a_2^2 = I_1 + I_2 = \text{const.} \quad (1.12.12)$$

În acest caz intensitatea I are aceeași valoare în orice punct din zona de interferență, suprapunerea undelor dând o interferență nestaționară.

1.13. Două unde electromagnetice având aceeași amplitudine a , dar frecvențe diferite $\omega_1 \neq \omega_2$, se propagă în aceeași direcție Oz și au aceeași fază inițială. Câmpurile electrice $E_1(z,t)$ și $E_2(z,t)$ ale celor două unde oscilează după aceeași direcție.

Să se găsească intensitatea unei rezultate din suprapunerea celor două unde.

Rezolvare:

I. În punctul unde are loc superpoziția, câmpurile electrice ale celor două unde sunt date de expresiile:

$$\begin{aligned} E_1(z_1, t) &= ae^{i(\omega_1 t - k_1 z_1)} \\ E_2(z_2, t) &= ae^{i(\omega_2 t - k_2 z_2)} \end{aligned} \quad (1.13.1)$$

Dacă introducem notațiile:

$$\begin{aligned} \omega &= (\omega_1 + \omega_2) / 2, \quad k = (k_1 + k_2) / 2, \quad z = (z_1 + z_2) / 2 \\ \Delta\omega &= \omega_1 - \omega_2, \quad \Delta k = k_1 - k_2, \quad \Delta z = z_1 - z_2 \end{aligned} \quad (1.13.2)$$

avem că:

$$\omega_1 = \omega + \frac{\Delta\omega}{2}, \quad k_1 = k + \frac{\Delta k}{2}, \quad z_1 = z + \frac{\Delta z}{2}$$

$$\omega_2 = \omega - \frac{\Delta\omega}{2}, \quad k_2 = k - \frac{\Delta k}{2}, \quad z_2 = z - \frac{\Delta z}{2} \quad (1.13.3)$$

iar unda rezultantă este:

$$\begin{aligned} E &= E_1 + E_2 = \\ &= a \left[e^{i \left(\left(\omega + \frac{\Delta\omega}{2} \right) t - \left(k + \frac{\Delta k}{2} \right) \left(z + \frac{\Delta z}{2} \right) \right)} + e^{i \left(\left(\omega - \frac{\Delta\omega}{2} \right) t - \left(k - \frac{\Delta k}{2} \right) \left(z - \frac{\Delta z}{2} \right) \right)} \right] = \\ &= a e^{i \left(\omega t - kz - \frac{\Delta k \Delta z}{4} \right)} \left[e^{i \left(\frac{\Delta\omega}{2} t - \frac{k \Delta z}{2} - \frac{z \Delta k}{2} \right)} + e^{-i \left(\frac{\Delta\omega}{2} t - \frac{k \Delta z}{2} - \frac{z \Delta k}{2} \right)} \right] \end{aligned}$$

Utilizând formulele lui Euler se obține:

$$E = 2a \cos \left(\frac{\Delta\omega t - \Delta(kz)}{2} \right) e^{i \left(\omega t - kz - \frac{\Delta k \Delta z}{4} \right)} \quad (1.13.4)$$

care reprezintă o undă de frecvență ω care se propagă în direcția Oz, având o amplitudine variabilă:

$$A = 2a \cos \left[\frac{\Delta\omega t - \Delta(kz)}{2} \right] \quad (1.13.5)$$

Intensitatea undei rezultante este:

$$I = E^* \cdot E = 4a^2 \cos^2 \left[\frac{\Delta\omega t - \Delta(kz)}{2} \right] \quad (1.13.6)$$

II. Dacă utilizăm pentru câmpurile E_1 și E_2 expresiile :

$$E_1(z_1, t) = a \cos(\omega_1 t - k_1 z_1) \quad (1.13.7)$$

$$E_2(z_2, t) = a \cos(\omega_2 t - k_2 z_2)$$

și calculăm $(E_1 + E_2)$ folosind relațiile (1.13.2)-(1.13.3), vom obține:

$$E_1 + E_2 = 2a \cos \left(\frac{\Delta\omega t - \Delta(kz)}{2} \right) \cos \left(\omega t - kz - \frac{\Delta k \Delta z}{4} \right) \quad (1.13.8)$$

Se observă ca se obțin aceleași expresii (1.13.5) și respectiv (1.13.6) pentru amplitudinea și intensitatea undei rezultante, ca și în prima variantă.

Relația (1.13.6) arată că într-un punct fixat din spațiu, intensitatea variază periodic în timp, cu frecvența $\Delta\omega$, ceea ce reprezintă un fenomen de modulație în amplitudine (fenomenul de bătăi).

În figura 1.13 este prezentată, prin curba continuă, dependența de timp a valorilor câmpului rezultat $E(t)$ (relația 1.13.8), prin curba punctată, dependența de timp a amplitudinii $A(t)$ (relația 1.13.5), iar prin linie întreruptă $I(t)$ (relația (1.13.6)). Aceste reprezentări grafice au fost făcute pe calculator, alegându-se, pentru o mai bună vizualizare, frecvențe unghiulare mici și anume $\omega_1=20\text{rad/s}$, $\omega_2=23\text{rad/s}$, astfel ca $\Delta\omega=3\text{rad/s}$.

Se poate constata din fig.1.13 formarea grupurilor de undă. Durata unui grup este $\tau=1/\Delta\nu=2\pi/\Delta\omega$, adică în cazul acestei probleme $\tau=2\pi/3=2.09\text{s}$.

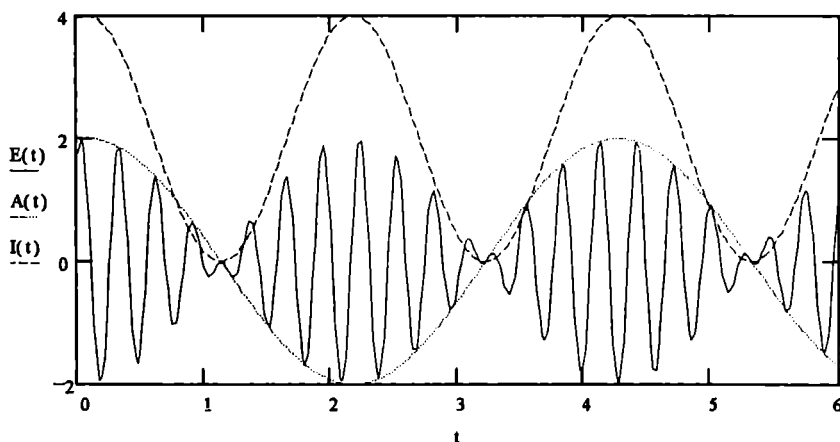


Fig.1.13.

1.14. a. Să se găsească relația dintre câmpul electric și câmpul magnetic al unei electromagnetice armonice plane de frecvență unghiulară ω , care se propagă în vid.

b. Să se determine raportul intensităților celor două câmpuri în cazul :

1) propagării undelor în vid;

2) propagării într-un mediu cu constantele $\epsilon_r=5$ (indice de refracție $n = 2,236$) și $\mu_r=1$.

Rezolvare:

Dacă:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{E}_0 \exp[i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})] \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{H}_0 \exp[i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})] \end{aligned} \quad (1.14.1)$$

sunt expresiile câmpurilor electric și magnetic ale undei electromagnetice, atunci ecuațiile lui Maxwell (pentru vid) pot fi scrise sub forma:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= -i(\mathbf{k} \times \mathbf{E}) = -i\omega\mu_0\mathbf{H} \\ \nabla \times \mathbf{H} &= -i(\mathbf{k} \times \mathbf{H}) = i\omega\epsilon_0\mathbf{E} \end{aligned} \quad (1.14.2)$$

sau:

$$\begin{aligned} \mathbf{k} \times \mathbf{E} &= \omega\mu_0\mathbf{H} \\ \mathbf{k} \times \mathbf{H} &= -\omega\epsilon_0\mathbf{E} \end{aligned} \quad (1.14.3)$$

Ținând cont de proprietatea de transversalitate a undelor electromagnetice, vom putea scrie:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}\mathbf{E}_0 &= \omega\mu_0\mathbf{H}_0 \\ \mathbf{k}\mathbf{H}_0 &= \omega\epsilon_0\mathbf{E}_0 \end{aligned} \quad (1.14.3)$$

Deoarece $k = \omega/c$, obținem că:

$$\frac{\omega}{c}\mathbf{E}_0 = \omega\mu_0\mathbf{H}_0 \quad (1.14.4)$$

și înlocuind $c = (\epsilon_0\mu_0)^{-1/2}$ rezultă:

$$\sqrt{\epsilon_0}\mathbf{E}_0 = \sqrt{\mu_0}\mathbf{H}_0 \quad (1.14.5)$$

sau:

$$\mathbf{E}_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}\mathbf{H}_0 \quad (1.14.6)$$

Înlocuind $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$ se obține:

$$\frac{\mathbf{E}_0}{\mathbf{H}_0} = 3,767 \cdot 10^2 \text{ V/A} \quad (1.14.7)$$

b. Intensitățile câmpurilor electric și magnetic ale undei electromagnetice stau în relația:

$$1) \quad \frac{I_E}{I_H} = \frac{E_0^2}{H_0^2} = \frac{\mu_0}{\epsilon_0} \quad (1.14.8)$$

ceea ce înseamnă că:

$$I_E = 1,42 \cdot 10^5 I_H$$

$$2) \quad \frac{I_E}{I_H} = \frac{E_0^2}{H_0^2} = \frac{\mu}{\epsilon} = \frac{\mu_0 \mu_r}{\epsilon_0 \epsilon_r} \quad (1.14.9)$$

adică:

$$I_E = 2,84 \cdot 10^4 I_H$$

Se constată că intensitatea câmpului electric al unde electromagnetice în vid sau într-un alt mediu nemagnetic este mult mai mare decât intensitatea câmpului magnetic asociat.

1.15. O undă electromagnetică plană se propagă în direcția Oy și este polarizată după direcția Ox, în raport cu un sistem de axe (xyz).

a) Să se scrie expresia câmpului magnetic al unde;

b) Care este valoarea instantanee a câmpului electric și a câmpului magnetic al unde electromagnetice în punctele de coordonate $y_1=10.1$ m și $y_2=10.2$ m de sursă, la momentul de timp $t = 0.001$ s dacă: $E_0=10$ V/m, iar frecvența unde este de $1,5 \cdot 10^8$ Hz.

c) Care este valoarea medie a densității fluxului de energie transportată?

Rezolvare:

a) Expresia câmpului electric al unde este:

$$\mathbf{E}(y, t) = E_0 \cos(\omega t - ky) \cdot \mathbf{e}_x \quad (1.15.1)$$

În acest caz câmpul magnetic al unde va fi polarizat în direcția Oz și are expresia:

$$\mathbf{H}(y, t) = H_0 \cos(\omega t - ky) \cdot \mathbf{e}_z \quad (1.15.2)$$

unde \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_z sunt versorii direcțiilor Ox și Oz, $k = \omega/c$ și $H_0 = (\epsilon_0/\mu_0)^{1/2} E_0$ (vezi problema 1.14.)

b) La momentul $t = 0,001$ s și $y_1=10,1$ m se obține prin calcul, utilizând relația (1.15.1) și (1.15.2), $E(t) = 9,511$ V/m, $H(t) = 0.025$ A/m. Pentru $t = 0,001$ s și $y_2 = 10.2$ m, $E(t) = 8,09$ V/m, $H(t) = 0.021$ A/m.

c) Valoarea medie a densității fluxului de energie transportată (valoarea medie a vectorului lui Poynting) este:

$$\langle S \rangle = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0^2 \langle \cos^2(\omega t - ky) \rangle = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0^2 \quad (1.15.3)$$

Înlocuind datele numerice se obține:

$$\langle S \rangle = 0,133 \text{ W/m}^2$$

1.16. a) Să se calculeze care este durata Δt a unei oscilații electromagnetice de frecvență ν_0 pentru ca abaterea $\Delta \nu$ să fie de 20%.

b) Ce lărgime are pachetul de unde, dacă unda se propagă cu viteza se grup $v_g = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$. Să se efectueze calculele pentru cazurile:

a) $\nu_0 = 5 \cdot 10^3 \text{ Hz}$;

b) $\nu_0 = 5 \cdot 10^7 \text{ Hz}$;

c) $\nu_0 = 5 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$.

Rezolvare:

a) Ținând cont de problema 1.13, durata Δt a unui grup de unde se obține cu condiția:

$$\Delta t = \frac{1}{\Delta \nu} \quad (1.16.1)$$

Deoarece $\Delta \nu = 20\% \nu_0 = 0.2 \nu_0$, obținem:

$$\Delta t = \frac{1}{0.2 \nu_0} \quad (1.16.2)$$

b) Lărgimea Δl a unui grup este:

$$\Delta l = v_g \Delta t = \frac{v_g}{\Delta \nu} \quad (1.16.3)$$

Efectuând calculele, se obțin rezultatele prezentate în tabelul următor:

$\nu_0(\text{Hz})$	$\lambda(\text{m})$	$\Delta t(\text{s})$	$\Delta z(\text{m})$
$5 \cdot 10^3$	$6 \cdot 10^4 (60 \text{ km})$	10^{-3}	$3 \cdot 10^5 (300 \text{ km})$
$5 \cdot 10^7$	6	10^{-7}	30
$5 \cdot 10^{14}$	$0,6 \cdot 10^{-6} (0,6 \mu\text{m})$	10^{-14}	$3 \cdot 10^{-6} (3 \mu\text{m})$

1.17. Un laser cu He-Ne emite o radiație cu $\lambda_0 = 6328 \text{ \AA}$ și lărgime spectrală $\Delta \lambda = 0,02 \text{ \AA}$, care se propagă cu viteza $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$. Să se determine:

a) gradul de monocromaticitate al radiației;

b) durata Δt trenurilor (grupurilor) de unde corespunzătoare;

c) lungimea trenurilor de undă emise;

d) care trebuie să fie diferența de drum între brațele unui interferometru Michelson pentru ca să se obțină o figură de interferență staționară.

Rezolvare:

a) Gradul de monocromaticitate al undelor este:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = 3,1 \cdot 10^{-6} \quad (1.17.1)$$

b) Durata Δt a trenurilor de undă se obține cu relația (vezi problema 1.16):

$$\Delta t = \frac{l}{\Delta v}$$

unde: $|\Delta v| = \frac{c}{\lambda_0} \Delta\lambda = 1,5 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1} = 1,5 \text{ GHz}$

Efectuând calculele se obține: $\Delta t = 6,7 \cdot 10^{-10} \text{ s}$.

c) Lungimea trenurilor de undă (lungimea de coerență) este:

$$\Delta l = c \cdot \Delta t = 20 \text{ cm}$$

d) Pentru a se obține o figură de interferență staționară este necesară îndeplinirea condiției de coerență spațială a undelor monocromatice, ceea ce înseamnă că diferența de drum între cele două brațe ale interferometrului Michelson să nu depășească lungimea de coerență Δl . Dacă diferența de drum între cele două brațe ale interferometrului depășește lungimea Δl a unui tren de unde atunci nu va mai avea loc suprapunerea unor trenuri de undă "gemene", adică rezultate din divizarea același tren de undă.

1.18. Într-un experiment de interferență Young în lumină monocromatică de lungime de undă λ_0 , lumina trimisă de fanta primară S, de lățime reglabilă a, cade pe fantele S_1 și S_2 ale dispozitivului Young, situate la distanța d una de alta și la distanța L față de fanta S (fig. 1.18.a)

Să se analizeze coerența luminii transmise de S, în planul fantelor S_1, S_2 . Caz particular: $d = 0,6 \text{ mm}$, $L = 1 \text{ m}$, $\lambda_0 = 600 \text{ nm}$.

Rezolvare:

Vizibilitatea franjelor de interferență, produse cu ajutorul dispozitivului Young, depinde de coerența perturbațiilor ce provin de la fantele S_1, S_2 . Factorul de coerență γ_{12} al perturbațiilor de la S_1 și S_2 , depinde de distanța d dintre cele două fante, de dimensiunea "a" a sursei primare S și de distanța L dintre planul sursei S și planul fantelor S_1 și S_2 . În cazul unei surse S filiforme și de lărgime "a", factorul de coerență la cele două puncte S_1 și S_2 , este dat de relația:

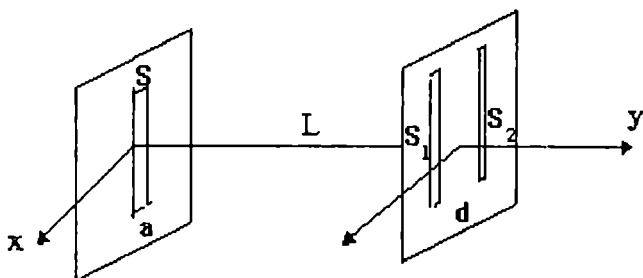


Fig. 1.18.a

$$\gamma_{12} = \frac{\sin\left(\frac{\pi ad}{\lambda_0 L}\right)}{\frac{\pi ad}{\lambda_0 L}} = \frac{\sin u}{u} \quad (1.18.1)$$

Dacă d și L sunt date, atunci variația factorului de coerență depinde doar de lărgimea "a" a sursei S.

Valorile nule ale lui γ_{12} se obțin pentru:

$$\sin u = 0 \quad \text{sau} \quad \frac{\pi ad}{\lambda_0 L} = n\pi \quad (1.18.2)$$

adică pentru valorile lui "a" date de relația:

$$a = n \frac{\lambda_0 L}{d} \quad (1.18.3)$$

În fig..18.b. este reprezentat γ_{12} în funcție de a . Dacă $a \ll \lambda_0 L/d$, perturbațiile ce provin de la S_1 și S_2 au o coerență foarte bună și în figura de interferență, produsă cu dispozitivul Young, se obține o vizibilitate bună a franjelor.

Dacă "a" crește se produce o deteriorare a vizibilității franjelor de interferență datorită diminuării coerenței perturbațiilor care provin de la S_1 și S_2 . Coerența devine nulă pentru $a = \lambda_0 L/d$, când franjele se șterg, ca apoi să reapară la creșterea lui "a", contrastul lor atingând un maxim pentru $a = 3\lambda_0 L/2d$ și dispar din nou pentru $a = 2\lambda_0 L/d$ și reapar dacă $a = 5\lambda_0 L/2d$ etc.

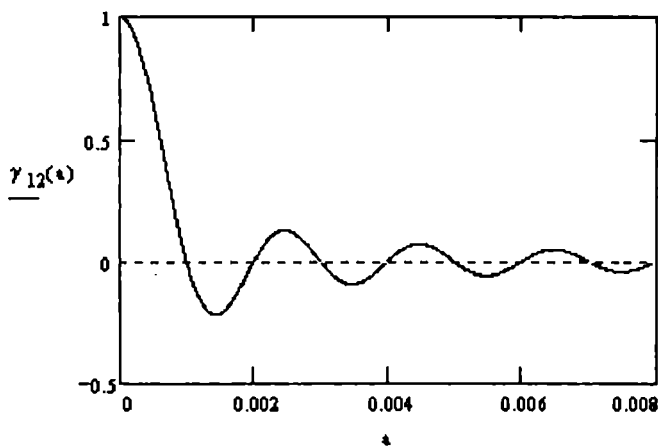


Fig. 1.18.b

În consecință coerența undelor, ce se propagă de la sursele secundare S_1 și S_2 , este realizată dacă lărgimea fantei primare este:

$$a \ll \frac{\lambda_0 L}{d}, \quad a = \frac{3 \lambda_0 L}{2 d}, \quad a = \frac{5 \lambda_0 L}{2 d}, \dots$$

adică în cazul problemei noastre pentru valorile $a \ll 1\text{mm}$, $a = 1,5\text{mm}$, $a = 2,5\text{mm}$.

1.19. Un fascicul paralel de lumină, care provine de la un laser cu He-Ne ($\lambda=623,8$ nm), cade sub incidență normală pe o fantă dreptunghiulară de lățime $b=0,2$ mm. Se cere:

a) să se găsească expresia intensității luminii în figura de difracție Fraunhofer;

b) să se determine lățimea maximului central al figurii de difracție, care se obține pe un ecran aflat la distanța $L=2$ m de fantă;

c) care este lățimea unghiulară $\Delta_{m,m+1}$ a maximelor cuprinse între două minime de difracție $(m+1)$ și m ;

d) să se determine valorile maxime ale intensității maximelor de difracție de ordinul $m=1,2..6$.

Rezolvare:

a) Să considerăm că lumina se propagă în direcția y , normală la planul xz al fantei de lățime b (fig.1.19.a). Să notăm cu α unghiul după care este difractată lumina de către fantă. În conformitate cu principiul Huygens-Fresnel, sursele secundare coerente (surse dreptunghiulare de lungime egală cu lungimea fantei și lățime dx), aflate în planul fantei, emit unde secundare.

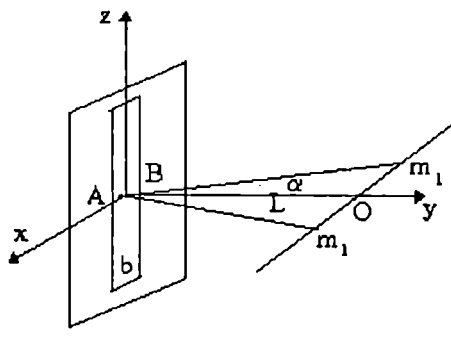


Fig. 1.19.a

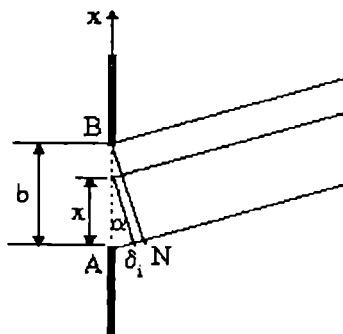


Fig. 1.19.b

Aceste unde secundare au amplitudinea $a=E_0 dx/b$ și aceeași fază inițială ($\varphi_0=0$). Unda secundară emisă de către o sursă secundară "i", aflată la distanța x de marginea A a fantei, are, în raport cu sursa din A ($\varphi_A=\omega t$), faza $\varphi_i=\omega t-\varphi_i$, unde $\varphi_i=k_i\delta_i=2\pi\delta_i/\lambda$, iar $\delta_i=xsin\alpha$ este diferența

de drum optic a undelor care provin de la A și "i" (fig.1.19.b). În acest fel unda emisă, sub un unghi α , de o sursă secundară "i" va fi descrisă de expresia:

$$dE(x, \alpha) = \frac{E_0}{b} \cos(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x \sin \alpha) dx \quad (1.19.1)$$

Expresia unei rezultante se obține însumând contribuțiile tuturor surselor secundare, adică efectuând integrala:

$$\begin{aligned} E(\alpha) &= \frac{E_0}{b} \int_0^b \cos(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x \sin \alpha) dx = \\ &= E_0 \frac{\sin(\frac{\pi b}{\lambda} \sin \alpha)}{\frac{\pi b}{\lambda} \sin \alpha} \cos(\omega t - \frac{\pi b}{\lambda} \sin \alpha) \end{aligned} \quad (1.19.2)$$

Amplitudinea rezultantă este:

$$E_{\alpha} = E_0 \frac{\sin(\frac{\pi b}{\lambda} \sin \alpha)}{\frac{\pi b}{\lambda} \sin \alpha} \quad (1.19.3)$$

iar valoarea intensității luminii în figura de difracție, care este dată de pătratul amplitudinii $I(\alpha) = (E_{\alpha})^2$, va fi:

$$I(\alpha) = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{\pi b}{\lambda} \sin \alpha\right)}{\left(\frac{\pi b}{\lambda} \sin \alpha\right)^2} \quad (1.19.4)$$

unde $I_0 = (E_0)^2$. În figurile 1.19.c. și 1.19.d sunt reprezentate grafic funcțiile $E(\alpha)$ și $I(\alpha)$, simulate pe calculator, utilizând datele de intrare $b=0,6 \cdot 10^{-5} \text{ m}$, $\lambda=0,6 \cdot 10^{-6} \text{ m}$, $E_0=2 \text{ V/m}$. Pentru a putea fi mai bine vizualizate a fost luată valoarea $b=0,6 \cdot 10^{-5} \text{ m}$. Pentru $b=0,2 \text{ mm}$, maximele de difracție devin foarte dese și din acest motiv greu de vizualizat. Se poate constata o variație a intensității luminii în figura de difracție în funcție de unghiul α . Există unghiuri pentru care intensitatea

luminii în figura de difracție este nulă și alte unghiuri pentru care $I(\alpha) \neq 0$, cu alte cuvinte fenomenul de difracție redistribuie, după fantă, intensitatea luminii incidente, în mod preferențial. Totuși cea mai mare parte a intensității se regăsește în maximul central.

b) Poziția minimelor în figura de difracție este dată de condiția $I(\alpha)=0$, ceea ce conduce la:

$$\sin \alpha = \pm m \frac{\lambda}{b} \quad m=0,1,2.. \quad (1.19.5)$$

Prin urmare unghiul α_1 la care apare primul minim ($m=1$) este :

$$\alpha_1 = a \sin\left(\frac{\lambda}{b}\right) = 0.18^\circ \quad (1.19.6)$$

iar lărgimea unghiulară a maximului central de difracție va fi $\Delta_0 = 2\alpha_1 = 0,36^\circ$.

Dacă imaginea de difracție este prinsă pe un ecran, aflat la distanța L de fantă, atunci separația dintre centrul maximului central și primul minim este, de o parte și alta a axului figurii, de $L \tan \alpha_1$. Prin urmare pe ecran maximul central are o lărgime $\Delta x = 2L \tan \alpha_1 = 1.3 \text{ cm}$.

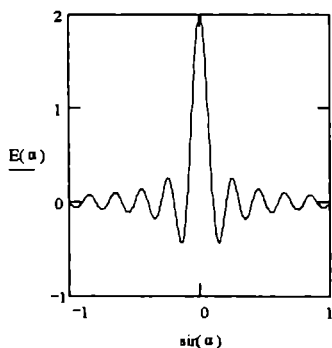


Fig. 1.19.c

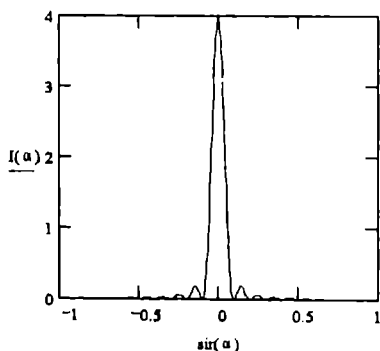


Fig. 1.19.d

c) Lărgimea unghiulară $\Delta_{m,m+1}$ pentru un maxim secundar este:

$$\Delta_{m,m+1} = \arcsin\left[(m+1)\frac{\lambda}{b}\right] - \arcsin\left[m\frac{\lambda}{b}\right] \quad (1.19.7)$$

Efectuând calculele rezultă că toate maximele de difracție au aceeași lărgime unghiulară și anume $\Delta = 0,003^\circ$. În fig.1.19.e sunt prezentate

dependențele lui α și Δ în funcție de m . Se constată pentru $\alpha(m)$ o dependență liniară iar $\Delta(m)=\text{const}=0,003^\circ$.

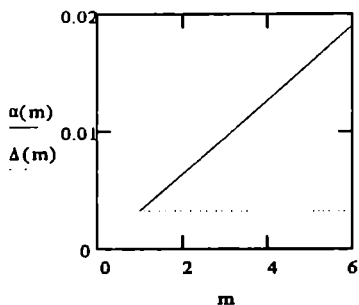


Fig. 1.19.e

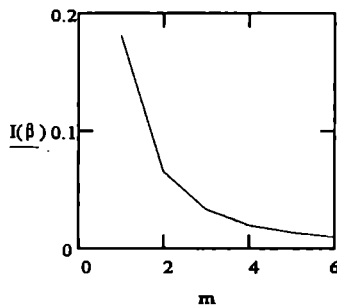


Fig. 1.19.f

d) Valorile maxime ale $I(\alpha)$ variază în funcție de α și sunt date de expresia:

$$I_m(\beta) = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{\pi b}{\lambda} \sin \beta(m)\right)}{\left(\frac{\pi b}{\lambda} \sin \beta(m)\right)^2} \quad (1.19.8)$$

unde am notat cu $\beta(m) = [\alpha(m+1)+\alpha(m)]/2$, unghiul de difracție care corespunde valorilor maxime ale $I(\alpha)$:

$$\beta(m) = \arcsin\left(\frac{\lambda (2m+1)}{b}\right) \quad (1.19.9)$$

În fig.1.19.f este reprezentată $I_m(\beta)$ în funcție de m . Se constată scăderea valorilor maximelor de intensitate corespunzătoare diferitelor maxime de difracție. Raportul $I(\beta)/I_0$ este de 1, 0.045, 0.016, 0.008, 0.005, 0.003, 0.002, pentru $m=0$ (maxim central),1,2,...6.

1.20. Un fascicul paralel de radiație monocromatică cu lungimea de undă $\lambda=0.6\mu\text{m}$ cade normal pe o rețea de difracție care are un număr de $N=10^3$ trăsături transparente pe o distanță $L=10\text{mm}$, fiecare trăsătură având lățimea $b=0,002\text{mm}$. Să se determine:

a) constanta rețelei;

b) lățimea maximului central de difracție și lățimea unui maxim principal de interferență. Câte maxime principale de interferență se formează în maximul central de difracție;

c) să se reprezinte grafic funcția $I(\alpha)$, de distribuție a intensității luminii în figura de difracție, în funcție de unghiul α utilizând valorile $\lambda=0,6\mu\text{m}$, $a=0,01\text{mm}$, $b=0,002\text{mm}$ și $N=4$.

Rezolvare:

a) constanta rețelei “a” este :

$$a = \frac{L}{N} = \frac{10\text{mm}}{10^3} = 10^{-2} \text{ mm}$$

Prin urmare rețeaua are pe o distanță “a” o parte transparentă $b=0,002\text{mm}$ și o parte opacă $p = (a-b) = 0,008\text{mm}$.

b) Distribuția intensității luminii în figura de difracție este dată de:

$$I(\alpha) = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{\pi b}{\lambda} \sin \alpha\right) \sin^2\left(\frac{\pi N a}{\lambda} \sin \alpha\right)}{\left(\frac{\pi b}{\lambda} \sin \alpha\right)^2 \sin^2\left(\frac{\pi a}{\lambda} \sin \alpha\right)} \quad (1.20.1)$$

Expresia (1.20) conține doi factori și anume $I_{\text{dif}}(\alpha)=I_0\{\sin^2[(\pi b \sin \alpha)/\lambda]\}/[(\pi b \sin \alpha)/\lambda]^2$ datorat difracției pe o fantă și $I_{\text{interf}}(\alpha)=\sin^2[(\pi N a \sin \alpha)/\lambda]/[\sin^2(\pi a \sin \alpha)/\lambda]$ datorat interferenței multiple. Minimele de difracție se obțin din condiția $I_{\text{dif}}(\alpha)=0$:

$$\sin \alpha = m \frac{\lambda}{b} \quad m = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.20.2)$$

Maximul central de difracție este cuprins între minimele de difracție pentru care $m = \pm 1$, adică lărgimea unghiulară a maximului central de difracție va fi $\Delta_{\text{dif}} = 2\lambda/b = 0,6 \text{ rad}$.

Maximele principale de interferență din figura de difracție se obțin punând condiția ca numitorul funcției $I_{\text{interf}}(\alpha)$ să se anuleze, adică:

$$\sin \alpha = k \frac{\lambda}{a} \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.20.3)$$

iar minimele nule de interferență cu condiția $I_{\text{interf}}(\alpha)=0$:

$$\sin \alpha = \frac{n \lambda}{N a} \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.20.4)$$

Între două minime nule există un maxim secundar de lărgime $\Delta_{\text{sec}} = \lambda/Na$. Între două maxime principale consecutive există $(N-1)$ minime nule și

(N-2) maxime secundare. Un maxim principal de interferență, care se obține atunci când $k = n/N$ devine un număr întreg, are lărgimea unghiulară $\Delta_{pr} = 2\lambda/Na$. În cazul problemei noastre $\Delta_{pr} = 1,2 \cdot 10^{-4}$ rad.

În maximul principal de difracție se formează un număr $(2k-1)$ de maxime principale de interferență. Valoarea lui k se obține punând condiția ca maximul de interferență de ordin k să coincidă cu primul minim de difracție :

$$\sin \alpha = \frac{\lambda}{b} = k \frac{\lambda}{a} \quad \text{adică} \quad k = \frac{a}{b}$$

cecece în cazul problemei noastre revine la $k = 5$ și prin urmare se vor forma în total $2k-1=9$ maxime principale.

c) Graficul funcției $I(\alpha)$ dată de (1.20.1) este prezentat în fig.1.20. Așa cum s-a văzut la punctul b al problemei, între două maxime principale consecutive există $(N-1)$ minime nule și $(N-2)$ maxime secundare, de lărgimi unghiulare $\Delta_{sec} = \lambda/Na$. Aceasta înseamnă că pentru valori mari ale lui N numărul de maxime secundare crește foarte mult și Δ_{sec} se micșorează, adică nu mai pot fi văzute distinct în grafic. De aceea pentru reprezentarea grafică din fig.1.20 s-a utilizat $N=4$. În acest caz numărul de maxime secundare este $N-2=2$, așa cum se poate constata și din grafic, iar numărul de maxime principale este $2k-1 = 9$, unde $k=5$. Curba punctată reprezintă contribuția fenomenului de difracție pe o fantă care determină modularea intensității în figura de difracție..

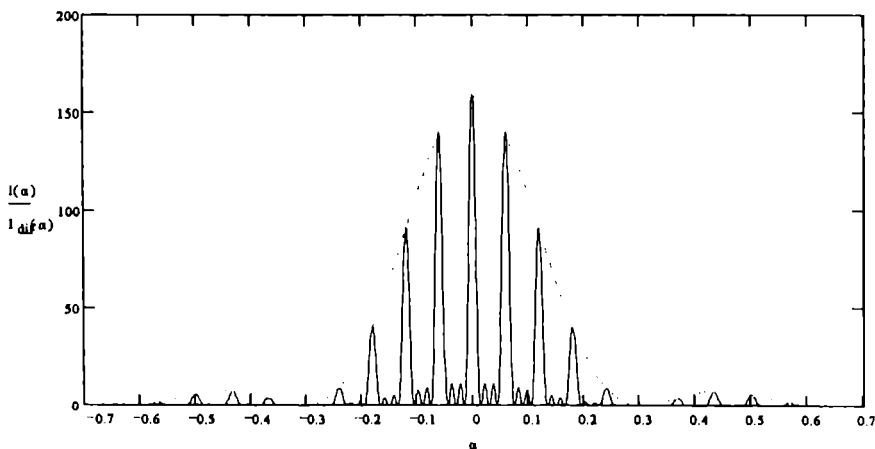


Fig. 1.20.

1.21. Un dispozitiv Young are distanța între fante $a = 0,8\text{mm}$. Dacă se lucrează cu lumină având $\lambda=0,65\mu\text{m}$, figura de interferență are 7 maxime (franje). Se cere:

a) Să se determine lărgimea b a unei fante;

b) Să se reprezinte grafic funcția $I(\alpha)$ de distribuție a intensității luminii în figura de interferență.

Rezolvare:

Figura de interferență care se obține cu ajutorul unui dispozitiv Young este rezultatul a două efecte: fenomenul de interferență, determinat de interferența fasciculelor monocromatice care provin de la cele două fante și fenomenul de difracție produs de difracția pe o fantă. Fenomenul de difracție face ca intensitatea luminii în figura de interferență să fie modulată, adică să scadă de la centrul figurii spre marginea până la anularea ei. În fapt, franjele de interferență care se observă experimental reprezintă maximele principale de interferență cuprinse în maximul principal de difracție (problemă 1.20). În cazul dispozitivului Young, care poate fi tratat ca o rețea cu $N=2$ fante, distribuția intensității luminii este dată de o relație asemănătoare cu (1.20.1), unde $N=2$:

$$I(\alpha) = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{\pi b}{\lambda} \sin \alpha\right) \sin^2\left(\frac{2\pi a}{\lambda} \sin \alpha\right)}{\left(\frac{\pi b}{\lambda} \sin \alpha\right)^2 \sin^2\left(\frac{\pi a}{\lambda} \sin \alpha\right)} \quad (1.21.1)$$

Expresia (1.21.1) conține factorii $I_{\text{difr}}(\alpha)=I_0\{\sin^2[(\pi b/\lambda)\sin\alpha]\}/\{[(\pi b/\lambda)\sin\alpha]^2\}$ datorat difracției pe o fantă și $I_{\text{interf}}(\alpha)=\{\sin^2[(2\pi a/\lambda)\sin\alpha]\}/\{\sin^2[(\pi a/\lambda)\sin\alpha]\}$ datorat interferenței. Maximele de interferență de la cele două fante se obțin cu condiția:

$$\sin \alpha = n \frac{\lambda}{a} \quad (1.21.2)$$

iar minimele de difracție, ca și în cazul difracției pe o fantă, cu condiția:

$$\sin \alpha = m \frac{\lambda}{b} \quad (1.21.3)$$

Numărul de franje de interferență este $2k-1$ unde $k = a/b$ (vezi problema 1.20). Prin urmare $2k-1=2a/b-1=7$, de unde rezultă $b=0,2\text{mm}$.

b) În fig.1.21 este reprezentată funcția $I(\alpha)$, dată de (1.21.1). S-au utilizat ca date de intrare $N=2$, $a=0,8\text{mm}$, $b=0,2\text{mm}$, $\lambda=0,65\mu\text{m}$. Se constată existența în maximul central de difracție a 7 maxime de interferență. Celelalte maxime de interferență, care apar în celelalte maxime de difracție, sunt de intensitate foarte mică și din punct de vedere experimental reprezintă doar o lumină parazită.

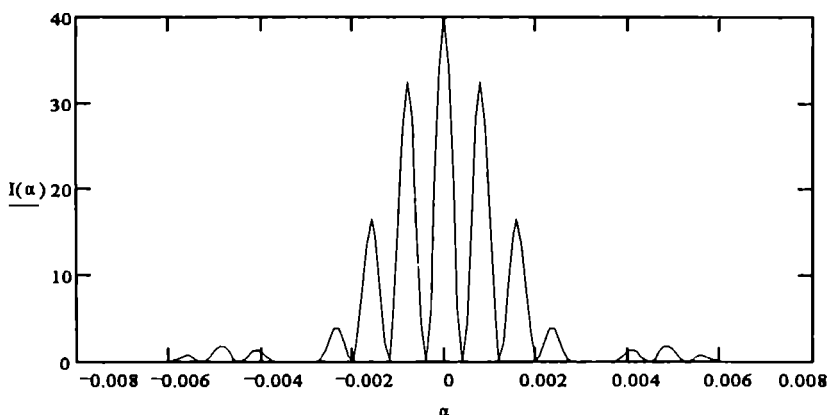


Fig.1.21.

PROBLEME PROPUSE

1.22. Să se găsească soluția ecuației de propagare pentru câmpul electric al unei unde electromagnetice care se propagă în direcția Ox , utilizând metoda separării variabilelor.

$$R: \mathbf{E}(x, t) = \mathbf{E}_0 e^{\pm i(\omega t \pm kx)}$$

1.23. Să se determine raportul intensităților câmpurilor \mathbf{E} și \mathbf{H} în cazul propagării unei unde electromagnetice într-un mediu cu constantele $\epsilon_r=10$ și $\mu_r=1$.

$$R: 1,42 \cdot 10^4 \text{ V/A.}$$

1.24. O undă electromagnetică plană se propagă în direcția Oy și este polarizată după direcția Oz , în raport cu un sistem de axe (xyz) .

a) Să se scrie expresia câmpului magnetic al undei;

b) Care este valoarea instantanee a câmpului electric și a câmpului magnetic al undei electromagnetice în punctele de coordonate $y_1=10.2$ m și $y_2=10.5$ m de sursă, la momentul de timp $t = 0.001$ dacă: $E_0=20$ V/m, iar frecvența undei este de $1,5 \cdot 10^7$ Hz.

c) Care este valoarea medie a vectorului lui Poynting?

R: b) $E_1 = -19,961$ V/m, $H_1 = -0,053$ A/m; $E_2 = -19,754$ V/m, $H_2 = -0,052$ A/m; c) $\langle S \rangle = 0.531$ W/m².

1.25. Câmpul electric al unei unde electromagnetice este $E(y,t)=E_0 \cos(\omega t - ky)$ și oscilează după Oz. Să cere:

a) expresia câmpului magnetic al undei;

b) vectorul lui Poynting;

c) să se calculeze $\langle S \rangle$.

R: b) $S = (\epsilon_0/\mu_0)^{1/2} E_0^2 \cos(\omega t - ky) e_y$, c) $\langle S \rangle = (\epsilon_0/\mu_0)^{1/2} (E_0^2)/2$.

1.26. O undă electromagnetice se propagă după o direcție k , aflată în planul yz. Câmpul electric al undei oscilează după direcția Ox. Se cere:

a) expresia câmpului electric E al undei;

b) să se găsească expresia câmpului magnetic H al undei;

c) să se găsească expresia vectorului lui Poynting și valoarea medie a densității fluxului de energie transportată de undă;

d) să se deseneze vectorii E , H , S și k în sistemul de axe xyz;

1.27. Câmpul electric al unei unde electromagnetice oscilează în planul yz iar direcția de propagare k a undei este Ox. Se cere:

a) expresia câmpului electric al undei;

b) să se calculeze rot E ;

c) să se găsească expresia câmpului magnetic H al undei;

d) să se găsească expresia vectorului lui Poynting S ;

e) să se deseneze vectorii E , H , S și k în sistemul de axe xyz;

1.28. Câmpul magnetic al unei unde electromagnetice care se propagă în vid este:

$$H(z, t) = H_{0x} \cos(\omega t - kz) e_x + H_{0y} \cos(\omega t - kz) e_y$$

Se cere:

a) să se găsească expresia câmpului E electric al undei;

b) să se calculeze $\text{div}\mathbf{E}$;

c) să se găsească expresia vectorului lui Poynting și să se prezinte dispoziția spațială a vectorilor \mathbf{E} , \mathbf{H} , \mathbf{S} și \mathbf{k} ;

1.29. Să se determine valorile maxime ale câmpului electric și magnetic în cazul unui fascicul laser cu intensitatea de 0.5 mW/m^2 , care se propagă:

a) în vid ($\epsilon_0=8.85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$, $\mu_0=4 \pi 10^{-7} \text{ H/m}$);

b) într-un mediu cu constantele $\epsilon_r = 10$, $\mu_r = 1$.

R: a) $E = 19,41 \text{ V/m}$, $H = 0,052 \text{ A/m}$

b) $E = 10,91 \text{ V/m}$, $H = 0,092 \text{ A/m}$.

1.30. Un câmp electromagnetic care se propagă în spațiul liber are câmpul electric de valoare $E=10\text{V/m}$. Să se determine:

a) valoarea câmpului magnetic al unde;

b) valoarea medie a densității fluxului de energie transportată de undă.

R: a) $H=0,027 \text{ A/m}$; b) $\langle S \rangle = 0,133 \text{ W/m}^2$.

1.31. O sursă spectrală emite o radiație cu lungimea de undă de 6000 \AA , cu lărgimea spectrală $\Delta\lambda = 0,02 \text{ \AA}$. Să se determine:

a) gradul de monocromaticitate $\Delta\lambda/\lambda$;

b) durata Δt (trenurilor de undă, corespunzătoare acestei radiații);

c) și lungimea Δl a trenurilor de undă.

R: $\Delta\lambda/\lambda=3,33 \cdot 10^{-6}$ $\Delta t = 6 \cdot 10^{-10} \text{ s}$, $\Delta l = 18 \text{ cm}$.

1.32. O sursă spectrală emite o radiație de frecvență $\nu=6 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$ cu un grad de monocromaticitate $\Delta\nu/\nu=2 \cdot 10^{-6}$. Să se determine:

a) lărgimea spectrală $\Delta\nu$;

b) durata trenurilor de undă Δt , corespunzătoare acestei radiații.

R: $\Delta\nu=1,2 \cdot 10^9 \text{ Hz}$; b) $\Delta t=8,33 \cdot 10^{-10} \text{ s}$.

1.33. O sursă spectrală emite o radiație de frecvență $\nu=7,5 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$ cu un grad de monocromaticitate $\Delta\nu/\nu=1,5 \cdot 10^{-6}$. Să se determine:

a) lungimea de undă λ a radiației ;

a) lărgimea spectrală $\Delta\nu$;

b) durata trenurilor de undă Δt corespunzătoare acestei radiații.

R: $\lambda=400\text{nm}$; b) $\Delta\nu=1,125 \cdot 10^9 \text{ Hz}$; c) $\Delta t=8,889 \cdot 10^{-10} \text{ s}$.

1.34. Să se găsească intensitatea unei rezultate din suprapunerea a două unde electromagnetice având aceeași lungime de undă, $\lambda=600\text{nm}$ și care au între ele o diferență de drum optic, $\Delta r = 1\text{mm}$, ținând cont de direcția lor de polarizare:

- după direcții paralele;
- după direcții ortogonale;
- formează un unghi $\alpha=\pi/3$ între ele.

Se dă: $I_1=10\text{W/m}^2$, $I_2=6\text{W/m}^2$.

R: a) $I=8,254\text{ W/m}^2$, b) $I=16\text{W/m}^2$, c) $I=12,127\text{W/m}^2$.

1.35. Un fascicul paralel de lumină cu lungimea de undă $\lambda=600\text{ nm}$ cade, sub incidență normală, pe o fantă dreptunghiulară de lățime $b=0,02\text{ mm}$. Se cere:

a) să se determine lățimea Δx_0 a maximumului central al figurii de difracție, care se obține pe un ecran aflat la distanța $L=2\text{m}$ de fantă;

b) care este lățimea unghiulară Δ_{12} a maximumului de difracție cuprins între minimele $m=1$ și $m=2$ și care este lățimea lui, Δx , obținută pe ecranul aflat la distanța $L=2\text{m}$.

R: a) 12 cm ; b) $\Delta_{12} = 0,03\text{ rad}$, $\Delta x = 6,013\text{cm}$.

1.36. Să se determine intensitatea $I(\alpha)$ a unei difractate de către o fantă îngustă de lățime b dacă pe fantă cade un fascicul de lumină monocromatică de lungime de undă λ , a cărui direcție formează unghiul α_0 cu normala la fantă.

R: $I(\alpha) = I_0 \sin^2 u / u^2$, unde $u = \pi b (\sin \alpha - \sin \alpha_0) / \lambda$.

1.37. Asupra unei diafragme circulare de diametru $d=0,9\text{mm}$ cade normal o radiație cu lungimea de undă $\lambda=600\text{ nm}$, de la o sursă aflată la distanța $R = 0,5\text{m}$. La distanța $r=1,7\text{m}$ se află un ecran pe care se prinde figura de difracție Fresnel. Să se determine câte zone Fresnel sunt cuprinse în deschiderea diafragmei.

R: $n=5$

1.38. Un fascicul paralel de radiație monocromatică cu lungimea de undă $\lambda = 0,6\mu\text{m}$ cade normal pe o rețea de difracție care are un număr

de $N=10^3$ trăsături transparente pe o distanță $l=5\text{mm}$, fiecare trăsătură având lățimea $b=0,001\text{mm}$. Să se determine:

a) lățimea maximului central de difracție;

b) lățimea unui maxim principal de interferență;

c) câte maxime principale de interferență se formează în maximul central de difracție;

R: a) 1,2 rad; b) $1,4 \cdot 10^{-4}$ rad; c) 9.

1.39. Un fascicul paralel de lumină, care conține lungimile de undă $\lambda_1=0,6\mu\text{m}$, $\lambda_2=0,55\mu\text{m}$, cade normal pe o rețea de difracție care are constanta rețelei $a=0,001\text{mm}$. Să se determine:

a) poziția maximelor de ordinul $k=1$ și $k=2$ pentru cele două lungimi de undă;

b) unde se văd mai bine separate liniile corespunzătoare lungimilor de undă λ_1 și λ_2 .

R: a) $\sin\alpha_1=0,6$ rad, $\sin\alpha_2=0,55$ rad pentru $k=1$ și $\sin\alpha_1=1,2$ rad, $\sin\alpha_2=1,1$ rad pentru $k=2$; b) $\Delta_1 = 0,05$ și $\Delta_2 = 0,1$;

1.40. Un dispozitiv Young are distanța dintre fante $a=0,9\text{mm}$. Care este lățimea b a unei fante dacă figura de interferență conține 11 franje.

R: $b=0,15\text{mm}$

2. STAREA DE POLARIZARE A LUMINII

PROBLEME REZOLVATE

2.1. O placă de sticlă cu indicele de refracție $n_s=1,5$ se află în aer.

a) care este unghiul de incidență Brewster i_B la suprafața de separare aer-sticlă pentru lumina care se propagă din aer în sticlă;

b) care este unghiul de incidență Brewster i_B , precum și unghiul limită i_L dacă lumina se propagă din sticlă în aer.

Rezolvare:

a) Deoarece lumina incidentă vine din aer ($n_a = 1$) la suprafața de separare dintre aer și sticlă, unghiul Brewster se determină cu relația:

$$\operatorname{tg} i_B = \frac{n_s}{n_a} = 1,5$$

de unde: $i_B = \operatorname{arctg}(1,5) = 56^\circ 20'$.

Lumina nepolarizată, incidentă sub unghiul i_B după reflexie devine total liniar polarizată (fig.2.1a).

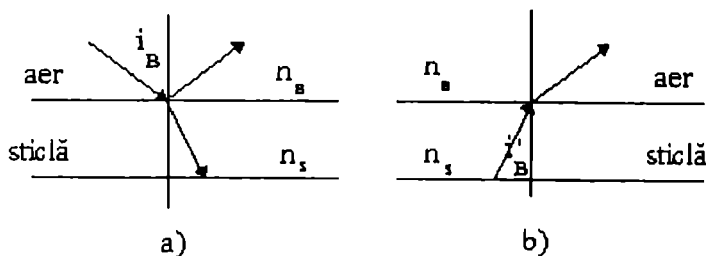


Fig. 2.1

b) Dacă lumina se propagă din sticlă în aer (fig. 2.1.b), atunci:

$$\operatorname{tg} i'_B = \frac{n_a}{n_s} = \frac{1}{1,5}$$

de unde

$$i'_B = \operatorname{arctg} \frac{1}{1,5} = 33^\circ 40'$$

Unghiul limită i_L se obține din legea refracției :

$$n_s \sin i_1 = n_a \sin i_2$$

cu condiția ca $i_1 = i_L$, $i_2 = 90^\circ$. Prin urmare:

$$\sin i_L = \frac{n_a}{n_s} = \frac{1}{1,5}$$

de unde $i_L = 41^\circ 20'$.

