UNIVERSITATEA DIN BUCUREȘTI
FACULTATEA DE MATEMATICĂ

ANTON ȘTEFĂNESCU

CURS DE CERCETĂRI OPERAȚIONALE

BUCUREȘTI
— 1982 —

U N I V E R S I T A T E A   D I N   B U C U R E Ș T I

FACULTATEA DE MATEMATICĂ

ANTON ȘTEFĂNESCU

CURS DE CERCETARI OPERAȚIONALE

București

1982

Prezentul curs este destinat studenților Facultății de matematică, anul IV curs de zi și anul V fără frecvență, Secția matematică.

Textul a fost analizat în colectivul catedrei care s-a declarat de acord cu multiplicarea în actuala redactare.

PREFAȚA

Acest curs a fost redactat pe baza lecțiilor ținute de autor la Facultatea de Matematică, începînd din anul 1974, de cînd Cercetările operaționale au fost introduse, ca disciplină obligatorie de studiu, întîi la secția de Informatică, apoi și la secția de Matematică.

După cum este și firesc, într-un asemenea interval de timp, conținutul cursului a variat de la an la an, mai ales pînă la definitivarea unei programe analitice-cadru, aprobată de M.E.I.

In lucrarea de față nu au fost incluse toate problemele care au făcut obiectul lecțiilor predate în toți acești ani; unele capitole cum ar fi: programarea parametrică, programarea stochastică, teoria stocurilor, prezente, alternativ, în programele din unii ani, au fost eliminate pentru a permite un studiu mai aprofundat al celor păstrate în actuala redactare. Aceasta reprezintă o sinteză a materialului predat în ultimii trei ani universitari.

Există unele diferențe notabile între cursul scris și cel vorbit.

Pe de o parte, lucrarea tratează "in extenso" unele probleme care nu au fost predate, efectiv, în unii ani sau, chiar niciodată, din motive care țin, exclusiv de bugetul de timp (convergența unor algoritmi, problema transporturilor, teoria jocurilor în forma extinsă). Pe de altă parte, lucrarea este lipsită de comentarii asupra conținutului intuitiv și pragmatic al noțiunilor definite, sau de cele asupra interpretării rezultatelor fundamentale demonstrate. Asemenea comentarii, care ocupă uneori un spațiu destul de amplu în cadrul orelor de curs și seminar, sînt necesare pentru o bună înțelegere a teoriei matematice a Cercetării operaționale, a originii ei și a importanței implicațiilor sale practice.

De asemenea au fost omise exercițiile și exemplificările, recomandînd cititorilor culegerile de probleme elaborate de colegii autorului din catedra de Informatică şi Calculul probabilităţilor a Facultăţii de Matematică.

In sistematizarea materialului s-a adoptat, bineînţeles, punctul de vedere al matematicianului asupra Cercetării operaţionale; diferenţierea problemelor după modelul matematic care le reprezintă. S-a ajuns, astfel, la o structurare a cursului în trei mari părţi.

Prima şi cea mai amplă parte este consacrată programării matematice şi a fost subîmpărţită în trei capitole; programarea convexă, programarea discretă şi programarea dinamică. Accentul a fost pus pe partea algoritmică, urmărindu-se familiarizarea absolvenţilor Facultăţii de matematică cu ideile majore care stau la baza tehnicilor numerice utilizate în rezolvarea problemelor de optimizare cu restricţii.

Capitolul dedicat teoriei jocurilor este axat pe ideea investigării logice a conţinutului conceptului de optimalitate, în condiţii din ce în ce mai complexe. Obiectul principal al teoriei jocurilor fiind definirea şi determinarea comportamentului optimal în situaţiile conflictuale sau competiţionale, au fost prezentate diferite teoretizări ale acestui concept - cu rezultate consistente privind existenţa şi modalităţile de determinare - menite să acopere domenii cît mai variate ale relaţiilor sociale.

Ultima parte a cursului, intitulat "modele ale teoriei aşteptării" este şi cea mai dificilă, reclamînd cunoştinţe temeinice de teoria probabilităţilor. Introducerea acestui capitol a fost posibilă datorită existenţei unui puternic curs de Teoria probabilităţilor, predat în paralel cu cel de Cercetări operaţionale.

Tinînd seama de dificultăţile specifice acestui domeniu, am preferat analiza aprofundată a unui număr redus de modele (practic, unul în două variante ale sale), în locul unei treceri în revistă a unui număr mai mare de modele reflectînd situaţii concrete, calitativ diferite.

CUPRINS

LISTA NOTATIILOR UTILIZATE

$\mathcal{C}$, $\mathcal{X}$, $\mathcal{K}$, etc	submulţimi ale lui R^n
b, c, a^i, x, x^i	elemente ale lui R^n (vectori coloană; x^i_j = componente de rang j a lui x^i)
T	supraindice, desemnînd transpusul
e	elementul lui R^n cu toate componentele egale cu 1
e^i	cel de al i-lea vector unitar al lui R^n
$\|\mathcal{C}\|$	cardinalul lui $\mathcal{C}$
$\mathcal{M}_{mn}$	spaţiul vectorial al matricelor de ordin mxn
A,B	matrice
E_n	matricea unitate de ordinul n
J,I	mulţimi (de scalari)
$\bar{J}$	complementara lui J, în raport cu o mulţime specificată
x_J ($x \in R^n$)	element din R^q ($q = \|J\|$) format din componentele lui x indexate în J
f, g, φ	funcţii pe R^n
∇f	gradientul lui f
$[\mathcal{C}]$	acoperirea convexă a mulţimii $\mathcal{C}$
ext $\mathcal{C}$ ($\ddot{\mathcal{C}}$)	profilul lui $\mathcal{C}$ (mulţimea punctelor extreme ale lui $\mathcal{C}$)

CAPITOLUL I

PROGRAMAREA CONVEXA

§ 1. FORMULAREA PROBLEMEI. SOLUTII.

In accepţiunea curentă, o problemă de programare convexă cere determinarea maximului (minimului) unei funcţii concave (convexe) pe o submulţime convexă a spaţiului euclidian real. Caracteristicile generale ale problemelor programării matematice impun ca acest domeniu să fie definit prin egalităţi sau inegalităţi liniare, ori, prin condiţii de nenegativitate (nepozitivitate) asupra unor funcţii concave (convexe).

Modelul tipic al unei asemenea probleme este:

$$\text{(CG)} \qquad \sup_{x \in \mathcal{X}} f(x) \text{ , unde } \mathcal{X} = \{x \in R^n \mid g_j(x) \leqslant 0;\ j=1,2,\ldots,m\}$$

f fiind o funcţie concavă iar g_j funcţii convexe $(j=1,2,\ldots,m)$ pe R^n.

Deoarece egalităţile pot fi echivalente cu perechi de inegalităţi prin transformări algebrice elementare, enunţul (CG) nu poate fi socotit restrictiv pentru clasa de probleme mai sus menţionată.

<u>Definiţia I.1.1.</u> $x \in \mathcal{X}$ se numeşte soluţie posibilă a problemei de programare matematică convexă (CG).

<u>Propoziţia I.1.1.</u> Mulţimea soluţiilor posibile ale problemei (CG), $\mathcal{X}$ este convexă (dacă nu este vidă).

Notînd $\nu = \sup_{x \in \mathcal{X}} f(x)$, atunci:

<u>Definiţia I.1.2.</u> Dacă $\nu < +\infty$, $\bar{x} \in \mathcal{X}$ cu proprietatea: $f(\bar{x}) = \bar{\nu}$ se numeşte soluţie optimă a problemei de programare convexă (CG).

Vom nota, în cele ce urmează, cu $\mathcal{O}$ mulţimea soluţiilor optime ale problemei.

<u>Propoziţia I.1.2.</u> $\mathcal{O}$ este o mulţime convexă.

<u>Propoziţie I.1.3.</u> Dacă $\nu < +\infty$ şi f este strict concavă, atunci $\mathcal{O}$ este formată dintr-un singur punct.

In formulările echivalente ale problemei de programare convexă, în care f este presupusă convexă (probleme de minim), unicitatea soluţiei optime este implicată de ipoteza convexităţii stricte.

Exigenţele unor demonstraţii din acest capitol, impun reformularea problemei de programare, prin eliminarea restricţiilor inoperante. Intr-adevăr, este posibil, ca printre restricţiile problemei să existe unele, care ignorate fiind să nu afecteze soluţiile optime ale problemei (dacă aceste soluţii există). Cu menţiunea că procesul constructiv expus în continuare, nu este utilizat în abordarea numerică a problemei programării matematice, demonstrăm existenţa <u>formei reduse</u> a problemei (CG).

Fie $\bar{x} \in \mathcal{O}$

Se definesc, recursiv, în m paşi, submulţimile:

$$J(0) \supseteq J(1) \supseteq \ldots \supseteq J(m) = J'$$

unde, $J(0) = J = \{1,2,\ldots,m\}$, iar $J(k)$ se obţine la pasul k astfel:

a) Dacă există $x^k \in R^n$ astfel încît:

$$g_j(x^k) \leq 0, \; j \in J(k-1) \setminus \{k\} \quad , \; g_k(x^k) > 0$$

implică:

$$f(x^k) > f(\bar{x}) \; ,$$

atunci:

$$J(k) = J(k-1).$$

b) Dacă oricare ar fi x verificînd:

$$g_j(x) \leq 0, \; j \in J(k-1) \setminus \{k\}$$

rezultă:

$$f(x) \leq f(\bar{x}) \; ,$$

atunci: $J(k) = J(k-1) \setminus \{k\}$

In final, $J' = J(m)$ are proprietăţile:

(I.1.1) Oricare ar fi $k \in J'$, există x^k astfel încît,

$$g_j(x^k) \leq 0, \; j \in J' \setminus \{k\}, \; g_k(x^k) > 0, \; f(x^k) > f(\bar{x}).$$

(I.1.2) Oricare ar fi $x, g_j(x) \leq 0, \; j \in J'$, implică $f(x) \leq f(\bar{x})$.

