NICOLAE SOARE

DANIELA IANCU MARIUS IANCU

ELEMENTE DE GEOMETRIE

EDITURA UNIVERSITĂȚII BUCUREȘTI
1995

NICOLAE SOARE
DANIELA IANCU MARIUS IANCU

ELEMENTE DE GEOMETRIE

EDITURA UNIVERSITĂŢII BUCUREŞTI
1995

Referenţi ştiinţifici: Conf. dr. LIVIU NICOLESCU
Conf. dr. ADRIANA TURTOI

ISBN-973-9160-96-4

CUPRINS

INTRODUCERE

Cartea de față se adresează studenților care urmează cursul de "Fundamentele Geometriei" din anul IV încercând să reactualizeze eleganța si ingeniozitatea geometriei sintetice ca punct de start în conturarea a ceea ce ar putea fi o teorie a centrelor de greutate.

Prin conținutul său, cartea pune la dispoziția studenților un material clar,ușor asimilabil, util studiului și însușirii geometriei, necesar completării cunoștințelor, rechemându-i în cadrul intim și plin de surprize frumoase și interesante al figurii atât de clasice (intrate în istoria geometriei) triunghiul,precum și în interiorul confratelui său tridimensional tetraedrul.

Astfel studentul are ocazia, prin acest curs, să reântâlnească noțiuni de geometrie familiare lui, însă tratate dintr-un punct de vedere inedit,am putea spune. Pentru înțelegerea textului stundentul are nevoie de un bagaj de cunoștințe caracteristic analizei matematice (șiruri, topologii, continuitate, derivabilitate, diferențiabilitate) cât și de câteva cunoștințe de geometrie clasică, intrată în uitare de câtăva vreme.

Fără a urma programa analitică a unei trepte de învățământ, lucrarea conține noțiuni care sunt incluse în programele de învățământ ale liceelor și facultăților, noțiuni ce sunt lărgite și aprofundate în cadrul celor patru capitole care determină structura cărții :

I. Geometria triunghiului.
II. Geometria tetraedrului.
III. Clase de puncte generate de o funcție.
IV. Probleme inedite.

Expunerea metodică însoțită de exemple și probleme, permite o parcurgere ușor ascendentă. Dacă în primele două capitole se simte probabil un ușor regret după paradisul pierdut al clasicei geometrii a triunghiului și respectiv a tetraedrului, în capitolul III este prezentată succint ideea care stă la baza lucrării de față. În final este realizată o selecție de probleme non-standard cu scopul de a semnala și limitele abordării pe baza ideii de clasă de centre de greutate generate de o funcție.

Sperăm ca rezultatele originale să convertească entuziasmul cititorului într-o premiză a lărgirii cadrului propus de noi în capitolul III.

În încheiere nu avem decât să dorim mult succes studenților în studiul intimității mulțimii de puncte din interiorul triunghiului și tetraedului, sperând din toată inima ca o parte din cei pasionați de geometrie să continue a dezvălui multe alte taine ale acestor clase de puncte.

Dorim să mulțumim în încheiere domnului profesor **Marin Stasei** pentru sprijinul acordat.

AUTORII.

CAPITOLUL I. GEOMETRIA TRIUNGHIULUI

1. CLASE DE PUNCTE. (Exemple. Proprietăţi topologice.)
1.1. DEFINIREA CLASELOR DE PUNCTE $\mathcal{M}(x, y, z)$.

Să considerăm pe $(0, +\infty)^3$ următoarea relaţie:

$$(1)\ \forall\ (x_1, x_2, x_3) \in (0, +\infty)^3,\ (y_1, y_2, y_3)\quad (0, +\infty)^3:$$

$$(x_1, x_2, x_3) \sim (y_1, y_2, y_3) \stackrel{def}{\Longleftrightarrow} \exists\, \alpha \neq 0 \text{ a.î. } \ln \frac{x_i}{x_j} = \alpha \ln \frac{y_i}{y_j},\ \forall i, j \in \{1, 2, 3\}.$$

Lema 1.1. Relaţia " $\sim$ " defintă de (1) este o relaţie de echivalenţă pe $(0, +\infty)^3$. Demonstraţia este imediată.

Fie $I \stackrel{not}{=} (0, +\infty)^3 / \sim$ mulţimea factor determinată de " $\sim$ " şi fie W un sistem de reprezentanţi.

Să considerăm acum un triunghi ABC oarecare ascuţitunghic, şi fie $Q \in \text{Int}\,\Delta ABC$. Fie $\{A_1\} = AQ \cap BC$, $\{B_1\} = BQ \cap AC$, $\{C_1\} = CQ \cap AB$.

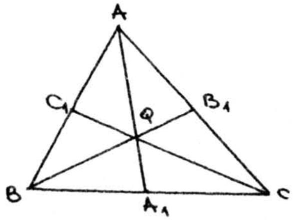


fig. 1.1.

Definiţia 1. Dacă $x, y, z \in R_+^*$ şi $k \in R^*$, spunem că Q este punct de tip (x, y, z) de rang k şi notăm " $Q \approx k - (x, y, z)$ " dacă:

$$\frac{BA_1}{A_1C} = \left(\frac{z}{y}\right)^k;\quad \frac{CB_1}{B_1A} = \left(\frac{x}{z}\right)^k;\quad \frac{AC_1}{C_1B} = \left(\frac{y}{x}\right)^k.$$

Fie $\mathcal{M}(x, y, z)$ mulţimea punctelor de tip (x, y, z) . Deci:

$$(1')\ \mathcal{M}(x, y, z) \stackrel{def}{=} \{Q \in \text{Int}\,\Delta ABC \mid \exists\, k \in R^* \text{ a.î. } Q \approx k - (x, y, z)\}$$

Teoremă. $\{\mathcal{M}(x, y, z) \mid (x, y, z) \in W\}$ este o partiţie a lui $\text{Int}\,\Delta ABC\}$.

Demonstraţie.

Trebuie deci să arătăm că:

a) $\forall\ (x_i, y_i, z_i)\quad W,\ i = \overline{1, 2}$ a.î. $\mathcal{M}(x_1, y_1, z_1) \cap \mathcal{M}(x\ , y\ , z\ ) \neq \emptyset$ avem $\mathcal{M}(x_1, y_1, z_1) = \mathcal{M}(x_2, y_2, z_2)$;

b) $\bigcup_{(x, y, z) \in W} (x, y, z) = \text{Int}\,\Delta ABC$.

a) Dacă reuşim să demonstrăm că :

$$(2)\ \forall (x_i, y_i, z_i) \in (R_+^*)^3;\ i = \overline{1, 2} \text{ avem: } (x_1, y_1, z_1) \sim (x_2, y_2, z_2) \Longleftrightarrow$$
$$\mathcal{M}(x_1, y_1, z_1) = \mathcal{M}(x_2, y_2, z_2)$$

atunci punctul a) devine evident adevărat, deoarece W fiind un sistem de reprezentanţi avem că $(x_1, y_1, z_1) \nsim (x_2, y_2, z_2)$, $\forall\ (x_i, y_i, z_i) \in W$, $i = \overline{1,2}$ (am notat cu " $\nsim$ " negarea propoziţiei drepte din (1), deci faptiul că $\forall \alpha \neq 0, \exists\ i_\alpha\ j_\alpha \in \{1, 2, 3\}$ a.î. ...).

Fie $(x_i, y_i, z_i) \in (R_+^*)$, j = 1, 2. Facem mai întâi observaţia că :

$$(3)\ \forall\ x, y, z \in R_+^*: \mathcal{M}(x, y, z) \neq \emptyset.$$

Fie deci $Q \in \mathcal{M}(x_1, y_1, z_1)$ de rang $k_1 \in R^*$. Dar $\mathcal{M}(x_1, y_1, z_1) = \mathcal{M}(x_2, y_2, z_2)$, deci $Q \in \mathcal{M}(x, y, z) \Rightarrow \exists k_2 \in R^*$ a.î. $Q \approx k_2 - (x_2, y_2, z_2)$. Conform definiției 1 avem:

$$(4) \quad \frac{BA_1}{A_1C} = \left(\frac{z_1}{y_1}\right)^{k_1} = \left(\frac{z_2}{y_2}\right)^{k_2}; \quad \frac{CB_1}{B_1A} = \left(\frac{x_1}{z_1}\right)^{k_1} = \left(\frac{x_2}{z_2}\right)^{k_2}; \quad \frac{AC_1}{C_1B} = \left(\frac{y_1}{x_1}\right)^{k_1} = \left(\frac{y_2}{x_2}\right)^{k_2}.$$

Fie $\alpha := \frac{k_1}{k_2} \neq 0 \quad (k_2 \neq 0$ și $k_1 \neq 0)$. Din relațiile (4) obținem:

$$k_1 \ln \frac{z_1}{y_1} = k_2 \ln \frac{z_2}{y_2} \Rightarrow \ln \frac{z_1}{y_1} = \alpha \ln \frac{z_2}{y_2} \quad ; \ln \frac{y_1}{z_1} = \alpha \ln \frac{y_2}{z_2}$$

și analog:

$$\ln \frac{x_1}{z_1} = \alpha \ln \frac{x_2}{z_2}; \ \ln \frac{z_1}{x_1} = \alpha \ln \frac{z_2}{x_2}; \ \ln \frac{y_1}{x_1} = \alpha \ln \frac{y_2}{x_2}; \ \ln \frac{x_1}{y_1} = \alpha \ln \frac{x_2}{y_2}.$$

și deci $(x_1, y_1, z_1) \sim (x_2, y_2, z_2)$.

Demonstrăm acum : $(x_1, y_1, z_1) \sim (x_2, y_2, z_2)$ implică faptul că $\exists \alpha \neq 0$ ca în (1). Este suficient să arătăm că:

$\forall Q \approx k - (x_1, y_1, z_1) \Rightarrow Q \approx \alpha k - (x_2, y_2, z_2)$ (5)

ceea ce înseamnă de fapt că $\mathcal{M}(x_1, y_1, z_1) \subseteq \mathcal{M}(x_2, y_2, z_2)$ (5′).

Fie $k \in R^*$ oarecare și $Q \approx k - (x_1, y_1, z_1)$ (6).

Atunci: $Q \approx \alpha k - (x_2, y_2, z_2)$ (6′)

Într-adevăr : din (6) rezultă $\frac{BA_1}{A_1C} = \left(\frac{z_1}{y_1}\right)^k$

Dar $(x_1, y_1, z_1) \sim (x_2, y_2, z_2) \Rightarrow \ln \frac{z_1}{y_1} = \alpha \ln \frac{z_2}{y_2} \Rightarrow \frac{z_1}{y_1} = \left(\frac{z_2}{y_2}\right)^\alpha$, deci: $\frac{BA_1}{A_1C} = \left(\frac{z_2}{y_2}\right)^{\alpha k}$.

Analog : $\frac{CB_1}{B_1A} = \left(\frac{x_2}{z_2}\right)^{\alpha k}$ și $\frac{AC_1}{C_1B} = \left(\frac{y_2}{x_2}\right)^{\alpha k}$.

Deci conform definiției 1 avem (6′) . Dar (6′) $\Rightarrow Q \in \mathcal{M}(x_2, y_2, z_2) =$ (5′).

Așadar $\mathcal{M}(x_1, y_1, z_1) \subseteq \mathcal{M}(x_2, y_2, z_2)$.

Analog se arată că :

(5″) $\quad (x_2, y_2, z_2) \subseteq \mathcal{M}(x_1, y_1, z_1)$,

deci în concluzie : $\mathcal{M}(x_1, y_1, z_1) = \mathcal{M}(x_2, y_2, z_2)$.

b) Fie $Q \in \operatorname{Int} \Delta ABC$. Se verifică imediat că :

$$(7) \quad Q \sim 1 - \left(\frac{BC_1}{C_1A}, 1, \frac{BA_1}{A_1C}\right),$$

deci $Q \in \mathcal{M}\left(\frac{BC_1}{C_1A}, 1, \frac{BA_1}{A_1C}\right)$

Dar W fiind sistem de reprezentanți avem că $\exists (x_0, y_0, z_0)$ W a.î. :

$$\left(\frac{BC_1}{C_1A}, 1, \frac{BA_1}{A_1C}\right) \sim (x_0, y_0, z_0)$$

deci conform (2) $\mathcal{M}\left(\frac{BC_1}{C_1A}, 1, \frac{BA_1}{A_1C}\right) = \mathcal{M}(x_0, y_0, z_0)$, deci $Q \in \mathcal{M}(x_0, y_0, z_0)$ cu

$(x_0, y_0, z_0) \in W$, deci $Q \bigcup_{(x,y,z) \in W} \mathcal{M}(x, y, z) \Rightarrow \operatorname{Int} \Delta ABC \subseteq \bigcup_{(x,y,z) \in W} \mathcal{M}(x, y, z)$.

Reciproca este evidentă:

$Q \in \bigcup_{(x,y,z) \in W} \mathcal{M}(x, y, z) \Rightarrow \exists (x_0, y_0, z_0) \in W$ a.î. $Q \in \mathcal{M}(x_0, y_0, z_0) \subset \operatorname{Int} \Delta ABC$ conform definiției (1′) a mulțimilor $\mathcal{M}(x, y, z)$. Deci $\bigcup_{(x,y,z) \in W} (x, y, z) \subseteq \operatorname{Int} \Delta ABC$.

În concluzie : $\bigcup_{(x,y,z) \in W} \mathcal{M}(x, y, z) = \operatorname{Int} \Delta ABC$.

Q.E.D.

Observația 1. La punctul a) s-a arătat de fapt că :

$\forall (x_i, y_i, z_i)_{i=1,2} \in (R_+^*)$ avem că: $\mathcal{M}(x_1, y_1, z_1) \cap \mathcal{M}(x_2, y_2, z_2) \neq \emptyset \Rightarrow$

$\mathcal{M}(x_1, y_1, z_1) = \mathcal{M}(x_2, y_2, z_2) \Leftrightarrow (x_1, y_1, z_1) \sim (x_2, y_2, z_2)$.

Observaţia 2. $\forall \lambda > 0$ şi $\forall$ (x, y, z) (R_+^*) avem :

$$(8') \ \mathcal{M}(x, y, z) = \mathcal{M}(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$$

$$(8'') \ Q \simeq k - (x, y, z) \Leftrightarrow Q \simeq k - (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$$

Observaţia 3. $\forall x > 0 : \mathcal{M}(x, x, x) = \{G\}$ şi $G \approx k - (x, x, x), \forall k \in R^*$

Lema 1.2. Fie $Q \in \mathrm{Int}\,\Delta ABC$ a.î. $\exists\, x, y, z \in R_+^*$ şi $\exists\, k_1, k_2 \in R^*$ a.î. $Q \sim k_i - (x, y, z)$, $i = 1, 2$. Atunci: $k_1 \neq k_2 \Leftrightarrow Q = G \Leftrightarrow x = y = z$.

Demonstraţia este banală.

Lema 1.3. Relaţia de echivalenţă " ~ " definită de (1) induce pe Int ΔABC o relaţie de echivalenţă " " definită astfel:

$$\forall\, Q_1, Q_2 \in \Delta ABC \ \text{avem}$$

$$Q_1 \longleftrightarrow Q_2 \overset{def.}{\Leftrightarrow} \exists (x, y, z) \in (R_+^*) \ \text{a.î.} \ Q_i \in \mathcal{M}(x, y, z),\ i = 1, 2.$$

Această lemă este o consecinţă directă a teoremei anterioare, demonstrarea sa fiind banală.

În continuare inventariem câteva din punctele celebre din universul triunghiului, reamintind că notaţiile pentru aceste puncte sunt cele uzuale.

Propoziţie.

1. $G \in \mathcal{M}\ \forall x > 0$: (x, x, x) de rang oarecare, nenul ;
2. $I \in \mathcal{M}$(a, b, c) de rang 1;
3. $K \in \mathcal{M}$(a, b, c) de rang 2;
4. $R \in \mathcal{M}$(a, b, c) de rang 3;
5. $M \in \mathcal{M}$(a, b, c) de rang -1;
6. $H \in \mathcal{M}$(tg A, tg B, tg C) de rang 1;
7. $O \in \mathcal{M}$(sin 2A, sin 2B, sin 2C) de rang 1;
8. $\Gamma \in \mathcal{M}$(p - a, p - b, p - c) de rang -1;
9. $N \in \mathcal{M}$(p - a, p - b, p - c) de rang 1;
10. $T \in \mathcal{M}\left(\frac{\sin(A+60)}{a}, \frac{\sin(B+60)}{b}, \frac{\sin(C+60)}{c}\right)$ de rang 1;
11. $\omega \in \mathcal{M}\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{b^2c^2} + 2, \frac{a^2+b^2+c^2}{a^2c^2} + 2, \frac{a^2+b^2+c^2}{a^2b^2} + 2\right)$ de rang 1;
12. (i) $\Omega_1 \in \mathcal{M}$(b, c, a) de rang -2;
    (ii) $\Omega_2 \in \mathcal{M}$(c, a, b) de rang -2.

Nu vom demonstra toate cele douăsprezece puncte ci doar afirmaţiile 7, 10 si12: prima deoarece prezintă tehnica, iar celelalte trei deoarece aici tehnica nu este suficientă fiind necesare câteva artificii.

Demonstraţie.

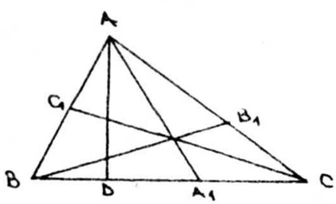


fig. 1.2.

7. Aplicăm teorema sinusurilor în triunghiurile BAA_1 şi CAA_1 şi obţinem:

$$BA_1 = \frac{\sin \widehat{BAA_1}}{\sin \widehat{BA_1A}} \cdot c \quad \text{şi} \quad A_1C = \frac{\sin \widehat{A_1AC}}{\sin \widehat{AA_1C}} \cdot b$$

Dar $\widehat{BA_1A} + \widehat{AA_1C} = 180^\circ$, deci $\sin \widehat{BA_1A} = \sin \widehat{AA_1C}$. Obţinem:

$$\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{c}{b} \cdot \frac{\sin \widehat{BAA_1}}{\sin \widehat{A_1AC}}$$

Fie $D \in (BC)$, $AD \perp BC$.
Cum AD şi AO sunt izogonale (vezi de exemplu [7], pg. 64) avem:

$$\widehat{A_1AC} = \widehat{BAD} = 90^\circ - \widehat{B} \Rightarrow \sin \widehat{BAA_1} = \cos \widehat{B}$$

Dar: $\widehat{BAA_1} = \widehat{A} - \widehat{A_1AC} = \widehat{A} - 90^\circ + \widehat{B} = 90^\circ - \widehat{C} \Rightarrow \sin \widehat{BAA_1} = \cos \widehat{C}$. Deci.

$$\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{2R\sin C}{2R\sin B} \cdot \frac{\cos C}{\cos B} \Rightarrow \frac{BA_1}{A_1C} = \frac{\sin 2C}{\sin 2B}$$

Analog: $\frac{CB_1}{B_1A} = \frac{\sin 2A}{\sin 2C}$; $\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{\sin 2B}{\sin 2A}$.

Conform definiţiei 1 avem deci că $O \approx 1 - (\sin 2A, \sin 2B, \sin 2C)$

10. Reamintim cum se obţine punctul T al lui Torricelli (pentru detalii a se vedea [9], pg. 118 - 122).

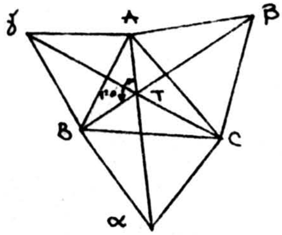


fig. 1.3.

Pe laturile triunghiului ABC se construiesc triunghiurile echilaterale $B\alpha C$, $C\beta A$, $A\gamma B$ în exterior. S-a demonstrat că $A\alpha \cap B\beta \cap C\gamma \neq \emptyset$ iar dacă notăm cu T punctul comun celor trei drepte, atunci T are în plus proprietatea că (T, B, α, C), (T, C, β, A), (T, A, γ, B) sunt respectiv conciclice, deci practic că:

$$(9) \qquad \widehat{BTC} = \widehat{CTA} = \widehat{ATB} = 120^\circ$$

Să revenim la problema noastră. Deoarece T, B, α, C sunt conciclice rezultă:

$$\widehat{BT\alpha} = \widehat{BC\alpha} = 60^\circ \text{ şi } \widehat{CT\alpha} = \widehat{CB\alpha} = 60^\circ$$

Deci $\widehat{BTA_1} = \widehat{A_1TC} = 60^\circ \Rightarrow TA_1 =$ bisectoare în ΔBTC, deci:
Obţinem:

$$T \in \left(\frac{1}{TA}, \frac{1}{TB}, \frac{1}{TC}\right) \text{ de rang } 1 \overset{(5)}{\Longrightarrow} T \in \mathcal{M}(TA, TB, TC) \text{ de rang } -1.$$

Trebuie să calculăm distanţele de la T la vârfuri pe care le vom nota astfel: $x = TA$, $y = TB$, $z = TC$. Teorema lui Pitagora generalizată, aplicată în triunghiurile BTC, CTA, şi ATB furnizează primele trei ecuaţii din sistemul de mai jos:

$$(10) \qquad \begin{cases} y^2 + yz + z^2 = a^2 \\ x^2 + xz + z^2 = b^2 \\ x^2 + xy + y^2 = c^2 \\ xy + yz + zx = \frac{4\sqrt{3}}{3} S \end{cases}$$

Ultima ecuaţie se obţine astfel:

$$S = \sigma[BTC] + \sigma[CTA] + \sigma[ATB] = \frac{yz \sin 120^\circ}{2} + \frac{xz \sin 120^\circ}{2} + \frac{xy \sin 120^\circ}{2} \text{ etc.}$$

Deducem că:

$$(11) \qquad x^2 + y^2 + z^2 = \frac{3(a^2+b^2+c^2) - 4\sqrt{3}\, S}{6}$$

$$(11') \qquad x + y + z = \left(\frac{a^2+b^2+c^2+4\sqrt{3}\, S}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \underset{=}{\overset{not}{}} s$$

Scăzând prima ecuaţie din a doua obţinem:

$$y^2 + yz - x^2 - xz = a^2 - b^2 \Rightarrow (y - x)\cdot(y + x) + z(y - x) = a^2 - b^2 \Rightarrow$$
$$(y - x)\cdot(x + y + z) = a^2 - b^2 \Rightarrow y - x = \frac{a^2 - b^2}{s} \Rightarrow y = \frac{a^2 - b^2}{s} + x$$

Analog:

$$z = \frac{a^2 - c^2}{s} + x$$

Dar:

$$x + y + z = s \Rightarrow 3x + \frac{2a^2 - b^2 - c^2}{s} = s \Rightarrow x = \frac{s^2 + b^2 + c^2 - 2a^2}{3s} \Rightarrow$$

$$x = \frac{1}{3S}\left[\frac{a^2 + b^2 + c^2 + 4\sqrt{3}S}{2} + b^2 + c^2 - 2a^2\right] = \frac{1}{6S}\cdot\left[3(b^2 + c^2 - a^2) + 4\sqrt{3}S\right] =$$

$$= \frac{1}{6S}\left[3\cdot 2bc\cos A + 2\sqrt{3}\,bc\sin A\right] = \frac{2\sqrt{3}}{3S}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A + \frac{1}{2}\sin A\right]bc =$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3S}\cdot\left[\sin(A + 60^\circ)\right]bc = \frac{2\sqrt{3}\,abc}{3S}\cdot\frac{\sin(A + 60^\circ)}{a}.$$

Analog: $y = \frac{2\sqrt{3}\,abc}{3S}\cdot\frac{\sin(B + 60^\circ)}{b}$

$z = \frac{2\sqrt{3}\,abc}{3S}\cdot\frac{\sin(C + 60^\circ)}{c}$

Deci: $Q \in \mathcal{M}(x, y, z) = \mathcal{M}\left(\frac{2\sqrt{3}\,abc}{3S}\cdot\frac{\sin(A+60^\circ)}{a}, \frac{2\sqrt{3}\,abc}{3S}\cdot\frac{\sin(B+60^\circ)}{b}, \frac{2\sqrt{3}\,abc}{3S}\cdot\frac{\sin(C+60^\circ)}{c}\right)$

de rang -1 $\xrightarrow{\text{Observatia 2}} Q \in \mathcal{M}\left(\frac{\sin(A+60^\circ)}{a}, \frac{\sin(B+60^\circ)}{b}, \frac{\sin(C+60^\circ)}{c}\right)$

de rang -1.

Q.E.D.

Pentru a demonstra 11 avem nevoie de următoarea lemă:

Lema 1.4. Dacă $Q \approx k - (x, y, z)$ iar d_a, d_b, d_c, reprezintă distanţele de la Q la laturile BC, CA şi respectiv AB atunci:

$$d_a = \frac{x^k}{\sum x^k}\cdot\frac{2S}{a}; \qquad d_b = \frac{x^k}{\sum x^k}\cdot\frac{2S}{b}; \qquad d_c = \frac{x^k}{\sum x^k}\cdot\frac{2S}{b}.$$

Demonstraţie.

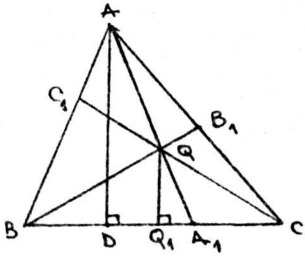


fig. 1.4.

Fie $D = pr_{BC}A$, $Q_1 = pr_{BC}Q$. Din asemănarea triunghiurilor ADA_1 şi QQ_1A avem: $\frac{d_a}{h_a} = \frac{QA_1}{AA_1}$

Dar relaţia lui Van Aubel: $\frac{AQ}{QA_1} = \frac{AB_1}{B_1C} + \frac{AC_1}{C_1B} = \left(\frac{z}{x}\right)^k + \left(\frac{y}{x}\right)^k = \frac{z^k + y^k}{x^k}$

Deci: $$d_a = \frac{x^k}{x^k + y^k + z^k}\cdot h_a = \frac{x^k}{\sum x^k}\cdot\frac{2S}{a}$$

Analog se demonstrează celelalte două relaţii.

Q.E.D.

Observaţia 4. În cazul în care Q este punct de rang k " clasic ", deci $Q \approx k - (a, b, c)$ avem:

$$\frac{d_a}{a^{k-1}} = \frac{d_b}{b^{k-1}} = \frac{d_c}{c^{k-1}}$$

relaţie care figurează în [9], pg. 60, unde sunt făcute şi unele particularizări ale lui k.

Să demonstrăm acum punctul II al propoziției anterioare.

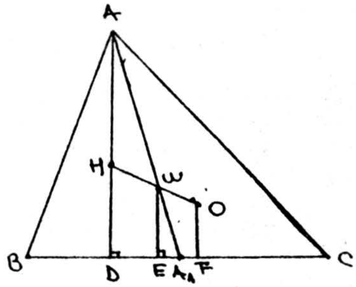


fig. 1.5.

În fig. 1.5 am notat $D = pr_{BC}H$, $E = pr_{BC}\omega$, $F = pr_{BC}O$. Trapezul HDFO este dreptunghic iar ωE este linie mijlocie, deci :

$$\omega E = \frac{1}{2}(HD + OF)$$

Dar: $H \in \mathcal{M}$(tg A, tg b, tg C) de rang 1

$O \in \mathcal{M}$(sin 2A, sin 2B, sin 2C) de rang 1, conform punctelor anterioare.

Aplicând lema 1.4 deducem:

$$\omega E = \frac{x^k}{\sum x^k}\cdot\frac{2S}{a} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2S}{a}\cdot\left[\frac{tgA}{\sum tgA} + \frac{\sin 2A}{\sum \sin 2A}\right] \Rightarrow$$

$$\frac{x^k}{\sum x^k} = \frac{1}{2}\left[\frac{tgA}{tgA\,tgB\,tgC} + \frac{2\sin A\cos A}{4\sin A\sin B\sin C}\right] = \frac{1}{2}\left[ctgB\,ctgC + \frac{\cos A}{2\sin B\sin C}\right].$$

Am folosit relațiile cunoscute: tg A + tg B + tg C = tgA · tg B · tg C;

sinn 2A + sin 2B + sin 2C = 4 sin A sin B sin c

și am notat $\omega \approx k - (x, y, z)$, cu intenția de a determina convenabil k, x, y și z.

Avem în continuare:

$$\frac{x^k}{\sum x^k} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2\cos B\cos C + \cos A}{\sin B\sin C} = \frac{1}{2\pi\sin A}\cdot\left[2\sin A\cos B\cos C + \sin A\cos A\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sin A}\left[2\cdot\frac{a}{2R}\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} + \frac{a}{2R}\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right] =$$

$$= \frac{1}{8Rabc\pi\sin A}\left[a^4-(b^2-c^2)^2+a^2(b^2+c^2-a^2)\right] = \lambda\left[a^2(b^2+c^2)-(b^2-c^2)^2\right],\ cu\ \lambda \overset{not}{=} \frac{1}{8Rabc\pi\sin A}$$

Analog:

$$\frac{y^k}{\sum x^k} = \lambda\,[b^2(a^2+c^2)-(a^2-c^2)^2]$$

$$\frac{z^k}{\sum x^k} = \lambda\,[c^2(a^2+b^2)-(a^2-b^2)^2]$$

Alegem k = 1 și determinăm x, y, z .

Cum ax + by + cz = 2S, obținem:

$$\frac{2S}{\sum x} = \frac{ax}{\sum x} + \frac{by}{\sum x} + \frac{cz}{\sum z} = \lambda S'$$

unde $S' \overset{not}{=} \sum a[a^2(b^2+c^2)-(a^2-c^2)^2]$

Deci:

$$\sum x = \frac{2S}{\lambda S'}$$

Deci: $x = \lambda[a^2(b^2+c^2)-(b^2-c^2)^2]\frac{2S}{\lambda S'} \Rightarrow x = \frac{2S}{S'}[a^2(b^2+c^2)-(b^2-c^2)^2]$ și analoagele

Obținem în continuare:

$$Q \in \mathcal{M}\left(\frac{2S}{S'}[a^2(b^2+c^2)-(b^2-c^2)^2],\ \frac{2S}{S'}[b^2(a^2+c^2)-(a^2-c^2)^2],\ \frac{2S}{S'}[c^2(a^2+b^2)-(a^2-b^2)^2]\right) \text{ de rang } 1$$

$$\xLeftrightarrow{\textit{Observația 2}} Q \in \mathcal{M}(a^2(b^2+c^2)-(b^2-c^2),\ b^2(a^2+c^2)-(a^2-c^2),\ c^2(a^2+b^2)-(a^2-b^2)) \text{ de rang } 1.$$

Q.E.D.

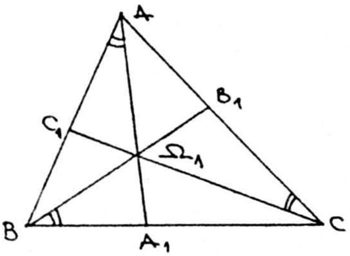


fig. 1.6.