2.2. Care este intensitatea luminii transmise de un polarizor dacă pe el cade lumină liniar polarizată, în condițiile în care:

- polarizorul nu absoarbe lumină (polarizor ideal);
- polarizorul absoarbe o fracțiune " t_p " din lumina incidentă.

Rezolvare:

a) Considerăm că lumina se propagă după direcția Ox (fig 2.2) perpendicular pe planul yOz al polarizorului, iar polarizorul transmite numai radiatiile polarizate după direcția Oz. Să notăm cu θ unghiul dintre direcția vectorului electric E al undeii incidente și direcția Oz.

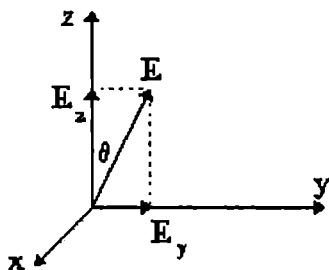


Fig. 2.2

Dacă notăm cu E_0 amplitudinea undeii incidente, atunci polarizorul va transmite doar componenta $E_z = E_0 \cos \theta$.

Intensitatea luminii transmise de polarizor este dată de pătratul amplitudinii unde:

$$I_t(\theta) = I_i \cos^2 \theta$$

unde $I_i = E_o^2$.

Dacă $\theta = 0$, atunci $I_t = I_i(0) = I_o$ care reprezintă intensitatea luminii liniar polarizate, incidentă pe polarizor.

b) Dacă polarizorul nu este ideal atunci pentru $\theta = 0$, $I_t(0) \neq I_i(0)$, adică este transmisă doar o fracțiune t_p din $I_i(0)$ și anume:

$$t_p = \frac{I_t(0)}{I_i(0)}$$

unde t_p - coeficientul de transmisie al polarizorului pentru componentele paralele cu Oz. În acest caz:

$$I_t(\theta) = t_p I_i \cos^2 \theta .$$

2.3. Un fascicul de lumină nepolarizată de intensitate $I_i = 0.4 \text{ W/m}^2$ cade pe un polarizor (P_1) a cărui direcție de polarizare este Oy. Un observator vede lumina transmisă printr-un al doilea polarizor (P_2) a cărui direcție de polarizare este orientată la 35° (în sens trigonometric) față de Oy. Fiecare polarizor are un coeficient de transmisie $t_p = 0,75$. Se cere:

a) care este intensitatea fasciculului de lumină transmis de către ansamblul celor doi polarizori și care este starea ei de polarizare;

b) care este intensitatea luminii după polarizorul (P_2) dacă în fasciculul incident lumina este liniar polarizată după Oy;

Rezolvare:

a) Să considerăm că fasciculul incident vine din direcția Ox (fig.2.3) și cade pe polarizorul (P_1) care are direcția de polarizare Oy. Câmpul electric în unda incidentă este $\mathbf{E} = E_o \cos(\omega t - kx)$, fiecare vector E_o putîndu-se descompune în

$$\mathbf{E}_o = \mathbf{E}_{oy} + \mathbf{E}_{oz}$$

Primul polarizor (P_1) va transmite doar componentele de amplitudine $E_{oy} = E_1$, polarizate după Oy.

Dacă (P_1) ar fi ideal, atunci ar transmite:

$$I_1 = E_1^2 = \frac{I_i}{2}$$

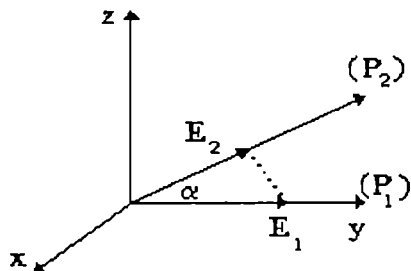


Fig. 2.3

Deoarece polarizorul absoarbe o parte din aceasta, înseamnă că de fapt :

$$I_1 = \frac{1}{2} t_p I_i = 0,5 \cdot 0,75 \cdot 0,4 = 0,15 \text{ W / m}^2$$

Fasciculul de intensitate I_1 și linear polarizat după Oy cade pe al doilea polarizor (P_2). Acesta va transmite numai componenta:

$$E_2 = E_1 \cos(\alpha) = E_1 \cos 35^\circ$$

iar intensitatea I_2 a luminii transmise va fi:

$$I_2 = t_p I_1 \cos^2 \alpha = 0,75 \cdot 0,15 \cdot \cos^2 35^\circ = 0,075 \text{ W / m}^2$$

b) În acest caz :

$$I_1 = t_p I_i = 0,75 \cdot 0,4 = 0,3 \text{ W / m}^2$$

$$I_2 = t_p I_1 \cos^2 \alpha = 0,75 \cdot 0,3 \cdot \cos^2 35^\circ = 0,151 \text{ W / m}^2$$

2.4. Un fascicul de lumină având intensitatea totală $I_i = 0,9 \text{ W/m}^2$ conține lumină linear polarizată în proporție de 25% și lumină nepolarizată 75%. Fasciculul cade pe un polarizor (P) ideal ($t_p = 1$), care are direcția de polarizare orientată la 45° în raport cu direcția de oscilație a componentelor polarizate ale fasciculului. Care este intensitatea luminii transmise de polarizor?

Rezolvare:

Fasciculul incident are intensitatea:

$$I_i = I_{ip} + I_{in}$$

unde $I_{ip} = 0,25 I_i = 0,225 \text{ W/m}^2$ este intensitatea componentei polarizate și $I_{in} = 0,75 I_i = 0,675 \text{ W/m}^2$ este intensitatea componentelor nepolarizate.

Dacă $\alpha = 45^\circ$ este unghiul făcut de direcția de oscilație a vectorului electric în unda incidentă liniar polarizată și direcția de polarizare a polarizorului, atunci intensitatea componentei polarizate, transmise de către polarizor, va fi:

$$I_{tp} = I_{ip} \cos^2 \alpha = 0,112 \text{ W / m}^2$$

În cazul luminii nepolarizate, polarizorul va transmite:

$$I_{tn} = \frac{I_{in}}{2} = 0,3375 \text{ W / m}^2$$

În consecință, intensitatea luminii transmise de către polarizor este:

$$I_t = I_{tp} + I_{tn} = 0,45 \text{ W / m}^2$$

și conține lumină liniar polarizată în proporție de

$$\frac{I_{tp}}{I_t} = 0,25 \quad (25\%)$$

și lumină nepolarizată

$$\frac{I_{tn}}{I_t} = 0,75 \quad (75\%)$$

În concluzie polarizorul (P), orientat așa cum se precizează în problemă la $\alpha=45^\circ$, nu modifică proporția componentelor polarizate respectiv nepolarizate din lumina transmisă, în raport cu situația inițială.

2.5. Două unde electromagnetice liniar polarizate, coerente și care oscilează în fază, se propagă în aer în aceeași direcție Ox. Prima undă este polarizată după Oy iar cea de-a doua undă după direcția Oz.

Să se determine:

- intensitatea unei rezultante;
- starea de polarizare a unei rezultante;
- ce se întâmplă dacă diferența de fază a celor două unde este de 180° ?

Rezolvare:

a) Câmpurile electrice ale celor două unde ortogonale sunt, la același moment de timp, descrise de:

$$\mathbf{E}_1 = E_{o1} \cos(\omega t - kx) \mathbf{e}_y$$

$$\mathbf{E}_2 = E_{o2} \cos(\omega t - kx) \mathbf{e}_z$$

unde \mathbf{e}_y , \mathbf{e}_z sunt versorii direcțiilor după care sunt polarizate cele două unde (fig.2.5).

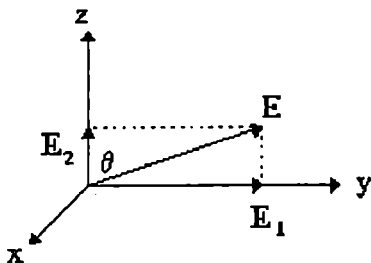


Fig. 2.5

În urma superpoziției celor două unde, câmpul rezultat este:

$$\mathbf{E} = (E_{01}\mathbf{e}_y + E_{02}\mathbf{e}_z) \cos(\omega t - kx) = E_0 \cos(\omega t - kx)$$

și are amplitudinea: $E_0 = (E_{01}^2 + E_{02}^2)^{1/2}$

Intensitatea unei rezultante este $I_0 = I_{01} + I_{02}$, unde $I_0 = E_0^2$, $I_{01} = E_{01}^2$ și $I_{02} = E_{02}^2$.

b) Unda rezultantă este linear polarizată. Câmpul electric \mathbf{E} al unei rezultante oscilează după o direcție care face unghiul θ în raport cu direcția Oz , astfel ca:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{E_1}{E_2} = \frac{E_{01}}{E_{02}}$$

c) Dacă diferența de fază a celor două componente este de 180° atunci:

$$\mathbf{E}_1 = E_{01}\cos(\omega t - kx)\mathbf{e}_y$$

$$\mathbf{E}_2' = E_{02}\cos(\omega t - kx + \pi)\mathbf{e}_z = -E_{02}\cos(\omega t - kx)\mathbf{e}_z$$

astfel că:

$$\mathbf{E}' = (E_{01}\mathbf{e}_y - E_{02}\mathbf{e}_z)\cos(\omega t - kx)$$

iar amplitudinea este $E_0' = (E_{01}^2 + E_{02}^2)^{1/2}$

Câmpul electric rezultat va oscila, în acest caz, după o direcție caracterizată de:

$$\operatorname{tg}\theta' = -\left(\frac{E_{01}}{E_{02}}\right)$$

Câmpul rezultat \mathbf{E}' este simetric cu \mathbf{E} în raport cu axa Oz .

În concluzie, se poate spune că o undă liniar polarizată poate fi reprezentată de suma vectorială a două unde liniar polarizate, coerente, care oscilează în fază (sau antifază) și care sunt polarizate după două direcții ortogonale.

2.6. Două unde liniar polarizate după două direcții ortogonale, notate cu Ox_1 și Ox_2 au aceeași lungime de undă. Undele se propagă în direcția Ox_3 au amplitudinile E_{01} și E_{02} și o diferență de fază φ . Se cere:

a) să se analizeze starea de polarizare a unei rezultante dacă φ are o valoare oarecare;

b) să se analizeze cazul $\varphi = \pi/2$ și $\varphi = \pi$;

c) să se analizeze cazul: $E_{01} = E_{02}$, pentru $\varphi = \pi/2$.

Rezolvare:

a) Câmpurile electrice ale celor două unde sunt date de expresiile

$$E_1 = E_{01} \cos(\omega t - kx_3) \quad (2.6.1)$$

$$\begin{aligned} E_2 &= E_{02} \cos(\omega t - kx_3 \pm \varphi) = \\ &= E_{02} [\cos(\omega t - kx_3) \cos \varphi \mp \sin(\omega t - kx_3) \sin \varphi] \end{aligned} \quad (2.6.2)$$

Din prima relație (2.6.1) avem $\cos(\omega t - kx_3) = E_1/E_{01}$ și înlocuind în (2.6.2) vom obține că:

$$\frac{E_2}{E_{02}} = \frac{E_1}{E_{01}} \cos \varphi \mp \sqrt{1 - \frac{E_1^2}{E_{01}^2}} \sin \varphi$$

sau:

$$\frac{E_2}{E_{02}} - \frac{E_1}{E_{01}} \cos \varphi = \mp \sqrt{1 - \frac{E_1^2}{E_{01}^2}} \sin \varphi \quad (2.6.3)$$

Ridicând la pătrat relația (2.6.3), se obține:

$$\frac{E_2^2}{E_{02}^2} + \frac{E_1^2}{E_{01}^2} \cos^2 \varphi - 2 \frac{E_1 E_2}{E_{01} E_{02}} \cos \varphi = \left(1 - \frac{E_1^2}{E_{01}^2}\right) \sin^2 \varphi$$

sau:

$$\frac{E_2^2}{E_{02}^2} + \frac{E_1^2}{E_{01}^2} - 2 \frac{E_1 E_2}{E_{01} E_{02}} \cos \varphi = \sin^2 \varphi \quad (2.6.4)$$

Expresia (2.6.4) descrie o elipsă (fig.2.6.a). Axele principale OX_1 și OX_2 ale elipsei sunt rotite cu un unghi α în raport cu direcțiile Ox_1 și Ox_2 ale câmpurilor E_1 și E_2 . Prin urmare vârful vectorului $E = E_1 + E_2$ rezultat din superpoziția celor două unde descrie o elipsă ca în fig.2.6.a. Din acest motiv se spune că unda este eliptic polarizată. Luând în considerare unghiul θ făcut de vectorul E cu axa Ox_1 și ținând cont de relațiile (2.6.1) - (2.6.2) avem:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{E_2}{E_1} = \left(\frac{E_{02}}{E_{01}} \right) [\cos \varphi \mp \operatorname{tg}(\omega t - kx_3) \sin \varphi] \quad (2.6.5)$$

Dacă $\varphi = \text{const.}$ și studiem evoluția vectorului E într-un punct din spațiu (x_3 -fixat) atunci se observă din relația (2.6.5) că unghiul θ variază în timp, în funcție de valoarea expresiei $\operatorname{tg}(\omega t - kx_3)$, adică vectorul E se rotește la dreapta (lumină eliptic polarizată dreapta σ^-) sau la stânga (lumină eliptic polarizată stânga σ^+) cu frecvența ω .

b) Dacă $\varphi = \pi/2$ atunci, ținând cont de relația (2.6.4), obținem că:

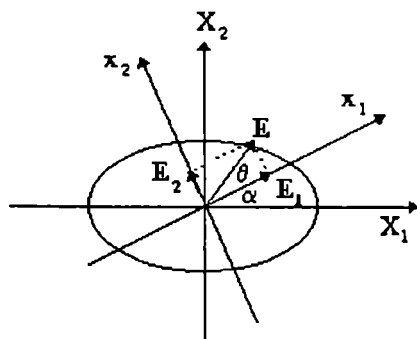


Fig. 2.6.a

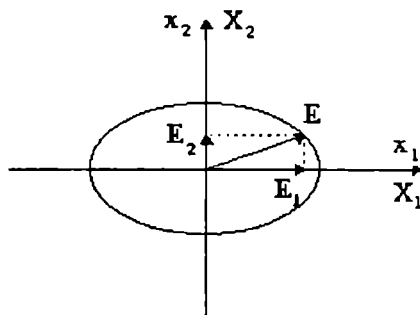


Fig. 2.6.b

$$\frac{E_2^2}{E_{02}^2} + \frac{E_1^2}{E_{01}^2} = 1 \quad (2.6.6)$$

care reprezintă expresia unei elipse care are axele principale OX_1 și OX_2 (fig 2.6.b.)

Dacă $\varphi = \pi$ obținem:

$$\frac{E_2^2}{E_{02}^2} + \frac{E_1^2}{E_{01}^2} + 2 \frac{E_1 E_2}{E_{01} E_{02}} = 0$$

sau:

$$E_2 = -\frac{E_{02}}{E_{01}} E_1 \quad (2.6.7)$$

ceea ce înseamnă că unda rezultantă este liniar polarizată, după o direcție pentru care: $\operatorname{tg} \theta = -(E_{02}/E_{01})$.

c) Dacă $E_{02} = E_{01} = E_0$ și $\varphi = \pi/2$, obținem:

$$\frac{E_2^2}{E_0^2} + \frac{E_1^2}{E_0^2} = 1 \quad (2.6.8)$$

care reprezintă expresia unui cerc de rază E_0 .

În acest caz vorbim de lumină circular polarizată, care rezultă din superpoziția a două unde ortogonale coerente, de amplitudini egale și care se propagă în aceeași direcție:

$$\begin{aligned} E_1 &= E_0 \cos(\omega t - kx_3) \\ E_2 &= E_0 \cos(\omega t - kx_3 \pm \pi/2) = \mp E_0 \sin(\omega t - kx_3) \end{aligned} \quad (2.6.9)$$

2.7. Să se arate că prin suprapunerea a două unde circular polarizate dreapta și stânga, având aceeași frecvență și amplitudine se obține o undă liniar polarizată.

Rezolvare:

În conformitate cu relația (2.6.9) de la problema 2.6, o undă circular polarizată-dreapta, care se propagă după o direcție Ox, va avea în planul yOz componentele:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_y^d &= E_0 \cos(\omega t - kx) \mathbf{e}_y \\ \mathbf{E}_z^d &= -E_0 \sin(\omega t - kx) \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (2.7.1)$$

sau:

$$\mathbf{E}^d = E_0 [\cos(\omega t - kx) \mathbf{e}_y - \sin(\omega t - kx) \mathbf{e}_z] \quad (2.7.2)$$

În cazul unei unde circular polarizate-stânga se obține, în mod similar:

$$\mathbf{E}^s = E_0[\cos(\omega t - kx)\mathbf{e}_y + \sin(\omega t - kx)\mathbf{e}_z] \quad (2.7.3)$$

Prin urmare, unda rezultantă va avea câmpul electric:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^d + \mathbf{E}^s = 2E_0 \cos(\omega t + kx)\mathbf{e}_y \quad (2.7.4)$$

care reprezintă câmpul electric al unei unde liniar polarizate după direcția Oy și de amplitudine $2E_0$ (fig.2.7).

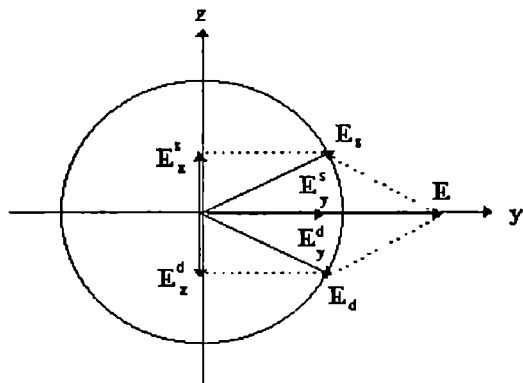


Fig. 2.7

2.8. Să se scrie expresia câmpului electric al unei unde electromagnetice plane de frecvență unghiulară ω ce se propagă în vid:

- în direcția Oy și este polarizată după Ox;
- în direcția Oy și este polarizată după Oz;
- în direcția Oy și este polarizată în planul (xOz);
- în direcția Ox și este polarizată după Oz.

Rezolvare:

- $\mathbf{E}(y,t) = E_0 \cos(\omega t - ky)\mathbf{e}_x$
- $\mathbf{E}(y,t) = E_0 \cos(\omega t - ky)\mathbf{e}_z$
- $\mathbf{E}(y,t) = (E_{0x}\mathbf{e}_x + E_{0z}\mathbf{e}_z) \cos(\omega t - ky)$
- $\mathbf{E}(x,t) = E_0 \cos(\omega t - kx)\mathbf{e}_z$

2.9. a) Care trebuie să fie grosimea minimă a unei plăcuțe de cuarț care are indicii de refracție ordinar $n_0=1,54424$ și extraordinar $n_e=1,55335$ la lungimea de undă $\lambda=589$ nm, pentru ca aceasta să transforme o undă liniar polarizată în undă circular polarizată?

b) Pentru ce grosime a plăcii starea de polarizare a undei având $\lambda=589$ nm rămâne nemodificată?

Rezolvare:

a) O placă confecționată dintr-un material birefringent transformă o undă liniar polarizată în două unde: o undă ordinară și o undă extraordinară, liniar polarizate în plane perpendiculare și în același timp introduce și o diferență de fază φ între acestea:

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} d(n_e - n_o)$$

Pentru ca unda liniar polarizată să se transforme într-o undă circular polarizată, este necesar ca defazajul să fie $\varphi = \pi/2$ și în acest caz $d=d_{\min}$:

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} d_{\min}(n_e - n_o) = \frac{\pi}{2}$$

adică:

$$d_{\min} = \frac{\lambda}{4(n_e - n_o)} = 0,0162 \text{ mm}$$

b) Pentru ca starea de polarizare a undei incidente pe placă să nu fie alterată este necesar ca: $\varphi = 2m\pi$ ($m=1,2..$).

Prin urmare, grosimea cea mai mică care îndeplinește această condiție (pentru $\lambda=589$ nm)) se obține din:

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} d(n_e - n_o) = 2\pi$$

adică

$$d = \frac{\lambda}{(n_e - n_o)} = 0,064 \text{ mm}$$

PROBLEME PROPUSE

2.10. Un fascicul de lumină nepolarizată, de intensitate $I_i = 0.4$ W/m^2 , se propagă pe direcția Oz și cade pe un polarizor (P_1) a cărui direcție de polarizare este Ox. Un observator vede lumina transmisă printr-un al doilea polarizor (P_2) a cărui direcție de polarizare este

orientată la 30° față de Ox (fig.3.1). Fiecare polarizor are un coeficient de transmisie $t_p = 0,75$. Se cere:

a) care este intensitatea I_2 a luminii transmise de către ansamblul celor doi polarizori și care este starea ei de polarizare;

b) care este intensitatea luminii după polarizorul (P_2) dacă lumina incidentă este liniar polarizată după Ox;

R: a) $I_2 = 0.084 \text{ W/m}^2$, b) $I_2 = 0.169 \text{ W/m}^2$

2.11. Un fascicul de lumină având intensitatea totală $I_t = 0,9 \text{ W/m}^2$ conține lumină liniar polarizată în proporție de 25% și lumină nepolarizată 75%. Fasciculul cade pe un polarizor ideal, care are direcția de polarizare orientată la 30° în raport cu direcția de oscilație a componentelor polarizate ale fasciculului.

a) Care este intensitatea totală I_t a luminii transmise de polarizor?

b) Care este proporția T_p de lumină polarizată respectiv nepolarizată T_n , transmisă de acest polarizor.

R: a) $I_t = 0.507 \text{ W/m}^2$, b) $T_p = 33 \%$, $T_n = 66 \%$.

2.12. Două unde electromagnetice liniar polarizate, coerente și care oscilează în fază, se propagă în aer în aceeași direcție, Oz. Prima undă este polarizată după Ox și are amplitudinea de 10 V/m, iar cea de-a doua undă după direcția Oy având amplitudinea de 15 V/m. Să se determine:

a) amplitudinea E_o a undei rezultante;

b) intensitatea I a undei rezultante;

R: a) $E_o = 18 \text{ V/m}$, b) $I = 325 \text{ W/m}^2$.

2.13. Două unde liniar polarizate după două direcții ortogonale Ox și Oy au aceeași frecvență ω . Câmpurile lor electrice au amplitudinile $E_{0x} = 10 \text{ V/m}$ și $E_{0y} = 5 \text{ V/m}$ și o diferență de fază $\varphi = \pi/6$. Se cere:

a) să se scrie expresia câmpurilor E_x și E_y ;

b) să se compună cele două câmpuri ortogonale;

c) să se analizeze cazul $\varphi = \pi/2$.

R: b) $E_x^2/100 + E_y^2/25 - (2E_x E_y/50)\cos(\pi/6) = \sin^2(\pi/6)$

c) $E_x^2/100 + E_y^2/25 - (2E_x E_y/50) = 1$

2.14. Care trebuie să fie grosimea minimă a unei plăcuțe de cuarț care are indicii de refracție ordinar $n_o=1,644$ și extraordinar $n_e=1,553$ la lungimea de undă $\lambda=589$ nm, pentru ca aceasta să transforme o undă liniar polarizată în undă circular polarizată?

$$R : d = 1.618 \mu\text{m}$$

2.15. Să se scrie expresia câmpului electric al unei unde electromagnetice plane de frecvență unghiulară ω ce se propagă în vid:

- a) în direcția Ox și este polarizată după Oy;
- b) în direcția Ox și este polarizată după Oz;
- c) în direcția Oz și este polarizată în planul (xOy);
- d) în direcția Oy și este polarizată după Oz.

R: vezi problema 2.8.

2.16. O undă electromagnetică de frecvență ω se propagă în direcția Oz și este circular polarizată-dreapta. Să se găsească expresia componentelor E_x și E_y ale câmpului electric al undeii.

R: vezi problemele 2.6, 2.7.

2.17. O undă electromagnetică de frecvență ω se propagă în direcția Oz și este circular polarizată-stânga. Să se găsească expresia componentelor E_x și E_y ale câmpului electric al undeii .

R: vezi problemele 2.6, 2.7.

2.18. Într-un mediu birefringent o undă se descompune într-o componentă ordinară de amplitudine a_o și o componentă extraordinară de amplitudine a_e . Să se afle care este starea de polarizare a undeii, la ieșirea din material, dacă: $\lambda=0,435$ nm, grosimea materialului este $d=2$ mm, iar birefrința materialului la $\lambda=0,435$ nm este $\Delta n=0.322$.

E: eliptic polarizată.

2.19. O placă de sticlă cu indicele de refracție $n_s=1,45$ se află în aer. Care este unghiul de incidență Brewster i_B la suprafața de separare aer-sticlă pentru lumina care se propagă din aer în sticlă.

$$R: 55,4^\circ$$

2.20. O placă de sticlă cu indicele de refracție $n_s=1,45$ se află în aer. Care este unghiul de incidență Brewster i_B , precum și unghiul limită i_L dacă lumina se propagă din sticlă în aer.

$$R: i_B = 34,6^\circ, i_L = 43,6^\circ.$$

3. OPTICA MEDIILOR IZOTROPE

PROBLEME REZOLVATE

3.1. Să se deducă ecuația de propagare a undelor electromagnetice în:

- medii dielectrice izotrope;
- medii conductoare izotrope.

Rezolvare:

a) Ecuațiile lui Maxwell (3.1.1) pentru medii dielectrice izotrope ($\mathbf{j}=0$, $\rho=0$) sunt asemănătoare cu cele pentru vid cu deosebirea că în loc de constantele ϵ_0 și μ_0 apar constantele $\epsilon=\epsilon_0\epsilon_r$ și $\mu=\mu_0\mu_r$ ale dielectricului.

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (3.1.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$$

Prin urmare, procedând la fel ca și în cazul undelor electromagnetice în vid (problema 1.1.), se obține ecuația de propagare a câmpurilor \mathbf{E} și \mathbf{H} ale unei electromagnetice în mediul dielectric și izotrop:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (3.1.2)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0 \quad (3.1.3)$$

iar viteza de propagare a unei va fi $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r\mu_r}}$

Dacă considerăm că mediul este nemagnetic ($\mu_r=1$), indicele de refracție al mediului va fi:

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\epsilon_r} \quad (3.1.4)$$

b) Pentru medii conductoare omogene și izotrope ecuațiile lui Maxwell sunt:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{j} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$$

Aplicând operatorul rotor primei ecuații (3.1.5):

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\mu \left(\nabla \times \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right)$$

și ținând cont că

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\nabla^2 \mathbf{E}$$

și

$$-\mu \left(\nabla \times \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right) = -\mu \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{H}) = -\mu \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}.$$

iar $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ (σ -conductivitatea materialului), vom obține :

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (3.1.6)$$

3.2. O undă electromagnetică de pulsație ω se propagă într-un mediu conductor cu conductivitate electrică σ , permitivitate electrică ϵ și permeabilitate magnetică μ . Se cere:

a) să se arate că intensitatea undei se atenuează în mediu, după o lege exponențială;

b) să se găsească expresia indicelui de refracție și a coeficientului de absorbție pentru mediul conductor în funcție de ω , σ , ϵ , μ .

c) expresia intensității undei electromagnetice în medii conductoare.

Rezolvare:

a) În cazul mediilor conductoare izotrope, ecuația de propagare a câmpului electric al undei electromagnetice într-o direcție dată, de exemplu Oz, va fi (vezi problema 3.1) :

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial z^2} - \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (3.2.1)$$

Să considerăm o soluție a acestei ecuații, de forma:

$$\mathbf{E}(z, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(kz - \omega t)} \quad (3.2.2)$$

Introducând expresia (3.2.2) în ecuația (3.2.1) vom obține:

$$k^2 \mathbf{E} = i\omega\mu\sigma \mathbf{E} + \omega^2 \mu\epsilon \mathbf{E}$$

sau

$$k^2 = i\omega\mu\sigma + \omega^2 \mu\epsilon \quad (3.2.3)$$

Aceasta înseamnă că mărimea k este complexă, având o parte reală k' și una imaginară k'' , putând fi pusă sub forma:

$$k = k' + ik'' \quad (3.2.4)$$

Înlocuind în (3.2.2) expresia (3.2.4) pentru k , obținem că soluția ecuației (3.2.1) va putea fi scrisă sub forma:

$$\mathbf{E}(z, t) = \mathbf{E}_0 e^{i[(k' + ik'')z - \omega t]}$$

sau

$$\mathbf{E}(z, t) = \mathbf{E}_0 e^{-k''z} e^{i(k'z - \omega t)} \quad (3.2.5)$$

Se observă că amplitudinea undei în mediul considerat este:

$$A = \mathbf{E}_0 e^{-k''z} \quad (3.2.6)$$

adică scade exponențial pe măsură ce unda pătrunde în mediu.

În acest caz, intensitatea undei va fi:

$$I = A^2 = \mathbf{E}_0^2 e^{-2k''z} \quad (3.2.7a)$$

sau

$$I = I_0 e^{-\alpha z} \quad (3.2.7b)$$

unde $\alpha = 2k''$ este coeficientul de absorbție al mediului.

Dacă se definește o adâncime de pătrundere δ a undei în mediu ca fiind distanța pe care intensitatea undeii scade de "e" ori, atunci:

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{E_0 e^{-2k''(z+\delta)}}{E_0 e^{-2k''z}} = \frac{1}{e}$$

de unde se obține

$$\delta = \frac{1}{2k''} \quad (3.2.8)$$

b) Având în vedere relația (3.2.3), pentru k și ținând cont că:

$$k = \frac{\omega}{v} = n \frac{\omega}{c} \quad (3.2.9)$$

vom obține că:

$$\frac{\omega^2}{c^2} n^2 = \omega^2 \mu \epsilon + i \omega \mu \sigma \quad (3.2.10)$$

Aceasta înseamnă că și indicele de refracție n poate fi scris sub forma unui număr complex:

$$n = n_r + i\chi \quad (3.2.11)$$

unde n_r este indicele de refracție propriu zis al mediului iar χ este un indice de extincție.

Pentru a găsi expresiile lui n_r și χ să observăm că:

$$n^2 = (n_r^2 - \chi^2) + 2in_r\chi \quad (3.2.12)$$

și ținând cont de relația (3.2.10) obținem:

$$n_r^2 - \chi^2 = \epsilon \mu c^2 \quad (3.2.13)$$

$$n_r \chi = \frac{\mu \sigma}{2\omega} c^2 \quad (3.2.14)$$

Rezolvând sistemul de ecuații (3.2.13) - (3.2.14) rezultă:

$$n_r = c \left[\frac{1}{2} \epsilon \mu \left(\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2 \omega^2}} + 1 \right) \right]^{1/2} \quad (3.2.15)$$

$$\chi = c \left[\frac{1}{2} \epsilon \mu \left(\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2 \omega^2}} - 1 \right) \right]^{1/2} \quad (3.2.16)$$

Pentru medii conductoare $\mu \equiv \mu_0$, $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$, $\sigma \neq 0$ și ținând cont că $c^2 = 1/\epsilon_0 \mu_0$ obținem că:

$$n_r = \left[\frac{1}{2} \left(\sqrt{\epsilon_r^2 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2 \omega^2}} + \epsilon_r \right) \right]^{1/2} \quad (3.2.17)$$

$$\chi = \left[\frac{1}{2} \left(\sqrt{\epsilon_r^2 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2 \omega^2}} - \epsilon_r \right) \right]^{1/2} \quad (3.2.18)$$

Din relațiile (3.2.17)-(3.2.18) rezultă că n_r și χ depind de frecvența ω a undei. Absorbția în conductoare există și nu se poate anula decât dacă $\sigma = 0$, după cum se poate verifica ușor.

La frecvențe foarte mari, în domeniul optic (10^{14} Hz), deoarece $\sigma^2 \ll \epsilon^2 \omega^2$, se poate scrie că:

$$\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2 \omega^2}} = 1 + \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{\epsilon^2 \omega^2}$$

astfel că relațiile (3.2.15)-(3.2.16) devin:

$$n_r = c \sqrt{\epsilon \mu \left(1 + \frac{\sigma^2}{4\epsilon^2 \omega^2} \right)} \quad (3.2.19)$$

$$\chi = \frac{c\sigma}{2\omega} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad (3.2.20)$$

c) Ținând cont de relația (3.2.7b), coeficientul de absorbție pentru medii conductoare în domeniul frecvențelor optice va fi:

$$\alpha = 2k'' = 2 \frac{\omega}{c} \chi = 4\pi \frac{\nu}{c} \chi = 4\pi \frac{\chi}{\lambda_0} \quad (3.2.21)$$

unde λ_0 este lungimea de undă a radiației în vid.

Se observă că α depinde de lungimea de undă a radiației în vid. Prin urmare, intensitatea undei electromagnetice care se propagă într-un metal va fi:

$$I(z) = I(0) e^{-\frac{4\pi}{\lambda_0} \chi z} \quad (3.2.22)$$

3.3. Un material are conductivitatea $\sigma = 0,1\Omega^{-1}\text{m}^{-1}$ și constanta dielectrică $\epsilon_r=50$, constantă în domeniul de frecvențe până la 10^8 Hz.

Să se afle, prin calcul, dacă materialul este conductor sau dielectric la frecvențele $\nu_1=10^4\text{Hz}$ și $\nu_2=10^8\text{Hz}$.

Rezolvare:

Dacă mediul este caracterizat prin $\sigma \neq 0$, atunci k^2 este o mărime complexă (problema 3.2.):

$$k^2 = \omega^2 \epsilon \mu + i \omega \mu \sigma = \omega^2 \mu \left[\epsilon + i \frac{\sigma}{\omega \epsilon} \right] \quad (3.3.1)$$

- dacă $\sigma \gg \omega \epsilon$ sau $(\sigma/\omega \epsilon) \gg 1$, mediul este conductor și k este complex.

- dacă $\sigma \ll \omega \epsilon$ sau $(\sigma/\omega \epsilon) \ll 1$, mediul este dielectric și k este real.

În cazul problemei avem:

$$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r = 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 50 = 4,42 \cdot 10^{-10} \text{ F/m}$$

a) pentru frecvența $\nu_1=10^4\text{Hz}$ și $\sigma=0,1\Omega^{-1}\text{m}^{-1}$:

$$\frac{\sigma}{\omega_1 \epsilon} = 3,6 \cdot 10^3 \text{ adică mediul este conductor.}$$

b) pentru $\nu_1=10^8\text{Hz}$

$$\frac{\sigma}{\omega_2 \epsilon} = 0,36 \text{ mediul se comportă ca un dielectric.}$$

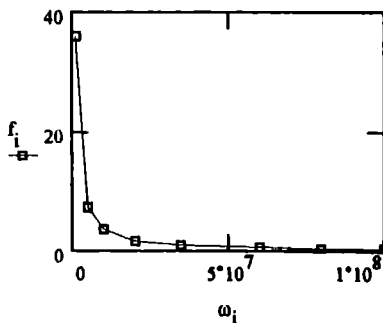


Fig.3.3

Pentru a înțelege mai bine acest lucru am reprezentat în fig.3.3 funcția $f(\omega)=\sigma/\omega\epsilon$ pentru domeniul de frecvențe investigat. Funcția scade rapid odată cu creșterea frecvenței. La frecvențe $\nu < 3,5 \cdot 10^7\text{Hz}$ materialul este conductor ($\sigma/\omega\epsilon \gg 1$), iar la frecvențe $\nu > 3,5 \cdot 10^7\text{Hz}$ are un comportament dielectric ($\sigma/\omega\epsilon \ll 1$).

3.4. În teoria elaborată de H.A.Lorentz și P.Drude se admite că fiecare atom conține un număr de oscilatori electronici egal cu numărul de electroni de valență. Sub influența unor radiații electromagnetice, acești oscilatori intră în oscilație forțată. Ecuația de mișcare a unui electron, sub acțiunea unui câmp electric E , ținând cont și de amortizare este:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -eE - \gamma \frac{dx}{dt} - Kx \quad (3.4.1)$$

unde m este masa, respectiv e -sarcina electronului, γ -coeficientul de amortizare al mișcării, K -constanta elastică, iar E se consideră orientat în direcția x . Să se găsească:

a) soluția ecuației de mișcare dacă câmpul electric este $E = E_0 e^{-i\omega t}$

b) expresia constantei dielectrice ϵ , pentru un material dielectric și izotrop.

Rezolvare:

a) Dacă se împarte ecuația (3.4.1) cu m , se poate scrie că:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{e}{m} E \quad (3.4.2)$$

unde am utilizat notațiile: $2\beta = \gamma/m$, $\omega_0^2 = K/m$, ω_0 -frecvența oscilațiilor libere.

Soluția generală a ecuației (3.4.2) are forma:

$$x = x_0 + x_p \quad (3.4.3)$$

unde x_0 este soluția ecuației omogene:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \quad (3.4.4)$$

iar x_p este o soluție particulară.

Să considerăm soluția x_0 de forma

$$x_0 = ae^{-i\omega t} \quad (3.4.5)$$

Înlocuind (3.4.5) în ecuația (3.4.4) obținem:

$$\omega^2 + 2i\beta\omega - \omega_0^2 = 0 \quad (3.4.6)$$

care are soluțiile:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= -i\beta + \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \\ \omega_2 &= -i\beta - \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \end{aligned} \quad (3.4.7)$$

Prin urmare:

$$x_0 = e^{-\beta t} \left[A e^{-it\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} + B e^{it\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \right] \quad (3.4.8)$$

Relația (3.4.8) descrie niște oscilații amortizate, de frecvență $\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$, a căror amplitudine scade exponențial datorită factorului $e^{-\beta t}$. Frecvența acestor oscilații este mai mică decât frecvența ω_0 a oscilațiilor libere.

Soluția particulară va avea forma termenului liber, adică

$$x_p = C e^{-i\omega t} \quad (3.4.9)$$

și punând condiția ca x_p să satisfacă ecuația (3.4.2) obținem că:

$$C = \frac{eE_0}{m \left[(\omega_0^2 - \omega^2) - 2i\omega\beta \right]} \quad (3.4.10)$$

Fiind un număr complex, C va putea fi scris sub forma:

$$C = c e^{-i\delta} \quad (3.4.11a)$$

unde

$$c = \frac{eE_0}{m \left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\beta^2 \right]} \quad (3.4.11.b)$$

și

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{2\omega\beta}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (3.4.11.c)$$

Prin urmare

$$x_p(t) = c e^{-i(\omega t + \delta)} \quad (3.4.12)$$

În fig.3.4.a este reprezentată dependența lui c , dată de (3.4.11.b), în funcție de ω , pentru trei valori $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ (care trebuie să fie de ordin de mărime 10^{14}), $E_0 = 5 \text{ kV/m}$, frecvența de rezonanță $\omega_0 = 7 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$. Se poate observa că amplitudinile c ale oscilațiilor sunt foarte mici, c prezintă un maxim doar în vecinătatea rezonanței, pentru $\omega = \omega_0$.

Sub formă trigonometrică, soluția generală (3.4.3) a ecuației (3.4.2) este:

$$x(t) = ae^{-\beta t} \cos\left(t\sqrt{\omega_0^2 - \omega^2}\right) + c \cos(\omega t + \delta) \quad (3.4.13)$$

Primul termen în (3.4.13) descrește în timp, astfel că după un interval suficient de lung de timp rămâne numai termenul:

$$x(t) = x_p(t) = c \cos(\omega t + \delta) \quad (3.4.14)$$

Acest lucru poate fi văzut și din reprezentările grafice din fig.3.4b, unde este reprezentată dependența de timp a soluției $x_o(t)$ și din fig.3.4.c unde am reprezentat $x_p(t)$. Se poate constata amortizarea în timp a lui $x_o(t)$.

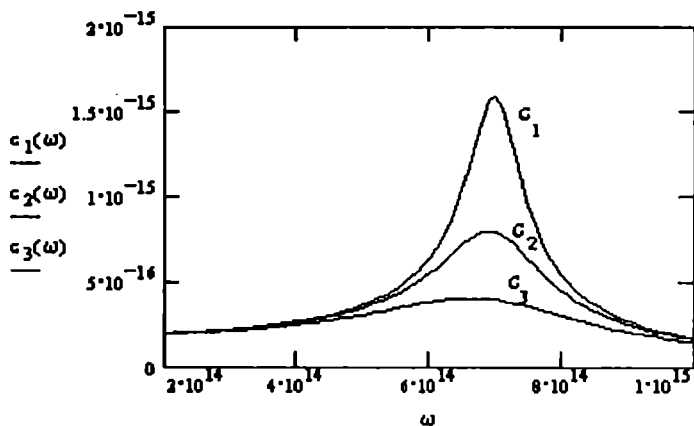


Fig. 3.4.a

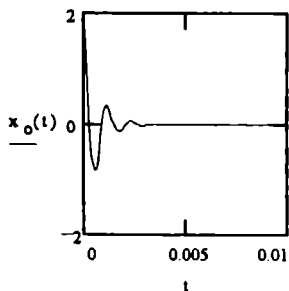


Fig. 3.4.b

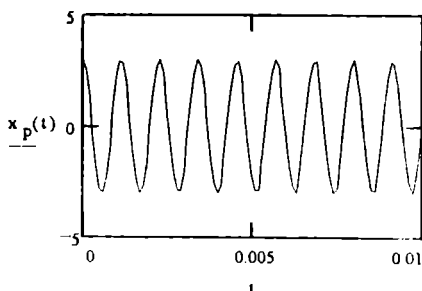


Fig. 3.4.c

b) Pentru a găsi expresia constantei dielectrice ϵ_r se ține cont de faptul că sub acțiunea câmpului electric $E = E_0 e^{i\omega t}$ al unei electromagnetice mediul se polarizează. Inducția electrică în cazul unui mediu izotrop este:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (3.4.15)$$

Densitatea de polarizare a mediului are valoarea

$$\mathbf{P} = \mathbf{Np} = \mathbf{Nex} \quad (3.4.16)$$

Prin urmare:

$$\epsilon_r = 1 + \frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0 \mathbf{E}} = 1 + \frac{\mathbf{Nex}}{\epsilon_0 \mathbf{E}} \quad (3.4.17)$$

Ținând cont doar de oscilațiile forțate x_p ale sistemului, se obține:

$$\epsilon_r = 1 + \frac{Ne}{\epsilon_0} \frac{C e^{-i\omega t}}{E_0 e^{-i\omega t}} = 1 + \frac{Ne^2}{m\epsilon_0} \frac{1}{\left[(\omega_0^2 - \omega^2) - 2i\omega\beta \right]} \quad (3.4.18)$$

3.5. Constanta dielectrică ϵ_r a unui mediu dielectric izotrop este dată de relația (vezi problema 3.4.):

$$\epsilon_r = 1 + \frac{Ne^2}{m\epsilon_0} \frac{1}{\left[(\omega_0^2 - \omega^2) - 2i\omega\beta \right]} \quad (3.5.1)$$

a) dacă pentru domeniul vizibil al spectrului, indicele de refracție complex este $n^* = \sqrt{\epsilon_r}$ și poate fi pus sub forma $n^* = n + i\chi$, să se găsească expresiile lui n și χ pentru cazul general și pentru domeniul de absorbție;

b) să se reprezinte grafic dependența indicelui de refracție n de frecvența radiației;

c) să se găsească expresia intensității câmpului electric precum și intensitatea unei electromagnetice de frecvență ω care străbate un strat absorbant de grosime d și indice de refracție complex n^* .

Rezolvare:

a) Indicele de refracție $n^* = (\epsilon_r)^{1/2}$ al unui mediu dielectric este :

$$\begin{aligned}
 n^* &= \left(1 + \frac{Ne^2}{m\epsilon_0} \frac{1}{[(\omega_0^2 - \omega^2) - 2i\omega\beta]} \right)^{1/2} = \\
 &= 1 + \frac{1}{2} \frac{Ne^2}{m\epsilon_0} \frac{1}{[(\omega_0^2 - \omega^2) - 2i\omega\beta]} = \\
 &= 1 + \frac{1}{2} \frac{Ne^2}{m\epsilon_0} \left[\frac{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2i\omega\beta}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\beta^2} \right] \quad (3.5.2)
 \end{aligned}$$

Din relația (3.5.2) se observă că n^* este o mărime complexă, care poate fi scrisă sub forma $n^* = n + i\chi$, de unde rezultă:

$$n = 1 + \frac{1}{2} \frac{Ne^2}{m\epsilon_0} \left[\frac{(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\beta^2} \right] \quad (3.5.3)$$

$$\chi = \frac{Ne^2}{m\epsilon_0} \left[\frac{\omega\beta}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\beta^2} \right] \quad (3.5.4)$$

Partea reală a indicelui complex n^* este indicele de refracție n al materialului. Dependența de frecvență a lui n determină dispersia unei electromagnetice în mediu.

Coefficientul χ , dependent și el de frecvență, caracterizează absorbția mediului (vezi pct.c).

În domeniul de absorbție ($\omega = \omega_0$) :

$$\begin{aligned}
 n &= 1 \\
 \chi &= \frac{Ne^2}{m\epsilon_0} \frac{1}{4\omega_0\beta} \quad (3.5.5)
 \end{aligned}$$

b) Din relația (3.5.3) se observă că pentru domeniul de transparență a mediului (în afara benzii de absorbție) avem:

- pentru $\omega \gg \omega_0$, $n < 1$
- pentru $\omega \ll \omega_0$, $n > 1$
- la frecvența de absorbție $\omega = \omega_0$, $n = 1$.

Aceste concluzii pot fi urmărite și cu ajutorul fig.5.1. În fig.5.1 sunt prezentate graficele funcțiilor $n(\omega)$ (curba continuă) și $\chi(\omega)$ (curba punctată), simulate pe calculator.

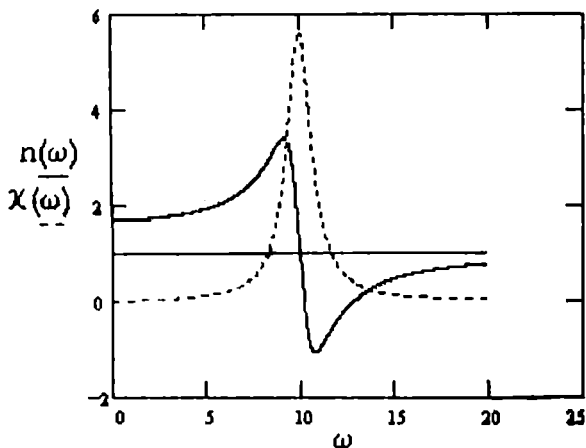


Fig. 3.5

Se poate constata că în vecinătatea benzii de absorbție, indicele de refracție n prezintă o anomalie: în exteriorul benzii de absorbție n crește odată cu creșterea frecvenței (dispersie normală) iar în interiorul benzii de absorbție n descrește cu creșterea frecvenței (dispersie anomală).

c) După trecerea printr-un strat de grosime d , intensitatea câmpului electric al unei electromagnetice este:

$$E = E_0 e^{i(kn \cdot d - \omega t)} \quad (3.5.6)$$

unde E_0 este intensitatea câmpului electric incident.

Dacă $n^* = n + i\chi$ atunci:

$$E = E_0 e^{-k\chi d} \cdot e^{i(knd - \omega t)} \quad (3.5.7)$$

unde $k = \omega/c$, iar nd este drumul optic străbătut de unda electromagnetică în mediu. Intensitatea unde la ieșirea din mediu va fi:

$$I = I_0 e^{-2k\chi d} \quad (3.5.8)$$

iar exponentul poate fi pus sub forma:

$$\alpha d = 2k\chi d = \frac{4\pi}{\lambda_0} \chi d, \quad \alpha(\lambda_0) = \frac{4\pi}{\lambda_0} \chi \quad (3.5.9)$$

de unde se observă dependența coeficientului de extincție α de lungimea de undă a radiației în vid și de natura materialului.

3.6. Pe o suprafață plană de sticlă cu indicele de refracție $n=1,5$ cade un fascicul de lumină sub incidență normală ($i=0$). Care este proporția de lumină reflectată și refractată la suprafața de separare aer-sticlă?

Rezolvare:

Raportul dintre intensitatea luminii reflectate I_{refl} și a celei incidente I_i se numește coeficient de reflexie al mediului al doilea în raport cu primul mediu:

$$R = \frac{I_{refl}}{I_i} \quad (3.6.1)$$

Raportul dintre intensitatea luminii refractate (sau transmise, la suprafața de separare) I_t și a celei incidente I_i se numește coeficient de transmisie:

$$T = \frac{I_t}{I_i} \quad (3.6.2)$$

Dacă mediul al doilea este perfect transparent (nu absoarbe), atunci:

$$T + R = 1 \quad (3.6.3)$$

La incidență normală, dacă lumina vine din mediul cu indice de refracție n_1 și se refractă pe mediul al doilea care are indicele de refracție n_2 , atunci:

$$R = \left(\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} \right)^2 \quad (3.6.4)$$

În cazul problemei $n_2=1,5$ și $n_1=n_{aer}=1$.

Prin urmare:

$$R = \left(\frac{1,5 - 1}{1,5 + 1} \right)^2 = 0,04 = 4\%$$

Aceasta înseamnă că la incidență normală $I_i=0,04 \cdot I_i$ și este transmis în material $I_t=0,96 \cdot I_i$.

3.7. Care este indicele de refracție n al unui material izotrop pentru ca, la incidență normală, la suprafața de separare aer-material, intensitatea luminii reflectate să fie:

- 10% din intensitatea radiației incidente;
- 2,8% din intensitatea radiației incidente;
- să se compare rezultatele obținute la punctele a) și b) ale problemei cu cele obținute în cazul reflexiei pe sticlă (problema 3.6).

Rezolvare:

a) Utilizând relația (3.6.4) din problema 3.6, și notând cu n_a indicele de refracție al materialului și $n_i=1$, se poate scrie că:

$$R_a = \left(\frac{n_a - 1}{n_a + 1} \right)^2 = 0,1$$

Efectuând calculele se obține $n_a=1,924$.

b) Dacă notăm cu n_b indicele de refracție al celui de-al doilea material și $n_i=1$, avem că:

$$R_b = \left(\frac{n_b - 1}{n_b + 1} \right)^2 = 0,028$$

de unde rezultă că $n_b=1,40$.

c) În cazul reflexiei pe sticlă, care are indicele de refracție $n_s=1,5$ se obține că $R_s=0,04$ (vezi problema 3.6.).