Notînd $\mathcal{X}' = \{ x \in R^n \mid g_j(x) \leq 0,\ j \in J' \}$,

este ușor de verificat că:

$$\sup_{x \in \mathcal{X}'} f(x) = \sup_{x \in \mathcal{X}} f(x)$$

Forma redusă a problemei (CG) este, prin definiție, problema de programare matematică, avînd aceleași soluții optime ca și problema originară:

$$\sup_{x \in \mathcal{X}'} f(x)$$

§ 2. CARACTERIZAREA OPTIMULUI

Publicate la începutul deceniului al șaselea, lucrările lui H.W. Kuhn și W.A. Tucker privitoare la condițiile necesare și suficiente pentru existența optimului în problemele de programare neliniară convexă, reprezintă, în esență, contribuția cea mai importantă, adusă pînă în prezent, la constituirea suportului teoretic general al programării matematice.

Diferitele variante, cunoscute în momentul de față, caută să se adapteze în modul cel mai adecvat tipurilor particulare de probleme și sînt punctul de plecare al majorității algoritmilor specifici elaborați.

Subliniem faptul că suficiența condițiilor de optim prezentate în cele ce urmează nu face apel la proprietăți de convexitate concavitate, fiind deci valabilă pentru clase mult mai generale de probleme de programare matematică.

Datorită rolului deosebit pe care îl joacă, în multe modele particulare, restricțiile liniare, le vom evidenția în formularea problemei.

Fie deci problema programării matematice:

(C) $\sup_{x \in \mathcal{X}} f(x)$, unde $\mathcal{X} = \{ x \in R^n \mid g_j(x) \leq 0;\ j \in J_1 = \{1,2,\dots,m_1\}$

$h_j(x) \leqslant 0;\ j \in J_2 = \{1,2,\ldots,m_2\}\}$, h_j fiind funcţiile liniare afine:

$$h_j(x) = (a^j)^T x - b_j \quad (a^j \in R^n,\ b_j \in R).$$

2.1. Criterii de optimalitate în absenţa diferenţiabilităţii

Asociem problemei (C) funcţia lui Lagrange (lagrangeanul):

$$L(x;u,v) = f(x) - u^T g(x) - v^T h(x)\ ,\quad u \in R^{m_1}\ ,\ v \in R^{m_2}$$

unde:

$$g(x) = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ \vdots \\ g_{m_1}(x) \end{pmatrix} \qquad h(x) = \begin{pmatrix} h_1(x) \\ \vdots \\ h_{m_2}(x) \end{pmatrix}$$

<u>Teorema I.2.1</u> $\bar{x} \in R^n$ este soluţie optimă a problemei (C) dacă există $\bar{u} \geqslant 0$ şi $\bar{v} \geqslant 0$, astfel încît:

(L) $\quad L(x;\bar{U},\bar{v}) \leqslant L(\bar{x};\bar{u},\bar{v}) \leqslant L(\bar{x};u,v)$, oricare ar fi $x \in R^n, u \geqslant 0, v \geqslant 0$

Demonstraţie:

Inegalitatea din dreapta se poate scrie:

(I.2.1) $\quad (u - \bar{u})^T g(\bar{x}) + (v - \bar{v})^T h(\bar{x}) \leqslant 0$

Pentru fiecare $j = 1,2,\ldots,m_1$ se poate lua $u = \bar{u} + e^j \geqslant 0$ şi $v = \bar{v}$, obţinînd:

(I.2.2) $\quad g_j(\bar{x}) \leqslant 0;\ j = 1,2,\ldots,m_1.$

Punînd $u = \bar{u}$ şi $v = \bar{v} + e^j \geqslant 0$, $j = 1,2,\ldots,m_2$, inegalitatea (I.2.1) implică:

(I.2.3) $\quad h_j(\bar{x}) \leqslant 0;\ j = 1,2,\ldots,m_2$

Din (4) şi (5) rezultă că $\bar{x} \in \mathcal{X}$. Tot din (3), pentru $u = v = 0$ se obţine şi:

$$\bar{u}^T g(\bar{x}) + \bar{v}^T h(\bar{x}) \geqslant 0$$

ceea ce împreună cu (I.2.2) (I.2.3) şi cu ipoteza $\bar{u} \geqslant 0$, $\bar{v} \geqslant 0$, conduce la:

$$\bar{U}^T g(x) + \bar{v}^T h(x) = 0$$

Atunci inegalitatea stîngă din (L) se poate scrie:

$$f(\bar{x}) \geqslant f(x) - \bar{u}^T g(x) - \bar{v}^T h(x) \text{ , oricare ar fi } x \in R^n.$$

In particular, dacă $x \in \mathcal{X}$, rezultă de aici:

$$f(\bar{x}) \geqslant f(x)$$

inegalitate care demonstrează optimalitatea lui $\bar{x}$.

Referindu-se la condiţia (L) vom spune că punctul $(\bar{x};\bar{u},\bar{v})$ este punct-şa al lagrangeanului asociat problemei (C).

<u>Teorema I.2.2.</u> Dacă g_j sînt convexe, $(j = 1,2,\dots,m_1)$ şi f este concavă şi dacă:

(I.2.4) există $x^0 \in \mathcal{X}$ astfel încît $g(x^0) < 0$,

atunci, pentru fiecare soluţie optimă $\bar{x}$ a problemei (C) există $\bar{u} \geqslant 0$ şi $\bar{v} \geqslant 0$ astfel încît condiţia (L) să fie satisfăcută.

Demonstraţie:

Considerăm problema în forma redusă asociată:

$$\sup_{x \in \mathcal{X}'} f(x) \text{ , } \mathcal{X}' = \{x \in R^n \mid g_j(x) \leqslant 0;\ j \in J_1' \text{ , } h_j(x) \leqslant 0;\ j \in J_2'\}$$

$$J_1' \subseteq J_1 \text{ , } J_2' \subseteq J_2.$$

Dacă $J_1' = J_2' = \emptyset$, atunci $f(\bar{x}) = \sup_{x \in R^n} f(x)$ şi condiţia (L) este satisfăcută pentru $\bar{u} = \bar{v} = 0$.

Presupunem $J_1' \cup J_2' \neq \emptyset$.

Fie mulţimea:

$$\mathcal{K} = \left\{ \begin{pmatrix} y \\ z \\ t \end{pmatrix} \text{ , } y \in R^{m_1'}, z \in R^{m_2'}, t \in R \,\middle/\, \text{ exista } x \in R^n,\ g_j(x) \leqslant y_j;\ j \in J_1', \right.$$

$$\left. h_j(x) \leqslant z_j; j \in J_2',\ f(\bar{x}) - f(x) < t \right\} \text{ , } m_1' = |J_1'| \text{ , } m_2' = |J_2'|$$

Datorită ipotezelor de convexitate-concavitate se poate verifica cu uşurinţă că $\mathcal{K}$ este o mulţime convexă (nevidă) din $R^{m_1'+m_2'+1}$. In plus, deoarece pentru orice $x \in \mathcal{X}'$, $f(\bar{x}) \geqslant f(x)$, rezultă că $0 \notin \mathcal{K}$. Atunci conform propoziţiei A.1.12 există un hiperplan ce trece prin origine, care lasă pe $\mathcal{K}$ de o aceeaşi parte a sa, adică există $p \in R^{m_1}$, $q \in R^{m_2'}$, $r \in R$, $(p^T, q^T, r) \neq 0$, astfel încît:

(I.2.5) $\qquad p^T y + q^T z + rt \geq 0$, oricare ar fi $\begin{pmatrix} y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathcal{K}$.

Pentru fiecare $x \in R^n$, definim:

$$y_j = g_j(x); j \in J_1', z_j = h_j(x); j \in J_2', t = f(\bar{x}) - f(x) + \varepsilon \quad ,(\varepsilon > 0).$$

Clar, $\begin{pmatrix} y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathcal{K}$ şi deci:

$$\sum_{j \in J_1'} p_j g_j(x) + \sum_{j \in J_2'} g_j h_j(x) + r(f(\bar{x}) - f(x)) \geq -\varepsilon r$$

Si de aici, deoarece ε este arbitrar pozitiv:

(I.2.6) $\qquad \sum_{j \in J_1'} p_j g_j(x) + \sum_{j \in J_2'} g_j h_j(x) \geq r(f(x) - f(\bar{x}))$, oricare ar fi x.

Să remarcăm că p, q şi r sînt nenegativi. Intr-adevăr, dacă prin absurd, unul dintre aceşti coeficienţi ar fi negativ, ar putea fi ales un punct din $\mathcal{K}$ cu componenta corespunzătoare atît de mare încît inegalitatea (I.2.5) să fie contrazisă. ($\mathcal{K}$ este nemărginită superior pe fiecare componentă).

Mai mult, $(q^T, r) \neq 0$. Intr-adevăr, în caz contrar, $p \neq 0$ şi (I.2.6) devine:

$$\sum_{j \in J_1'} p_j g_j(x) \geq 0, \text{ oricare ar fi } x.$$

In particular, această inegalitate ar fi verificată şi de x^o, ceea ce ar contrazice flagrant ipoteza (I.2.4).

In sfîrşit vom verifica că $r > 0$. Dacă $J_2' = \emptyset$, aceasta rezultă din afirmaţia precedentă. Pentru cazul $J_2' \neq \emptyset$ raţionăm prin reducere la absurd. Dacă $r = 0$ (I.2.6) se scrie:

(I.2.7) $\qquad \sum_{j \in J_1'} p_j g_j(x) + \sum_{j \in J_2'} q_j h_j(x) \geq 0$, oricare ar fi $x \in R^n$.