12. Demonstrăm doar relatia (i) care corespunde situatiei din fig. 1.6, deci pentru care :

$$\widehat{\Omega_1 AB} = \widehat{\Omega_1 BC} = \widehat{\Omega_1 CA} \overset{not}{=} \omega$$

Sperăm să nu se facă nici o asociere între $\omega \overset{not}{=}$ centrul cercului Euler și $\omega \overset{not}{=}$ măsura unghiului Brocard.

Conform relației (7) avem:

$\forall Q \in \operatorname{Int} \Delta ABC$: $\qquad Q \approx 1 - \left(\frac{BC_1}{C_1A}, 1, \frac{BA_1}{A_1C}\right)$

În cazul nostru:

$$\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{\sin\omega}{\sin B} \cdot AA_1 \cdot \frac{\sin C}{\sin(A-\omega)} \cdot \frac{1}{AA_1} = \frac{c}{b} \cdot \frac{\sin\omega}{\sin(A-\omega)}.$$

Dar:

$$\frac{\sin(A-\omega)}{\sin\omega} = \frac{\sin^2 A}{\sin B \sin C} = \frac{a^2}{bc}.$$

Obținem:

$$\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{c}{b} \cdot \frac{bc}{a^2} \Rightarrow \frac{BA_1}{A_1C} = \frac{c^2}{a^2}.$$

Analog:

$$\frac{BC_1}{C_1A} = \frac{\sin(C-\omega)}{\sin B} \cdot \frac{\sin A}{\sin\omega} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c^2}{ab} = \frac{c^2}{b^2}.$$

Deci:

$$\Omega_1 \approx 1 - \left(\frac{c^2}{b^2}, 1, \frac{c^2}{a^2}\right) \xrightarrow{\textit{Observația 2}} Q \approx 1 - (a^2c^2, b^2a^2, c^2b^2) \Rightarrow \Omega_1 \approx 1 - (b^{-2}, c^{-2}, a^{-2}) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \Omega_1 \approx (-2) - (b, c, a).$$

Q.E.D.

Am folosit aici :

Observația 5. $Q \approx k - (x, y, z) \Leftrightarrow Q \approx 1 - (x^k, y^k, z^k)$

Încheiem paragraful cu încă două leme. Prima se referă la o proprietate punctuală în clasele $\mathcal{M}(x, y, z)$ iar a doua furnizează o informație asupra cardinalității unei clase $\mathcal{M}(x, y, z)$.

Lema 1. 5 Fie $Q_1, Q_2 \in \mathcal{M}(x, y, z)$. Atunci :

$$[Q_i \approx k_i - (x, y, z),\ i = 1, 2 \text{ și } x, y, z \text{ nu coincid toate}] \Rightarrow [Q_1 = Q_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2]$$

Lema 1. 6 $\forall x, y, z \in R_+^*$, mulţimile $\mathcal{M}(x, y, z)$ şi R sunt echipotente.

Demonstraţie.

Fie $f_1 : \mathcal{M}(x, y, z) \to R_+$, $f_1(Q) = k_Q$, $\forall Q \in \mathcal{M}(x, y, z)$, unde k_Q este un număr a.î. $Q \approx k_Q - (x, y, z)$.

Observaţia 3 şi lema 1.2 asigură faptul că f este bine definită.

Injectivitatea lui f_1 e dată de lema 1.5, iar surjectivitatea de definiţia lui $\mathcal{M}(x, y, z)$ (vezi (1´)).

Deci f_1 este bijectivă.

Ştim că R este echipotentă cu orice $[a, b] \subset R$.

Avem deci: card $R^* \leqslant$ card R = card [1, 2] $\leqslant$ card R^* şi conform teoremei Cantor-Bernstein card R^* = card R, cu alte cuvinte există o funcţie bijectivă $f_2 : R^* \to R$. (Am notat cu " $\leqslant$ " relaţia definită prin card A $\leqslant$ card B dacă şi numai dacă A este echipotentă cu o submulţime a lui B , unde A şi B sunt mulţimi oarecare. Se arată că " $\leqslant$ " este o relaţie de ordine totală în mulţimea numerelor cardinale).

Fie acum h: $\mathcal{M}(x, y, z) \to R$, $k(Q) = f_2 \circ f_1(Q)$, $\forall Q \in \mathcal{M}(x, y, z)$. Cum f_1, f_2 sunt bijecţii, rezultă că h este bijecţie, de unde concluzia.

Observaţia 6. $\forall Q \in \text{Int}\, \Delta ABC$ avem :

a) $\exists\, x, y, z \geqslant 0$ a.î. $x + y + z = 1$ şi $Q \approx 1 - (x, y, z)$;

b) $\exists\, x, y, z > 0$ a.î. $xyz = 1 - (x, y, z)$.

Totul rezultă din observaţia 2, luând λ convenabil.

Observaţia 7. Dacă $Q \in \text{Int}\,\Delta ABC$ atunci :

$$Q \approx 1 - (x^k, y^k, z^k) \Leftrightarrow Q \approx k - (x, y, z).$$

Lema 1.7 card R $\leqslant$ card W.

Demonstraţie.

Fie $f : R_+^* \to W$, $f(x) = (\alpha_x, \beta_x, \gamma_x)$ unde $(\alpha_x, \beta_x, \gamma_x) \in W$ a.î.

$(\alpha_x, \beta_x, \gamma_x) \sim (x, 1, 2)$ (*)

Arătăm că : (i) definiţia este bună;

(ii) f este injectivă.

(i) Relaţia " ~ " este relaţia de echivalenţă pe $(R_+^*)^3$ deci $(\alpha_x, \beta_x, \gamma_x) \in W$ cu proprietatea (*).

Dacă $(x, 1, 2) \sim (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) \in W$ şi $(x, 1, 2) \sim (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) \in W$, atunci

$$(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) \sim (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) \xRightarrow{W \text{ sist. de reprezentanţi}} (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) = (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$$

(ii) $f(x_1) = f(x_2) = (\alpha, \beta, \gamma) \Rightarrow (\alpha, \beta, \gamma) \sim (x_i, 1, 2)$ $i = \overline{1, 2} \Rightarrow$

$\Rightarrow (x_1, 1, 2) \sim (x_2, 1, 2) \Rightarrow \exists\, \alpha \neq 0$ a.î.

$$\ln x_1 = \ln \frac{x_1}{1} = \alpha \ln \frac{x_2}{2} = \alpha \ln x_2$$

$$\ln \frac{x_1}{2} = \alpha \ln \frac{x_2}{2} \text{ deci } \alpha = 1 \text{ şi } x_1 = x_2$$

$$\ln \frac{1}{2} = \alpha \ln \frac{1}{2}$$

Deci card R = card $R_+^* \leqslant$ card W.

Q.E.D.

Observaţia 8. Dacă $\alpha, \beta \in (0, \infty)$, $\alpha \neq \beta$, atunci mulţimile:

$$W_1 = \{(x, \alpha, \beta) \mid x \in (0, \infty)\} \cup \{(1, 1, 1)\}$$

$$W_2 = \{(\alpha, y, \beta) \mid y \in (0, \infty)\} \cup \{(1, 1, 1)\}$$

$$W_3 = \{(\alpha, \beta, z) \mid z \in (0, \infty)\} \cup \{(1, 1, 1)\}$$

sunt sisteme de reprezentanţi pentru relaţia (1), iar demonstraţia este suficient de simplă.

Observaţia 9. Dacă W este un sistem de reprezentanti pentru relaţia (1) atunci:

card W = card R

1.2. PROPRIETĂŢI TOPOLOGICE ALE CLASELOR $\mathcal{M}(x, y, z)$

Considerăm spaţiul R^2 cu topologia uzuală (reamintim că topologia uzuală pe R este definită de una din normele echivalente $\| (x_1, \dots , x_n) \|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ cu $p \geq 1$ sau $\| (x_1, \dots , x) \|_c = \max \{|x_1|, \dots ,|x_n|\}$; pentru detalii vezi [6] pg. 29.

În continuare se va lucra cu norma euclidiană $\| \cdot \|_p$ cu $p = 2$.

Lema 2.1. $\forall x, y, z > 0$: $\mathcal{M}(x, y, z)$ nu este densă în Int Δ ABC

Demonstraţie.

Utilizăm următoarea generalizare a relaţiei Leibniz (vezi lema 5.1) :

$\forall x, y, z > 0, \forall k \neq 0$, $\forall M \in$ Int Δ ABC avem:

(1) $Q \approx k - (x, y, z) \Rightarrow \sum x^k MA^2 = \dfrac{\sum a^2 y^k z^k}{\sum x^k} + (\sum x^k) \cdot MQ^2$.

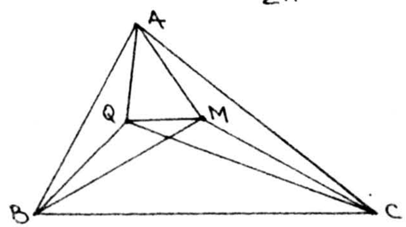


fig. 1.7.

Presupunem prin absurd că există x, y, z > 0 a.î. clasa $\mathcal{M}(x, y, z)$ este densă în Int Δ ABC, deci pentru care are loc relaţia:

(2) $\forall M \in$ IntΔABC , $\forall \varepsilon > 0$: $\mathcal{M}(x, y, z) \cap D(M, \varepsilon) \neq \emptyset$.

Alegem un $M \in$ Int ΔABC a.î. $M \notin \mathcal{M}(x, y, z)$. Acest lucru este posibil deoarece card W $\geq$ card R şi $\{\mathcal{M}(x, y, z)\}$ este o partiţie a lui IntΔABC, deci alegem un triplet : $(x_1, y_1, z_1) \in W - \{(x, y, z)\}$ şi luăm de exemplu $M \approx 1 - (x_1, y_1, z_1)$ (vezi lema 1.7 şi teorema din paragraful 1). Conform (2) avem că :

$$(3) \forall \varepsilon > 0 \ \exists k_\varepsilon \in R \text{ a.î. } MQ_{k_\varepsilon} < \varepsilon,$$

unde Q_k punctul de rang k în clasa $\mathcal{M}(x, y, z)$, deci $Q_k \approx k - (x, y, z)$.

Fie $\varepsilon_0 = \min \{ d(M, BC), d(M, AC), d(M, AB)\}$. Din (3) rezultă:

$\exists Q_{k_0} \in \mathcal{M}(x, y, z)$ a.î. $MQ_{k_0} < \varepsilon_0$, $Q_{k_0} \approx k_0 - (x, y, z)$.

Fie $\varepsilon_1 = \frac{MQ_{k_0}}{2} \neq 0$ ($Q_{k_0} = M \Rightarrow M \in \mathcal{M}(x, y, z)$, contradicţie).

Din (3) rezultă $\exists Q_{k_1} \in \mathcal{M}(x, y, z)$ a.î. $MQ_{k_1} < \varepsilon_1$, $Q_{k_1} \approx k_1 - (x, y, z)$.

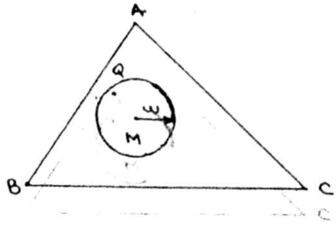


fig. 1.8.

Obţinem astfel un şir $(Q_{k_n})_{n\geq 0}$ de puncte distincte cu proprietatea că :

(4) $\forall\, n \geq 0$: $MQ_{k_n} < \varepsilon_n \leq \frac{\varepsilon_0}{2^n}$ cu $\varepsilon_j = \frac{MQ_{k_{j-1}}}{2}$, $\forall j \geq 1$.

Avem deci:

(5) $\lim\limits_{n\to\infty} MQ_{k_n} \overset{not}{=\!=\!=} l_1 = 0$ (deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\varepsilon_0}{2^n} = 0$).

Rescriem acum (1) sub forma :

$$(6)\ MQ_{k_n}^2 = \sum \frac{x^{k_n}}{x^{k_n}+y^{k_n}+z^{k_n}} \cdot MA^2 - \frac{\sum a^2 y^{k_n} z^{k_n}}{\left(\sum x^{k_n}\right)^2}$$

Cazul 1. Dacă şirul $(k_n)_{n\geq 0}$ este mărginit, atunci conform lemei Cesaro el admite un subşir convergent. Pentru a nu mai complica notaţia vom presupune că chiar $(k_n)_n$ este convergent şi fie $l \in R$ limita sa. Trecând la limită în (6) avem:

$0 = \lim\limits_{n\to\infty} MQ_{k_n} = \frac{x^l}{\sum x^l+y^l+z^l} \cdot MA^2 - \frac{\sum a^2 y^l z^l}{(\sum x^l)^2} \overset{(1)}{=\!=} MQ_l \Rightarrow M = Q_l \approx l - (x, y, z) \Rightarrow M \in \mathcal{M}(x, y, z)$ contradicţie.

Cazul 2. Dacă şirul $(k_n)_n$ este nemărginit, atunci el este nemărginit superior sau inferior, deci are un subşir convergent sau la $+\infty$ sau la $-\infty$. Să presupunem, fără a restrânge generalitatea că avem chiar $\lim\limits_{n\to\infty} k_n = +\infty$.

Cazul 2.1. $0 < x \leq y < z$

$$\text{Avem: } MQ_{k_n}^2 = \sum \frac{\left(\frac{x}{z}\right)^{k_n}}{\left(\frac{x}{z}\right)^{k_n}+\left(\frac{y}{z}\right)^{k_n}} \cdot MA^2 - \frac{\sum a^2 \cdot \left(\frac{y}{z}\right)^{k_n}}{\left[\sum\left(\frac{x}{z}\right)^{k_n}\right]^2} \xrightarrow{k_n\to\infty} 0 = \lim_{n\to\infty} MQ_{k_n}^2 = MC^2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow M = C \notin \mathrm{Int}\, \triangle ABC$, contradicţie.

Cazul 2.2. $0 < x < y = z$

$$\text{Atunci : } MQ = \frac{\left(\frac{x}{z}\right)^{k_n}}{\left(\frac{x}{z}\right)^{k_n}+2} \cdot MA^2 + \frac{MB^2+MC^2}{\left(\frac{x}{z}\right)^{k_n}+2} - \frac{a^2+(b^2+c^2)\left(\frac{x}{z}\right)^{k_n}}{\left[2+\left(\frac{x}{z}\right)^{k_n}\right]^2}$$

şi deci : $0 = \lim\limits_{n\to\infty} MQ_{k_n}^2 = \frac{MB^2+MC^2}{2} - \frac{a^2}{4} \Rightarrow MB^2 + MC^2 = \frac{a^2}{2}$ (vezi fig. 1.9.)

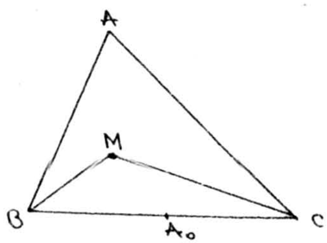


fig. 1.9

Dar : $BM^2 + CM^2 - 2\,BM \cdot MC \cos \widehat{BMC} = BC^2 = a^2 \Rightarrow$

$2\,BM \cdot MC \cos \widehat{BMC} = \frac{-a^2}{2} < 0 \Rightarrow \widehat{BMC} > 90^\circ \Rightarrow BM^2 + CM^2 > BC^2 = a^2$

Dar $BM^2 + CM^2 = \frac{a^2}{2}$, deci $\frac{a^2}{2} > a^2$, absurd.

Cazul 2.3. $0 < x = y = z$

În acest caz $Q_{k_i} = Q_{k_j}$ $\forall i \neq j$, contradicţie.

Deci dacă x, y, z nu coincid toate trei, presupunerea (2) făcută este falsă şi deci $\mathcal{M}(x, y, z)$ nu e densă în Int $\triangle ABC$.

Dacă x = y = z atunci fie M mijlocul segmentului AG şi fie $\mathcal{E} = \frac{1}{2}GM$. Avem:
$D(M, \mathcal{E}) \cap \mathcal{M}(x, x, x) = D(M, \mathcal{E}) \cap \{G\} = \emptyset$ rezultă că $\mathcal{M}(x, x, x)$ nu e densă în Int ΔABC.

Q.E.D.

Lema 2.2. Fie $f : \mathcal{M}(x, y, z) \to R$, $f(Q) = d_a(Q)$, $\forall Q \in \mathcal{M}(x, y, z)$, unde $d_a(Q)$ este distanţa de la Q la BC şi $x < y < z$ sau $x > y > z$. Atunci f este injectivă.

Demonstraţie.

Fie $Q_i \approx k_i - (x, y, z)$ $i = 1, 2$ şi presupunem $f(Q_1) = f(Q_2)$. Atunci:

$$\frac{x^{k_1}}{\Sigma x^{k_1}} \cdot \frac{2S}{a} = \frac{x^{k_2}}{\Sigma x^{k_2}} \cdot \frac{2S}{a} \Longleftrightarrow \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^{k_1}+\left(\frac{z}{x}\right)^{k_1}} = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^{k_2}+\left(\frac{z}{x}\right)^{k_2}} \Longleftrightarrow \left(\frac{y}{x}\right)^{k_1}+\left(\frac{z}{x}\right)^{k_1} = \left(\frac{y}{x}\right)^{k_2}+\left(\frac{z}{x}\right)^{k_2}$$

Fie $g : R \to R$, $g_{a,b}(x) = a^x + b^x$ cu $a > 1$ şi $b > 1$ sau $a < 1$ şi $b < 1$.

$g'_{a,b}(x) = a^x \ln a + b^x \ln b$.

Presupunem $a > 1$ şi $b > 1$. Atunci $g'_{a,b}(x) > 0$ oricare ar fi x de unde rezultă g este strict crescătoare, deci fiind şi continuă rezultă că este injectivă.

Pentru $a := \frac{y}{x} > 1$ şi $b := \frac{z}{x} > 1$ rezultă $g_{\frac{y}{x},\frac{z}{x}}$ este injectivă de unde obţinem că $Q_1 = Q_2$ deci că f este injectivă.

Q.E.D.

Lema 2.3. Oricare ar fi $x, y, z > 0$ avem că $\mathcal{M}(x, y, z)$ nu este deschisă în R^2 cu topologia uzuală.

Demonstraţie.

Vom presupune $x < y < z$.

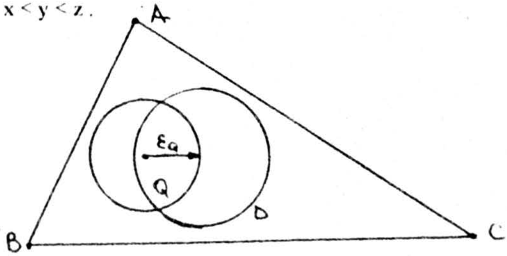


fig. 1.10

$\mathcal{M}(x, y, z)$ = deschisă $\Longleftrightarrow \forall Q \in \mathcal{M}(x, y, z)$: $\mathcal{M}(x, y, z)$ = vecinătatea lui Q $\Rightarrow$
$\exists D$ = disc în R^2 a.î. $Q \in D \subset \mathcal{M}(x, y, z)$.

Fie $d \parallel BC$, $Q \in d$ şi $\{M_1, M_2\} = d \cap Fr\,D$. Cum $Q \notin Fr\,D \Rightarrow QM_1 > 0$.

Fie M mijlocul lui QM_1. Deci $QM \neq 0 \Rightarrow Q \neq M$ (7)

şi de asemenea : $M \in D \subset \mathcal{M}(x, y, z)$; $QM \parallel BC$. Dar din $QM \parallel BC$ rezultă $d_a(Q) = d_a(M) \xRightarrow{\text{Lema 2.2}} Q = M$, contradicţie (7).

Q.E.D.

Lema 2.4. $\{A, B, C\} \cap \overline{\mathcal{M}(x, y, z)} \neq \emptyset$ dacă $|\{x, y, z\}| \geqslant 2$.

Demonstraţie.

Să presupunem $x < y \leqslant z$.

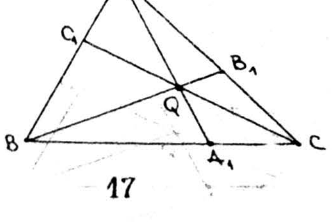


fig. 1.11

Conform lemei 5.1 avem:

$$(9)\qquad AQ_k^2 = \frac{b^2 z^{2k} + c^2 y^{2k} + (b^2+c^2-a^2)\, y^k z^k}{(x^k+y^k+z^k)^2}$$

unde, reamintim, $Q_k \approx k - (x, y, z)$, $k \in R^*$. Deci :

$$(10)\quad AQ = \frac{b^2\left(\frac{z}{x}\right)^{2k} + c^2\left(\frac{y}{x}\right)^{2k} + (b^2+c^2-a^2)\cdot\left(\frac{y}{x}\right)^{k}\cdot\left(\frac{z}{x}\right)^{k}}{\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^{k}+\left(\frac{z}{x}\right)^{k}\right]^2} > 0$$

Funcția: $f : (-\infty, 0) \to R_+$,

$$f(k) = \left[b^2\left(\frac{z}{x}\right)^{2k} + c^2\left(\frac{y}{x}\right)^{2k} + (b^2+c^2-a^2)\left(\frac{y}{x}\right)^{k}\cdot\left(\frac{z}{x}\right)^{k}\right] : \left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^{k}+\left(\frac{z}{x}\right)^{k}\right]$$

este evident continuă pe $(-\infty, 0)$ și avem : $\lim\limits_{k\to-\infty} f(k) = \frac{0}{1} = 0$

Deci $\forall \varepsilon > 0\ \exists k_\varepsilon$ a.î. $\forall k < k_\varepsilon$: $f(k) < \varepsilon$. Deci conform (10) :

$\forall \varepsilon > 0\ \exists k_\varepsilon \in Z^*$ a.î. $\forall k < k_\varepsilon$: $AQ_k < \varepsilon \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists k_\varepsilon \in Z^*$ a.î. $\forall k < k_\varepsilon$: $Q_k \in D(A, \varepsilon) \iff$
$\iff \forall \varepsilon > 0$: $D(A, \varepsilon) \cap \mathcal{M}(x, y, z) \neq \emptyset$ și cum $A \notin \mathrm{Int}\,\Delta ABC \supset \mathcal{M}(x, y, z)$ rezultă că A este punct de acumulare pentru $\mathcal{M}(x, y, z)$, deci $A \in \overline{\mathcal{M}(x, y, z)}$.

Acum dacă $x \leq y < z$ analog se arată (făcând $k \to +\infty$) că $C \in \mathcal{M}(x, y, z)$.
Dar : $\{A, B, C\} \cap \overline{\mathcal{M}(x, y, z)} \neq \emptyset$.

Q.E.D.

Consecința 2.5. $\mathcal{M}(x, y, z)$ nu este închisă în R cu topologia uzuală dacă card $\{x, y, z\} \geq 2$.

Demonstrație.

$\mathcal{M}(x, y, z)$ = închisă $\iff \mathcal{M}(x, y, z) = \overline{\mathcal{M}(x, y, z)} \overset{\text{lema 2.4}}{=\!=\!=} \{A, B, C\} \cap \mathcal{M}(x, y, z) \neq \emptyset$
$\underset{\mathcal{M}(x,y,z) \subset \mathrm{Int}\,\Delta ABC}{=\!=\!=} \{A, B, C\} \cap \mathrm{Int}\,\Delta ABC \neq \emptyset$, contradicție.

Q.E.D.

Observația 2.6. $\mathcal{M}(x, x, x) = \{G\}$ este singura clasă închisă.

Teoremă. $\forall x, y, z > 0$: $\mathcal{M}(x, y, z)$ este o mulțime RARĂ în R^2 cu topologia uzuală.

Demonstrație.

Conform [7] , pg. 17 : " O mulțime A din spațiul topologic X este mulțime rară , dacă și numai dacă oricare ar fi mulțimea deschisă nevidă D, există o mulțime deschisă nevidă V astfel încât $V \subseteq D$ și $V \cap A = \emptyset$ ".

Fie deci D o mulțime deschisă în R^2. Dacă $D - \mathrm{Int}\,\Delta ABC \neq \emptyset$ atunci există $M_0 \in D - \mathrm{Int}\,\Delta ABC$. Din faptul că D este deschisă și $M_0 \in D$ rezultă că există $\varepsilon_0 > 0$ așa încât discul de centru M_0 și rază ε_0 este conținut în D.

Fie $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}\min\{d(M_0, AB), d(M_0, AC), d(M_0, BC), \varepsilon_0\}$. Atunci :
$D(M_0, \varepsilon_1) \cap \mathrm{Int}\,\Delta ABC = \emptyset$, $D(M_0, \varepsilon_1) \subset D$ și $D(M_0, \varepsilon_1)$ este evident deschisă.

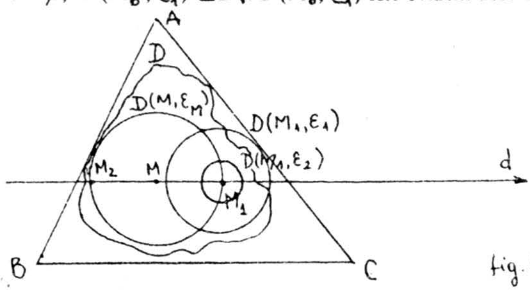


fig. 1.12

Dacă $\emptyset \neq D \subset \mathrm{Int}\,\triangle ABC$ să presupunem prin absurd că

(11) $\forall V \subseteq D$, V deschisă : $V \cap \mathcal{M}(x, y, z) \neq \emptyset$

Fie $M \in D$. Cum D este deschisă rezultă că există $\varepsilon_M > 0$ a.î. $\overline{D(M, \varepsilon_M)} \subset D$.

Fie $d \parallel BC$, $M \in D$ şi $\{M_1, M_2\} = d \cap \mathrm{Fr}\, D(M, \varepsilon_M)$. Cum $M_1, M_2 \in \overline{D(M, \varepsilon_M)}$ rezultă că : $M_1, M_2 \in D$. (12)

Arătăm că $M_1, M_2 \in \mathcal{M}(x, y, z)$. Să presupunem $M_1 \notin \mathcal{M}(x, y, z)$; din demonstraţia lemei 2.1 avem:

(13) $\exists \varepsilon_1 > 0$ a.î. $D(M_1, \varepsilon_1) \cap \mathcal{M}(x, y, z) = \emptyset$.

Şi cum $M_1 \in D$ rezultă că există $\varepsilon_2 > 0$ a.î. $D(M_1, \varepsilon_1) \subset D$ şi conform (11) avem:

(14) $D(M_1, \varepsilon_2) \cap \mathcal{M}(x, y, z) \neq \emptyset$

Fie $\varepsilon_3 = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} > 0$. Deci $D(M_1, \varepsilon_3) \subseteq D(M_1, \varepsilon_1)$ şi $D(M_1, \varepsilon_3) \subseteq D(M_1, \varepsilon_2)$

Conform (13) avem:

(15′) $D(M_1, \varepsilon_3) \cap \mathcal{M}(x, y, z) \subseteq D(M_1, \varepsilon_1) \cap \mathcal{M}(x, y, z) = \emptyset$ şi

$D(M_1, \varepsilon_3) \subseteq D(M_1, \varepsilon_2) \subset D$ şi conform (11) avem :

(15″) $D(M_1, \varepsilon_3) \cap \mathcal{M}(x, y, z) \neq \emptyset$,

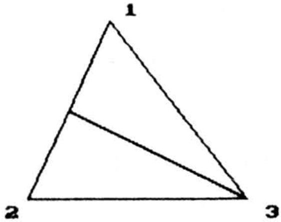
contradicţie (15′). Deci $M_1 \in \mathcal{M}(x, y, z)$. Analog:

(16) $M_2 \in \mathcal{M}(x, y, z)$ şi $M_1 \neq M_2$.

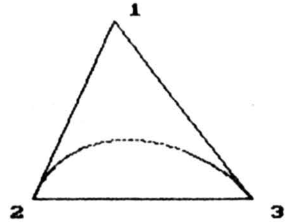
Cum $d \parallel BC$ şi $M_1, M_2 \in d$, reluând raţionamentul din lema 2.3 obţinem că $M_1 = M_2$ contradicţie (16). Deci $\forall D$ deschisă în plan $\exists V \subseteq D$ deschisă a.î. $V \cap \mathcal{M}(x, y, z) = \emptyset \Rightarrow \mathcal{M}(x, y, z)$ este RARĂ în plan.

Q.E.D.

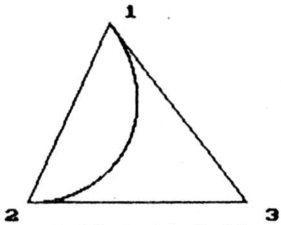
În continuare sunt reprezentate câteva clase de puncte $\mathcal{M}(x, y, z)$, realizate cu ajutorul calculatorului.