Asta înseamnă că:

$$R_a > R_s > R_b$$

iar între indicii de refracție există relația:

$$n_a > n_s > n_b$$

Pentru a ilustra mai bine acest lucru am reprezentat, în fig.3.7, dependența factorului de reflexie R de indicele de refracție n al materialului. Se poate constata că R crește odată cu creșterea indicelui de refracție.

Obs: o comparație între materiale este posibilă numai dacă raportarea se face la aceeași lungime de undă, din cauza dependenței indicilor de refracție de lungimea de undă.

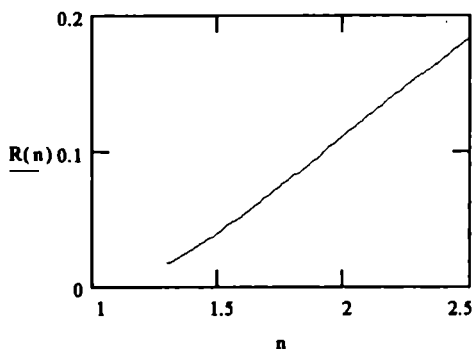


Fig. 3.7

3.8. Pe o suprafață plană de sticlă, cu indicele de refracție $n_s=1,5$ este depus un strat de MgF_2 de grosime d , având indicele de refracție $n_f=1,38$ corespunzător lungimii de undă $\lambda=550nm$.

Pe suprafața stratului de MgF_2 cade, sub incidență normală, un fascicul de lumină monocromatică cu $\lambda=550nm$.

a) care trebuie să fie grosimea minimă d_{min} a stratului de MgF_2 pentru ca intensitatea I a fasciculului reflectat să fie minimă și care este raportul I/I_i , unde I_i este intensitatea fasciculului incident;

b) care este grosimea d_{max} a stratului de MgF_2 pentru ca intensitatea luminii reflectate să fie minimă și care este raportul I/I_i în acest caz?

Se neglijează absorbțiile materialelor.

Rezolvare:

Fasciculul de lumină incident, de intensitate I_i , suferă la suprafața de separare aer- MgF_2 o reflexie (fasciculul 1) și o refracție (fasciculul 2) după cum se poate observa în fig 3.8.

La suprafața de separare dintre stratul de MgF_2 și sticlă, fasciculul 2 suferă o reflexie (fasciculul reflectat 3) și o refracție (fasciculul 4).

Fasciculul 3 se va refracta din nou la suprafața de separare dintre aer și stratul de MgF_2 dând fasciculul 5 iar prin reflexie fasciculul 6, s.a.m.d.

Observatorul va vedea rezultatul interferenței dintre fasciculele 1 și 5. Intensitatea luminii transmise la suprafața de separare aer-MgF₂ la o incidență normală este:

$$I_2 = T_{fa} I_i = (1 - R_{fa}) I_i \quad (3.8.1)$$

iar pentru lumina reflectată:

$$I_1 = R_{fa} I_i \quad (3.8.2)$$

unde

$$R_{fa} = \left(\frac{n_f - n_a}{n_f + n_a} \right)^2 = 0,025 \quad (3.8.3)$$

este factorul de reflexie, la incidență normală, la suprafața de separare între aer ($n_a=1$) și MgF₂ ($n_f=1,38$).

Prin urmare:

$$I_1 = 0,025 I_i$$

$$I_2 = (1 - 0,025) I_i = 0,975 I_i \quad (3.8.4)$$

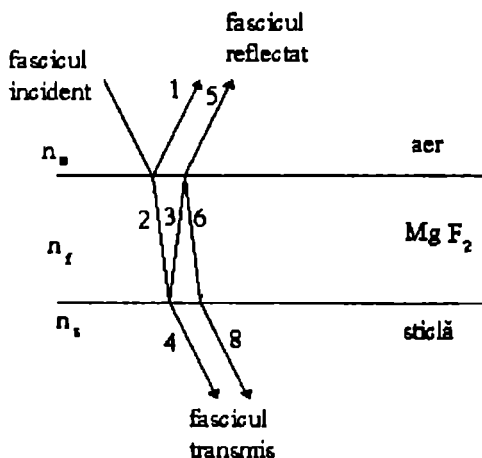


Fig. 3.8

La suprafața de separare MgF₂-sticlă se va reflecta fasciculul, care va avea intensitatea:

$$I_3 = R_{fs} I_2 \quad (3.8.5)$$

unde

$$R_{fs} = \left(\frac{n_s - n_f}{n_s + n_f} \right)^2 = 0,002 \quad (3.8.6)$$

este factorul de reflexie la incidență normală, pe suprafața de separare dintre MgF_2 și sticlă. Prin urmare:

$$I_3 = 0,002 I_2 \quad (3.8.7)$$

iar restul

$$I_4 = 0,998 I_2$$

este transmisă de sticlă (fasciculul 4).

La suprafața de separare MgF_2 -aer, din fasciculul 3 o parte va fi transmis sub forma fasciculului 5, de intensitate:

$$I_5 = T_{af} I_3 = (1 - R_{af}) I_3 \quad (3.8.8)$$

iar

$$R_{af} = \left(\frac{n_a - n_f}{n_a + n_f} \right)^2 = R_{fa} = 0,025 \quad (3.8.9)$$

și

$$T_{af} = 1 - R_{af} = 0,975 \quad (3.8.10)$$

Prin urmare:

$$I_5 = 0,975 \cdot I_3 = 0,975 \cdot 0,002 \cdot I_2 = 0,975 \cdot 0,002 \cdot 0,975 \cdot I_1 = 0,002 \cdot I_1$$

Obs: în fasciculul 6, reflectat la suprafața de separare MgF_2 -aer, intensitatea luminii va fi:

$$I_6 = R_{af} I_3 = R_{af} R_{fs} I_2 = 0,025 \cdot 0,002 \cdot 0,975 \cdot I_1 = 4 \cdot 10^{-5} I_1$$

Se observă că fasciculele 6,7 s.a.m.d., reflectate multiplu, la suprafețele de separare, au o intensitate tot mai mică și nu vor fi luate în considerare.

În urma interferenței dintre fasciculele 1 și 5 va rezulta:

$$I = I_1 + I_5 + 2\sqrt{I_1 I_5} \cos \varphi \quad (3.8.13)$$

unde φ este diferența de fază dintre undele coerente 1 și 5.

Deoarece fasciculul 5 a străbătut de două ori stratul de MgF_2 și că atât 1 cât și 5 au pierdut prin reflexie o fază π , vom avea:

$$\varphi = \frac{4\pi}{\lambda} \cdot d \cdot n_f \quad (3.8.14)$$

a) Pentru ca intensitatea rezultantă I să fie minimă este necesar ca:

$$\varphi = (2k + 1)\pi, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.8.15)$$

Grosimea minimă d_{\min} a stratului de MgF_2 se obține dacă punem condiția $\varphi = \pi$:

$$\frac{4\pi}{\lambda} \cdot d_{\min} \cdot n_f = \pi$$

de unde

$$d_{\min} = \frac{\lambda}{4n_f} = 0,1 \mu\text{m} \quad (3.8.16)$$

În acest caz:

$$I_{\min} = I_1 + I_5 - 2\sqrt{I_1 I_5} = 0,013 \cdot I_i \quad (3.8.17)$$

și

$$\frac{I_{\min}}{I_i} = 0,013 \quad (3.8.18)$$

b) Pentru a obține o intensitate maximă, în urma interferenței fasciculelor 1 și 5, este necesar ca:

$$\varphi = 2k\pi \quad (3.8.19)$$

Grosimea d_{\max} , cea mai mică, se obține cu condiția $\varphi = 2\pi$ și prin urmare:

$$d_{\max} = \frac{\lambda}{2n_f} = 0,2 \mu\text{m} \quad (3.8.20)$$

În acest caz intensitatea luminii va fi:

$$I_{\max} = I_1 + I_5 + 2\sqrt{I_1 I_5} = 0,041 \cdot I_i \quad (3.8.21)$$

adică se obține un raport

$$\frac{I_{\max}}{I_i} = 0,041 \quad (3.8.22)$$

Obs. I_{\max} se poate obține și pentru alte grosimi:

$$D = k \cdot d_{\max}$$

iar I_{\min} pentru grosimi:

$$d = (2k + 1) \cdot d_{\min}$$

3.9. O lamă de grosime $d=3\text{mm}$ este făcută dintr-un material care are, la lungimea de undă $\lambda=656,3\text{nm}$, coeficientul de absorbție $\alpha=0,03\text{mm}^{-1}$ și indicele de refracție $n=1,571$. Să se determine:

- factorul de reflexie R al materialului la $\lambda=656,3\text{nm}$;
- factorul de transmisie T al materialului la $\lambda=656,3\text{nm}$;
- factorul de absorbție A al materialului la $\lambda=656,3\text{nm}$.

Rezolvare: Dacă I_0 este intensitatea luminii incidente și I_r este intensitatea luminii reflectate pe suprafața Σ_1 (aer-lamă) de intrare în lamă, atunci fracțiunea $R=I_r/I_0$:

$$R = \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^2$$

este reflectată. Restul intră în material și o parte din intensitatea luminii va fi absorbită, altă parte va fi transmisă prin cealaltă față Σ_2 a lamei. Intensitatea luminii transmise de plăcuță este:

$$I_t = (1-R)e^{-\alpha d} I_0$$

iar plăcuța va transmite o fracțiune $T=I_t/I_0$ din intensitatea inițială. Dacă ținem cont că :

$$R+T+A=1$$

atunci:

$$A=1-R-T$$

Efectuând calculele se obține: $R=0,049$ $T=0,869$ $A=0,082$.

3.10. Un fascicul paralel de lumină cu intensitatea I_0 și lungimea de undă λ este trimis perpendicular pe o placă cu grosimea de 2 cm. Intensitatea fascicului scade de patru ori în raport cu intensitatea fascicului incident.

Care este coeficientul de absorbție al materialului?

Rezolvare:

Legea Bouguer-Lambert cu privire la absorbția luminii de către un strat absorbant de grosime d , este:

$$I = I_0 e^{-\alpha d}$$

unde I_0 -intensitatea radiației incidente, I -intensitatea radiației transmise, α -coeficientul de absorbție al substanței.

În cazul problemei $I_0/I = 4$, de unde:

$$\alpha = \frac{1}{d} \ln \frac{I_0}{I} = \frac{1}{2} \ln 4 = 0,69 \text{ cm}^{-1}$$

3.11. Pentru eliminarea reflexiilor care pot apare la suprafața materialelor este mai comod să se măsoare absorbția luminii de către același material dar pentru grosimi diferite, la o anumită lungime de undă λ_0 .

Dacă intensitatea luminii transmise de un strat absorbant de grosime d_1 este $I_1(\lambda_0)$, iar cea transmisă de un strat absorbant de grosime d_2 este $I_2(\lambda_0)$, intensitatea fasciculului incident rămânând aceeași, se cere:

a) expresiile intensităților $I_1(\lambda_0)$, și $I_2(\lambda_0)$, ținând cont de fenomenele de reflexie și absorbție;

b) care este coeficientul de absorbție al materialului dacă $I_2=I_1/8$ iar $d_1=2$ mm și $d_2=4$ mm.

Rezolvare:

a) Dacă intensitatea I_r a luminii reflectate pe suprafața de intrare a stratului absorbant (fig.3.11) este:

$$I_r = RI_0$$

unde R este coeficientul de reflexie, I_0 -intensitatea luminii incidente, atunci intensitatea luminii care intră în probă este:

$$I_0 - I_r = I_0(1 - R) \quad (3.11.1)$$

și care va fi absorbită conform legii Bouguer-Lambert. Ținând cont că este același material, coeficientul de absorbție va fi același și prin urmare:

$$I_1 = I_0(1 - R)e^{-\alpha d_1}$$

$$I_2 = I_0(1 - R)e^{-\alpha d_2} \quad (3.11.2)$$

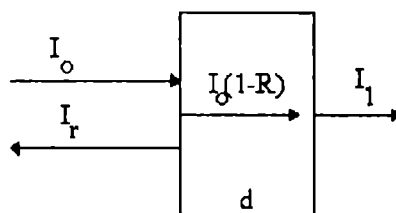


Fig.3.11

b) Dacă se face raportul celor două intensități se obține:

$$\frac{I_2}{I_1} = e^{-\alpha(d_2 - d_1)}$$

de unde

$$\alpha = \frac{1}{(d_2 - d_1)} \ln \frac{I_1}{I_2} = \frac{1}{2} \ln 8 = 1,04 \text{ mm}^{-1}$$

3.12. O soluție, care conține un colorant în concentrație c și coeficient de extincție molară k , se află într-o cuvă așezată în canalul de probă al unui spectrofotometru cu două fascicule. Grosimea stratului absorbant este d , iar pereții cuvei au o grosime x și coeficient de absorbție α .

În canalul de referință al spectrofotometrului se așează o cuvă identică cu prima, conținând solventul pur, care are un coeficient de extincție molară k_s . Se cere:

a) expresiile intensităților I_r și I_p transmise de cuva cu solvent respectiv de cuva cu substanța de studiat.

b) expresia extincției E măsurate de spectrofotometru, dacă un astfel de spectrofotometru măsoară direct $\ln(I_r/I_p)$

Se neglijează reflexiile pe pereții cuvelor.

Rezolvare:

a) Dacă I_0 este intensitatea radiației incidente, aceeași în canalul de probă și canalul de referință și se iau în considerație absorbțiile produse de substanța din cuve și de pereții cuvelor prin care trece lumina, avem că:

$$I_p = I_0 e^{-2\alpha x - (kc d - k_s c_s d)} \quad (3.12.1)$$

$$I_r = I_0 e^{-2\alpha x - k_s c_s d} \quad (3.12.2)$$

unde c_s reprezintă concentrația solventului în cuva cu colorant.

b) Coeficienții de extincție molară depind de lungimea de undă la care se face măsurătoarea. Pentru aceeași lungime de undă, raportul I_r/I_p este:

$$\frac{I_r}{I_p} = e^{kc d + k_s d(c_s - c)} \quad (3.12.3)$$

Dacă experimental se asigură condiția $c_s = c_s'$ și solventul are o absorbție neglijabilă, adică $k_s \ll k$, în domeniul spectral studiat (care este banda de absorbție a colorantului), atunci extincția colorantului este:

$$E(\lambda) = \ln \frac{I_r}{I_p} = k(\lambda)cd \quad (3.12.4)$$

3.13. În canalul de probă al unui spectrofotometru cu două fascicule se așează o cuvă de grosime d care conține un amestec de trei componente, de concentrații c_1, c_2, c_3 și coeficienți de extincție molară k_1, k_2, k_3 corespunzători unei lungimi de undă date λ . În canalul de referință se află o cuvă identică cu compusul 1. Să se găsească expresia extincției $E = \ln(I_r/I_p)$, măsurate de spectrofotometru.

Rezolvare:

Dacă x este grosimea pereților cuvei și α coeficientul lor de absorbție, I_0 -intensitatea radiației incidente pe probă, atunci intensitatea fasciculelor transmise de cuvele aflate în canalul de probă respectiv de referință sunt:

$$I_p = I_0 e^{-2\alpha x - \sum_i k_i c_i d} \quad (3.13.1)$$

$$I_r = I_0 e^{-2\alpha x - k_1 c_1 d} \quad (3.13.2)$$

de unde

$$E = \ln\left(\frac{I_r}{I_p}\right) = (k_2 c_2 + k_3 c_3)d + k_1(c_1 - c_1')d \quad (3.13.3)$$

3.14. O lamă de grosime d , confecționată dintr-un material optic, absoarbe în proporție de 75% un fascicul de radiație optică cu lungimea de undă λ_1 și în proporție de 50% dacă lungimea de undă a radiației este λ_2 . Dacă coeficientul de absorbție al materialului este, la lungimea de undă λ_1 , $\alpha_1 = 5\text{cm}^{-1}$ să se determine valoarea coeficientului de absorbție al materialului la lungimea de undă λ_2 . Reflexiile se neglijează.

Rezolvare:

Intensitățile I_1 și I_2 ale fasciculelor transmise de probă, corespunzătoare lungimilor de undă λ_1 și respectiv λ_2 sunt:

$$I_1 = I_{01} e^{-\alpha_1 d} \quad (3.14.1)$$

$$I_2 = I_{02} e^{-\alpha_2 d} \quad (3.14.2)$$

Conform datelor problemei, la λ_1 proba absoarbe 75% din I_{01} , ceea ce înseamnă că transmite 25% din I_{01} . Analog, la lungimea de undă λ_2 va transmite 50% din I_{02} (în ambele cazuri s-a considerat că reflexiile sunt neglijabile). Prin urmare:

$$\frac{I_1}{I_{01}} = e^{-\alpha_1 d} = 0,25 \quad (3.14.3)$$

$$\frac{I_2}{I_{02}} = e^{-\alpha_2 d} = 0,5 \quad (3.14.4)$$

de unde

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\ln(1/0,25)}{\ln(1/0,5)} = 2$$

și rezultă că $\alpha_2 = 2,5\text{cm}^{-1}$.

3.15. Un fascicul paralel de lumină cade, sub un unghi de incidență $i=50^\circ$ pe o prismă echilaterală (unghiul prisme $A=60^\circ$). Prisma este făcută dintr-o sticlă flint și este înconjurată de aer. Care este unghiul cu care sunt deviate, față de direcția incidentă, radiațiile de lungime de undă $\lambda_1=486,1\text{ nm}$ ($n_1=1,664$) și $\lambda_2=656,3\text{nm}$ ($n_2=1,644$) la ieșirea din prismă.

Rezolvare:

Drumul razelor luminoase prin prismă este prezentat în fig.3.15.

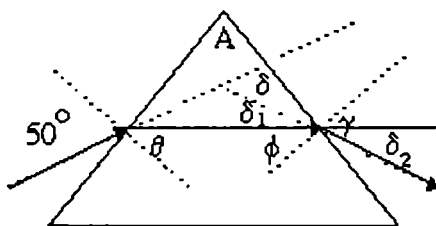


Fig.3.15.

În conformitate cu legea refracției, la fața de intrare a prisme avem pentru radiația cu $\lambda_1=486,1\text{ nm}$:

$$\sin \theta = \frac{1,000}{1,664} \sin 50^\circ$$

de unde rezultă $\theta = 27,41^\circ$. Unghiul de incidență pe fața a doua a prisme este $\Phi=60^\circ-\theta = 32,59^\circ$. Aplicând legea refracției :

$$n \sin \Phi = \sin \gamma$$

obținem că $\gamma=63,67^\circ$. Unghiul de deviație, $\delta(486,1\text{ nm})$ este:

$$\delta(486,1\text{ nm}) = \delta_1 + \delta_2 = (50-\theta) + (\gamma-\Phi) = 53,67^\circ$$

Procedând la fel și pentru radiația de lungime de undă $\lambda_2=656,3\text{nm}$, se obține $\delta(656,3\text{nm})=51,25^\circ$. Prin urmare radiația cu lungimea de undă $486,1\text{ nm}$ (albastru-verzui) este deviată cu $2,42^\circ$ mai mult decât radiația cu $\lambda_2=656,3\text{nm}$ (roșu).

PROBLEME PROPUSE

3.16. Pe o suprafață plană a unei plăci de material cu indicele de refracție mediu $n=1,45$ cade un fascicul de lumină sub incidență normală ($i=0$). Care este procentul de lumină reflectată de această suprafață?

R: 3,4 %.

3.17. Un material optic reflectă 4,8 % din intensitatea fasciculului incident de lungime de undă $\lambda=435$ nm, care cade pe suprafață sa. Care este indicele de refracție al materialului?

R: $n=1,56$

3.18. Care trebuie să fie indicele de refracție al unui material pentru ca să reflecte 22 % din intensitatea fasciculului incident?

R: $n=2,767$

3.19. Un fascicul paralel de lumină cu intensitatea I_0 și lungimea de undă λ este trimis perpendicular pe o placă cu grosimea de 2 mm. Intensitatea fasciculului transmis de placă reprezintă 30% din intensitatea fasciculului incident. Care este coeficientul de absorbție al materialului pentru această lungime de undă?

R: $0,602 \text{ mm}^{-1}$.

3.20. O placă are grosimea d și este făcută dintr-un material care are coeficientul de absorbție $\alpha=0,48 \text{ mm}^{-1}$ pentru lungimea de undă $\lambda=435 \text{ nm}$. Un fascicul paralel de lumină cu lungimea de undă $\lambda=435 \text{ nm}$ este trimis perpendicular pe o placă. Măsurându-se factorul de transmisie al plăcii se găsește valoarea $T=I_1/I_0=0,14$.

a) Care este grosimea d a materialului ?

R: $d=4,1 \text{ mm}$

3.21. Dintr-o sticlă optică se fac două plăcuțe cu grosimile $d_1=2 \text{ mm}$ și $d_2=3 \text{ mm}$. Pentru a evita influența reflexiei pe suprafața plăcuțelor, se măsoară transmisia celor două plăcuțe, la aceeași lungime de undă ($\lambda=550 \text{ nm}$) și se găsesc valorile $I_1/I_0=0,045$ și $I_2/I_0=0,032$. Să se determine coeficientul de absorbție α al sticlei optice la $\lambda=550 \text{ nm}$.

R: $\alpha=0,341 \text{ mm}^{-1}$.

3.22. O sticlă optică are o absorbție foarte mică în domeniul vizibil al spectrului ($I_a = 0,05 \cdot I_0$). Dacă indicele de refracție mediu al materialului este $n=1,445$, să se determine:

a) fracțiunea din intensitatea I_0 a luminii incidente care este reflectată;

b) fracțiunea din intensitatea I_0 a luminii incidente care este transmisă.

R: a) $R=0,033$; b) $T=0,917$.

3.23. Un placuță de grosime $d=6\text{mm}$, este făcută dintr-un material optic care are indicele de refracție $n=1,517$ și coeficientul de absorbție $\alpha=0,03\text{mm}^{-1}$ la lungimea de undă $\lambda=589,1\text{nm}$. Să se determine:

a) factorul de reflexie R al materialului pentru $\lambda=589,1\text{nm}$;

b) factorul de transmisie T al materialului pentru $\lambda=589,1\text{nm}$;

c) factorul de absorbție A al materialului pentru $\lambda=589,1\text{nm}$.

R: a) $0,042$; b) $0,8$; c) $0,158$.

3.24. Să se determine coeficientul de transmisie al unui sistem format din două lame de sticlă lipite, cu glicerină ($n=1,471$).

R: $0,91$.

3.25. Pe o lamă de sticlă a fost depus un strat subțire de In_2O_3 . Observând lama se constată că ea reflectă o radiație roșie ($\lambda=600\text{nm}$). Știind că indicele de refracție al In_2O_3 este $n=2$ la $\lambda=600\text{nm}$, să se determine:

a) cum se explică apariția acestei reflexii selective;

b) care este grosimea stratului de In_2O_3 care determină reflexia selectivă a radiației cu $\lambda=600\text{nm}$;

c) care sunt coeficienții de reflexie ai radiației cu $\lambda=600\text{nm}$ la suprafața de separare aer- In_2O_3 și respectiv In_2O_3 -sticlă și comparați aceste valori cu cele corespunzătoare reflexiei pe sticlă.

R: b) $0,15\mu\text{m}$; b) $0,11$ și $0,02$.

3.26. Un material are conductivitatea $\sigma = 0,3\Omega^{-1}\text{m}^{-1}$ și constanta dielectrică $\epsilon_r=75$, care rămâne constantă în domeniul de frecvențe până la

10^8 Hz. Să se afle, prin calcul, dacă materialul este conductor sau dielectric la frecvențele:

a) $\nu_1 = 10^3$ Hz;

b) $\nu_2 = 10^8$ Hz.

R: a) conductor; b) dielectric.

3.27. Un material are constanta dielectrică $\epsilon_r = 2,5$ constantă în domeniul de frecvențe cuprins între $\nu_1 = 10^6$ Hz și $\nu_2 = 10^9$ Hz și conductivitatea $\sigma = 0,03 \Omega^{-1} \text{m}^{-1}$. Să se analizeze comportamentul acestui material (conductor sau dielectric) :

a) la frecvența $\nu_1 = 10^6$ Hz;

b) la frecvența $\nu_2 = 10^9$ Hz;

c) de la ce frecvență se modifică comportamentul conductor/dielectric al materialului?

a) conductor; b) dielectric; c) $2 \cdot 10^8$ Hz.

3.28. Să se găsească expresia indicelui de refracție :

$$n = \frac{\sin\left(\frac{\delta + A}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A}{2}\right)}$$

care rezultă din studiul mersului razelor printr-o prismă optică, unde A este unghiul refringent al prismei, iar δ unghiul de deviație minimă al prismei.

3.29. O prismă are unghiul $A = 60^\circ$. Se determină experimental unghiul de deviație minimă δ al prismei și se găsesc valorile $\delta_1 = 53,67^\circ$ pentru $\lambda_1 = 486,1 \text{ nm}$ și $\delta_2 = 51,25^\circ$ pentru $\lambda_2 = 656,3 \text{ nm}$. Să se determine valorile indicilor de refracție n_1 și n_2 ai materialului din care este făcută prisma, corespunzători lungimilor de undă λ_1 și λ_2 .

R: $n_1 = 1,674$, $n_2 = 1,651$.

3.30. Transmisia unei cuve cu grosimea $d = 1 \text{ cm}$, care conține soluția unui colorant în concentrație de $c = 4 \cdot 10^{-3} \text{ mol/l}$, este $T_1 = 0,247$ la lungimea de undă λ_1 și $T_2 = 0,449$ la lungimea de undă λ_2 . Să se determine coeficienții de extincție molară k_1 și k_2 corespunzători lungimilor de undă λ_1 și λ_2 .

R: $k_1 = 3,5 \cdot 10^2 \text{ l} \cdot \text{mol}^{-1} \text{ cm}^{-1}$, $k_2 = 2 \cdot 10^2 \text{ l} \cdot \text{mol}^{-1} \text{ cm}^{-1}$.

3.31. O substanță care are coeficientul de extincție molară $k=5 \cdot 10^3 \text{ l} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{cm}^{-1}$, corespunzător lungimii de undă $\lambda=560 \text{ nm}$, este dizolvată în concentrație $c=4 \cdot 10^2 \text{ mol/l}$ într-un solvent care nu are absorbție la lungimea de undă λ . Știind că grosimea cuvei este $d=0,1 \text{ cm}$, să se determine:

- a) transmisia substanței;
- b) extincția $E=kcd$ a substanței.

R: a) $T=0,819$; b) $E=0,2$.

3.32. Să se determine concentrația c a unei substanțe care are la $\lambda=550 \text{ nm}$ coeficientul de extincție molară $k(\lambda)=2 \cdot 10^2 \text{ l} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{cm}^{-1}$ iar transmisia unei cuve de soluție cu $d=1 \text{ cm}$ este $T=0,83$.

R: $c=9,3 \cdot 10^{-4} \text{ mol/l}$.

3.33. O cuvă cu grosimea d conține o soluție etalon cu o substanță în concentrație $c_0=1 \%$ și produce, la lungimea de undă λ , o extincție E_0 . O cuvă identică dar conținând o soluție a aceleiași substanțe în concentrație c , necunoscută, produce o extincție de 5 ori mai mare. Să se determine concentrația c .

R: 5%

3.34. Care este viteza de propagare a luminii în medii cu indicii de refracție:

- a) $n=1,5$ (sticlă);
- b) $n=1,33$ (apa);
- c) $n=1,650$ la $589,1 \text{ nm}$ (sticla flint);
- d) $n=1,575$ la $589,1 \text{ nm}$ (sticla flint).

R: a) $2 \cdot 10^8 \text{ m/s}$; b) $2,256 \cdot 10^8 \text{ m/s}$; c) $1,818 \cdot 10^8 \text{ m/s}$; d) $1,9 \cdot 10^8 \text{ m/s}$;

3.35. O radiație are lungimea de undă în vid $\lambda_0=0,6 \mu\text{m}$. Care vor fi lungimile de undă în medii cu indicii de refracție :

- a) $n_1=1,5$ (sticlă);
- b) $n_2=1,33$ (apa);
- c) $n_3=1,650$ la $589,1 \text{ nm}$ (sticla flint);
- d) $n_4=1,575$ la $589,1 \text{ nm}$ (sticla flint).

R: a) $0,4 \mu\text{m}$; b) $0,451 \mu\text{m}$; c) $0,364 \mu\text{m}$; d) $0,381 \mu\text{m}$.

4. OPTICA MEDIILOR ANIZOTROPE

PROBLEME REZOLVATE

4.1. Să se arate că în cazul propagării unei unde electromagnetice plane într-un mediu dielectric anizotrop:

- a) vectorii \mathbf{D} , \mathbf{E} , și \mathbf{K} sunt coplanari;
- b) vectorii \mathbf{D} și \mathbf{E} nu sunt coliniari.

Rezolvare:

Ecuatiile lui Maxwell, în cazul propagării undelor electromagnetice într-un mediu dielectric anizotrop ($\rho=0$, $\mathbf{j}=0$) sunt :

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (4.1.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (4.1.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \quad (4.1.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (4.1.4)$$

Pentru a găsi relația între vectorii \mathbf{D} , \mathbf{E} , \mathbf{H} , \mathbf{k} , vom scrie ecuațiile lui Maxwell sub o altă formă, ținând cont că în cazul undelor electromagnetice plane acțiunea operatorilor rotor și divergență se reduce la înmulțirea vectorială, respectiv scalară cu $-i\mathbf{k}$ iar a operatorului $\frac{\partial}{\partial t}$ la

înmulțirea cu $i\omega$.

În acest caz, ecuațiile (4.1.1) - (4.1.4) devin:

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega \mu \mathbf{H} \quad (4.1.5)$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{H} = -\omega \mathbf{D} \quad (4.1.6)$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{D} = 0 \quad (4.1.7)$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (4.1.8)$$

Relațiile (4.1.7) - (4.1.8) exprimă transversalitatea vectorilor \mathbf{D} și \mathbf{H} , adică

$$\mathbf{D} \perp \mathbf{k} \quad \text{și} \quad \mathbf{H} \perp \mathbf{k}. \quad (4.1.9)$$

Vectorii \mathbf{D} și \mathbf{H} se vor afla în planul frontului de undă, iar \mathbf{k} indică direcția normală la suprafața de undă.

Din ecuațiile (4.1.5) și (4.1.6) rezultă că:

$$\mathbf{D} \perp \mathbf{H} \quad \text{și} \quad \mathbf{E} \perp \mathbf{H} \quad (4.1.10)$$

Din relațiile (4.1.9) și (4.1.10) se observă că vectorul \mathbf{H} este perpendicular pe vectorii \mathbf{D}, \mathbf{E} și \mathbf{k} , adică vectorii \mathbf{D}, \mathbf{E} și \mathbf{k} sunt coplanari.

b) Deși \mathbf{D} și \mathbf{E} sunt coplanari, numai \mathbf{D} este perpendicular pe \mathbf{k} (relația 4.1.9) și prin urmare \mathbf{D} și \mathbf{E} nu mai sunt coliniari (fig.4.1).

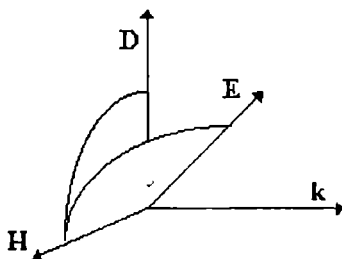


Fig. 4.1

4.2. Un cristal uniax negativ are axele principale X_1 , X_2 și X_3 și axa optică (a.o) în direcția X_2 . Cristalul este tăiat paralel cu axa optică (secțiunea $X_1 X_2$) și are grosimea d . Pe cristal cade un fascicul de lumină normal la secțiunea $X_1 X_2$ a cristalului. Se cere:

- să se construiască elipsoidul indicilor de refracție ai cristalului;
- să se caracterizeze undele ce se propagă în cristal, dacă unda incidentă are direcția X_3 , iar direcția vectorului electric oscilează după direcția X_1 respectiv după X_2 ;
- ce se întâmplă dacă vectorul electric în unda incidentă oscilează după o direcție oarecare, aflată în planul $X_1 X_2$;
- ce se întâmplă dacă unda incidentă pe suprafața cristalului are direcția de propagare X_2 .

Rezolvare:

a) Deoarece cristalul este uniax negativ, având axa optică (a.o) în direcția X_2 , el va prezenta indicii de refracție principali:

$$n_1 = n_3 > n_2$$

astfel ca $\Delta n = n_2 - n_1 < 0$

unde $n_1 = n_3$ sunt indici de refracție ordinari, iar n_2 este indice de refracție extraordinar și are valoare minimă.

În raport cu sistemul de axe propriu (cristalografic) X_i ($i=1,2,3$) al cristalului, elipsoidul indicilor de refracție este cel prezentat în fig.4.2.a. Acesta este un elipsoid de rotație având ca axă de rotație, axa X_2 , semiaxa mare are mărimea n_1 iar semiaxa mică mărimea n_2 , deoarece $n_2 < n_1$. Ecuația elipsoidului indicilor de refracție este, pentru cazul general:

$$\frac{X_1^2}{n_1^2} + \frac{X_2^2}{n_2^2} + \frac{X_3^2}{n_3^2} = 1 \quad (4.2.1)$$

În cazul nostru, deoarece $n_1 = n_3 \neq n_2$ ecuația (4.2.1) devine:

$$\frac{X_1^2 + X_3^2}{n_1^2} + \frac{X_2^2}{n_2^2} = 1 \quad (4.2.2)$$

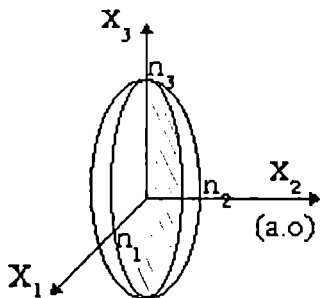


Fig. 4.2.a

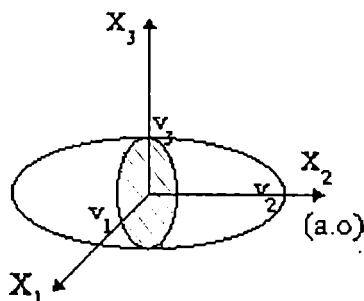


Fig. 4.2.b

b) Stării de polarizare a unei unde ce se propagă prin cristal i se asociază o anumită valoare a indicelui de refracție a cristalului, în funcție de direcția de oscilație a vectorului \mathbf{D} al unei respective în cristal. Astfel, în cazul unei unde electromagnetice care se propagă după direcția X_3 și are vectorul electric polarizat după X_1 , unda care se propagă în cristal este

o undă ordinară, cristalul va prezenta un indice de refracție ordinar $n_o = n_1$ iar viteza de propagare a acestei unde în cristal este:

$$v_1 = \frac{c}{n_1} = \frac{c}{n_o} = v_o \quad (4.2.3)$$

Dacă vectorul electric D al undei are direcția de oscilație X_2 , unda respectivă este o undă extraordinară, cristalul prezintă un indice de refracție extraordinar $n_e = n_2$, iar viteza de propagare a undei în cristal este:

$$v_2 = \frac{c}{n_2} = -\frac{c}{n_e} = v_e \quad (4.2.4)$$

În cazul cristalelor optic negative, deoarece $n_2 < n_1$ rezultă că $v_2 > v_1$.

Elipsoidul vitezelor (sau elipsoidul Fresnel) este prezentat în fig.4.2.b și este de asemenea un elipsoid de rotație, având semiaxele principale $v_1 = c/n_1$, $v_2 = c/n_2$, și $v_3 = c/n_3$. Deoarece axele principale X_i ale elipsoidului indicilor și ale elipsoidului vitezelor coincid, înseamnă că vitezele v_1 , v_2 , și v_3 reprezintă vitezele undelor a căror vectori D și E coincid. Prin urmare, vitezele de fază (cu care se propagă D) și vitezele radiale (de grup) cu care se propagă câmpul E coincid în cazul că acești vectori oscilează după aceleași direcții. Deoarece direcțiile vectorilor D și E nu coincid în mediul anizotrop, direcțiile X_i reprezintă în fapt direcțiile componentelor E_i ale vectorului intensității câmpului electric în materialul anizotrop.

b) Dacă unda incidentă se propagă după direcția normală (X_3) la suprafața cristalului, atunci câmpul electric al undei va fi polarizat în planul X_1X_2 . Fie o stare de polarizare descrisă prin vectorul E_i , orientat ca în fig.4.2.c. În raport cu sistemul de axe X_1X_2 se poate scrie că:

$$E_i = E_1 + E_2 \quad (4.2.5)$$

unde E_1 este câmpul electric al undei ordinare, E_2 este câmpul electric al undei extraordinare.

În cristal se vor propaga două unde cu stări de polarizare ortogonale, având viteze diferite $v_o \neq v_e$ și vor străbate drumuri optice diferite:

$$d_o = n_o d \quad \text{și} \quad d_e = n_e d \quad (4.2.6)$$

Câmpurile electrice ale celor două unde au amplitudinile:

$$\begin{aligned} E_{o1} &= E_{oi} \cos \alpha \\ E_{e2} &= E_{oi} \sin \alpha \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

și vor fi descrise de :

$$\begin{aligned} E_1 &= E_{o1} \cos(\omega t - kd_o) \mathbf{e}_1 \\ E_2 &= E_{o1} \cos(\omega t - kd_e) \mathbf{e}_2 \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

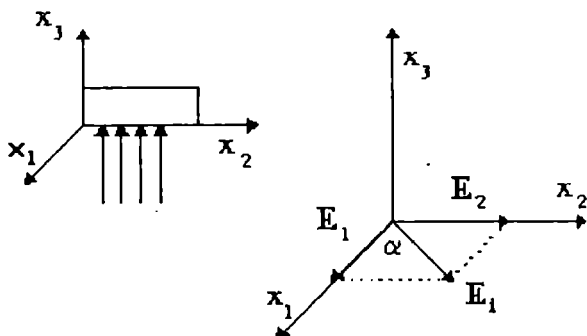


Fig. 4.2.c

unde am notat cu \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 versorii direcțiilor X_1 și X_2 . Trebuie observat că cele două unde descrise de (4.2.8) sunt coerente, provenind din aceeași undă datorită birefrinței cristalului. La ieșirea din cristalul de grosime d , între cele două unde va exista un defazaj:

$$\varphi = k(d_e - d_o) = 2\pi d(n_e - n_o)/\lambda \quad (4.2.9)$$

d) Dacă lumina incidentă are direcția x_2 , care este direcția axei optice, nu se va mai produce birefrința. Aceasta înseamnă că prin cristal se va propaga o singură undă (ordinară), deoarece oricare ar fi direcția de polarizare al vectorului \mathbf{E} în unda incidentă, cristalul prezintă doar un singur indice de refracție $n_o = n_1 = n_3$.

4.3. Un cristal uniax negativ are axele principale X_1 , X_2 , X_3 și axa optică (a.o) în direcția X_2 . Cristalul este tăiat paralel cu axa optică (secțiunea $X_1 X_2$) și are grosimea d . Pe cristal cade un fascicul de lumină normal la secțiunea $X_1 X_2$ a cristalului. Vectorul electric în unda incidentă are o direcție, aflată în planul $X_1 X_2$, așa cum este prezentat în fig.4.2.c. Se cere să se găsească componentele D_i ale vectorului inducție electrică \mathbf{D} , în raport cu sistemul de axe X_i ale cristalul anizotrop.

Rezolvare:

Relația care leagă componentele D_i de componentele E_i ale câmpului electric al unde E în mediul anizotrop este :

$$D_i = \epsilon_{ij} E_j \quad (4.3.1)$$

unde ϵ_{ij} sunt componentele tensorului permitivitate electrică. În sistemul axelor principale X_i ale cristalului, matricea tensorului ϵ_{ij} este diagonală:

$$\tilde{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33} \end{pmatrix} \quad (4.3.2)$$

unde ϵ_{ii} sunt valorile principale ale lui ϵ_{ij} .

În cazul problemei (fig.4.2.c) componentele câmpului electric sunt E_1 și E_2 , iar X_2 este axă de simetrie astfel că $\epsilon_{33} = \epsilon_{11}$. Relația (4.3.1) devine:

$$\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.3.3)$$

adică:

$$\begin{aligned} D_1 &= \epsilon_{11} E_1 \\ D_2 &= \epsilon_{22} E_2 \\ D_3 &= 0 \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

unde $\epsilon_{11} = n_1^2$, $\epsilon_{22} = n_2^2$, $\epsilon_{33} = n_3^2$.

4.4. Axele principale ale tensorului ϵ_{ij} a unui cristal uniax negativ sunt (X_i), unde X_2 este axa optică (a.o). Pe cristal cade un fascicul de lumină sub un unghi de incidență $i \neq 0$.

a) să se arate care sunt în acest caz indicii de refracție ordinar și extraordinar ai cristalului;

b) să se facă reprezentarea spațială a vectorilor D_o , H_o , E_o și D_e , H_e , E_e pentru undele ordinară și extraordinară ce se propagă prin cristal.

Rezolvare:

Dacă X_1 , X_2 , X_3 sunt axele principale ale tensorului ϵ_{ij} , atunci valorile principale ale permitivității sunt:

$$\epsilon_{11} = n_1^2, \epsilon_{22} = n_2^2, \epsilon_{33} = n_3^2,$$

Pentru un cristal uniax negativ, indicii principali de refracție n_1 , n_2 , n_3 au proprietatea că $n_1 = n_3 > n_2$.

Deoarece $i \neq 0$ vom nota cu x_3 o direcție de propagare a frontului de undă în cristal. Să considerăm că direcția x_3 se află în planul secțiunii principale X_2X_3 . Planul x_1x_2 , perpendicular pe x_3 , este planul frontului de undă în care se află vectorii \mathbf{D} și \mathbf{H} ai unei electromagnetice. Intersecția acestui plan cu elipsoidul indicilor de refracție este o elipsă, care are semiaxele $OA=n_1$ și $OB=n$ (fig.4.4.a).

Semiaxa OB a elipsei este orientată în direcția x_2 , care se află în planul secțiunii principale ce conține axa optică, și prin urmare componenta \mathbf{D}_e a vectorului inducție în mediul anizotrop va fi orientată în această direcție. Cristalul va prezenta în acest caz un indice de refracție extraordinar $n_e=n$, cu proprietatea că $n_3 > n_e > n_2$. Semiaxa OA este în direcția X_1 , perpendiculară pe planul secțiunii principale, astfel că indicele de refracție ordinar al cristalului este $n_o=n_1$, iar componenta \mathbf{D}_o va oscila în direcția X_1 .

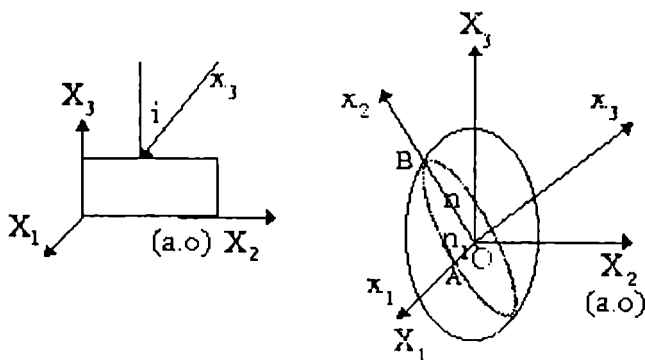


Fig. 4.4.a

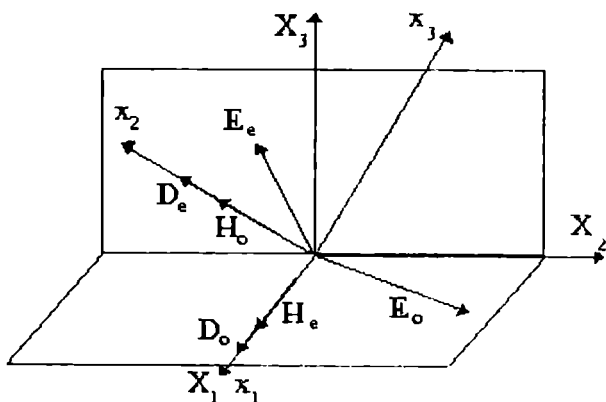


Fig. 4.4.b.

În figură este analizat cazul când direcția x_3 este în planul secțiunii principale. În consecință, prin cristal se vor propaga două unde, deoarece orice vector \mathbf{D} în unda incidentă poate fi descompus în doi vectori: \mathbf{D}_o , corespunzător undei ordinare și care oscilează în direcția $x_1 \equiv X_1$ și \mathbf{D}_e , corespunzător undei extraordinare și care oscilează în direcția x_2 în planul secțiunii principale.

Starea de polarizare a vectorilor (\mathbf{D}_o , \mathbf{H}_o , \mathbf{E}_o) și (\mathbf{D}_e , \mathbf{H}_e , \mathbf{E}_e) a celor două unde este prezentată în fig.4.4.b.

4.5. Direcția de propagare a razei de lumină într-un mediu este dată de direcția vectorului Poynting. Să se stabilească relația vectorială între direcția de propagare a undei electromagnetice, definită prin vectorul de undă \mathbf{k} și direcția vectorului lui Poynting, definită prin versorul \mathbf{u} (vector rază), în cazul:

- a) mediilor izotrope;
- b) mediilor anizotrope.

Rezolvare:

- a) Vectorul lui Poynting :

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (4.5.1)$$

este perpendicular pe planul vectorilor \mathbf{E} și \mathbf{H} ai undei electromagnetice, ceea ce înseamnă că $\mathbf{E} \perp \mathbf{u}$ și $\mathbf{H} \perp \mathbf{u}$. În cazul mediilor izotrope, datorită transversalității undelor electromagnetice avem deasemenea că $\mathbf{E} \perp \mathbf{k}$ și $\mathbf{H} \perp \mathbf{k}$ de unde rezultă că $\mathbf{u} \parallel \mathbf{k}$ (fig.4.5.a)

- b) În cazul mediilor anizotrope, ecuațiile lui Maxwell se scriu sub forma (vezi problema 4.1) :

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega \mu \mathbf{H}$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{H} = -\omega \mathbf{D}$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{D} = 0$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{H} = 0$$

ceea ce înseamnă că :

$$\mathbf{D} \perp \mathbf{k}$$

$$\mathbf{H} \perp \mathbf{k}$$

$$\mathbf{D} \perp \mathbf{H}$$

$$\mathbf{E} \perp \mathbf{H}$$

Vectorii \mathbf{D} , \mathbf{E} și \mathbf{k} sunt coplanari, dar \mathbf{E} nu mai este perpendicular pe \mathbf{k} , ca în cazul mediilor izotrope (fig.4.5.b). În acest caz, vectorul lui Poynting $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ se va afla în planul determinat de vectorii \mathbf{D} , \mathbf{E} și \mathbf{k} dar direcția sa, definită de versorul \mathbf{u} , nu mai coincide cu direcția dată de \mathbf{k} .

Vectorul \mathbf{k} dă direcția normalei la frontul de undă (\mathbf{D} , \mathbf{H}), în timp ce vectorul \mathbf{u} (sau \mathbf{S}) dă direcția razei (sau a transportului de energie) care se propagă prin mediu. Aceste direcții nu se mai confundă într-un mediu anizotrop, așa cum se întâmplă într-un mediu izotrop.

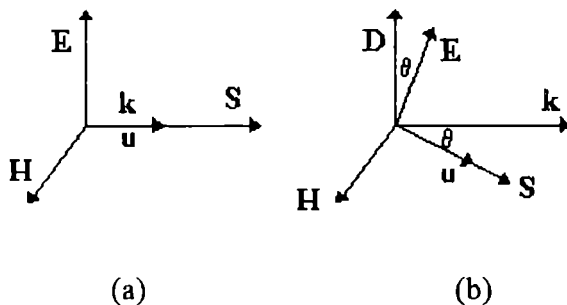


Fig. 4.5.

4.6. Să se construiască :

- elipsoidul indicilor de refracție;
- elipsoidul vitezelor;

în cazul unui material optic uniax pozitiv, la care axele principale ale tensorului permitivitate electrică ϵ_{ij} sunt X_i ($i=1,2,3$) și X_3 este direcția axei optice (a.o).

Rezolvare:

a) Dacă considerăm X_3 axă optică (a.o) a materialului și n_1, n_2, n_3 valorile principale ale indicilor de refracție, pentru un material uniax pozitiv vom avea :

$$n_1 = n_2 < n_3 \quad (4.6.1)$$

Ecuția elipsoidului pentru acest caz este:

$$\frac{X_1^2 + X_2^2}{n_1^2} + \frac{X_3^2}{n_3^2} = 1 \quad (4.6.2)$$

iar birefringența maximă este:

$$\Delta n = n_3 - n_1 > 0 \quad (4.6.2)$$

Elipsoidul indicilor de refracție va fi în acest caz un elipsoid de rotație având X_3 ca axa de rotație. O rază care se propagă în cristal după direcția axei optice X_3 , este polarizată în planul X_1X_2 . În acest caz

indiferent de direcția de oscilație a vectorului electric \mathbf{D} (respectiv \mathbf{E}) al undei electromagnetice în planul X_1X_2 , cristalul va prezenta un singur indice de refracție deoarece $n_1=n_2$, de aceea secțiunea elipsoidului indicilor de refracție în planul X_1X_2 va fi un cerc. În planele X_1X_3 sau X_2X_3 secțiunile elipsoidului vor fi elipse cu semiaxa mare n_3 și semiaxă mică $n_1=n_2$ (fig.4.6.a).

b) Într-un material anizotrop componentele E_i ale intensității câmpului electric care oscilează în direcțiile X_i se propagă cu vitezele $v_i=c/n_i$. În această situație vitezele v_i cu care se propagă componentele E_i sunt viteze radiale sau de grup pentru că reprezintă viteze de propagare ale energiei. Vitezele cu care se propagă componentele D_i sunt viteze de fază pentru că reprezintă viteza de propagare a frontului de undă (\mathbf{D}, \mathbf{H}). Dacă componentele E_i și D_i oscilează după aceleași direcții X_i , atunci valorile principale ale vitezelor de grup și de fază coincid.

Având în vedere relația (4.6.1) dintre indicii de refracție principali, relația corespunzătoare dintre vitezele $v_i=c/n_i$ într-un material uniax pozitiv va fi :

$$v_1 = v_2 > v_3$$

Razele ordinare, care sunt linear polarizate în planul X_1X_2 se vor propaga cu aceeași viteză ($v_1=v_2$), indiferent de direcția de oscilație a vectorului E_o al undei din planul X_1X_2 . Din acest motiv secțiunea elipsoidului vitezelor în acest plan este un cerc.

Razele extraordinare, în care vectorul electric oscilează în planul secțiunii principale a materialului (care conține direcția X_3) se vor propaga cu o viteză v_e ($v_3 < v_e < v_2$), astfel că în planul X_1X_3 sau X_2X_3 secțiunile elipsoidului vitezelor vor fi elipse cu semiaxele v_2 și v_3 (fig.4.6.b).