Dar pentru soluţia posibilă x^o este adevărată şi inegalitatea de sens contrar şi deci:

$$\sum_{j \in J_1'} p_j g_j(x^o) + \sum_{j \in J_2'} q_j h_j(x^o) = 0$$

Cum toţi termenii acestei sume sînt nepozitivi, rezultă că toţi sînt nuli. Ţinînd seama şi de ipoteza (I.2.4), deducem de aici:

$$p=0$$

$$\sum_{j \in J_2'} q_j h_j(x^o) = 0 \tag{I.2.8}$$

şi atunci (I.2.7) devine:

$$\sum_{j \in J_2'} q_j h_j(x) \geqslant 0, \text{ oricare ar fi } x. \tag{I.2.9}$$

Prin scăderea egalităţii (I.2.8) din (I.2.9) obţinem:

$\sum_{j \in J_2'} q_j (a^j)^T (x - x^o) \geqslant 0$, oricare ar fi x, ceea ce

ca efect: $\sum_{j \in J_2'} q_j (a^j)^T = 0$; şi mai departe, din (I.2.8),

$\sum_{j \in J_2'} q_j b_j = 0.$

Deci:

$$\sum_{j \in J_2'} q_j h_j(x) = 0, \text{ oricare ar fi } x \in R^n. \tag{I.2.10}$$

Fie acum pentru fiecare $j \in J_2'$, convexul închis:

$$\mathcal{C}_j = \{ x \in R^n \mid h_j(x) \leq 0 \}$$

precum şi mulţimea convexă:

$$\mathcal{C} = \{ x \in R^n \mid g_j(x) < 0;\ j \in J_1',\ f(\overline{x}) - f(x) < 0 \}$$

Se verifică imediat că: $\mathcal{C}$ şi $\bigcap_{j \in J_2'} \mathcal{C}_j$ sînt mulţimi disjuncte, nevide, dar, pentru fiecare $j \in J_2'$:

$$\mathcal{C} \cap \Big(\bigcap_{i \in J_2' \setminus \{j\}} \mathcal{C}_i \Big) \neq \emptyset$$

Rezultă atunci, în baza celei de a doua teoreme de intersecţie a mulţimilor convexe (propoziţia A.1.15) că $\mathcal{C}$ nu este conţinută în $\bigcup_{j \in J_2'} \mathcal{C}_j$. Există deci, $x \in \mathcal{C}$, $x \notin \bigcup_{j \in J_2'} \mathcal{C}_j$, adică:

$$f(x) > f(\bar{x}),\ g_j(x) \leq 0;\ j \in J_1',\ h_j(x) > 0;\quad j \in J_2'$$

Ori, aceasta ar implica: $\sum_{j \in J_2'} q_j h_j(x) > 0$, venind în contradicţie cu (I.2.10)

Falsitatea ipotezei de absurd fiind astfel dovedită, notăm $\bar{u}_j = p_j/r \geq 0;\ j \in J_1'$, $\bar{v} = q_j/r \geq 0\ ;\ j \in J_2'$ şi atunci rezultă din (I.2.6).

(I.2.11) $$\sum_{j \in J_1'} \bar{u}_j g_j(x) + \sum_{j \in J_2'} \bar{v}_j h_j(x) \geq f(x) - f(\bar{x})$$, pentru orice x .

In particular, pentru $x = \bar{x}$,

$$\sum_{j \in J_1'} \bar{u}_j g_j(\bar{x}) + \sum_{j \in J_2'} \bar{v}_j h_j(\bar{x}) \geq 0$$

Cum şi inegalitatea contrară este adevărată, deoarece $\bar{x} \in \mathcal{X}'$, în relaţia de mai sus putem pune egalitate şi atunci (I.2.11) se poate transcrie:

(I.2.12) $$f(x) - \sum_{j \in J_1'} \bar{u}_j g_j(x) - \sum_{j \in J_2'} \bar{v}_j h_j(x) \leq f(\bar{x}) - \sum_{j \in J_1'} \bar{u}_j g_j(\bar{x}) - \sum_{j \in J_2'} v_j h_j(\bar{x}),$$ oricare ar fi $x \in R^n$.

Pe de altă parte, pentru orice $u \geq 0$, $v \geq 0$, rezultă banal şi inegalitatea:

(I.2.13) $$f(\bar{x}) - \sum_{j \in J_1'} \bar{u}_j g_j(\bar{x}) - \sum_{j \in J_2'} \bar{v}_j h_j(\bar{x}) \leq f(\bar{x}) - \sum_{j \in J_1'} u_j g_j(\bar{x}) - \sum_{j \in J_2'} v_j h_j(\bar{x})$$

In final definind $\bar{u}_j = 0$, pentru $j \in J_1 \setminus J_1'$ şi $\bar{v}_j = 0$ pentru $j \in J_2 \setminus J_2'$, concludem din (I.2.12) şi (I.2.13) că punctul $(\bar{x};\bar{u},\bar{v})$ este punct-şa al funcţiei L. Cu cele două rezultate demonstrate pînă acum putem formula:

Teorema I.2.3. Condiţia (L)(existenţa punctului-şa al lagrangeanului) este suficientă pentru existenţa soluţiei optime în problema de programare convexă (C). Condiţia (L) este şi necesară în ipoteza suplimentară (I.2.4) (ipoteza de regularitate a lui Slater).

Putem remarca că suficienţa condiţiei (L) nu este condiţionată de caracterul de convexitate al problemei.

2.2. Criterii de optimalitate în ipoteza diferenţiabilităţii

Vom presupune în cele ce urmează că f şi g_j sînt funcţii diferenţiabile.

Lemă . Dacă F este o funcţie concavă, admiţînd derivate parţiale de ordinul întîi continue, atunci oricare ar fi x^1, x^2;

$$F(x^1) - F(x^2) \leqslant (x^1 - x^2)^T \nabla F(x^2)$$

Demonstraţie:

Funcţia de variabilă reală λ , $\varphi(\lambda) = F(x^1 + \lambda x^2)$ este concavă. Prin urmare, $\varphi'(\lambda) = (x^2)^T \nabla F(x^1 + \lambda x^2)$ este descrescătoare în raport cu λ . Pe de altă parte:

$$F(x^1 - F(x^2) = (x^1-x^2)^T \nabla F(x^2 + \lambda (x^1-x^2)),\ 0 \leqslant \lambda \leqslant 1$$

(formula creşterilor finite).

Ţinînd seama de observaţia anterioară, rezultă de aici:

$$F(x^1) - F(x^2) \leqslant (x^1-x^2)^T \nabla F(x^2)$$

Teorema I.2.4. Fie problema (C) cu $f, g_j \in C^1$; $j \in J_1$. Dacă $(\bar{x};\bar{u},\bar{v}), \bar{u} \geqslant 0,\ \bar{v} \geqslant 0$, este un punct-şa al lagrangeanului L, atunci sînt satisfăcute condiţiile Kuhn-Tucker:

(i) $\frac{\partial L}{\partial x}(\bar{x};\bar{u},\bar{v}) = 0$

(ii) $\bar{u} \geqslant 0$

(iii) $\frac{\partial L}{\partial u}(\bar{x};\bar{u},\bar{v}) \geqslant 0$

(iv) $\bar{u}^T \frac{\partial L}{\partial u}(\bar{x};\bar{u},\bar{v}) = 0$

(v) $\bar{v} \geqslant 0$

(vi) $\frac{\partial L}{\partial v}(\bar{x};\bar{u},\bar{v}) \geqslant 0$

(vii) $v^T \frac{\partial L}{\partial v}(\bar{x};\bar{u},\bar{v}) = 0$

Demonstrație:

Prin ipoteză:

$$L(\bar{x};\bar{u},\bar{v}) \leqslant L(\bar{x};\bar{u},\bar{v}) \text{ , pentru orice } x \in R^n$$

ceea ce denotă faptul că $\bar{x}$ este punct de maxim al funcției $L(\cdot;\bar{u},\bar{v})$ pe R^n. De aici și din presupunerea asupra derivabilității lui L, rezultă (i).

Pe de altă parte, potrivit celei de a doua inegalități (L) punctul $\begin{pmatrix}\bar{u}\\ \bar{v}\end{pmatrix}$ este punct de minim al funcției $L(\bar{x};.)$ pe domeniul $\left\{\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix} \geqslant 0\right\}$, și atunci:

$$\frac{\partial L}{u_j}(\bar{x};\bar{u},\bar{v}) = 0, \text{ dacă } \bar{u}_j > 0 \text{ ; } j \in J_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_j}(\bar{x};\bar{u},\bar{v}) \geqslant 0 \text{ , dacă } \bar{u}_j = 0; \quad j \in J_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial v_j}(\bar{x};\bar{u},\bar{v}) = 0, \text{ dacă } \bar{v}_j > 0 \text{ ; } j \in J_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial v_j}(\bar{x};\bar{u},\bar{v}) \geqslant 0, \text{ dacă } \bar{v}_j = 0 \text{ ; } j \in J_2$$

și atunci, relațiile (iii), (iv), (vi) și (vii) sînt satisfăcute.

<u>Teorema I.2.5</u>. Pentru problema de programare convexă (C), cu $f, g_j \in C^1$; $j \in J_1$, condițiile Kuhn-Tucker implică(L) .

Demonstrație:

L este concavă în argumentul x. Atunci datorită lemei, putem scrie:

$$L(x;\bar{u},\bar{v}) - L(\bar{x};\bar{u},\bar{v}) \leqslant (x-\bar{x})^T \frac{\partial L}{\partial x}(\bar{x};\bar{u},\bar{v}) = 0$$

egalitatea datorîndu-se relației (i).x fiind arbitrar, rezultă de mai sus tocmai prima parte a condiţiei (L).