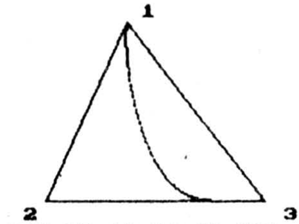
M(5.00,5.00,2.00)



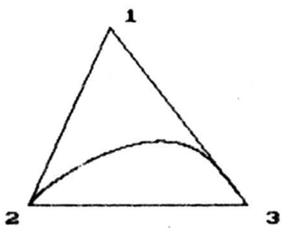
M(5.00,1.00,32.00)



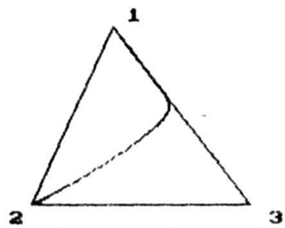
M(4.00,1.00,2.00)



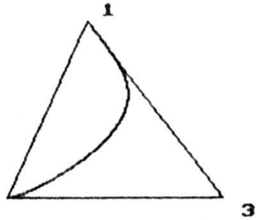
M(0.50,10.01,24.00)



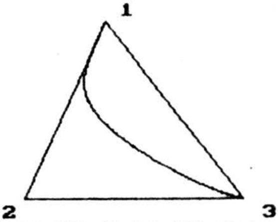
M(9.00,18.00,7.00)



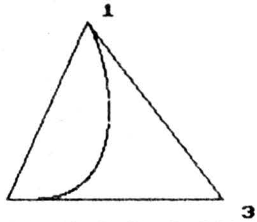
M(4.00,0.11,3.00)



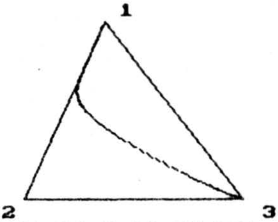
M(4.00,0.91,2.73)



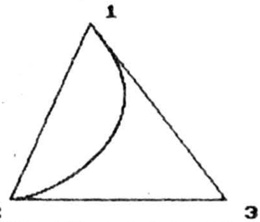
M(4.00,6.91,39.73)



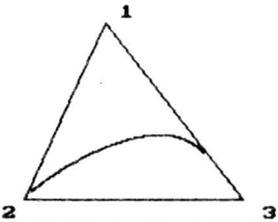
M(14.00,0.91,2.30)



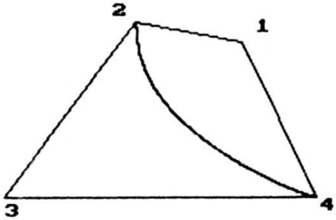
M(4.00,5.91,72.73)



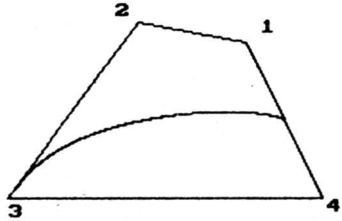
M(4.50,1.91,3.30)



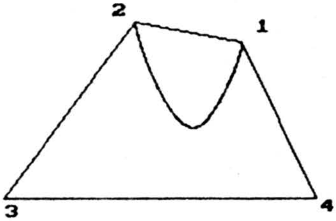
M(7.00,5.10,7.73)



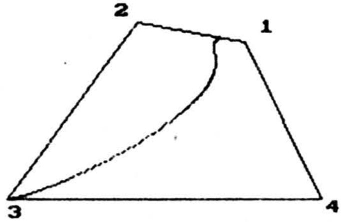
M(2.00,0.70,2.30,8.00)



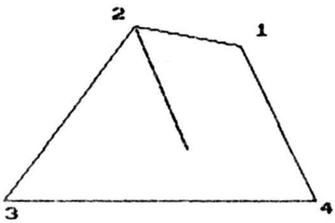
M(4.00,6.91,9.30,4.00)



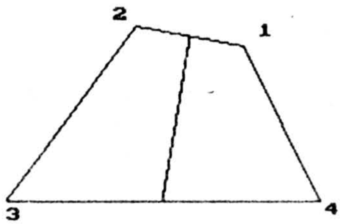
M(14.00,0.91,8.00,9.00)



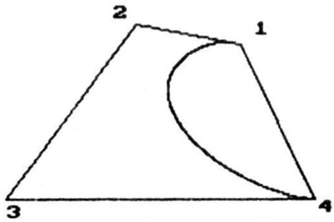
M(4.00,5.10,72.73,10.00)



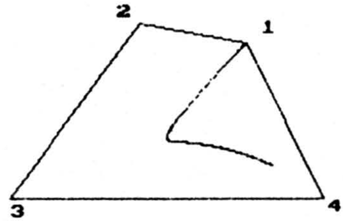
M(3.00,1.91,3.00,3.00)



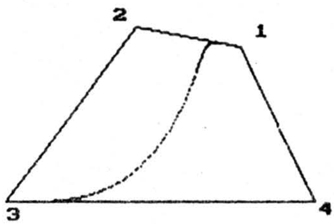
M(2.00,2.00,10.00,10.00)



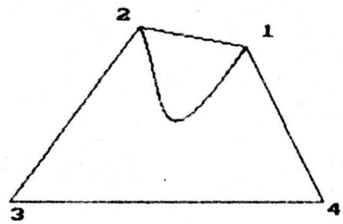
M(2.67,4.70,12.80,81.00)



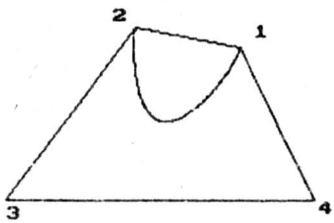
M(0.03,6.10,5.30,7.00)



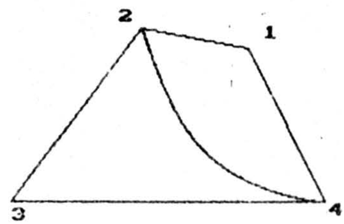
M(0.40,0.91,81.00,19.00)



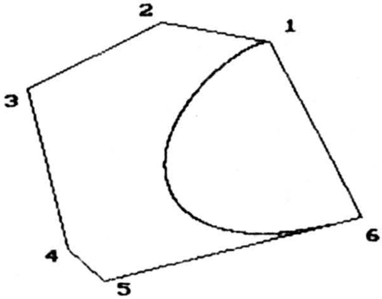
M(0.04,5.00,0.72,1.00)



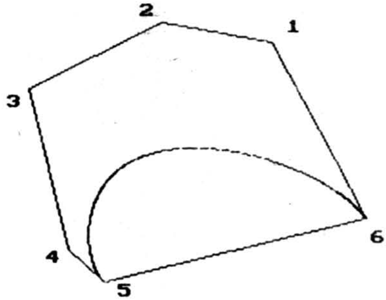
M(0.30,9.81,3.70,3.00)



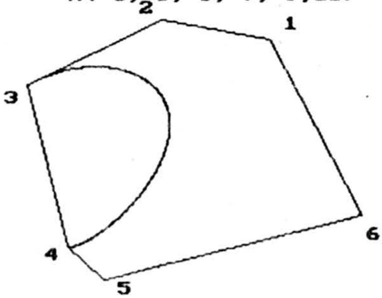
M(2.74,12.00,1.98,1.00)



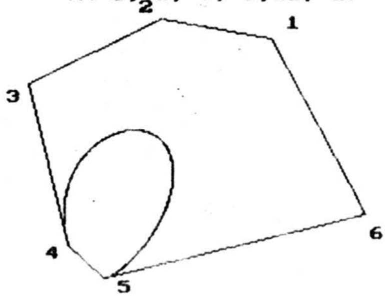
M(1, 3, 5, 7, 9,11)



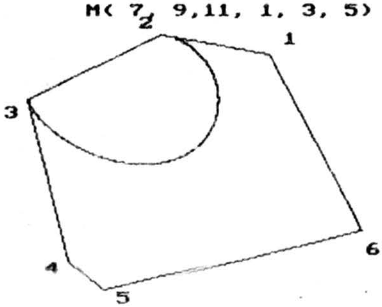
M(3, 5, 7, 9,11, 1)



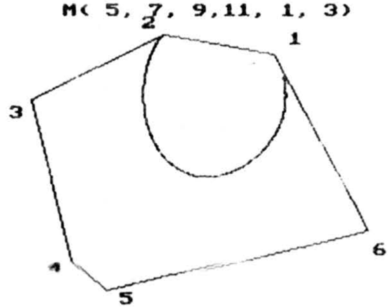
M(7, 9,11, 1, 3, 5)



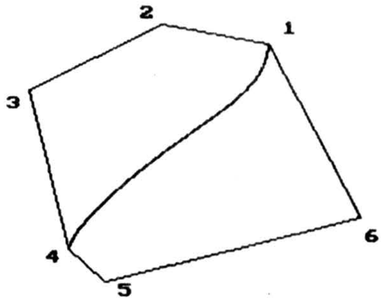
M(5, 7, 9,11, 1, 3)



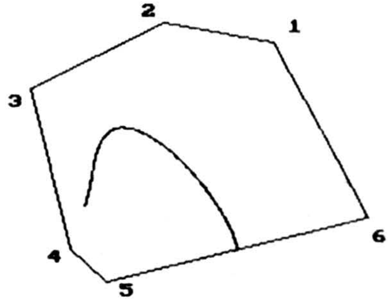
M(9,11, 1, 3, 5, 7)



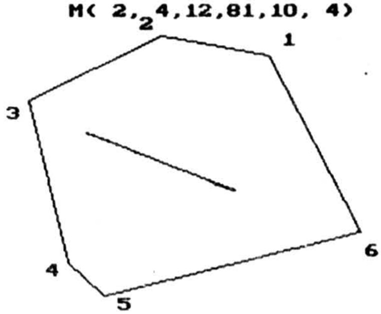
M(11, 1, 3, 5, 7, 9)



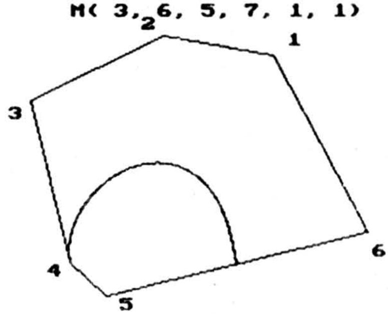
M(2, 4,12,81,10, 4)



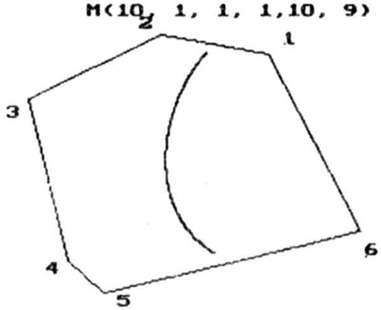
M(3, 6, 5, 7, 1, 1)



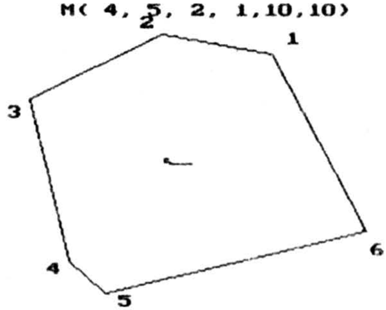
M(10, 1, 1, 1,10, 9)



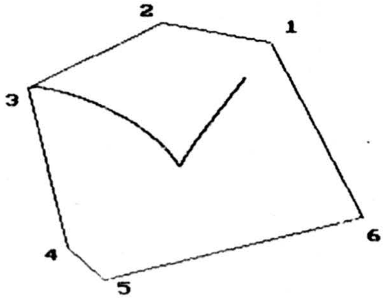
M(4, 5, 2, 1,10,10)



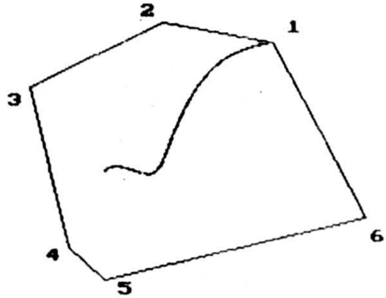
M(3, 3, 4, 4, 5, 5)



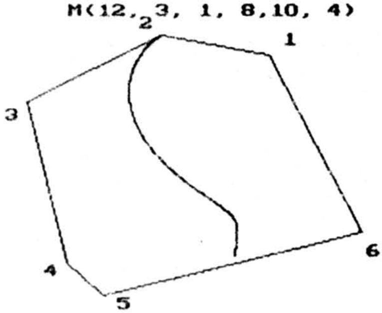
M(3, 4, 5, 3, 4, 5)



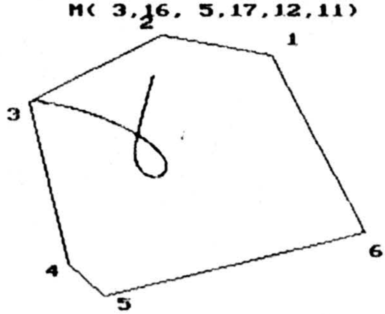
M(12, 3, 1, 8,10, 4)



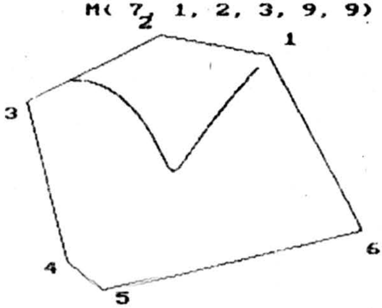
M(3,16, 5,17,12,11)



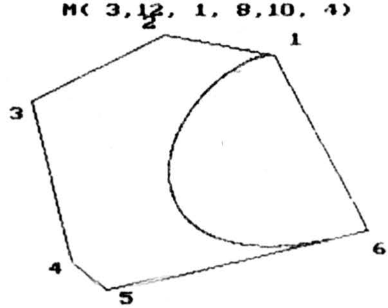
M(7, 1, 2, 3, 9, 9)



M(3,12, 1, 8,10, 4)



M(3,13,14, 4, 5, 9)



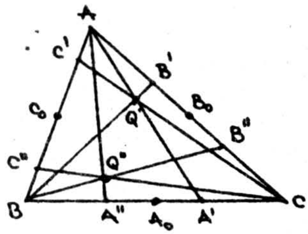
M(1, 2, 3, 4, 5, 6)

2. PUNCTE IZOTOMICE. PUNCTE IZOGONALE.

I. Fie ABC un triunghi ascuțitunghic și cevianele AA', BB', CC' concurente în punctul $Q' \in \text{Int}\,\Delta ABC$. Vom presupune că $Q' \approx k - (x, y, z)$, deci că:

$$\frac{BA'}{A'C} = \left(\frac{z}{y}\right)^k; \quad \frac{CB'}{B'A} = \left(\frac{x}{z}\right)^k; \quad \frac{AC'}{C'B} = \left(\frac{y}{x}\right)^k \qquad x, y, z > 0,\ k \in R^*$$

Fie A'', B'', C'' simetricele punctelor A', B', C' față de A_0 și respectiv B_0 și C_0 unde am notat cu A_0, B_0, C_0 mijloacele laturilor BC, AC și AB.



Definiția 1.
a) Cevianele AA', AA'' se numesc izotomice (analog BB' și BB'', CC' și CC'').
b) Punctele Q' și Q'' se numesc izotomice ($\{Q''\} = AA'' \cap BB'' \cap CC''$).

Teorema 1. Dacă $Q' \approx k - (x, y, z)$ iar Q'' este izotomicul său, atunci:

$$Q'' \approx (-k) - (x, y, z).$$

Demonstrație.

Fără a restrânge generalitatea, să considerăm cazul din figura de mai sus. Cu notațiile uzuale avem: $BA'' = BA_0 - A_0A'' = \frac{a}{2} - A_0A' = A'C$

$$A''C = A_0A'' + A_0C = \frac{a}{2} + A''A_0 = \frac{a}{2} + A'A = BA'.$$

Deci:

$$\frac{BA''}{A''C} = \frac{A'C}{BA'} = \left(\frac{y}{z}\right)^k = \left(\frac{z}{y}\right)^{-k}$$

Analog:

$$\frac{CB''}{B''A} = \left(\frac{x}{z}\right)^{-k}; \qquad \frac{AC''}{C''B} = \left(\frac{y}{x}\right)^{-k}.$$

Obținem: $Q'' \approx (-k) - (x, y, z)$.

Q.E.D.

Observația 1. S-a presupus implicit că x, y, z nu sunt toate identice ($Q' \neq G$). Dacă $Q = G$ atunci evident $A'' = A' = A$ și analoagele, deci izotomicul lui G este G.

Observația 2. Teorema 1 arată că punctele izotomice sunt de același tip (fac parte din aceeași clasă $\mathcal{M}(x, y, z)$ iar suma rangurilor lor este nulă).

Propoziția 1. Dacă notăm cu Q_k punctul de rang k dintr-o clasă $\mathcal{M}(x, y, z)$ atunci:

1) $[\exists\, k \in R^* \text{ a.î. } Q_{-k}Q_k \parallel BC] \Leftrightarrow [\forall k \in R^* : Q_kQ_{-k} \parallel BC] \Leftrightarrow [x = \sqrt{yz}]$

2) $[\forall k \in R^* : Q_k, G$ și Q_{-k} sunt coliniare $] \Leftrightarrow [\exists\, k \in R^* : Q_k, G$ și Q_{-k} sunt coliniare $] \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow [(x = y) \vee (y = z) \vee (z = x)]$

Demonstrație.

1) Avem:

$$Q_{-k}Q_k \parallel BC \Leftrightarrow \frac{AQ_k}{Q_kA_k} = \frac{AQ_{-k}}{Q_{-k}A_{-k}} \xLeftrightarrow{\text{Van Aubel}} \frac{y^k + z^k}{x^k} = \frac{y^{-k} + z^{-k}}{x^{-k}} \Leftrightarrow x = \sqrt{yz}$$

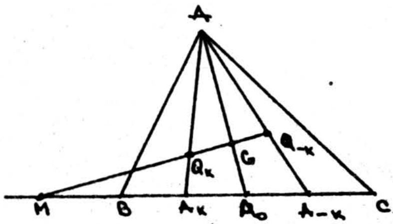
unde $A_k \overset{not}{=\!=} AQ_k \cap BC,\ k \in R^*$.

Dacă p_1, p_2, p_3 sunt propozițiile logice din concluzie, avem deci $p_1 \Leftrightarrow p_3 \Rightarrow p_2 \Rightarrow p_1$, de unde: $p_1 \Leftrightarrow p_2 \Leftrightarrow p_3$.

2) Să presupunem prin absurd că $\exists\, k \in R^*$ a.î. Q_k, G și Q_{-k} sunt coliniare iar $x \neq y \neq z \neq x$

Dacă de exemplu $Q_kQ_{-k} \parallel BC$ atunci

$$\frac{AQ_k}{A_kQ_k} = \frac{AG}{GA_0} = \frac{AQ_{-k}}{Q_{-k}A_{-k}} \Rightarrow y^k + z^k = 2x^k \text{ și } x = \sqrt{yz}\text{, deci } \left(y^{\frac{k}{2}} - z^{\frac{k}{2}}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = z\text{, contradicție}$$



Deci Q_kQ_{-k} nu este paralelă cu nici o latură a triunghiului. Fie $\{M\} = Q_kQ_{-k} \cap BC$ (vezi figura de mai sus). Aplicând teorema lui Menelaos în ΔAA_kA_0 și transversalei MG obținem:

$$\frac{MA_k}{MA_0} \cdot \frac{A_0G}{GA} \cdot \frac{AQ_k}{Q_kA_k} = 1 \xRightarrow{\text{Van Aubel}} \frac{MA_k}{MA_0} = \frac{2x^k}{y^k + z^k} \Rightarrow \frac{MA_k}{A_kA_0} = \frac{MA_k}{MA_0 - MA_k} = \frac{2x^k}{y^k + z^k - 2x^k} \Rightarrow$$

$$\frac{MA_k}{A_kA_{-k}} = \frac{MA_k}{2A_kA_0} = \frac{x^k}{y^k + z^k - 2x^k} \Rightarrow \frac{MA_k}{MA_{-k}} = \frac{x^k}{y^k + z^k - x^k}$$

Aplicăm teorema lui Menelaos în AA A și transversalei MQ:

$$\frac{MA_k}{MA_{-k}} \cdot \frac{A_{-k}Q_{-k}}{Q_{-k}A} \cdot \frac{AQ_k}{Q_kA_k} = 1 \xRightarrow{\text{Van Aubel}} \frac{x^k}{y^k + z^k - x^k} \cdot \frac{x^{-k}}{y^{-k} + z^{-k}} \cdot \frac{y^k + z^k}{x^k} = 1 \Rightarrow$$

$= x^{2k} - (y^k + z^k)x^k + y^k z^k = 0 \Rightarrow (x^k - y^k)\cdot(x^k - z^k) = 0 \Rightarrow x^k = y^k$ sau $x^k = z^k \Rightarrow x = z$ sau $x = y$ contradicție.

Deci dacă p_1', p_2', p_3' sunt cele trei afirmații avem: $p_1' \Rightarrow p_2' \Rightarrow p_3'$. Dar $p_3' \Rightarrow p_1'$ (rezultă din observația 2). Deci $p_1' \Rightarrow p_2' \Rightarrow p_3' \Rightarrow p_1'$.

Q.E.D.

II. Definiția 2.

a) Cevianele AA′, AA″ (vezi fig. 2.1) se numesc izogonale dacă $\widehat{BAA''} = \widehat{A'AC}$.

b) Punctele Q′, Q″ ∈ Int △ ABC se numesc izogonale dacă și numai dacă AA′,AA″ și respectiv BB′,BB″ și CC′, CC″ sunt perechi de ceviane izogonale.

Lema 1. (vezi [5]) Dacă AA′,AA″ sunt ceviane izogonale, atunci:

$$\frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{BA''}{A''C} = \left(\frac{c}{b}\right)^2$$

Demonstrația este imediată.

Teorema 2. Dacă $Q' \approx k - (x, y, z)$ iar Q″ este izogonalul său, atunci:

$$Q'' \approx 1 - (a^2x^{-k}, b^2y^{-k}, c^2z^{-k})$$

Demonstrație.

Din lema 1 avem:

$$\frac{BA''}{A''C} = \left(\frac{c}{b}\right)^2 \cdot \frac{A'C}{BA'} = \left(\frac{c}{b}\right)^2 \cdot \left(\frac{y}{z}\right)^k \Rightarrow \frac{BA''}{A''C} = \frac{c^2z^{-k}}{b^2y^{-k}}$$

și analoagele. Obținem: $Q'' \approx 1 - (a^2x^{-k}, b^2y^{-k}, c^2z^{-k})$.

Q.E.D

Aplicații.

1. Dacă $Q' = H$ atunci, cum $H \approx 1 - (\operatorname{tg} A, \operatorname{tg} B, \operatorname{tg} C)$ avem:

$$Q'' \approx 1 - \left(\frac{a^2}{\operatorname{tg} A}, \frac{b^2}{\operatorname{tg} B}, \frac{c^2}{\operatorname{tg} C}\right) \Rightarrow Q'' \approx 1 - \left(\frac{a^2 \cos A}{\sin A}, \frac{b^2 \cos B}{\sin B}, \frac{c^2 \cos C}{\sin C}\right) \Rightarrow$$

$$Q'' \approx 1 - \left(\frac{4R^2 \sin^2 A \cos A}{\sin A}, \frac{4R^2 \sin^2 B \cos B}{\sin B}, \frac{4R^2 \sin^2 C \cos C}{\sin C}\right) \Rightarrow$$

$\Rightarrow Q'' \approx 1 - (\sin 2A, \sin 2B, \sin 2C)$ (conform observației 2) $= Q'' = O$.

2. Dacă $Q' = G \approx 1 - (1, 1, 1)$ avem:

$Q'' \approx 1 - (a^2 1^{-1}, b^2 1^{-1}, c^2 1^{-1}) \Rightarrow Q'' \approx 1 - (a^2, b^2, c^2) \Rightarrow Q'' \approx 2 - (a, b, c)$ (observația 7 paragraful 1.1) $\Rightarrow Q'' = K =$ punctul lui Lemoine de intersecție al simedianelor.

3. Dacă $Q' = T \approx (-1) - \left(\frac{\sin(A+60^\circ)}{a}, \frac{\sin(B+60^\circ)}{b}, \frac{\sin(C+60^\circ)}{c}\right)$ (punctul lui Torricelli) atunci:

$$Q'' \approx 1 - \left(a^2 \frac{\sin(A+60^\circ)}{a}, b^2 \frac{\sin(B+60^\circ)}{b}, c^2 \frac{\sin(C+60^\circ)}{c}\right) \Rightarrow$$

$\Rightarrow Q'' \approx 1 - (\sin A \sin(A + 60^\circ), \sin B \sin(B + 60^\circ), \sin C \sin(C + 60^\circ)) \Rightarrow$

$\Rightarrow Q'' \approx 1 - (\frac{1}{2} - \cos(2A + 60^\circ), \frac{1}{2} - \cos(2B + 60^\circ), \frac{1}{2} - \cos(2C + 60^\circ))$.

4. Dacă Q' este un punct de rang k în sensul clasic, deci $Q' \approx k - (a, b, c)$ atunci: $Q'' \approx (2 - k) - (a, b, c)$, rezultat citat și în [9] pg. 64.

Arătăm în continuare că $\mathcal{M}(a, b, c)$ este singura clasă de puncte din interiorul unui triunghi care își conține punctele izogonale.

Propoziția 2. Fie $x, y, z > 0$ și $|\{a, b, c\}| \geq 2$. Dacă Q este punctul de rang k în $\mathcal{M}(x, y, z)$ notăm cu Q^k izogonalul său. Atunci:

$[\exists k \in R^*: Q^k \in \mathcal{M}(x, y, z)] \Leftrightarrow [\forall k \in R^*: Q^k \in \mathcal{M}(x, y, z)] \Leftrightarrow [\mathcal{M}(x, y, z) = \mathcal{M}(a, b, c)]$.

Demonstrație.

Fie p_1, p_2, p_3 cele trei propoziții de mai sus.

<u>$p_1 \Rightarrow p_3$</u>: $\exists k \in R^*: Q^k \in \mathcal{M}(x, y, z) \Rightarrow (x, y, z) \approx (a^2 x^{-k}, b^2 y^{-k}, c^2 z^{-k}) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \exists \alpha \neq 0: \ln \frac{y}{x} = \alpha \ln \frac{b^2 y^{-k}}{a^2 x^{-k}} = \alpha\left(2 \ln \frac{b}{a} + k \ln \frac{x}{y}\right)$$

$$\ln \frac{x}{z} = \alpha\left(2 \ln \frac{a}{c} + k \ln \frac{z}{x}\right)$$

$$\ln \frac{z}{y} = \alpha\left(2 \ln \frac{c}{b} + k \ln \frac{y}{z}\right)$$

Deci $\exists \alpha \neq 0$: $(1 + \alpha k) \ln \frac{y}{x} = 2\alpha \ln \frac{b}{a}$ și analoagele.

Fie $\alpha' = \frac{1 + \alpha k}{2\alpha} \neq 0$ ($\alpha \neq 0$! și ΔABC = neechilateral).

Avem: $\ln \frac{b}{a} = \alpha' \ln \frac{y}{x}$; $\ln \frac{a}{c} = \alpha' \ln \frac{x}{z}$; $\ln \frac{c}{b} = \alpha' \ln \frac{z}{y}$, deci: $(x, y, z) \approx (a, b, c)$, de unde: $\mathcal{M}(x, y, z) = \mathcal{M}(a, b, c)$.

În concluzie: $p_2 \Rightarrow p_1 \Rightarrow p_3 \Rightarrow p_2$.

Q.E.D.

3. CONFIGURAŢII REMARCABILE.

3.1. CONDIŢII DE COLINIARITATE.

Să considerăm un triunghi ascuţitunghic ABC şi punctele Q_1, Q_2, Q_3 în interiorul său. Ne punem problema determinării unei condiţii necesare şi suficiente ca punctele Q_1, Q_2, Q_3 să fie coliniare.

Fie $\{A_i\} = AQ_i \cap BC$, $\{B_i\} = BQ_i \cap AC$, $\{C_i\} = CQ_i \cap AC$, $i = 1,2,3$ (vezi fig. 3.1).

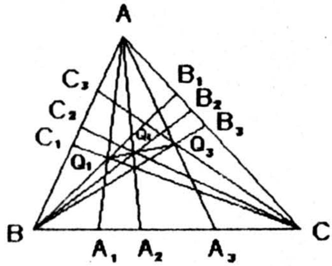


fig. 3.1

Vom aborda analitic problema coliniarităţii celor trei puncte Q_1, Q_2, Q_3. Ne vom prevala de următorul rezultat (vezi manualul de "Geometrie Analitică", clasa a XI-a, pg. 39, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1987) :

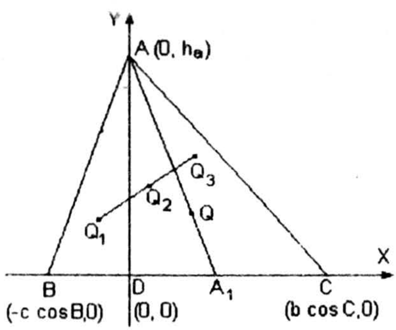
Lema 3.1. "Fie punctele distincte $M_1, M_2, \dots, M_n$ având vectorii de poziţie $\overrightarrow{OM_1}, \dots, \overrightarrow{OM_n}$ şi numerele reale $m_1, \dots, m_n$ cu proprietatea că $m_1 + \dots + m_n \neq 0$. Punctul G definit prin:

$$\overrightarrow{OG} = \frac{m_1\overrightarrow{OM_1} + m_2\overrightarrow{OM_2} + \dots + m_n\overrightarrow{OM_n}}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}$$

se numeşte centrul de greutate al sistemului de puncte $(M_1, M_2, \dots, M_n)$ relativ la sistemul de ponderi $(m_1, m_2, \dots, m_n)$.

Dacă $M_i(x_i, y_i)$, $i = 1,2, \dots, n$ şi $G(x,y)$, atunci:

$$x = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \dots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}\ ;\ y = \frac{m_1 + m_2 + \dots + m_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}$$



Lema 3.2. Dacă x,y,z > 0 şi $k \in \mathbf{R}^*$ şi $Q \in \mathrm{Int}\, \Delta ABC$ astfel încât $Q \approx k - (x,y,z)$ atunci Q este centrul de greutate al sistemului de puncte (A,B,C) relativ la sistemul de ponderi (x^k, y^k, z^k)

Demonstraţie.

Fie O un punct în planul triunghiului (vezi fig. 3.3).