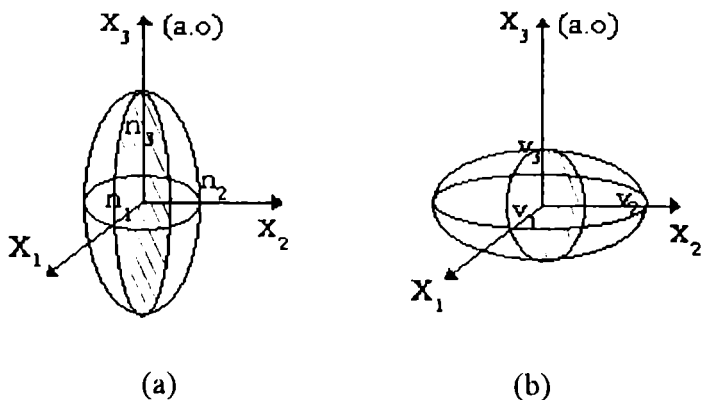


Fig. 4.6.

4.7. Un strat subțire de cristal lichid, uniax pozitiv, are axele principale X_i ($i=1,2,3$). Axa optică (a.o) a cristalului este X_3 , iar stratul de cristal are fața de intrare perpendiculară pe axa optică. Lumina cade pe cristal astfel încât planul de incidență coincide cu planul secțiunii principale a cristalului, care conține direcția axei optice. Să se analizeze birefrința produsă de acest cristal, precum și starea de polarizare a undelor ce se propagă prin cristal, dacă :

- unghiul de incidență $i = 0$;
- unghiul de incidență $i \neq 0$.

Rezolvare:

Pentru un cristal uniax pozitiv, cu axa optică (a.o) în direcția X_3 , elipsoidul indicilor de refracție este prezentat în fig.4.7.a, având $n_1 = n_2 < n_3$. Dacă cristalul are fața de intrare în planul X_1X_2 , direcția X_3 a axei optice coincide cu normala la fața de intrare a cristalului.

a) Dacă $i = 0$, frontul de undă se află în planul X_1X_2 . Intersecția acestuia cu elipsoidul indicilor este un cerc, deoarece $n_1 = n_2$. prin urmare în acest caz nu se produce birefrința cristalului, deoarece $\Delta n = n_1 - n_2 = 0$, pentru orice direcție de oscilație a vectorului electric în unda incidentă în planul X_1X_2 .

b) Să analizăm cazul în care raza incidentă, aflată în planul de incidență X_2X_3 (care este și planul secțiunii principale a cristalului) cade sub un unghi de incidență $i \neq 0$ (fig.4.7). Să notăm cu x_3 direcția razei incidente.

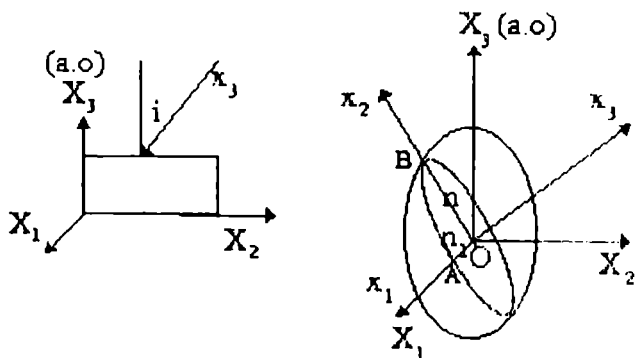


Fig. 4.7.

Pentru a explica starea de polarizare a undelor care se propagă în cristal să observăm că secțiunea x_1x_2 în elipsoidul indicilor de refracție, perpendiculară pe direcția x_3 este o elipsă, cu semiaxele $OA=n_1$ și $OB=n$. Indicele n_1 este un indice ordinar pentru că corespunde unei direcții de oscilație a vectorului electric (\mathbf{D}_o), perpendiculară pe axa optică, iar n este un indice extraordinar deoarece corespunde unei direcții de oscilație (\mathbf{D}_e) aflată în planul secțiunii principale X_2X_3 . Birefringența cristalului este, în acest caz $\Delta n = n - n_1 > 0$.

Indicele n are, în funcție de unghiul de incidență, valori $n_1 < n < n_3$. Se poate constata din fig.4.7. că dacă unghiul de incidență i se micșorează, n se micșorează, iar Δn scade până când se ajunge la situația $\Delta n = 0$, prezentată la punctul a. Dacă unghiul i crește și Δn crește.

4.8. Un strat subțire de cristal lichid uniax pozitiv are direcția axei optice în planul de separare aer-cristal. Să se analizeze starea de polarizare și mersul razelor prin cristal, dacă unghiul de incidență este $i \neq 0$, iar planul de incidență este perpendicular pe planul secțiunii principale a cristalului.

Rezolvare:

Să considerăm X_3 , sistemul de axe principale ale cristalului și X_2 axă optică (a.o). Suprafața de separare aer-cristal este X_1X_2 , planul secțiunii principale X_2X_3 iar planul de incidență este X_1X_3 (fig.4.8.a).

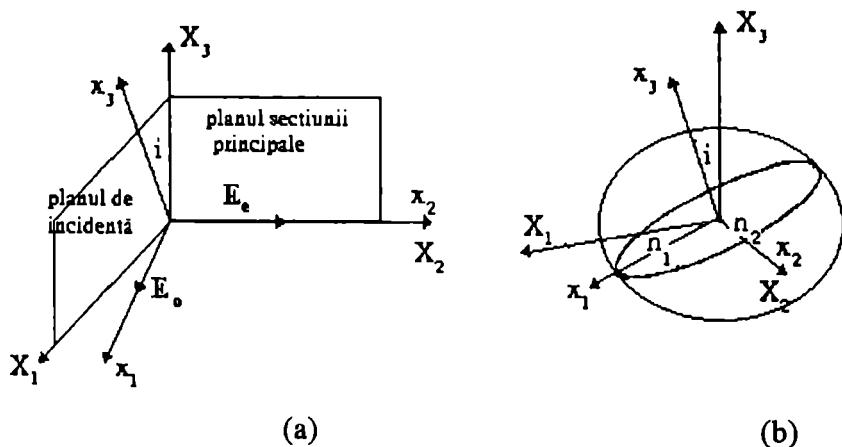


Fig. 4.8.

Direcția razei incidente este x_3 și se află în planul de incidență X_1X_3 . Intersecția planului x_1x_2 , normal la direcția x_3 , cu elipsoidul indicilor de refracție reprezintă o elipsă (fig.4.8.b) cu semiaxele n_2 (indice extraordinar) și n_1 (indice ordinar). În cristal se propagă două unde: unda ordinară având vectorul E_o polarizat în direcția x_1 și vectorul E_e polarizat în direcția $x_2 \equiv X_2$. Deoarece planul de incidență X_1X_3 coincide cu planul perpendicular pe secțiunea principală atunci, indiferent de unghiul de incidență, vectorul E_o se va afla în acest plan. Secțiunea elipsoidului indicilor în planul X_1X_3 este un cerc de rază n_1 , iar în planul X_2X_3 o elipsă cu semiaxele n_1 și n_2 .

Dacă construim secțiunea X_2X_3 a elipsoidului vitezelor obținem fig.4.8.c.

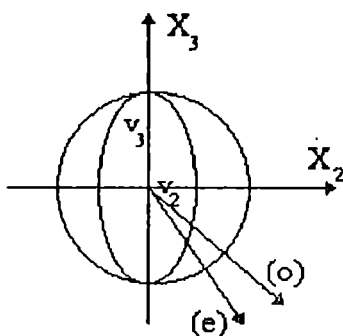


Fig.4.8.c.

Deoarece $n_2 > n_1$, vitezele sunt $v_2 < v_3$. Deasemenea, dacă aplicăm legea refracției la suprafața de separare aer-cristal avem:

$$\sin i = n_1 \sin r_o$$

$$\sin i = n_2 \sin r_e$$

vom obține că unghiurile sub care sunt refractate cele două raze sunt în relația $r_e < r_o$ (fig.4.8.c).

4.9. O peliculă de cristal lichid uniax pozitiv de grosime $d=0,2\text{mm}$ are axa optică în direcția X_2 . O radiație monocromatică cu lungimea de undă $\lambda=589\text{nm}$, liniar polarizată în planul X_1X_2 este trimisă, sub incidență normală, pe direcția X_3 perpendiculară la fața X_1X_2 a cristalului. Câmpul electric al undeii are amplitudinea $A=2\text{ V/m}$ și oscilează după o direcție care face un unghi $\alpha=45^\circ$ cu axa X_1 . Indicii de

refracție principali ai cristalului lichid la $\lambda=589\text{nm}$ sunt $n_1=n_3=1,50$ și $n_2=1,55$. Să se determine:

- vitezele principale v_1 și v_2 ;
- valoarea drumurilor optice ale razelor ordinară și extraordinară;
- diferența de fază a celor două raze.
- amplitudinile razelor ordinară și extraordinară.

Rezolvare:

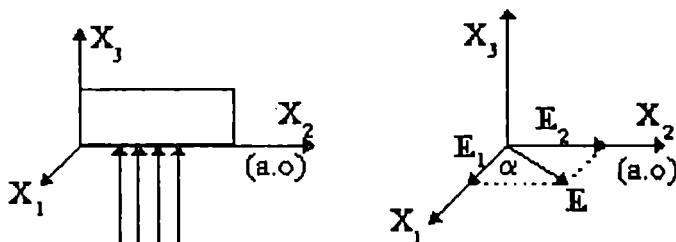


Fig. 4.9.

a) Câmpul electric în unda incidentă pe cristal oscilează în planul X_1X_2 după o direcție care face unghiul $\alpha=45^\circ$ cu axa X_1 (fig.4.9). Prin urmare prin cristal se vor propaga două raze: raza ordinară cu vectorul intensitate a câmpului electric E_1 , care oscilează în direcția X_1 și raza extraordinară cu E_2 , care oscilează în direcția X_2 . Cele două raze se vor propaga cu vitezele:

$$v_1 = c/n_1 = 2 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

$$v_2 = c/n_2 = 1,935 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

b) Drumurile optice străbătute de cele două unde sunt:

$$d_1 = n_1 d = 0,3 \text{ mm}$$

$$d_2 = n_2 d = 0,31 \text{ mm}$$

c) Diferența de fază este:

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} d(n_2 - n_1) = 106,675 \text{ rad}$$

d) Amplitudinile celor două unde sunt:

$$A_1 = A \cos 45^\circ = 1,41 \text{ V/m}$$

$$A_2 = A \cos 45^\circ = 1,41 \text{ V/m}$$

4.10. O celulă conține o peliculă de cristal lichid uniax pozitiv cu grosimea $d=20\mu\text{m}$, axa optică Oz și fața de intrare xy. Cristalul lichid are indicii de refracție principali $n_z=1,658$, $n_x=n_y=1,486$ pentru lungimea de undă $\lambda=589\text{ nm}$. Pe cristal cade, sub un unghi de incidență $i=30^\circ$ în raport cu Oz, un fascicul de lumină monocromatică având $\lambda=589\text{ nm}$. Să se determine:

- valoarea indicilor de refracție ordinar și extraordinar ai cristalului lichid la $\lambda=589\text{ nm}$, pentru acest unghi de incidență;
- diferența de drum optic dintre razele ordinară și extraordinară;
- diferența de fază corespunzătoare.

Rezolvare:

În fig.4.10. este prezentat elipsoidul indicilor de refracție pentru un cristal uniax pozitiv care are axele principale x,y,z, și axa optică în direcția z. Elipsoidul are axele principale $n_x=n_y < n_z$, fiind un elipsoid de rotație cu axa de simetrie z. Pentru o direcție de propagare z' care face un unghi $i=30^\circ$ cu axa z, secțiunea principală care se obține intersectând elipsoidul cu planul $x'y'$ (perpendicular pe direcția de propagare z') este o elipsă cu semiaxele n_x și n. Prin cristal se vor propaga două unde: unda ordinară, având vectorul electric orientat după direcția x și o undă extraordinară cu vectorul electric polarizat în planul yz al secțiunii principale (orientat în direcția y'). Cristalul va prezenta în acest caz un indice ordinar de refracție $n_o=n_x$ și un indice extraordinar n, pe care urmează să-l determinăm.

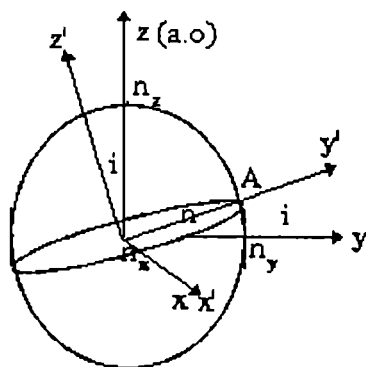


Fig. 4.10.

Coordonatele punctului A al secțiunii yz a elipsoidului sunt:

$$x = 0$$

$$y = n \cos i$$

$$z = n \sin i$$

Prin urmare ecuația elipsoidului indicilor va fi:

$$1 = \frac{y^2}{n_y^2} + \frac{z^2}{n_z^2} = \frac{n^2 \cos^2 i}{n_y^2} + \frac{n^2 \sin^2 i}{n_z^2}$$

de unde rezultă :

$$n = \frac{n_y n_z}{\sqrt{n_z^2 \cos^2 i + n_y^2 \sin^2 i}}$$

Înlocuind datele problemei se obține $n = 1,524$, astfel că birefrința este $\Delta n = n - n_y = 0,038$, spre deosebire de valoarea maximă a birefrinței $\Delta n_{\max} = n_z - n_y = 0,172$, care se obține atunci când $i = 90^\circ$.

b) Diferența de drum optic este:

$$\delta = \frac{(n - n_y)d}{\cos i} = 0,87 \mu\text{m}$$

c) Diferența de fază între undele ordinare și extraordinare este:

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \delta = 9,348 \text{ rad}$$

4.11. Un fascicul paralel de lumină monocromatică cade, sub incidență normală, pe o lamă de cuarț de grosime d , tăiată paralel cu axa optică. Fasciculul incident pe lamă este linear polarizat (cu ajutorul unui polarizor) având vectorul electric E_1 orientat sub un unghi α în raport cu axa optică a cristalului. Dacă n_o și n_e sunt valorile principală ale indicilor de refracție ordinar și extraordinar ai cristalului, corespunzători unei lungimi de undă λ , se cere:

a) să se analizeze starea de polarizare a luminii la ieșirea din lama de cuarț;

b) să se determine starea de polarizare a luminii transmise de lamă dacă $\alpha = 30^\circ$, $d = 1 \text{ mm}$, $n_o = 1,5442$, $n_e = 1,5533$ la $\lambda = 589 \text{ nm}$ iar amplitudinea câmpului incident este $A = 1 \text{ V/m}$;

c) care trebuie să fie, în condițiile date, grosimea minimă d_{\min} pe care trebuie să o aibă cristalul pentru ca să producă lumină liniar polarizată.

Rezolvare:

Să considerăm un sistem de axe xyz - sistemul axelor principale cristalografice și ale elipsoidului indicilor de refracție - unde z este direcția axei optice (a.o) a cristalului. Fasciculul de lumină incident are direcția de propagare x , iar vectorul electric în unda incidentă este E_1 , orientat sub un unghi α în raport cu axa z (fig.4.11.a)

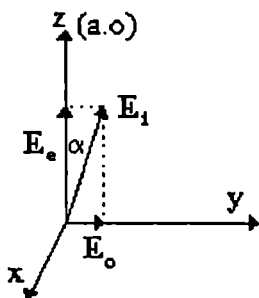


Fig. .11.a

a) În cristal E_1 se descompune în componentele E_e și E_o , care oscilează după două direcții ortogonale, paralel respectiv perpendicular la axa optică, astfel că:

$$E_1 = E_e + E_o \tag{4.11.1}$$

Dacă la intrarea în cristal ($x=0$):

$$E_1 = A \cos \omega t$$

atunci la ieșire din cristal avem :

$$E_o = A_o \cos(\omega t - kx_o) \cdot j$$

$$E_e = A_e \cos(\omega t - kx_e) \cdot k \tag{4.11.2}$$

unde j, k sunt versorii direcțiilor y și z după care sunt polarizate undele, $x_o = dn_o$ și $x_e = dn_e$ sunt drumurile optice corespunzătoare razelor ordinară și extraordinară, iar amplitudinile undelor sunt:

$$A_o = A \sin \alpha$$

$$A_e = A \cos \alpha \tag{4.11.3}$$

Datorită drumurilor optice diferite, între cele două unde apare un defazaj:

$$\varphi = k(x_e - x_o) = \frac{2\pi}{\lambda} d\Delta n \quad (4.11.4)$$

unde $\Delta n = n_e - n_o$ este birefrința cristalului. Prin urmare putem scrie că:

$$E_o = A_o \cos(\omega t).j \quad (4.11.5)$$

$$E_e = A_e \cos(\omega t - \varphi).k \quad (4.11.6)$$

Dezvoltând $\cos(\omega t - \varphi)$ din (4.11.6) și ținând cont din (4.11.5) că $\cos(\omega t) = E_o/A_o$, vom obține:

$$\frac{E_e}{A_e} - \frac{E_o}{A_o} \cos \varphi = \sqrt{1 - \left(\frac{E_o}{A_o}\right)^2} \sin^2 \varphi \quad (4.11.7)$$

Ridicând (4.11.7) la pătrat obținem:

$$\frac{E_e^2}{A_e^2} + \frac{E_o^2}{A_o^2} - 2 \frac{E_e E_o}{A_e A_o} \cos \varphi = \sin^2 \varphi \quad (4.11.8)$$

Expresia (4.11.8) descrie o elipsă a cărei formă și orientare depind de valorile lui α și φ . În funcție de valorile defazajului φ , care este la rândul său dependent de lungimea de undă a radiației incidente, pot apare următoarele situații:

1) dacă $\varphi = m\pi$ ($m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$), atunci relația (4.11.8) devine :

$$E_e = \pm \frac{A_e}{A_o} E_o \quad (4.11.9)$$

cu

$$\operatorname{tg} \theta = \pm \frac{A_e}{A_o} \quad (4.11.10)$$

adică lumină iese din cristal linear polarizată, având vectorul electric E_e orientat sub un unghi $\pm(90^\circ - \theta)$ în raport cu axa optică a cristalului. În fig.4.11.b, c sunt prezentate cele două posibilități de orientare a vectorului electric în unda transmisă și care este linear polarizată.

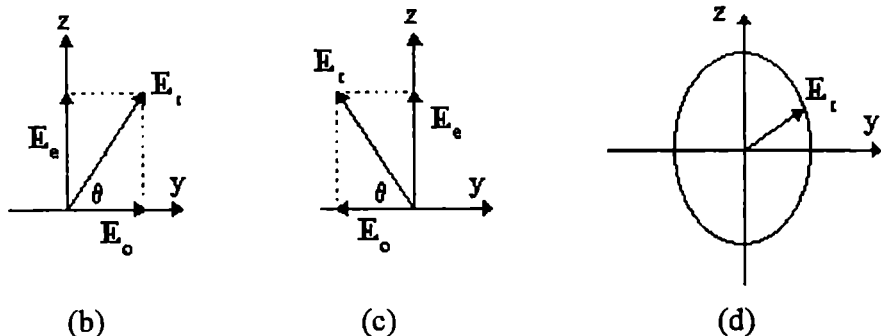


Fig. 4.11.

2) dacă $\varphi = 2m\pi + \pi/2$, expresia (4.11.8) devine :

$$\frac{E_e^2}{A_e^2} + \frac{E_o^2}{A_o^2} = 1 \quad (4.11.11)$$

adică la ieșirea din cristal lumină este eliptic polarizată. Vectorul E_t se rotește cu frecvența ω , descriind o elipsă (fig.4.11.d) dată de (4.11.11). În funcție de sensul de rotație lumina va fi eliptic polarizată dreapta sau stânga, acest lucru depinzând de semnul birefringenței Δn (cristal pozitiv sau negativ).

b) Dacă $d=1\text{mm}$, $\alpha=30^\circ$, $n_o=1,5442$, $n_e=1,5533$ la $\lambda=589\text{nm}$, atunci se obține prin calcul: $\Delta n=0,009$, $\varphi=97,07\text{rad}$, adică $\varphi=61,8(\pi/2)$, $A_e=0,86\text{V/m}$, $A_o=0,5\text{V/m}$. Prin urmare, având în vedere că $A_e \neq A_o$, iar φ nu este un număr par de $(\pi/2)$, radiația având $\lambda=589\text{nm}$ va fi eliptic polarizată la ieșirea din cristal.

c) Grosimea minimă d_{\min} pe care trebuie să o aibă cristalul pentru ca să producă lumină liniar polarizată se obține din condiția:

$$\varphi = \pi \Rightarrow d_{\min} = \frac{\lambda}{2(n_e - n_o)}$$

$$d_{\min}=0,032\text{mm}.$$

4.12. O celulă de cristal lichid este așezată între doi polarizori. primul polarizor transmite pe celulă o radiație linear polarizată, având

vectorul electric orientat sub un unghi $\alpha=45^\circ$ în raport cu axa optică a cristalului lichid. Al doilea polarizor funcționează ca analizor, transmițând doar componentele paralele cu axa sa optică. Radiația incidentă pe celula de cristal lichid de intensitate $0,5\text{mW}/\text{m}^2$ este o radiație monocromatică având lungimea de undă $\lambda=589\text{nm}$, pentru care cristalul lichid are indicii de refracție principali $n_o=1,486$ și $n_e=1,586$. Stratul de cristal lichid are grosimea $d=20\mu\text{m}$, iar direcția axei optice (a.o) este Oz și se află în planul feței de intrare a celulei.

Să se analizeze starea de polarizare a luminii transmise de stratul de cristal lichid și să i se determine intensitatea:

- înainte de analizor;
- după analizor, dacă axele optice ale polarizorului (P) și analizorului (A) sunt paralele;
- după analizor, dacă axele optice ale polarizorului (P) și analizorului (A) sunt ortogonale.

Rezolvare:

a) Pe fața (y,z) a celulei cu cristal lichid (CL) cade fasciculul de lumină care are direcția x (fig.4.12.a). Câmpul electric E_i al unei incidente, linear polarizat de către (P), se descompune în interiorul CL în componentele E_o și E_e ortogonale (fig.4.12.b) și de amplitudini :

$$A_o = A \sin(45^\circ)$$

$$A_e = A \cos(45^\circ)$$

unde A este amplitudinea câmpului electric în unda incidentă și care se determină din relația $A^2 = 2S(\mu_o/\epsilon_o)^{1/2}$, unde S este densitatea fluxului de energie transportată de către fascicul. Efectuând calculele se obține :

$$A_o = A_e = 0,434\text{V}/\text{m}$$

Prin CL se va propaga o undă ordinară și o undă extraordinară între care va apare o diferență de fază φ . În conformitate cu problema 4.11, diferența de fază a celor două unde la ieșirea din stratul de CL este:

$$\varphi = k(x_c - x_o) = \frac{2\pi}{\lambda} d\Delta n = 21,335\text{rad}$$

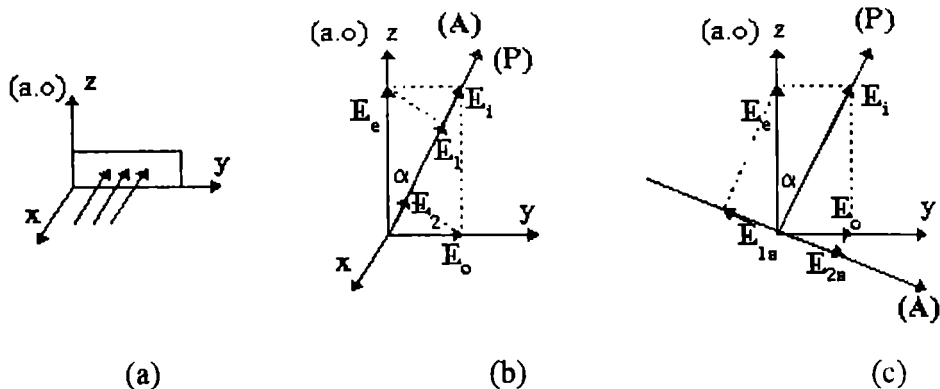


Fig. 4.12.

ceea ce arată că radiația având $\lambda=589\text{nm}$ iese din stratul de CL de grosime $d=20\mu$ polarizată eliptic.

b) Dacă stratul de CL este așezat între polarizor și analizor iar axele optice ale acestora sunt paralele $(A) \parallel (P)$, atunci după cum se poate vedea din fig.4.12.b., câmpul E_1 al unei incidente se descompune în:

$$E_1 = E_e + E_o$$

unde:

$$E_e = A_e \cos(\omega t - kx_e) \cdot \mathbf{k}$$

$$E_o = A_e \cos(\omega t - kx_o) \cdot \mathbf{j}$$

cu $A_o = A_e = 0,434\text{V/m}$ și $\varphi = 2\pi d \Delta n / \lambda$ determinat anterior.

După analizor vor trece doar componentele E_1 și E_2 , paralele cu axa optică a analizorului, astfel că E_{tes} în unda transmisă de analizor va fi:

$$E_{tes} = E_1 + E_2$$

unde:

$$E_1 = A_1 \cos(\omega t - kx_e), \quad A_1 = A \cos \alpha = A \cos^2 \alpha$$

$$E_2 = A_2 \cos(\omega t - kx_o), \quad A_2 = A \sin \alpha = A \sin^2 \alpha$$

Din superpoziția celor două componente care oscilează după aceeași direcție rezultă că intensitatea unei transmise de către analizor va fi

$$\begin{aligned} I_{\text{par}} &= A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \varphi = \\ &= A^2 \cos^4 \alpha + A^2 \sin^4 \alpha + 2A^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \cos \varphi = \quad (4.12.1) \\ &= I_o \left(1 - \sin^2 2\alpha \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right) \end{aligned}$$

unde $I_o = A^2$. Utilizând datele problemei se obține $I_{\text{par}} = 0,1 I_o$.

c) Dacă polarizorul și analizorul sunt încrucișați (A)⊥(P), atunci conform fig.4.12.c, după analizor vor trece doar componentele:

$$E_{1a} = B_1 \cos(\omega t - kx_e), \text{ unde } B_1 = A \cos \alpha \cdot \sin \alpha = (A/2) \sin 2\alpha$$

$$E_{2a} = B_2 \cos(\omega t - kx_o), \text{ unde } B_2 = A \sin \alpha \cos \alpha = (A/2) \sin 2\alpha$$

La ieșirea din analizor:

$$E_{ies} = E_1 - E_2$$

și va fi polarizat după direcția (A). Intensitatea unei rezultante va fi:

$$I_{perp} = B_1^2 + B_2^2 - 2B_1B_2 \cos \varphi = \frac{A^2}{2} (1 - \cos \varphi) \sin^2 2\alpha \quad (4.12.2)$$

$$I_{perp} = I_o \sin^2 2\alpha \sin^2 \frac{\varphi}{2}$$

Ținând cont de datele problemei se obține, în acest caz $I_{perp} = 0,896 I_o$.

4.13. Utilizând rezultatele obținute la problema precedentă (4.12), să se studieze modul cum variază intensitatea luminii transmise de analizor pentru:

a) o lamă izotropă din punct de vedere optic;

b) o lamă făcută dintr-un material uniax din punct de vedere optic, dacă este așezată între polarizori încrucișați și rotită de la $\alpha=0$ la $\alpha=360^\circ$.

Rezolvare:

Vom utiliza relația:

$$I_{perp} = I_o \sin^2 2\alpha \sin^2 \frac{\varphi}{2}$$

a) Dacă lama este izotropă atunci $\Delta n=0$, $\varphi=0$ și prin urmare pentru orice unghi α , $I_{perp}=0$.

b) Dacă lama este uniaxă din punct de vedere optic, atunci pentru o radiație de o anumită lungime de undă, $\varphi=const.$ și factorul $\sin^2(\varphi/2)=const.$ și nu afectează valoarea intensității I_{perp} . Dacă α variază de la 0° la 360° se observă că:

$$I_{perp} = I_o \sin^2(\varphi/2) \quad \text{pentru } \alpha = \pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4 \dots (2m+1)\pi/4$$

$$I_{perp} = 0 \quad \text{pentru } \alpha = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, \dots 2m\pi/4$$

În fig.4.13 este prezentată dependența $I_{perp} = f(\alpha)$ la $\varphi = const.$

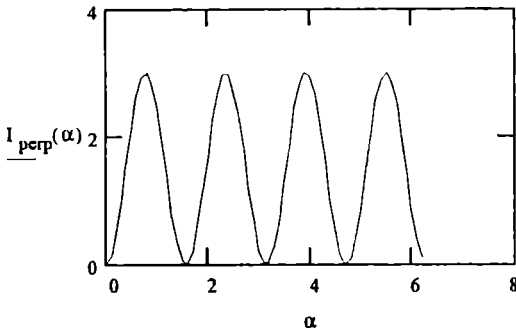


Fig. 1.13.

4.14. O radiație electromagnetică linear polarizată, cu ajutorul unui polarizor (P), este trimisă pe un strat de cristal lichid nematic (CLN), orientat uniaxial. Axa optică a CLN este orientată sub un unghi $\alpha=30^\circ$ în raport cu direcția vectorului E_1 al undei incidente linear polarizate. Grosimea stratului de CLN este $d=30\mu\text{m}$. CLN prezintă la temperatura de 30°C o birefrință:

a) $\Delta n_1=0,17$ pentru $\lambda_1=0,6\mu\text{m}$;

b) $\Delta n_2=0,27$ pentru $\lambda_2=0,4\mu\text{m}$;

Se cere:

1) Să se găsească starea de polarizare a luminii la ieșirea din stratul de CLN pentru cazurile a) și b);

2) Care este intensitatea luminii linear polarizate transmise de un analizor linear (A), așezat după CLN, dacă (A) și (P) sunt încrucișați.

Rezolvare:

1.a) Pentru $\Delta n_1=0,17$ pentru $\lambda_1=0,6\mu\text{m}$, defazajul dintre unda ordinară și extraordinară la ieșirea din CLN este:

$$\varphi_1 = \frac{2\pi}{\lambda_1} d\Delta n_1 = 17\pi$$

astfel că radiația de lungime de undă $\lambda_1=0,6\mu\text{m}$ va ieși din stratul de CLN linear polarizată.

1b) Pentru $\Delta n_2=0,27$ pentru $\lambda_2=0,4\mu\text{m}$:

$$\varphi_2 = \frac{2\pi}{\lambda_2} d\Delta n_2 = 40,5\pi$$

cea ce înseamnă ca radiația cu $\lambda_2=0,4\mu\text{m}$ va ieși din stratul de CLN eliptic polarizată, deoarece φ_2 este un număr impar de $\pi/2$, iar amplitudinile undelor ordinară și extraordinară sunt diferite:

$$A_o = A \sin 30^\circ = 0,5A$$

$$A_{oe} = A \cos 30^\circ = 0,86A$$

2) Dacă $(A) \perp (P)$, atunci intensitatea transmisă de către (A) va fi (vezi problema 4.12):

$$I = I_o \sin^2 2\alpha \sin^2 \frac{\varphi}{2}$$

Dacă $\alpha=30^\circ$ vom obține pentru:

$$\text{a) } \lambda_1=0,6\mu\text{m}, \quad \varphi=17\pi, \quad I_1 = I_o/4$$

$$\text{b) } \lambda_2=0,4\mu\text{m}, \quad \varphi=40,5\pi, \quad I_2 = I_o/8$$

Prin urmare, stratul de CLN, aflat între $(A) \perp (P)$, va transmite diferit diverse lungimi de undă în funcție de valoarea raportului $\Delta n/\lambda$ al CLN.

4.15. Pe o lamă de cuarț de grosime $d=3\text{mm}$ și tăiată paralel cu axa optică, cade perpendicular un fascicul de lumină albă, linear polarizată cu ajutorul unui polarizor liniar P. Lumina care iese din lamă trece apoi printr-un al doilea polarizor A, încrucișat cu primul $(A \perp P)$, apoi este analizată cu ajutorul unui spectroscop.

Câte benzi întunecate (minime de transmisie) se vor observa în spectrul luminii albe, între lungimile de undă $\lambda_1=0,589\mu\text{m}$ și $\lambda_2=0,486\mu\text{m}$, dacă indicii de refracție principali ai cuarțului, pentru aceste lungimi de undă sunt :

$\lambda(\mu\text{m})$	n_o	n_e	Δn
0,589	1,5442	1,5533	0,0091
0,486	1,5497	1,5589	0,0092

Rezolvare:

Dacă lama este așezată între $(A \perp P)$, atunci intensitatea luminii transmise de analizorul A este:

$$I = I_o \sin^2 2\alpha \sin^2 \frac{\varphi}{2}$$

unde $\varphi=2\pi d\Delta n/\lambda$.

În spectrul luminii albe, obținut cu un spectroscop, vor apare benzi negre din cauză că pentru anumite lungimi de undă intensitatea luminii transmise de analizor este nulă. Acest lucru se produce dacă:

$$\sin \frac{\pi d \Delta n}{\lambda} = 0$$

adică pentru

$$\frac{\pi d \Delta n}{\lambda} = k \pi$$

Minimele apar pentru acele lungimi de undă pentru care:

$$k = \frac{d \Delta n}{\lambda}$$

este un număr întreg. Calculând valorile k_1 și k_2 , corespunzătoare celor două lungimi de undă λ_1 și λ_2 se obține $k_1 = 46,35$ și $k_2 = 56,8$. Valorile întregi $k_1 = 46$ și $k_2 = 56$ se obțin pentru lungimile de undă de $0,593 \mu\text{m}$ și respectiv $0,492 \mu\text{m}$, adică în intervalul de lungimi de undă $\lambda_1 - \lambda_2$, k poate lua un număr de 10 valori întregi ($k = 47, 48, \dots, 56$). Din acest motiv, în spectrul luminii albe vor apare 10 benzi negre, care nu sunt datorate unor fenomene de absorbție deoarece cuarțul este transparent în domeniul vizibil al spectrului.

4.16. Un fascicul de lumină albă traversează o lamă de calcit C de grosime d , aflată între doi polarizori, P și A, încrucișați ($A \perp P$). Axa optică a lamei se află la un unghi $\alpha = 45^\circ$ față de axele optice ale polarizorilor. După ce iese din analizorul A, fasciculul de lumină traversează o rețea de difracție R care are $N = 500$ trăsături/mm și o lentilă convergentă L cu distanța focală $f = 1\text{m}$. Imaginea de difracție se obține pe un ecran alb E, plasat în planul focal al lentilei L (fig.4.16). Să se determine:

a) la ce distanță r_1 și respectiv r_2 de maximumul central al figurii de difracție se află punctele M și N, unde se formează maximele de ordinul I corespunzătoare lungimilor de undă $\lambda_1 = 0,589 \mu\text{m}$ și $\lambda_2 = 0,768 \mu\text{m}$, în absența lamei și polarizorilor;

b) prin introducerea sistemului format din lama de calcit și polarizorii încrucișați, se constată că în punctele M și N se formează

franje întunecate (minime). Cunoscând că între M și N există 41 minime să se determine grosimea d a lamei. Pentru calcul indicii de refracție principali sunt:

$\lambda(\mu\text{m})$	n_o	n_e	Δn
0,589	1,6583	1,4864	-0,1719
0,768	1,6497	1,4829	-0,1668

Rezolvare:

a) Distanțele r_i de la maximul central la maximul de ordinul k din figura de difracție, obținută pe ecranul E, pentru lungimile de undă λ_i (fig.4.16) se obțin cu ajutorul relațiilor:

$$r_i = f \operatorname{tg} \varphi_i \cong f \sin \varphi_i$$

$$\sin \varphi_i = k N \lambda_i$$

astfel că:

$$r_i = f k N \lambda_i$$

Utilizând datele problemei se obțin, pentru $k=1$, distanțele $r_1=29,5\text{cm}$ și $r_2=38,4\text{cm}$.

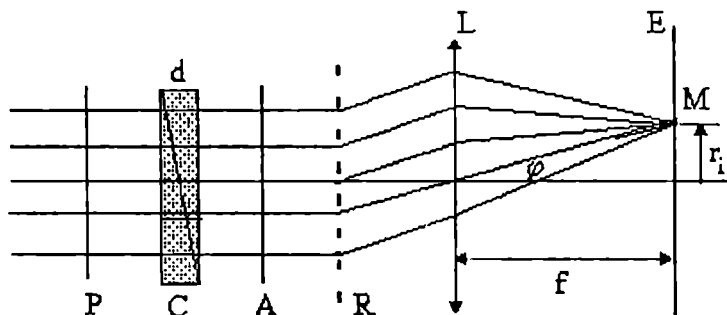


Fig. 4.16.

b) În prezența sistemului format din lama de calcit și cei doi polarizori încrucișați vor fi transmise de către sistem numai acele radiații pentru care :

$$I = I_0 \sin^2 2\alpha \sin^2 \frac{\pi d \Delta n}{\lambda}$$

este maximă. În cazul radiațiilor având $\lambda_1=0,589\mu\text{m}$ și $\lambda_2=0,768\mu\text{m}$ se vor obține minime dacă este îndeplinită condiția :

$$\sin^2 \frac{\pi d \Delta n}{\lambda} = 0 \quad \text{sau}$$

$$\frac{\pi d \Delta n_i}{\lambda_i} = m_i \pi \quad i = 1, 2$$

Utilizând datele problemei se obține că:

$$m_1 = 0,292 \text{ d} \quad m_2 = 0,217 \text{ d}$$

Între M și N se obțin $(m_1 - m_2) = 41$ minime. Cunoscând acest lucru putem scrie că :

$$m_1 - m_2 = \left(\frac{\Delta n_1}{\lambda_1} - \frac{\Delta n_2}{\lambda_2} \right) d = 0,075 \text{ d}$$

de unde se obține că $d = 0,546 \text{ mm}$.

4.17. Pe o celulă cu cristal lichid nematic (CLN), căreia îi atașăm un sistem de axe XYZ, cade un fasciculul de lumină care are direcția Z și este liniar polarizat după direcția (P) în planul (X,Y) (fig.4.17a). Sub acțiunea unui câmp electric aplicat pe celulă, orientarea moleculelor de CLN poate fi modificată astfel că directorul \mathbf{n} al matricii CLN (axa optică a.o.) face un unghi θ cu planul (X,Y). Birefringența optică Δn a CLN depinde de unghiul θ iar lungimea de undă transmisă de către matricea de CLN (culoarea CLN) este funcție de această înclinare a moleculelor în raport cu planul (X,Y). Se cere:

a) să se găsească expresia dependenței de unghiul θ a birefringenței optice a CLN precum și a intensității luminii transmise de cristalul lichid;

b) să se reprezinte grafic dependența de unghiul θ a indicelui de refracție extraordinar, a birefringenței CLN precum și a intensității luminii transmise de CLN, astfel orientat.

Rezolvare:

a) Matricea de CLN, așa cum este prezentată în fig.4.17.a. va fi birefringentă. Prin cristalul lichid se vor propaga două unde: unda ordinară polarizată în direcția X, perpendicular pe planul (Y,Z), și o undă extraordinară polarizată în planul (Y,Z), care este planul secțiunii principale. Vom nota cu x,y,z , axele principale ale elipsoidului indicilor de refracție ai CLN care, din cauza înclinării directorului \mathbf{n} față de planul de intrare (X,Y) al celulei, vor fi diferite de axele sistemul XYZ, atașat celulei. Axa z descrie orientarea directorului \mathbf{n} (sau a axei optice a.o.). Elipsoidul indicilor de refracție are, pentru o matrice uniaxială de CLN, o

simetrie rotațională în raport cu direcția \mathbf{n} . Valorile principale ale indicilor de refracție le vom nota cu n_o și n_e , unde $n_o = n_x = n_y$ și $n_e = n_z$. Dacă direcția fascicului incident pe celulă este Z, atunci în planul (X,Y) secțiunea elipsoidului indicilor, perpendiculară pe direcția incidentă, este o elipsă având semiaxa mare de valoare n (care este un indice extraordinar), și semiaxa mică n_o , așa cum se poate vedea din fig.4.17.b.

În planul (Y,Z) secțiunea principală a elipsoidului (care conține axa optică z) este elipsa de semiaxe n_e respectiv n_o . Mărimea $\Delta n_{\max} = n_e - n_o$ reprezintă valoarea maximă a birefringentei CLN, pentru situația în care moleculele ar avea o orientare planară cu directorul \mathbf{n} paralel cu axa Y, în timp ce în cazul problemei noastre birefringența este $\Delta n(\theta) = n(\theta) - n_o$.

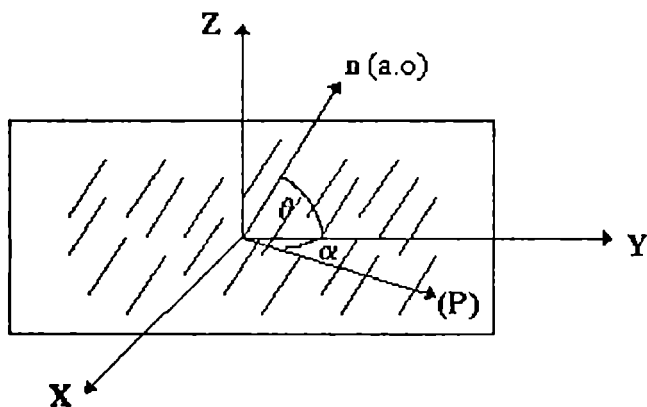


Fig. 4.17.a

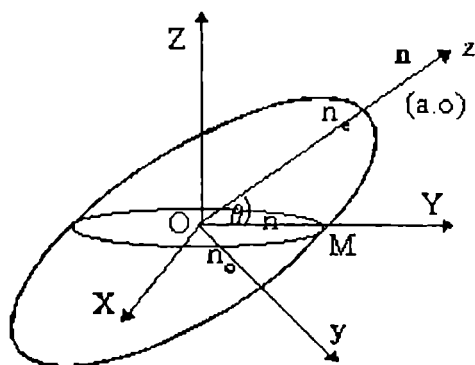


Fig. 4.17.b

Ecuajia elipsei din planul (y,z) este:

$$\frac{z^2}{n_e^2} + \frac{y^2}{n_o^2} = 1 \quad (4.17.1)$$

Pentru a afla pe $\Delta n(\theta) = n(\theta) - n_o$, trebuie să determinăm pe $n(\theta)$.

Componentele y, z ale punctului M sunt:

$$z = n \cos\theta \quad (4.17.2)$$

$$y = n \sin\theta$$

Înlocuind pe y și z în relația (4.17.1) se obține:

$$\frac{n^2 \sin^2 \theta}{n_o^2} + \frac{n^2 \cos^2 \theta}{n_e^2} = 1 \quad (4.17.3)$$

Prin urmare

$$n^2 \left(\frac{\sin^2 \theta}{n_o^2} + \frac{\cos^2 \theta}{n_e^2} \right) = 1 \quad (4.17.4)$$

și

$$n(\theta) = \frac{n_o n_e}{\sqrt{n_e^2 \sin^2 \theta + n_o^2 \cos^2 \theta}} \quad (4.17.5)$$

Birefrința va fi:

$$\Delta n(\theta) = n(\theta) - n_o = n_o \left(\frac{n_e}{\sqrt{n_e^2 \sin^2 \theta + n_o^2 \cos^2 \theta}} - 1 \right) \quad (4.17.6)$$

Intensitatea luminii transmisă de analizor va fi (vezi problema 4.12):

$$I(\theta, \lambda) = I_o \sin^2 2\alpha \cdot \sin^2 \frac{\varphi(\theta, \lambda)}{2} \quad (4.17.7)$$

unde defazajul φ este:

$$\varphi(\theta, \lambda) = \frac{2\pi d \Delta n(\theta, \lambda)}{\lambda} \quad (4.17.8)$$

Se observă că $I = I(\theta, \lambda)$, ceea ce explică culoarea texturilor cristalelor lichide. La o lungime de undă fixată intensitatea luminii transmise depinde numai de θ . Deasemenea dacă $\theta=0$, $\Delta n = n_e - n_o$ va fi maximă, iar la $\theta = \pi/2$ $\Delta n = 0$ (extincție).

b) În figurile 4.17.c, 4.17.d și respectiv 4.17.e sunt prezentate dependențele de unghiul θ pentru indicii de refracție extraordinar

$n(\theta)$, birefrință $\Delta n(\theta)$ precum și pentru intensitatea luminii transmise, la două lungimi de undă $\lambda_1 = 0,6 \mu\text{m}$ și $\lambda_2 = 0,45 \mu\text{m}$. Pentru reprezentarea grafică au fost utilizate ca date de intrare valorile :

$$\begin{aligned} n_e(\lambda_1) &= 1,68 & n_o(\lambda_1) &= 1,53 \\ n_e(\lambda_2) &= 1,75 & n_o(\lambda_2) &= 1,55 \\ d &= 12 \mu\text{m} & \alpha &= 45^\circ. \end{aligned}$$

Funcțiile care descriu indicii de refracție (4.17.5), birefrințele (rel.4.17.6) și intensitățile (4.17.7), corespunzătoare celor două lungimi de undă au fost notate cu indicii 1 și 2.

Se observă din fig.4.17.d că birefrința scade odată cu creșterea unghiului θ , astfel încât la $\theta = \pi/2$ birefrința ajunge la valoarea zero.

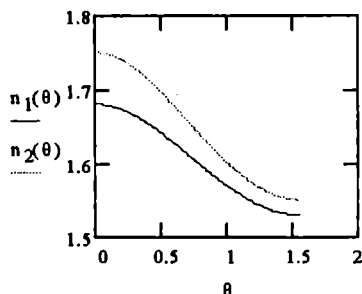


Fig. 4.17.c

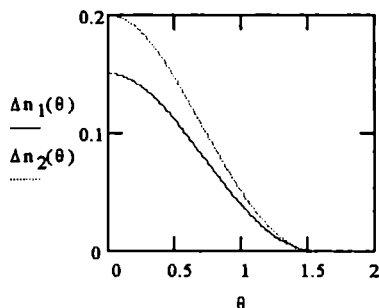


Fig. 4.17.d

Pentru o lungime de undă dată, intensitatea luminii transmise $I(\theta)$ variază periodic, în funcție de θ , ca în fig.4.17.e. După cum se vede culoarea cristalului lichid poate să rezulte dintr-o combinație de lungimi de undă transmise.

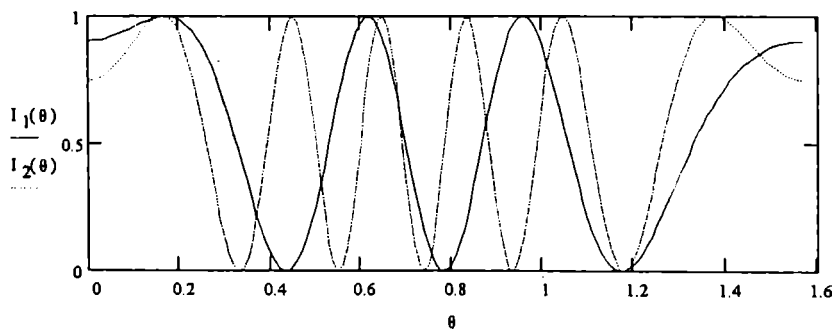


Fig. 4.17.e

4.18. Într-o celulă de cristal lichid nematic (CLN) cu ordonare răsucită, axele lungi ale moleculelor sunt paralele cu planul electrozilor

dar efectuează între aceștia o rotație de $\pi/2$. Să se găsească expresia intensității luminii transmise de o astfel de celulă, atunci când este așezată între polarizori încrucișați.

Rezolvare:

Să considerăm că planul celulei este xy , iar fasciculul de lumină incident are direcția z și este liniar polarizat cu ajutorul polarizorului (P).

Să considerăm de asemenea că vectorul electric \vec{E} în radiația linear polarizată, incidentă pe celulă, are orientarea dată de axa optică a polarizorului (P) și face un unghi α_0 cu axa x_0 . În primul strat de molecule directorul are direcția axei x_0 , în stratul al doilea directorul va avea direcția x_1 , și așa mai departe (fig.4.18). Rotația directorului matricii de CLN în jurul axei z , reprezintă în fapt rotația sistemului de axe (x,y) legat de un strat molecular, până când, după o rotație cu un unghi total $\alpha_m = \pi/2$, axa x_n va avea direcția axei y_0 . Să considerăm că rotația, de la un strat de molecule la altul, se face cu un unghi α .