L este liniară în variabila $\binom{u}{v}$. Atunci din teorema creşterilor finite, din (iv) şi (vii):

$$L(\bar{x};u,v) - L(\bar{x};\bar{u},\bar{v}) = (u - \bar{u})^T \frac{\partial L}{\partial u}(\bar{x};\bar{u},\bar{v}) +$$

$$+ (v - \bar{v})^T \frac{\partial L}{\partial v}(\bar{x};\bar{u},\bar{v}) = u^T \frac{\partial L}{\partial u}(\bar{x};\bar{u},\bar{v}) + v^T \frac{\partial L}{\partial v}(\bar{x};\bar{u},\bar{v})$$

Ţinînd seama de (iii) şi (vi) ultimul termen din egalitatea precedentă este nenegativ pentru orice $u \geqslant 0$, $v \gtreqless 0$, rezultînd în felul acesta şi a doua parte a relaţiei (L).

Pentru problema programării convexe, putem formula acum şi :

<u>Teorema I.2.6</u>. (Kuhn-Tucker). Fie problema de programare convexă (C) cu $f,g_j \in C^1$; $j \in J_1$ şi $(\bar{x};\bar{u},\bar{v})$, $\bar{x} \in R^n$, $\bar{u} \in R^{m_1}$, $\bar{v} \in R^{m_2}$. Satisfacerea condiţiilor Kuhn-Tucker este suficientă pentru optimalitatea lui $\bar{x}$. Dacă în plus, este satisfăcută şi condiţia de regularitate (I.2.4), atunci condiţiile Kuhn-Tucker sînt şi necesare pentru optimalitatea lui $\bar{x}$.

Următoarele variante ale teoremei Kuhn-Tucker sînt simple consecinţe ale acesteia, obţinute prin transcrierea condiţiilor (i)-(vii) pentru problemele specificate.

<u>Teorema I.2.7</u>. Fie problema (CG) cu $f,g_j \in C^1$; $j=1,2,\ldots m$ şi $\bar{x} \in R^n$, $\bar{u} \in R^m$. Atunci condiţiile Kuhn-Tucker:

(j) $\frac{\partial L}{\partial x}(\bar{x},\bar{u}) = 0$ (jjj) $\frac{\partial L}{\partial u}(\bar{x},\bar{u}) \geqslant 0$

(jj) $\bar{u} \geqslant 0$ (jv) $\bar{u}^T \frac{\partial L}{\partial u}(\bar{x},\bar{u}) = 0$

$(L(x,u) = f(x) - u^T g(x))$

sînt suficiente pentru optimalitatea lui $\bar{x}$. In prezenţa condiţiei de regularitate (I.2.4.) aceste condiţii sînt şi necesare.

Teorema I.2.8. Fie problema de programare convexă cu restricții liniare (inegalități):

(CL) $\sup_{x\in\mathcal{X}} f(x)$, $\mathcal{X} = \{x \in R^n \ h_j(x) \leq 0; \ j=1,2,\dots,m\}$

cu $f \in C^1$, concavă și h_j funcții liniare afine și $\bar{x} \in R^n$, $\bar{v} \in R^m$.

Atunci condițiile Kuhn-Tucker:

$$\frac{\partial L}{\partial x}(\bar{x},\bar{v}) = 0 \qquad \frac{\partial L}{\partial v}(\bar{x},\bar{v}) \geq 0$$

$$\bar{v} \geq 0 \qquad \bar{v}^T \frac{\partial L}{\partial v}(\bar{x},\bar{v}) = 0$$

$(L(x,v) = f(x) - v^T h(x))$

sînt condiții necesare și suficiente pentru optimalitatea lui $\bar{x}$.

Teorema I.2.9. Fie problema de programare convexă cu restricții liniare (egalități + restricții de semn):

$$\sup_{x\in\mathcal{X}} f(x), \quad \mathcal{X}=\{x \in R^n \mid x \geq 0, \ h_j(x) = 0 \ ; \ j = 1,2,\dots,m\}$$

cu $f \in C^1$, concavă și h_j funcții liniare afine și $\bar{x} \in R^n$, $\bar{v} \in R^m$.

Atunci condițiile Kuhn-Tucker:

$$\bar{x} \geq 0 \qquad \bar{x}^T \frac{\partial L}{\partial x}(\bar{x},\bar{v}) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}(\bar{x},\bar{v}) \leq 0 \qquad \frac{\partial L}{\partial v}(\bar{x},\bar{v}) = 0$$

$(L(x,v) = f(x) - v^T h(x))$

sînt condiții necesare și suficiente pentru optimalitatea lui $\bar{x}$.

Demonstrație:

Se poate scrie: $\mathcal{X} = \{x \in R^n \mid h(x) \leq 0, \ -h(x) \leq 0, \ -x \leq 0\}$ și problema este redusă la tipul tratat în teorema precedentă.

Lagrangeanul asociat este:

$$L'(x;w,z,t) = f(x) - w^T h(x) + z^T h(x) + t^T x =$$

$$= L(x,w-z) + t^T x.$$

Atunci conform teoremei I.2.8. condiția necesară și suficientă pentru existența unei soluții optime $\bar{x}$ este existența unui triplet $(\bar{w},\bar{z},\bar{t})$ pentru care:

$$\frac{\partial L'}{\partial x}(\bar{x};\bar{w},\bar{z},\bar{t}) = 0 \qquad \bar{w}\geq 0,\ \bar{z}\geq 0,\ \bar{t}\geq 0$$

$$\frac{\partial L'}{\partial w}(\bar{x};\bar{w},\bar{z},\bar{t})\geq 0, \quad \frac{\partial L'}{\partial z}(\bar{x};\bar{w},\bar{z},\bar{t})\geq 0, \quad \frac{\partial L'}{\partial t}(\bar{x};\bar{w},\bar{z},\bar{t})\geq 0$$

$$\bar{w}^T\frac{\partial L'}{\partial w}(\bar{x};\bar{w},\bar{z},\bar{t})+\bar{z}^T\cdot\frac{\partial L'}{\partial z}(\bar{x};\bar{w},\bar{z},\bar{t})+\bar{t}^T\cdot\frac{\partial L'}{\partial t}(\bar{x};\bar{w},\bar{u},\bar{t}) = 0$$

Cu notaţia $v = w - z$, aceste relaţii se mai scriu:

(I.2.14) $$\frac{\partial L}{\partial x}(\bar{x},\bar{v}) + \bar{t} = 0$$

(I.2.15) $$\bar{w}\geq 0,\bar{z}\geq 0,\bar{t}\geq 0$$

(I.2.16) $$\frac{\partial L}{\partial v}(\bar{x},\bar{v})\geq 0,\ -\frac{\partial L}{\partial v}(\bar{x},\bar{v})\geq 0,\bar{x}\geq 0$$

(I.2.17) $$\bar{v}^T\frac{\partial L}{\partial v}(\bar{x},\bar{v}) + \bar{t}^T\bar{x} = 0$$

Clar, relaţiile (I.2.16) sînt echivalente cu:

(I.2.18) $$\frac{\partial L}{\partial v}(\bar{x},\bar{v}) = 0,\ \bar{x}\geq 0$$

iar egalitatea (I.2.14) se transformă, ţinînd cont de (I.2.15) în:

(I.2.19) $$\frac{\partial L}{\partial x}(\bar{x},\bar{v})\leq 0$$

In sfîrşit, tot datorită dublei inegalităţi din (I.2.16), (I.2.19) este echivalentă cu: $\bar{t}^T\bar{x} = 0$ şi atunci, împreună cu (I.2.14) dă:

(I.2.20) $$\bar{x}^T\frac{\partial L}{\partial x}(\bar{x},\bar{v}) = 0$$

Relaţiile (I.2.18), (I.2.19), (I.2.20) demonstrează teorema.

Relativ la ultimile două teoreme, este remarcabil faptul că prezenţa exclusivă a restricţiilor liniare face inutilă condiţia de regularitate (I.2.4) pentru valabilitatea părţii de necesitate.

2.3. Interpretarea geometrică a condiţiilor Kuhn-Tucker

Viziunea geometrică a condiţiilor necesare şi suficiente pentru existenţa optimului în programarea matematică este foarte importantă pentru înţelegerea esenţei teoretice a unor algoritmi pentru calculul soluţiilor optime. Dăm acum interpretarea geometrică a condiţiilor Kuhn-Tucker (j)-(jv) deduse pentru problema (CG).

<u>Teorema I.2.10</u> In ipotezele teoremei I.2.7 dacă $(\bar{x};\bar{u})$ satisface condiţiile Kuhn-Tucker (j)-(jv), atunci: $\bar{x}\in\mathcal{X}$ şi

(I.2.21) $\quad f(\bar{x}) = \sum_{j\in\bar{M}} \bar{u}_j \nabla g_j(\bar{x})$, unde $\bar{M} = \{ j \mid 1\leq j\leq m, g_j(\bar{x}) = 0\}$

Reciproc, dacă $\bar{x}\in\mathcal{X}$ şi $\bar{u}_j \geqslant 0$, $j\in\bar{M}$ satisfac (I.2.21) atunci $(\bar{x};\bar{u})$ cu $\bar{u}_j = 0$ pentru $j\notin\bar{M}$ verifică condiţiile Kuhn-Tucker (j)-(jv).