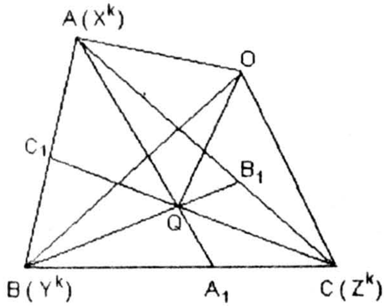


fig. 3.3

Vom arăta că:

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{x^k\,\overrightarrow{OA} + y^k\,\overrightarrow{OB} + z^k\overrightarrow{OC}}{x^k + y^k + z^k} \qquad (1)$$

Avem:

$$\Sigma\, x^k\overrightarrow{OA} = \Sigma\, x^k\left(\overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QA}\right) \Rightarrow \Sigma\, x^k\,\overrightarrow{OA} = (\Sigma\ x^k)\,\overrightarrow{OQ} + \Sigma\, x^k\,\overrightarrow{QA} \qquad (2)$$

Conform relaţiei Von Aubel avem:

$$\frac{AQ}{QA_1} = \frac{y^k + z^k}{x^k}\left(= \frac{AB_1}{B_1C} + \frac{AC_1}{C_1B}\right) \Rightarrow AQ = \frac{y^k + z^k}{\sum x^k}\,AA_1$$

Obţinem:

$$\overrightarrow{AQ} = \frac{y^k + z^k}{\sum x^k}\,\overrightarrow{AA_1} = \frac{y^k + z^k}{\sum x^k}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA_1}\right)$$

Dar:

$$\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{z^k}{y^k} \Rightarrow \frac{BA_1}{BC} = \frac{z^k}{y^k + z^k} \Rightarrow BA_1 = \frac{z^k}{y^k + z^k}\,BC \Rightarrow \overrightarrow{BA_1} = \frac{z^k}{y^k + z^k}\,\overrightarrow{BC}$$

Deci:

$$\overrightarrow{AQ} = \frac{y^k + z^k}{\sum x^k}\left(\overrightarrow{AB} + \frac{z^k}{y^k + z^k}\,\overrightarrow{BC}\right) \Rightarrow \overrightarrow{AQ} = \frac{y^k + z^k}{\sum x^k}\,\overrightarrow{AB} + \frac{z^k}{\sum x^k}\,\overrightarrow{BC} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{AQ} = \frac{y^k + z^k}{\sum x^k}\,\overrightarrow{AB} + \frac{z^k}{\sum x^k}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) \Rightarrow \overrightarrow{AQ} = \frac{y^k}{\sum x^k}\,\overrightarrow{AB} + \frac{z^k}{\sum x^k}\,\overline{AC} \qquad (3)$$

Rezultă:

$$x^k\,\overrightarrow{AQ} = \frac{x^k y^k}{\sum x^k}\,\overrightarrow{AB} + \frac{x^k z^k}{\sum x^k}\,\overrightarrow{AC} \qquad (4)$$

Analog:

$$y^k\,\overrightarrow{BQ} = \frac{x^k y^k}{\sum x^k}\,\overrightarrow{BA} + \frac{y^k z^k}{\sum x^k}\,\overrightarrow{BC} \qquad (5)$$

$$z^k \overrightarrow{CQ} = \frac{z^k x^k}{\sum x^k} \overrightarrow{CA} + \frac{z^k y^k}{\sum x^k} \overrightarrow{CB} \qquad (6)$$

Din (5), (6), (4) obținem:

$$\sum x^k \overrightarrow{AQ} = 0 \qquad (7)$$

Din (2) și (7) rezultă:

$$\sum x^k \overrightarrow{OA} = (\sum x^k) \overrightarrow{OK} \Rightarrow \overrightarrow{OQ} = \frac{\sum x^k \overrightarrow{OA}}{\sum x^k}$$

Q E D

Lema 3.3. Dacă, $Q \in \operatorname{Int} \Delta ABC$, $Q \approx k - (x,y,z$ iar xOy este un reper cartezian oarecare în planul triunghiului, atunci avem:

$$x_Q = \frac{x_A x'^k + x_B y'^k + x_C z'^k}{x'^k + y'^k + z'^k} \; ; \; y_Q = \frac{y_A x'^k + y_B y'^k + y_C z'^k}{x'^k + y'^k + z'^k}$$

unde am notat cu (x_M, y_M) coordonatele punctului **M** din planul triunghiului relativ la xOy

Demonstrație

Totul rezultă din lema 3.1 și **lema 3.2**

Putem acum să demonstrăm următoarea:

Teoremă . Dacă $x_i, y_i, z_i > 0$ și $k_i \in R^*$, $i = 1, 2, 3$ iar $Q_i \in \operatorname{Int} \Delta ABC$ astfel încât $Q_i \approx k_i - \left(x_i, y_i, z_i\right)$, $i = 1, 2,$,atunci:

$$Q_1, Q_2, Q_3 \text{ sunt coliniare} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1^{k_1} & y_1^{k_1} & z_1^{k_1} \\ x_2^{k_2} & y_2^{k_2} & z_2^{k_2} \\ x_3^{k_3} & y_3^{k_3} & z_3^{k_3} \end{vmatrix} = 0$$

Demonstrație

Considerăm reperul XDY , unde $D = pr_{BC} A$. (vezi fig. 3.2)

Avem:

$$(8)\; Q_1, Q_2, Q_3 = \text{coliniare} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_{G_1} & y_{G_1} & 1 \\ x_{G_2} & y_{G_2} & 1 \\ x_{G_1} & y_{G_2} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Din lema 3.3 avem: $x_{Q_i} = \dfrac{\sum x_i^{k_i} x_A}{\sum x_i^{k_i}}$; $y_{Q_i} = \dfrac{\sum x_i^{k_i} y_A}{\sum x_i^{k_i}}$, $i = 1, 2, 3$

Dar $x_A = 0$; $y_A = h_a$

$x_B = -c \cos B$; $y_B = 0$

$x_C = b \cos C$; $y_C = 0$

Deci

$$\begin{cases} x_{Q_i} = \dfrac{-c \cos B\, y_i^{k_i} + b \cos C\, z_i^{k_i}}{\sum x_i^{k_i}} \\ y_{Q_i} = \dfrac{h_a x_i^{k_i}}{\sum x_i^{k_i}} \end{cases} \quad i = 1, 2,$$

Din (8) și (9) rezultă:

$$Q_1, Q_2, Q_3 \quad \text{coliniare} \Leftrightarrow \left\| \begin{pmatrix} \dfrac{-c \cos B y_i^{k_i} + b \cos C\, z_i^{k_i}}{\sum x_i^{k_i}} & \dfrac{h_a x_i^{k_i}}{\sum x_i^{k_i}} & 1 \end{pmatrix}_{i=1,2,3} \right\| = 0$$

$$\begin{vmatrix} b\cos C\, z_1^{k_1} - c\cos B\, y_1^{k_1} & x_1^{k_1} & \Sigma\, x_1^{k_1} \\ b\cos C\, z_2^{k_2} - c\cos B\, y_2^{k_2} & x_2^{k_2} & \Sigma\, x_2^{k_2} \\ b\cos C\, z_3^{k_3} - c\cos B\, y_3^{k_3} & x_3^{k_3} & \Sigma\, x_3^{k_3} \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \frac{\operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} C} z_1^{k_1} - y_1^{k_1} & x_1^{k_1} & y_1^{k_1} + z_1^{k_1} \\ \frac{\operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} C} z_2^{k_2} - y_2^{k_2} & x_2^{k_2} & y_2^{k_2} + z_2^{k_2} \\ \frac{\operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} C} z_3^{k_3} - y_3^{k_3} & x_3^{k_3} & y_3^{k_3} + z_3^{k_3} \end{vmatrix}.$$

$$2R\sin C\cos B = 0 \Leftrightarrow 2R\sin C\cos B\left(\frac{\operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} C} + 1\right)\begin{vmatrix} z_1^{k_1} & x_1^{k_1} & y_1^{k_1} + z_1^{k_1} \\ z_2^{k_2} & x_2^{k_2} & y_2^{k_2} + z_2^{k_2} \\ z_3^{k_3} & x_3^{k_3} & y_3^{k_3} + z_3^{k_3} \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} z_1^{k_1} & x_1^{k_1} & y_1^{k_1} \\ z_2^{k_2} & x_2^{k_2} & y_2^{k_2} \\ z_3^{k_3} & x_3^{k_3} & y_3^{k_3} \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1^{k_1} & y_1^{k_1} & z_1^{k_1} \\ x_2^{k_2} & y_2^{k_2} & z_2^{k_2} \\ x_3^{k_3} & y_3^{k_3} & z_3^{k_3} \end{vmatrix} = 0$$

Q.E.D.

Consecință . Avem:

$$Q_1, Q_2, Q_3, = \text{coliniare} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{BC_1}{C_1A} & \frac{BC_2}{C_2A} & \frac{BC_3}{C_3A} \\ \frac{BA_1}{A_1C} & \frac{BA_2}{A_2C} & \frac{BA_3}{A_3C} \end{vmatrix} = 0 \qquad (10)$$

Demonstrație:

Conform relației (7) din paragraful 1, avem:

$\forall\, Q \in \mathrm{Int}\Delta ABC : Q \approx 1 - \left(\frac{BC_1}{C_1A}, 1, \frac{BA_1}{A_1C}\right)$

Aplicăm teorema de mai sus pentru $k_i = 1$ i $x_i = \frac{BC_i}{C_iA}$; $y_i = 1$, $z_i = \frac{BA_i}{A_iC}$, $i = 1, 2, 3$.
Prelucrând determinantul din teoremă obținem (10).

Q.E.D.

Aplicații

1. H, G, O sunt coliniare.

Demonstrație

Conform propoziției din paragraful 1 avem:

$H \approx 1 - (\operatorname{tg} A, \operatorname{tg} B, \operatorname{tg} C)$
$G \approx 1 - (1, 1, 1)$
$O \approx 1 - (\sin 2A, \sin 2B, \sin 2C)$

și:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \operatorname{tg} A & \operatorname{tg} B & \operatorname{tg} C \\ \sin 2A & \sin 2B & \sin 2C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \operatorname{tg} B - \operatorname{tg} A & \operatorname{tg} C - \operatorname{tg} A \\ \sin B - \sin A & \sin C - \sin A \end{vmatrix} =$$

$$= 2\sin(B-A)\sin(C-A)\frac{1}{\cos A}\begin{vmatrix} \frac{1}{\cos B} & \frac{1}{\cos C} \\ -\cos C & -\cos B \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow G, H, O \text{ coliniare}$$

Q.E.D.

2. N, I, G sunt coliniare.

Demonstrație

Conform propoziției din paragraful 1 avem:

$N \approx 1 - (p-a, p-b, p-c)$
$I \approx 1 - (a, b, c)$

$$G \approx 1 - (1, 1, 1)$$

Deci avem:

$$\begin{vmatrix} p-a & p-b & p-c \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p & p & p \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow N, I, G = \text{coliniare}$$

Q.E.D.

3. (Generalizare 2) Dacă x,y,z sunt trei numere reale şi strict pozitive care pot fi laturile unui triunghi, iar $p_1 \stackrel{\text{not.}}{=\!=} (x + y + z) / 2$ atunci: Q_1, G, Q_2 sunt coliniare, unde iar .

Demonstraţie .

Se aplică teorema anterioară.

4. G, I, K sunt coliniare dacă şi numai dacă ABC este isoscel.

Demonstraţie .

Conform teoremei anterioare şi propoziţiei din paragraful 1, avem:

$$G, I, K, = \text{coliniare} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = 0 \; \langle\stackrel{\text{Vandermonde}}{=\!=\!=\!=}\rangle \; (c - a)(c - b)(b - a) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Delta ABC = \text{isoscel.}$$

Q.E.D.

5. K, O, I sunt coliniare dacă şi numai dacă ΔABC este isoscel.

Demonstraţie

Ca mai sus avem:

O, I, K coliniare $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \sin A & \sin B & \sin C \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a\cos A & b\cos B & c\cos C \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ \cos A & \cos B & \cos C \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \sin B - \sin A & \sin C - \sin A \\ \cos B - \cos A & \cos C - \cos A \end{vmatrix} = 0$$

$$\sin\frac{B-A}{2}\sin\frac{C-A}{2}\sin\frac{C-B}{2} = 0 \Leftrightarrow A = B \vee C = A \vee C = B \Leftrightarrow \Delta ABC = \text{isoscel}$$

Q.E.D.

6. (O nouă demonstraţie la propoziţia 2.1.2)

Dacă $Q \approx k - (x, y, z)$ iar Q' este izotomicul său, atunci:

Q, G, Q' = coliniare $\Leftrightarrow x = y \vee y = z \vee z = x$.

Demonstraţie

$$Q, G, Q' \text{ coliniare} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ \frac{1}{x^k} & \frac{1}{y^k} & \frac{1}{z^k} \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} y^k - x^k & z^k - x^k \\ \frac{x^k - y^k}{x^k y^k} & \frac{x^k - z^k}{x^k z^k} \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (y^k - x^k)(z^k - x^k)\frac{1}{(xyz)^k}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -z^k & -y^k \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x^k = y^k \vee z^k = x^k \vee y^k = z^k \; \langle\stackrel{k \neq 0}{=\!=}\rangle$$

$\Leftrightarrow x = y \vee y = z \vee z = x$

Q.E.D.

7. Dacă ABC este un triunghi ascuţitunghic atunci:

$$\Sigma \sin 2A \cos 2A \sin (B - C) = 0$$

Demonstraţie .

Să arătăm mai întâi că dacă $Q \approx 1 - (x, y, z)$ iar Q' este izogonalul său, atunci:

(11) Q, G, Q' sunt coliniare $\Leftrightarrow \Sigma a^2yz(y - z) = 0$

Din teoremă avem:

$$Q, G, Q' = \text{coliniare} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ \frac{a^2}{x} & \frac{b^2}{y} & \frac{c^2}{z} \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} y - x & z - x \\ \frac{b^2x - a^2y}{xy} & \frac{c^2x - a^2z}{xz} \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (y - x)(c^2xy - a^2zy) = (z - x)(b^2xz - a^2yz) \Leftrightarrow c^2xy^2 - c^2x^2y - a^2zy^2 = b^2xz^2 -$
$- b^2x^2z - a^2yz^2 \Leftrightarrow a^2yz(y - z) + b^2xz(z - x) + c^2xy(x - y) = 0$

Acum, dacă $Q = H \approx 1 - (\text{tg } A, \text{tg } B, \text{tg } C)$, (11) devine

(12) $\Sigma a^2 \text{ tg } B \text{ tg } C (\text{tg } B - \text{tg } C) = 0$

deoarece izogonalul lui H este centrul cercului circumscris O şi ştim (aplicaţia 1) că H, G, O sunt coliniare. Prelucrând (12) obţinem concluzia.

Q.E.D.

8. Dacă $Q \approx k - (x, y, z)$ iar Q', Q" sunt izotomicul şi respectiv izogonalul său, atunci:

(13) Q, Q', Q" = coliniare $\Leftrightarrow x^{2k}(b^2 - c^2) + y^{2k}(c^2 - a^2) + z^{2k}(a^2 - b^2) = 0$

Demonstraţie

Avem conform teoremelor 1 şi 2 din paragraful 2 că:

$$Q' \approx (-k) - (x\ y\ z)$$
$$Q'' \approx 1 - (a^2x^{-k}, b^2y^{-k}, c^2z^{-k})$$

înlocuind în teoremă şi prelucrând convenabil determinantul obţinem (13).

Q.E.D.

9. Dacă ABC este un triunghi ascuţitunghic neisoscel, să se arate că există un punct $Q \in \text{Int } \Delta ABC \setminus \{G, I\}$ a.î. Q, Q', Q" să fie coliniare, unde Q', Q " sunt izotomicul şi respectiv izogonalul lui Q.

Demonstraţie Cazul $Q \in \{I, G\}$ nu prezintă interes deoarece Q" = I = Q /Q' = G = Q

Dacă avem de exemplu a < b < c atunci un punct Q cu proprietatea din enunţ este:

$$Q \approx 1 - \left(1, 2, \sqrt{\frac{c^2 - a^2}{b^2 - a^2}} + 1\right).$$

Plecând de la (13) se arată mai mult, că există o infinitate de puncte în interiorul triunghiului care se află pe dreapta ce uneşte punctul izotomic şi cel izogonal punctului dat.

De exemplu, în ideea a < b < c , avem:

$$\forall\, x, z > 0 \ :\ Q \approx 1 - \left(x, \sqrt{\frac{c^2 - b^2}{c^2 - a^2}x^2 + \frac{b^2 - a^2}{c^2 - a^2}z^2}\ , z\right)$$

se află pe dreapta Q'Q".

Observaţie.

Dacă $A \overset{\text{not.}}{=} \{Q \in \Delta ABC \mid Q, Q', Q'' = \text{coliniare}\}$ atunci, cu ajutorul teoremei Contor - Bernstein se poate arăta că:

card **A** = card **R**

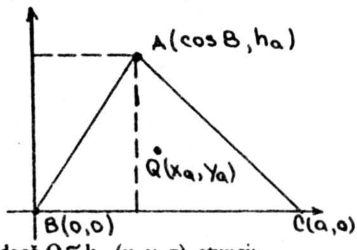
cu alte cuvinte există suficient de multe puncte Q situate pe dreapta care uneşte punctele izotomic şi izogonal corespunzătoare lui.

Teoremă. Fie ABC un triunghi oarecare şi să considerăm patru puncte distincte Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 în interiorul său. Dacă $Q_i \sim k_i - (x_i, y_i, z_i)$ cu $k \in R^*$ şi $x_i, y_i, z_i > 0$, $i = \overline{1,4}$ atunci: Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 sunt conciclice dacă şi numai dacă $\Delta = 0$, unde:

$$\Delta \stackrel{not}{=} \begin{vmatrix} x_1^{k_1} y_1^{k_1} z_1^{k_1} & \dfrac{a^2 y_1^{k_1} z_1^{k_1} + b^2 x_1^{k_1} z_1^{k_1} + c^2 x_1^{k_1} y_1^{k_1}}{x_1^{k_1} + y_1^{k_1} + z_1^{k_1}} \\ x_2^{k_2} y_2^{k_2} z_2^{k_2} & \dfrac{a^2 y_2^{k_2} z_2^{k_2} + b^2 x_2^{k_2} z_2^{k_2} + c^2 x_2^{k_2} y_2^{k_2}}{x_2^{k_2} + y_2^{k_2} + z_2^{k_2}} \\ x_3^{k_3} y_3^{k_3} z_3^{k_3} & \dfrac{a^2 y_3^{k_3} z_3^{k_3} + b^2 x_3^{k_3} z_3^{k_3} + c^2 x_3^{k_3} y_3^{k_3}}{x_3^{k_3} + y_3^{k_3} + z_3^{k_3}} \\ x_4^{k_4} y_4^{k_4} z_4^{k_4} & \dfrac{a^2 y_4^{k_4} z_4^{k_4} + b^2 x_4^{k_4} z_4^{k_4} + c^2 x_4^{k_4} y_4^{k_4}}{x_4 + y_4 + z_4} \end{vmatrix}$$

Demonstraţie.

Vom considera un reper cartezian cu centrul în unul din vârfurile ascuţite ale triunghiului ABC, fie acesta B .



Din lema 3.3 avem că, dacă $Q \approx k - (x, y, z)$, atunci:

$$X_a = \frac{x_A \cdot X^k + x_B \cdot Y^k + x_C \cdot Z^k}{X^k + Y^k + Z^k}, \quad Y_a = \frac{y_A \cdot X^k + y_B \cdot Y^k + y_C \cdot Z^k}{X^k + Y^k + Z^k}$$

şi cum în cazul nostru: $x_A = c \cos B$, $y_A = h_a$, $x_B = y_B = 0$, $x_C = a$, $y_C = 0$, obţinem:

$$X_a = \frac{c \cdot \cos B \cdot X^k + a \cdot Z^k}{X^k + Y^k + Z^k}, \quad Y_a = \frac{h_a \cdot X^k}{X^k + Y^k + Z^k}$$

şi înlocuind $\cos B = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$, $h_a = \dfrac{2S}{a}$, obţinem:

$$(1) \quad \begin{cases} x_a = \dfrac{(a^2 + c^2 - b^2) \cdot X^k + 2a^2 \cdot Z^k}{X^k + Y^k + Z^k} \cdot \dfrac{1}{2a} \\ \\ y_a = \dfrac{X^k}{X^k + Y^k + Z^k} \cdot \dfrac{2S}{a} \end{cases}$$

Fie acum Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 patru puncte distincte în interiotul triunghiului.

$Q_i \sim k_i \cdot (x, y, z)$ cu $k_i \neq 0$ şi $x_i, y_i, z_i > 0$, $(\forall)\, i \in \{1, 2, 3, 4\}$

Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 sunt conciclice dacă şi numai dacă :

$$\begin{vmatrix} x_{Q_1}^2 + y_{Q_1}^2 & x_{Q_1} & y_{Q_1} & 1 \\ x_{Q_2}^2 + y_{Q_2}^2 & x_{Q_2} & y_{Q_2} & 1 \\ x_{Q_3}^2 + y_{Q_3}^2 & x_{Q_3} & y_{Q_3} & 1 \\ x_{Q_4}^2 + y_{Q_4}^2 & x_{Q_4} & y_{Q_4} & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (2)$$

Din (1) şi (2) rezultă că Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 sunt conciclice dacă şi numai dacă:

$$\left| \frac{1}{4a^2}\cdot\frac{1}{(\sum x_i^{k_i})^2}\left[\left((a^2+c^2-b^2)\cdot x_i^{k_i}+2a^2z_i^{k_i}\right)^2+16S^2\cdot x_i^{2k_i}\right] \quad x_{Q_i} \quad y_{Q_i} \quad 1\right|_{i=\overline{1,4}} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left| \frac{1}{4a^2}\cdot\frac{1}{(\sum x_i^{k_i})^2}\left[\left((a^2-b^2+c^2)\cdot x_i^{k_i}+2a^2z_i^{k_i}\right)^2+16S^2\cdot x_i^{2k_i}\right] \quad \frac{1}{2a}\cdot\frac{1}{\sum x_i^{k_i}}\left[(a^2+c^2-b^2)x_i^{k_i}+2a^2z_i^{k_i}\right] \quad \frac{4S}{\sum x_i^{k_i}}x_i^{k_i}\cdot\frac{1}{2a} \quad 1\right|_{i=\overline{1,4}} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left| \left[\left((a^2+c^2-b^2)x_i^{k_i}+2a^2z_i^{k_i}\right)^2+16S^2\cdot x_i^{2k_i}\right] \quad \left[(a^2+c^2-b^2)x_i^{k_i}+2a^2z_i^{k_i}\right] \quad (\sum x_i^{k_i})x_i^{k_i} \quad (\sum x_i^{k_i})^2\right|_{i=\overline{1,4}} = 0$$

Înmulţim coloana 3 cu $(a^2+c^2-b^2)$ şi o scădem din coloana 2. Obţinem că Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 sunt conciclice dacă şi numai dacă:

$$\left\| \left((a^2+c^2-b^2)\cdot x_i^{k_i}+2a^2z_i^{k_i}\right)+16S^2\cdot x_i^{k_i}\right] \quad z_i^{2k_i}(\sum x_i^{k_i}) \quad x_i^{k_i}(\sum x_i^{k_i}) \quad (\sum x_i^{k_i})^2\right\|_{i=\overline{1,4}} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left\| \left((a^2+c^2-b^2)x_i^{k_i}+2a^2z_i^{k_i}+16S^2x_i^{2k_i}\right] \quad x_i^{k_i}(\sum x_i^{k_i}) \quad y_i(\sum x_i^{k_i}) \quad z_i(\sum x_i^{k_i})\right\|_{i=\overline{1,4}} = 0$$

Dar : $16S^2 = 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2a^2c^2 - (a^4+b^4+c^4)$ cum se poate verifica imediat, din formula lui Heron (vezi şi problema 1 din culegerea " Probleme de geometrie " de Pimser-Popa) şi deci vom avea că Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 sunt conciclice dacă şi numai dacă:

$$\left\| 4a^2c^2x_i^{2k_i}+4a^4z_i^{2k_i}+4a^2(a^2+c^2-b^2)x_i^{k_i}z_i^{k_i} \quad x_i^{k_i}(\sum x_i^{k_i}) \quad y_i^{k_i}(\sum x_i^{k_i}) \quad z_i^{k_i}(\sum x_i^{k_i})\right\|_{i=\overline{1,4}} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left\| c^2x_i^{2k_i}+(a^2+c^2-b^2)x_i^{k_i}z_i^{k_i} \quad x_i^{k_i}(\sum x_i^{k_i}) \quad y_i^{k_i}(\sum x_i^{k_i}) \quad z_i^{k_i}(\sum x_i^{k_i})\right\|_{i=\overline{1,4}} = 0 \xleftrightarrow[C_1 \leftarrow C_1 - c^2 \cdot C_2]{}$$

$$\left\| a^2z_i^{2k_i}+(a^2-b^2)x_i^{k_i}z_i^{k_i}-c^2x_i^{k_i}y_i^{k_i} \quad x_i^{k_i}(\sum x_i^{k_i}) \quad y_i^{k_i}(\sum x_i^{k_i}) \quad z_i^{k_i}(\sum x_i^{k_i})\right\|_{i=\overline{1,4}} = 0 \xleftrightarrow[C_1 \leftarrow C_1 - a^2 C_4]{}$$

$$\left\| -b^2x_i^{k_i}z_i^{k_i}-c^2x_i^{k_i}y_i^{k_i}-a^2z_i^{k_i}y_i^{k_i} \quad x_i^{k_i}(\sum x_i^{k_i}) \quad y_i^{k_i}(\sum x_i^{k_i}) \quad z_i^{k_i}(\sum x_i^{k_i})\right\|_{i=\overline{1,4}} = 0$$

Q.E.D.

Prin " $C_1 \leftarrow C_1 - c^2C_2$ " am notat faptul că " înmulţim coloana 2 a determinantului cu c^2 şi o scădem din coloana 1 " s.a.m.d.

În continuare sunt prezentate câteva reformulări ale teoremei mai sus enunţate, care în funcţie de context, se pot dovedi mai avantajoase faţă de forma determinantului care apare în teorema.

Corolar 1. În condițiile din teorema anterioară, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 sunt conciclice dacă și numai dacă:

$$\begin{vmatrix} x_1^{k_1} & y_1^{k_1} & z_1^{k_1} & x_1^{k_1}\cdot AQ_1^2 + y_1^{k_1}\cdot BQ_1^2 + z_1^{k_1}\cdot CQ_1^2 \\ x_2^{k_2} & y_2^{k_2} & z_2^{k_2} & x_2^{k_2}\cdot AQ_2^2 + y_2^{k_2}\cdot BQ_2^2 + z_2^{k_2}\cdot CQ_2^2 \\ x_3^{k_3} & y_3^{k_3} & z_3^{k_3} & x_3^{k_3}\cdot AQ_3^2 + y_3^{k_3}\cdot BQ_3^2 + z_3^{k_3}\cdot CQ_3^2 \\ x_4^{k_4} & y_4^{k_4} & z_4^{k_4} & x_4^{k_4}\cdot AQ_4^2 + y_4^{k_4}\cdot BQ_4^2 + z_4^{k_4}\cdot CQ_4^2 \end{vmatrix} = 0$$

Demonstrație.
Se folosește relația c. 2) din lema 5.1.

Corolar 2. Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 sunt conciclice dacă și numai dacă:

$$\begin{vmatrix} x_1^{k_1} & y_1^{k_1} & z_1^{k_1} & OQ_1^2\cdot(\sum x_1^{k_1}) \\ x_2^{k_2} & y_2^{k_2} & z_2^{k_2} & OQ_2^2\cdot(\sum x_2^{k_2}) \\ x_3^{k_3} & y_3^{k_3} & z_3^{k_3} & OQ_3^2\cdot(\sum x^{k_3}) \\ x_4^{k_4} & y_4^{k_4} & z_4^{k_4} & OQ_4^2\cdot(\sum x_4^{k_4}) \end{vmatrix} = 0$$

Corolar 3. Dacă $d_a^{(i)}$, $d_b^{(i)}$, $d_c^{(i)}$ sunt distanțele de la Q_i la laturile BC și respectiv CA și AB, $i=\overline{1,4}$, atunci Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 sunt conciclice dacă și numai dacă:

$$\begin{vmatrix} d_a^{(1)} & d_b^{(1)} & d_c^{(1)} & OQ_1^2 \\ d_a^{(2)} & d_b^{(2)} & d_c^{(2)} & OQ_2^2 \\ d_a^{(3)} & d_b^{(3)} & d_c^{(3)} & OQ_3^2 \\ d_a^{(4)} & d_b^{(4)} & d_c^{(4)} & OQ_4^2 \end{vmatrix} = 0$$

Demonstrație.
Totul rezultă din lema 1.4. și corolarul 2.

Propoziția 3.1. (cercul lui Brocard; vezi și 8.7, 8.8 pg. 83 din [3]). Punctele Ω_1, Ω_2 centrul cercului circumscris O și punctul simedian K sunt patru puncte conciclice.
Demonstrație.
Conform propoziției din paragraful 1 avem:

$K \approx 2$ - (a, b, c)
$O \approx 1$ - (sin 2A, sin 2B, sin 2C)
$\Omega_1 \approx$ (- 2) - (b, c, a)
$\Omega_2 \approx$ (- 2) - (c, a, b),

și deci conform teoremei K, O, Ω_1, Ω_2 sunt conciclice dacă și numai dacă:

$$\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 & \dfrac{\sum a^2 b^2 c^2}{(\sum a^2)} \\ \sin 2A & \sin 2B & \sin 2C & \dfrac{\sum a^2 \sin 2B \sin 2C}{\sum \sin 2A} \\ b^{-2} & c^{-2} & a^{-2} & \dfrac{\sum a^2 a^{-2} c^{-2}}{\sum b^{-2}} \\ c^{-2} & a^{-2} & b^{-2} & \dfrac{\sum a^2 a^{-2} b^{-2}}{\sum c^{-2}} \end{vmatrix} = 0 \xLeftrightarrow{\frac{\sum a^2 \sin 2B \sin 2C}{\sum \sin 2A} = 2S}$$

$$\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 & \dfrac{3a^2b^2c^2}{\sum a^2} \\ 2\sin A\cos A & 2\sin B\cos B & 2\sin C\cos C & 2S \\ a^2c^2 & a^2b^2 & b^2c^2 & a^2b^2c^2 \\ a^2b^2 & b^2c^2 & c^2a^2 & a^2b^2c^2 \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 & \dfrac{3a^2b^2c^2}{(\sum a^2)} \\ \dfrac{a}{R}\cdot\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} & \dfrac{b}{R}\cdot\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac} & \dfrac{c}{R}\cdot\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab} & 2S \\ a^2c^2 & a^2b^2 & b^2c^2 & a^2b^2c^2 \\ a^2b^2 & b^2c^2 & c^2a^2 & a^2b^2c^2 \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\begin{vmatrix} a^2\cdot(\sum a^2) & b^2\cdot(\sum b^2) & c^2\cdot(\sum c^2) & 3a^2b^2c^2 \\ a^2(b^2+c^2-a^2) & b^2(a^2+c^2-b^2) & c^2(a^2+b^2-c^2) & (4SR)\,abc \\ a^2c^2 & b^2a^2 & b^2c^2 & a^2b^2c^2 \\ a^2b^2 & b^2c^2 & c^2a^2 & a^2b^2c^2 \end{vmatrix} = 0 \xLeftrightarrow{abc=4SR}$$

$$\begin{vmatrix} a^4+a^2b^2+a^2c^2 & a^2b^2+b^4+b^2c^2 & a^2c^2+b^2c^2+c^4 & 3a^2b^2c^2 \\ -a^4+a^2b^2+a^2c^2 & a^2b^2-b^4+b^2c^2 & a^2c^2+b^2c^2-c^4 & a^2b^2c^2 \\ a^2c^2 & a^2b^2 & b^2c^2 & a^2b^2c^2 \\ a^2b^2 & b^2c^2 & c^2a^2 & a^2b^2c^2 \end{vmatrix} = 0 \xLeftrightarrow{C_1 \leftarrow C_1 + C_2}$$

$$\begin{vmatrix} 2a^2b^2+2a^2c^2 & 2a^2b^2+2b^2c^2 & 2a^2c^2+2b^2c^2 & 4a^2b^2c^2 \\ -a^4+a^2b^2+a^2c^2 & a^2b^2-b^4+b^2c^2 & a^2c^2+b^2c^2-c^4 & a^2b^2c^2 \\ a^2c^2 & a^2b^2 & b^2c^2 & a^2b^2c^2 \\ a^2b^2 & b^2c^2 & c^2a^2 & a^2b^2c^2 \end{vmatrix} = 0$$

evident ($L_1 = 2L_3 + 2L_4$)

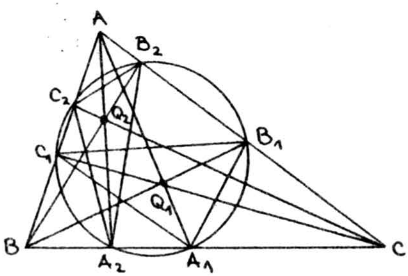
Q.E.D.