Vectorul electric \vec{E} , de amplitudine E , incident pe primul strat molecular va fi descompus în componentele $E_x^{(o)}$ (extraordinară) și $E_y^{(o)}$ (ordinară), care au amplitudinile:

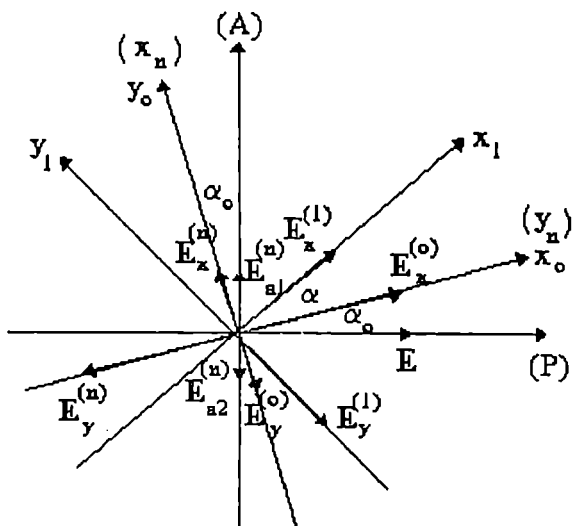


Fig. 4.18

$$\begin{aligned} E_x^{(o)} &= E \cos \alpha_0 \\ E_y^{(o)} &= E \sin \alpha_0 \end{aligned} \tag{4.18.1}$$

Vectorii $E_x^{(0)}$ și $E_y^{(0)}$ se vor descompune la rândul lor fiecare în alte două componente în raport cu sistemul de axe (x_1, y_1) legat de stratul molecular următor și se vor obține în final vectorii $E_x^{(1)}$ și $E_y^{(1)}$ s.a.m.d. Deoarece este vorba de o rotație a sistemului de axe, amplitudinile $E_x^{(1)}$ și $E_y^{(1)}$ se obțin cu ajutorul transformării:

$$\begin{pmatrix} E_x^{(1)} \\ E_y^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x^{(0)} \\ E_y^{(0)} \end{pmatrix} \quad (4.18.2)$$

unde matricea:

$$\tilde{R} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

prezentă în relația (4.18.2) reprezintă matricea de rotație de la sistemul (x_0, y_0) la (x_1, y_1) . În mod similar se procedează atunci când trebuie să obținem componentele $E_x^{(2)}$ și $E_y^{(2)}$:

$$\begin{pmatrix} E_x^{(2)} \\ E_y^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x^{(1)} \\ E_y^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} E_x^{(0)} \\ E_y^{(0)} \end{pmatrix}$$

Procedând la fel și mai departe se poate scrie că:

$$\begin{pmatrix} E_x^{(n)} \\ E_y^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} E_x^{(0)} \\ E_y^{(0)} \end{pmatrix} \quad (4.18.3)$$

unde n este numărul de straturi care fac rotația cu un unghi α . Dacă rotația totală reprezintă $\alpha_m = \pi/2$, se poate observa că $\alpha = \pi/2n$. Prin calcul se obține că:

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.18.4)$$

indiferent de numărul n . Prin urmare:

$$\begin{pmatrix} E_x^{(n)} \\ E_y^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x^{(0)} \\ E_y^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_y^{(0)} \\ -E_x^{(0)} \end{pmatrix} \quad (4.18.5)$$

Componentele care trec de analizorul (A) vor fi:

$$E_{a1}^{(n)} = E_x^{(n)} \cos \alpha_0 = E_y^{(0)} \cos \alpha_0 = E \cos \alpha_0 \sin \alpha_0 = \frac{1}{2} E \sin 2\alpha_0$$

$$E_{a2}^{(n)} = E_y^{(n)} \sin \alpha_0 = -E_x^{(0)} \sin \alpha_0 = -E \cos \alpha_0 \sin \alpha_0 = -\frac{1}{2} E \sin 2\alpha_0$$

Prin urmare intensitatea undelor transmise de către analizorul (A) va fi:

$$I = (E_{a1}^{(n)})^2 + (E_{a2}^{(n)})^2 - 2E_{a1}^{(n)} E_{a2}^{(n)} \cos \varphi = \\ = \frac{1}{2} E^2 \sin^2 2\alpha_0 (1 - \cos \varphi)$$

adică :

$$I = I_0 \sin^2 2\alpha_0 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \quad (4.18.7)$$

unde φ reprezintă defazajul total dintre undele extraordinare și ordinare la ieșirea din celulă. Acest defazaj are valoarea $\varphi = 2\pi d \Delta n / \lambda$, unde $\Delta n = n_e - n_o$ este birefringența, iar n_e , n_o sunt valorile principale ale indicilor de refracție. Se poate constata că expresia (4.18.7) este aceeași cu expresia (4.12.2), obținută la problema 4.12.

Așa după cum se poate vedea și din fig.4.18, rotația cu un unghi α a directorului straturilor nematice determină o rotație corespunzătoare a vectorilor electrici ai undelor care se propagă în cristal, de la un strat la altul. Dacă $\alpha_0 = 0$, atunci $E_x^{(o)} = E$, $E_y^{(o)} = 0$ și se poate constata, din (4.18.5), că:

$$E_x^{(n)} = 0, \quad E_y^{(n)} = -E_x^{(o)}$$

adică radiația, care la intrarea în celulă este liniar polarizată în direcția x , la ieșirea din celula cu structură răsucită va fi polarizată după o direcție y , perpendiculară pe aceea avută la intrarea în celulă.

4.19. Două lame anizotrope de cuarț, de grosimi $d_1 = 2\text{mm}$ și respectiv $d_2 = 1\text{mm}$, sunt lipite una de alta și sunt astfel tăiate încât să aibă axele optice AO1 și AO2 ortogonale. Pe pachetul de lame se trimite, perpendicular pe axele lor optice, un fascicul de lumină monocromatică liniar polarizat astfel ca vectorul electric E_1 să facă un unghi $\alpha = 30^\circ$ în raport cu axa AO1. Se cere:

a) să se determine starea de polarizare a undelor ce se propagă prin cele două lame;

b) să se calculeze diferența de fază totală, produsă de cele două lame, dacă pe lame este trimis un fascicul de lumină cu lungimea de undă $\lambda = 589\text{nm}$, pentru care cuarțul prezintă indicii de refracție principali $n_o = 1.5442$ și $n_e = 1.5533$.

Rezolvare:

a) În fig.4.18 este prezentat sistemul de axe xyz, atașat sistemului de lame: axa optică AO1 este orientată după Oz, iar axa AO2 după Ox. Fasciculul are direcția incidentă Oy și este liniar polarizat în planul xz. Vectorul E_i în fasciculul incident este orientat sub un unghi $\alpha=30^\circ$ în raport cu axa Oz.

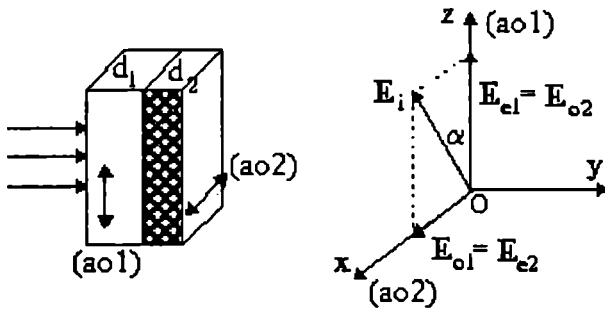


Fig. 4.19.

În prima lamă se vor propaga două unde: unda ordinară în care vectorul E_{o1} oscilează în direcția Ox și unda extraordinară având vectorul E_{e1} polarizat după Oz. În lama a doua, datorită ortogonalității axelor optice (ao1) și (ao2), unda ordinară cu E_{o1} din prima lamă devine unda extraordinară (E_{e2}) în cea de-a doua lamă și invers, unda extraordinară (E_{e1}) devine undă ordinară (E_{o2}) în lama a doua. În raport cu sistemul de axe considerat vom putea scrie :

$$E_x = E_{o1} = E_{e2}$$

$$E_z = E_{e1} = E_{o2}$$

b) La ieșire din sistemul celor două lame, diferența totală de drum optic va fi:

$$\delta = \delta_z - \delta_x$$

unde

$$\delta_x = n_o d_1 + n_e d_2$$

$$\delta_z = n_e d_1 + n_o d_2$$

și prin urmare:

$$\delta = (n_e - n_o)(d_1 - d_2)$$

Efectuând calculele se obține $\delta = 9,1 \mu\text{m}$.

Diferența de fază va fi:

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \delta = 30,9\pi \text{ (rad)}$$

Prin urmare, la ieșirea din sistemul de lame lumina va fi eliptic polarizată deoarece defazajul $\varphi \neq m\pi$, iar amplitudinile celor două unde sunt $A_z = A \cos(30^\circ)$, $A_x = A \sin(30^\circ)$, adică $A_x \neq A_z$.

4.20. Două lame de cuarț sunt tăiate sub forma unor pene și așezate ca în fig.4.20.a., formând un dispozitiv numit compensator. Axele optice (ao1) și (ao2) ale celor două pene sunt ortogonale. Lungimea penelor este $l = 5\text{cm}$ și $\theta = 5^\circ$.

Pe acest dispozitiv este trimis, sub incidență normală, un fascicul larg de lumină monocromatică cu lungimea de undă $\lambda = 589\text{nm}$, pentru care cuarțul prezintă indicii de refracție principali $n_o = 1,5442$ și $n_e = 1,5533$. Lumina transmisă de către compensator este analizată cu ajutorul unui analizor liniar A, așezat după compensator. Să se analizeze imaginea care se obține privind prin analizor și care corespunde unor stări de polarizare diferite pentru diferite zone ale compensatorului.

Rezolvare:

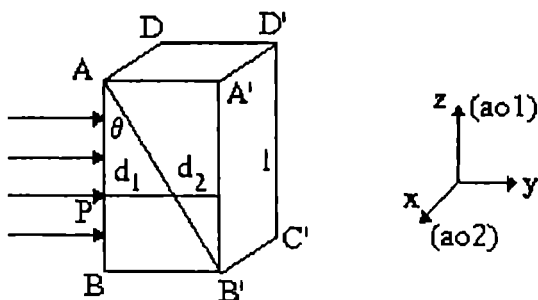


Fig. 4.20.a.

Să considerăm din fasciculul incident o rază de lumină care cade normal pe fața de intrare ABCD a compensatorului, într-un punct P, aflat la distanța $AP = x$. Fenomenele care se produc sunt aceleași ca și cele prezentate în problema 4.19. Prin urmare diferența dintre fazele undelor ordinară și extraordinară, la ieșirea din compensator va fi:

$$\varphi = \frac{2\pi \Delta n (d_2 - d_1)}{\lambda} \quad (4.20.1)$$

Pentru o lungime de undă dată λ , Δn are o valoare bine determinată, astfel că defazajul φ poate să varieze doar în funcție de diferența (d_1-d_2).

Din fig.4.20.a. se observă că:

$$\begin{aligned} d_1 &= x \operatorname{tg}\theta \\ d_2 &= (1-x) \operatorname{tg}\theta \end{aligned} \quad (4.20.2)$$

de unde

$$d_1-d_2 = (2x-1) \operatorname{tg}\theta \quad (4.20.3)$$

$$\varphi = \frac{2\pi\Delta n(2x-1)\operatorname{tg}\theta}{\lambda} \quad (4.20.4)$$

Defazajul mai poate fi pus sub forma:

$$\varphi = ax-b, \quad (4.20.5)$$

unde: $a = \frac{4\pi\Delta n \operatorname{tg}\theta}{\lambda}$ $b = \frac{2\pi\Delta n \operatorname{tg}\theta}{\lambda}$

Utilizând datele problemei se obține $a = 5,4\pi$ $b = 135\pi$.

Din relația (4.20.5) se poate constata că φ variază liniar cu distanța x . Deasemenea, în absența absorbției cuarțului ($\lambda=589\text{nm}$ se află în afara benzii de absorbție), amplitudinile celor două unde sunt egale. În consecință, în urma interferenței celor două unde emergente din compensator și polarizate după două direcții reciproc perpendiculare, pot rezulta diferite stări de polarizare (vezi problema 4.11):

a) lumină linear polarizată cu vectorul electric orientat ca în fig.4.20.b - stare de polarizare pe care o vom nota cu E_1 - dacă:

$$\varphi = ax_m^{(1)} - b = 2m\pi, \quad m=0,1,2,\dots \quad (4.20.6)$$

Această stare se obține pentru pozițiile date de:

$$x_m^{(1)} = 2m\pi/a + b/a \quad (4.20.7)$$

sau $x_m^{(1)} = 0,37m + 25$

Lumina care trece prin anumite zone ale compensatorului, caracterizate de $x_m^{(1)}$ devine linear polarizată (starea E_1). Aceste zone sunt echidistante deoarece pentru două zone succesive avem:

$$x_{m+1}^{(1)} = 2(m+1)\frac{\pi}{a} + \frac{b}{a} \quad (4.20.8)$$

$$x_m^{(1)} = 2m\frac{\pi}{a} + \frac{b}{a}$$

astfel că:

$$\Delta x^{(1)} = \frac{2\pi}{a} = 0,37 \text{ mm}$$

Aceste stări pot fi analizate cu ajutorul unui analizor liniar: dacă axa optică a analizorului este paralelă cu direcția de polarizare E_1 , atunci se vor observa o serie de maxime și minime sub forma unor benzi luminoase (maxime) și întunecate (minime), separate prin $\Delta x^{(1)}$ (fig.4.20.c). Între un maxim și un minim separația este de $\pi/a = 0,185\text{mm}$.

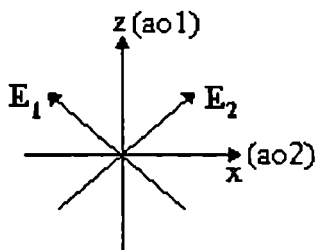


Fig. 4.20.b.

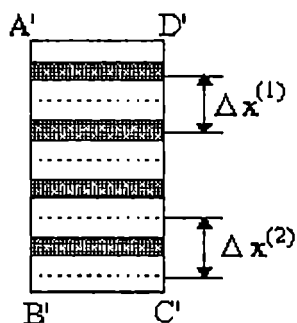


Fig. 4.20.c.

b) lumină liniar polarizată, având vectorul electric E_2 , simetric cu E_1 în raport cu axa optică (ao2), dacă:

$$\varphi = ax_m^{(2)} - b = (2m+1)\pi, \quad m=0,1,2,\dots \quad (4.20.9)$$

adică pentru:

$$x_m^{(2)} = (2m+1)\pi/a + b/a \quad (4.20.10)$$

Separația dintre aceste zone va fi de asemenea:

$$\Delta x^{(2)} = \frac{2\pi}{a} = 0,37 \text{ mm}$$

adică $\Delta x^{(1)} = \Delta x^{(2)}$.

Orientând axa optică a analizorului astfel ca să fie selectată starea de polarizare E_2 ($A \parallel E_2$), se va obține o figură asemănătoare cu aceea obținută în cazul a) dar complementară, adică maximelor de la cazul b) le corespund minimele din cazul a).








c) pentru situația intermediară:

$$\varphi = ax_m^{(0)} - b = (2m+1)\frac{\pi}{2} \quad (4.20.11)$$

adică pentru zone caracterizate de:

$$x_m^{(0)} = (2m+1)\frac{\pi}{2a} + \frac{b}{a} \quad (4.20.12)$$

lumina emergentă din compensator va fi circular polarizată (o). În tabelul următor este prezentată evoluția stării de polarizare a luminii în funcție de defazajul φ , produs de variația distanței x .

defazajul	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π	$5\pi/2$	3π
starea de polarizare	(1)	(o)	(2)	(o)	(1)	(o)	(2)
							

PROBLEME PROPUSE

4.21. O celulă conține o peliculă de cristal lichid uniax pozitiv cu grosimea $d=30\mu\text{m}$. Cristalul lichid are indicii de refracție principali $n_z=1,678$, $n_x=n_y=1,495$ pentru lungimea de undă $\lambda=550\text{ nm}$. Să se determine:

- viteza undei ordinare și extraordinare;
- drumurile optice străbătute de cele două unde.

R: a) $v_z=1,788 \cdot 10^8\text{ m/s}$, $v_x=2 \cdot 10^8\text{ m/s}$; b) $50,34\ \mu\text{m}$, $44,85\ \mu\text{m}$.

4.22. Un fascicul paralel de lumină monocromatică cade, sub incidență normală, pe o lamă de cuarț de grosime $d=1\text{mm}$, tăiată paralel cu axa optică. Fasciculul incident pe lamă este linear polarizat (cu ajutorul unui polarizor) având vectorul electric E_1 orientat sub un unghi $\alpha=30^\circ$ în raport cu axa optică a cristalului. Dacă $n_o=1,544$, $n_e=1,655$ sunt valorile principale ale indicilor de refracție ordinar și extraordinar ai cristalului, pentru lungimea de undă $\lambda=500\text{nm}$, iar amplitudinea câmpului electric al undei incidente este $A=1\text{V/m}$ să se determine :

- diferența de drum δ ;
- diferența de fază φ și ecuația elipsei de polarizare a luminii, transmise de lamă.

R: a) $\delta=0,111\text{mm}$; b) $\varphi=1,34 \cdot 10^3\text{ rad}$.

4.23. O peliculă de cristal lichid uniax pozitiv de grosime $d=0,2\text{mm}$ are axa optică în direcția X_2 . O radiație monocromatică cu lungimea de undă $\lambda=550\text{nm}$, linear polarizată în planul X_1X_2 este trimisă,

sub incidență normală, pe direcția X_3 perpendiculară la fața X_1X_2 a cristalului. Câmpul electric al unde are amplitudinea $E_0=2$ V/m și oscilează după o direcție care face un unghi $\alpha=\pi/3$ cu axa X_1 . Indicii de refracție principali ai cristalului lichid la $\lambda=550$ nm sunt $n_1=n_3=1,51$ și $n_2=1,55$. Să se determine:

- vitezele principale v_1 și v_2 ;
- birefrința Δn a cristalului;
- diferența de fază φ a celor două raze, ordinară și extraordinară;
- amplitudinile A_1 și A_2 ale razelor ordinară și extraordinară.

R: a) $v_1=1,987 \cdot 10^8$ m/s, $v_2=1,935 \cdot 10^8$ m/s; b) $\Delta n=0,04$; c) $\varphi=91,39$ rad; d) $A_1=1$ V/m, $A_2=1,732$ V/m

4.24. O celulă conține o peliculă de cristal lichid uniax pozitiv cu grosimea $d=30\mu\text{m}$, axa optică Oz și fața de intrare xy. Cristalul lichid are indicii de refracție principali $n_z=1,678$, $n_x=n_y=1,495$ pentru lungimea de undă $\lambda=550$ nm. Pe cristalul lichid cade, sub un unghi de incidență $i=\pi/3$ în raport cu Oz, un fascicul de lumină monocromatică având $\lambda=550$ nm. Să se determine:

- valoarea indicilor de refracție ordinar și extraordinar ai cristalului lichid la $\lambda=550$ nm, pentru acest unghi de incidență;
- diferența de drum optic δ dintre razele ordinară și extraordinară;
- diferența de fază φ corespunzătoare.

R: a) $n_o=1,495$, $n_e=1,626$; b) $\delta=7,86\mu\text{m}$; c) $\varphi=89,8$ rad.

4.25. O celulă conține o peliculă de cristal lichid uniax pozitiv cu grosimea $d=20\mu\text{m}$, axa optică Oz și fața de intrare xy. Cristalul lichid are indicii de refracție principali $n_z=1,565$, $n_x=n_y=1,490$ pentru lungimea de undă $\lambda=550$ nm. Pe cristal cade, sub un unghi de incidență $i=\pi/6$ în raport cu Oz, un fascicul de lumină monocromatică având $\lambda=550$ nm. Să se determine:

- valoarea indicilor de refracție ordinar și extraordinar ai cristalului lichid la $\lambda=550$ nm, pentru acest unghi de incidență;
- diferența de drum optic δ dintre razele ordinară și extraordinară la o incidență $i=\pi/6$;
- diferența de fază φ corespunzătoare $i=\pi/6$.

R: a) $n_o=1,490$, $n_e=1,508$; b) $\delta=0,41\mu\text{m}$; c) $\varphi=4,68$ rad.

4.26. Un material optic uniax pozitiv are indicii de refracție principali $n_1=1,495$ (indice ordinar) și $n_2=1,688$ (indice extraordinar) corespunzători lungimii de undă $\lambda=435$ nm. Să se determine:

a) care trebuie să fie grosimea minimă a materialului pentru ca să producă lumină linear polarizată;

b) care trebuie să fie grosimea minimă a materialului pentru ca să producă lumină circular polarizată.

R: a) $1,127\mu\text{m}$; b) $0,563\mu\text{m}$.

4.27. O celulă de cristal lichid este așezată între doi polarizori. (P) și (A) Polarizorul (P) transmite pe celulă o radiație linear polarizată, având vectorul electric orientat sub un unghi $\alpha=45^\circ$ în raport cu axa optică a cristalului lichid. Al doilea polarizor (A) funcționează ca analizor, transmițând doar componentele paralele cu axa sa optică. Radiația incidentă pe celula de cristal lichid este monocromatică având lungimea de undă $\lambda=435\text{nm}$, pentru care cristalul lichid are indicii de refracție principali $n_o=1,45$ și $n_e=1,68$. Stratul de cristal lichid are grosimea $d=10\mu\text{m}$, iar direcția axei optice (a.o) este Oz și se află în planul feței de intrare a celulei.

Să se analizeze starea de polarizare a luminii transmise de stratul de cristal lichid și să se determine intensitatea luminii:

a) după analizor, dacă axele optice ale polarizorului (P) și analizorului (A) sunt paralele;

b) după analizor, dacă axele optice ale polarizorului (P) și analizorului (A) sunt ortogonale.

R: a) $0,884 I_o$; b) $0,616 I_o$.

4.28. Într-o celulă de cristal lichid nematic (CLN) cu ordonare răsucită, axele lungi ale moleculelor sunt paralele cu planul electrozilor dar efectuează între aceștia o rotație de $\pi/2$. Să se găsească expresia intensității luminii transmise de o astfel de celulă, atunci când este așezată între polarizori paraleli.

R: $I=I_o[1-\sin^2 2\alpha \sin^2(\varphi/2)]$

5. INTERFERENȚA LUMINII

PROBLEME REZOLVATE

5.1. Să se arate că dacă în fața uneia dintre fantele dispozitivului lui Young se așează o lamă plan-paralelă de grosime e și de indice de refracție n constant, cu fețele perpendiculare pe direcția razelor de lumină, atunci imaginea de interferență observată pe un ecran paralel cu planul fantelor se deplasează către partea unde a fost introdusă placa dielectrică cu distanța $\Delta x = ei(n-1)/\lambda$, unde i reprezintă interfranța.

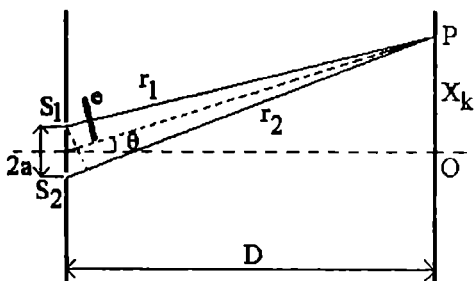


Fig. 5.1

Rezolvare:

Se va ține cont de ipoteza utilizată în dispozitivul lui Young: $D \gg 2a$. D reprezintă distanța dintre planul fantelor și ecranul pe care se observă figurile de interferență, iar $2a$ este distanța dintre cele două fante.

În cazul în care lama plan-paralelă nu este introdusă în calea fascicului de lumină, diferența de drum optic este $\delta = r_2 - r_1$, sau:

$$\begin{aligned}\delta &= S_2P - S_1P = \sqrt{D^2 + (x+a)^2} - \sqrt{D^2 + (x-a)^2} \stackrel{dev}{\approx} \\ &\approx D \left[1 + \frac{(x+a)^2}{2D^2} - 1 - \frac{(x-a)^2}{2D^2} \right] \\ \delta &= \frac{2ax}{D}\end{aligned}$$

Din condiția de obținere a maximului de interferență: $\delta = k\lambda$, $k \in \mathbf{Z}$,

se deduce poziția acestui maxim de ordin k : $x_{k_0} = k \frac{D\lambda}{2a}$, precum și

interfranța corespunzătoare: $i = \frac{D\lambda}{2a}$.

În cazul în care se introduce lama plan-paralelă, diferența de drum optic se modifică corespunzător:

$$\delta' = (S_2P) - (S_1P) = r_2 - (r_1 - e + ne) = (r_2 - r_1) - e(n-1) = \delta - e(n-1)$$

Impunând și în acest caz o condiție de maxim similară, rezultă: $\delta a = k\lambda$, $k \in \mathbf{Z}$,

$$(r_2 - r_1) - e(n-1) = k\lambda \Rightarrow \frac{2ax_k}{D} - e(n-1) = k\lambda \Rightarrow$$

$$x_k = \frac{D}{2a} [k\lambda + e(n-1)]$$

$$x_k = \frac{kD\lambda}{2a} + \frac{e(n-1)D}{2a} \cdot \frac{\lambda}{\lambda} = x_{k_0} + \frac{e(n-1)D}{2a} \cdot \frac{\lambda}{\lambda},$$

unde x_{k_0} reprezintă maximul de ordin k în absența lamei. Distanța cu care s-a deplasat maximul de ordin k în prezența lamei este Δx_k :

$$\Delta x = x_k - x_{k_0} = \frac{e(n-1)D}{2a} \cdot \frac{\lambda}{\lambda} = \frac{e}{\lambda} (n-1) \cdot i.$$

Cum i , e , λ , $(n-1)$ sunt pozitive, rezultă că $\Delta x_k > 0$, ceea ce înseamnă că imaginea de interferență se deplasează către partea unde a fost introdusă lama cu fețe plan-paralele în calea undelor de lumină.

5.2. Un dispozitiv de tip Young cu trei fante echidistante (fanta din mijloc se situează pe axul de simetrie al dispozitivului) de largimi egale cu a este iluminat cu o radiație monocromatică paralelă, cu

lungimea de undă λ . Franjele de interferență se captează pe un ecran E aflat la distanța D ($D \gg a$) față de planul fantelor. Să se determine distribuția maximelor și minimelor intensității luminoase pe ecran funcție de distanța x față de axa de simetrie a sistemului interferențial.

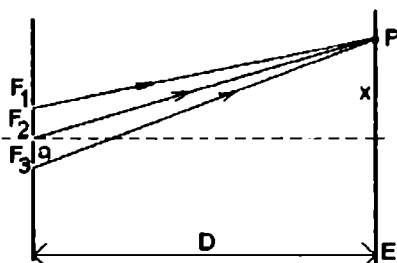


Fig. 5.2

Rezolvare:

Diferența de drum optic dintre oscilațiile generate de două fante consecutive are valoarea:

$$\delta = a \frac{x}{D},$$

care s-a calculat la dispozitivul Young prezentat în problema 5.1.

Sursa secundară corespunzătoare fantei F_1 prezintă față de F_2 un defazaj înainte cu:

$$\varphi = \frac{2\pi\delta}{\lambda},$$

pe când fanta sursă secundară F_3 prezintă față de F_2 un defazaj în urmă de aceeași valoare φ .

În punctul P interferă undele de ecuații:

$$E_1 = E_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

$$E_2 = E_0 \cos \omega t$$

$$E_3 = E_0 \cos(\omega t - \varphi)$$

Unda rezultantă în P va fi:

$$E_{\text{rez}} = E_{0\text{rez}} \cos \omega t = E_1 + E_2 + E_3, \text{ unde:}$$

$$E_{\text{rez}} = E_1 + E_2 + E_3 = E_0 (\cos(\omega t + \varphi) + \cos \omega t + \cos(\omega t - \varphi))$$

$$E_{\text{rez}} = E_0 (1 + 2 \cos \varphi) \cos \omega t = E_0 (3 - 4 \sin^2(\varphi/2)) \cos \omega t.$$

Prin urmare, amplitudinea unei rezultante în punctul P este:

$$E_{\text{rez}} = E_0 \left(3 - 4 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right)$$

în care faza φ este:
$$\varphi = \frac{2\pi\delta}{\lambda} = \frac{2\pi a}{\lambda D} x.$$

Deoarece $I \sim E^2_{rez}$, avem:
$$I = I_0 \left(3 - 4 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right).$$

Maximele principale se obțin pentru $\varphi = 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. În acest caz $I_p = 9I_0$, iar pozițiile acestora vor fi date de:

$$x_k = \frac{Dk\lambda}{a}, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Maxime secundare se obțin pentru $\varphi = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. În acest caz $I_s = I_0$, iar pozițiile acestora vor fi date de:

$$x_k = \frac{\lambda D}{a} \left(k + \frac{1}{2} \right).$$

Minimele se obțin pentru: $\varphi = 2\pi/3$, $\varphi = 4\pi/3, \dots$ cu $\varphi \in \hat{1}0, 2\pi\hat{s}$. În acest caz $I_m = 0$, iar pozițiile acestora vor fi date de:

$$x_m = \frac{\lambda D}{3a} \quad \text{și} \quad x_m = \frac{2\lambda D}{3a}, \quad \text{cu } \varphi \in \hat{1}0, 2\pi\hat{s}.$$

Cu toate acestea, distanța dintre două maxime principale, adică interfranja, are aceeași valoare $D\lambda/a$ ca în cazul în care sistemul interferențial ar avea numai două fante cu distanța a între ele (dispozitivul de tip Young clasic).

5.3. Se dau două surse luminoase coerente S_1 și S_2 așezate ca în figura următoare. Se știe că $D \gg \lambda$, $a = m\lambda \gg \lambda$, $m \in \mathbf{Z}$. Se cere:

a) să se descrie ansamblul figurilor de interferență de pe ecran;

b) distanța de la centrul A al ecranului (E) până la maximul vecin celui central.

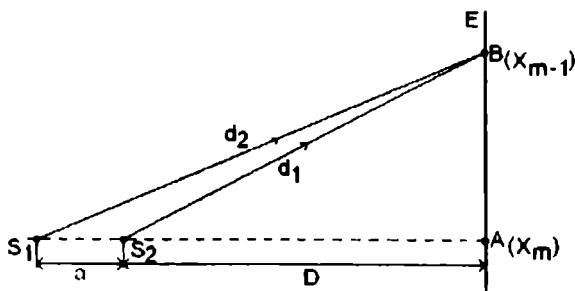


Fig. 5.3

Rezolvare:

a) Condiția de formare a maximumului de interferență este impusă diferenței de drum optic: $d_2 - d_1 = m\lambda$, $m \in \mathbb{Z}$, care pentru cazul particular din figură $S_2A = d_2$, $S_1A = d_1$, devine $a = m\lambda$. În punctul A central se va forma maximumul de ordinul m , iar figurile de interferență vor fi coroane circulare cu centrul în A.

b) Următorul cerc luminos se va situa la distanța dată de relația:

$$d_2 - d_1 = (m-1)\lambda$$

sau din triunghiurile dreptunghice ce se formează se poate scrie relația:

$$\sqrt{(m\lambda + d)^2 + x_{m-1}^2} - \sqrt{D^2 + x_{m-1}^2} = (m-1)\lambda$$

Ținând cont de condițiile impuse de problemă $D \gg \lambda$, $a \gg \lambda$, se ajunge, în final, la:

$$x_{m-1} \cong \sqrt{\frac{2D(D + m\lambda)}{m}} \quad \text{sau} \quad x_{m-1} \cong \sqrt{2D\lambda \left(\frac{D}{a} + 1 \right)}.$$

5.4. Două surse punctiforme monocromatice coerente, S_1 și S_2 , sunt așezate pe axa optică a unei lentile subțiri L având distanța focală f . În focarul lentilei, perpendicular pe axa optică principală, se află un ecran E de observare. Oscilațiile sursei S_1 sunt defazate cu φ înaintea oscilațiilor sursei S_2 . Se cere:

a) Să se arate că locul geometric al punctelor pentru care diferența de fază φ e constantă, este o hiperbolă;

b) Să se determine distanța până la axa optică a lentilei, a punctelor de pe ecran în care se obțin maxime de interferență;

c) Să se determine forma și dimensiunile caracteristice franjelor de interferență care se obțin în cazul în care se scoate lentila L ;

d) Ce valori trebuie să aibă defazajul φ pentru ca în centrul ecranului să apară un maxim de interferență (dacă se înlătură lentila ca la punctul b)?

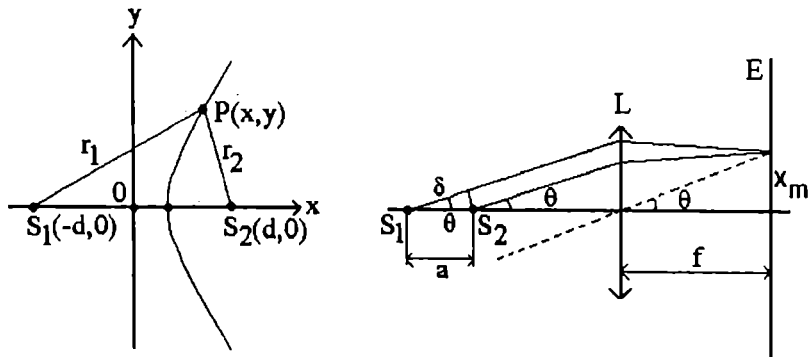


Fig. 5.4.a

Rezolvare:

a) Ecuațiile undelor care interferă în punctul P(x,y) sunt:

$$E_1 = E_0 \sin \omega \left(t - \frac{r_1}{c} \right)$$

$$E_2 = E_0 \sin \omega \left(t - \frac{r_2}{c} \right)$$

Diferența de fază dintre aceste două oscilații este: $\varphi = \frac{\omega}{c}(r_1 - r_2) = \text{const.}$,

rezultă că $\Delta r = r_1 - r_2 = 2\eta = \text{constant}$ și:

$$\sqrt{(x+d)^2 + y^2} - \sqrt{(x-d)^2 + y^2} = 2\eta \Rightarrow$$

$$x^2(d^2 - \eta^2) - \eta^2 y^2 - \eta^2(d^2 - \eta^2) = 0$$

notând $\xi^2 = d^2 - \eta^2$, rezultă:

$$\frac{x^2}{\eta^2} - \frac{y^2}{\xi^2} = 1,$$

care este ecuația unei hiperbole cu semiaxa reală η , semiaxa imaginară ξ și semidistanța focală d .

b) Fazele a două unde coerente ce pleacă de la sursele S_1 și S_2 sunt:

$$\varphi_2 = \omega \left(t - \frac{r_2}{c} \right) + \varphi \quad \text{și} \quad \varphi_1 = \omega \left(t - \frac{r_1}{c} \right), \text{ iar diferența de fază va fi:}$$

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\omega}{c}(r_1 - r_2) + \varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2) + \varphi$$

Din figură rezultă că diferența de drum δ este egală cu $a \cos\theta$, deci:

$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} a \cos\theta + \varphi$. Se impune, apoi, condiția pentru obținerea maximului de interferență:

$$\frac{2\pi}{\lambda} a \cos\theta + \varphi = 2m\pi, \quad m \in \mathbf{Z}$$

Aflând astfel $\cos\theta$, se poate, determina conform figurii, poziția maximului de ordin m de interferență față de axa optică principală a lentilei, $x_m = f \tan\theta$:

$$x_m = f \cdot \tan\theta = f \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \theta} - 1} = f \sqrt{\frac{4\pi^2 a^2}{\lambda^2 (2m\pi - \varphi)^2} - 1}, \quad m \in \mathbf{Z},$$

franjele luminoase (maximele de interferență) sunt cercuri concentrice de raze x_m cu centrele pe axa optică a lentilei.

c) Dacă scoatem lentila, conform figurii 5.4.b. rezultă:

$$r_1 - r_2 = \sqrt{(D+a)^2 + x_m^2} - \sqrt{D^2 + x_m^2}$$

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \left[\sqrt{(D+a)^2 + x_m^2} - \sqrt{D^2 + x_m^2} \right] + \varphi.$$

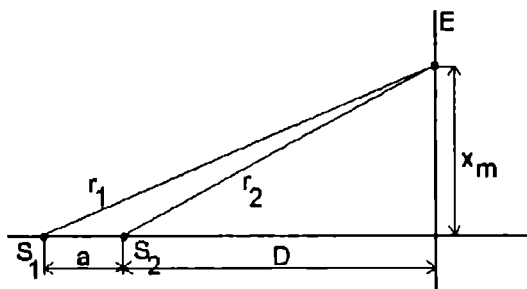


Fig. 5.4.b

Se pune condiția de maxim de interferență:

$$\frac{2\pi}{\lambda} \left[\sqrt{(D+a)^2 + x_m^2} - \sqrt{D^2 + x_m^2} \right] + \varphi = 2m\pi$$

$$x_m = \sqrt{\left[\left[2Da + a^2 - \left(\frac{\lambda}{2\pi} (2m\pi - \varphi) \right)^2 \right] \frac{\pi}{\lambda(2m\pi - \varphi)} \right]^2 - D^2}$$

Franjele luminoase vor fi cercuri concentrice având centrul pe axa optică de rază x_m .

d) Diferența de fază dintre cele două unde care interferă în centrul ecranului este:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} a + \varphi.$$

Punând condiția de maxim de interferență avem:

$$\Delta\varphi = 2m\pi \Rightarrow \varphi = 2\pi \left(m - \frac{a}{\lambda} \right).$$

5.5. Două izvoare punctiforme necoerente, monocromatice, identice, S_1 și S_2 , se găsesc la o distanță $2d$ unul față de celălalt.

Fasciculele de lumină care provin de la aceste izvoare sunt împărțite în două cu ajutorul a două oglinzi plane paralele O' și O'' (v. figura 5.5.a).

Să se stabilească condițiile de observare a franjelor de interferență pe un ecran situat la distanța D de planul surselor S_1 și S_2 . Se realizează condiția $D \gg 2d$.

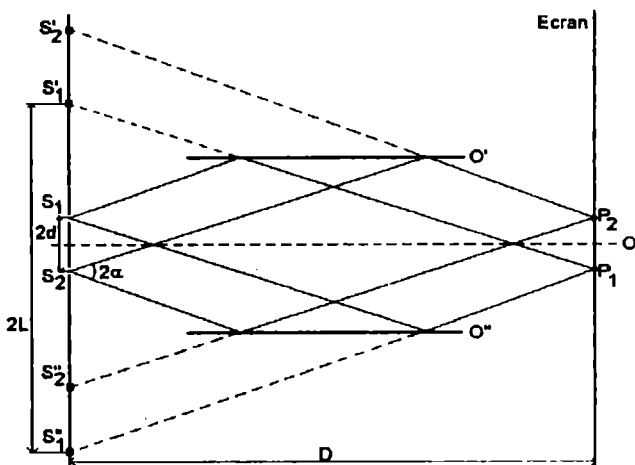


Fig. 5.5.a

Rezolvare:

Pe ecran se observă două sisteme de franje de interferență provenite de la izvoarele coerente S_1' și S_1'' și, respectiv, S_2' și S_2'' , imaginile izvoarelor S_1 și S_2 în oglinzile O' și O'' .

Notez cu $2L$ distanța dintre izvoarele coerente.

Pe ecran se va obține o distribuție de intensitate I provenită din sumarea distribuțiilor de intensitate I_1 și I_2 date de cele două perechi de izvoare coerente.

Distribuția de intensitate pe ecran provenită din interferența undelor de la S_2' și S_2'' este:

$$I_2 = 2I_0 \left(1 + \cos \frac{4\pi Lx}{\lambda D} \right)$$

Distribuția de intensitate pe ecran provenită din interferența undelor de la S_1' și S_1'' este deplasată cu $2d$ față de cele corespunzătoare primei figuri de interferență provenită de la S_2' și S_2'' :

$$I_1 = 2I_0 \left(1 + \cos \frac{4\pi L(x - 2d)}{\lambda D} \right)$$

Sursele S_1 și S_2 fiind necoerente, intensitatea totală se obține însumând relațiile anterioare:

$$I = I_1 + I_2 = 2I_0 \left(2 + \cos \frac{4\pi Lx}{\lambda D} + \cos \frac{4\pi L(x - 2d)}{\lambda D} \right)$$

Interfranța i este:

$$i = \frac{D\lambda}{2l}$$

Notez apertura de interferență cu 2α :

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{l}{D}$$

$$I = 2I_0 \left(2 + \cos \frac{2\pi x}{i} + \cos \frac{2\pi(x - 2d)}{i} \right)$$

și utilizând relația: $\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$ obțin:

$$I = 4I_0 \left(1 + \cos \frac{2\pi d}{i} + \cos \frac{2\pi(x - d)}{i} \right).$$

Stabilesc maximele și minimele de interferență (condițiile), pentru care:

$$\cos \frac{2\pi(x - d)}{i} = 1, \text{ dacă } \cos \frac{2\pi d}{i} > 0 \text{ și } \cos \frac{2\pi(x - d)}{i} = -1, \text{ dacă } \cos \frac{2\pi d}{i} < 0.$$

Valorile maxime și minime ale intensităților globale vor fi:

$$I_{\max} = 4I_0 \left(1 + \left| \cos \frac{2\pi d}{i} \right| \right)$$

$$I_{\min} = 4I_0 \left(1 - \left| \cos \frac{2\pi d}{i} \right| \right).$$

Funcția de vizibilitate este: $V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \left| \cos \frac{2\pi d}{i} \right|$, iar graficul

funcției $V = \left| \cos \frac{2\pi d}{i} \right|$ va fi:

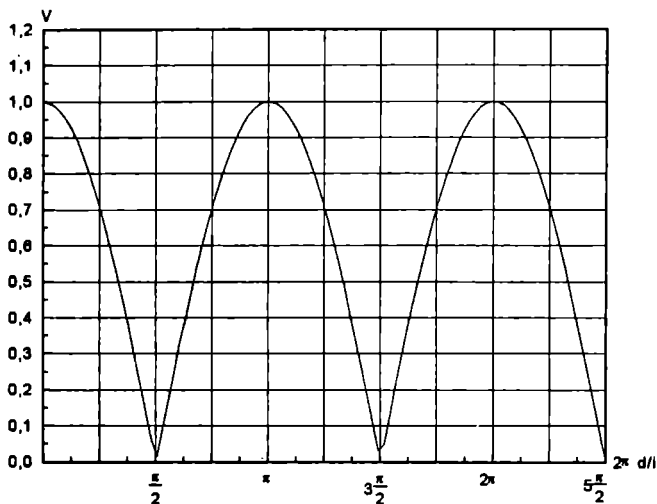


Fig. 5.5.b

Pentru a observa franjele de interferență cu un contrast bun, V trebuie să fie apropiat de 1. Această condiție se realizează atunci când avem succesiv:

$$(2\pi d/i) \rightarrow 0, \text{ adică } 2d \ll i,$$

$$(2\pi d/i) \rightarrow \pi, \text{ adică } 2d \approx i,$$

$$(2\pi d/i) \rightarrow 2\pi, \text{ adică } 2d \approx i, \text{ ș.a.m.d.p. ...}$$

Franjele de interferență se șterg (maximele dintr-o figură de interferență se suprapun peste minimele celeilalte) dacă:

$$(2\pi d/i) \rightarrow \pi/2, \text{ adică } 2d \approx i/2,$$

$$(2\pi d/i) \rightarrow 3\pi/2, \text{ adică } 2d \approx 3i/2,$$

$$(2\pi d/i) \rightarrow 5\pi/2, \text{ adică } 2d \approx 5i/2, \text{ ș.a.m.d.p. ...}$$

Din condițiile pentru minime și maxime:

$$\left(\cos \frac{2\pi(x-d)}{i} \right) = 1 \Rightarrow x = 2m \frac{\lambda D}{4l} + d, \quad m \in \mathbf{Z}$$

$$\left(\cos \frac{2\pi(x-d)}{i} \right) = -1 \Rightarrow x = (2m+1) \frac{\lambda D}{4l} + d, \quad m \in \mathbf{Z}.$$

În rezolvarea problemei am folosit: $i = \frac{D\lambda}{2l}$,

$I = I_1 + I_2 + 2I_{12} \cos(k\delta + \Delta\varphi_0)$, cu $I_0 = I_1 = I_2$, $I_{12} = 0$, $\Delta\varphi_0 = 0$, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$,

$\delta = x \frac{2l}{D}$, $i = x_{m+1} - x_m = \Delta x = \frac{D\lambda}{2l}$, și prin urmare: $I = 2I_0 \left(1 + \cos \frac{4\pi l x}{\lambda D}\right)$.

5.6. Într-o experiență de tip Lloyd (figura 5.6.) o undă luminoasă emisă de sursa S interferă cu o undă reflectată de oglinda O. Franjele de interferență apar pe un ecran E aflat la distanța $l = 100\text{cm}$ față de sursa S. Pentru o anumită distanță a sursei față de planul oglinzii o interfranță are valoarea $i = 0.25\text{mm}$. Dacă se îndepărtează sursa S față de planul oglinzii cu $h = 0,60\text{mm}$ interfranța scade de $m = 1,5$ ori. Să se calculeze lungimea de undă a radiației luminoase emisă de sursa S.

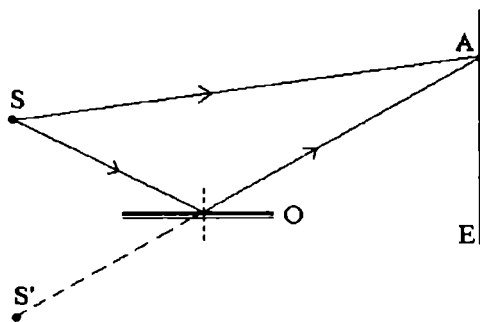


Fig. 5.6

Rezolvare:

Dispozitivul descris este analog cu cel din experiența lui Young în care cele două surse coerente sunt sursa S și imaginea sa S' din oglinda O.

Când distanța de la S la O este x , distanța dintre cele două surse S și S' este $2x$, iar interfranța este $i = \lambda l / 2x$.

Dacă se îndepărtează sursa la o distanță $x+h$ față de planul oglinzii O, interfranța devine $i' = \lambda l / 2(x+h)$, unde $i' = i/m$. Din aceste ultime relații se poate deduce lungimea de undă a radiației utilizate:

$$\lambda = \frac{2ih}{l(m-1)} = 0.60\mu\text{m}.$$

5.7. Să se determine unghiul obtuz al biprismei Fresnel, dacă în cazul în care distanța de la sursă la biprismă este l , iar distanța de la sursă la ecran este L , interfranja pentru lumina cu lungimea de undă λ este j . Indicele de refracție al materialului din care este confecționată biprismă este n .

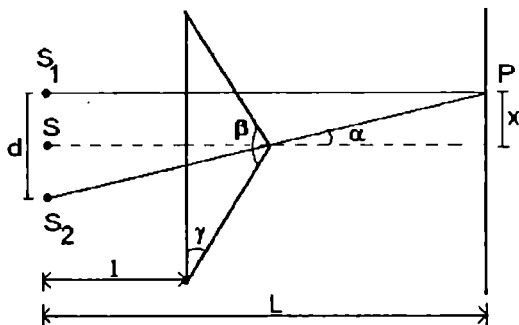


Fig. 5.7

Rezolvare:

Imaginile sursei S în biprismă reprezintă două surse virtuale, S_1 și S_2 . Radiațiile ce provin de la cele două surse sunt coerente și produc franje de interferență. Se consideră că înălțimea biprismei dusă din vârful corespunzător unghiului obtuz este neglijabilă în comparație cu distanța de la sursă la biprismă. În acest caz se poate scrie relația: $d/2 = l \operatorname{tg} \alpha$ sau $d \approx 2l \alpha$ dacă unghiul α este foarte mic. Imaginile sursei, S_1 și S_2 , se pot lua în calcul drept cele două surse coerente ale dispozitivului lui Young.

Dacă unghiul de incidență i_1 și de emergență i_2 pe o prismă sunt foarte mici ($\sin i_1 \approx i_1$, $\sin i_2 \approx i_2$, legea refracției devine: $i_1 \approx nr_1$, $i_2 \approx nr_2$) unghiul α dintre raza incidentă și cea emergentă este $\alpha = i_1 + i_2 - (r_1 + r_2) \approx (n-1)(r_1 + r_2)$, unde r_1 este unghiul de refracție pe prima față a prisme, iar r_2 este unghiul de incidență pe interfața sticlă-aer. Cum $r_1 + r_2 = \gamma$ se poate scrie că $\alpha = (n-1)\gamma$.

Distanța dintre sursele virtuale S_1 și S_2 este $d = 2\alpha l = 2\gamma(n-1)l$.

Diferența de drum dintre undele ce interferă în punctul P este: $\delta = xd/L$ (conform calculelor ce rezultă din studiul interferenței cu ajutorul unui dispozitiv de tip Young).

Punând condiția de maxim de interferență: $k\lambda = xd/L = 2\gamma l(n-1)x/L$,
 interfranja j este: $j = x_{k+1} - x_k = \frac{\lambda L}{2\gamma(n-1)l}$. De aici se poate scoate

unghiul γ : $\gamma = \frac{\lambda L}{2j(n-1)l}$. Rezultă că unghiul obtuz al biprismei, β , se calculează astfel:

$$\beta = 180^\circ - 2\gamma = \pi - \frac{\lambda D}{l(n-1)j}$$

5.8. Dispozitivul interferențial având la bază bilentilele lui Billet se obține prin tăierea unei lentile subțiri de rază R și distanță focală f , după un plan trecând prin axa optică a sistemului. Cele două semilente depărtate la distanța b se lipesc cu o pastă opacă și primesc lumină de la o sursă punctiformă S , monocromatică, așezată pe axul optic principal. Imaginile reale ale sursei S vor constitui două surse coerente care vor genera fenomenul de interferență observat pe ecranul E aflat la distanța d față de bilentilă.

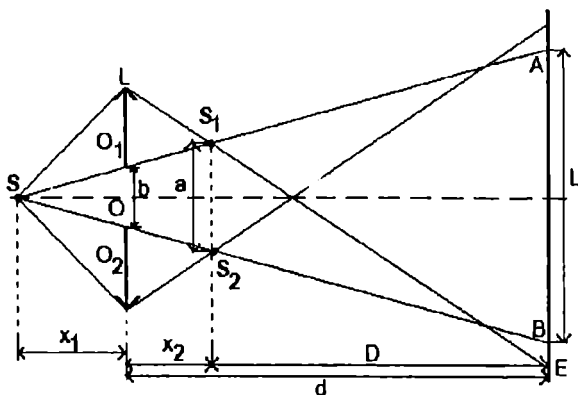


Fig.5.8

Cunoscându-se λ , b , f , R , d , $x_1 < 0$, să se determine:

- distanța $S_1S_2 = a$;
- mărimea interfranjei, i ;
- lățimea câmpului de interferență L din planul ecranului;
- numărul total al franjelor luminoase observate pe ecran.

Rezolvare:

a) Folosind formula lentilelor se poate calcula distanța x_2 la care se formează imaginile reale ale sursei S.

$$\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f} \Rightarrow x_2 = \frac{f \cdot x_1}{f + x_1}$$

Triunghiurile SO_1O_2 și SS_1S_2 sunt asemenea, rezultând:

$$\frac{b}{a} = -\frac{x_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow a = -b \frac{x_2 - x_1}{x_1}$$

b) Distanța dintre sursele coerente S_1 , S_2 și ecran este: $D=d-x_2$.

Mărimea interfranței se obține cu ajutorul relației cunoscute de la dispozitivul lui Young:

$$i = \frac{\lambda D}{a}$$

c) Triunghiurile SO_1O_2 și SAB sunt asemenea, obținându-se:

$$\frac{L}{b} = \frac{d + |x_1|}{|x_1|} \Rightarrow L = b \frac{d + |x_1|}{|x_1|}$$

d) Numărul franjelor luminoase ce se pot observa pe ecran sunt:

$$N = \frac{L}{i}$$

5.9. O placă este confecționată dintr-un material cu indicele de refracție $n=1,54$ și este iluminată cu lumină albă, normal la suprafața plăcii. Să se determine grosimea plăcii pentru care lumina reflectată de ea apare de culoare roșie.