Demonstraţie:

Presupunem că $(\bar{x};\bar{u})$ satisface (j)-(jv). Atunci (jjj) implică $\bar{x}\in\mathcal{X}$. In plus, în baza egalităţii (j):

(I.2.22) $\quad \nabla f(\bar{x}) - \sum_{j=1}^{m} \bar{u}_j \nabla g_j(\bar{x}) = 0$

Dar, conform (jj), $\bar{u}_j \geqslant 0$; $j = 1,2,\ldots,m$, iar din (jv) deducem că $\bar{u}_j = 0$ dacă $j\notin\bar{M}$. Atunci (I.2.22) este echivalent cu (I.2.21).

Să considerăm acum că (I.2.21) este verificată de $\bar{x}\in\mathcal{X}$ şi $\bar{u}_j \geqslant 0$, $j\in\bar{M}$. Definind $\bar{u}\in R^m$, cu $\bar{u}_j = 0$ pentru $j\notin\bar{M}$ (jj) şi (jjj) sînt evidente. (I.2.22) decurge din (I.2.21) şi deci şi (j) este verificată de punctul $(\bar{x};\bar{u})$ In sfîrşit, (jv) este verificată datorită definiţiei lui $\bar{u}$.

Observînd că exprimarea lui $\nabla f(\bar{x})$ ca o combinaţie liniară, cu coeficienţi nenegativi de $\nabla g_j(\bar{x})$ se traduce prin apartenenţa vectorului $\nabla f(\bar{x})$ la conul convex generat de vectorii $\nabla g_j(\bar{x})$, $j\in\bar{M}$, putem reformula astfel concluziile teoremei de mai sus : condiţiile Kuhn-Tucker sînt satisfăcute de $\bar{x}\in R^n$ dacă şi numai dacă $\bar{x}$ aparţine domeniului soluţiilor posibile ale problemei şi normala la suprafaţa $f(x) = f(\bar{x})$ în $\bar{x}$ aparţine conului convex generat de normalele, în punctul $\bar{x}$ la suprafeţele frontieră ale domeniului pe care se află $\bar{x}$.

§ 3. PROGRAMAREA LINIARĂ

3.1. Formularea problemei. Proprietățile soluțiilor

Problemele de programare liniară constituie o subclasă a programării matematice convexe, fiind caracterizate prin liniaritatea restricțiilor și a funcției obiectiv.

Enunțul cel mai general al unei probleme de programare liniară poate fi considerat următorul:

(LG) $$\sup_{x\in\mathcal{X}} \{f(x) = c^Tx = (c^1)^Tx^1+(c^2)^Tx^2 + (c^3)^Tx^3\} .$$

$$\mathcal{X} = \left\{ x = \begin{matrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{matrix} \in R^n,\ x^i \in R^{n_i},\ i=1,2,3 \mid x^1 \geq 0,\ x^2 \leq 0, \sum_{i=1}^{3} A_{1i}x^i \leq b^1, \right.$$

$$\left. \sum_{i=1}^{3} A_{2i}x^i = b^2,\ \sum_{i=1}^{3} A_{3i}x^i \geq b^3 \right\}$$

unde $n_1+n_2+n_3 = n$, $c^i \in R^{n_i}$, $m_1+m_2+m_3=m$, $b^j \in R^{m_j}$, $A_{ji} \in \mathcal{M}_{m_j n_i}$.

Prin transformări algebrice elementare, orice problemă de programare liniară poate fi adusă la una din formele de bază, echivalente:

<u>forma canonică</u>

(LC) $$\sup_{x\in\mathcal{X}} \{f(x)=c^Tx\} ,\ \mathcal{X} = \{ x \in R^n \mid x \geq 0,\ (a^j)^Tx-b_j \leq 0, j=1,\dots,m\}$$

unde $a^j \in R^n$, $b_j \in R$; $j = 1,\dots,m$, $c \in R^n$

<u>forma standard</u>

(LS) $$\sup_{x\in\mathcal{X}} \{ f(x)=c^Tx\} ,\ \mathcal{X} = \{x \in R^n \mid x \geq 0, (a^j)^Tx-b_j=0,\ j=1,\dots,m\}$$

Vom utiliza și notațiile:

$$A = \begin{pmatrix} (a^1)^T \\ \cdots \\ \cdots \\ (a^m)^T \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{mn} ,\ b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in R^m$$

Datorită particularităţilor pe care le prezintă, problemele programării liniare se bucură de un plus de proprietăţi care le evidenţiază în mulţimea problemelor programării convexe. Următoarele raţionamente vor fi susţinute pe modelul (LS).

<u>Propoziţia I.3.1</u>. Mulţimea soluţiilor posibile, $\mathcal{X}$, este un tronson convex. Dacă $\mathcal{X} \neq \emptyset$, atunci şi ext.$\mathcal{X} \neq \emptyset$.

Demonstraţie:

Prima afirmaţie este banală. Cea de a doua rezultă din observaţia că $\mathcal{X}$ este mărginită inferior şi din propoziţia A.1.21.

Fie $P_1,\dots,P_n \in R^m$, vectorii coloană ai matricei A şi r = rang A. Deoarece, cu aceste notaţii sistemul $Ax=b$ se poate scrie

$$\text{(I.3.1.)} \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i P_i = b$$

vom face, formal, asociaţia între variabila x_i şi vectorul P_i cu acelaşi indice în (I.3.1.).

<u>Definiţie</u>: O bază a problemei (LS) este un sistem $\{P_{i_1},\dots,P_{i_r}\} \subseteq \{P_1,\dots,P_n\}$ de r vectori liniar independenţi.

Vom folosi notaţia B pentru a indica atît sistemul de vectori $\{P_{i_1},\dots,P_{i_r}\}$ care constituie baza, cît şi matricea $(P_{i_1},\dots,P_{i_r})$, distincţia rezultînd din context.

<u>Definiţie</u>: O bază admisibilă a problemei (LS) este o bază B cu proprietatea că există $x \in \mathcal{X}$ astfel încît.

$$\sum_{k=1}^{r} x_{i_k} P_{i_k} = b$$

Soluţia posibilă x se numeşte <u>soluţie de bază</u> a problemei, asociată bazei B.

Dacă $B = \{P_{i_1},\dots,P_{i_r}\}$ este o bază a problemei (LS), notăm $J = \{i_1,\dots,i_r\}$, $\bar{J} = \{1,\dots,n\} \setminus J$. Vom numi J şi $\bar{J}$ mulţimea indicilor bazici, respectiv nebazici. De asemenea un $P_i \in B$ va fi numit <u>vector bazic</u>, iar x_i cu $i \in J$, <u>variabilă bazică</u> (ceilalţi vectori coloană ai lui A şi celelalte componenete ale lui x primind atributul "nebazic").

Se observă că unei baze admisibile i se asociază, prin definiţia anterioară, o unică soluţie de bază. Reciproc, dacă $x \in \mathcal{X}$ are proprietatea $x_{i_{k+1}} = \ldots = x_{i_n} = 0$ $(k \leq r)$ şi dacă $P_{i_1}, \ldots, P_{i_k}$ sînt liniar independenţi, sistemul $\{P_{i_1}, \ldots, P_{i_k}\}$ poate fi completat pînă la o bază a problemei, astfel încît x să fie o soluţie de bază. Dar, deoarece, completarea nu este, neapărat, unică, rezultă că unei soluţii de bază i se pot asocia baze admisibile diferite.

<u>Definiţie</u>. Dacă o soluţie de bază are exact r componente pozitive, se numeşte nedegenerată. (Altfel, se va numi degenerată).

<u>Propoziţia I.3.2</u>. Mulţimea soluţiilor de bază ale problemei (LS) este ext. $\mathcal{X}$.

Demonstraţie:

Deoarece rangul lui A este r, există r linii liniar independente. Fără a restrînge generalitatea, presupunem că acestea sînt primele r şi fie $\hat{P}_i \in R^r$, vectorul format din primele r componente ale lui P_i, $i = 1,\ldots,n$.

Fie $x \in$ ext.$\mathcal{X}$. Atunci x se găseşte la intersecţia a n hiperplane frontieră liniar independente ale tronsonului convex $\mathcal{X}$. Cum r dintre acestea sînt $(a^j)^T x - b_j = 0$, $j = 1,\ldots,r$, rezultă că celelalte n-r sînt de tipul $x_i = 0$. Fără a restrînge generalitatea putem presupune că x verifică sistemul, format din n ecuaţii liniar independente.

$$(I.3.2) \qquad \begin{aligned} &(a^j)^T x = b_j \; ; \; j=1,\ldots,r \\ &x_i = 0; \; i=r+1,\ldots,n \end{aligned}$$

Deoarece acest sistem este cramerian, observînd că matricea coeficienţilor este:

$$\begin{pmatrix} \hat{P}_1, \ldots, \hat{P}_r, & \hat{P}_{r+1}, \ldots, \hat{P}_n \\ 0 \;\ldots\ldots 0 \;, & 1 \;\ldots\ldots\ldots 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 \;\ldots\ldots 0 \;, & 0 \;\ldots\ldots\ldots 1 \end{pmatrix}$$

rezultă că $P_1,\dots,P_r$ sînt vectori liniar indepedenţi. De aici şi din (I.3.2.) rezultă că x este soluţie de bază.

Reciproc, fie x soluţie de bază şi $P_1,\dots,P_r$ baza admisibilă asociată. Atunci, x este soluţie a sistemului (I.3.2.) şi cele n hiperplane care-l definesc sînt independente (se poate verifica că determinantul matricei asociate este nenul). Deci $x \in \text{ext.}\mathcal{X}$.

Fie $\nu = \sup\limits_{x\in\mathcal{X}} f(x)$

Evident, dacă $\nu<\infty$, atunci $\nu = \max\limits_{x\in\mathcal{X}} f(x)$, punctele de maxim alcătuind mulţimea $\mathcal{O}$ (convexă) a soluţiilor optime ale problemei.