4. PROBLEME.

4.1. PROBLEME DE CONCICLICITATE .

Fie Q_1, Q_2 două puncte în interiorul triunghiului ABC și punctele:

$$\{A_i\} = AQ_i \cap BC;$$
$$\{B_i\} = BQ_i \cap AC;$$
$$\{C_i\} = CQ_i \cap AB, \quad i = 1,2$$



Lemă. Fie $A_1, A_2 \in (BC)$, $B_1, B_2 \in (AC)$, $C_1, C_2 \in (AB)$ conciclice. Atunci:
$AA_1 \cap BB_1 \cap CC_1 \neq \emptyset \Leftrightarrow AA_2 \cap BB_2 \cap CC_2 \neq \emptyset$

Demonstrație.

Scriind puterile punctelor A, B, C față de cercul celor șase puncte date avem (vezi fig. 4.1)

$$AB_2 \cdot AB_1 = AC_2 \cdot AC_1$$
$$BC_1 \cdot BC_2 = BA_2 \cdot BA_1$$
$$CA_1 \cdot CA_2 = CB_1 \cdot CB_2$$

Obținem:

$$\frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} \cdot \frac{AC_1}{C_1B} = \left(\frac{BA_2}{A_2C} \cdot \frac{CB_2}{B_2A} \cdot \frac{AC_2}{C_2B} \right)^{-1}$$

și aplicăm reciproca teoremei lui Ceva.

Q.E.D.

Teoremă. Fie $A_1B_1C_1$ triunghiul pedal asociat punctului $Q\in\mathcal{M}(x, y, z)$ de rang k unde x, y, z > 0 şi k = 0. Notăm:

$$\alpha=\frac{a^2}{x^k\,(y^k+z^k)}\ ;\qquad \beta=\frac{b^2}{y^k\,(x^k+z^k)}\ ;\qquad \gamma=\frac{c^2}{z^k\,(x^k+y^k)}$$

Fie A_2, B_2, C_2 punctele în care C_Q circumscris triunghiului $A_1B_1C_1$ taie a doua oară laturile BC şi respectiv AC şi AB. Dacă $A_2\in(BC)$, $B_2\in(AC)$, $C_2\in(AB)$ atunci:

1. α,β,γ pot fi laturile unui triunghi nedegenerat;

2. punctul $\{Q'\} = AA_2\cap BB_2\cap CC_2$ (care există conform lemei anterioare) satisface relaţia:

$$Q'\sim 1-\left(\frac{1}{-\alpha+\beta+\gamma},\ \frac{1}{\alpha-\beta+\gamma},\ \frac{1}{\alpha+\beta-\gamma}\right)$$

Demonstraţie.

Notăm : $u = BA_2$, $v = CB_2$, $w = AC_2$ (vezi fig. 4.1) . Dacă p_A, p_B, p_C sunt puterile punctelor A, B, C faţă de cercul C_Q atunci:

$$(1)\ \begin{cases} p_B = u\cdot BA_1 = (c-w)\cdot BC_1\\ p_C = v\cdot CB_1 = (a-u)\cdot CA_1\\ p_A = w\cdot AC_1 = (b-v)\cdot AB_1\end{cases} \Rightarrow \quad (2)\ \begin{cases} u+\alpha' w = \alpha' c\\ u\beta'+v = \beta' a\\ v\gamma'+w=\gamma' b\end{cases}$$

unde:

$$\alpha'=\frac{BC_1}{BA_1}=\frac{c}{a}\cdot\left(\frac{x}{z}\right)^k\cdot\frac{y^k+z^k}{y^k+x^k}$$

$$\beta'=\frac{CA_1}{CB_1}=\frac{a}{b}\cdot\left(\frac{y}{x}\right)^k\cdot\frac{z^k+x^k}{z^k+y^k}$$

$$\frac{AB_1}{AC_1}=\frac{b}{c}\cdot\left(\frac{z}{y}\right)^k\cdot\frac{x^k+y^k}{x^k+z^k}$$

Observăm că $\alpha'\beta'\gamma' = 1$. Rezolvând sistemul (2) obţinem:

$$u=\frac{1}{2}[\alpha' c-\alpha'\gamma' b+a]$$

$$v=\frac{1}{2}[\beta' a-\alpha'\beta' c+b]$$

$$w=\frac{1}{2}[\gamma' b-\beta'\gamma' a+c]$$

Mai concret:

$$\frac{a^2y^kz^k(x^k+z^k)(x^k+y^k)-b^2x^kz^k(y^k+x^k)(y^k+z^k)+c^2x^ky^k(z^k+x^k)(z^k+y^k)}{a\,y^kz^k(x^k+z^k)(x^k+y^k)}$$

şi analoagele.

Deci :

$$\frac{BA_2}{AC}=\frac{u}{a-u}=$$

$$=\frac{a^2y^kz^k(x^k+z^k)(x^k+y^k)-b^2x^kz^k(y^k+x^k)(y^k+z^k)+c^2x^ky^k(z^k+x^k)(z^k+y^k)}{a^2y^kz^k(x^k+z^k)(x^k+y^k)+b^2x^kz^k(y^k+x^k)(y^k+z^k)-c^2x^ky^k(z^k+x^k)(z^k+y^k)}=$$

$$=\frac{\dfrac{a^2}{x^k(y^k+z^k)}\quad\dfrac{b^2}{y^k(x^k+z^k)}\quad\dfrac{c^2}{z^k(x^k+y^k)}}{\dfrac{a^2}{x^k(y^k+z^k)}\quad\dfrac{b^2}{y^k(x^k+z^k)}\quad\dfrac{c^2}{z^k(x^k+y^k)}}=\frac{\alpha-\beta+\gamma}{\alpha+\beta-\gamma}.$$

Să observăm că $u = A_2B > 0 \Longrightarrow \alpha + \gamma > \beta$ şi analog $\alpha + \beta > \gamma$ şi $\beta + \gamma > \alpha$, deci α, β, γ sunt laturile unui triunghi nedegenerat. Deci:

$$\frac{BA_2}{A_2C} = \frac{\alpha - \beta + \gamma}{\alpha + \beta - \gamma}.$$

$$\frac{CB_2}{B_2A} = \frac{\alpha + \beta - \gamma}{-\alpha + \beta + \gamma}.$$

$$\frac{AC_2}{C_2B} = \frac{-\alpha + \beta + \gamma}{\alpha - \beta + \gamma}.$$

şi deci :

$$Q' \simeq 1 - \left(\frac{1}{-\alpha + \beta + \gamma}, \frac{1}{\alpha - \beta + \gamma}, \frac{1}{\alpha + \beta - \gamma} \right)$$

Q.E.D.

Concluzie.

Dacă $Q_i \simeq k_i - (x_i, y_i, z_i)$, $i = 1,2$ şi $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ sunt definite, respectiv ca în teorema de mai sus, atunci:

1. dacă $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ sau $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ nu pot fi laturile unui triunghi atunci $C_{Q_1} \neq C_{Q_2}$;

2. dacă C_{Q_i} taie laturile triunghiului ABC doar în interiorul acestora $i = 1,2$ atunci:

$$C_{Q_1} = C_{Q_2} \Longleftrightarrow (x_2, y_2, z_2) \simeq (-\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1, \alpha_1 - \beta_1 + \gamma_1, \alpha_1 + \beta_1 - \gamma_1)$$

şi coeficientul din definiţia relaţiei de echivalenţă (vezi paragraful 1) este : $\alpha = -k_2$

Aplicaţie. Să se arate că mijloacele A_0, B_0, C_0 ale laturilor triunghiului şi picioarele A_1, B_1, C_1 ale înălţimilor unui triunghi ascuţitunghic, sunt şase puncte conciclice.

Demonstraţie.

Se arată uşor că deoarece triunghiul ABC este ascuţitunghic, simetricul A' al lui A_0 faţă de mediatoarea lui B_0C_0 se află în (ED) $\subset$ (BC), unde $E = pr_{BC}C_0$; $D = pr_{BC}B_0$, deci $A' \in C_Q$. De asemenea, $\alpha = \frac{a^2}{2}$, $\beta = \frac{b^2}{2}$, $\gamma = \frac{c^2}{2}$ sunt laturile unui triunghi nedegenerat, deoarece triunghiul ABC este nedegenerat .

Conform teoremei de mai sus:

$$Q' \simeq 1 - \left(\frac{1}{-a^2 + b^2 + c^2}, \frac{1}{a^2 - b^2 + c^2}, \frac{1}{a^2 + b^2 - c^2} \right) \Longrightarrow$$

$$Q' \simeq 1 - \left(\frac{2abc}{-a^2 + b^2 + c^2}, \frac{2abc}{a^2 - b^2 + c^2}, \frac{2abc}{a^2 + b^2 - c^2} \right) \Longrightarrow$$

$$Q' \simeq 1 - \left(\frac{a}{\cos A}, \frac{b}{\cos B}, \frac{c}{\cos C} \right) \qquad Q \simeq 1 - \left(2 \cdot R \frac{\sin A}{\cos A}, 2R \frac{\sin B}{\cos B}, 2R \frac{\sin C}{\cos C} \right)$$

$= Q' \simeq 1 - (\operatorname{tg} A, \operatorname{tg} B, \operatorname{tg} C) \Rightarrow Q' = H$, deci $A' = A_1$, $B' = B_1$, $C' = C_1$.

Pentru rezolvarea completă a problemei studiate, este necesar să se rezolve complet următoarele două probleme:

Problema 1. Dacă $x, y, z > 0$ iar a, b, c sunt laturile unui triunghi, în ce condiţii

$$\frac{a^2}{x(y+z)}, \frac{b^2}{y(x+z)}, \frac{c^2}{z(x+y)}$$

sunt laturile unui triunghi ?

Problema 2. Dacă $Q \simeq k - (x, y, z)$ în ce condiţii avem:

$$C_Q \cap AB \subset (AB);\ C_Q \cap BC \subset (BC);\ C_Q \cap AC \subset (AC)\,?$$

Lema 1. Fie triunghi ABC şi Q un punct oarecare în interiorul său astfel încât $Q \in \mathcal{M}(x, y, z)$ de rang k şi fie $\{A_1\} = AQ \cap BC$, $\{B_1\} = BQ \cap AC$, $\{C_1\} = CQ \cap AB$. Aşadar $Q \simeq k - (x, y, z)$ cu $x, y, z > 0$ şi $k \neq 0$. Au loc relaţiile:

a) $BA_1 = \dfrac{a z^k}{y^k + z^k}$; $A_1C = \dfrac{a y^k}{y^k + z^k}$

b) $AA_1 = \dfrac{\sqrt{b^2 z^{2k} + c^2 y^{2k} + (b^2 + c^2 - a^2) y^k z^k}}{y^k + z^k}$

$$AQ = \frac{\sqrt{b^2 z^{2k} + c^2 y^{2k} + (b^2 + c^2 - a^2) y^k z^k}}{x^k + y^k + z^k}$$

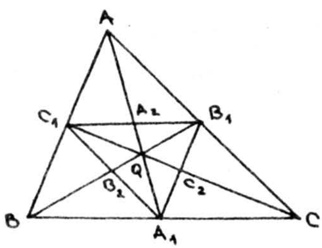
$$QA_1 = \frac{x^k \sqrt{b^2 z^{2k} + c^2 y^{2k} + (b^2 + c^2 - a^2) y^k z^k}}{(y^k + z^k)(x^k + y^k + z^k)}$$

c) Pentru orice punct M din planul triunghiului ABC avem:

(1) $x^k \cdot AM^2 + y^k \cdot BM^2 + z^k \cdot CM^2 = x^k \cdot AQ^2 + y^k \cdot BQ^2 + z^k \cdot CQ^2 + (x^k + y^k + z^k) MQ^2$

(2) $x^k \cdot AQ^2 + y^k \cdot BQ^2 + z^k \cdot CQ^2 = \dfrac{1}{x^k + y^k + z^k}(a^2 y^k z^k + b^2 x^k z^k + c^2 x^k y^k)$

Demonstraţie.



a) Rezultă din faptul că $Q \simeq k - (x, y, z) \xRightarrow{def} \dfrac{BA_1}{A_1C} = \dfrac{z^k}{y^k}$

b) Formula pentru AA_1 se obţine aplicând relaţia lui Stewart :

$$AA_1^2 \cdot BC = AB^2 \cdot A_1C + AC^2 \cdot BA_1 - BA_1 \cdot A_1C \cdot BC$$

şi înlocuind cu formulele de la a) . Celelalte două formule se obţin utilizând relaţia lui Van Aubel:

$$\frac{AQ}{QA_1} = \frac{AB_1}{B_1C} + \frac{AC_1}{C_1B} = \frac{y^k + z^k}{x^k}$$

c) Demonstraţia relaţiei (1) poate fi obţinută urmând procedeul din [1]. Relaţia (2) se obţine utilizând punctul b) .

Q.E.D.

Lema 2. Dacă $\{A_2\} = AA_1 \cap B_1C_1$, $\{B_2\} = BB_1 \cap A_1C_1$, $\{C_2\} = CC_1 \cap A_1B_1$ atunci:

$$\frac{B_1A_2}{A_2C_1} = \frac{x^k + y^k}{x^k + z^k}$$

şi analoagele.

Demonstraţie.

Utilizând teorema sinusurilor avem:

$$A_2B_1 = \frac{\sin \widehat{A_1AC}}{\sin \widehat{AA_2B_1}} \cdot AB_1 ; \; A_2C_1 = \frac{\sin \widehat{A_1AB}}{\sin \widehat{AA_2C_1}} \cdot AC_1$$

Cum $\widehat{AA_2B_1} + \widehat{AA_2C_1} = 180^\circ \Rightarrow \sin \widehat{AA_2B_1} = \sin \widehat{AA_2C_1}$ obţinem:

$$\frac{B_1A_2}{A_2C_1} = \frac{\sin \widehat{A_1AC}}{\sin \widehat{BAA_1}} \cdot \frac{AB_1}{AC_1}$$

Dar : $\sin \widehat{A_1AB} = \frac{BA_1}{c} \cdot \sin \widehat{AA_1B}$; $\sin \widehat{CAA_1} = \frac{A_1C}{b} \cdot \sin \widehat{AA_1C}$.

Deoarece $\sin \widehat{AA_1B} = \sin \widehat{AA_1C}$ obţinem:

$$\frac{B_1A_2}{A_2C_1} = \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{c}{b} \cdot \frac{AB_1}{AC_1} \overset{\textit{lema 1.}}{=} \frac{a\,y^k}{y^k + z^k} \cdot \frac{y^k + z^k}{a\,z^k} \cdot \frac{c}{b} \cdot \frac{b\,z^k}{x^k + z^k} \cdot \frac{x^k + y^k}{c\,y^k} = \frac{x^k + y^k}{x^k + z^k}$$

Q.E.D.

Consecinţa 1. Dacă $Q_{\Delta ABC} \approx k - (x, y, z)$ atunci $Q_{\Delta A_1B_1C_1} \approx 1 - (y^k + z^k, x^k + z^k, y^k + x^k)$

unde $Q_{\Delta \alpha\beta\gamma} \approx k - (x, y, z)$ semnifică faptul că Q este un punct de tip $\mathcal{M}(x, y, z)$ de rang k în triunghiul $\alpha\beta\gamma$.

Propoziţia 1. Dacă $\sigma_Q \overset{not}{=}$ aria triunghiului pedal $A_1B_1'C_1$ asociat lui Q iar $S \overset{not}{=}$ aria triunghiului ABC atunci, în ipoteza $Q \approx k - (x, y, z)$, avem:

$$\sigma_Q = \frac{2(xyz)^k}{(x^k + y^k)(y^k + z^k)(z^k + x^k)} \cdot S$$

Demonstraţie .

Avem: $\sigma_Q = S - \sigma[A_1BC_1] - \sigma[C_1AB_1] - \sigma[B_1CA_1] =$

$$= S - \frac{BA \cdot BC \sin B + AC \cdot AB \sin A + B\ C \cdot CA \sin C}{2}$$

Din lema 1 obţinem :

$$S - \frac{1}{2}\sum \frac{a\,z^k}{y^k + z^k} \cdot \frac{c\,x^k}{x^k + y^k} \cdot \sin B = S - \sum \frac{a\,c\,\sin B}{2} \cdot \frac{x^k z^k (x^k + z^k)}{\prod (x^k + y^k)} =$$

$$= S \cdot \left[1 - \frac{\sum x^k z^k (x^k + z^k)}{(x^k + y^k)(y^k + z^k)(z^k + x^k)}\right] = \frac{2(xyz)^k}{(x^k + y^k)(y^k + z^k)(z^k + x^k)} \cdot S$$

Q.E.D.

Teoremă. Fie $Q \in \text{Int}\,\Delta ABC$. Dacă $A_0 = A$, $B_0 = B$, $C_0 = C$ şi $\{A_n\} = A_{n-1}Q \cap B_{n-1}C_{n-1}$ $\{B_n\} = B_{n-1}Q \cap A_{n-1}C_{n-1}$, $\{C_n\} = C_{n-1}Q \cap A_{n-1}B_{n-1}$ şi avem:

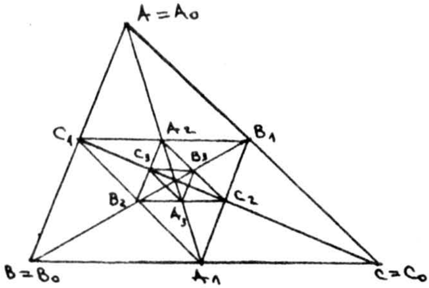
$$Q_{\Delta A_nB_nC_n} \approx k - (x'_n, y'_n, z'_n), \qquad \forall n \geq 0$$

atunci : $\forall n \; \exists (x_n, y_n, z_n) \sim (x'_n, y'_n, z'_n)$ a.î. $Q_{\Delta A_nB_nC_n} \approx 1 - (x_n, y_n, z_n)$ şi:

1. $\lim\limits_{n \to \infty} x_n$, $\lim\limits_{n \to \infty} y_n$, $\lim\limits_{n \to \infty} z_n$ există şi în plus $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \lim\limits_{n \to \infty} y_n = \lim\limits_{n \to \infty} z_n$.
2. Dacă $\sigma_n \overset{not}{=}$ aria triunghiului $A_nB_nC_n$, $n \geq 0$ avem : $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{\sigma_{n+1}}{\sigma_n} = \frac{1}{4}$

Demonstraţie.

1. Fie $Q \in \text{Int}\,\Delta ABC$, $Q \approx k - (x, y, z)$



Conform consecinţei 1 avem: $Q_{\Delta A_1B_1C_1} \approx 1 - (y^k + z^k,\ x^k + z^k,\ x^k + y^k)$.
Putem deci scrie: $Q \approx 1 - (x^k, y^k, z^k)$

$Q_{\Delta A_1B_1C_1} \approx 1 - (x_1, y_1, z_1)$

cu : $x_1 = \frac{y_0 + z_0}{2}$, $y = \frac{x_0 + z_0}{2}$, $z = \frac{x_0 + y_0}{2}$ unde : $x_0 \overset{not}{=\!=\!=} x$, $y_0 \overset{not}{=\!=\!=} y$, $z_0 \overset{not}{=\!=\!=} z$.

În general, dacă $Q_{\Delta A_nB_nC_n} \approx 1 - (x_n, y_n, z_n)$ atunci, conform consecinţei 1, avem:

$Q_{\Delta A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}} \approx 1 - (y_n + z_n,\ x_n + z_n,\ z_n + x_n) \Longleftrightarrow Q_{\Delta A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}} \approx 1 - \left(\frac{y_n + z_n}{2}, \frac{x_n + z_n}{2}, \frac{x_n + y_n}{2}\right)$

şi luăm : $x_{n+1} = \frac{y_n + z_n}{2}$, $y_{n+1} = \frac{x_n + z_n}{2}$, $z_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$

Acest mic artificiu este util deoarece se ştie că şirurile $(x_n)_n$, $(y_n)_n$, $(z_n)_n$ cu $x_0, y_0, z_0 \in R$ care satisfac relaţiile de recurenţă (3) , sunt convergente şi au limita comună $\frac{x_0 + y_0 + z_0}{3}$ (rezultatul aparţine lui Eugen Onofraş.)

Obţinem în final că $k_n = 1$ şi $\exists \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} z_n$

2. Deci $Q \approx 1 - (x_n, y_n, z_n)$, $\forall\, n \in N$.
Conform propoziţiei 1 avem:

$$\sigma_{n+1} = \frac{2x_ny_nz_n}{(x_n + y_n)(y_n + z_n)(z_n + x_n)} \cdot \sigma_n$$

Obţinem, ţinând cont de (3):

$$\frac{\sigma_{n+1}}{\sigma_n} = \frac{2x_ny_nz_n}{8x_{n+1}y_{n+1}z_{n+1}} \Longrightarrow \frac{\sigma_{n+1}}{\sigma_n} = \frac{1}{4} \cdot \frac{x_n}{x_{n+1}} \cdot \frac{y_n}{y_{n+1}} \cdot \frac{z_n}{z_{n+1}}$$

Dar: $k \neq 0$ şi $x, y, z > 0 \Rightarrow x^k, y^k, z^k > 0 \Leftrightarrow x_0, y_0, z_0 > 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} z_n = \frac{x_0 + y_0 + z_0}{3} > 0$
Mai mult $x_n, y_n, z_n > 0\ \ \forall n$.
Deci $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{x_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \frac{1}{\lim_{n\to\infty} x_{n+1}} = 1$ şi analoagele.

Trecând la limită în (4) obţinem: $\lim_{n\to\infty} \frac{\sigma_{n+1}}{\sigma_n} = \frac{1}{4}$.

Q.E.D.

Observaţie. O formulare mai sugestivă a punctului 2 al teoremei de mai sus este următoarea : dacă $Q \in \text{Int}\ \Delta ABC$, $\sigma_n(Q) \overset{not}{=\!=\!=}$ aria triunghiului obţinut ca mai sus: $(\{A_{n+1}\} = A_nQ \cap B_nC_n$ etc.) . Atunci :

$$\forall\, Q \in \text{Int}\ \Delta ABC,\ \lim_{n\to\infty} \frac{\sigma_{n+1}(Q)}{\sigma_n(Q)} = \frac{1}{4}\ .$$

APLICAȚII.

1. Fie $A_n(Q)$, $B_n(Q)$, $C_n(Q)$ vârfurile triunghiului obținut ca în teoremă: $A_0(Q) = A$, $B_0(Q) = B$, $C_0(Q) = C$, $A_{n+1}(Q) = A_n(Q)Q \cap B_n(Q)C_n(Q)$ etc. atunci:

[$Q = G \overset{not}{=\!=\!=}$ centrul de greutate al triunghiului ABC]<=> [$\exists\, n \in N$ a.î. $Q =$ centrul de greutate al triunghiului $A_n(Q)B_n(Q)C_n(Q)$]<=> [$\forall\, n \in N$ avem $Q =$ centru de greutate în triunghiul $A_n(Q)B_n(Q)C_n(Q)$].

Demonstrație.

E suficient să arătăm că :

[$\exists\, n_0 \in N$ a.î. $Q =$ centru de greutate în $A_{n_0}(Q)B_{n_0}(Q)C_{n_0}(Q)$]<=> [$\forall\, n \in N$ avem: $Q =$ centru de greutate în $\Delta A_n(Q)B_n(Q)C_n(Q)$].

Din ipoteză avem: $x_{n_0} = y_{n_0} = z_{n_0}$. Utilizând relațiile de recurență: $x_{n+1} = \frac{y_n + z_n}{2}$ etc. obținem imediat, prin inducție, că $\forall\, n \geq n_0$: $x_n = y_n = z_n$ și apoi că $\forall\, n \leq n_0$: $x_n = y_n = z_n$. Deci $\forall\, n \in N$: $x_n = y_n = z_n$ <=> $Q =$ baricentru în $\Delta A_n(Q)B_n(Q)C_n(Q)$.

Q.E.D.

2. [$Q =$ centrul cercului înscris în $\Delta A_1B_1C_1$]<=> [$Q = H =$ ortocentru în ΔABC].

Demonstrație.

" $\Longleftarrow$ " Este evidentă.

" $\Longrightarrow$ " Fie $Q \sim 1 - (x, y, z)$ a.î. Q este centrul cercului înscris în $\Delta A_1B_1C_1$. Cum $Q \underset{\Delta A_1B_1C_1}{\approx} 1 - (y + z, x + z, x + y)$ și $Q \underset{\Delta A_1B_1C_1}{\approx} 1 - (B_1C_1, A_1C_1, A_1C_1, A_1B_1)$ avem,

modulo o constantă :

$$y + z = B_1C_1 = \frac{E_x}{(x+y)(x+z)}$$

$$x + z = A\ C = \frac{E_y}{(y+x)(y+z)}$$

$$x + y = A\ B = \frac{E_z}{(z+x)(z+y)}$$

(vezi lema 2) de unde rezultă: $(x + y)(x + z)(y + z) = E_x = E_y = E_z$ =>

=> $2(b^2 + c^2)x + 2b^2y + 2c^2z = 2a^2x + 2(a^2 + c^2)y + 2c^2z = 2a^2x + 2b^2y + 2(a^2 + b^2)z$ =>

=> $(b^2 + c^2 - a^2)x = (a^2 + c^2 - b^2)y = (a^2 + b^2 - c^2)z \quad \Big| \frac{1}{2abc}$ =>

$$\frac{\cos A}{a} \cdot x = \frac{\cos B}{b} y = \frac{\cos C}{c} z \Rightarrow \frac{x}{\operatorname{tg} A} = \frac{y}{\operatorname{tg} B} = \frac{z}{\operatorname{tg} C} \overset{not}{=\!=} \lambda$$

Deci: $Q \approx 1 - (x, y, z) \Rightarrow Q \approx 1 - (\lambda \operatorname{tg} A, \lambda \operatorname{tg} B, \lambda \operatorname{tg} C) \Rightarrow Q \approx 1 - (\operatorname{tg} A, \operatorname{tg} B, \operatorname{tg} C)$

=> $Q = H$

Q.E.D.

3. Dacă ω este centrul cercului lui Euler, atunci : [ω = centrul cercului înscris în triunghiul pedal corespunzător]<=> [ΔABC este echilateral] .

Demonstrație.

" $\Longrightarrow$ " Din exercițiul anterior obținem: $\omega = H$. Dar ω este mijlocul lui OH și deci obținem : $H = \omega = G = O$, iar $H = G \Rightarrow \Delta ABC$ = echilateral.

" $\Longleftarrow$ " Evident.

Q.E.D.

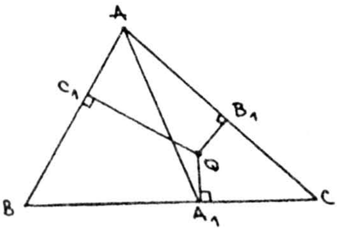
4. (D. M. Bătineţu , " Şiruri " , problema 2.43 pg. 219).
" Se consideră şirul de triunghiuri $(t_n)_{n\in N}$ unde t_0 = ABC şi unde $t_n = A_nB_nC_n$ se obţine din $t_{n-1} = A_{n-1}B_{n-1}C_{n-1}$ în felul următor: A_n este intersecţia bisectoarelor exterioare ale unghiurilor B_{n-1} şi C_{n-1}, B_n este intersecţia bisectoarelor exterioare ale unghiurilor C_{n-1} şi A_{n-1}, iar C_n este intersecţia bisectoarelor exterioare ale unghiurilor A_{n-1} şi B_{n-1}. Să se exprime unghiurile A_n, B_n, C_n respectiv în funcţie de A, B, C . " Să se arate că : [$\exists$ n $\in$ N a.î. $\Delta A_nB_nC_n$ = echilateral] <=> [$\forall$ n $\in$ N avem $\Delta A_nB_nC_n$ = echilateral] <=> [Δ ABC = echilateral].

4.3. PROBLEME DE CONCURENŢĂ.

Teoremă. Fie Q $\in$ Int ΔABC iar A_1, B_1, C_1, sunt proiecţiile lui Q pe laturi. Dacă $Q \approx k - (x, y, z)$ atunci: $AA_1 \cap BB_1 \cap CC_1 \neq \emptyset \Leftrightarrow$

$$\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ x^{2k} & y^{2k} & z^{2k} \\ a x^k(\cos A - \cos B\cos C) & b y^k(\cos B - \cos A\cos C) & c z^k(\cos C - \cos B\cos A) \end{vmatrix} = 0$$

Demonstraţie.



Din lema 1.4 rezultă :

$$d_a \overset{not}{=} QA_1 = \frac{x^k}{\sum x^k}\cdot\frac{2S}{a};\quad d_b = \frac{y^k}{\sum y^k}\cdot\frac{2S}{b};\quad d_c = \frac{z^k}{\sum z^k}\cdot\frac{2S}{c}$$

şi din lema 1 din paragraful 4.2 avem :

$$AQ = \frac{\sqrt{b^2z^{2k} + c^2y^{2k} + (b^2+c^2-a^2)y^kz^k}}{\sum x^k}$$ şi analoagele.

Deci :

$$BA_1^2 = BQ^2 - QA_1^2 = \frac{1}{(\sum x^k)^2}\left[c^2x^{2k} + a^2z^{2k} + (c^2+a^2-b^2)x^kz^k - \frac{4S^2}{a^2}x^{2k}\right] =$$

$$= \frac{1}{(\sum x^k)^2}\left[\left(c^2 - \frac{4S^2}{a^2}\right)x^{2k} + a^2z^{2k} + (c^2+a^2-b^2)x^kz^k\right]$$

Dar : $c^2 + a^2 - b^2 = 2\,ac\cos B$;

$c^2 - \frac{4S^2}{a^2} = c^2 - \frac{a^2c^2\sin^2 B}{a^2} = c^2(1 - \sin^2 B) = c^2\cos^2 B$. Rezultă:

$$BA_1^2 = \frac{1}{(\sum x^k)^2}\left[c^2\cos^2 B\, x^{2k} + a^2z^{2k} + 2ac\cos B\, x^kz^k\right] = \frac{1}{(\sum x^k)^2}\left[c\cos B\, x^k + a z^k\right]^2 \Rightarrow$$

$$(1)\qquad BA_1 = \frac{c\cos B\, x^k + a z^k}{x^k + y^k + z^k}$$

Analog:

(2) $$CA_1 = \frac{b\cos C\, y^k + a\, z^k}{x^k + y^k + z^k}$$

Deci :

(3) $$\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{c\cos B\, x^k + a\, z^k}{b\cos C\, y^k + a\, z^k}$$

Analog deducem:

$$\frac{CB_1}{B_1A} = \frac{a\cos C\, y^k + b\, x^k}{c\cos A\, z^k + b\, x^k}$$

$$\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{b\cos A\, z^k + c\, y^k}{a\cos B\, x^k + c\, y^k}$$

Conform reciprocei teoremei lui Ceva avem :

$$AA_1 \cap BB_1 \cap CC_1 \neq \emptyset \Leftrightarrow 1 = \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} \cdot \frac{AC_1}{C_1B} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (c\cos B\, x^k + a\, z^k)(a\cos C\, y^k + b\, x^k)(b\cos A\, z^k + c\, y^k) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (b\cos C\, y^k + a\, z^k)(\cos A\, z^k + + b\, x^k)(a\cos B\, x^k + c\, y^k) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a\, c^2 \cos B \cos C\, x^k y^{2k} + b^2 c \cos B \cos A\, x^{2k} z^k + b\, c^2 \cos B\, x^{2k} y^k + a^2 b \cos C \cos A\, z^{2k} y^k +$$
$$+ a^2 c \cos C\, z^k y^{2k} + a\, b^2 \cos A\, z^{2k} x^k = b\, c^2 \cos A \cos C\, x^{2k} y^k + b^2 a \cos C \cos B\, x^k z^{2k} +$$
$$+ b^2 c \cos C\, x^{2k} z^k + a^2 c \cos A \cos B\, y^{2k} z^k + a\, c^2 \cos A\, y^{2k} x^k + a^2 b \cos B\, y^k z^{2k} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad a\, c^2 (\cos B \cos C - \cos A)\, x^k y^{2k} + b\, c^2 (\cos B - \cos A \cos C)\, x^{2k} y^k +$$
$$+ b^2 c (\cos B \cos A - \cos C)\, x^{2k} z^k + a\, b^2 (\cos A - \cos B \cos C)\, x^k z^{2k} +$$
$$+ a^2 b (\cos C \cos A - \cos B)\, y^k z^{2k} + a^2 c (\cos C - \cos A \cos B)\, y^{2k} z^k = 0 \Leftrightarrow$$

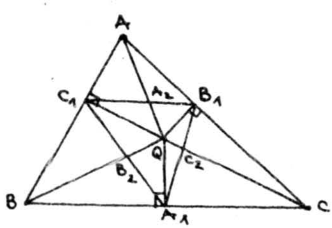
$$\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ x^{2k} & y^{2k} & z^{2k} \\ a\, x^k (\cos A - \cos B \cos C) & b\, y^k (\cos B - \cos C \cos A) & c\, z^k (\cos C - \cos A \cos B) \end{vmatrix} = 0$$

Q.E.D.