Rezolvare:

Pentru ca lumina reflectată de cele două fețe ale plăcii dielectrice să pară roșie este necesar ca să se impună condiția de maxim de ordinul întâi ($m=1$) pentru o lungime de undă din domniul spectral roșu ($\lambda=660+750\text{nm}$):

$$\delta = 2nd + \frac{\lambda}{2} = m\lambda \Rightarrow d = \frac{\left(m - \frac{1}{2}\right)\lambda}{2n}$$

Pentru maximul de ordinul întâi $m=1$: $d = \frac{\lambda}{4n}$, iar pentru domeniul spectral ales $\lambda=660+750\text{nm}$, se obține: $d_{660\text{nm}}=0,1071\mu\text{m}$ și $d_{750\text{nm}}=0,1217\mu\text{m}$. Deci:

$$0,1071\mu\text{m} \leq d \leq 0,1217\mu\text{m}.$$

5.10. Un flux de lumină monocromatică cu lungimea de undă λ , provenind de la o sursă îndepărtată cade pe o pană de sticlă, unghiul făcut cu normala fiind foarte mic. O lentilă cu distanța focală f proiectează figura de interferență pe un ecran aflat la distanța d față de pană. Interfranța observată pe ecran este i . Să se determine unghiul α al penei dacă se cunoaște indicele de refracție al sticlei, n , din care este confecționată pana optică.

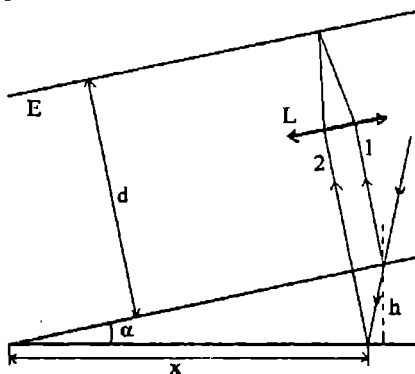


Fig. 5.10

Rezolvare:

Relația care exprimă diferența de drum optic a undelor ce interferă în cazul lamei cu fețe plan paralele este (cazul luminii reflectate):

$$\delta = 2dn + \frac{\lambda}{2} \quad (1).$$

Unghiul făcut de raza incidentă cu normala la suprafața reflectătoare a penei optice este aproape nul și deci se poate considera cazul incidenței normale. Luând două grosimi învecinate d_k și d_{k+1} se poate calcula distanța dintre franjele de interferență localizate pe pană:

$$\Delta x = d_{k+1} - d_k = \frac{\lambda}{2\alpha n} \quad (2).$$

Pe baza formulei de mărire a lentilelor se poate scrie:

$$\beta = \frac{\Delta x}{i} = \frac{d_1}{d_2} \quad (3),$$

unde d_1 este distanța de la ecranul E la lentila L și d_2 este distanța de la lentilă la pana optică. Ținând cont că $d_2 = d - d_1$, formula lentilelor subțiri se scrie:

$$\frac{1}{d_2} + \frac{1}{d_1} = \frac{1}{f} \Rightarrow \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d - d_1} = \frac{1}{f} \quad (4).$$

Eliminând d_1 din ecuațiile (4) și (3) rezultă pentru Δx , expresia următoare:

$$\Delta x = i \frac{d \mp \sqrt{d^2 - 4fd}}{d \pm \sqrt{d^2 - 4fd}}.$$

Utilizând acum relația (2) se poate determina unghiul α cerut:

$$\alpha = \frac{\lambda}{2n\Delta x} = \frac{\lambda}{2ni} \cdot \frac{d \pm \sqrt{d^2 - 4df}}{d \mp \sqrt{d^2 - 4df}}.$$

5.11. Cu ajutorul unei lentile planconvexe cu raza de curbură R foarte mare, așezată pe o placă de sticlă plană se obțin în lumină monocromatică franje de interferență de egală grosime, localizate (inelele lui Newton), care pot fi observate în reflexie, cu o lunetă. Cunoscându-se unghiul de incidență i al fascicului de lumină paralelă, de lungime de undă λ , să se determine diametrul inelului întunecat de ordin de interferență k .

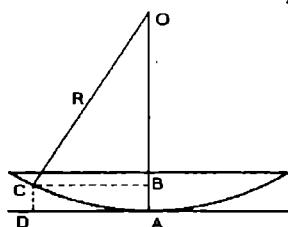


Fig. 5.11

Rezolvare:

Cu dispozitivul prezentat în figura de mai sus se formează franje de interferență de egală grosime care apar într-un strat de aer cuprins între suprafața plană de sticlă și lentila plan-convexă. Spațiul de aer va avea

forma de pană optică cu unghi variabil simetrică în jurul punctului A de contact dintre lentilă și placă. Zonele de egală grosime din pana de aer vor forma cercuri de rază r având centrul în punctul A. Considerăm grosimea $AB=CD$ a penei de aer locale egală cu e . Razele de lumină pătrund sub unghiul de incidență egal cu i și se reflectă pe suprafața plăcii de sticlă sub același unghi (deoarece raza de curbură R este foarte mare). Se observă:

$$CB^2 = DA^2 = r^2 = OC^2 - OB^2 = R^2 - (R-e)^2 = e(2R-e)$$

Deoarece $2R \gg e$, rezultă că este valabilă aproximația următoare:

$$r^2 \approx 2Re \Rightarrow e = \frac{r^2}{2R}$$

Întrucât pierderea de semiundă are loc la reflexia pe suprafața de separație a stratului de aer cu fața de sticlă, semiunda se va lua cu semnul plus, astfel că diferența de drum optic, fiind vorba de o lamă de aer ($n \approx 1$), este:

$$\delta = 2e \cos i + \frac{\lambda}{2}$$

Condiția pentru obținerea minimelor de interferență (inel întunecat) este:

$$\delta = (2k+1) \frac{\lambda}{2}, \quad k \in \mathbf{Z}, \text{ deci:}$$

$$2e \cos i + \frac{\lambda}{2} = (2k+1) \frac{\lambda}{2} \Rightarrow e = \frac{k\lambda}{2 \cos i}$$

În continuare se explicitează raza inelului întunecat:

$$r_k = \sqrt{\frac{kR\lambda}{\cos i}} = \sqrt{kR\lambda \sec i}$$

Diametrul inelului întunecat de ordin de interferență k ($d_k = 2r_k$) va fi:

$$d_k = 2 \sqrt{\frac{kR\lambda}{\cos i}} = 2 \sqrt{kR\lambda \sec i}$$

PROBLEME PROPUSE

5.12. Să se studieze interferența a două unde coerente pe un plan paralel la linia care unește cele două surse care emit undele.

R: Punctele care au aceeași stare de oscilație se află pe pânza unui hiperboloid de revoluție cu două pânze care au focarele localizate pe cele două surse coerente. Distribuția intensității undelor pe plan este: $I=4I_0\cos^2 2\pi p$, unde $p=\delta/\lambda$ reprezintă ordinul de interferență.

5.13. Să se studieze interferența a două unde coerente pe un plan perpendicular pe dreapta care unește cele două surse care emit undele.

R: Locul geometric al punctelor care au aceeași stare de oscilație îl reprezintă o familie de cercuri concentrice cu centrul situat pe dreapta ce unește sursele. Ordinul de interferență este maxim centru și scade cu creșterea distanței față de centru.

5.14. Pe ecranul unui dispozitiv interferențial de tip Young se obțin simultan imaginile de interferență corespunzătoare radiațiilor optice cu lungimile de undă de $\lambda_1=400\text{nm}$ și, respectiv, $\lambda_2=600\text{nm}$, provenite de la două surse punctiforme așezate pe axa de simetrie a dispozitivului. Discutați cele două imagini de interferență în interdependență, dacă distanța dintre fante este de 1,5mm, iar distanța de la planul fantelor la ecran este de 2m.

R: $i_1=0,53\text{mm}$; $i_2=0,80\text{mm}$; Condiția pentru suprapunerea franjelor luminoase: $\frac{k_1}{k_2} = \frac{3n}{2n}$, $n \in \mathbb{N}$, iar distanța minimă de suprapunere

față de axa de simetrie: $y_m=n \cdot 1,6\text{mm}$. Pentru suprapunerea franjelor întunecoase nu se poate îndeplini nici o condiție. Pentru suprapunerea unei franje luminoase peste una întunecoasă din cealaltă imagine de interferență este valabilă doar condiția: $3k_2=2k_1+1$.

5.15. Într-o experiență cu un dispozitiv Young cele două fante sunt iluminate cu o radiație monocromatică de lungime de undă $\lambda=587,6\text{nm}$. Dacă se introduce o plăcuță dielectrică de grosime e și indice de refracție $n=1,5$ în dreptul unei fante se constată că franja centrală luminoasă ocupă locul celei de a cincea franje întunecoase. Se mută, în

continuare, plăcuța în dreptul aceleași fante, dar de partea cealaltă a planului fantelor. Se cere:

a) Să se calculeze grosimea e a plăcuței dielectrice;

b) Să se calculeze diferența (Δy) dintre poziția față de axa de simetrie a franjei luminoase de ordinul zero, după ce se mută plăcuța și poziția ei anterior mutării plăcuței;

c) Să se precizeze cum se poate stabili experimental poziția franjei centrale luminoase de ordinul zero, știindu-se că în lumină monocromatică aceasta nu se deosebește de franjele luminoase învecinate?

R: a) $e=5,288\mu\text{m}$;

b) $\Delta y=0$;

c) Se realizează experiența cu lumină albă.

5.16. Pe ecranul unui dispozitiv Young se obține imaginea de interferență a unei surse de radiație de tipul arcului electric de carbon. Cunoscând că distanța dintre fantele dispozitivului este de $1,5\text{mm}$, iar distanța dintre un ecran și planul fantelor este de $1,5\text{m}$, se cere să se discute imaginile de interferență obținute, știindu-se că acestea pot fi percepute separat numai pentru radiația optică cu lungimile de undă cuprinse între 400nm și 700nm .

R: $i_{\min}=0,4\text{mm}$; $i_{\max}=0,7\text{mm}$;

Ordinul de interferență, pentru care interfranja de ordin k a radiației cu λ_{\max} se suprapune peste franja de ordin $k+1$ a radiației cu λ_{\min} , este $k=1,33$; Imaginea de interferență apare ca o distribuție continuă de culori.

5.17. În calea unuia dintre fasciculele din dispozitivul interferențial de tip Young se așează un tub cu lungimea de 2cm , având la capete lame cu fețe plan-paralele de sticlă și se observă figura de interferență când tubul este umplut cu aer. Apoi se umple tubul cu clor și se observă o deplasare a figurii de interferență cu $N=20$ franje. Sursa de lumină emite o radiație cu $\lambda=589\text{nm}$.

a) Să se calculeze indicele de refracție al clorului cunoscându-l pe cel al aerului, $n_{\text{aer}}=1,000276$;

b) În ce sens se deplasează franjele de interferență când se umple tubul cu clor?

R: a) $n_{\text{Cl}}=1,000865$;

b) Franjele se deplasează spre maximul central și se micșorează.

5.18. Distanța dintre două surse monocromatice și coerente ce emit o radiație cu lungimea de undă $\lambda=500\text{nm}$ este $d=2\text{mm}$. Pentru a mări interfranja ce se poate observa pe un ecran la valoarea $i=10\text{mm}$ se așează între planul surselor și ecran o lentilă convergentă subțire cu distanța focală $f=5\text{cm}$. Distanța dintre lentilă și ecran este $D=2\text{m}$. Să se calculeze distanța a dintre planul surselor de lumină și lentilă.

$$R: \quad a = \frac{\lambda D + id}{D + f} \cdot \frac{f}{\lambda} = 1,02439.$$

5.19. Un dispozitiv de tip Young este iluminat cu două radiații monocromatice apropiate λ_1 și λ_2 . Să se stabilească expresia intensității rezultante într-un punct al câmpului de interferență și să se calculeze perioada de vizibilitate în cazul în care lungimile de undă sunt: $\lambda_1=0,486\mu\text{m}$ și $\lambda_2=0,434\mu\text{m}$ (liniile hidrogenului).

$$R: \quad \text{Intensitatea rezultantă: } I = I_0 \left[1 + V \cdot \cos \frac{2\pi\delta}{\lambda_0} \right], \text{ unde:}$$

$V = \cos \frac{\pi\delta\Delta\lambda}{\lambda_0^2}$ reprezintă factorul de vizibilitate. Perioada de

vizibilitate este: $P = \frac{\lambda_0}{\Delta\lambda} i_0$, unde i_0 este interfranja medie,

$$\lambda_0 = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}, \text{ iar } \Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_2.$$

5.20. Cum se modifică interfranja observată pe un ecran în cadrul unui dispozitiv interferențial de tip Young dacă planul fantelor este rotit față de cel al ecranului cu un unghi α .

R: Sursele secundare nu mai sunt în fază. Centrul sistemului de franje nu se modifică. Valoarea interfranței crește invers proporțional cu $\cos\alpha$.

5.21. Pentru a măsura lungimea de undă a unei radiații luminoase se utilizează un dispozitiv Young. Sursa este plasată la o egală distanță de cele două fante depărtate între ele cu $a=(1,00\pm 0,01)\text{mm}$. Franjele de interferență sunt observate pe un ecran paralel cu planul fantelor aflat la o

distanță $D=(1,000\pm 0,001)\text{m}$ de aceasta. Se măsoară distanța dintre franja centrală și a 50-a franjă, găsindu-se $\Delta=(25,0\pm 0,1)\text{mm}$. Calculați lungimea de undă obținută prin această metodă și eroarea absolută.

$$R: \quad \lambda=0,5\mu\text{m}; \Delta\lambda=0,008\mu\text{m}.$$

5.22. Se utilizează un dispozitiv interferențial de tip Young observându-se pe un ecran franjele de interferență. Ecranul se află la distanța $D=(100,0\pm 0,1)\text{cm}$. Lățimea a $n=20$ interfranje consecutive este $h=(4,21\pm 0,01)\text{mm}$. Cunoscând lungimea de undă a radiației monocromatice utilizate $\lambda=0,589\mu\text{m}$, să se calculeze eroarea relativă cu care este cunoscută distanța s dintre cele două fante ale dispozitivului.

$$R: \quad s=2,798\text{mm}; (\Delta s/s)= 0,003395.$$

5.23. Să se determine unghiul obtuz al biprisme Fresnel, dacă în cazul când distanța de la sursă la biprismă este l , iar distanța de la sursă la ecran este L , interfranja pentru lumina cu lungimea de undă λ este i . Indicele de refracție al materialului din care este confecționată biprisma este n .

$$R: \quad \beta = \pi - \frac{\lambda D}{l(n-1)i}.$$

5.24. Pentru realizarea unei experiențe, în lipsa unei biprisme Fresnel s-a luat o lentilă plan-convexă, subțire și s-a detașat din porțiunea centrală materialul pe o grosime d . S-au unit cele două părți rămase ale lentilei, obținându-se, astfel, o biprismă Fresnel subțire. De o parte a prisme astfel obținute s-a așezat, pe axa optică, o sursă punctiformă de radiație optică cu lungimea de undă de 500nm , iar de cealaltă parte s-a așezat perpendicular pe axa optică a sistemului, un ecran plan. Știind că distanța focală a lentilei plan-convexe subțiri este de 50cm , iar valoarea interfranjei este egală cu $0,5\text{mm}$ precum și faptul că interfranja nu se modifică atunci când ecranul se depărtează sau se apropie de biprismă, să se calculeze valoarea lui d .

$$R: \quad d=\lambda D/i=\lambda f/i=0,5\text{mm}$$

5.25. Două oglinzi plane fac un unghi α . Pe acestea cade lumină de la o sursă punctiformă monocromatică situată la o distanță r de linia de intersecție a oglinzilor. Lungimea de undă a luminii este λ . Lumina reflectată de oglinzi dă o figură de interferență pe un ecran plan care se află la o distanță L de linia de intersecție a oglinzilor. Să se determine interfranța figurii de interferență observată pe ecran dacă se consideră că unghiul α este apropiat de 180° .

$$R: \quad i = \frac{\lambda(L+r)}{2r \sin(\pi - \alpha)}$$

5.26. Într-o experiență de interferență cu oglinda Lloyd, sursa extinsă de lumină monocromatică aflată în spatele unei fante de lărgime s reglabilă, este așezată la o distanță $h=5\text{cm}$ față de oglinda plană orizontală și la distanța $D=1\text{m}$ față de ecranul plan pe care se observă franjele de interferență. Să se evalueze lărgimea maximă a fantei pentru care pe ecran se mai pot observa $N=40$ franje de interferență.

$$R: \quad s_{\max} \approx 0,675\text{mm}.$$

5.27. Două oglinzi Fresnel plane fac între ele un unghi $\alpha=179^\circ 59'$ și sunt iluminate cu o sursă punctiformă monocromatică de lungime de undă $\lambda=0,582\mu\text{m}$. Franjele de interferență sunt observate pe un ecran plan. Se cere:

a) Să se determine numărul de franje luminoase pe centimetru, când sursa de lumină se află în planul ecranului;

b) Să se calculeze numărul de franje luminoase pe centimetru atunci când tot sistemul interferențial se introduce în apă (indicele de refracție al apei este $n=4/3$).

$$R: \quad \begin{array}{l} \text{a) } N_a=5 \text{ franje luminoase pe centimetru;} \\ \text{b) } N_b=6 \text{ franje luminoase pe centimetru.} \end{array}$$

5.28. Planele a două oglinzi Fresnel fac între ele un unghi $\alpha=0,001$ radiani. La distanța $r=60\text{cm}$ de muchia comună a celor două oglinzi se așează o sursă punctiformă și monocromatică, S . Franjele de interferență sunt observate pe un ecran plan, paralel cu planul care

cuprinde imaginile sursei S, situat la o distanță $d=2,4\text{m}$ de intersecția celor două oglinzi. Se cere:

a) Dacă se observă că 10 interfranje ocupă pe ecran 12mm , să se determine lungimea de undă a luminii întrebuințate;

b) Dacă unghiul celor două oglinzi este măsurat exact, distanțele r și d sunt măsurate cu o eroare absolută de maxim 1mm , iar lungimea celor 10 interfranje cu o eroare de maxim $0,01\text{mm}$, să se determine cu ce precizie se determină lungimea de undă calculată;

c) Dacă se înlocuiește sursa S cu o alta, S', care emite lumină monocromatică cu lungimea de undă $\lambda'=0,6\mu\text{m}$, să se precizeze în ce sens și cu cât trebuie deplasat ecranul paralel cu el însuși pentru ca interfranje să aibă aceiași valoare ca la punctul a).

R: a) $\lambda = 2\alpha \frac{r}{d+r} = 0,48\mu\text{m}$;

b) $\Delta\lambda = 0,0012\mu\text{m}$;

c) $\Delta d = -0,6\text{m}$.

5.29. Se realizează o experiență de interferență cu ajutorul oglinzilor Fresnel iluminate cu o lumină monocromatică cu $\lambda=0,49\mu\text{m}$. Imaginea de interferență se observă pe un ecran perpendicular pe planul mediator al segmentului ce unește cele două surse-imagine secundare aflat la distanța $d=2\text{m}$ de intersecția celor două oglinzi. Cunoscând valoarea interfranjei $i=0,25\text{mm}$ și distanța $r=1\text{m}$ dintre sursa de lumină și muchia comună a celor două oglinzi, să se calculeze:

a) Distanța a dintre cele două surse-imagine secundare;

b) Lățimea câmpului de interferență;

c) Unghiul α dintre cele două oglinzi.

R: a) $a=5,88\text{mm}$;

b) $L=11,76\text{mm}$;

c) $\alpha=10'6''$.

5.30. Se realizează o experiență de interferență cu ajutorul bilentilelor Billet. Cunoscându-se distanța de la sursa de lumină monocromatică și punctiformă ce emite o radiație cu lungimea de undă $\lambda=600\text{nm}$, $x_1=-72\text{cm}$, raza lentilei subțiri $R=3\text{cm}$, distanța focală a lentilei

$f=40\text{cm}$, distanța cu care se îndepărtează cele două părți ale lentilei $b=1,6\text{mm}$ și distanța de la lentilă la ecran $d=1,6\text{m}$, să se calculeze:

- Distanța a dintre cele două surse-imagini secundare;
- Valoarea interfranței;
- Lărgimea câmpului de interferență;
- Numărul de franje observate pe ecran.

R:

- $a=0,36\text{cm}$;
- $i=0,1166\text{mm}$;
- $L=5,155\text{mm}$;
- $N=44$.

5.31. Se realizează o experiență de interferență cu ajutorul oglinzii Lloyd. Cunoscându-se înălțimea la care se află sursa punctiformă și monocromatică cu $\lambda=600\text{nm}$ față de suprafața plană a oglinzii așezate orizontal, $h=10\text{cm}$, lungimea oglinzii $d=10\text{cm}$, distanța de la sursă la capătul cel mai apropiat al oglinzii față de sursă, $b=10\sqrt{5}$ și distanța de la sursă la un ecran plan așezat perpendicular pe planul oglinzii $D=1\text{m}$, să se calculeze:

- Valoarea interfranței;
- Lărgimea câmpului de interferență;
- Numărul franjelor observate.

R:

- $i=3\mu\text{m}$;
- $L=16,66\text{cm}$;
- $N=5,55 \cdot 10^4$ franje.

5.32. Se realizează o experiență de interferență cu ajutorul biprismei Fresnel. Cunoscându-se distanța de la sursa punctiformă și monocromatică de lungime de undă $\lambda=600\text{nm}$ la ecranul plan pe care se vizualizează figura de interferență, $D=2,32\text{m}$, indicele de refracție al materialului din care este construită biprismă, $n=1,5$, valoarea interfranței măsurate pe ecran $i=0,1166\text{mm}$, și lărgimea câmpului de interferență $L=5,155\text{mm}$, să se calculeze:

- Unghiul de refracție al prisme;
- Distanța dintre biprismă și ecran.

R:

- $\gamma=25'16''$;
- $l=69,58\text{cm}$.

5.33. Care trebuie să fie grosimea e a unei pelicule de soluție de săpun cu indicele de refracție $n=1,38$, pentru ca să apară neagră atunci când este iluminată cu radiația galbenă a sodiului cu lungimea de undă $\lambda=589,3\text{nm}$ în următoarele cazuri:

a) iluminarea se face sub unghiul de incidență de 60° ;

b) iluminarea se face sub unghiul de incidență căruiia îi corespunde unghiul de refracție de 60° ;

c) iluminarea se face normal.

R: a) $e=0,27k \mu\text{m}$, $k \in \mathbb{N}$;

b) $e=0,427k \mu\text{m}$, $k \in \mathbb{N}$;

c) $e=0,213k \mu\text{m}$, $k \in \mathbb{N}$.

5.34. O peliculă subțire dintr-un material transparent, omogen și izotrop are grosimea $e=1\mu\text{m}$ și indicele de refracție $n=1,4$. Calculați lungimea de undă a radiației optice monocromatice, incidente sub unghiul de 30° care determină la suprafața de incidență maxime de interferență de ordinul patru.

R: $\lambda=747\text{nm}$.

5.35. O pană optică, obținută dintr-un material optic transparent, omogen și izotrop cu indicele de refracție $n=1,5$ este iluminată normal cu o radiație optică a cărei lungime de undă este $\lambda=600\text{nm}$. Cunoscând distanța dintre două franje întunecoase vecine, egală cu $0,5\text{mm}$, calculați unghiul penei optice.

R: $\alpha=4 \cdot 10^{-4} \text{rad}$.

5.36. Un strat subțire de apă de indice de refracție $n=4/3$ și de grosime $e=3 \cdot 10^{-7}\text{m}$ se află în aer. Dacă stratul este iluminat cu lumină albă la incidență normală, ce culoare va apărea în lumina reflectată?

R: galben-verde.

5.37. O peliculă de săpun este iluminată cu o radiație monocromatică cu lungimea de undă $\lambda=750\text{nm}$. Care este grosimea minimă pe care o poate avea pelicula, ca să mai apară franje de

interferență în reflexie, dacă indicele său de refracție este $n=1,3$, iar pelicula se află în aer?

R: $d_{\min} = \frac{\lambda}{4n}$, pentru $r=0^\circ$ (razele cad perpendicular pe pelicula de săpun).

5.38. O lamă cu fețe plan-paralele de grosime $e=0,1\text{mm}$ și indice de refracție $n=1,5$ este iluminată cu un fascicul convergent de lumină monocromatică de lungime de undă $\lambda=546\text{nm}$, sub o incidență medie $i_0=45^\circ$. Razele reflectate cad pe o lentilă cu distanța focală $f=25\text{cm}$ a cărei axă optică face unghiul i_0 cu normala la lamă. Planul focal al lentilei poate fi explorat cu ajutorul unui ocular. Să se calculeze:

a) Interfranja;

b) Numărul de franje vizibile în câmpul ocularului dacă acesta are un câmp vizual cu diametrul de 1cm (în planul focal al lentilei).

R: a) Interfranja, $j=1,8\text{mm}$;

b) $N=5$.

5.39. Se produc inelele lui Newton între suprafața unei lentile convexe de rază $R=1\text{m}$ și suprafața unei lentile concave de rază $R'=2\text{m}$. Dacă lungimea de undă a radiației utilizate este $\lambda=500\text{nm}$, se cere să se calculeze:

a) Diametrul inelului al 10-lea întunecos prin transmisie;

b) Diametrul inelului al 10-lea întunecos prin reflexie.

R: a) $D=6,16\text{mm}$;

b) $D=6,32\text{mm}$.

5.40. Să se determine distanța Δr dintre al 20-lea și al 21-lea inel luminos a lui Newton, dacă distanța dintre al 2-lea și al 3-lea inel este de 1mm . Inelele se observă în lumină reflectată.

R: $\Delta r=0,313\text{mm}$.

5.41. Determinați grosimea minimă a unei pelicule cu indicele de refracție $n=1,33$, astfel încât radiația cu lungimea de undă $\lambda_1=640\text{nm}$, să prezinte un maxim de interferență în urma reflexiei, iar radiația cu

$\lambda_2=400\text{nm}$ să prezinte un minim de interferență, unghiul de incidență fiind $i=30^\circ$.

R: $e=0,649\mu\text{m}$.

5.42. O lentilă este acoperită cu o peliculă subțire de indice de refracție $n=1,38$ în scopul micșorării reflexiei. Care trebuie să fie grosimea peliculei pentru a produce un minim de reflexie pentru radiația cu lungimea de undă $\lambda=550\text{nm}$?

R: $e=10^{-7}\text{m}$.

6. DIFRAȚIA LUMINII

PROBLEME REZOLVATE

6.1. Care este ordinul maxim al spectrului ce poate fi observat în cazul difracției luminii cu lungimea de undă $\lambda=500\text{nm}$, pe o rețea de difracție având $N=200$ trăsături pe distanța de 1cm , la incidență normală?

Rezolvare:

Din condiția de obținere a unui maxim de difracție, rezultă:

$$k\lambda = a|\sin i \pm \sin \varphi| \Rightarrow k\lambda = \frac{\sin \varphi}{N} \Rightarrow k = \frac{\sin \varphi}{N\lambda}.$$

$$k_{\max} = \frac{1}{N\lambda} = 100, \text{ pentru } \varphi=90^\circ.$$

6.2. Un fascicul luminos cade în incidență normală pe o rețea de difracție. Maximul de difracție de ordinul doi pentru radiația cu $\lambda_1=650\text{nm}$ se obține sub un unghi $\theta_1=45^\circ$. Să se determine în cazul radiației cu $\lambda_2=500\text{nm}$, unghiul sub care se obține maximul de difracție de ordinul trei.

Rezolvare:

Impunând condiția de maxim în cele două cazuri, rezultă:

$$d\sin\theta_1 = k_1\lambda_1 \Rightarrow d = (k_1\lambda_1)/\sin\theta_1$$

$$d\sin\theta_2 = k_2\lambda_2 \Rightarrow d = (k_2\lambda_2)/\sin\theta_2$$

$$\sin\theta_2/\sin\theta_1 = (k_2\lambda_2)/(k_1\lambda_1)$$

$$\sin\theta_2 = 0,815892$$

$$\theta_2 = 54^\circ 40' 32''.$$

6.3. Fie o rețea de difracție cu constanta $a=1,5\mu\text{m}$. Să se determine dispersia unghiulară $D = \frac{d\theta}{d\lambda}$ corespunzătoare maximului de difracție de ordin maxim al radiației cu $\lambda=530\text{nm}$, în cazul în care lumina cade pe rețea:

- sub incidență normală;
- sub un unghi de incidență $i=45^\circ$.

Rezolvare:

a) Scriind condiția de maxim de difracție: $a\sin\theta=k\lambda$ și derivând în raport cu λ se obține:

$$\frac{d\theta}{d\lambda}\cos\theta = \frac{k}{a} \Rightarrow D = \frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{k}{a\cos\theta}$$

Pentru a afla ordinul maxim de difracție se pune condiția: $\theta=\pi/2$. Deci:

$$d\sin(\pi/2)=k_m\lambda \Rightarrow k_m=a/\lambda=2,83 \Rightarrow k_m=2$$

$$\text{Pentru } k_m=2 \Rightarrow \sin\theta=k_m(\lambda/a) \Rightarrow \cos\theta = \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda k_m}{a}\right)^2} \Rightarrow$$

$$\cos\theta=0,7075$$

$$D=1,884 \cdot 10^{-3}\text{rad/nm}=6,48'/\text{nm}$$

b) În cazul $i \neq 0$, scriind diferența de drum și impunând condiția de maxim se obține:

$$\delta = a | \sin i \pm \sin \theta | = k\lambda$$

$$a(\sin 45^\circ + \sin 90^\circ) = k_m\lambda \Rightarrow k_m = 4,8, \text{ dar } k_m \in \mathbf{Z}, \Rightarrow k_m = 4$$

$$a(\sin 45^\circ - \sin 90^\circ) = k_m\lambda \Rightarrow k_m = 0,83$$

$$a(\sin 45^\circ + \sin \theta) = k_m\lambda \Rightarrow \sin \theta = (k_m\lambda - a\sin 45^\circ)/a$$

$$\sin \theta = k_m(\lambda/a) - \sin 45^\circ = 0,708 \Rightarrow \cos \theta = 0,705878$$

$$D = \frac{k_m}{a\cos\theta} \Rightarrow D = 3,777 \cdot 10^{-3}\text{rad/nm} \Rightarrow D = 12,99'/\text{nm}$$

6.4. Pe o rețea de difracție cade normal un fascicul paralel de lumină cu lungimea de undă $\lambda=500\text{nm}$. În apropierea rețelei se află o lentilă care proiectează figura de difracție pe un ecran plan situat la distanța $L = 1\text{m}$ față de lentilă. Distanța dintre maximele de intensitate de ordinul întâi aflate pe ecran este egală cu $a=20,2\text{cm}$. Să se determine:

- constantă d a rețelei de difracție;

- b) numărul n de trăsături pe centimetru;
 c) numărul de maxime date de rețeaua de difracție pe ecran;
 d) unghiul maxim φ_{\max} de deviere a fasciculului corespunzând ultimului maxim de difracție.

Rezolvare:

Maximele de ordinul întâi se află de o parte și de alta a maximumului central de ordinul zero.

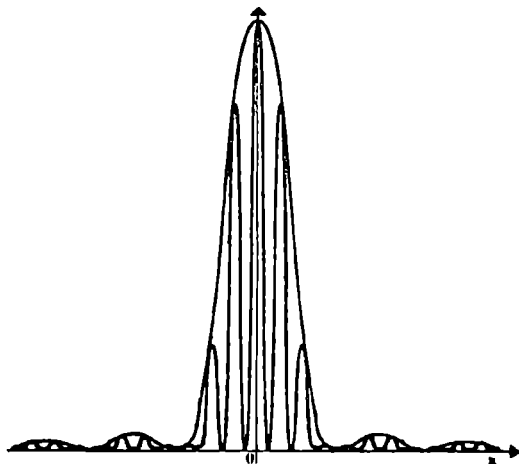


Fig. 6.4

a) $d \sin \varphi = k\lambda$ și în acest caz $k=1$, $\sin \varphi \approx \tan \varphi$ deoarece $a/2 \ll L$, iar $\tan \varphi = a/2L$. Rezultă $d = 2L\lambda/a = 4950 \text{ nm}$.

b) Numărul de trăsături pe centimetru este:

$$n = 1/d = 2,02 \cdot 10^5 \text{ m}^{-1}.$$

c) Pentru determinarea numărului de maxime se consideră că unghiul maxim de deviere a fasciculului nu poate depăși 90° .

$$k_{\max} = d \sin \varphi / \lambda = 9,9.$$

Cum k trebuie să fie întreg urmează că $k_{\max} = 9$. Numărul de maxime pe ecran se calculează ținând seama că în dreapta și în stânga maximumului central se află k_{\max} maxime. Deci $N = 2k_{\max} + 1 = 19$.

d) $\sin \varphi_{\max} = k_{\max} \lambda / d$ deci $\varphi_{\max} = \arcsin(k_{\max} \lambda / d) = 65,4^\circ$.

6.5. O rețea de difracție plană având 5000 de trăsături și lățimea de 4cm este iluminată normal cu lumină albă, al cărei spectru este cuprins între 380nm și 760nm, imaginea de interferență-difracție obținându-se pe

un ecran așezat în planul focal al unei lentile convergente cu distanța focală de 1m. Să se calculeze:

- lungimea de undă a radiației optice al cărei maxim luminos de ordinul al doilea se obține la distanța de 10cm față de axa optică a lentilei;
- lungimea de undă a radiației optice al cărei maxim luminos de ordinul întâi se obține la distanța de 7,5cm față de axa optică a lentilei;
- distanța pe ecran dintre maximum luminos de ordinul întâi și maximum luminos de ordinul al doilea obținute în lumină albă.

Rezolvare:

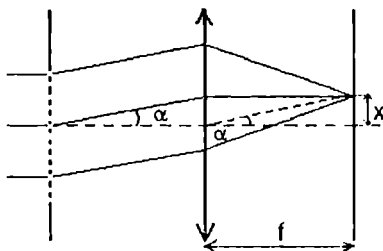


Fig. 6.5

$$a) \quad n = L/N, \quad \frac{1}{n} \sin \alpha = k' \lambda', \quad \sin \alpha = \operatorname{tg} \alpha, \quad \operatorname{tg} \alpha = x/f, \quad k' = 2,$$

$$\lambda' = \frac{x'}{k' f n} = 400 \text{ nm};$$

$$b) \quad \text{analog, } \lambda'' = \frac{x''}{k'' f n} = 600 \text{ nm};$$

c) Maximum luminos de ordinul întâi cel mai îndepărtat față de axa optică a rețelei de difracție corespunde radiației roșii cu lungimea de undă $\lambda_r = 760 \text{ nm}$. Distanța la care se formează acest maxim este:

$$x_r = f n \lambda_r = 9,5 \text{ cm.}$$

Maximum luminos de ordinul al doilea cel mai apropiat de axa optică a rețelei de difracție corespunde radiației violete cu lungimea de undă $\lambda_v = 380 \text{ nm}$. Distanța la care se formează acest maxim este:

$$x_v = 2 f n \lambda_v = 9,5 \text{ cm.}$$

Deoarece $\Delta x = x_v - x_r = 0$, rezultă că maximum luminos de ordinul întâi obținut în lumina albă considerată se continuă cu maximum luminos de ordinul al doilea, după care începe suprapunerea maximelor de difracție. Rezultatul implică aproximațiile făcute.

6.6. O lentilă cu distanța focală $f=40\text{cm}$ formează o figură de difracție Fraunhofer a unei fante cu lățimea $b=0,3\text{mm}$. Să se calculeze distanța de la prima bandă întunecată și de la următoarea franjă luminoasă până la axa lentilei dacă $\lambda=6\cdot 10^{-7}\text{m}$, iar lentila este așezată aproape de fantă. Fasciculul incident este normal pe suprafața fantei.

Rezolvare:

În figura de difracție dată de o singură fantă, unghiurile de difracție corespunzătoare intensității nule sunt date de:

$$b\sin\theta=k\lambda, k=1, 2, 3, \dots$$

Prima franjă întunecată apare pentru $k=1$, adică:

$$\sin\theta=\lambda/b=2\cdot 10^{-3} \Rightarrow \theta\approx 2\cdot 10^{-3}\text{radiani.}$$

Dacă prima franjă se află la distanța x față de axă, atunci $\theta\approx x/f$ și $x=0,8\text{mm}$.

Unghiul de difracție corespunzător primei franje luminoase din stânga sau dreapta franjei centrale este dat aproximativ de:

$$b\sin\theta_1=(3/2)\lambda, \text{ de unde } \theta_1=3\cdot 10^{-3}\text{radiani și } x_1\approx\theta_1f=1,2\text{mm.}$$

6.7. Figura de difracție a două fante de lățime $b=20\mu\text{m}$ iluminate cu o radiație monocromatică și aflate la distanța $d=0,1\text{mm}$ se obține pe un ecran aflat la distanța $D=40\text{cm}$ de planul fantelor. Se cere:

a) Să se calculeze lungimea de undă a luminii utilizate dacă distanța dintre franje este de $0,25\text{cm}$;

b) Care este distanța liniară de la maximul central la primul minim al anvelopei franjelor?

Rezolvare:

a) Dispozitivul interferențial descris este de tip Young. Cunoscând expresia interfranjei $i = \frac{\lambda D}{d}$, rezultă că $\lambda=6,25\cdot 10^{-7}\text{m}$.

b) Primul minim de difracție apare când $\frac{\sin\beta}{\beta} = 0$, sau $\beta=\pi$, unde

$$\beta = \frac{b\pi\sin\theta}{\lambda}, \text{ adică atunci când } \sin\theta=\lambda/b=3,13\cdot 10^{-2}. \text{ Distanța liniară cerută este}$$

$$a=D\tg\theta\approx D\theta=1,24\text{cm.}$$

În maximul central al anvelopei franjelor apar $N=2a/i\approx 10$ franje.

6.8. Să se calculeze dispersia unghiulară a spectrului vizibil de ordinul întâi produs de o rețea de difracție plană care are 15000 de trăsături pe inch (1inch=2,54cm) dacă se trimite lumina albă sub incidență normală pe rețea.

Rezolvare:

Constanta rețelei va fi $d=2,54/15000=1,69 \cdot 10^{-4}$ cm. Unghiul de difracție pentru violet în ordinul întâi este:

$$\sin \theta_v = \frac{\lambda_v}{d} = 0,237, \text{ de unde } \theta_v = 13^\circ 14',$$

iar pentru roșu în ordinul întâi este:

$$\sin \theta_r = \frac{\lambda_r}{d} = 0,414, \text{ de unde } \theta_r = 24^\circ 30'.$$

Lărgimea unghiulară a spectrului vizibil de ordinul întâi este: $\alpha = \theta_r - \theta_v = 10^\circ 50'$.

Unghiul de difracție de ordinul trei în violet este:

$$\sin \theta_v = \frac{3\lambda_v}{d} = \frac{12 \cdot 10^{-7}}{d},$$

iar unghiul de difracție de ordinul doi în roșu este dat de:

$$\sin \theta_r = \frac{3\lambda_r}{d} = \frac{14 \cdot 10^{-7}}{d}.$$

Se observă că $\sin \theta_r > \sin \theta_v$, indiferent de valoarea lui d . Deci, întotdeauna spectrul de ordinul trei în violet va acoperi spectrul de ordinul doi în roșu.

6.9. O undă plană monocromatică ($\lambda=600$ nm) este incidentă pe un ecran pe care se găsește o diafragmă circulară. Un paravan se află la distanța $b=2$ m în spatele diafragmei.

Pentru ce diametru D al diafragmei iluminarea în punctul de intersecție al axei fasciculului cu paravanul este maximă?

Rezolvare:

Iluminarea în punctul de pe paravan este maximă dacă din acest punct se poate construi pe suprafața diagramei o singură zonă Fresnel, adică:

$$D = 2r = 2(b\lambda)^{1/2}, \text{ cu } a = \infty, \text{ rezultând prin înlocuire: } D = 2,19 \cdot 10^{-3} \text{ m.}$$

6.10. La 2m de o sursă punctiformă de lumină monocromatică cu $\lambda=546,1\text{nm}$ se află un ecran cu o deschidere circulară de rază egală cu 0,5mm. Să se precizeze, de-a lungul dreptei ce trece prin sursă și centrul deschiderii, poziția punctelor în care intensitatea luminoasă este minimă sau maximă.

Rezolvare:

Unda luminoasă este caracterizată de amplitudine și fază. Se presupune cunoscută relația dedusă la curs care leagă razele zonelor Fresnel de numerele de ordine:

$$\rho_k = \sqrt{\frac{ab}{a+b} k\lambda},$$

$$\rho_k^2(a+b) = abk\lambda$$

$$a\rho_k^2 + b\rho_k^2 - abk\lambda = 0$$

$$b(ak\lambda - \rho_k^2) = a\rho_k^2$$

$$\frac{1}{b} = \frac{ak\lambda - \rho_k^2}{a\rho_k^2} = \frac{k\lambda}{\rho_k^2} - \frac{1}{a}$$

$$\frac{1}{b} = \frac{k\lambda}{\rho_k^2} - \frac{1}{a}$$

Există două cazuri distincte:

1) $k=\text{nr. impar}$; indiferent de valoarea lui k , contribuția este a unei singure zone și în punctul de observație e un maxim;

$$k=1 \Rightarrow b=593\text{mm.}$$

2) $k=\text{nr. par}$; undele emise se anulează două câte două prin interferență, rezultând minime;

$$k=2 \Rightarrow b=258\text{mm.}$$

6.11. Cât de mare este distanța care se obține între componente pe negativul fotografiei în spectrul de ordinul întâi dat de un spectograf cu o rețea ce are 3937 linii pe un cm și care are un obiectiv cu distanța focală $f=50\text{cm}$, dacă se fotografiază linia galbenă a dubletului de sodiu cu $\lambda_1=589,0\text{nm}$ și $\lambda_2=589,6\text{nm}$?

Rezolvare:

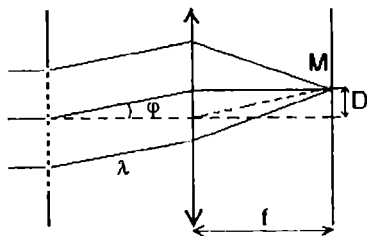


Fig. 6.11

Conform figurii: $D = f \operatorname{tg} \varphi$

Dispersia liniară este: $\frac{dD}{d\lambda} = f \frac{1}{\cos^2 \varphi} \frac{d\varphi}{d\lambda}$, unde $\frac{d\varphi}{d\lambda}$ reprezintă

dispersia unghiulară,

$$\frac{d\varphi}{d\lambda} = f \frac{kn}{\cos^2 \varphi},$$

$$dD = fkn d\lambda.$$

Deci: $k=1$, $f=50\text{cm}$, $n=3937$ trăsături/cm, $d\lambda=0,6\text{nm}$, rezultă:
 $dD=0,12\text{mm}$.

PROBLEME PROPUSE

6.12. O undă electromagnetică este incidentă normal pe o rețea de difracție cu constanta $a=4 \cdot 10^{-4}$ cm.

Să se calculeze lungimea de undă a radiației dacă unghiul dintre direcțiile spectrelor de ordinele doi și trei este $\alpha=2^\circ 30'$. Se consideră că unghiurile de difracție sunt mici.

R: $\lambda \approx 2a(\theta_3 - \theta_2)/2 = 0,17 \mu\text{m}$.

6.13. Să se calculeze lungimea de undă cea mai mare care poate fi observată în spectrul de ordinul patru obținut cu o rețea de difracție care are 5000 linii/cm. Lumina este incidentă normal pe suprafața rețelei.

R: $\lambda_{\max} = 500\text{nm}$.

6.14. O undă plană monocromatică cu $\lambda=500\text{nm}$ este incidentă pe o rețea de difracție cu 500 trăsături/mm. Să se calculeze:

a) ordinul maxim al spectrului care poate fi observat când unda este incidentă normal pe rețea;

b) același ordin dacă unda este incidentă sub unghi $\theta_0=30^\circ$ pe rețea.

R: a) $k=4$;
b) $k=-6$.

6.15. Un fascicul luminos este incident normal pe o rețea de difracție. Unghiul de difracție pentru radiația cu lungimea de undă $\lambda_1=650\text{nm}$ este egal pentru ordinul doi cu $\theta_1=45^\circ$.

Să se determine unghiul de difracție pentru radiația cu lungimea de undă $\lambda_2=500\text{nm}$ în ordinul al treilea.

R: $\theta_2=54,67^\circ$.

6.16. Pe o rețea de difracție cu constanta de 200 linii/mm cade normal un fascicul de lumină emis de un tub de descărcare cu hidrogen. Să se calculeze unghiul minim făcut de direcția fasciculului incident cu axa tubului spectrometrului pentru ca în câmpul vizual să se observe coincidența a două maxime de difracție a liniilor H_α cu $\lambda_\alpha=656,32\text{nm}$ și H_β cu $\lambda_\beta=410,2\text{nm}$.

R: $\theta_{\min}=41^\circ$.

6.17. Limitele spectrului vizibil sunt $\lambda_v=400\text{nm}$ și $\lambda_r=780\text{nm}$. Să se calculeze lărgimea unghiulară a spectrului de ordinul întâi obținut cu ajutorul unei rețele de difracție plană cu constanta $N_0=400$ linii/m, dacă lumina cade normal pe rețea.

R: $\alpha=8^\circ55'$.

6.18. Asupra unei rețele de difracție plane, construită pentru a se utiliza în infraroșu, se trimite normal o radiație cu lungimea de undă egală cu 1200nm. Cunoscând că rețeaua are 200 linii/mm, să se calculeze unghiul sub care se formează maximum de difracție de ordinul al doilea și

să se arate dacă rețeaua permite și obținerea maximului de difracție de ordinul al cincilea, când se utilizează aceeași radiație optică.

R: $\alpha=30^\circ$; nu se poate forma.

6.19. O rețea de difracție plană cu constanta egală cu 10^{-6}m este iluminată sub un anumit unghi de incidență constant, cu radiația optică monocromatică a cărei lungime de undă este egală cu 500nm . Maximul luminos de ordinul al doilea se obține sub unghiul de difracție numeric egal cu unghiul de incidență. Să se calculeze:

- unghiul de incidență;
- numărul total al maximelor luminoase care se pot forma.

R: a) $i=30^\circ$;
b) $k_{\max}=5$.

6.20. Un fascicul paralel de lumină monocromatică de lungime de undă $\lambda=650\text{nm}$ este incident normal pe o rețea de difracție plană a cărei constantă este egală cu $10\mu\text{m}$. Imaginea de interferență-difracție se obține pe un ecran plan așezat în planul focal al unei lentile convergente cu distanța focală $f=0,25\text{m}$. Se cere să se calculeze:

- unghiul de difracție corespunzător maximului luminos de ordinul al doilea;
- distanța pe ecran dintre poziția maximului luminos central și poziția maximului luminos de ordinul întâi;
- numărul total al maximelor luminoase care se pot forma.

R: a) $\sin\alpha=0,13$;
b) $y=6,5\text{cm}$;
c) $k_{\max}=31$, dar, practic, nu se vor observa toate.

6.21. O rețea de difracție cu lățimea de 4cm și cu 1200 de linii pe milimetru este destinată să funcționeze în domeniul lungimilor de undă cuprinse între 380nm și 760nm . Considerând că radiația optică este incidentă normal pe rețeaua de difracție, să se calculeze:

- lățimea unghiulară a spectrului de ordinul întâi;
- puterea de separare a rețelei pentru lungimea de undă de 500nm ;
- puterea de separare maximă.

- R: a) $\alpha = 14,6^\circ$;
 b) $(\Delta\lambda)_{\text{max}} = 4,8 \cdot 10^4 \text{ \AA}$;
 c) $(\Delta\lambda)_{\text{min}} = 1,6 \cdot 10^5$.

6.22. O sursă de lumină monocromatică punctuală cu lungimea de undă $\lambda = 500 \text{ nm}$ se află la distanța $a = 6,75 \text{ m}$ de un paravan în care se află practicată o apertură cu diametrul $D_1 = 4,5 \text{ mm}$. Cum se va modifica iluminarea într-un punct situat pe axa de simetrie a sistemului dacă diametrul aperturii este mărit la valoarea $D_2 = 5,2 \text{ mm}$.

R: Iluminarea scade.

6.23. Lumina provenită de la o lampă cu vapori de Na este incidentă pe o rețea de difracție plană cu 10^4 linii pe inch. Să se calculeze distanța unghiulară dintre liniile D_1 ($\lambda_1 = 589 \text{ nm}$) și D_2 ($\lambda_2 = 589,6 \text{ nm}$) din spectrul de ordinul întâi observat cu un sistem telescopic. Se cunosc distanța focală a obiectivului, $f_{ob} = 24 \text{ cm}$ și cea a ocularului, $f_{oc} = 2 \text{ cm}$, sistemului telescopic.

R: $\Delta\theta_1 = -0,16^\circ$.

6.24. La un dispozitiv interferențial de tip Young, trei perechi de fante are $a = 1 \text{ mm}$, iar distanța dintre ele este $d = 2,5 \text{ mm}$. Câte maxime de interferență sunt cuprinse în maximumul central de difracție? De câte maximume secundare de difracție?

R: $N_p = 5$ franje, $N_s = 2,5$ franje.

6.25. O radiație luminoasă monocromatică având lungimea de undă λ cade în incidență normală pe o rețea de difracție. Să se determine dispersia unghiulară a rețelei în funcție de unghiul de difracție θ .

R: $D = \frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{\text{tg}\theta}{\lambda}$.

6.26. Dându-se o rețea de difracție cu 4000 linii/cm, câte ordine de difracție se vor produce pentru întreg spectrul vizibil (4000 \AA - 7000 \AA)?

R: 3 ordine.

6.27. O rețea de difracție are 3000 linii/cm. Pentru ce lungime de undă din spectrul vizibil se poate observa fenomenul de difracție în ordinul cinci?

R: $\lambda < 660\text{nm}$.

6.28. O rețea de difracție de 2cm are 6000 linii. La ce unghiuri vor apărea fascicule de intensitate maximă dacă radiația incidentă pe rețea are lungimea de undă $\lambda = 589\text{nm}$?

R: $\theta = 0^\circ$; $\theta = \pm 10^\circ 10'$; $\theta = \pm 20^\circ 41'$; $\theta = \pm 32^\circ$; $\theta = \pm 44^\circ 58'$; $\theta = \pm 62^\circ 04'$.

6.29. O rețea de difracție are 3000 linii/cm și este iluminată cu lumină albă sub incidență normală. Se formează un spectru la 30cm depărtare de rețea. Dacă în ecran se face un orificiu pătrat cu latura de 1cm, având latura dinspre maximul central la 5cm de acesta, ce ordin de mărime au lungimile de undă ale radiațiilor care trec prin orificiu?

R: $0,555\mu\text{m} < \lambda < 0,666\mu\text{m}$.