<u>Propoziţia I.3.3.</u> Dacă $\nu<\infty$ atunci $\mathcal{O}\cap\text{ext.}\mathcal{X}\neq\emptyset$ (există cel puţin o soluţie optimă de bază).

Demonstraţie:

Hiperplanul $c^T x = \nu$ este hiperplan de sprijin al tronsonului convex, mărginit inferior, $\mathcal{X}$ şi conform propoziţiei A.1.21. există cel puţin un $x\in\text{ext.}\mathcal{X}$ astfel ca $c^T x = \nu$.

<u>Propoziţia I.3.4.</u> Dacă $\nu<\infty$, $\mathcal{O}$ este un tronson convex. Dacă în plus, $\mathcal{X}$ este mărginită, atunci $\mathcal{O}$ este un poliedru convex şi coincide cu acoperirea convexă a mulţimii soluţiilor optime de bază ($\mathcal{O} = [\mathcal{O}\cap\text{ext.}\mathcal{X}]$)

Demonstraţie:

Evident, $\mathcal{O} = \mathcal{X}\cap\mathcal{H}_{c,\nu}$, deci este un tronson convex.

Dacă $\mathcal{X}$ este mărginită, aceeaşi proprietate va avea şi $\mathcal{O}$. Dar, în acest caz, orice punct extrem al lui $\mathcal{O}$ va fi şi punct extrem al lui $\mathcal{X}$ (conţinut în $\mathcal{H}_{c,\nu}$). In sfîrşit, se ţine seama de propoziţia A.1.25.

3.2. Algoritmul simplex (G.B.Dantzig)

Presupunem rang. A=m şi $\mathcal{X}\neq\emptyset$.

In acest caz, conform propoziţiei I.3.1. ext. $\mathcal{X}\neq\emptyset$ şi orice bază admisibilă constituie o bază în R^m.

In esenţă, algoritmul constă în construcţia succesivă a unei secvenţe de baze admisibile, astfel încît, la fiecare etapă soluţia de bază asociată să fie mai bună decît precedenta (în sensul creşterii valorii funcţiei obiectiv). Deoarece numărul bazelor admisibile este finit, dacă acestea nu se repetă pe parcursul algoritmului, aceasta va conduce la o soluţie optimă de bază într-un număr finit de paşi, sau va demonstra infinitudinea optimului.

Fiecare etapă a algoritmului, asociată unei baze admisibile şi soluţiei de bază corespunzătoare, are trei componente:

a) test pentru verificarea optimalităţii soluţiei

b) test pentru recunoaşterea infinitudinii optimului

c) regulă de obţinere a unei noi soluţii de bază îmbunătăţite.

Fie, la etapa k+1, baza admisibilă $B(k) = \{P_{i_1},\dots,P_{i_m}\}$ şi soluţia de bază asociată x^k.

Dacă $J(k),\bar{J}(k)$ reprezintă mulţimile indicilor bazici şi nebazici, putem presupune că, prin reordonarea termenilor restricţiilor şi ai funcţiei obiectiv, variabilele bazice $x_{i_1},\dots,x_{i_m}$ ocupă primele m locuri, în această ordine.

Notăm:

$$x_{J(k)} = \begin{pmatrix} x_{i_1} \\ \vdots \\ x_{i_m} \end{pmatrix} \quad x_{\bar{J}(k)} = \begin{pmatrix} x_{i_{m+1}} \\ \vdots \\ x_{i_n} \end{pmatrix} \quad c_{J(k)} = \begin{pmatrix} c_{i_1} \\ \vdots \\ c_{i_m} \end{pmatrix}, \quad c_{\bar{J}(k)} = \begin{pmatrix} c_{i_{m+1}} \\ \vdots \\ c_{i_n} \end{pmatrix}$$

$$B(k) = (P_{i_1} \dots P_{i_m}), \quad S(k) = (P_{i_{m+1}} \dots P_{i_n})$$

şi convenim să adoptăm reprezentarea:

$$A = (B(k),S(k)), \quad c = \begin{pmatrix} c_{J(k)} \\ c_{\bar{J}(k)} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_{J(k)} \\ x_{\bar{J}(k)} \end{pmatrix}$$

Deoarece B(k) este o bază în R^m, matricea B(k) este inversabilă. Fie atunci:

$$Z_j^k = B(k)^{-1}P_j, j=1,\dots,n; Z_{J(k)}^k = B(k)^{-1}B(k), Z_{\bar{J}(k)}^k = B(k)^{-1}S(k),$$

$$d_j^k = c_j - c_{J(k)}^T Z_j^k, j=1,\dots,n; \ d_{J(k)}^k = c_{J(k)} - (Z_{J(k)}^k)^T c_{J(k)},$$

$$d_{\bar{J}(k)}^k = c_{\bar{J}(k)} - (Z_{\bar{J}(k)}^k)^T c_{J(k)}$$

şi scriem:

$$Z^k = (Z_{J(k)}^k, Z_{\bar{J}(k)}^k), \quad d^k = \begin{pmatrix} d_{J(k)}^k \\ d_{\bar{J}(k)}^k \end{pmatrix}$$

Se observă că $Z_{J(k)}^k = E_m$ şi $d_{J(k)}^k = 0$

Teorema I.3.1. (Test de optimalitate). Dacă $d_{\bar{J}(k)}^k \leq 0$, atunci $x^k \in \mathcal{O}$.

Demonstraţie:

Rezultă din teorema I.2.9. Intr-adevăr, condiţiile Kuhn-Tucker pentru problema (LS) sînt:

$$x \geq 0 \qquad x^T(c - A^T v) = 0$$

$$c - A^T v \leq 0 \qquad Ax = b$$

Punînd $v^k = (B(k)^{-1})^T c_{(k)}$, un calcul simplu arată că (x^k, v^k) verifică aceste condiţii, ceea ce asigură optimalitatea lui x^k.

Definiţie. Numim baza B(k), satisfăcînd ipotezele teoremei, bază optimală.

Teorema I.3.2 (Test pentru recunoaşterea infinitudinii optimului). Dacă există $j \in \bar{J}(k)$ pentru care $d_j^k > 0$ şi $Z_j^k \leq 0$, atunci $\nu = +\infty$

Demonstraţie:

Fie $x \in R^n$ cu $x_i = 0$, $i \in \bar{J}(k) \setminus \{j\}$ şi $x_{J(k)} = x_{J(k)}^k - x_j Z_j^k$

Se observă că, deoarece $Z_j^k \leq 0$, $x \geq 0$, oricare ar fi $x_j \geq 0$. In plus:

$$Ax = (B(k), S(k)) \begin{pmatrix} x_{J(k)} \\ x_{\bar{J}(k)} \end{pmatrix} = B(k)\left[x_{J(k)}^k - x_j Z_j^k \right] + S(k) x_{\bar{J}(k)} =$$

$$= b - x_j B(k) B(k)^{-1} P_j + x_j P_j = b$$

Deci, $x \in \mathcal{X}$ oricum ar fi ales $x_j \geq 0$.

Pe de altă parte:

$$f(x) = c^T x = (c^T_{J(k)}, c^T_{\bar{J}(k)}) \begin{pmatrix} x_{J(k)} \\ \\ x_{\bar{J}(k)} \end{pmatrix} = c^T_{J(k)} x^k_{J(k)} + x_j (c_j - c^T_{J(k)} Z^k_j) =$$

$$= f(x^k) + x_j d^k_j \ .$$

Deoarece $d^k_j > 0$, pentru $x_j \to \infty$ rezultă $\nu = +\infty$

<u>Corolar</u>. (i) Dacă există $j \in \bar{J}(k)$ pentru care $Z^k_j \leq 0$, atunci $\mathcal{X}$ este nemărginită (cel puţin în coordonata x_j).

(ii) Dacă $\mathcal{X}$ este mărginită situaţia $Z^k_j \leq 0$ $(j \in \bar{J}(k))$ este imposibilă.

<u>Lema I.3.1</u>. Fie $B(k)$ o bază a problemei (LS) (rang.$A=m$), $i \in J(k)$, $j \in \bar{J}(k)$. Atunci $B(k+1) = \{B(k) \setminus \{P_i\}\} \cup \{P_j\}$ este bază dacă şi numai dacă $z^k_{ji} \neq 0$.

<u>Teorema I.3.3</u>. (Regulă pentru îmbunătăţirea soluţiei). Dacă există $j \in \bar{J}(k)$ pentru care $d^k_j > 0$ şi $Z^k_j \nleq 0$, atunci corespunzător oricărui $i \in J(k)$ determinat conform regulei:

$$\text{(I.3.3.)} \qquad \frac{x^k_i}{z^k_{ji}} = \min.\left\{ \frac{x^k_\ell}{z^k_{j\ell}} \;\middle|\; \ell \in J(k),\ z^k_{j\ell} > 0 \right\}$$

$B(k+1) = (B(k) \setminus \{P_i\}) \cup \{P_j\}$ este o bază admisibilă şi soluţia de bază asociată reprezintă o soluţie îmbunătăţită a problemei, adică:

$$f(x^{k+1}) \geq f(x^k)$$

Demonstraţie:

Datorită lemei, $B(k+1)$ este o bază. Vom dovedi că este admisibilă. Fie $x^{k+1} \in R^n$ cu $x^{k+1}_\ell = 0$, $\ell \in \bar{J}(k+1)$, soluţie a sistemului $Ax = b$. Atunci:

$$(B(k), S(k)) \begin{pmatrix} x^{k+1}_{J(k)} \\ \\ x^{k+1}_{\bar{J}(k)} \end{pmatrix} = b$$

şi, deoarece $b = B(k)x^k_{J(k)}$, rezultă:

$$B(k)x^{k+1}_{J(k)} + x^{k+1}_j P_j = B(k)x^k_{J(k)}$$

de unde, înmulţind cu $B(k)^{-1}$;

(I.3.4.) $$x^{k+1}_{J(k)} = x^k_{J(k)} - x^{k+1}_j z^k_j$$

Componenta i a acestei egalităţi implică:

(I.3.5.) $$x^{k+1}_j = \frac{x^k_i}{z^k_{ji}}$$

iar, pentru $\ell \in J(k) \setminus \{i\}$, deducem,

(I.3.6.) $$x^{k+1}_\ell = x^k_\ell - \frac{x^k_i}{z^k_{ji}} z^k_{j\ell}$$

Datorită alegerii lui i se observă că $x^{k+1} \geqslant 0$ şi deci $x^{k+1} \in \mathcal{X}$ iar $B(k+1)$ este o bază admisibilă.