Propoziție. Fie $Q \in$ Int ΔABC și A_1, B_1, C_1 proiecțiile lui Q pe laturi . Fie $\{A_2\} = AQ \cap B_1C_1$, $\{B_2\} = BQ \cap A_1C_1$, $\{C_2\} = CQ \cap A_1B_1$. Atunci :

$$A_1A_2 \cap B_1B_2 \cap C_1C_2 \neq \emptyset \Leftrightarrow AA_1 \cap BB_1 \cap CC_1 \neq \emptyset$$

Demonstrație.



Din teorema sinusurilor aplicată în ΔAB_1A_2 și în ΔAC_1A_2 obținem:

$$\frac{B_1A_2}{A_2C_1} \quad \frac{\sin \widehat{QAB}}{\sin \widehat{QAC}} \cdot \frac{AB_1}{AC_1}$$

Dar:

$$\sin \widehat{QAB_1} = \frac{QB_1}{AQ} = \frac{d_b}{AQ} \quad , \quad \sin \widehat{QAC_1} = \frac{d_c}{AQ}$$

Deci :

$$\frac{B_1A_2}{A_2C_1} = \frac{d_b}{d_c} \cdot \frac{AB_1}{AC_1}$$

Obținem în final:

$$\frac{B_1A_2}{A_2C_1}\cdot\frac{C_1B_2}{B_2A_1}\cdot\frac{A_1C_2}{C_2B_1}=\frac{d_b}{d_a}\cdot\frac{d_c}{d_a}\cdot\frac{d_a}{d_b}\cdot\frac{AB_1}{AC_1}\cdot\frac{C_1B}{BA_1}\cdot\frac{A_1C}{CB_1}=\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC_1}{C_1A}$$

și aplicăm reciproca teoremei lui Ceva.

Q.E.D.

Consecința 1. Dacă $Q \approx k - (x, y, z)$ atunci, cu notațiile din propoziția anterioară, avem:

$$A_1A_2 \cap B_1B_2 \cap C_1C_2 \neq \emptyset \Leftrightarrow AA_1 \cap BB_1 \cap CC_1 \neq \emptyset \Longleftrightarrow$$

$$\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ x^{2k} & y^{2k} & z^{2k} \\ a\,x^k(\cos A - \cos B \cos C) & b\,y^k(\cos B - \cos C \cos A) & c\,z^k(\cos C - \cos A \cos B) \end{vmatrix} = 0$$

Consecința 2. Dacă $Q \approx k - (x, y, z)$ iar $\{Q'\} = AA_1 \cap BB_1 \cap CC_1$, unde A_1, B_1, C_1 sunt proiecțiile lui Q pe laturi, atunci:

$$Q' \approx 1 - \left(\frac{a \cos B\, x^k + c\, y^k}{b \cos A\, z^k + c\, y^k}, 1, \frac{c \cos B\, x^k + a\, z^k}{b \cos C\, y^k + a\, z^k}\right)$$

Demonstrație.

Relația (7) din paragraful 1 ne asigură că, în condiția $\emptyset \neq AA_1 \cap BB_1 \cap CC_1 = \{Q'\}$, avem

$$(6) \qquad Q' \approx 1 - \left(\frac{BC_1}{C_1A}, 1, \frac{BA_1}{A_1C}\right)$$

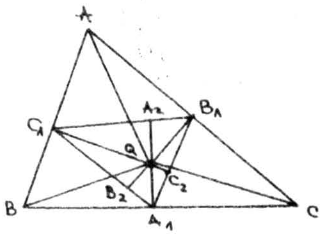
Înlocuind (5) și (3) în (6) obținem concluzia.

Q.E.D.

Lemă. Dacă $Q \approx k - (x, y, z)$ în ΔABC iar $A_1B_1C_1$ este triunghiul podar asociat lui Q, atunci: $Q \underset{\Delta A_1B_1C_1}{\approx} 1 - (a^2x^{-k}, b^2y^{-k}, c^2z^{-k})$.

Demonstrație.

Fie $\{A_2\} = A_1Q \cap C_1B_1$ iar B_2, C_2 analoagele (vezi fig. de mai jos)



Utilizând teorema sinusurilor, obținem:

$$\frac{B_1A_2}{A_2C_1}=\frac{B_1A_1}{A_1C_1}\cdot\frac{\sin \widehat{A_2A_1B_1}}{\sin \widehat{A_2A_1C_1}}$$

Dar patrulaterele BA_1QC_1 și CB_1QA_1 sunt inscriptibile, deci:

$$\sin \widehat{A_2A_1B_1} = \sin \widehat{QCB_1} = \frac{QB_1}{QC}$$

$$\sin \widehat{A_2A_1C_1} = \sin \widehat{QBC_1} = \frac{QC_1}{QB}$$

Deci

$$\frac{B_1A_2}{A_2C_1}=\frac{B_1A_1}{QC}\cdot\frac{QB}{A_1C_1}\cdot\frac{QB_1}{QC_1}=\frac{\sin C}{\sin B}\cdot\frac{y^k}{\sum x^k}\cdot\frac{2S}{b}\cdot\frac{\sum x^k}{z^k}\cdot\frac{c}{2S}=\frac{c^2z^{-k}}{b^2y^{-k}}$$

Analog:

$$\frac{CB_2}{B_2A_1}=\frac{a^2x^{-k}}{c^2z^{-k}} \text{ și } \frac{AC_2}{C_2B_1}=\frac{b^2y^{-k}}{a^2x^{-k}}$$

Rezultă:

$$Q \underset{\Delta A_1B_1C_1}{\approx} 1 - (a^2x^{-k}, b^2y^{-k}, c^2z^{-k})$$

Q.E.D.

APLICAŢII.

1. Dreptele care unesc vârfurile unui triunghi cu punctele de tangenţă ale cercului înscris cu laturile triunghiului sunt concurente (în punctul Γ lui Gergonne).

Demonstraţie.

Considerăm Q = I ≈ 1 - (a, b, c)

$$\Delta \stackrel{not}{=} \begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ x^{2k} & y^{2k} & z^{2k} \\ a x^k(\cos A - \cos B \cos C) & b y^k(\cos B - \cos C \cos A) & c z^k(\cos C - \cos A \cos B) \end{vmatrix} \xrightarrow[z=c;\ k=1]{x=a;\ y=b} 0$$

(primele două linii coincid). Din teoremă rezultă concluzia.

Q.E.D.

2. Propoziţie. Fie $Q \in$ Int $\triangle ABC$ şi A_1, B_1, C_1 proiecţiile sale pe laturi. Dacă triunghiul ABC este echilateral , atunci: $AA_1 \cap BB_1 \cap CC_1 \neq \emptyset \Leftrightarrow$ Q se află pe una din înălţimile triunghiului.

Demonstraţie .

Dacă Q ≈ k - (x, y, z) cu k = 0 şi x, y, z > 0 , obţinem:

$$AA_1 \cap BB_1 \cap CC_1 \neq \emptyset \Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x^{2k} & y^{2k} & z^{2k} \\ x^k & y^k & z^k \end{vmatrix} = 0 \underset{k\neq 0}{\Leftrightarrow} (z^k - x^k) (z^k - y^k) (y^k - z^k) = 0$$

$\underset{k\neq 0}{\Longleftrightarrow}$ z = x sau z = y sau y = x.

Q.E.D.

3. Dacă A_1, B_1, C_1 sunt proiecţiile centrului de greutate G pe laturile triunghiului ABC, atunci: $AA_1 \cap BB_1 \cap CC_1 \neq \emptyset \Longleftrightarrow \triangle$ ABC este isoscel.

Demonstraţie.

Conform teoremei avem (G ≈ 1 - (1, 1, 1)) : $AA_1 \cap BB_1 \cap CC_1 \neq \emptyset \Longleftrightarrow$

$$\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ 1 & 1 & 1 \\ a(\cos A - \cos B \cos C) & b(\cos B - \cos A \cos C) & c(\cos C - \cos B \cos A) \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \sin A & (\sin B - \sin A)(\sin B + \sin A) & (\sin C - \sin A)(\sin C + \sin A) \\ a(\cos A - \cos B \cos C) & \sin 2B - \sin 2A + \cos C \cdot (\sin A \cos B - \sin B \cos A) & \sin 2C + \sin 2A + \cos B \cdot (\sin A \cos C - \sin C \cos A) \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} \sin(B - A)\sin C & \sin(C - A)\sin B \\ \sin(B - A)(\cos C - \sin C) & \sin(C - A)(\cos B - \sin B) \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin(B - A)\sin(C - A) \begin{vmatrix} \sin C & \sin B \\ \cos C & \cos B \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \sin(B - A)\sin(C - A)\sin(A - B) = 0 \Longleftrightarrow \hat{A} = \hat{B}$ sau $\hat{B} = \hat{C}$ sau $\hat{C} = \hat{A} \Longleftrightarrow \triangle ABC$ = isoscel

Q.E.D.

4. Dacă A_1, B_1, C_1 sunt proiecțiile punctului Lemoine K pe laturile triunghiului ABC, atunci: $AA_1 \cap BB_1 \cap CC_1 \neq \emptyset \Longleftrightarrow \Delta ABC$ = isoscel.

Demonstrație.

Analog ca mai sus ($K \approx 2 - (a, b, c)$) : $AA_1 \cap BB_1 \cap CC_1 \neq \emptyset \Longleftrightarrow$

$$\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 \\ a^3(\cos A - \cos B \cos C) & b^3(\cos B - \cos A \cos C) & c^3(\cos C - \cos A \cos B) \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sin^2 A & \sin^2 B & \sin C \\ \frac{1}{2}\sin 2A - \sin A \cos B \cos C & \frac{1}{2}\sin 2B - \sin B \cos A \cos C & \frac{1}{2}\sin 2C - \sin C \cos A \cos B \end{vmatrix} = 0$$

$== \sin(B - A)\sin(C - A)\sin(B - C) = 0 \Longleftrightarrow \Delta ABC$ = isoscel.

Q.E.D.

5. Fie $\mathcal{A}$ mulțimea punctelor din interiorul triunghiului ABC cu proprietatea că dreptele care unesc vârfurile triunghiului ABC cu proiecțiile punctelor pe laturile triunghiului sunt respectiv concurente. Deci:

$\mathcal{A} = \{Q \in \text{Int } \Delta ABC \mid AA_1 \cap BB_1 \cap CC_1 \neq \emptyset,\ A_1 = pr_{BC}Q,\ B_1 = pr_{AC}Q,\ C_1 = pr_{AB}Q\}$, și

notăm $AA_1 \cap BB_1 \cap CC_1 = \{Q'\}$. Atunci: [$\exists Q \in \mathcal{A}$ a.î. Q' = centru de greutate în triunghiul

podar al lui Q] $\Longleftrightarrow$ [$H' \in \mathcal{A}$], unde $H' \overset{not}{===}$ izotomicul ortocentrului H. În plus: card $\mathcal{A}_1 < 1$, unde: $\mathcal{A}_1 = \{Q \in \mathcal{A} \mid Q'$ = centru de greutate în triunghiul podar asociat lui $Q\}$.

Demonstrație.

Fie $Q \in \mathcal{A}$. Avem, din consecința 2 și lema 1.2 :

[Q' = centru de greutate în triunghiul podar asociat lui Q] $\Longleftrightarrow$

$$\begin{cases} a \cos B\, x^k + c\, y^k = b \cos A\, z^k + c\, y^k \\ c \cos B\, x^k + a\, z^k = b \cos C\, y^k + a\, z^k \end{cases} \Longleftrightarrow \frac{a x^k}{\cos A} \quad \frac{b y^k}{\cos B} \quad \frac{c z^k}{\cos C} \Longleftrightarrow$$

$\Longleftrightarrow \text{tg } A \cdot x^k = \text{tg } B \cdot y^k = \text{tg } C \cdot z^k \overset{not}{===} \lambda$. Deci: $x = \lambda^k \cdot \left(\frac{1}{\text{tg} A}\right)^k$ etc.

$Q \approx k - (x, y, z) \Longleftrightarrow Q \approx k - (\lambda^k (\text{tg } A)^{-k}, \lambda^k \cdot (\text{tg } B)^{-k}, \lambda^k (\text{tg } C)^{-k}) \overset{k=1}{\Longleftrightarrow}$

$\Longleftrightarrow Q \approx (-1) - (\text{tg } A, \text{tg } B, \text{tg } C) \Longleftrightarrow Q = H'$. Cum $Q \in \mathcal{A} \Longleftrightarrow Q = H'$ evident:

$\mathcal{A} \subseteq \{H'\} ==$ card $\mathcal{A} \leq 1$.

Q.E.D.

6. Fie $Q \in \text{Int } \Delta ABC$ iar $A_1B_1C_1$ triunghiul său podar. Atunci: [Q = centru de greutate în $\Delta A_1B_1C_1$] $\Longleftrightarrow$ Q = K (punctul lui Lemoine) .

Demonstrație.

Dacă $Q \approx k - (x, y, z)$ atunci conform lemei precedente din acest paragraf , avem:

$$Q \underset{\Delta A_1B_1C_1}{\approx} 1 - (a^2 x^{-k}, b^2 y^{-k}, c^2 z^{-k}).$$

Deci : Q = centru de greutate în $\Delta A_1B_1C_1 \Longleftrightarrow a^2 x^{-k} = b^2 y^{-k} = c^2 z^{-k} \overset{not}{===} \lambda \neq 0 \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow x^k = \frac{a^2}{\lambda}$; $y^k = \frac{b^2}{\lambda}$; $z^k = \frac{c^2}{\lambda}$. Avem în continuare :

$Q \approx k - (x, y, z) \Longleftrightarrow Q \approx 1 - (x^k, y^k, z^k) \Longleftrightarrow Q \approx 1 - (\frac{a^2}{\lambda}, \frac{b^2}{\lambda}, \frac{c^2}{\lambda}) \Longleftrightarrow$

$== Q \approx 1 - (a^2, b^2, c^2) \Longleftrightarrow Q \approx 2 - (a, b, c) \Longleftrightarrow Q = K$.

Q.E.D.

În cele ce urmează ne referim la următoarea problemă:
Fie M un punct în interiorul triunghiului ascuţitunghic ABC şi fie

$$x_M \stackrel{not}{===} d(M, BC),$$

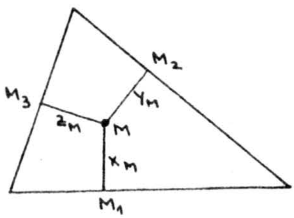
$$y_M \stackrel{not}{===} d(M, AC),$$

$$z_M \stackrel{not}{===} d(M, AB).$$

Definim funcţia :

$$S : R^4 \times \text{Int } \Delta ABC \rightarrow R,\ S(\alpha, \beta, \gamma, n, M) = \alpha x_M^n + \beta y_M^n + \gamma z_M^n$$

Să se studieze existenţa punctelor de extremum şi natura acestora pentru α, β, γ, $n \in R$ fixate iar M variind în interiorul triunghiului ABC.



Să trecem (sumar) în revistă câteva situaţii particulare ale parametrilor α, β, γ, n situaţii prezentate dealtfel sub formă de probleme sau note în Gazeta Matematică:

1. Dacă $AB \equiv BC \equiv CA$ şi $\alpha = \beta = \gamma = n = 1$ atunci:

   $S(1, 1, 1, 1, M) = x_M + y_M + z_M =$ constant (= h)

2. Dacă $\alpha = a$, $\beta = b$, $\gamma = c$, $n = 1$ atunci:

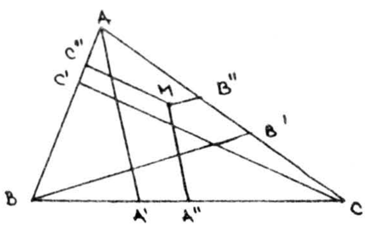
   $S(a, b, c, 1, M) = \sigma[ABC] =$ constant

3. (Ioan Tomescu , 9539, G.M. 4/ 1969) Dacă $\alpha = \beta = \gamma = 1$ atunci:

   $\min\{h_a, h_b, h_c\} \leqslant S(1, 1, 1, 1, M) \leqslant \max\{h_a, h_b, h_c\}$

4. (Florin Pârvulescu, apud [10], pg. 221 - 223).

Fie AA′, BB′, CC′, ceviane oarecare în triunghiul ABC. Fie $M \in \text{Int } \Delta ABC$ şi $MA'' \parallel AA'$, $MB'' \parallel BB'$, $MC'' \parallel CC'$ cu $A'' \in (BC)$, $B'' \in (AC)$, $C'' \in (AB)$.



Atunci :

$$\min\{AA', BB', CC'\} \leqslant MA'' + MB'' + MC'' \leqslant \max\{AA', BB', CC'\}$$

5. $S(1,1,1,2,M) = x_M^2 + y_M^2 + z_M^2$ are ca punct de minim punctul K al lui Lemoine (vezi de exemplu [9]).

Lema 1. Fie $f : \mathrm{Int}\triangle ABC \to R^3$, $f(M) = (x_M, y_M, z_M)$. Atunci:
f este injectivă dar nu este surjectivă .

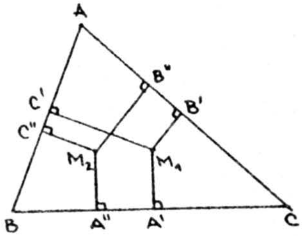
Demonstrație.

Fie $M_1, M_2 \in \mathrm{Int}\triangle ABC$.

$$f(M_1) = f(M_2) \Longleftrightarrow (x_{M_1}, y_{M_1}, z_{M_1}) = (x_{M_2}, y_{M_2}, z_{M_2}) \Longleftrightarrow$$

$x_{M_1} = x_{M_2}$, $y_{M_1} = y_{M_2}$, $z_{M_1} = z_{M_2}$

$$\left.\begin{array}{l} x_{M_1} = x_{M_2} \Longleftrightarrow M_1M_2 \parallel BC \\ y_{M_1} = y_{M_2} \Longleftrightarrow M_1M_2 \parallel AC \\ \text{presupunem } M_1 \neq M_2 \end{array}\right\} \Longrightarrow BC \parallel AC \text{, absurd.}$$



Deci $M_1 = M_2 \Longrightarrow f =$ injectivă.

Evident că f nu este surjectivă. De exemplu, pentru $(h_a + 1, h_b, h_c)$ nu există $M \in \mathrm{Int}\triangle ABC$ a.î. $x_M = h_a + 1$, $y_M = h$, $z_M = h$.

Q.E.D.

Lema 2. O condiție necesară pentru existența unui punct de extremum este ca :

$$\mathrm{sgn}\,\alpha = \mathrm{sgn}\,\beta = \mathrm{sgn}\,\gamma$$

Demonstrație.

Utilizăm metoda multiplicatorilor Lagrange ([4] pg. 682) .

Fie $\varphi : (R_+^*)^3 \to R$, $\varphi(x, y, z) = ax + by + cz - 2\sigma[ABC]$

$u : R_+^* \to R$, $u(x, y, z) = \alpha x^n + \beta y^n + \gamma z^n + \lambda\cdot\varphi(x, y, z)$

Dacă există un punct de extremum, atunci:

$$\varphi(x, y, z) = 0$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y, z) = 0$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y, z) = 0 \quad .$$
$$\frac{\partial u}{\partial z}(x, y, z) = 0$$

Rezultă:

$$\begin{cases} ax + by + cz = 2\sigma[ABC] \\ \alpha n x^{n-1} + \lambda a = 0 \\ \beta n y^{n-1} + \lambda b = 0 \\ \gamma n z^{n-1} + \lambda c = 0 \end{cases}$$

Deci, dacă $n \neq 0$, obținem:

$$\frac{\alpha x^{n-1}}{a} = \frac{\beta y^{n-1}}{b} = \frac{\gamma z^{n-1}}{c} \left(= -\frac{\lambda}{n} \right)$$

și cum $x, y, z > 0$ și $a, b, c > 0$ rezultă $\mathrm{sgn}\,\alpha = \mathrm{sgn}\,\beta = \mathrm{sgn}\,\gamma$

Q.E.D.

Lema 3. Dacă $S(\alpha, \beta, \gamma, n)$ are un punct de extremum atunci:

(I) dacă $n \in (0, 1)$ şi $\alpha, \beta, \gamma \geqslant 0$ punctul este de minim;

(II) dacă $n \in R - [0, 1)$ şi $\alpha, \beta, \gamma \geqslant 0$ punctul este de maxim;

(III) dacă $n \in (0, 1)$ şi $\alpha, \beta, \gamma \geqslant 0$ punctul este de maxim;

(IV) dacă $n \in R - [0, 1)$ şi $\alpha, \beta, \gamma \geqslant 0$ punctul este de minim.

Observaţie.

Cazul $n = 0$ este neinteresant deoarece $\forall\ M \in \operatorname{Int}\Delta ABC$:

$$S(\alpha, \beta, \gamma, 0, M) = \alpha + \beta + \gamma = \text{constant}.$$

Analog cazul $\alpha = \beta = \gamma = 0$:

$$S(0, 0, 0, n, M) = 0, \forall\ M \in \operatorname{Int}\Delta ABC.$$

Demonstraţie.

(x_0, y_0, z_0) este punct de maxim / minim după cum $\Psi = \sum \frac{\partial^2 u}{\partial x \cdot \partial y}(x_0, y_0, z_0)$ este negativă / pozitivă. Dar:

$$\Psi(x, y, z) = n(n-1)(\alpha x^{n-2} + \beta y^{n-2} + \gamma z^{n-2})$$

Conform lemei 2 avem $\operatorname{sgn}\alpha = \operatorname{sgn}\beta = \operatorname{sgn}\gamma$.

Dacă $\alpha, \beta, \gamma > 0$ rezultă : $\sum \alpha x^{n-2} > 0$ de unde rezultă $\Psi < 0 \Longleftrightarrow n \in (0, 1)$.

Dacă $\alpha, \beta, \gamma < 0$ rezultă : $\sum \alpha x^{n-2} < 0$ de unde rezultă $\Psi < 0 \Longleftrightarrow n \in R - (0, 1)$.

Q.E.D.

Teoremă. Fie $\alpha, \beta, \gamma \in R$ şi $n \in R^*$ fixate, $\alpha\beta\gamma \neq 0$ şi $n \neq 1$. Atunci :

(I) dacă $\{\operatorname{sgn}\alpha, \operatorname{sgn}\beta, \operatorname{sgn}\gamma\}$ are mai mult de un element, atunci $S(\alpha, \beta, \gamma, n)$ nu are puncte de extremum.

(II) altfel,

$$Q \approx \left(\frac{1}{n-1}\right) - \left(\frac{a}{\alpha}, \frac{b}{\beta}, \frac{c}{\gamma}\right) \quad \text{este :}$$

(II. 1) punct de minim pentru $S(\alpha, \beta, \gamma, n)$ dacă ($\alpha, \beta, \gamma > 0$ şi $n > 1$) sau ($\alpha, \beta, \gamma < 0$ şi $n < 1$) ;

(II. 2) punct de maxim dacă ($\alpha, \beta, \gamma > 0$ şi $n < 1$) sau ($\alpha, \beta, \gamma < 0$ şi $n > 1$) iar

Q de acest tip şi rang este unicul punct de extremum.

Demonstraţie.

Ca şi în lema 2 obţinem:

$$\begin{cases} a x + b y + c z = 2S, & S \overset{\text{not.}}{=\!=} \sigma[ABC] \\ \alpha n x^{n-1} + \lambda a = 0 \\ \beta n y^{n-1} + \lambda b = 0 \\ \gamma n z^{n-1} + \lambda c = 0 \end{cases}$$

Rezultă :

$$\frac{\alpha x^{n-1}}{a} = \frac{\beta y^{n-1}}{b} = \frac{\gamma z^{n-1}}{c} \xRightarrow[\alpha\beta\gamma \neq 0]{}$$

$$\frac{x}{\left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{1}{n-1}}} = \frac{y}{\left(\frac{b}{\beta}\right)^{\frac{1}{n-1}}} = \frac{z}{\left(\frac{c}{\gamma}\right)^{\frac{1}{n-1}}} = \frac{2S}{a\cdot\left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{1}{n-1}} + b\cdot\left(\frac{b}{\beta}\right)^{\frac{1}{n-1}} + c\cdot\left(\frac{c}{\gamma}\right)^{\frac{1}{n-1}}} \Longrightarrow$$

$$(*)\quad\begin{cases} x_0 = \dfrac{\left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{1}{n-1}}}{a\cdot\left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{1}{n-1}} + b\cdot\left(\frac{b}{\beta}\right)^{\frac{1}{n-1}} + c\cdot\left(\frac{c}{\gamma}\right)^{\frac{1}{n-1}}}\cdot 2S \\[2ex] y_0 = \dfrac{\left(\frac{b}{\beta}\right)^{\frac{1}{n-1}}}{a\left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{1}{n-1}} + b\cdot\left(\frac{b}{\beta}\right)^{\frac{1}{n-1}} + c\cdot\left(\frac{c}{\gamma}\right)^{\frac{1}{n-1}}}\cdot 2S \\[2ex] z_0 = \dfrac{\left(\frac{c}{\gamma}\right)^{\frac{1}{n-1}}}{a\cdot\left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{1}{n-1}} + b\cdot\left(\frac{b}{\beta}\right)^{\frac{1}{n-1}} + c\cdot\left(\frac{c}{\gamma}\right)^{\frac{1}{n-1}}}\cdot 2S \end{cases}$$

Dacă (x_0, y_0, z_0) este punct de extremum pentru $f(x, y, z) = \alpha x^n + \beta y^n + \gamma z^n$, unde $f: (R_+^*)^3 \to R$, arătăm că există un punct $M \in \text{Int}\,\Delta ABC$ a.î. $x_M = x_0$, $y_M = y_0$, $z_M = z_0$.

Din lema 1.4 știm că dacă $Q \approx k - (x, y, z)$ atunci :

$$d_a = \frac{x^k}{\sum x^k}\cdot\frac{2S}{a},\quad d_b = \frac{y^k}{\sum x^k}\cdot\frac{2S}{b},\quad d_c = \frac{z^k}{\sum x^k}\cdot\frac{2S}{c}$$

unde d_a, d_b, d_c sunt distanțele de la Q la laturi.

Pentru ca x_0, y_0, z_0 date de (*) să fie distanțele unui punct Q la laturi este suficient să existe $\left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{1}{n-1}}$, $\left(\frac{b}{\beta}\right)^{\frac{1}{n-1}}$, $\left(\frac{c}{\gamma}\right)^{\frac{1}{n-1}}$; dar pentru că $\text{sgn}\,\alpha = \text{sgn}\,\beta = \text{sgn}\,\gamma$ avem că $x_0 > 0$, $y_0 > 0$, $z_0 > 0$. Fie $M_0 \in \text{Int}\,\Delta ABC$,

$$M_0 \approx \frac{1}{n-1} - \left(\frac{a^n}{\alpha}, \frac{b^n}{\beta}, \frac{c^n}{\gamma}\right)$$

Conform lemei 1. 4 avem:

$$(**)\quad\begin{cases} x_{M_0} = \dfrac{\left(\frac{a^n}{\alpha}\right)^{\frac{1}{n-1}}}{\left(\frac{a^n}{\alpha}\right)^{\frac{1}{n-1}} + \left(\frac{b^n}{\beta}\right)^{\frac{1}{n-1}} + \left(\frac{c^n}{\gamma}\right)^{\frac{1}{n-1}}}\cdot\dfrac{2S}{a} \\[2ex] y_{M_0} = \dfrac{\left(\frac{b^n}{\beta}\right)^{\frac{1}{n-1}}}{\left(\frac{a^n}{\alpha}\right)^{\frac{1}{n-1}} + \left(\frac{b^n}{\beta}\right)^{\frac{1}{n-1}} + \left(\frac{c^n}{\gamma}\right)^{\frac{1}{n-1}}}\cdot\dfrac{2S}{b} \\[2ex] z_{M_0} = \dfrac{\left(\frac{c^n}{\gamma}\right)^{\frac{1}{n-1}}}{\left(\frac{a^n}{\alpha}\right)^{\frac{1}{n-1}} + \left(\frac{b^n}{\beta}\right)^{\frac{1}{n-1}} + \left(\frac{c^n}{\gamma}\right)^{\frac{1}{n-1}}}\cdot\dfrac{2S}{c} \end{cases}$$

Să presupunem $\alpha, \beta, \gamma > 0$, atunci există $\left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{1}{n-1}}, \left(\frac{b}{\beta}\right)^{\frac{1}{n-1}}, \left(\frac{c}{\gamma}\right)^{\frac{1}{n-1}}$;

şi din (*) şi (**) avem că :

$$(***) \quad \begin{cases} x_{M_0} = x_0 \\ y_{M_0} = y_0 \\ z_{M_0} = z_0 \end{cases}$$

Lema 1 asigură unicitatea lui Q, ţinând cont de (***). Punctul M fiind un punct de extremum pentru $S(\alpha, \beta, \gamma, n, \cdot)$ el este punct de maxim dacă $\alpha, \beta, \gamma > 0$ şi $n < 1$ şi respectiv de minim dacă $\alpha, \beta, \gamma < 0$ şi $n > 1$ (lema 3). Acum dacă $\alpha, \beta, \gamma < 0$ să observăm că:

$$S(\alpha, \beta, \gamma, n, M) = -S(-\alpha, -\beta, -\gamma, n, M), \ \forall\, M \in \operatorname{Int}\Delta ABC.$$

Deci $-\alpha, -\beta, -\gamma > 0$ şi conform celor de mai sus $S(-\alpha, -\beta, -\gamma, n, \cdot)$ are punct de maxim dacă $n > 1$ şi respectiv minim dacă $n < 1$. Cum însă evident orice punct de maxim pentru $S(\alpha, \beta, \gamma, n, \cdot)$ este punct de minim pentru $S(-\alpha, -\beta, -\gamma, n, \cdot)$ şi invers, obţinem concluzia.