6.30. Constanta unei rețele de difracție este $a = 3\mu\text{m}$. Această rețea este așezată normal în calea unui fascicul de lumină monocromatică. Pe un ecran se formează franje de difracție. Unghiurile de difracție ce corespund la două maxime vecine de pe ecran, sunt $\varphi_1 = 23^\circ 15'$ și $\varphi_2 = 36^\circ 52'$. Se cere să se calculeze energia fotonilor din fasciculul de lumină considerat.

R: $\epsilon = 2,0175\text{eV}$.

6.31. Să se determine distanța focală a unei plăci zonale pentru lumină monocromatică cu $\lambda = 500\text{nm}$ care cade normal pe placă în fața de fascicul paralel, în cazul în care raza inelului al cincilea al acestei plăci este de 1,5mm. Ce se întâmplă dacă spațiul dintre placa zonală și ecran este umplut cu un mediu al cărui indice de refracție este n ?

R: $f = 0,9\text{m}$; f crește deoarece $\lambda = \lambda_0/n$.

6.32. O sursă punctuală S monocromatică ($\lambda = 550\text{nm}$) iluminează un ecran aflat la distanța de $L = 1\text{m}$ de sursa S . Între sursa S și ecran la $L/2$ se așază un paravan cu o gaură cu diametru $d = 1\text{mm}$. Cum va fi

iluminarea în centrul figurii de difracție obținută pe ecran, față de cazul când lipsește paravanul?

R: Iluminarea în prezența paravanului va fi mai mare decât în absența sa.

6.33. Să se calculeze raza unei deschideri circulare tăiată într-un ecran și care corespunde la 4 zone Fresnel, știind că distanța dintre ecran și izvorul de lumină monocromatică cu $\lambda=490\text{nm}$ este de 100cm, iar distanța dintre ecran și locul unde se observă figura de difracție este de 25cm.

R: $\rho_k=0,6\text{mm}$.

6.34. O placă zonală dă o imagine a unei surse îndepărtate la 3m de ea. Imaginea se obține la 2m de suprafața plăcii. Unde se va obține imaginea sursei dacă ea se deplasează la infinit?

R: $b=1,2\text{m}$.

6.35. O placă metalică subțire are o gaură cu diametrul de 4mm. Pe placă cade normal un fascicul de lumină cu lungimea de undă $\lambda=500\text{nm}$. O lentilă cu distanța focală de 1m este așezată în imediata apropiere a plăcii și proiectează figura de difracție pe un ecran. Ce va fi în centrul figurii de difracție, pată luminoasă sau întunecată?

R: Pată întunecată.

6.36. Să se calculeze lărgimea maximului central al figurii de difracție obținute cu ajutorul unei fante cu lărgimea $a=0,04\text{mm}$ pe planul căreia cade normal un fascicul paralel de lumină monocromatică cu $\lambda=523\text{nm}$, știind că figura de difracție se observă în planul focal al unei lentile cu distanța focală $f=5\text{cm}$.

R: $L 1,3074\text{mm}$.

6.37. Linia galbenă a sodiului cu $\bar{\lambda}=5893\text{Å}$ este un dublet cu lărgimea de 6 Å. Care trebuie să fie numărul minim de trăsături pe care trebuie să le aibă rețeaua pentru a rezolva acest dublet în spectrul de ordinul al doilea?

R: $N 491$ trăsături.

6.38. Lungimea rețelei de difracție este de 15mm, iar perioada de 5 μ m. Care este ordinul minim al spectrului pentru care două linii spectrale care se deosebesc cu 1Å se obțin separate, dacă liniile se găsesc în domeniul roșu extrem al spectrului vizibil ($\lambda=700\text{nm}$).

R: $k=3$.

6.39. Pe o placă transparentă s-au făcut zgârieturi care formează rețele de difracție pe ambele fețe. Pe placă cade lumină monocromatică sub incidență normală. Prin ce se deosebește acțiunea asupra luminii a unei asemenea plăci în comparație cu o placă de aceeași grosime dar care are numai pe o față zgârieturi? Să se studieze două cazuri:

- grosimea plăcii este cu mult mai mare decât constanta rețelei;
- grosimea plăcii este egală cu constanta rețelei.

R: a) Lumina trece prin cele două rețele formând același spectru de difracție ca și lumina care trece prin placa cu o singură rețea.
b) Afară de lumina care trece în direcția normalei va mai trece lumină numai în acele direcții care satisfac relația:

$$e \cdot \cos\varphi = \frac{k_1 \lambda}{k_2 n},$$

unde: $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$, iar n este indicele de refracție al plăcii, e este grosimea plăcii.

6.40. O rețea plană are $N=100$ trăsături. Se cere:

a) Care este puterea de separare a rețelei pentru spectrul de ordinul întâi?

b) Această rețea poate să separe în spectrul de ordinul întâi două radiații cu lungimile de undă de 435nm și, respectiv, $435\pm 5\text{nm}$? Dar radiațiile cu lungimea de undă de 570nm și, respectiv, $570\pm 5\text{nm}$? De ce?

R: a) $P=100$;

b) Rețeaua poate separa radiațiile cu $\lambda=435\text{nm}$ și $\lambda=435\pm 5\text{nm}$, dar nu poate separa radiațiile cu $\lambda=570\text{nm}$ și $\lambda=570\pm 5\text{nm}$.

6.41. Intervalul dintre direcțiile maximelor principale de ordinele întâi și al doilea, difractate de o rețea plană, este $\Delta\varphi=21^\circ$. Dispersia unghiulară a

rețelei în ordinul întâi este $(d\varphi/d\lambda)_1=1,1$ minute/nm. Să se calculeze lungimea de undă a radiației folosite.

R: $\lambda=1050\text{nm}$.

6.42. O rețea de lungime $L=5\text{cm}$, cu constanta $n=500\text{ mm}^{-1}$, este iluminată sub incidență normală cu un fascicul paralel de lumină, de lungimea de undă $\lambda=500\text{nm}$. Să se calculeze:

- ordinul maxim de difracție;
- unghiurile de difracție pentru primele două ordine;
- dispersia unghiulară pentru primele două ordine;
- puterea de rezoluție și intervalul spectral liber în ordinul întâi;
- dacă fasciculul difractat de rețea trece printr-o lentilă convergentă cu distanța focală $f=5\text{m}$, ce distanță există în planul focal, în ordinul întâi de interferență, între două maxime, corespunzătoare unor lungimi de undă care diferă cu $0,1\text{nm}$;

f) cu ce eroare se fac determinările absolute ale lungimilor de undă, dacă precizia de măsurare a pozițiilor este o zecime din mărimea petei de difracție? Se dă diametrul lentilei $D=5\text{cm}$.

- R:**
- $m_{\max}=4$;
 - $\varphi_1=14^\circ 28'$, $\varphi_2=30^\circ$;
 - $(d\varphi_1/d\lambda)=1,7$ minute/nm, $(d\varphi_2/d\lambda)=4$ minute/nm;
 - $(\lambda/\Delta\lambda)_1=2,5 \cdot 10^4$, $\delta\lambda_1=500\text{nm}$;
 - $\Delta x_1=0,58\text{mm}$;
 - eroarea relativă $\epsilon = \frac{\partial\lambda}{\lambda} = 7,8 \cdot 10^{-6}$.

7. OPTICA GEOMETRICĂ

PROBLEME REZOLVATE

7.1. a) Pe fundul unui vas de adâncime h ce conține un lichid de indice de refracție absolut n este așezată o sursă de lumină punctuală. Pe suprafața apei plutește o placă circulară opacă, astfel încât centrul său se află deasupra izvorului (fig.7.1.a). Să se determine raza minimă pe care trebuie să o aibă această placă pentru ca nici o rază de lumină să nu poată ieși prin suprafața apei.

b) Considerăm că se îndepărtează placa, sursa se acoperă cu o pâlnie de unghi 2θ , după care se umple vasul cu apă până la vârful acesteia. Să se precizeze în ce condiții sursa este vizibilă.

Rezolvare:

a) Pentru ca sursa să nu fie vizibilă la suprafața apei, trebuie ca unghiul de incidență al luminii emise de aceasta la suprafața de separare apă - aer să fie egal sau mai mare decât unghiul limită, pentru ca lumina să se reflecte total: $i \geq i_l$.

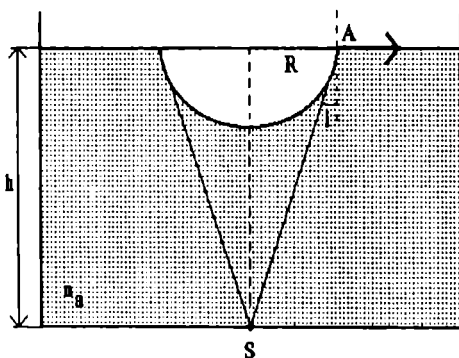


Fig.7.1.a

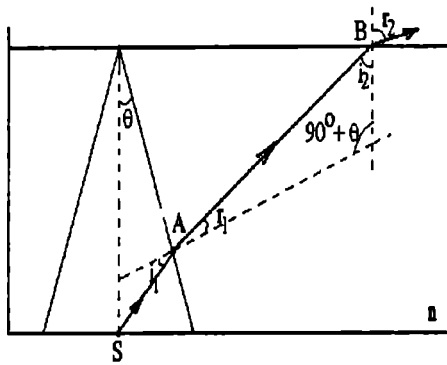


Fig. 7.1.b

Legea refracției în punctul A: $n \sin i = 1$.

Rezultă: $\sin^2 i \geq \frac{1}{n^2}$.

Din figură avem că: $\operatorname{tgi} = \frac{R}{h} = \frac{\sin i}{\sqrt{1 - \sin^2 i}}$.

Combinând cele două relații, obținem: $R \geq \frac{h}{\sqrt{n^2 - 1}}$. Deci, valoarea minimă a razei va fi:

$$R_{\min} = \frac{h}{\sqrt{n^2 - 1}}$$

b) Sursa este vizibilă dacă în B nu se produce fenomenul de reflexie totală

$$\sin^2 i_2 \leq \frac{1}{n} \Leftrightarrow \sqrt{1 - \cos^2 i_2} \leq \frac{1}{n}$$

Legea refracției în A: $\sin i_1 = n \sin r_1$. Din figură: $r_1 = 90^\circ - (\theta + i_2)$. Deci:

$$\begin{aligned} \sin r_1 &= \sin(90^\circ - (\theta + i_2)) = \cos(\theta + i_2) = \\ &= \cos i_2 \cos \theta - \sin i_2 \sin \theta = \frac{\sqrt{n^2 - 1}}{n} \cos \theta - \frac{1}{n} \sin \theta. \end{aligned}$$

Deci:

$$\sin i_1 = \sqrt{n^2 - 1} \cos \theta - \sin \theta.$$

Situația cea mai nefavorabilă în cazul refracției este:

$$\alpha_{1\max} = 90^\circ - \theta \Rightarrow \sin i_1 = \cos \theta.$$

Din ultimele două relații obținem:

$$\cos \theta = \sqrt{n^2 - 1} \cos \theta - \sin \theta.$$

Condiția de vizibilitate a sursei va fi:

$$\operatorname{tg} \theta \geq \sqrt{n^2 - 1} - 1.$$

7.2. Fie două medii optice, '0' și '2', caracterizate de indicii de refracție n_0 și n_2 ($n_0 < n_2$). În interiorul lui '2' și în contact cu '0' (ca în figură), se află o fibră optică cilindrică, dreaptă și uniformă, de indice de refracție n_1 ($n_1 > n_2$). Considerând raza SO, care se refractă în punctul O, aflat pe axa optică a fibrei și în planul diafragmei de intrare a luminii, se cere să se calculeze unghiurile limită i_{\max} și r_{\max} pentru care fibra este un ghid de lumină. Se consideră că axa optică și diafragma de intrare a luminii sunt perpendiculare și că diametrul fibrei este mai mare decât lungimea de undă a radiației luminoase.

Rezolvare:

Deoarece diametrul fibrei este mai mare decât lungimea de undă a luminii, putem neglija fenomenele de difracție și propagarea luminii în fibră se poate trata numai din considerente de optică geometrică. Pentru ca fibra să fie un ghid de lumină în sensul propagării acesteia, este necesar ca lumina să nu părăsească fibra, deci raza incidentă trebuie să se reflecte total pe suprafața interioară a fibrei:

$$n_1 \sin \alpha \geq n_2.$$

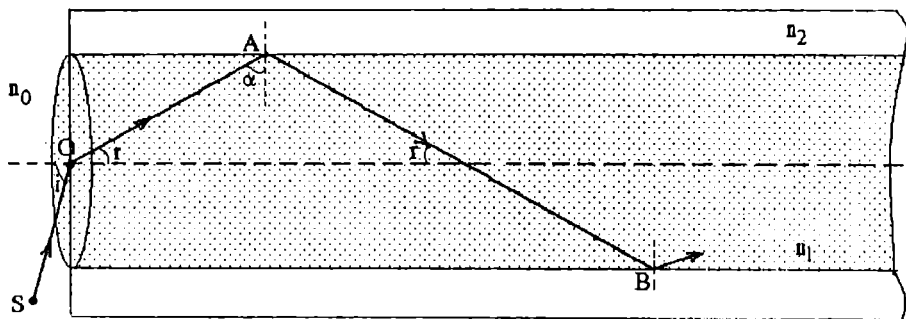


Fig. 7.2.

Dar $\alpha = 90^\circ - r$ și condiția se rescrie: $\cos r \geq n_2/n_1$.

Legea refracției în O: $n_0 \sin i = n_1 \sin r$.

Din rezolvarea ecuațiilor de mai sus obținem:

$$\sin i \leq \frac{1}{n_0} \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$$

Unghiul maxim de incidență va fi:

$$i_{\max} = \arcsin \frac{1}{n_0} \sqrt{n_1^2 - n_2^2} .$$

Unghiul maxim de refracție va fi:

$$r_{\max} = \arcsin \sqrt{1 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2} .$$

Raza considerată se va reflecta în punctul A sub un unghi egal cu α , va intersecta axa optică sub unghi egal cu r , astfel că următoarea reflexie va avea loc sub un unghi de incidență egal tot cu α ș.a.m.d. În concluzie, unghiul de incidență va avea aceeași valoare pentru toate reflexiile succesive pe întreaga lungime a fibrei.

7.3. O rază de lumină monocromatică traversează o lamă de sticlă cu fețe plan-paralele de grosime d și indice de refracție n . Se presupune cunoscut unghiul de incidență i și că lama se află în aer. Cerințe:

- Să se arate că raza emergentă este paralelă cu cea incidentă.
- Care este distanța dintre punctul de incidență și cel de emergență?
- Cu cât a fost deviată raza incidentă față de drumul pe care ea l-ar fi parcurs în absența lamei? Care este valoarea maximă a acestei deviații?

Rezolvare:

- Aplicând legea refracției în punctele A și B:

$$\sin i = n \sin r ; \quad n \sin r = \sin i'$$

obținem $i = i'$, ceea ce implică paralelismul razelor incidentă și emergentă.

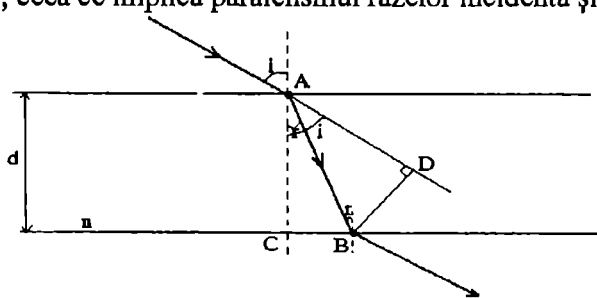


Fig. 7.3.

b) Din geometria figurii obținem: $BC = dtgr = d \frac{\sin r}{\sqrt{1 - \sin^2 r}}$ și,

utilizând relațiile de mai sus, rezultă:

$$BC = d \frac{\sin i}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}}.$$

c) Aplicând teorema sinusului în triunghiul ABD obținem, după prelucrări:

$$BD = d \frac{\sin(i-r)}{\cos r} = d \frac{\sin i \cos r - \cos i \sin r}{\cos r} = d \frac{\sin i (\sqrt{n^2 - \sin^2 i} - \sqrt{1 - \sin^2 i})}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}}$$

Am utilizat și relațiile:

$$d = AB \cos r; \cos i = \sqrt{1 - \sin^2 i}; \cos r = \frac{1}{n} \sqrt{n^2 - \sin^2 i}.$$

BD va avea valoarea maximă pentru $(\sin i)_{\max} = 1$, adică $i_{\max} = 90^\circ$, și anume $BD_{\max} = d$.

7.4. O rază de lumină cade sub un anumit unghi de incidență pe o sferă plină transparentă de indice de refracție absolut n . Să se afle valoarea unghiului de incidență astfel încât deviația unghiulară să fie maximă și să se calculeze această deviație.

Rezolvare:

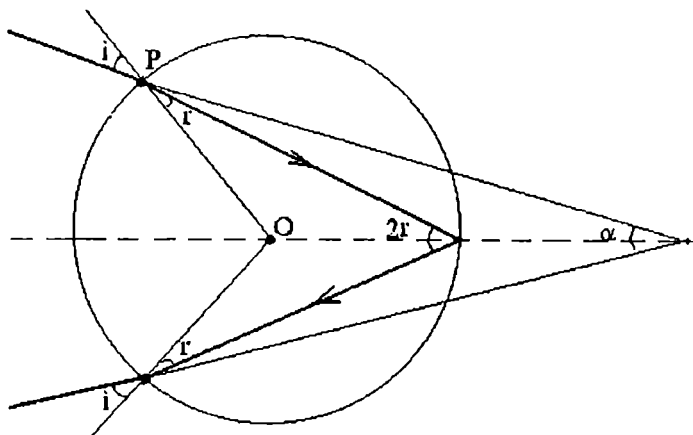


Fig. 7.4.

Legea refracției în punctul P: $\sin i = n \sin r$.

Se observă că: $\alpha \in (0; \pi/2)$; $r \in (0; \arcsin(1/n))$ și că: $r = (\alpha/2) + (i-r)$

de unde: $\alpha = 4r - 2i$.

Deci: $\alpha = 4r - 2\arcsin(n \sin r)$, care, derivat în raport cu r , ne conduce

la

$$\frac{d\alpha}{dr} = 4 - 2 \frac{n \cos r}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 r}}$$

Din anularea derivatei rezultă: $\sin r = \sqrt{\frac{4 - n^2}{3n^2}}$ și

$$i_{\alpha=\alpha_{\max}} = \arcsin(n \sin r) = \arcsin \sqrt{\frac{4 - n^2}{3}}$$

Deviația unghiulară maximă va fi:

$$\alpha_{\max} = 4 \arcsin \sqrt{\frac{4 - n^2}{3n^2}} - 2 \arcsin \sqrt{\frac{4 - n^2}{3}}$$

7.5. Pe fundul unui bazin plin cu apă cu adâncimea de 1.5m se află o monedă. Cu cât pare mai ridicată moneda față de fundul bazinului în situațiile:

- se privește sub un unghi de incidență de 60° ;
- se privește sub incidență normală.

Rezolvare:

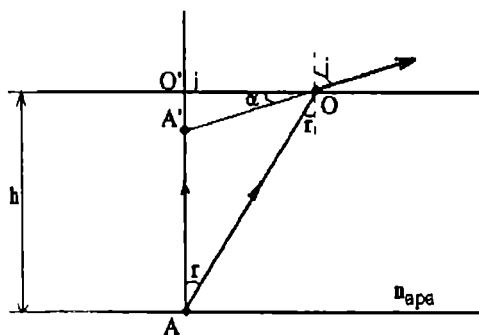


Fig. 7.5.a

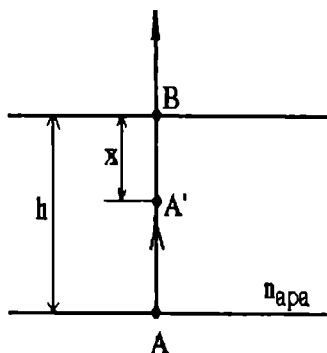


Fig. 7.5.b

Imaginea monedei pusă în punctul A se află la intersecția razelor de lumină care pornesc din A și suferă refracție pe suprafața de separare apă - aer. Imaginea A' a lui A este virtuală.

Deplasarea față de fundul bazinului va fi: $AA' = h - A'O'$.

Din considerente geometrice și din legea refracției rezultă succesiv:

$$A'O' = O'O \operatorname{tg} \alpha = h \operatorname{tg} \operatorname{tg}(90^\circ - i) = h \operatorname{tg} \operatorname{ctg} i.$$

$$A'O' = \frac{h \cos i}{n \cos r} = \frac{h \cos i}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}}$$

Rezultă:

$$AA' = h - \frac{h \cos i}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}}.$$

$$AA' = 0.63 \text{ m.}$$

b) La incidență normală se poate lucra în aproximație gaussiană.

Considerând că suprafața de separare apă-aer este un dioptru plan transparent ($R = \infty$), avem:

$$\frac{1}{A'B} - \frac{n_{\text{apa}}}{h} = 0 \Rightarrow A'B = h \frac{1}{n_{\text{apa}}} \Rightarrow AA' = h - A'B = h \left(1 - \frac{1}{n_{\text{apa}}} \right).$$

$$AA' = 0.4375 \text{ m.}$$

7.6. La ce distanță față de o oglindă sferică concavă trebuie așezat un obiect, perpendicular pe axa optică principală, pentru a avea:

- o imagine răsturnată de 5 ori mai mică decât obiectul;
- o imagine răsturnată de 5 ori mai mare decât obiectul;
- o imagine dreaptă de 5 ori mai mare decât obiectul?

Se cunoaște raza oglinzii $R = 6 \text{ m}$. Care este natura imaginii în cele trei situații?

Rezolvare:

Din relațiile oglinzilor sferice:

$$\beta = -\frac{y'}{x}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x'} = \frac{2}{R}$$

obținem:

$$x = R \frac{\beta - 1}{2\beta}.$$

a) Obiectul se află la o distanță mai mare decât raza dioptrului din care face parte oglinda.

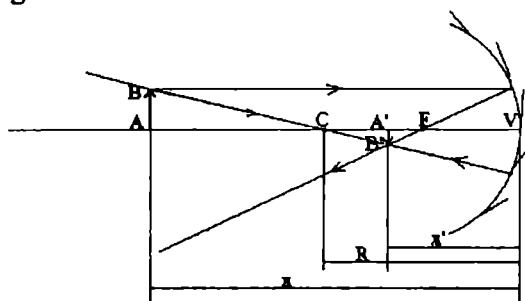


Fig. 7.6.a

$x_a = -18\text{m}$. Imaginea este reală.

b) Obiectul se află între centru și focarul oglinzii.

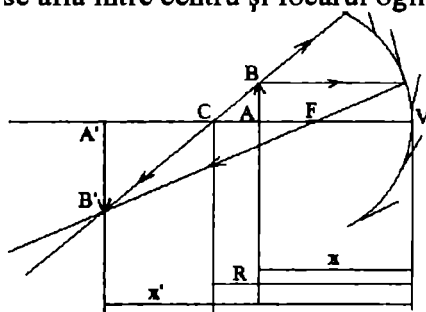


Fig. 7.6.b

$x_b = -3.6\text{m}$. Imaginea este reală.

c) Obiectul se află între focar și vârful oglinzii.

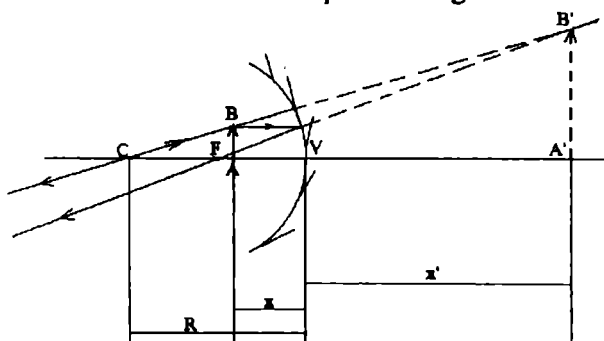


Fig. 7.6.c

$x_c = -2.4\text{m}$. Imaginea este virtuală.

Observație: S-a ținut cont de convenția geometrică de semn.

7.7. În ce condiții o oglindă convexă poate da o imagine reală?

Rezolvare:

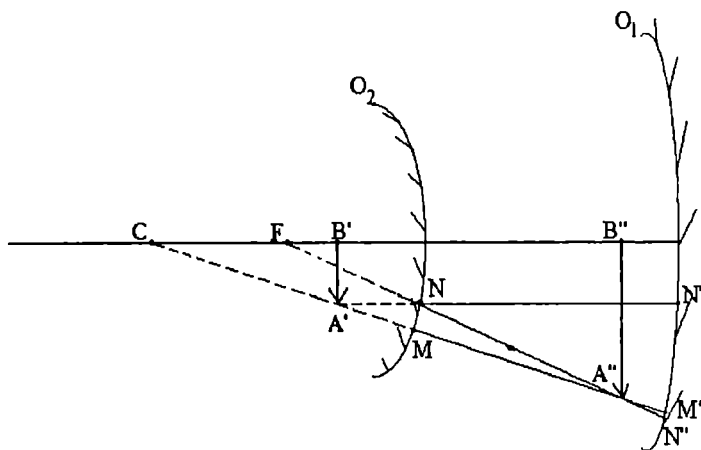


Fig. 7.7.

Există situația, prezentată în figură, pentru care o oglindă convexă poate da o imagine reală a unui obiect. Astfel, pentru un obiect dat AB, A'B' reprezintă imaginea reală și răsturnată creată de oglinda concavă O₁. Dacă la o anumită distanță de O₁ se plasează oglinda convexă O₂ astfel încât să coincidă axele lor optice principale, imaginea obiectului AB nu va mai fi A'B', ci A''B'', al cărui punct A'' se găsește la intersecția razei A'M' (raza A'M' este perpendiculară pe O₂ în M și nu este deviată de oglinda convexă) cu raza N''N. Raza NN' este paralelă cu axa optică a sistemului și va fi reflectată de oglinda convexă astfel încât prelungirea ei (NF) să treacă prin focarul F. Deci A'' va fi imaginea reală a punctului virtual A'.

În concluzie:

- a) A''B'' este reală dacă obiectul virtual A'B' este plasat între focar și vârful oglinzii convexe.
- b) Dacă A'B' se află în focar, imaginea reală A''B'' se va forma la infinit.
- c) Dacă A'B' se află față de vârful oglinzii O₂ la o distanță mai mare decât distanța focală, atunci imaginea A''B'' va fi virtuală.

7.8. Se așează față în față două oglinzi sferice concave cu distanțele focale $f_1 = 6\text{cm}$ și respectiv, $f_2 = 9\text{cm}$, astfel încât axele lor optice principale să coincidă și distanța dintre ele să fie $D = 50\text{cm}$. Să se calculeze:

a) unde trebuie așezat un obiect, perpendicular pe axa optică comună, pentru ca imaginile sale în cele două oglinzi să fie reale și să se obțină în același loc pe axă;

b) dacă mărimea obiectului este $y_1 = 2\text{cm}$, care este mărimea imaginii finale?

Rezolvare:

Fie x_1 distanța de la obiect la oglinda O_1 . Imaginea dată de aceasta se va afla x'_1 față de O_1 și devine obiect pentru oglinda O_2 situat față de aceasta din urmă la x_2 . Pentru ca imaginea finală să coincidă ca poziție cu imaginea intermediară trebuie ca imaginea intermediară să se formeze în centrul oglinzii O_2 .

Din rezolvarea sistemului de ecuații:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x'_1} = \frac{1}{f_1}$$

$$\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x'_2} = \frac{1}{f_2}$$

$$D = x_1 + x_2$$

$$x_2 = x'_2$$

obținem $x_1 = 7.38\text{cm}$; $x'_1 = 32\text{cm}$. În aceste condiții, mărirea liniară transversală a imaginii finale va fi $\beta \cong 4$. Deci, imaginea finală va avea o înălțime $y_2 = \beta y_1 \cong 8\text{cm}$.

7.9. În fața unei oglinzi sferice concave cu raza de curbură $R=4\text{m}$, se așează, perpendicular pe axa sa optică principală, o oglindă plană. Un punct luminos plasat între cele două oglinzi emite un fascicul, și prin reflexie succesivă pe fiecare din ele, se formează imaginea în planul ce conține punctul luminos-obiect. Distanța dintre vârful oglinzii concave și planul ce conține punctul este de $d=3\text{m}$. Să se determine distanța D dintre oglinda plană și vârful oglinzii concave.

Rezolvare:

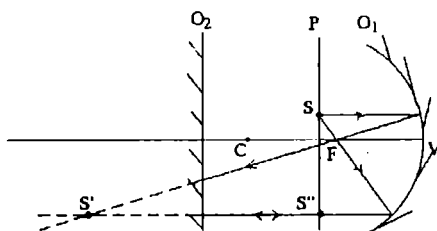


Fig. 7.9.a

a) Presupunem că fasciculul luminos se reflectă mai întâi pe oglindă concavă. Imaginea sa în această oglindă va fi reală și se va situa

la distanța $x = \frac{Rd}{2d - R}$ de vârful oglinzii concave, deci la 3m față de

obiect și va fi obiect pentru oglindă plană. Deoarece oglindă plană dă o imagine situată în planul obiectului, înseamnă că ea este așezată la jumătatea distanței dintre imaginea dată de oglindă concavă și planul obiectului, deci la $D = 1.5m + 3m = 4.5m$ față de vârful oglinzii concave.

b) Presupunem că fasciculul luminos se reflectă mai întâi pe oglindă plană. Imaginea sa în această oglindă va fi virtuală, se va afla la distanța $3 + 2(D - 3) = 2D - 3$ de vârful oglinzii concave și va constitui obiect pentru aceasta din urmă. Aplicând formula oglinzilor sferice obținem $D = 4.5m$, ca și în cazul anterior.

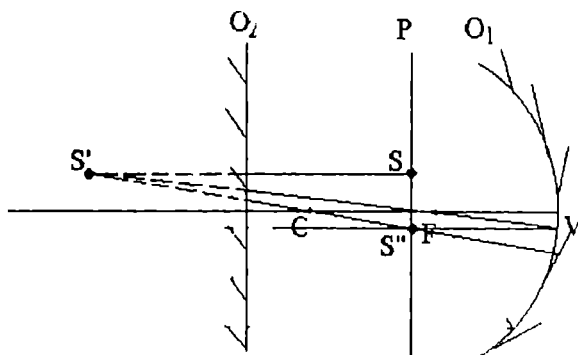


Fig. 7.9.b

7.10. Două oglinzi sferice, una concavă și alta convexă, cu razele $R_1=R_2=1\text{m}$ se așează la distanța $d=1\text{m}$ una de cealaltă. Pe axa principală comună celor două oglinzi, la distanța $p=0.75\text{m}$ de oglinda concavă, se află punctul luminos S. Razele de lumină emise de acesta sosesc pe oglinda convexă după ce se reflectă pe oglinda concavă. Unde se va forma imaginea punctului S?

Rezolvare: În absența oglinzii convexe, imaginea punctului S în oglinda concavă se va forma la distanța $p' = \frac{Rp}{2p - R} = 1.5\text{m}$ de vârful ei.

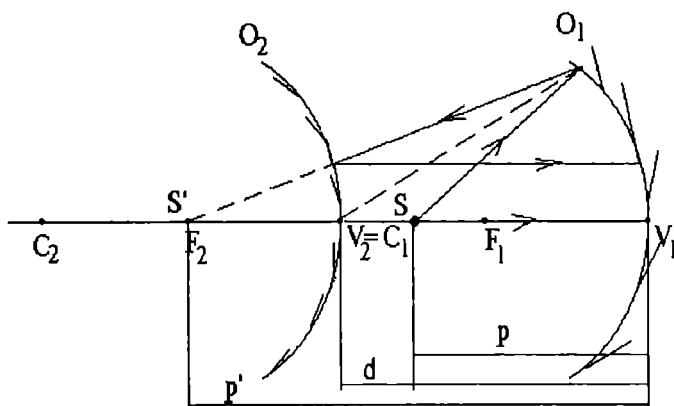


Fig. 7.10.

După introducerea oglinzii convexe și în condițiile numerice ale problemei, se observă că punctul corespunzător distanței p' este tocmai focarul oglinzii convexe, deci raza de lumină se va reflecta paralel cu axa optică principală a sistemului. Imaginea punctului S după reflexie pe cele două oglinzi se va forma la infinit.

7.11. Un obiect se află la distanța $d_1=k_1f$ ($k_1>1$) de vârful unei oglinzi concave de distanță focală f . El se apropie de vârful oglinzii în mișcare rectilinie și uniformă, cu viteza v_1 , până la distanța $d_2=k_2f$ ($k_2<k_1$). Să se determine valoarea lui k_1 pentru care imaginea se va forma la infinit. Unde se va afla obiectul în acest caz și ce valoare are raportul (v_2/v_1) ?

Rezolvare:

Pozițiile imaginii se obțin din formula oglinzilor sferice scrisă pentru cele două poziții ale obiectului:

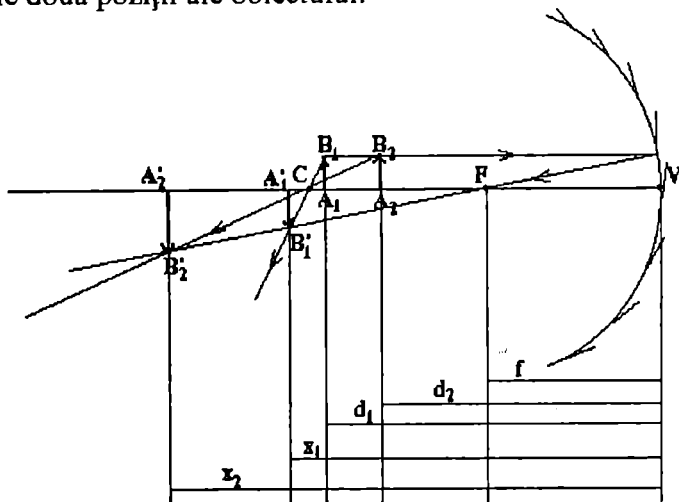


Fig. 7.11.

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f} \Rightarrow x_1 = \frac{fk_1}{k_1 - 1}$$

$$\frac{1}{d_2} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{f} \Rightarrow x_2 = \frac{fk_2}{k_2 - 1}$$

Vitezele de deplasare a obiectului și a imaginii sunt:

$$v_1 = \frac{|d_2 - d_1|}{t} = \frac{d_1 - d_2}{t} = \frac{f(k_1 - k_2)}{t}$$

$$v_2 = \frac{|x_2 - x_1|}{t} = \frac{x_2 - x_1}{t} = \frac{k_1 - k_2}{(k_1 - 1)(k_2 - 1)} \frac{f}{t}$$

de unde: $\frac{v_2}{v_1} = \frac{1}{(k_1 - 1)(k_2 - 1)}$. Se observă că pentru $k_1 \rightarrow 1$ raportul

vitezelor tinde la ∞ . Imaginea se va forma la ∞ , iar obiectul se va afla în focar.

7.12. În fața unei lentile convergente de vârf V, la o distanță mai mare decât distanța ei focală, se plasează un obiect în formă de triunghi dreptunghic, $m(\angle BAC) = 90^\circ$ și astfel încât cateta AB este perpendiculară

pe axa optică principală a lentilei. Se dau: $VA=25\text{cm}$, $AB=4\text{cm}$, $AC=6\text{cm}$.

- Să se determine, analitic și grafic, poziția imaginii obiectului.
- Să se calculeze raportul S al suprafețelor imaginii și obiectului.

Rezolvare:

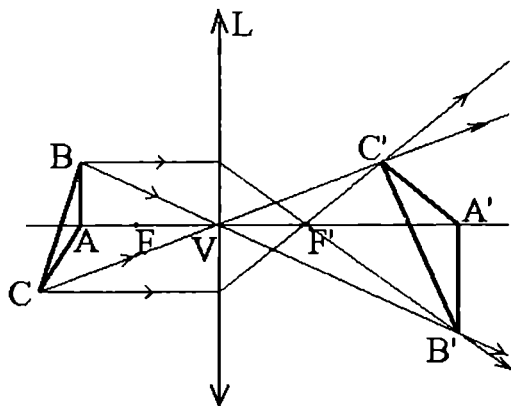


Fig. 7.12r

Imaginea obiectului se află la distanța x'_A , care se determină din formula lentilelor:

$$\frac{1}{x'_A} - \frac{1}{x_A} = \frac{1}{f}$$

Numeric: $x'_A=11.1\text{cm}$.

Din calculul ariilor triunghiurilor obiect și imagine obținem raportul:

$$S = \frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = 0.194.$$

7.13. Distanța dintre un obiect luminos și un ecran este $L=60\text{cm}$. O lentilă așezată între acestea dă pe ecran o imagine a obiectului în două poziții, distanța dintre ele fiind $l=10\text{cm}$.

- Care este distanța focală a lentilei?
- Care sunt coordonatele acestor două poziții?

Rezolvare: Din formula lentilelor și din figură

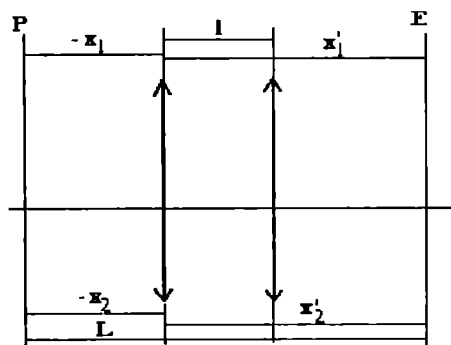


Fig. 7.13.

obținem sistemul de ecuații:

$$L = -x_2 + x_2'$$

$$L = -x_1 + x_1'$$

$$-x_2 = -x_1 + l$$

$$\frac{1}{x_1'} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f}$$

$$\frac{1}{x_2'} - \frac{1}{x_2} = \frac{1}{f}$$

Rezolvarea acestuia ne conduce la:

$$f = \frac{L^2 - l^2}{4L}$$

$$x_1^{(1,2)} = \frac{-L \pm \sqrt{L^2 - 4Lf}}{2}$$

$$x_2^{(1,2)} = \frac{L \mp \sqrt{L^2 - 4Lf}}{2}$$

Valorile numerice corespunzătoare sunt: $f = 14.58\text{cm}$; $x_1 = -25\text{cm}$ și -35cm ; $x_2 = 25\text{cm}$ și 35cm .

7.14. În fața unei lentile convergente se află un obiect cu înălțimea $y_1 = 10\text{cm}$. Imaginea obiectului formată pe un ecran are înălțimea $y_2 = -40\text{cm}$. Dacă îndepărtăm obiectul cu 10cm față de lentilă, înălțimea imaginii se micșorează de două ori. Să se calculeze distanța focală a lentilei.

Rezolvare: Din formulele lentilelor și condițiile problemei

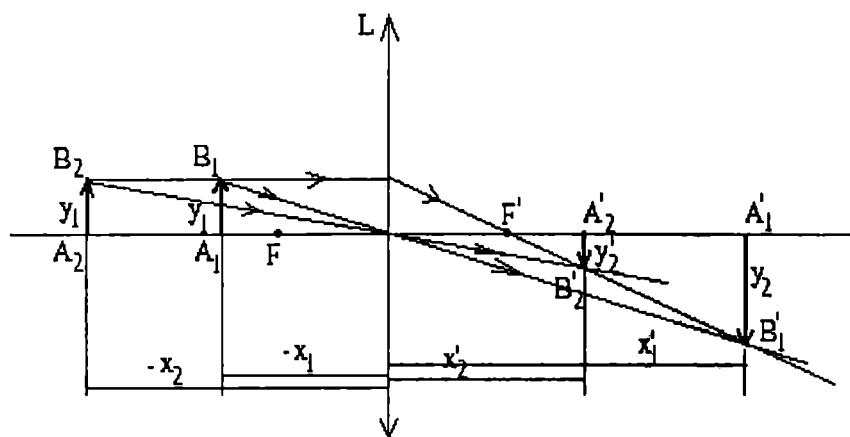


Fig. 7.14.

obținem sistemul de ecuații:

$$\frac{1}{x_1'} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f}$$

$$\frac{1}{x_2'} - \frac{1}{x_2} = \frac{1}{f}$$

$$\frac{x_1'}{x_1} = \frac{y_2}{y_1}$$

$$\frac{x_2'}{x_2} = \frac{y_2'}{y_1}$$

$$\frac{x_2'}{x_2} = \frac{y_2'}{y_1}$$

$$y_2' = \frac{y_2}{2}$$

$$x_2 = x_1 + 10$$

a cărui rezolvare ne conduce la $f = 40\text{cm}$.

7.15. În ce condiții o lentilă divergentă poate da o imagine reală?

Rezolvare:

Pesupunem că AB este imaginea reală a unui obiect, creată de o lentilă convergentă. Aceasta va deveni obiect pentru lentila divergentă L care se plasează în drumul razelor ce vin de la obiect.

Pe de o parte, dintre toate razele care cad pe lentila L , raza care trece prin centrul optic al lentilei va fi nedeviată după refracție.

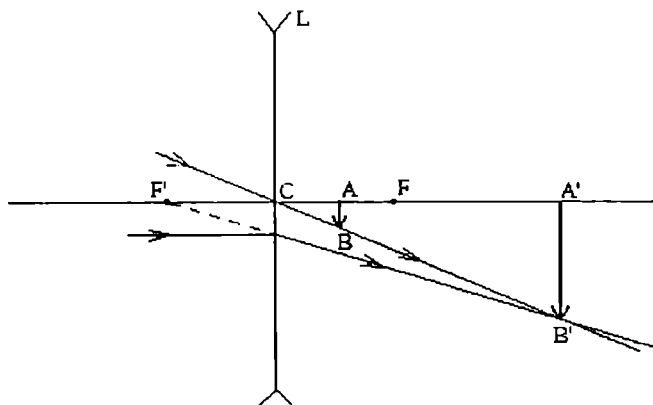


Fig. 7.15.

Pe de altă parte, o rază care este paralelă cu axa optică a sistemului, va fi refractată de L astfel încât prelungirea ei să treacă prin focarul F' . Aceste două raze se intersectează în B' . Deci, $A'B'$ este imaginea reală a obiectului AB .

Discuție:

- Dacă obiectul se află la o distanță mai mică decât distanța focală a lentilei, imaginea sa este reală.
- Dacă obiectul se află în focarul lentilei, imaginea se formează la infinit.
- Dacă obiectul se află la o distanță mai mare decât distanța focală a lentilei, atunci imaginea va fi virtuală.

7.16. Cu ajutorul unei lentile convergente se obține pe un ecran imaginea clară a unui obiect luminos, aflat pe axa optică a lentilei. Dacă între lentilă și ecran se plasează o lamă de sticlă ($n = 1.5$) cu fețe plan-paralele, de grosime $d = 3\text{cm}$, să se determine în ce sens și cu cât trebuie deplasat ecranul pentru ca pe el să se poată reobține imaginea clară a obiectului.

Rezolvare:

În absența lamei, imaginea obiectului A_1B_1 va fi A_2B_2 . După introducerea lamei, imaginea va fi A_3B_3 . Deci, ecranul trebuie deplasat

spre dreapta cu distanța B_2B_3 . După cum se vede din figură: $B_2B_3 = MD - ED$. Din considerente trigonometrice în triunghiul MDN și aplicând legea refracției în punctul M, se obține succesiv:

$$\frac{\operatorname{tgr}}{\operatorname{tgi}} = \frac{ED}{MD} \Rightarrow ED = MD \frac{\operatorname{tgr}}{\operatorname{tgi}} \equiv MD \frac{\sin r}{\sin i} = MD \frac{1}{n}.$$

Cum $MD = d$, obținem: $B_2B_3 = d - d/n$; $B_2B_3 = 1\text{cm}$.

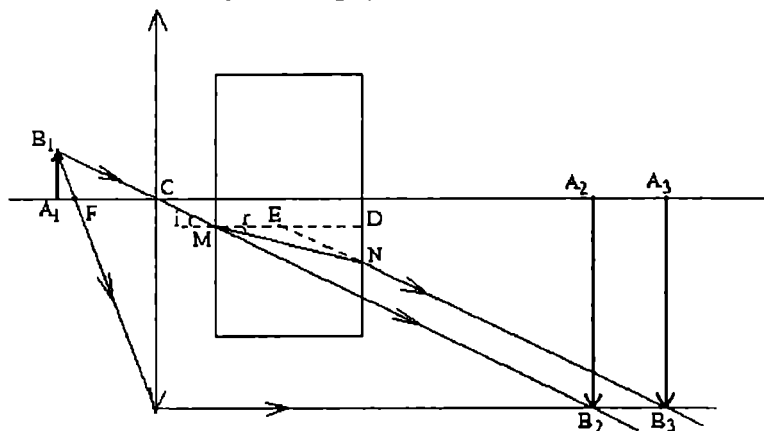


Fig. 7.16.

7.17. a) Lumina care pleacă dintr-un punct P se refractă pe un sistem optic centrat format din două lentile convergente L_1 și L_2 și apoi se reflectă pe o oglindă concavă O. Unde trebuie plasată această oglindă pentru ca după reflexie pe ea și refracție înapoi pe L_1 și L_2 , imaginea finală să se formeze tot în P, oricare ar fi distanța dintre cele două lentile.

b) Se dă un sistem optic centrat format dintr-o lentilă biconvexă L_1 , una biconcavă L_2 , aflate la o distanță de 50cm, ambele având câte două dioptrii și o oglindă plană plasată la distanța d de L_2 . Să se determine d astfel încât imaginea reală unui punct luminos P așezat în fața lui L_1 la 100cm se formează în planul punctului.

Rezolvare:

a) Pentru ca distanța dintre cele două lentile să nu aibă nici o influență asupra poziției imaginii finale, plasăm punctul P în focarul-obiect al lentilei L_1 . Astfel, toate razele care cad pe L_1 se refractă paralel cu axa optică și apoi vor trece prin focarul imagine al lentilei L_2 . Dacă centrul oglinzii O va coincide cu acest focar, razele vor cădea normal pe

oglină și se vor întoarce pe același drum pe care au venit, deci imaginea se va forma tot în P.

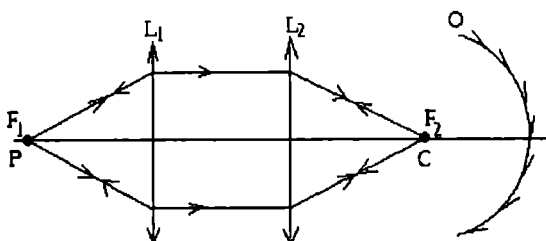


Fig. 7.17.a

b) Lentila divergentă (biconcavă) este plasată în focarul lentilei convergente (biconvexă). Dacă pe axă se plasează un punct la dublul distanței focale, imaginea lui se va forma tot la dublul distanței focale, deci în focarul lentilei divergente. După refracție pe L_2 , fasciculul va deveni paralel și d poate lua orice valoare.

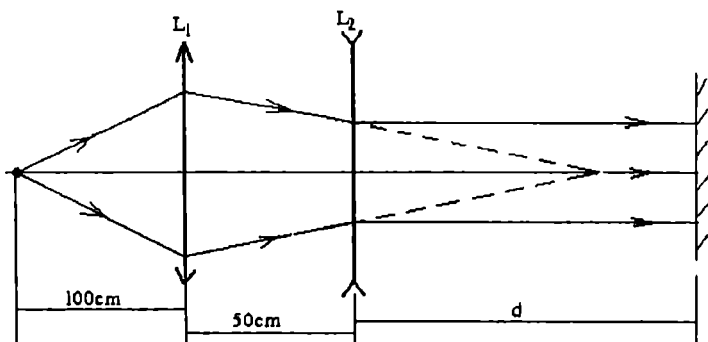


Fig. 7.17.b

7.18. Se pun în contact coaxial două lentile biconvexe identice cu raza de curbură $R = 20\text{cm}$ și confecționate din sticlă ($n_{st} = 1.5$). Spațiul dintre ele se umple cu apă ($n_{apa} = 4/3$). Un obiect cu înălțimea de 6cm se află la 30cm de sistem. Calculați înălțimea imaginii formate de sistem.

Rezolvare:

Distanța focală a sistemului optic format rezultă din suma convergențelor:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} + \frac{1}{f_3} = 2(n_{st} - 1) \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R} \right) + \left(\frac{n_{apa}}{n_{st}} - 1 \right) \left(-\frac{1}{R} - \frac{1}{R} \right).$$

Aplicând formulele lentilelor:

$$\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{F}$$

$$\beta = \frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1}$$

obținem: $F = 0.09\text{m}$; $x_2 = 1\text{m}$; $y_2 = -20\text{cm}$.

7.19. Pe un banc optic sunt plasate o lentilă convergentă cu distanța focală $f_1 \geq d$ și una divergentă cu distanța focală $f_2 \leq f_1$, d fiind distanța dintre lentile. Pe lentila convergentă cade un fascicul de raze paralele. Să se calculeze distanța D cu care se deplasează punctul de convergență al fascicului ce iese din lentile convergentă datorită prezenței lentilei divergente.

Rezolvare:

În lipsa lentilei divergente, punctul de convergență este chiar focarul F_1 al lentilei convergente. Lentila divergentă va deplasa punctul de convergență într-un punct P astfel încât $F_1P = D$. Se aplică formula lentilelor în care se ține cont că F_1 este obiect pentru lentila divergentă, iar P este imaginea lui F_1 :

$$-\frac{1}{f_1 - d} + \frac{1}{f_1 - d + D} = -\frac{1}{f_2}$$

care se rezolvă în raport cu D și se obține:

$$D = \frac{(f_1 - d)^2}{f_2 + d - f_1}.$$

Dacă $d = f_1$, $D = 0$ și poziția punctului de convergență nu se modifică.

Dacă $d = 0$ și $f_1 = f_2$, cele două lentile devin acolate și razele ies din lentila divergentă cu același diametru cu care au intrat în cea convergentă.

Dacă $f_2 + d = f_1$, focarele celor două lentile coincid și P se deplasează la infinit.

Dacă $f_2 + d > f_1$, focarul F_2 se află dincolo de F_1 , punctul P de deplasează în sensul propagării razelor și este real.

Dacă $f_2 + d < f_1$, adică $D < 0$, F_2 este în fața lui F_1 și punctul P se deplasează în sens opus propagării razelor.

7.20. Stabiliți legătura dintre mărirea longitudinală γ și cea transversală β la o lentilă.

Rezolvare:

Considerăm un segment aflat pe axa Ox cu capetele x_1 și x_2 .

Imaginea sa va un segment pe axa Ox cu capetele $x'_{1,2} = fx_{1,2}/(f+x_{1,2})$.