In sfîrşit,

$$f(x^{k+1}) - f(x^k) = c^T_{J(k)}x^{k+1}_{J(k)} + c^T_{J(k)}x^{k+1}_{J(k)} - c^T_{J(k)}x^k_{J(k)} =$$

$$= c^T_{J(k)}x^{k+1}_{J(k)} - x^k_{J(k)} + c_j x^{k+1}_j = -c^T_{J(k)}x^{k+1}_j + c_j x^{k+1}_j$$

deci:

(I.3.7.) $$f(x^{k+1}) - f(x^k) = x^{k+1}_j d^k_j$$

şi deoarece $x^{k+1}_j \geqslant 0$, $d^k_j > 0$, concludem că $f(x^{k+1}) \geqslant f(x^k)$.

<u>Corolar</u>. (i) In ipotezele teoremei, $f(x^{k+1}) = f(x^k)$ dacă şi numai dacă $x^{k+1}_j = 0$, sau, echivalent, $x^k_i = 0$.

(ii) Dacă x^k este soluţie optimă şi există $j \in \bar{J}(k)$ cu $d^k_j = 0$ şi $Z^k_j \nleq 0$, atunci soluţia x^{k+1} asociată oricărei baze $B(k+1) = \left(B(k) \setminus \{P_i\}\right) \cup \{P_j\}$ unde $i \in J(k)$ şi $z^k_{ji} > 0$ este de asemenenea optimă.

(iii) Dacă $x^k_i = 0$ şi $j \in \bar{J}(k)$ astfel ca $z^k_{ji} \neq 0$, atunci $B(k+1)$ de mai sus este bază admisibilă a problemei.

<u>Observaţii</u>: 1) Un calcul asemănător cu cel din demonstraţia teoremei conduce la formulele de calcul ale componentelor lui z^{k+1} şi d^{k+1} direct din mărimile similare ataşate bazei B(k):

$$z_{sj}^{k+1} = \frac{z_{si}^{k}}{z_{ji}^{k}}, z_{s\ell}^{k+1} = z_{s\ell}^{k} - \frac{z_{si}^{k}}{z_{ji}^{k}} z_{j\ell}^{k}, \ \ell \in J(k)\setminus\{i\}, s=1,\dots,n \tag{I.3.8.}$$

$$d_{\ell}^{k+1} = d_{\ell}^{k} - \frac{z_{Pi}^{k}}{z_{ji}^{k}} d_{j}^{k}, \ \ell \in J(k+1) \tag{I.3.9.}$$

2) Mecanismul îmbunătăţirii soluţiei, reglementat de teorema I.3.3. se sprijină, în esenţă, pe alegerea vectorilor P_i şi P_j, satisfăcînd proprietăţile din enunţ. Se constată că restricţiile impuse lasă totuşi o anumită libertate. Experienţa dovedeşte că, adesea, alegerea vectorului P_j, conform regulei:

$$d_{j}^{k} = \max. \left\{ d_{\ell}^{k} \mid d_{\ell}^{k} > 0 \right\}$$

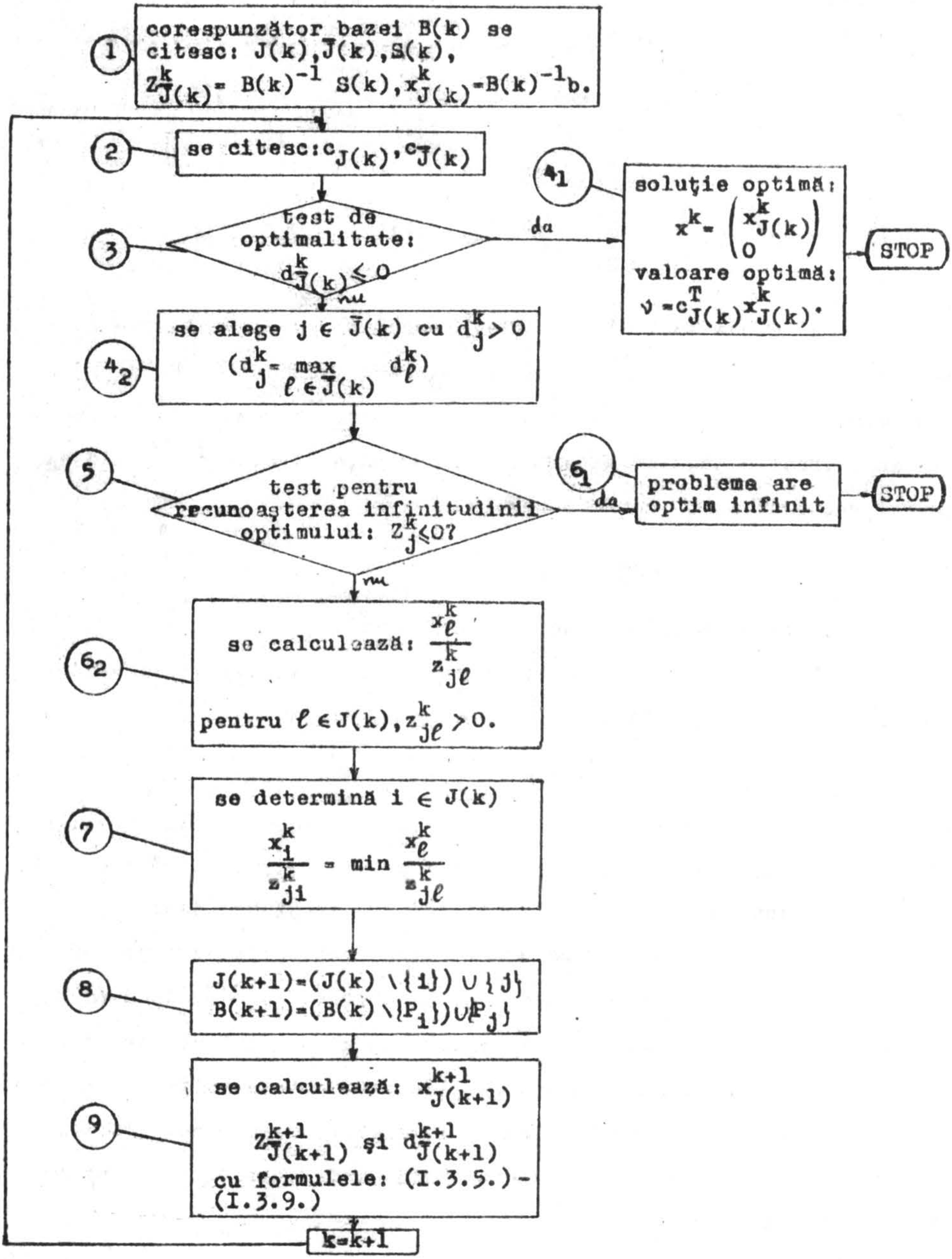
asigură o convergenţă mai rapidă a algoritmului.

O altă regulă posibilă, care prezintă avantajul eliminării oricărei ambiguităţi poate fi:

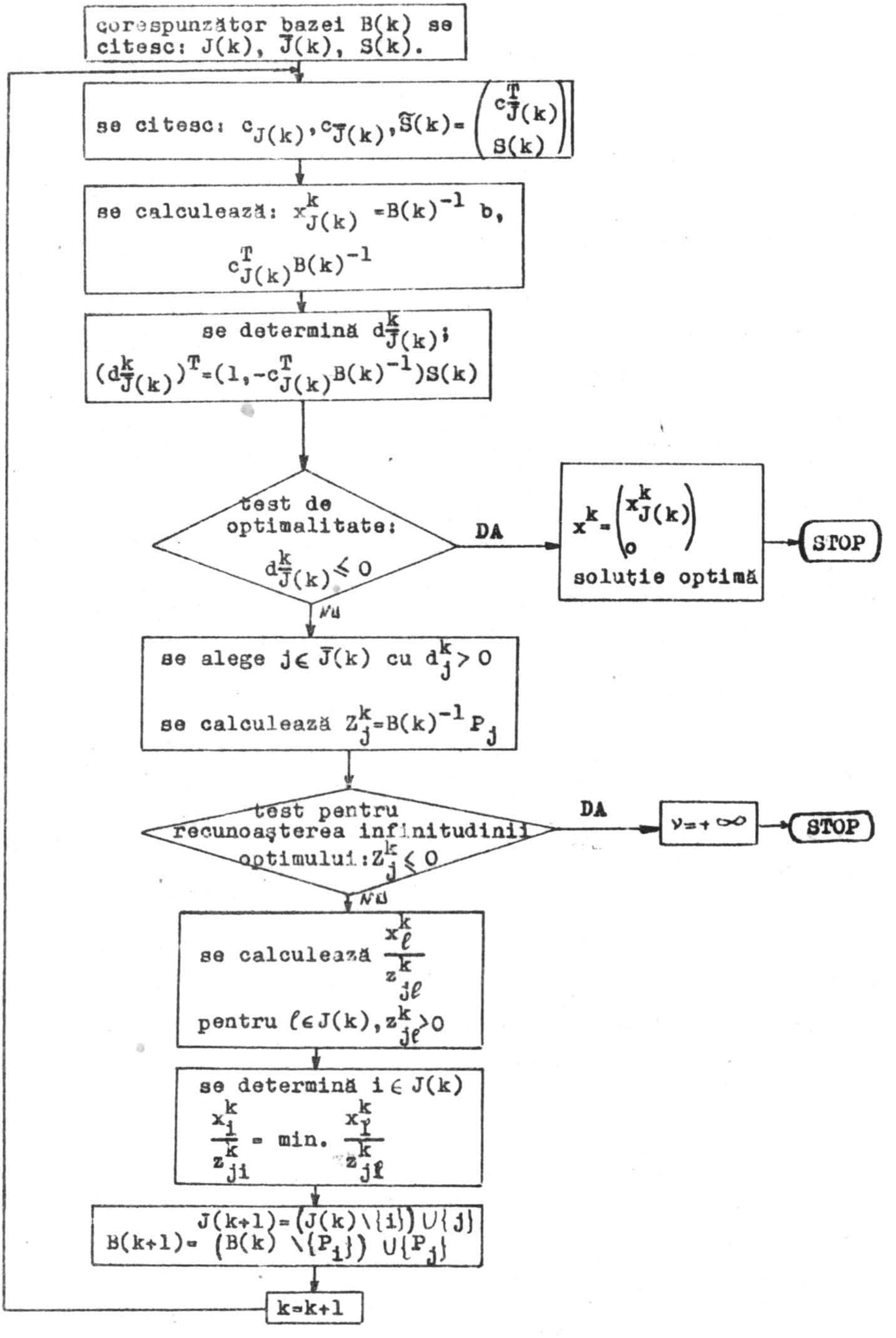
$$j = \left\{\min. \left\{ \ell \in J(k) \mid d_{\ell}^{k} > 0 \right\}\right.$$