Q.E.D.

Observaţia 1.

Dacă $\alpha\beta\gamma = 0$ atunci de exemplu $\alpha = 0$ sistemul din lema 2 ne conduce la $\lambda = 0$ (a doua ecuaţie) şi $\beta = \gamma = 0$ (ultimele două ecuaţii). Deci $\alpha\beta\gamma = 0$ implică $\alpha = \beta = \gamma = 0$ deci $S(\alpha, \beta, \gamma, n, \cdot) = 0 =$ constant.

Dacă $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ are cel puţin două elemente distincte dintre care unul este nul, atunci $S(\alpha, \beta, \gamma, n, \cdot)$ nu are puncte de extremum.

Observaţia 2.

Dacă $n = 1$ sistemul din lema 2 ne conduce la :

$$\frac{\alpha}{a} = \frac{\beta}{b} = \frac{\gamma}{c} \overset{\text{not}}{=\!=} \mu$$

şi deci: $S(\alpha, \beta, \gamma, 1, M) = u\cdot S(a, b, c, 1, M) = u\cdot(a\cdot x_M + b\cdot y_M + c\cdot z_M) = 2\cdot u\cdot \sigma[ABC]$, $\forall\, M \in \operatorname{Int}\Delta ABC$ deci acest caz nu prezintă interes.

Conchidem deci că dacă $n = 1$ şi card $\left\{\frac{\alpha}{a}, \frac{\beta}{b}, \frac{\gamma}{c}\right\} \geqslant 2$ atunci $S(\alpha, \beta, \gamma, a, \cdot)$ nu are puncte de extremum, iar în acest caz contrar, $S(\alpha, \beta, \gamma, 1, \cdot)$ este constantă.

APLICAŢII.

1. Dacă ABC este un triunghi echilateral şi $S(M) \overset{\text{not}}{=\!=} x_M^k + y_M^k + z_M^k$, $k \in R - \{0, 1\}$ atunci G este un punct de minim pentru S (M) dacă $k > 1$, respectiv minim dacă $k < 1$.

Demonstraţie.

Conform teoremei, aplicată în cazul $\alpha = \beta = \gamma = 1$, avem că $Q \in \operatorname{Int}\Delta ABC$ punct de extremum pentru S (M) şi :

$$Q \approx \frac{1}{k-1} - \left(\frac{a^k}{1}, \frac{b^k}{1}, \frac{c^k}{1}\right) \xrightarrow{a = b = c} Q \approx \frac{1}{k-1} - (1, 1, 1) \xrightarrow{\text{lema } 1.2} Q = G.$$

Q.E.D.

2. Propoziție. Fie $Q \in \operatorname{Int} \Delta ABC$ și fie $A_1B_1C_1$ triunghiul său podar. Dacă $n \in R - \{0, 1\}$ și $S(M) \overset{def.}{=\!=\!=} AQ^n \cdot x_M^n + BQ^n \cdot y_M^n + CQ^n \cdot z_M^n$, unde x_M, y_M, z_M sunt distanțele de la $M \in \operatorname{Int} \Delta A_1B_1C_1$ la laturile triunghiului $A_1B_1C_1$ atunci:

[$S(M)$ are un punct de extremum chiar punctul Q] $\Rightarrow Q \approx \frac{n-2}{n-1} - (a, b, c)$.

Demonstrație.

Fie $\alpha, \beta, \gamma > 0$ și să considerăm (7) $S(M) = \alpha \cdot x_M^n + \beta \cdot y_M^n + \gamma \cdot z_M^n$, $n \in R - \{0, 1\}$.
Conform teoremei avem că $S(M)$ are ca punct de extremum punctul:

$$Q' \underset{\Delta A_1B_1C_1}{\approx} \frac{n}{n-1} - \left(\frac{Q_2Q_3^n}{\alpha}, \frac{Q_1Q_3^n}{\beta}, \frac{Q_1Q_2^n}{\gamma} \right)$$

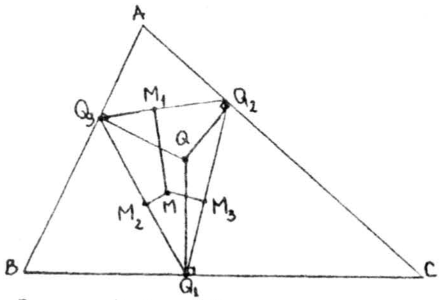
Dar:

$$Q_2Q_3 = AQ \cdot \sin A$$
$$Q_1Q_3 = BQ \cdot \sin B$$
$$Q_1Q_2 = CQ \cdot \sin C$$

Deci:

$$Q' \underset{\Delta A_1B_1C_1}{\approx} \frac{n}{n-1} - \left(\frac{AQ^n \sin^n A}{\alpha}, \frac{BQ^n \sin^n B}{\beta}, \frac{CQ^n \sin^n C}{\gamma} \right) \Longrightarrow$$

$$(8) \quad Q' \underset{\Delta A_1B_1C_1}{\approx} \frac{1}{n-1} - \left(\frac{AQ^n a^n}{\alpha}, \frac{BQ^n b^n}{\beta}, \frac{CQ^n c^n}{\gamma} \right)$$



Dacă $\alpha = AQ^n$, $\beta = BQ^n$, $\gamma = CQ^n$ avem :

$$(9) \qquad Q' \underset{\Delta A_1B_1C_1}{\approx} \frac{n}{n-1} - (a, b, c)$$

Avem : $Q = Q'$ dacă și numai dacă există $\lambda > 0$ a.î. (vezi lema din paragraful 4. 3)

$$\begin{cases} a^{\frac{n}{n-1}} = \lambda a^2 x^{-k} \\ b^{\frac{n}{n-1}} = \lambda b^2 y^{-k} \\ c^{\frac{n}{n-1}} = \lambda c^2 z^{-k} \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x^k = \lambda a^{2-\frac{n}{n-1}} \\ y^k = \lambda b^{2-\frac{n}{n-1}} \\ z^k = \lambda c^{2-\frac{n}{n-1}} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x^k = \lambda a^{\frac{n-2}{n-1}} \\ y^k = \lambda b^{\frac{n-2}{n-1}} \\ z^k = \lambda c^{\frac{n-2}{n-1}} \end{cases}$$

Deci $Q \approx k - (x, y, z) \Leftrightarrow Q \approx 1 - (x^k, y^k, z^k) \Leftrightarrow Q \approx \frac{n-2}{n-1} - (a, b, c)$

Q.E.D.

3. Fie ABC un triunghi şi fie x_M, y_M, z_M distanţele de la $M \in$ Int $\triangle$ ABC la laturile triunghiului. Să se arate că:

a) $S(M) = \sqrt{x_M} + \sqrt{y_M} + \sqrt{z_M}$ are ca punct de maxim punctul antibisector;

b) $S(M) = \frac{1}{x_M} + \frac{1}{y_M} + \frac{1}{z_M}$ are ca punct de maxim punctul antisimedian (creaţie a domnului Vodă în [10] pg. 177);

c) $S(M) = x_M^2 + y_M^2 + z_M^2$ are ca punct de minim punctul K al lui Lemoine;

d) $S(M) = x_M \cdot \sqrt{x_M} + y_M \sqrt{y_M} + z_M \cdot \sqrt{z_M}$ are ca punct de minim punctul R al lui D´Ocagne;

e) $S(M) = a \cdot \sqrt[n-1]{a\,\Gamma_a} \cdot x_M^n + b \cdot \sqrt[n-1]{b\,\Gamma_b} \cdot y_M^n + c \cdot \sqrt[n-1]{c\,\Gamma_c} \cdot z_M^n$ are ca punct de maxim /minim punctul Γ al lui Gergonne după cum $n \leq 1$ sau $n \geq 1$;

f) $S(M) = a\,x_M^n + b\,y_M^n + c\,z_M^n$ are ca punct de maxim/ minim centrul cercului înscris I după cum $n < 1$ sau $n > 1$;

g) $S(M) = a^n x_M^n + b^n y_M^n + c^n z_M^n$ are ca punct de maxim/ minim centrul de greutate G dacă $n < 1$, respectiv $n > 1$;

h) $S(M) = \left(\frac{a}{x_M}\right)^n + \left(\frac{b}{y_M}\right)^n + \left(\frac{c}{z_M}\right)^n$ are ca punct de maxim / minim punctul de rang k "clasic" cu $k = \frac{2n}{n+1}$ ($n \neq -1$), după cum $n > 1$ sau $n < 1$;

i) $S(M) = \left(\frac{x_M}{a}\right)^n + \left(\frac{y_M}{b}\right)^n + \left(\frac{z_M}{c}\right)^n$ are ca punct de maxim / minim punctul de rang $\frac{2n}{n-1}$, $n \neq 1$, în sens "clasic", dacă $n < 1$, respectiv $n > 1$;

j) $S(M) = a^n \cdot (\operatorname{ctg} A)^{n-1} \cdot x_M^n + b^n \cdot (\operatorname{ctg} B)^{n-1} \cdot y_M^n + c^n \cdot (\operatorname{ctg} C)^{n-1} \cdot z_M^n$ are ca punct de maxim / minim ortocentrul H dacă $n < 1$, respectiv $n > 1$.

Demonstraţie.

Se aplică teorema pentru valori convenabile ale parametrilor.

CAPITOLUL II. GEOMETRIA TETRAEDRULUI

DEFINIREA CLASELOR $\mathcal{M}(x, y, z, v)$ IN TETRAEDRU.

Definirea claselor de puncte în tetraedru suntem în măsură să o facem, opţional, astfel:

(i) în paralel cu demersul făcut pentru triunghi;

(ii) bazându-ne pe demersul făcut pentru triunghi.

Abordarea de tip (i) se bazează desigur pe definirea unei relaţii de echivalenţă "$\sim_4$" pe $\mathcal{A}^4$, $(0,\infty) \stackrel{not}{=} \mathcal{A}$.

(1) $\forall (x_i)_{i=\overline{1,4}}, (y_i)_{i=\overline{1,4}} \in \mathcal{A}^4$ avem:

$$(x_i)_{i=\overline{1,4}} \sim_4 (y_i)_{i=\overline{1,4}} \stackrel{def.}{\Longleftrightarrow} \exists \alpha \neq 0 \text{ a.î. } \forall i,j \in \overline{1,4} : \ln \frac{x_i}{x_j} = \alpha \ln \frac{y_i}{y_j} .$$

iar o clasă de puncte $\mathcal{M}(x_1,x_2,x_3,x_4)$ va fi,pentru un tetraedru $A_1A_2A_3A_4$ dat :

(2) $\mathcal{M}(x_1,x_2,x_3,x_4) := \{Q \in \text{Int } A_1A_2A_3A_4 \mid \exists k \in R^* : Q \approx (k; x_1,x_2,x_3,x_4)\}$ unde notăm:

(3) $Q \approx (k; x_1,x_2,x_3,x_4) \Leftrightarrow \quad \frac{A_1B_{12}}{B_{12}A_2} = \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^k, \quad \frac{A_1B_{14}}{B_{14}A_4} = \left(\frac{x_4}{x_1}\right)^k$ etc.,

unde $Q_i = A_iQ \cap (A_jA_k,A_l)$, $i=\overline{1,4}$, j, k, l distincte două câte două şi:

(4) $\quad B_{ij} = A_{ij} \cap A_kQ_l = A_{ij} \cap A_lQ_k \quad , \ l,k \in \overline{1,4} - \{i,j\}$. (vezi fig.1)

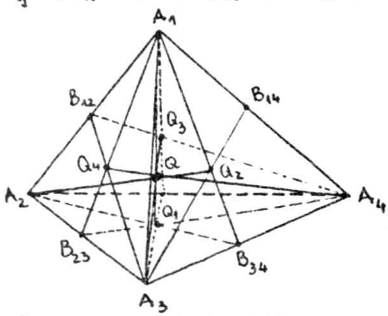


Fig. 1

Bineânţeles, trebuie demonstrate o serie de mici leme care să dea coerenţă definiţiei (2) (de pildă: ultima egalitate din relaţia (4)). Vom prefera în continuare abordarea de tip (ii).

Fie deci un tetraedru $A_1A_2A_3A_4$ şi fie $Q_i \in (A_jA_kA_l)$, $i \notin \{j,k,l\}$, j,k,l distincte două câte două aşa încât: $AQ_1 \cap AQ_2 \cap AQ_3 \cap AQ_4 = \{Q\}$.

Definiţia 1. Vom spune că punctul Q este de rang k şi de tip (x_1,x_2,x_3,x_4) cu $x_i > 0$, $i=\overline{1,4}$ dacă şi numai dacă:

(5) $\quad \forall i \in \overline{1,4} \quad\quad Q_i \stackrel{\Delta A_jA_kA_l}{\approx} (k; x_j,x_k,x_l)$,

deci dacă şi numai dacă punctele Q_i determinate de intersecţia dreptei A_iQ cu planul determinat de celelalte puncte ale tetraedrului este punct de rang k de tip (x_j,x_k,x_l).

Lema 1. Definiția este corectă: dacă $(x_i)_{i=\overline{1,4}} \in \mathcal{A}^4$ și $k \in R^{*}$ și dacă $Q_i \underset{\Delta A_j A_k A_l}{\approx} (k; x_j, x_k, x_l)$ atunci: $AQ_1 \cap AQ_2 \cap AQ_3 \cap AQ_4 \neq \emptyset$.

Demonstrație.

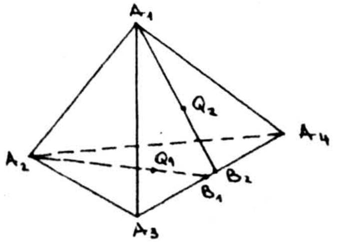


Fig. 2

Să arătăm de pildă că $A_1Q_1 \cap A_2Q_2 \neq \emptyset$.

Fie $\{B_1\} = A_2Q_1 \cap A_3A_4$, $\{B_2\} = A_1Q_2 \cap A_3A_4$

Avem: $Q_1 \underset{\Delta A_2A_3A_4}{\approx} (k; x_2, x_3, x_4) \Rightarrow \dfrac{A_3B_1}{B_1A_4} = \left(\dfrac{x_4}{x_1}\right)^k$

$Q_2 \underset{\Delta A_1A_3A_4}{\approx} (k; x_1, x_3, x_4) \Rightarrow \dfrac{A_3B_2}{B_2A_4} = \left(\dfrac{x_4}{x_1}\right)^k$

și deci: $\dfrac{A_3B_1}{B_1A_4} = \dfrac{A_3B_2}{B_2A_4} \Rightarrow B_1 = B_2 \overset{not.}{=\!=} B_{34}$.

Rezultă că punctele A_1, A_2, Q_1, Q_2 sunt coplanare cu $Q_j \in (A_i B_{34})$, $\{i,j\} = \{1,2\}$ deci $A_1Q_1 \cap A_2Q_2$. Concurența tuturor celor patru drepte este acum banală.

Q.E.D.

Definiția 2. Numim clasa punctelor de tip $(x_i)_{i=\overline{1,4}} \in \mathcal{A}^4$ în tetraedrul $A_1A_2A_3A_4$ mulțimea punctelor $Q \in \operatorname{Int} A_1A_2A_3A_4$ pentru care există $k_Q \in R^{*}$ așa încât $Q \approx (k_Q; x_1, x_2, x_3, x_4)$ și o notăm $\mathcal{M}(x_1, x_2, x_3, x_4)$.

Fie $x, y \in \mathcal{A}^4$. Definim:

(6) $$x \sim y \Leftrightarrow \mathcal{M}(x) = \mathcal{M}(y).$$

Observație. Relația definită de (6) este relație de echivalență pe $\mathcal{A}^4$.

Lema 2. Oricare ar fi $x \in \mathcal{A}$ astfel încât $\mathcal{M}(x, x, x, x) = \{G\}$, unde cu G notăm centrul de greutate al tetraedrului.

Demonstrație.

Cu notațiile din definiția 1 avem că Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 sunt centre de greutate în triunghiurile $A_2A_3A_4$, ... și deci: $Q_1 \simeq 1\text{-}(x, x, x)$ etc. conform rezultatelor din prima parte a lucrării noastre. Din lema 1 și definiția 1 rezultă ceea ce avem de demonstrat.

Q.E.D.

Fie W un sistem de reprezentanți pentru relația definită de (6). Vom demonstra în continuare :

Teorema 1. $\{\mathcal{M}(x)\}_{x \in W}$ este o partiție pentru $\operatorname{Int} A_1A_2A_3A_4$.

Demonstrație.

Arătăm că:

(7) $\forall\, x, y \in W,\ x \neq y \Rightarrow \mathcal{M}(x) \cap \mathcal{M}(y) = \emptyset$.

(8) $\bigcup_{x \in W} \mathcal{M}(x) = \operatorname{Int} A_1A_2A_3A_4$.

Fie $Q \in \mathcal{M}(x) \cap \mathcal{M}(y) \Rightarrow \exists\, k_1, k_2 \in R^{*}$ așa încât:

(9) $$\begin{cases} Q \simeq (k_1; x), \\ Q \simeq (k_2; y). \end{cases}$$

Conform (5) rezultă, dacă $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$:

$$(10)\qquad \begin{cases} Q_j \sim (k_1; x_i, x_k, x_l) \\ \\ Q_j \sim (k_2; y_i, y_k, y_l) \end{cases}$$

şi conform proprietăţilor claselor din triunghi avem:

$$(x_i, x_k, x_l) \sim (y_i, y_k, y_l),\ \forall i \neq k \neq l \neq i \in \overline{1,4}$$

deci $$(11)\ \mathcal{M}(x_i, x_k, x_l) \underset{\Delta A_i A_k A_l}{=\!=} \mathcal{M}(y_i, y_k, y_l)$$

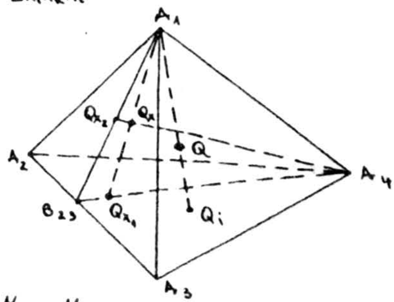


Fig 3

Fie acum un punct

$$(12)\qquad Q_x \in \mathcal{M}(x) - \mathcal{M}(y),$$

şi fie $Q_{x_j} = A_j Q_x \cap (A_k A_i A_l)$, $j \notin \{k, i, l\}$. Dacă $Q_x \simeq (k_x; x)$ atunci: $Q_{x_1} \simeq (k_x; x_2, x_3, x_4)$.
Conform (11) rezultă:

$$(13)\ \exists k_{y_1} \neq 0 \text{ a.i. } Q_{x_1} \simeq (k_{y_1}; y_2, y_3, y_4).$$

Analog: $\exists k_{y_j} \neq 0$ a.i. $Q_{x_j} \simeq (k_{y_j}; y_2, y_3, y_4)$, $j = 2, 3, 4$.
Arătăm că:

$$(14)\qquad k_{y_1} = k_{y_2} = k_{y_3} = k_{y_4} \overset{not}{=\!=} k_y.$$

Într-adevăr avem: $A_1 Q_{x_4} \cap A_4 Q_{x_1} \cap A_2 A_3 \underset{not}{=\!=} \{B_{23}\} \neq \emptyset$ şi din (12):

$$\frac{A_2 B_{23}}{B_{23} A_3} = \left(\frac{y_3}{y_2}\right)^{k_{y_1}} = \left(\frac{y_3}{y_2}\right)^{k_{y_4}} \Rightarrow k_{y_1} = k_{y_4} \text{ etc.}$$

Deci relaţia (14) este adevărată şi conform definiţiei 1 rezultă: $Q_x \simeq (k_y; y)$ deci $Q_x \in \mathcal{M}(y)$, contradicţie (12).

Deci $\mathcal{M}(x) \subseteq \mathcal{M}(y)$.

Analog: $\mathcal{M}(y) \subseteq \mathcal{M}(x)$. Rezultă: $\mathcal{M}(x) = \mathcal{M}(y)$.

Demonstrăm acum relaţia (8).

Incluziunea $\bigcup_{x \in W} \mathcal{M}(x) \subseteq \text{Int } A_1 A_2 A_3 A_4$ rezultă din definiţia mulţimilor $\mathcal{M}(x)$. Vom arăta în continuare:

$$(15)\quad \text{Int } A_1 A_2 A_3 A_4 \subseteq \bigcup_{x \in W} \mathcal{M}(x);$$

Fie $Q \in \text{Int } A_1 A_2 A_3 A_4$, $\{Q_i\} = AQ_i \cap (A_j A_k A_l)$, indicii i, j, k, l distincţi doi câte doi şi $B_{ij} = B_{ji} = A_i Q_j \cap A_k A_l = A_j Q_i \cap A_k A_l$.

Fie:

$$(16)\quad x_i := \left(\frac{\prod_{j \neq i} A_j B_{ji}}{\prod_{j \neq i} A_i B_{ji}}\right)^{\frac{1}{4}}, \quad i = \overline{1,4}$$

Avem:

$$(17)\quad Q \sim 1 - (x_1, x_2, x_3, x_4).$$

Este suficient să arătăm că, de pildă:

$$(18)\qquad \frac{A_3 B_{34}}{B_{34} A_4} = \frac{x_4}{x_3}$$

deoarece din relațiile analoage lui (18) vom obține $Q_1 \approx (1; x_2, x_3, x_4)$ și analog pentru Q_2, Q_3 și respectiv Q_4 și conform definiției 1 va rezulta (17). $\Delta A_2A_3A_4$

Avem:

$$\left(\frac{x_4}{x_3}\right)^4 = \frac{A_1B_{14}\cdot A_2B_{24}\cdot A_3B_{34}}{A_4B_{14}\cdot A_4B_{24}\cdot A_4B_{34}}\cdot\frac{A_3B_{13}\cdot A_3B_{23}\cdot A_3B_{34}}{A_1B_{13}\cdot A_2B_{23}\cdot A_4B_{34}} =$$

$$= \left(\frac{A_3B_{34}}{B_{34}A_4}\right)^2\cdot\left(\frac{A_1B_{14}}{A_1B_{13}}\cdot\frac{A_3B_{13}}{A_1B_{13}}\right)\cdot\left(\frac{A_2B_{24}}{B_{24}A_4}\cdot\frac{A_3B_{23}}{B_{23}A_2}\right)$$

Dar, conform teoremei lui Ceva aplicată în triunghiurile $A_1A_3A_4$ și respectiv $A_2A_3A_4$ avem:

$$\frac{A_1B_{14}}{A_4B_{14}}\cdot\frac{A_4B_{34}}{B_{34}A_3}\cdot\frac{A_3B_{13}}{B_{13}A_1} = 1 \quad ;$$

$$\frac{A_2B_{24}}{B_{24}A_4}\cdot\frac{A_4B_{34}}{B_{34}A_3}\cdot\frac{A_3B_{23}}{B_{23}A_2} = 1 \quad ,$$

și deci:

$$\left(\frac{x_4}{x_3}\right)^4 = \left(\frac{A_3B_{34}}{B_{34}A_4}\right)^4 \Longrightarrow \frac{A_3B_{34}}{B_{34}A_4} = \frac{x_4}{x_3}$$

Cu aceasta considerăm teorema demonstrată.

Q.E.D.

În demonstrația teoremei anterioare am reușit stabilirea unor rezultate utile pentru cele ce urmează.

Corolar 1. 1. Aplicația $f: \mathcal{M}(x_1, x_2, x_3, x_4) \longrightarrow \{(Q_{kj})_{j=1,4} \mid \exists k \neq 0,\ Q_{kj} \approx (k; x_m, x_n, x_p),\ j \neq m,n,p\}$

$$f(Q_k) = (Q_{jk})_{j=\overline{1,4}},\ \forall k \in R^*$$

este o bijecție, Q_{jk} fiind punctul de tip (x_i, x_k, x_l) de rang k în $\Delta A_iA_kA_l$, $j \notin \{i, k, l\}$

Corolar 1. 2. Oricare ar fi $Q \in \mathrm{Int}\ A_1A_2A_3A_4$ avem:

$$(19)\quad Q \approx \left(1; \left[\prod_{j\neq 1}\frac{A_jB_{j1}}{A_1B_{j1}}\right]^{\frac14}, \left[\prod_{j\neq 2}\frac{A_jB_{j2}}{A_2B_{j2}}\right]^{\frac14}, \left[\prod_{j\neq 3}\frac{A_jB_{j3}}{A_3B_{j3}}\right]^{\frac14}, \left[\prod_{j\neq 4}\frac{A_jB_{j4}}{B_{j4}A_4}\right]^{\frac14}\right)$$

Studiem în continuare câteva proprietăți generale ale claselor $\mathcal{M}(x)$, $x \in \mathcal{A}^4$.

Lema 3. Fie $x \in \mathcal{A}^4$ și $k \neq 0, Q \approx (k; x)$. Atunci:

(1) $\forall \lambda > 0 : Q \approx (k; \lambda x)$

(2) $\forall \lambda > 0 : Q \approx (k\lambda; x^\lambda)$

(3) $\forall \lambda > 0 : \mathcal{M}(x) = \mathcal{M}(\lambda x) = \mathcal{M}(x^\lambda)$.

Observație. Dacă $x = (x_i)_{i=\overline{1,4}}$, $\lambda x \overset{not}{=} (\lambda x_i)_{i=\overline{1,4}}$ și $x^\lambda \overset{not}{=} (x_i^\lambda)_{i=\overline{1,4}}$.

Demonstrația lemei 3 este imediată.

Corolar 3.1. Din (19) și lema 3 (2) rezultă: oricare ar fi $Q \in \mathrm{Int}\ A_1A_2A_3A_4$ avem:

$$(20)\quad Q \approx \left(4; \prod_{j\neq 1}\frac{A_jB_{j1}}{A_1B_{j1}}, \dots, \prod_{j\neq 4}\frac{A_jB_{j4}}{A_4B_{j4}}\right).$$

Lema 4. Fie $Q \in \mathrm{Int}\ A_1A_2A_3A_4$ și $k_1, k_2 \in R^*$, $x, y \in \mathcal{A}^4$

Avem:

(1) $Q \approx (k_i; x),\ i = 1,2 \Rightarrow k_1 = k_2$

(2) $Q \approx (k_1; x)$ și $Q \approx (k_2, y) \Leftrightarrow x \sim_4 y$ și $\alpha(x, y) = \frac{k_2}{k_1}$

Observație. Notăm $\alpha(x, y)$ numărul α din relația (1). Convenim $\alpha(x, y) := -\infty$ dacă $x \not\sim_4 y$.

Demonstrație.

(1) Evident.

(2) Fie $\{Q_i\} = AQ \cap (A_j A_k A_l)$. Conform definiției 1 avem :

$Q_i \approx (k_1; x_j, x_k, x_l)$ și $Q_i \approx (k_2; y_j, y_k, y_l)$ și deci $(x_j, x_k, x_l) \sim_3 (y_j, y_k, y_l)$, oricare ar fi j,k,l distincte din {1, 2, 3, 4} dacă și numai dacă există $\alpha_i \neq 0$:

$$\ln \frac{x_j}{x_k} = \alpha_i \ln \frac{y_j}{y_k} \quad \text{etc.}$$

Analog :

$$\ln \frac{x_j}{x_k} = \alpha_l \ln \frac{y_j}{y_k} .$$

și obținem, în ipoteza că $(x_i)_{i=\overline{1,4}}$, $(y_i)_{i=\overline{1,4}}$ sunt distincte, $\alpha_i = \alpha_l$ etc.

Obținem în final definiția relației $\sim$. Reciproca este banală.

Q.E.D.

Lema 5. Dacă $Q \approx (k; x)$ atunci :

(1) $\exists (y_1, y_2, y_3, y_4) = y \in \mathcal{A}^4$ a.î. : a) $y \sim_4 x$ și $\exists k'$, $Q \approx (k'; y)$.
b) $\sum_{i=1}^{4} y_i = 1$.

(2) $\exists (y_1, y_2, y_3, y_4) = y \in \mathcal{A}^4$ a.î. : a) analog.
b) $\prod_{i=1}^{4} y_i = 1$.

Demonstrație.

Rezultă din lema 3 luând :

(1) $\quad y_i = \dfrac{x_i}{\sum_{i=1}^{4} x_i}$, $i = \overline{1,4}$, $\quad \lambda := \sum_{i=1}^{4} x_i$

(2) $\quad y_i := e^{\frac{x_i}{\sum_{i=1}^{4} x_i} - \frac{1}{4}}$, $i = \overline{1,4}$.

Q.E.D.

Teorema 2. Fie $A_1A_2A_3A_4$ un tetraedru. Atunci :

i) $G \approx (k; x,x,x,x)$, $\forall x > 0$ și $k \neq 0$;

ii) $O \approx (1; (\sigma_i \sqrt{R^2 - R_i^2})_{i=\overline{1,4}})$;

iii) $I \sim (1; \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)$;

iv) dacă $A_1A_2A_3A_4$ este ortocentric atunci $H \approx (+2; \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)$.

Demonstrație.

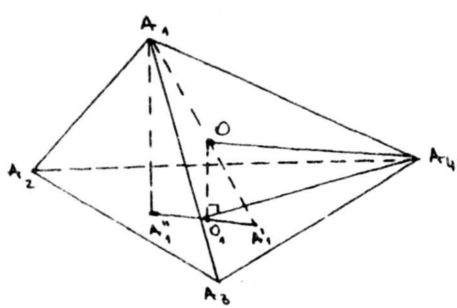


Fig. 4.

ii) Cu notațiile din fig. 4 avem, presupunând $O \approx (1; (x_i)_{\overline{1,4}})$,

$$\frac{OO_1}{AA_1''} = \frac{OA_1'}{A_1'A_1} \overset{\text{"Von Aubel"}}{\underset{\frac{AO}{OA_1'} = \frac{x_2+x_3+x_4}{x_1}}{=}} \frac{x_1}{\sum_{j=1}^{4} x_j}$$

Dar: $OO_1 = \sqrt{R^2 - R_1^2}$ și deci, notând $s := \sum_{i=1}^{4} x_i$

Ținând cont de lema 4 rezultă concluzia.

iv) Se arată imediat că dacă $H_i \overset{not.}{=} pr_{(A_jA_kA_l)} A_i$ atunci H_i este ortocentru în $\Delta A_jA_kA_l$ (vezi de pildă " Geometria planului și spațiului euclidian").