Mărirea longitudinală va fi:

$$\gamma = \frac{x'_2 - x'_1}{x_2 - x_1} = \left(\frac{fx_2}{f+x_2} - \frac{fx_1}{f+x_1} \right) \frac{1}{x_2 - x_1} = \frac{f}{f+x_1} \frac{f}{f+x_2} = \beta_1 \beta_2.$$

Deci, mărirea longitudinală este egală cu produsul măririlor transversale ale capetelor segmentului.

Pentru un segment foarte scurt avem: $\beta_1 = \beta_2 \Rightarrow \gamma = \beta^2$.

7.21. Dacă x' și x'_0 sunt imaginile lui x și x_0 , arătați că imaginea dreptei $y = m(x-x_0)$ printr-o lentilă este dreapta $y' = m(x_0/f + 1)(x' - x'_0)$, iar printr-o oglindă este dreapta $y' = m(x_0/f - 1)(x' - x'_0)$.

Rezolvare:

Utilizând relațiile lentilelor, după transformări succesive, se obține:

$$y' = y\beta = m(x-x_0) \frac{f-x'}{f} = m \left(\frac{fx'}{f-x'} - \frac{fx'_0}{f-x'_0} \right) \frac{f-x'}{f} = m \left(1 + \frac{x_0}{f} \right) (x'-x'_0).$$

Analog, în cazul oglinzii, se obține:

$$y' = m \left(\frac{fx'}{x'-f} - \frac{fx'_0}{x'_0-f} \right) \left(-\frac{x'-f}{f} \right) = m \left(\frac{x_0}{f} - 1 \right) (x'-x'_0).$$

7.22. Obiectivul unui aparat de fotografiat este format din două lentile lipite: L_1 – biconvexă și simetrică, cu un indice de refracție $n_1 = 1.52$ și L_2 – menisc divergent, cu un indice de refracție $n_2 = 1.68$. Fața comună are raza de curbură R . Sistemul are distanța focală $F = 20\text{cm}$.

Să se calculeze:

a) raza R ;

b) distanțele focale ale lentilelor;

c) dacă inițial aparatul este pus la punct pentru ∞ , să se calculeze cu cât trebuie deplasată placa fotografică pentru a obține pe ea imaginea clară a unui obiect aflat la $x_1 = 1.5\text{m}$ distanță.

Rezolvare:

a,b) Fie $C_1 = 1/f_1$ convergența lui L_1 și $C_2 = 1/f_2$ convergența lui L_2 .

Din rezolvarea sistemului de ecuații:

$$C_1 = (n_1 - 1) \frac{2}{R}$$

$$C_2 = (n_2 - 1) \left(\frac{1}{2R} - \frac{1}{R} \right)$$

$$C_1 + C_2 = \frac{1}{F}$$

obținem: $R = 14\text{cm}$; $f_1 = 13.16\text{cm}$; $f_2 = -41.18\text{cm}$.

$$\text{c) } \frac{1}{F} = \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} \Rightarrow x_2 = 23.08\text{cm}; \text{ Placa trebuie deplasată cu}$$

$$x_2 - F = 3.08\text{cm}.$$

7.23. Un miop privește printr-un instrument optic după un hipermetrop. Va trebui să tragă sau să împingă ocularul instrumentului?

Rezolvare:

Imaginea virtuală dată de instrument trebuie să se formeze la *punctum proximum* al ochiului în fiecare caz. Dacă notăm cu Δ_m și Δ_h distanța maximă de vedere clară pentru miop, respectiv pentru hipermetrop și cu d_m și d_h distanța dintre imaginea dată de obiectiv și ocular pentru miop, respectiv pentru hipermetrop, formula lentilelor se va scrie:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{d_m} - \frac{1}{\Delta_m} = \frac{1}{d_h} - \frac{1}{\Delta_h}.$$

Cum $\Delta_m < \Delta_h$ obținem $d_m < d_h$, deci miopul va împinge ocularul. Dacă însă *punctum remotum* al miopului este mai îndepărtat decât *punctum proximum* al hipermetropului, miopul va trage ocularul.

7.24. Obiectivul și ocularul unui microscop au distanțele focale $f = 2\text{mm}$ și $F = 2\text{cm}$ și se află la o distanță $L = 16.2\text{cm}$. Se cer:

a) puterea microscopului;

b) grosimentul pentru un ochi normal cu distanța minimă de vedere clară $\delta = 25\text{cm}$ și pentru un miop cu $\delta_1 = 10\text{cm}$.

Rezolvare:

a) Intervalul optic Δ dintre focarul–imagine al obiectivului și focarul–obiect al ocularului este: $\Delta = L - (F+f) = 14\text{cm}$.

Puterea microscopului este: $P = \frac{\Delta}{Ff} = 3500\text{dioptrii}$.

b) Grosismentul este $G = P\delta$: pentru un ochi normal $G = 875$; pentru miop $G_1 = 350$.

7.25. Știind puterea separatoare a unui ochi normal $\beta = 2'$, să se determine distanța dintre două puncte vecine pe care ochiul le poate separa, observându-le printr-o lupă cu convergența $C = 50\text{dioptrii}$. Se cunoaște distanța minimă de vedere clară $d_m = 25\text{cm}$.

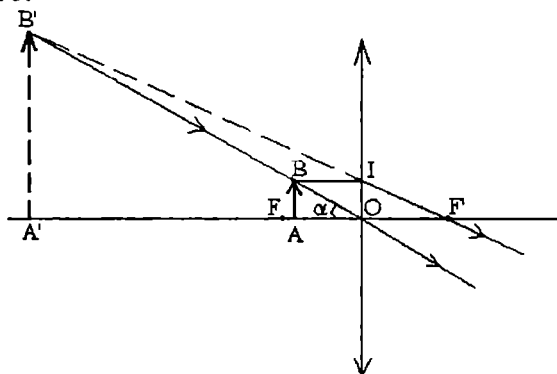
Rezolvare:

Fig7.25.

Unghiul sub care se vede imaginea virtuală $A'B'$ pentru ochiul plasat în O este $\text{tg}\alpha = A'B'/A'O$. Pentru $A'O \geq d_m$ putem aproxima $\text{tg}\alpha \approx \alpha$. Punctele A' și B' se pot vedea distinct dacă $\alpha \geq \beta$, deci $A'B' \geq \beta A'O$.

Exprimând $A'B'$ din asemănarea triunghiurilor $F'A'B'$ și $F'OI$

$$A'B' = \frac{AB * F'A'}{f}$$

obținem:

$$AB \geq \frac{\beta}{C} \left(1 - \frac{OF'}{F'A'} \right)$$

astel că distanța minimă dintre punctele A și B pentru care acestea sunt încă vizibile este:

$$(AB)_{\min} = \frac{\beta}{C} \left(1 - \frac{OF'}{F'A'} \right).$$

Putem avea situațiile:

- a) Ochiul se află în focarul F' , adică $OF' = 0$, deci $(AB)_{\min} = \beta/C$.
 b) Ochiul se află între F' și O , adică $OF' < 0$, deci

$$(AB)_{\min} = \frac{\beta}{C} \left(1 - \frac{F'O}{F'O + OA'} \right) = \frac{\beta}{C} \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{OA'}{F'O}} \right).$$

Ochiul se poate deplasa din F' în O și, deci, $F'O$ poate crește de la 0 la $f = 2\text{cm}$. Distanța OA' poate varia de la d_m la infinit. Pentru o valoare dată a lui OA' , raportul $OA'/F'O$ scade regulat de la infinit la $d_m/2$ când $F'O$ crește de la 0 la 2cm. Rezultă că $OA'/F'O$ este minim când este egal cu $d_m/2$ ($d_m = OA' = 25\text{cm}$.)

7.26. Cu un obiectiv constituit dintr-o lentilă subțire L_1 de distanță focală $f_1 = 30\text{cm}$, se vizualizează un obiect rectiliniu AB sub un diametru aparent $\alpha = 0.02\text{rad}$.

a) Care este mărimea imaginii date de obiectiv?

b) Se atașează o lentilă divergentă L_2 cu distanța focală $f_2 = 12\text{cm}$ pentru a obține un teleobiectiv care să dea o imagine de 3 ori mai mare decât cea anterior obținută. Unde trebuie plasată această lentilă și care este distanța de la L_1 la imaginea finală?

Rezolvare:

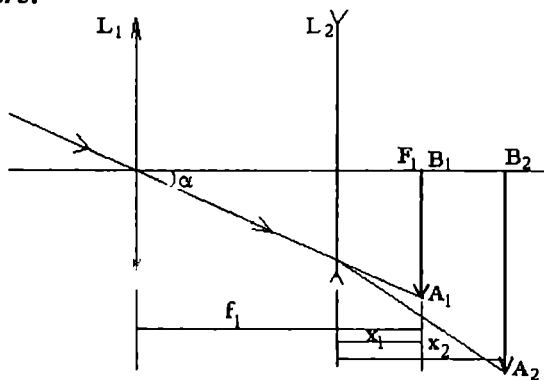


Fig. 7.26.

a) A_1B_1 se află în planul focal al obiectivului, deci $A_1B_1 = \alpha f_1 = 0.6\text{cm}$.

b) Rezolvând sistemul de ecuații:

$$x_2 = 3x_1$$

$$\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f_2}$$

și folosind notațiile din figură, obținem: $x_1 = 8\text{cm}$, $x_2 = 24\text{cm}$.

Cum A_1B_1 se află la f_1 de L_1 , distanța dintre cele două lentile este $L_1L_2 = 22\text{cm}$, iar distanța de la obiectiv la imaginea finală este $L_1B_2 = f - x_1 + x_2 = 46\text{cm}$.

7.27. Un ochi miop are *punctum remotum* la distanța $\Delta_m = 41\text{cm}$, iar *punctum proximum* la $d_m = 16\text{cm}$. Pentru corectarea miopiei, la distanța $l = 1\text{cm}$ față de centrul optic al ochiului se plasează o lentilă divergentă. Care este în acest caz distanța minimă de vedere clară?

Rezolvare:

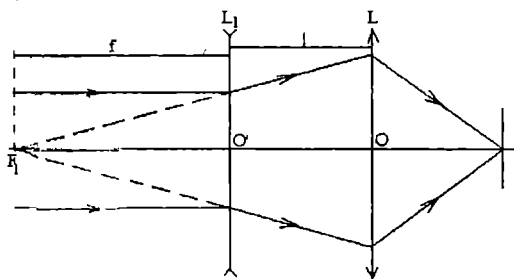


Fig.7.27.

Se observă că distanța focală a lentilei L_1 trebuie să fie egală cu distanța de la centrul optic O la *punctum remotum* (PR): $f = D_m - l$.

Față de L_1 *punctum proximum* (PP) se află la distanța: $p = d_m - l$.
Fie p' distanța de la L_1 la imaginea (virtuală) *punctului proximum*:

$$p' = \frac{fp}{f - p} = \frac{(D_m - l)(d_m - l)}{D_m - d_m}$$

Față de ochi, imaginea *punctului proximum* se va afla la distanța $d'_m = p' + l$, ceea ce reprezintă distanța minimă a vederii clare în acest caz.

PROBLEME PROPUSE

7.1. Suprafața Σ separă două medii, caracterizate de indicii de refracție absoluți n_1 , respectiv n_2 ($n_1 > n_2$). Venind din mediul 1, pe suprafața Σ , cade o rază de lumină astfel încât raza reflectată este perpendiculară pe raza refractată. Știind că $\eta = (\sin l) / (\sin i)$, l fiind unghiul limită de incidență, să se calculeze indicele de refracție relativ al acestor două medii.

R:
$$n_{21} = \sqrt{\eta^2 - 1}$$

7.2. Pe un sistem, situat în aer, de lame plan-paralele cu indicii de refracție absoluți $n_1 > n_2 > n_3$ cade o rază de lumină. Sub ce unghi de incidență trebuie să cadă raza de lumină pe suprafața primei lame pentru ca ea să se reflecte total pe suprafața celei de-a treia lame?

R:
$$i_1 < \arcsin(n_3)$$

7.3. Pe o lamă cu fețe plan-paralele ($n=1.5$), cade sub un unghi de incidență de 60° o rază de lumină monocromatică. Să se afle grosimea lamei știind că la ieșirea din lamă raza de lumină este deplasată cu 16mm.

R:
$$d = 22.62\text{mm}$$

7.4. Un observator privește un punct luminos printr-o cuvă paralelipipedică din sticlă, plină cu apă ($n=4/3$), de grosime $d=20\text{cm}$. Punctul se află la distanța $x_1 = -30\text{cm}$ de prima față a cuvei. Neglijând grosimea pereților cuvei, să se determine:

- poziția imaginii punctului luminos când este privit prin cuvă;
- distanța dintre obiect și imagine.

- R:**
- Imaginea se află la 45cm față de a doua față a cuvei.
 - Imaginea este mai aproape de cuvă cu 5cm.

7.5. O rază de lumină trece din sticlă ($n_{st}=1.5$) în apă ($n_{apă}=1.33$). Unghiul de incidență al razei de lumină care cade pe suprafața de separare sticlă-apă este de 30° .

- Să se determine unghiul de refracție.

b) Să se determine unghiul minim de incidență pentru care raza suferă fenomenul de reflexie totală.

R: a) $\sin r \cong 0.564$; b) $\sin l \cong 0.886$

7.6. O rază de lumină monocromatică cade sub un unghi de incidență de 30° pe o coală de hârtie aflată pe o masă. Pata de lumină rezultată se va deplasa dacă pe hârtie se pune o lamă de sticlă plan-paralelă cu grosimea de 5cm. Care este valoarea acestei deplasări?

R: 1.12cm.

7.7. Fie două oglinzi plane perpendiculare între ele și un punct luminos P aflat între ele.

a) Să se construiască imaginile acestuia. Să se arate că imaginile împreună cu punctul P sunt situate pe un cerc.

b) Aceeași problemă în cazul în care oglinzile fac între ele un unghi de 60° .

R: a) Punctul P și imaginile sale reprezintă vârfurile unui dreptunghi.

b) Punctul P și imaginile sale reprezintă vârfurile unui hexagon.

7.8. Să se arate că se poate fotografia o imagine care se vede într-o oglindă plană.

7.9. Perpendicular pe axa optică a unei oglinzi concave cu raza de 6m se află un obiect. Știind că imaginea sa se formează la 50cm față de centrul de curbură al oglinzii, și anume între focar și centru, să se calculeze de câte ori este mai mică imaginea decât obiectul.

R: $\beta = 5/6$.

7.10. O oglindă concavă dă o imagine răsturnată de 3 ori mai mare decât mărimea unui obiect aflat pe axa sa optică principală.

a) Știind că distanța obiect–imagine este de 28cm, să se determine raza de curbură a oglinzii.

b) Dacă se așează obiectul la o distanță de 10cm de vârful oglinzii, care este noua distanță dintre obiect și imagine?

R: R = 21cm; $x_{i-o} = 220$ cm.

7.11. Fie un sistem optic centrat format din două oglinzi concave cu razele de curbură R_1 și R_2 așezate față în față la o distanță d . Pe axa optică comună se află un obiect astfel încât modulele mărimilor imaginilor sale în cele două oglinzi sunt egale. Să se determine distanța de la obiect la prima oglindă.

$$R: \quad x_1 = \frac{R_1(d - R_2)}{2(d - R_2) - R_1}$$

7.12. Un obiect cu înălțimea $h=10\text{cm}$ se așează la o distanță $x_1=5\text{m}$ în fața unei oglinzi sferice concave cu raza $R=2\text{m}$, perpendicular pe axa sa principală.

a) Să se determine poziția și mărimea imaginii.

b) Dacă în focarul oglinzii concave, sub un unghi de 45° față de axa optică principală se așează o oglindă plană cu fața reflectătoare îndreptată înspre oglinda concavă, să se determine noua mărime a imaginii și să se precizeze unde va trebui să plasăm un ecran pentru a prinde această imagine.

R: a) $x'_1 = 1.25\text{m}$; $y_2 = 2.5\text{cm}$;

b) Imaginea obiectului în oglinda concavă va deveni obiect virtual pentru oglinda plană, care va da o imagine reală, egală și simetrică de înălțime $y_2 = 2.5\text{cm}$. Deoarece oglinda plană este înclinată cu 45° față de axa optică principală, imaginea dată de aceasta este paralelă cu axala distanța 25cm de axă. Deci ecranul trebuie plasat la 25cm față de axă.

7.13. Cu o oglindă sferică cu raza de curbură de 40cm urmărim să obținem imaginea reală a unui obiect de două ori mai mică decât acesta. Ce tip de oglindă trebuie să folosim, unde trebuie așezat obiectul și unde se va obține imaginea?

R: Oglindă concavă; obiectul trebuie așezat la 60cm față de vârful oglinzii, iar imaginea se formează la 30cm față de vârf, între centru și focar.

7.14. Un obiect se află situat între două ecrane E_1 și E_2 la o distanță $d=20\text{cm}$ de ecranul E_1 . Distanța dintre ecrane este $D=80\text{cm}$. Pe axa de simetrie a sistemului se plasează o oglindă convexă astfel încât imaginea virtuală este de două ori mai mică decât obiectul și se va forma în același plan în care se află ecranul E_2 . Să se determine raza de curbură a oglinzii.

R: 26.6cm.

7.15. Fie un dioptru sferic care separă aerul de un mediu necunoscut. Să se determine indicele de refracție al acestuia și care este distanța la care se formează imaginea unui obiect aflat în stânga dioptrului la 20cm, știind că raza de curbură a dioptrului este $R = -15\text{cm}$, iar mărimile obiectului și imaginii sunt 5, respectiv 15cm.

R: $n = 1.5$; imaginea se formează la 90cm în dreapta dioptrului.

7.16. Fie o sferă de rază R și indice de refracție n . La ce distanță de ea trebuie așezată o sursă punctiformă pentru ca imaginea acesteia să se formeze de cealaltă parte a sferei și la aceeași distanță?

R: $x = R/(n-1)$

7.17. În fața unei oglinzi concave O_1 cu distanța focală $f_1=60\text{cm}$ se așează un obiect cu înălțimea de 20cm la distanța $x_1 = -80\text{cm}$.

a) Să se determine poziția, înălțimea și natura imaginii formată de oglinda O_1 .

b) Coaxial cu O_1 și în fața ei se așează la distanța $d=220\text{cm}$ o oglindă convexă O_2 cu distanța focală $f_2=40\text{cm}$. Să se determine poziția, înălțimea și natura imaginii formate de sistemul de oglinzi O_1-O_2 .

R: a) Imaginea este reală, răsturnată, are o înălțime de -80cm și se formează la $x'_1 = -240\text{cm}$ în fața oglinzii O_1 .

b) Imaginea formată de oglindă O_1 este obiect virtual pentru oglinda O_2 . Noua imagine se va forma în fața lui O_2 la distanța $x'_2 = -40\text{cm}$, este reală, răsturnată față de obiect și are înălțime de -160cm.

7.18. Un obiect înalt de 6cm este așezat perpendicular pe axa optică a unei oglinzi convexe cu raza $R=0.4\text{m}$ și la distanța de -0.3m de vârful oglinzii. Să se determine, analitic și grafic, poziția, natura și mărimea imaginii.

R: Imaginea se formează între focar și vârful oglinzii, la $x'_1=0.12\text{m}$ de acesta din urmă, este răsturnată și are o mărime de 22.4cm .

7.19. Să se determine distanța focală a unei oglinzi concave fiind date:

a) mărirea liniară transversală $\beta_1=-2$, pentru o distanță obiect- imagine $l=15\text{cm}$;

b) pentru o anumită poziție a obiectului mărirea transversală este $\beta_1=0.5$ și pentru o altă poziție a obiectului, deplasată cu $l=5\text{cm}$ față de prima, mărirea liniară transversală este $\beta_2=-0.25$.

R: a) $f=-10\text{cm}$; b) $f'=-2.5\text{cm}$

7.20. Într-o oglindă sferică concavă, așezată în poziție orizontală, se pune o mică cantitate de apă. Știind raza de curbură a oglinzii $R=-16\text{cm}$ și indicele de refracție al apei $n=4/3$, determinați distanța focală a sistemului apă-oglină.

R: $f=R/(2n)=-6\text{cm}$.

7.21. a) O lentilă groasă din sticlă ($n = 1.5$) are suprafețele sferice convexe cu razele $R_1 = 25\text{cm}$ și $R_2 = 5\text{cm}$. Calculați grosimea lentilei pentru care ea este un sistem afocal.

b) Aceeași problemă pentru cazul în care $R_2 = -5\text{cm}$.

R: a) 60cm ; b) 90cm .

7.22. a) Știind raza emergentă din figură, să se construiască raza incidentă pentru L_1 -lentilă convergentă; L_2 -lentilă divergentă.

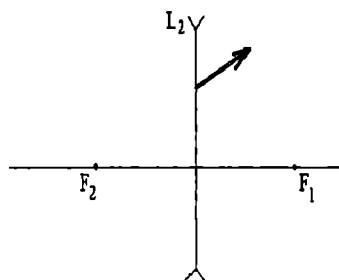
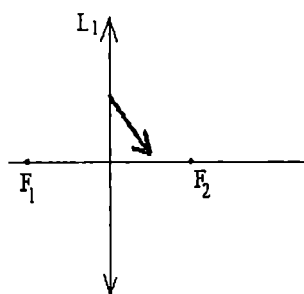


Fig. 7.22a

b) Pentru lentilele de la punctul a), să se construiască raza emergentă, cunoscând raza incidentă din figură.

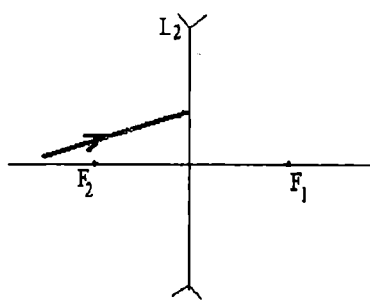
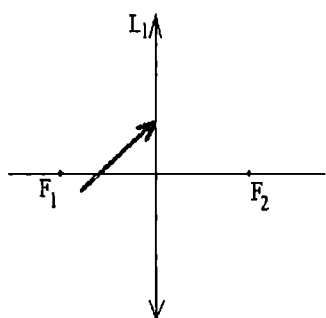


Fig. 7.22b

R:

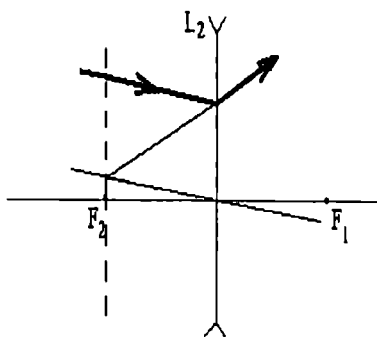
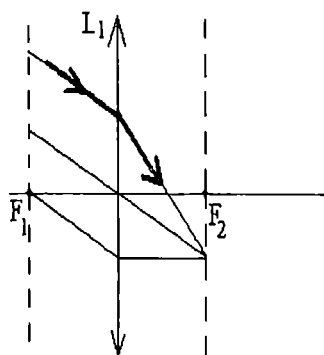


Fig. 7.22a r

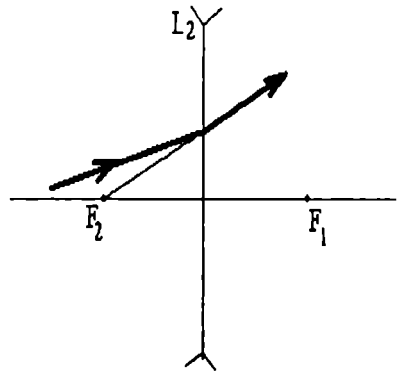
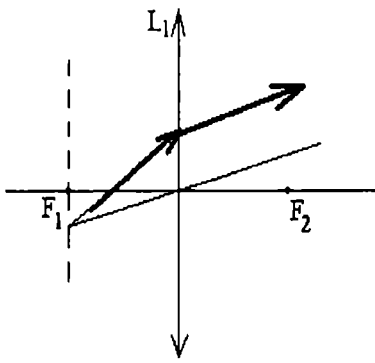


Fig.7.22b r

7.23. Se dă sistemul din figură. Să se construiască grafic imaginea punctului P.

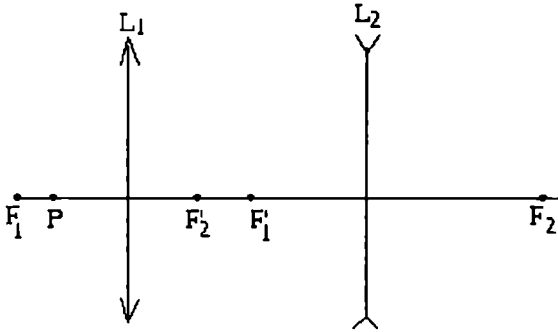


Fig. 7.23

R:

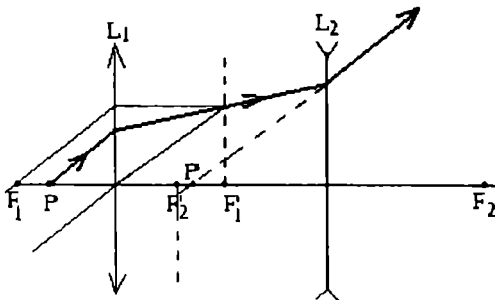


Fig. 7.23 r

7.24. Un fascicul delimitat de raze marginale din figură cade pe o lentilă divergentă. Aflați grafic unde se focalizează acesta.

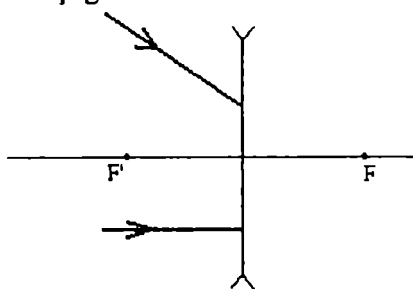


Fig. 7.24

R:

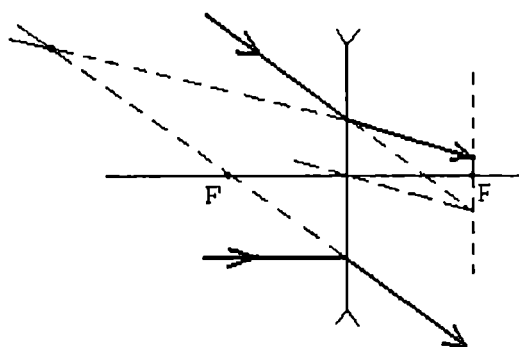


Fig. 7.24 r

7.25. Un fascicul paralel de raze (1) și (2) cade pe o cutie în care se află într-un caz o lentilă convergentă și în altul una divergentă. Știind că razele (3), (4) sunt razele marginale ale fascicului emergent, să se găsească grafic poziția focarelor lentilei în fiecare caz.

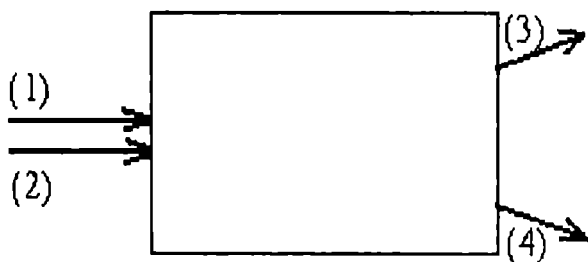


Fig. 7.25

R:

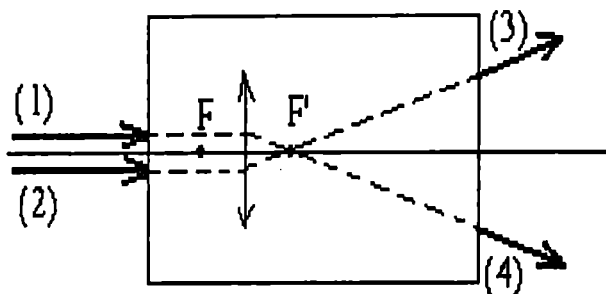


Fig. 7.25a r

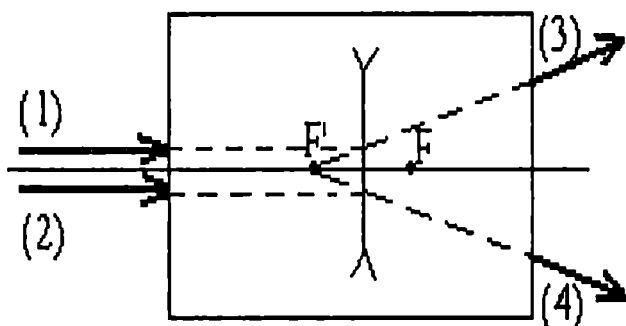


Fig. 7.25b r

7.26. O lentilă din sticlă ($n_{st}=1.5$) are în aer ($n_{aer}=1$) distanța focală $f_{aer}=10\text{cm}$. Să se calculeze distanța focală a lentilei când:

a) lentila se află în apă ($n_{apa}=4/3$);

b) lentila se află într-un mediu de indice de refracție $n=1.63$.

Ce observați?

$$R: \quad \frac{f_{apa}}{f_{aer}} = \frac{\frac{n_{st} - 1}{n_{aer}}}{\frac{n_{st} - 1}{n_{apa}}} \Rightarrow f_{apa} = 35.3\text{cm}$$

$$\frac{f_{mediu}}{f_{aer}} = \frac{\frac{n_{st} - 1}{n_{aer}}}{\frac{n_{st} - 1}{n}} \Rightarrow f_{mediu} = -86.4\text{cm}$$

Lentila depinde și de natura mediului în care ea este introdusă (în afară de formă și natura materialului din care este confecționată). O aceeași lentilă poate fi convergentă într-un anumit mediu și divergentă în altul.

7.27. O lentilă convergentă dă pe un ecran imaginea de mărime "a" a unui obiect. Ținând fixe ecranul și obiectul, se apropie lentila de ecran și se găsește că la o a doua imagine clară a obiectului mărimea ei este "b". Să se calculeze înălțimea reală a obiectului.

R: $(ab)^{1/2}$

7.28. Se așează un obiect în fața unei lentile convergente. Pe un ecran se obține imaginea clară a obiectului, mărirea liniară fiind β_1 . Se îndepărtează obiectul cu distanța d față de poziția inițială și se reobține imaginea clară a obiectului deplasând ecranul. Cunoscând și în acest caz mărirea liniară, β_2 , să se determine distanța focală a lentilei.

R: $f = \frac{\beta_1 \beta_2}{\beta_1 - \beta_2} d$

7.29. Când distanța de la un obiect la o lentilă convergentă este $x_1=30\text{cm}$, atunci înălțimea imaginii sale este $y_2=10\text{cm}$, iar când distanța este $x'_1=24\text{cm}$, înălțimea imaginii sale este $y'_2=15\text{cm}$. Care este distanța focală a lentilei?

R: $f \cong 6\text{cm}$.

7.30. Pe un banc optic se așează un bec, o lentilă și un ecran pe care se obține o imagine pusă la punct a filamentului becului. Dacă se deplasează becul spre ecran cu 40cm , pe acesta va apărea imaginea clară și micșorată a filamentului. Cunoscând că distanța de la bec la ecran a fost de 80cm , să se calculeze distanța focală a lentilei.

R: $f=15\text{cm}$.

7.31. Folosindu-se o lentilă convergentă din sticlă ($n_{st}=3/2$) se obține imaginea reală a unui obiect la distanța de 10cm de lentilă. Cufundând întregul sistem în apă ($n_{apă}=4/3$), fără a modifica distanțele, se obține o nouă imagine la distanța de 60cm de lentilă. Calculați distanța focală a lentilei.

R: $f=9\text{cm}$.

7.32. Pe un banc optic, între o sursă și un ecran se plasează un sistem centrat format dintr-o lentilă divergentă și una convergentă. Să se determine distanța focală a lentilei divergente, dacă distanța de la un obiect la sistem este de 60cm, de la sistem la ecran 40cm, iar distanța focală a lentilei convergente este de 10cm.

R: $f = -12\text{cm}$.

7.33. O lentilă plan-concavă are raza de curbură de 10cm și indicele de refracție de 1.5. Un obiect înalt de 8cm se află în fața lentilei la o distanță de 20cm.

a) Să se determine, analitic și grafic, poziția, natura și mărimea imaginii;

b) Aceeași problemă ca la punctul a) în situația în care de lentilă se alipește o altă lentilă, identică cu prima, cu concavitățile față în față, iar golul format se umple cu apă ($n_{\text{apă}} = 4/3$).

R: a) Imaginea este virtuală, dreaptă și mai mică decât obiectul; $x_1 = -2\text{cm}, y_2 = 4\text{cm}$;

b) Imaginea este virtuală, dreaptă și mai mică decât obiectul; $x'_1 = -2\text{cm}, y'_2 = 4.8\text{cm}$.

7.34. Se argintează pe fața concavă o lentilă subțire plan-concavă cu indicele de refracție $n = 1.5$. Înaintea feței argintate se deplasează un obiect rectiliniu, perpendicular pe axa principală, până când imaginea obținută, răsturnată față de obiect, se află în prelungirea acestuia. În acest caz, obiectul și imaginea se găsesc la distanța $d = 50\text{cm}$ față de lentilă. Se rotește lentila cu 180° , fără a-i schimba distanța față de obiect. Care este poziția și natura noii imagini formate? (Se neglijează fenomenele de reflexie pe fața plană, considerându-se doar razele centrale).

R: 1. Sistemul se comportă ca o oglindă concavă, obiectul și imaginea aflându-se la egală distanță față de oglindă. 2. Sistemul se comportă ca unul format din două lentile divergente și o oglindă convexă. Imaginea se află la distanța $x' = 12.5\text{cm}$.

7.35. Se dau două lentile subțiri cu distanțele focale $f_1 = 10\text{cm}$ și $f_2 = -8\text{cm}$. Ce distanță focală trebuie să aibă o a treia lentilă pentru ca, alipită lor, să formeze un sistem optic cu distanța focală $f = 5\text{cm}$?

R: $f_3 = 4.4\text{cm}$

7.36. Știind că distanța focală a unei lentile convergente este f , calculați poziția obiectului pentru care mărirea liniară β este cuprinsă între 2 și 3.

R: $4f/3 < x_1 < 3f/2$

7.37. În fața unei lentile divergente cu distanța focală f se plasează un obiect în pozițiile:

a) $x_1 = 2f$;

b) $x_1 = 25f$.

Descrieți comparativ imaginea obiectului (poziție, natură, mărime în raport cu obiectul).

R: Pentru $x_1 = kf$, din formula lentilelor se obține: $x_2 = kf/(k+1)$ și $\beta = 1/(k+1)$. Se discută în funcție de valoarea lui k .

7.38. Un fascicul paralel de raze și paralel cu axa optică principală cade mai întâi pe o lentilă divergentă cu distanța focală f , apoi pe una convergentă cu distanța focală $2f$, ieșind din sistem tot paralel cu axa optică. Care este distanța dintre lentile?

R: Lentilele se află la distanța f una de cealaltă.

7.39. O lentilă sferică concavă este formată dintr-o lentilă subțire de sticlă ($n_{st} = 1.5$) simetrică biconvexă căreia i s-a argintat una din suprafețe. Să se calculeze distanța focală știind că raza de curbură a suprafețelor lentilei este $R = 40\text{cm}$.

R: $f = -10\text{cm}$

7.40. O lentilă biconvexă din sticlă cu indicele de refracție $n = 1.5$ are raza de curbură a fețelor $R = 12\text{cm}$. Lentila se așează între un obiect luminos și un ecran. Distanța obiect-ecran este $d = 60\text{cm}$. Să se determine:

a) Pozițiile lentilei în care se formează imagini reale și clare pe ecran.

b) Raportul dintre mărirea imaginii și a obiectului, corespunzător condițiilor punctului a).

R: a) $f = 12\text{cm}$; $x_1 = -11\text{cm}$ și -49cm ; $x_2 = 49\text{cm}$ și 11cm ;

b) $\beta = -4.46$ și -0.224 .

7.41. O lentilă convergentă subțire cu distanța focală $f = 5\text{cm}$ se așează orizontal la 40cm deasupra fundului unei cuve. La 30cm deasupra lentilei, pe axa ei principală, se află un obiect luminos P. Se toarnă apă în cuvă până ce imaginea P' a lui P de află pe fundul cuvei. Care este grosimea stratului de apă, dacă se cunoaște indicele de refracție al apei $n = 4/3$?

R: 40cm ; stratul de apă trebuie să atingă suprafața inferioară a lentilei.

7.42. Un punct luminos A se află pe axa principală a unei lentile convergente subțire de 5dioptrii , la 25cm de centrul ei optic C_1 . De cealaltă parte a lentilei, la 50cm se află o oglindă plană, înclinată cu 45° pe axa principală a lentilei. La 80cm de punctul de intersecție o al oglinzii cu axa principală a lentilei, pe o direcție ce face cu ea 90° , se află centrul optic al unei alte lentile convergente subțiri de 4dioptrii . Se cere:

a) Poziția imaginii finale A' față de C_2 .

b) Până la nivelul B aflat la 75cm sub C_2 se introduce apă; unde se formează acum în apă imaginea finală A''₁?

c) Înlăturând apoi apa, unde trebuie așezată lent la C_2 pentru ca imaginea A'' să fie tot A''₁?

R: a) $C_2A'' = 150\text{cm}$; b) $d = 25\text{cm}$; c) lentila C_2 trebuie apropiată de A_1 cu 0.5cm .

7.43. O lentilă plan-convexă are raza de curbură $R = 10\text{cm}$ și $n = 1.5$. La 15cm în fața feței convexe a lentilei se așează un obiect AB înalt de 5cm . Se cere:

a) Poziția, natura și mărimea imaginii;

b) Dacă obiectul rămâne la aceeași distanță față de lentilă și se argintează fața plană a lentilei, să se afle poziția, natura și mărimea imaginii finale în acest caz.

R: a) Imaginea este virtuală, dreaptă, se află la -60cm de lentilă și are o înălțime de 20cm ;

b) Imaginea este reală, răsturnată, se află la 30cm de lentilă și are o înălțime de 10cm .

7.44. Cu ajutorul unei lentile convergente subțiri de sticlă ($n_{st} = 3/2$) se obține imaginea reală a unui obiect situat la o distanță de 10cm de

lentilă. Fără a schimba distanța dintre ele, se cufundă obiectul și lentila în apă ($n_a = 4/3$) și se obține o nouă imagine la o distanță de 60cm de lentilă. Aflați distanța focală a lentilei.

R: 9cm.

7.45. Se argintează două lentile plan-convexe, una pe fața plană, iar cealaltă pe fața convexă. Presupunând că în ambele cazuri lumina cade dinspre fața nargintată, să se calculeze raportul distanțelor focale ale oglinzilor astfel obținute. Indicele de refracție al lentilelor este n .

R: $f_1/f_2 = (n-1)/n$.

7.46. Un menisc convergent (lentilă convex-concavă) are razele de curbură R și respectiv $3R$. Când suprafața concavă se argintează, convergența devine nulă. Considerând că lumina cade pe fața convexă, să se determine indicele de refracție al materialului din care este confecționată lentila.

R: $n = 3/2$.

7.47. a) Dreapta de ecuație $x+2y-1=0$ constituie obiect pentru o lentilă a cărei distanță focală este f . Să se arate că imaginea acestei drepte este dreapta de ecuație $(f+1)x'+2fy'+f=0$.

b) Dacă lentila se înlocuiește cu o oglindă sferică cu raza de curbură R , să se arate că imaginea drepte de la punctul a) este dreapta de ecuație $(2-R)x'+2Ry'-R=0$.

R: Vezi problema rezolvată 7.21.

7.48. O lupă are distanța focală $f = 5$ cm. Se cere:

a) puterea lupei;

b) distanța față de centrul lupei la care trebuie plasat un obiect pentru ca imaginea să se formeze la distanța minimă de vedere clară;

c) distanța față de centrul lupei la care trebuie plasat obiectul pentru ca imaginea să fie de $k = 4$ ori mai mare decât obiectul

R: a) $P = 20$ dioptrii; b) $x_1 = 0.041$ m; c) $x_1 = 0.0375$ m

7.49. Distanța focală a obiectivului unui microscop este $f_{ob} = 3\text{mm}$, iar a ocularului $f_{oc} = 5\text{cm}$. Știind că intervalul optic al microscopului este $e = 2\text{cm}$, să se afle puterea și grosismentul microscopului.

R: a) $P = 133\text{dioptrii}$; b) $G = 33$.

7.50. Un observator vede clar obiectele care se află la mai mult de 40cm față de ochii săi.

a) Ce devin pentru observator limitele vederii distincte, când privește prin ochelari ale căror lentile sferice au o convergență $C = 1$ dioptrie?

b) Pentru o persoană limitele vederii distincte sunt 11cm și 101cm . Ce devin aceste limite când persoana respectivă folosește ochelari ale căror lentile au o convergență $C' = -1$ dioptrie?

Distanța ochi – centrul optic al lentilei este în ambele cazuri $d = 1\text{cm}$.

R: a) Ochelarii cu convergența $C = 1$ dioptrie sunt lentile convergente cu distanța focală $f = 1\text{m}$.

Limitele vederii distincte se obțin din:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x'} = \frac{1}{f}$$

a₁) Pentru vederea la infinit ($x' = \infty$), $x = f = 100\text{cm}$; obiectul trebuie să se afle la distanța $x+d = 101\text{cm}$.

a₂) Când imaginea se formează la distanța minimă de ochi (40cm), aceasta se formează de fapt la distanța de 39cm în fața ochelarilor. Imaginea dată de ochelari este virtuală: $x' = -39\text{cm}$ și $x = 28\text{cm}$. Deci obiectul trebuie să se afle la 29cm în fața ochelarilor.

Limitele devin deci 29cm și 101cm .

b) Ochelarii cu convergența $C = -1$ dioptrie sunt lentile divergente cu distanța focală $f = -1\text{m}$.

b₁) Imaginea care se formează la 11cm în fața ochilor, deci la 10cm în fața ochelarilor este o imagine virtuală: $x' = -10\text{cm}$ și $x = 11.1\text{cm}$. Deci, obiectul se află la 12.1cm în fața ochilor.

b₂) Când imaginea se formează la 101cm față de ochi, adică la 100cm față de ochelari, ea se află de fapt în focarul–imagine.

Limitele vederii distincte vor fi 12cm și infinit.

7.51. Pentru un miop, distanțele maximă și minimă de vedere distinctă sunt: $\Delta = 50\text{cm}$ și $\delta = 7\text{cm}$. El folosește ochelari care îi permit să vadă obiectele aflate la infinit. Care este convergența lentilelor ochelarilor și ce devine noua distanță minimă de vedere clară?

R: Pentru corectarea miopiei se folosesc ochelari cu lentile de distanță focală astfel încât să rezulte pentru un obiect de la infinit o imagine virtuală situată la distanța maximă de vedere clară:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{\infty} - \frac{1}{\Delta} \Rightarrow f = -\Delta, f = -2\text{dioptrii.}$$

Fie D noua distanță minimă de vedere clară (cu ochelari). Un obiect situat la D trebuie să dea o imagine virtuală aflată la distanța minimă de vedere clară δ a ochiului fără ochelari: $f = -\Delta$; $x' = \delta$; $x = D$.

$$D = \frac{\delta\Delta}{\Delta - \delta}; D = 8,14\text{cm.}$$

7.52. De la o distanță de 100m se fotografiază o clădire care pe fotografie, are înălțimea de 5cm . Dacă distanța focală a obiectivului aparatului fotografic este de 15cm , aflați înălțimea reală a clădirii.

R: Imaginea se formează practic în focar; clădirea are 3125cm .

7.53. Fie un sistem optic alcătuit dintr-un obiectiv cu distanța focală $f_{ob} = 2\text{mm}$ și un ocular cu $f_{oc} = 3\text{cm}$. La distanța $a = 3\text{mm}$ de obiectiv se plasează un obiect. La ce distanță x trebuie să se afle cele două lentile una de cealaltă, pentru ca un observator a cărui distanță minimă de vedere distinctă este $d = 27\text{cm}$ să vadă clar imaginea obiectului? Se presupune că ochiul observatorului coincide cu centrul optic al ocularului.

R: $x = 33\text{mm}$.

7.54. Se încearcă vizualizarea unui obiect terestru cu o lunetă astronomică montată pentru vedere netă la infinit. Se constată că pentru a vedea net imaginea obiectului, distanța ocular-obiectiv trebuie mărită cu 1cm . La ce distanță de obiectiv se află obiectul știind că distanța focală a obiectivului este $d = 120\text{cm}$?

R: $x = 145,2$

7.55. Se fotografiază un obiect de la distanțele $d_1=90\text{cm}$ și $d_2=165\text{cm}$. Înălțimea pe fotografie a obiectului este de $h_1=4\text{cm}$, respectiv $h_2=2\text{cm}$. Care este distanța focală a obiectivului?

R: $f = 15\text{cm}$.

7.56. Se focalizează un aparat fotografic pentru un obiect situat la distanța $d = 5\text{cm}$. Știind distanța focală a obiectivului $f = 20\text{cm}$, calculați până la ce diametru D poate fi diafragmat acesta pentru a înregistra clar obiecte situate până la distanța $d' = 0.5\text{cm}$, dacă puterea de rezoluție a filmului este $a = 0.1\text{mm}$.

R: $D = 21.6\text{mm}$

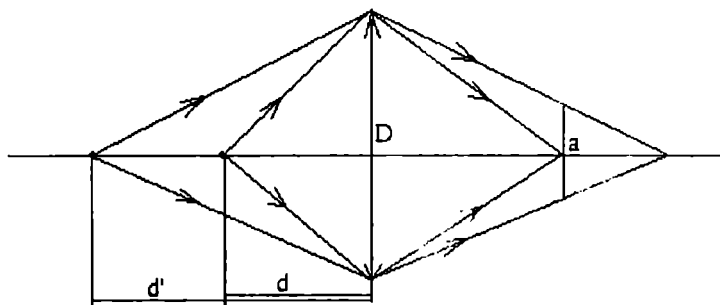


Fig. 7.56

7.57. Un diapozitiv cu aria $S = 432\text{mm}^2$ este proiectat pe un ecran aflat la distanța $x' = 20\text{m}$ de obiectiv și acoperă o arie $S' = 2.76\text{m}^2$. Care este distanța focală a obiectivului?

R: $f = 24.7\text{cm}$.

7.58. La un aparat de proiecție distanța obiectiv–ecran este $x' = 4\text{m}$. Se lipește de obiectiv o lentilă cu distanța focală $f = 4\text{m}$. Cu cât trebuie deplasat ecranul pentru a obține o imagine clară?

R: -2m .

7.59. O lupă are mărirea $\beta = 5$ pentru un ochi normal (distanța optimă de vedere clară este de 0.25m). La ce distanță optimă de o foaie de hârtie trebuie ținută lupa pentru ca razele solare să carbonizeze hârtia?

R: 6.25cm .

7.60. Obiectivul unui aparat fotografic conține o lentilă divergentă cu distanța focală $f_1 = -50\text{mm}$ și una convergentă cu $f_2 = 80\text{mm}$. Să se calculeze distanța la care trebuie așezată lentila convergentă față de peliculă pentru a obține imagini clare ale obiectelor de la infinit, cunoscând că lentila divergentă se află la $l = 45\text{cm}$ față de peliculă.

R: $d^2 - d(l-f_1) + f_2(l-f_1) = 0$; $d_1 = 40\text{cm}$; $d_2 = 10\text{cm}$.

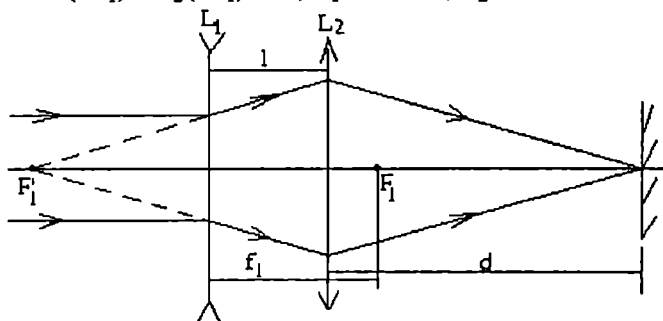


Fig. 7.60

7.61. Un obiect se află la distanța $x = 5.6\text{mm}$ față de obiectivul unui microscop care are distanțele focale $f_{ob} = 5.4\text{mm}$ și $f_{oc} = 20\text{mm}$. Aflați mărirea microscopului pentru un ochi normal, precum și distanța obiectiv-ocular.

R: $\beta = 364$; $l = 17\text{cm}$.

7.62. O lunetă este alcătuită din două lentile convergente aflate una de cealaltă la o distanță $l = 1.2\text{m}$. Un fascicul paralel de diametru $D = 30\text{mm}$ iese din lunetă tot paralel dar de diametru $d = 10\text{mm}$. Care sunt distanțele focale ale lentilelor?

R: $f_1 = 90\text{cm}$; $f_2 = 30\text{cm}$.

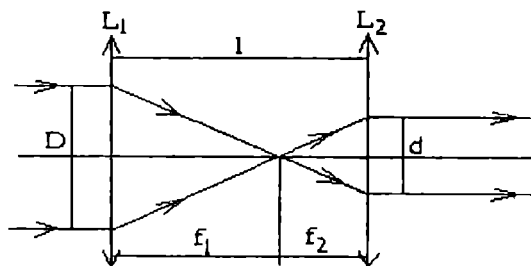


Fig. 7.62

7.63. O lunetă astronomică și una terestră au aceeași lungime $l = 40\text{cm}$ și același grosimet $|G| = 9$. Aflați distanțele focale ale lentilelor ce alcătuiesc lunetele.

R: Pentru luneta astronomică vezi figura de mai sus, caz în care se obține: $f_{1a} = 36\text{cm}$; $f_{2a} = 4\text{cm}$ Pentru luneta terestră avem figura:

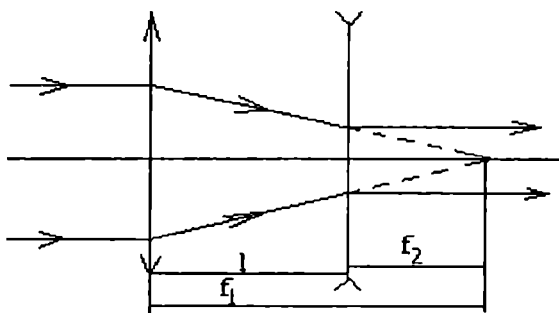


Fig. 7.63

și se obține: $f_{1t} = 45\text{cm}$; $f_{2t} = -5\text{cm}$.



**Tiparul s-a executat sub c-da nr. 506/1998, la
Tipografia Editurii Universității din București**

VERIFICAT
2007

VERIFICAT
2017

ISBN: 973 - 575 - 305 - 7

Lei 18100