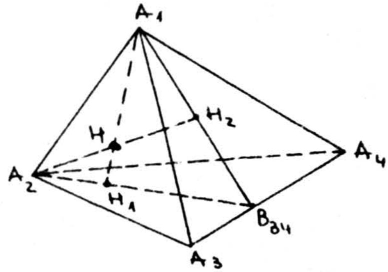


Fig. 5.

Dacă $H \approx (k; (x_i)_{i=\overline{1,4}})$ atunci deducem: $HH_1 = \frac{x_1}{\sum_{i=1}^{4} x_j} \cdot h_1$

$$A_2H = \frac{x_1+x_3+x_4}{\sum_{j=1}^{4} x_j} h_2$$

și :

$HH_1^2 = A_2H^2 - A_2H_1^2 = [(1 - \frac{x_2}{s})h_2]^2 - (l_{12}^2 - h_1^2)$, $l_{ij} \overset{not}{=} A_iA_j \quad \forall i \neq j$

Obținem :

$$\frac{x_1^2h_1^2}{s^2} = h_2^2 - \frac{2x_2}{s}h_2 + \frac{x_2^2h_2^2}{s^2} - l_{12}^2 + h_1^2 \Rightarrow$$

$$h_2^2 + h_1^2 - l_{12}^2 = \frac{x_1^2h_1^2 - x_2^2h_2^2}{s^2} + \frac{2x_2h_2}{s}$$

Analog : $$h_1^2 + h_2^2 - l_{12}^2 = \frac{x_2^2h_2^2 - x_1^2h_1^2}{s^2} + \frac{2x_1h_1}{s}$$

Deci : $$\frac{2}{s^2}(x_1^2h_1^2 - x_2^2h_2^2) - \frac{2}{s}(x_1h_1 - x_2h_2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{2(x_1h_1 - x_2h_2)}{s}\left[\frac{x_1h_1 + x_2h_2}{s} - 1\right] = 0 \Leftrightarrow x_1h_1 = x_2h_2 \text{ sau } x_1h_1 + x_2h_2 = s$$

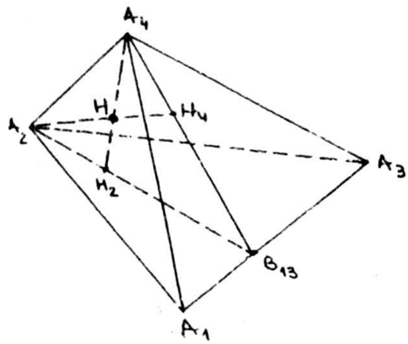


Fig 6.

Deducem $\left.\begin{array}{l} HH_2 = \dfrac{x_2 h_2}{s} \\ HH_4 = \dfrac{x_4 h_4}{s} \end{array}\right\} \Rightarrow HH_2 \equiv HH_4 \Rightarrow$

$\Delta HH_2B_{13} \equiv \Delta HH_4B_{13} \Rightarrow \widehat{HB_{13}H_2} \equiv \widehat{HB_{13}A_4} \Rightarrow A_2B_{13}A_4 = \text{isoscel} \Rightarrow$

$\sigma[A_1A_3A_4] = \sigma[A_1A_2A_3] \Rightarrow \dfrac{3V}{h_2} = \dfrac{3V}{h_4} \Rightarrow h_2 = h_4.$

Analog $h_2 = h_3 = h_4$.

Cum $A = \{2, 3, 4\}$ rezultă: $x_2 = x_3 = x_4$.

Dar : $3V = h_1\sigma_1 = h_2\sigma_2$.

$A_1A_2A_3A_4$ este ortocentric dacă şi numai dacă $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_4$, deci $h_1 = h_2 \overset{not}{=} h$.

Rezultă:

$$(x_1 + x_2)\cdot h = s = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \Rightarrow x_1(1-h) = x_2(1-h+1+1) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_1 = x_2 \cdot \frac{3-h}{1-h}$$

Observaţie :

$h = 1 \Rightarrow x_3 = x_4 = 0$, **contradicţie teorema 1.**

Deci: $H \approx (1, \frac{3-h}{1-h}, 1, 1, 1)$ sau $H \approx (-1; (h_j)_{j=\overline{1,4}}) \Leftrightarrow H \approx (1; (\sigma_j)_{j=\overline{1,4}})$

CAPITOLUL III. CLASE DE PUNCTE GENERATE DE O FUNCȚIE

Vom prezenta în cele ce urmează o tentativă de generalizare a rezultatelor din capitolele anterioare. Ne interesează stabilirea unui cadru comun și cât mai puțin restrictiv pentru noțiunile de clase de puncte așa cum sunt definite pentru triunghi și respectiv tetraedru.

Dacă reușim să depășim intimidarea firesc produsă de relațiile de echivalență :

$$(x_1, y_1, z_1) \sim (x_2, y_2, z_2)$$

pentru triunghi și cea corespunzătoare pentru tetraedru vom observa că, în fond, o clasă de puncte $\mathcal{M}(x, y, z)$ reprezintă **locul geometric al centrelor de greutate corespunzătoare vârfurilor triunghiului relativ la sistemul de ponderi** (x^k, y^k, z^k), când k parcurge $R_+ - \{0\}$ (Restricția $k \neq 0$ apare datorită ambiției noastre de a realiza o partiție a interiorului triunghiului, iar $k > 0$ pentru că altfel obținem puncte din afara interiorului.) De asemenea $\mathcal{M}(x, y, z, w)$ reprezintă pentru tetraedru **locul geometric al centrelor de greutate corespunzătoare vârfurilor acestuia relativ la sistemul de ponderi** (x^k, y^k, z^k, w^k), când k parcurge de asemenea $R_+ - \{0\}$. O justificare a celor afirmate pentru triunghi poate fi dată plecând, de exemplu, de la rezultatele din capitolul I, lemele 3.2 și 3.3.

Din punctul de vedere al observațiilor anterioare, este deci firească o abordare ca mai jos.

Fie $m, n \in N^*$ și $A = \{x_1, \dots, x_n\} \subset R^m$, $\tilde{x} \overset{not}{=} (x_1, \dots, x_n) \in R^{mn}$ și fie $I \subseteq R$ un interval. Considerăm mulțimea de funcții $F_A = \{ f \mid f : R \to R^n \}$ pe care definim:

$$s : F_A \to G \ , \ s(f) = h_f \quad \text{unde}$$
$$h_f : R \to R \ , \ h_f(y) = I_n' f(y) \ , \ \forall\, y \in R \ \text{iar}$$
$$G = \{ h \mid h : R \to R \} \ \text{și} \ I_n = (1, 1, \dots, 1) \in R^n$$

Considerăm, de asemenea :

$$C : F_A \to \mathcal{P}(R^m)$$
$$C(f) = \left\{ y \in R^m \mid \exists\, z \in R \ \text{a.î.} \ s(f)(z) \neq 0 \ \text{și} \ y = \frac{\tilde{x}' f(z)}{s(f)(z)} \right\}.$$

Din definiție, C (f) reprezintă mulțimea centrelor de greutate ale punctelor din A relativ la sistemul de ponderi $(f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$ car $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$. Spunem că $C(f)$ este clasa centrelor de greutate generate de f pentru A.

Avem evident următoarea :

Propoziția 1. Dacă $DPF_A(I) \subset F_A$,

$$DPF_A(I) \overset{def.}{=} \{ f|_I \mid f \in F_A \ , \ \text{Im}\, f \subset (0, \infty)^n \ \text{și f diferențiabilă} \}$$

atunci: $\forall\, f \in DPF_A \Longrightarrow \exists$ g curbă în R^m a.î. $C(f) = \text{Im}\, g$, unde $I \subseteq R$ este un interval.

Analog pentru:

$$DNF_A(I) \overset{def.}{=} \{ f|_I \mid f \in F_A \ , \ \text{Im}\, f \subset (-\infty, 0)^n \ \text{și f diferențiabilă} \}$$

Proprietăți interesante se pot obține considerând clase speciale de funcții "generatoare" de ponderi pentru A, ca de pildă :

$$LPF_A(R_+^*) = \{ f = (f_i|_{(0,\infty)})_{i=\overline{1,n}} \in DPF_A \mid \exists\, a = (a_1, \dots, a_n) \in R^n \text{ și}$$

$$b = (b_1, \dots, b_n) \in R^n \text{ a.î. } f_i(x) = a_i x + b_i, \forall i = \overline{1,n}\}$$

$$EF_A(R_+^*) = \{ f = (f_i|_{(0,\infty)})_{i=\overline{1,n}} \in DPF_A \mid \exists\, a = (a_1, \dots, a_n) \in (R_+^*)^n \text{ și}$$

$$f_i(x) = a_i^x,\ \forall i = \overline{1,n} \text{ și } \forall x \in R\}.$$

Pentru $n = 3$ și $m = 2$ și x_1, x_2, x_3 necoliniare obținem pentru $EF_A(R_+^*) \cup EF_A(R_-^*)$ "teoria" triunghiului iar pentru $n = 4$, $m = 3$ și x_1, x_2, x_3, x_4 necoplanare EF_A descrie "teoria" tetraedrului.

Observația 1. Pentru $g_f : R \to R^m$, $g_f(t) = \dfrac{\tilde{x}' f(t)}{s(f)(t)}$ cu $f \in DPF_A$ avem:

1. $\operatorname{Im} g_f = C(f)$.
2. g este diferențiabilă.

Observația 2. Un calcul rapid ne conduce la :

$$g_j'(t) = \frac{1}{[s(f)(t)]^2}\tilde{x}' \cdot \Delta_j(t), \quad g = (g_1, \dots, g_m)$$

și :

$$\Delta_j(t) = \left(\begin{vmatrix} s(f)(t) & f_j(t) \\ (s(f))'(t) & f_j'(t) \end{vmatrix} \right)_{j=\overline{1,m}}$$

Propoziția 2. Fie $f \in LPF_A(I)$, $f(x) = \bar{a}x + \bar{b}$, $\bar{a}, \bar{b} \in (R_+^*)^n$. Atunci:

1. g_f este regulată $\iff$ $\bar{a}' \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq (\bar{a}' 1_n)_n$ $\quad (*)$

2. $C(f)$ este inclusă într-o hipersferă $\iff$ card $C(f) = 1$.

Observație. Notăm u_n vectorul $(u, u, \dots, u) \in R^n$.

Demonstrație.

Evident $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n) \in (R_+^*)^n$, $\bar{b} = (b_1, \dots, b_n) \in (R_+^*)^n \Longrightarrow g_f$ curbă.

Avem : există $t_0 \in I$ punct singular pentru g_f dacă și numai dacă $g_f'(t_0) = 0$, ceea ce este echivalent cu $(g_f)_j'(t_0) = 0$ $\forall j = \overline{1,m}$, unde $g = ((g_f)_1, \dots, (g_f)_m)$.

Dar, dacă $x_k = (x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{km}) \in R^m$, $k = \overline{1,n}$, avem:

$$(g_f)_j'(t_0) = \frac{b}{(ax+b)^2}\left(\sum_i x_{ji} a_i - a\right)$$

unde : $a \overset{not.}{=} \sum_{i=1}^{n} a_i$ și $b \overset{not.}{=} \sum_{i=1}^{n} b_i$.

Deci:

$$\exists\, t_0 \text{ punct singular} \iff \sum_i x_{ji} a_i = a\ \forall j = \overline{1,n} \iff \bar{a}\begin{pmatrix} x_{j1} \\ x_{j2} \\ \vdots \\ x_{jn} \end{pmatrix} = a \quad \forall j = \overline{1,n} \iff$$

$$\Leftrightarrow \quad \bar{a}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ \vdots \\ a \end{pmatrix} = (\bar{a}' \, 1_n)_n$$, de unde concluzia.

2. " $\Leftarrow$ " Evident.

" $\Rightarrow$ " Cum (*) ne asigură, conform 1, de regularitatea lui g_f rezultă că e suficient să arătăm că: toate hiperplanele normale au un punct comun implică card $C(f) = 1$ (vezi şi propoziţia 14 din [15]) . Fie $y = (y_1, \ldots, y_m)$ punctul comun hiperplanelor normale. Deci:

$$\sum_{j=1}^{m} (y_j - g_j(t)) g_j'(t) = 0 \quad , \forall t \in I .$$

Rezultă:

$$\left(\sum_j y_j - \frac{(\sum_i x_{ji} a_i) t + b}{a t + b} \right) \cdot \frac{b(\sum_i x_{ji} a_i - a)}{(a t + b)^2} = 0 \qquad \forall t \in I.$$

După câteva prelucrări banale obţinem :

$$\left(\sum_j (y_j a - \sum_i x_{ji} a_i)(\sum_i x_{ji} a_i - a) \right) t + \sum_j (y_j b - b)(\sum_i x_{ji} a_i - a) = 0$$

deci, dacă $\alpha_j \overset{not}{=\!=} \sum_i x_{ji} a_i$, atunci:

$$\sum_j (y_j a - \alpha_j)(\alpha_j - a) = 0$$

şi

$$\sum_j (y_j - 1)(\alpha_j - a) = 0$$

Înmulţind ultima relaţie cu a şi scăzând-o din cea anterioară obţinem:

$$\sum_j (-\alpha_j + a)(\alpha_j - a) = 0 \Leftrightarrow \sum_j (\alpha_j - a)^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha_j = a \quad \forall j \Leftrightarrow \bar{a}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (\bar{a}' \, 1_n)_n ,$$

contradicţie.

Deci (*) nu e regulată şi din demonstraţia de la 1 obţinem că toate punctele lui g_f sunt singulare :

$$g_f'(t) = ((g_f')_1(t), \ldots, (g_f')_m(t)) = 0 \quad \forall t.$$

Deci există $c \in R^m$ a.î. $g_f(t) = c, \forall t \in I$.

Rezultă: $C(f) = \{ c \}$.

Q.E.D.

Nu vom insista asupra familiei $LPF_A(I)$ deoarece am vrut doar să dăm un exemplu de proprietate remarcabilă.

Desigur, acum se pot pune numeroase probleme.

Probleme:

1. Dacă definim $f_1 \sim f_2 \Leftrightarrow C(f_1) = C(f_2)$ pentru orice $f_1, f_2 \in A$ unde :

$$A \subset DF_A(I) = \{ f \in F_A \mid f \text{ diferenţiabilă} \}$$

atunci " $\sim$ " este evident relaţie de echivalenţă. Se cere să se pună în evidenţă un sistem de reprezentanţi pentru $A|_\sim$.

2. Dacă $I = [\alpha, \beta]$ să se determine $L_f(\alpha, \beta) = \int_\alpha^\beta \| g_f'(t) \| \, dt$, pentru $f \in LPF_A(I)$.

Să se studieze apoi existenţa în R pentru $\max\limits_{f \in LPF_A(I)} L_f(\alpha, \beta)$.

3. Să se realizeze o "teorie" a poliedrelor convexe pe baza mulţimii $EF_A(R^*_+) \cup EF_A(R^*_-)$ cu $A \subset R^3$, analoagă capitolelor I şi II.

4. Studiaţi cazul în care A nu este discretă.

CAPITOLUL IV.
PROBLEME INEDITE.

Prezentăm în încheiere zece probleme pentru rezolvarea cărora exploatarea ideii de clasă de puncte suntem convinşi că ar fi sterilă şi chiar enervantă. Acest capitol se vrea deci un mic semnal pentru a marca limitele abordării propuse în paragrafele anterioare.

1) Arătaţi că pentru orice număr natural m există m puncte în plan, astfel încât oricare trei puncte nu sunt coliniare şi distanţa dintre oricare două puncte este un număr natural.

Demonstraţie.

Fie m un număr natural fixat; din relaţia $\left(\frac{2n}{n^2+1}\right)^2+\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^2=1$, valabilă pentru orice n natural, rezultă că există unghiul φ astfel încât $\sin\varphi=\frac{2n}{n^2+1}$, $\cos\varphi=\frac{n^2-1}{n^2+1}$.

Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{n^2+1}=0$, rezultă că există n astfel încât $0<2m\varphi<\frac{\pi}{2}$. Considerăm cercul de rază $r=\frac{n^2+1}{2}$ având centrul O şi alegem pe acest cerc punctele $A_0, A_1, \ldots, A_{m-1}$ astfel încât $\widehat{A_0OA_k}=2k\varphi$. Rezultă că $A_iA_j=2r\sin(|i-j|\varphi)=(n^2+1)\sin(|i-j|\varphi)$. Prin inducţie după m putem arăta că dacă m este natural, atunci numerele $(n^2+1)\sin m\varphi$ şi $(n^2+1)\cos m\varphi$ sunt întregi.

Q.E.D.

2) Prin punctul O din spaţiu trec dreptele $d_1, d_2, \ldots, d_{1995}$, două câte două perpendiculare. Pe dreapta d_1 se consideră un punct oarecare A_1 diferit de O. Arătaţi că se pot alege punctele A_i pe dreptele d_i respectiv, pentru $i=2, 3, \ldots, 1995$ astfel încât să avem următoarele 1995 de perechi de drepte perpendiculare: $A_1A_3\perp d_2$, $A_2A_4\perp d_3$, $\ldots$, $A_{i-1}A_{i+1}\perp d_i$; $A_{1993}A_{1995}\perp d_{1994}$, $A_{1994}A_1\perp d_{1995}$, $A_{1995}A_2\perp d_1$.

Demonstraţie.

Fie e_i un versor pe dreapta d_i, $i=1,\ldots,1995$, astfel încât $\overrightarrow{OA_i}=a_ie_i$, $a_i\in\mathbb{R}$. Notăm $c_i=\langle e_i, e_{i+1}\rangle$, pentru $i=1,\ldots,1994$ şi $c_{1995}=\langle e_{1995}, e_1\rangle$, unde $\langle v, w\rangle$ înseamnă produsul scalar al vectorilor v şi w. Condiţiile de perpendicularitate ale dreptelor $A_{i-1}A_{i+1}$ şi d_i sunt:

$$(1)\quad \langle a_{i-1}e_{i-1}-a_{i+1}e_{i+1}, e_i\rangle=0,$$

sau

$$(2)\quad a_{i-1}c_{i-1}=a_{i+1}c_{i+1}.$$

Putem lua arbitrar numărul a_1 şi apoi putem alege numerele $a_3, a_5, \ldots, a_{1995}, a_4, \ldots, a_{1994}$ astfel încât să fie satisfăcute cele 1995 de relaţii (1), cu excepţia, eventual a uneia: $a_{1994}c_{1994}=a_1\cdot c_{1995}$. Dar această ultimă egalitate rezultă prin înmulţirea membru cu membru a următoarelor 1994 de relaţii:

$$\frac{a_3}{a_1}=\frac{c_1}{c_2},\quad \frac{a_5}{a_3}=\frac{c_3}{c_4},\quad \ldots,\quad \frac{a_{1995}}{a_{1993}}=\frac{c_{1993}}{c_{1994}},$$

$$\frac{a_2}{a_{1995}}=\frac{c_{1995}}{c_1},\quad \frac{a_4}{a_2}=\frac{c_2}{c_3},\quad \ldots,\quad \frac{a_{1994}}{a_{1992}}=\frac{c_{1992}}{c_{1993}}.$$

Q.E.D.

3) Pe un cerc se consideră $3k$ puncte astfel încât cele $3k$ arce formate au următoarea proprietate: k dintre ele au lungimea 1, alte k au lungimea 2, iar celelalte k au lungimea 3. Arătaţi că dintre cele $3k$ puncte există două puncte diametral opuse.

Demonstrație.

Demonstrăm prin reducere la absurd. Pentru aceasta colorăm cu negru cele 3k puncte și împărțim cercul în arce de lungime 1, marcând noile puncte cu culoarea roșu. Fie $\widehat{AC}$ un arc de lungime 2 având capetele colorate cu negru și mijlocul B´ colorat cu roșu. Punctul diametral opus lui B´ este punctul B colorat cu negru. Presupunem că pe arcul $\widehat{AB}$ a cărui lungime este 3k -1, avem n_1 arce de lungime 1, n_2 arce de lungime 2 și n_3 arce de lungime 3. Atunci pe arcul $\widehat{BC}$ vor fi n_1 arce de lungime 3, punctele diametral opuse extremităților arcelor de lungime 1 fiind colorate cu roșu. Rezultă că $n_3 = k - n_1$ și această egalitate este în contradicție cu egalitatea ; $3k - 1 = n_1 + 2n_2 + 3n_3$.

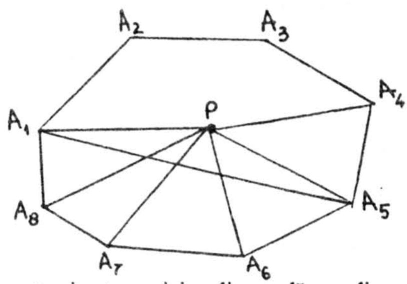
Q.E.D.

4) Fie P un punct în interiorul unui poligon convex cu 2n laturi $A_1 A_2 \dots A_{2n}$. Arătați că există o latură a poligonului $A_1 A_2 \dots A_{2n}$ care nu are puncte interioare comune cu nici una dintre dreptele $PA_1, PA_2, \dots, PA_{2n}$.

Demonstrație.

Sunt posibile următoarele cazuri:

a) Punctul P este situat pe o anumită diagonală AB. Atunci dreptele PA și PB coincid și nu intersectează nici o latură într-un punct interior laturii. Rămân 2n -2 drepte care pot intersecta 2n -2 laturi.



b) Punctul P nu este situat pe nici o diagonală a poligonului $A_1A_2 \dots A_{2n}$. Considerăm diagonala A_1A_{n+1}. De fiecare parte a ei sunt situate n laturi. Presupunem că punctul P este situat în interiorul poligonului $A_1 \dots A_{n+1}$ (vezi figura de mai sus.) . Atunci dreptele PA_{n+1}, PA_{n+2}, ... , PA_{2n}, PA_1 , în număr de n + 1, nu pot intersecta laturile $A_{n+1}A_{n+2}$, $A_{n+2}A_{n+3}$, ... , $A_{2n}A_1$. Rezultă că celelalte drepte pot intersecta cel mult n - 1 dintre aceste n laturi.

Q.E.D.

5) În plan se dau n cercuri, $n \geq 5$, cu proprietatea că oricare trei cercuri au un punct comun. Să se arate că toate cercurile au un punct comun.

Demonstrație..

Notăm cu $C_1, C_2, C_3, C_4, \dots, C_n$, cele n cercuri și fie A punctul comun cercurilor C_1, C_2, C_3 și B, C, D punctele în care cercurile C_1 și C_2, C_2 și C_3, C_3 și C_1 se intersectează a doua oară respectiv.

Presupunem că există un cerc $\mathscr{C}$ care nu trece prin A. Atunci $\mathscr{C}$ trece prin punctele B, C și D. Fiecare pereche de puncte dintre punctele A, B, C, D este perechea de puncte de intersecție a două dintre cercurile $C_1, C_2, C_3, \mathscr{C}$. Rezultă că cercul C_5 trece printr-un punct din fiecare pereche de puncte dintre punctele A, B, C, D. Pe de altă parte, cercul C_5 nu poate trece prin trei dintre punctele A, B, C, D, deoarece fiecare trei dintre aceste puncte, determină unul din cercurile $C_1, C_2, C_3, \mathscr{C}$. Deci cercul $\mathscr{C}$ nu trece prin oricare două dintre aceste puncte. Contradicție.

Q.E.D.

6. Se consideră un poliedru convex având fețele triunghiuri oarecare. Arătați că fiecare muchie a poliedrului poate fi colorată cu una din culorile roșu sau albastru, astfel încât în final, orice două vârfuri ale poliedrului pot fi unite prin muchii care sunt colorate cu roșu și prin muchii care sunt colorate cu albastru.

Demonstrație.

Fie A un vârf oarecare al poliedrului și AA_1, AA_2, ... , AA_n muchiile care pornesc din A. Colorăm cu albastru muchia AA_1 și cu roșu muchiile AA_2 , ... , AA_n ; muchiile liniei frânte A_2A_3 ... A_n se colorează cu albastru, iar muchia A_1A_2 cu roșu. Consecutiv colorăm muchii ale fețelor vecine cu fețele colorate. Dacă o față nouă are două muchii deja colorate, atunci muchia a treia poate fi colorată cu orice altă culoare, iar dacă este colorată numai o muchie, atunci celelalte două muchii le colorăm cu culori diferite.

Q.E.D.

7. Se consideră toate tetraedrele AXBY circumscrise unei sfere date. Arătați că pentru A și B fixate, suma

$$m(\widehat{AXB}) + m(\widehat{XBY}) + m(\widehat{BYA}) + m(\widehat{YAX})$$

nu depinde de alegerea punctelor X și Y.

Demonstrație.

Fie A′, B′, X′, Y′ punctele de tangență ale sferei cu fețele BXY , XYA, YAB, ABX respectiv. Observăm că $\Delta XY'B \equiv \Delta XA'B$, $\Delta AY'X \equiv \Delta AB'X$, etc. (teorema L.L.L.) Folosind congruența acestor perechi de triunghiuri, obținem că suma căutată este egală cu:

$$m(\widehat{AY'B}) + m(\widehat{AX'B}) = 2m(\widehat{AX'B}),$$

care evident nu depinde de punctele X și Y.

Q.E.D.

8. Fie ABCDA′B′C′D′ un cub având muchia de lungime 1. Cercul C_1 este înscris în pătratul ABCD, iar cercul C_2 este circumscris triunghiului ACB′. Determinați cea mai mică distanță dintre punctele celor două cercuri.

Demonstrație.

Cele două cercuri sunt situate pe două sfere concentrice: sfera circumscrisă cubului și sfera tangentă la muchiile cubului. Cea mai mică distanță dintre punctele celor două cercuri este egală cu diferența razelor celor două cercuri, adică cu $(\sqrt{3} - \sqrt{2})\ /\ 2$.

Q.E.D.

9. Vârfurile tetraedrului KLMN sunt situate în interiorul, pe fețele, sau pe muchiile tetraedrului ABCD. Arătați că suma lungimilor muchiilor tetraedrului A′B′C′D′ este mai mică decât 4/3 din suma lungimilor muchiilor tetraedrului ABCD.

Demonstrație.

Fie KLM fața tetraedrului KLMN care are cel mai mare perimetru. Notăm cu A′, B′, C′, D′ proiecțiile ortogonale ale punctelor A, B, C, D respectiv pe planul KLM și cu Γ poligonul ale cărui vârfuri sunt proiecțiile punctelor K, L, M, N pe planul KLM. Notăm de asemenea cu P_{RSTQ} suma lungimilor celor șase segmente având capetele în punctele R, S, T și Q. Următoarele inegalități sunt evidente : $P_{KLMN} \leq 2P_{KLM}$, $P_{KLM} \leq P_{\Gamma}$, $P_{\Gamma} \leq 2/3\ P_{A'B'C'D'}$, $P_{A'B'C'D'} < P_{ABCD}$

Q.E.D.

10. Fie K_0 mulţimea vârfurilor unui tetraedru regulat având volumul 1. Mulţimea K_1 este formată din punctele mulţimii K_0 şi din punctele care se obţin luând simetricele punctelor din K_0 faţă de unul din ele, în toate modurile posibile. În mod asemănător din mulţimea K_1 se obţine mulţimea K_2, din K_2 se obţine K_3, ş.a.m.d. se obţine K_n. Notăm cu M_n cel mai mic poliedru convex care conţine punctele mulţimii K_n.

a). Câte feţe are poliedrul M_1 şi ce sunt aceste feţe ?

b). Cât este volumul poliedrului M_1 ?

c). Cât este volumul poliedrului M_n ?

Demonstraţie.

Mulţimea K_1 conţine pe lângă mulţimea K_0, încă 12 puncte care pot fi reprezentate construind un cub L_0 în care A, B, C, D sunt vârfuri nealăturate şi un cub L_1 omotetic cu L_0, prin omotetia de raport 3 şi având centrul în centrul lui L_0. În cubul L_1 punctele A_1, B_1, C_1, D_1 sunt vârfuri corespunzătoare vârfurilor A, B, C, D. Analizând figura observăm că M_1 are 14 feţe: 6 dreptunghiuri şi 8 triunghiuri echilaterale, iar volumul M_1 se obţine scăzând din volumul lui L_1 care este egal cu 81, volumele a 8 piramide: $4 \cdot (1/2) + 4 \cdot 4 = 18$, deci este egal cu 63. Volumul lui M_n este egal cu $(5 \cdot 3^{3n} - 3^{n+1}) / 2$.

Q.E.D.

BIBLIOGRAFIE.

[1] **BĂNDILĂ , V.** , "O generalizare a unei relaţii a lui Leibniz şi aplicarea ei la calculul distanţelor dintre unele puncte remarcabile ale unui triunghi", G. M. 2, 1985.

[2] **COLOJOARĂ, I.** , "Analiză matematică ", Editura Didactică şi Pedagogică Bucureşti, 1983.

[3] **LALESCU, Tr.** , "Geometria triunghiului " , Editura Tineretului, 1958.

[4] **NICOLESCU, M.; MARCUS , S.; DINCULEANU, N.**, "Analiză matematică ", Editura Didactică şi Pedagogică Bucureşti, 1966.

[5] **OPREA, N.**, "Ceviane de rang k ", G.M. 8, 1989.

[6] **POP, I.**, "Topologie algebrică " , Editura Ştiinţifică Bucureşti, 1990.

[7] **RĂDULESCU, S.; RĂDULESCU, M.**, "Teoreme şi probleme de analiză matematică Editura Didactică şi Pedagogică Bucureşti, 1982.

[8] **ŢENA, M.**, "Utilizarea relaţiei de echivalenţă în fixarea unor noţiuni de geometrie", G. M. 2-3 , 1982.

[9] **VODĂ, V.Gh.** , "Triunghiul - ringul cu trei colţuri ", Editura Albatros, 1979.

[10] **VODĂ, V. Gh.**, "Vraja geometriei demodate ", Editura Albatros, 1983.

[11] **VRACIU, C.; NĂSTĂSESCU, C.; NIŢĂ, C.**, "Bazele algebrei ", Editura Academiei R.S.R. , 1986.

[12] **ZETEL, S. I.**, "Navoia Gheometria Treungolnika ", Izdanie vtoroie , Ucipedghiz, Moskva, 1962.

[13] **PRASOLOV, V. V.**, "Zadaci po planimetrii ", Moskva, Nauka, 1986.

[14] **VASILIEV, N. B.; EGOROV, A. A.**, "Zadaci vsesoiuznii matematiceskih olimpiad ", Moskva, Nauka, 1988.

[15] **NICOLESCU, L.; PRIPOAE, G.**, "Geometrie Diferenţială ", Tipografia Universităţii Bucureşti, 1992.

Tiparul s-a efectuat sub c-da nr. 139/1994
la Tipografia Editurii Universității București

ISBN 973-9160-96-4

Lei 1200