In ceea ce priveşte alegerea lui P_i, cazul în care regula (I.3.3.) se dovedeşte ambiguă, poate produce, cel puţin teoretic, dificultăţi. Această situaţie va fi analizată în secţiunea 3.5.

Descrierea sintetică a algoritmului simplex este prezentată în organigramele din schemele 1 şi 2 în cele două versiuni folosite curent - algoritmul simplex "uzual" şi algoritmul simplex "revizuit". Diferenţa dintre cele două versiuni nu este semnificativă referindu-se numai la ordonarea calculelor. Algoritmul simplex revizuit necesită un volum de calcul mai mic şi este preferabil în cazul utilizării calculatoarelor.



Schema 1.: Algoritmul SIMPLEX



Schema nr.2 Algoritmul simplex revizuit

Detalii calculatorii:

Iteratele succesive ale algoritmului simplex comportă o serie de calcule legate de inversarea matricelor asociate bazelor admisibile şi de schimbarea coordonatelor vectorilor x şi P_j.

Formulele (I.3.5.), (I.3.6.), (I.3.8.), (I.3.9.), (bazate, în esenţă, pe metoda eliminării complete Gauss-Jordan) pot fi utilizate în acest scop, ele prezentînd avantajul exploatării particularităţilor construcţiei bazelor admisibile (fiecare nouă bază diferă de precedenta printr-un singur element). S-a remarcat faptul că pentru majoritatea problemelor programării liniare derivate din fenomene practice, matricea A are multe elemente nule. Pe parcursul transformărilor succesive cauzate de aplicarea algoritmului acest caracter se pierde, matricea "umplîndu-se" treptat. Din acest motiv se preferă calculul direct, pornind de la coeficienţii iniţiali, ai inversei $B(k)^{-1}$, la fiecare etapă a algoritmului. Prin aceasta se elimină, în bună măsură şi acumularea erorilor de rotunjire.

3.3. Determinarea unei soluţii de bază iniţială (Tehnica bazei artificiale).

Utilizarea algoritmului simplex pentru rezolvarea problemei programării liniare este condiţionată de cunoaşterea unei baze admisibile care să constituie punctul de plecare al întregului proces calculatoriu. Fără a presupune o investigare prealabilă a naturii sistemului de restricţii şi fără utilizarea unor alte scheme de calcul decît cele ale algoritmului simplex însuşi, se poate satisface şi acest deziderat.

Fie problema (LS) asupra căreia nu facem nici o altă ipoteză restrictivă, decît $b \geq o$ (se pot înmulţi cu -1 ecuaţiile care îi contravin).

Să presupunem că printre coloanele matricei A se găsesc r dintre cei n vectori unitari ai spaţiului R^m. Fără a restrînge generalitatea admitem că $P_i = e^i$, $i=1,\dots,r$.

Fie problema de programare liniară asociată:

(LSA) $$\sup_{\bar{x}\in\bar{\mathcal{X}}} \left\{\bar{f}(\bar{x}) = - \sum_{i=r+1}^{m} x_i^a\right\}$$

unde: $$\bar{\mathcal{X}} = \left\{ \bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ x^a \end{pmatrix},\ x^a = \begin{pmatrix} x_{r+1}^a \\ \dots \\ x_m^a \end{pmatrix} \in R^{m-r} \mid \bar{x} \geqslant 0,\ \bar{A}\bar{x} = b \right\}$$

şi $$\bar{A} = (A,\ e^{r+1},\dots,e^m).$$

In mod curent, noile variabile x^a şi vectorii unitari corespunzători asociaţi lor sînt denumiţi variabile artificiale, respectiv, vectori artificiali.

Propoziţia I.3.5. Rangul matricei $\bar{A}$ este m.

Propoziţia I.3.6. Probleme (LSA) admite soluţii optime.

Demonstraţie:

$\bar{\mathcal{X}} \neq \emptyset$, deoarece $\bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ x^a \end{pmatrix}$ cu $x_i=b_i, i=1,\dots,r; x_i=0, i=r+1,\dots,n;$ $x_i^a=b_i, i=r+1,\dots,n$ constituie o soluţie posibilă a problemei (LSA).
In plus $\bar{f}$ este mărginită superior (de o) pe

Fie $\bar{v}$ valoarea optimului în problema (LSA).

Propoziţia I.3.7. Dacă $\bar{v}<0$, atunci $\mathcal{X} = \emptyset$. Dacă $\bar{v} = 0$, atunci $\mathcal{X} \neq \emptyset$ şi $x \in \mathcal{X}$ ($x \in \text{ext.}\mathcal{X}$) dacă şi numai dacă $\bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ este soluţie optimă (soluţie optimă de bază) a problemei (LSA).

Demonstraţie:

Clar, $x \in \mathcal{X}$ dacă şi numai dacă $\bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \in \bar{\mathcal{X}}$. Pe de altă parte o soluţie posibilă de această formă a problemei (LSA) nu poate fi decît optimă. Cu observaţia că, pentru două soluţii corespondente x şi $\bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ vectorii asociaţi componentelor nenule sînt aceiaşi, se completează demonstraţia.

Fie acum, în ipoteza $\bar{v} = 0, \bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ o soluţie optimă de bază a problemei (LSA) şi $\bar{B}$ baza asociată. Notăm:

$$J_1 = \{j \mid P_j \in \bar{B}\}\ ,\quad J_2 = \{j \mid e^j \in \bar{B},\ j=r+1,\ldots,m\}$$

$$\bar{J}_1 = \{1,\ldots,n\} \setminus J_1, \bar{J}_2 = \{r+1,\ldots,m\} \setminus J_2$$

$$Z_j = \bar{B}^{-1} P_j,\ Y_j = \bar{B}^{-1} e^j$$

Presupunînd $J_2 = \{j_1,\ldots,j_s\}$, $0 \leqslant s \leqslant m-r$, considerăm problema redusă, obţinută din (LSA) prin eliminarea variabilelor artificiale nebazice:

$$(LSA_{\bar{B}}) \qquad \sup_{\bar{x}_J \in \bar{\mathcal{X}}_J} \{\bar{f}(\bar{x}_J) = -\sum_{j \in J_2} x_j^a\}$$

$$\bar{\mathcal{X}}_J = \left\{\bar{x}_J = \begin{pmatrix} x \\ x^a_{J_2}\end{pmatrix},\ x^a_{J_2} = \begin{pmatrix} x^a_{j_1} \\ \vdots \\ x^a_{j_s}\end{pmatrix}\ \bar{x}_J \geqslant 0,\ A_{\bar{B}}\bar{x}_J = b\right\}$$

unde $A_{\bar{B}} = (A, e^{j_1},\ldots,e^{j_s})$.

<u>Propoziţia I.3.8</u>. Valoarea optimă a problemei $(LSA_{\bar{B}})$ este 0, orice soluţie optimă fiind de forma $\bar{x}_J = \begin{pmatrix} x \\ 0\end{pmatrix}, x \in \mathcal{X}. x \in \mathcal{X} (x \in \text{ext}.\mathcal{X})$ dacă şi numai dacă $\bar{x}_J = \begin{pmatrix} x \\ 0\end{pmatrix}$ este soluţie optimă (soluţie optimă de bază) a problemei $(LSA_{\bar{B}})$.

Demonstraţie:

Identică cu cea a propoziţiei anterioare.

<u>Propoziţia I.3.9</u>. Dacă există $i \in J_2$ astfel încît $z_{ki} = 0$, $k \in J_1 \cup \bar{J}_1$, atunci ecuaţia de rang i a sistemului $Ax=b$ este o combinaţie liniară a celorlalte.

Demonstraţie:

Conform ipotezei,

$$P_k = \sum_{j \in J_1} z_{kj} P_j + \sum_{j \in J_2 \setminus \{i\}} z_{kj} e^j,\ k=1,\ldots,n$$

Dacă A^i desemnează sub_matricea $m x(n+s-1)$ a lui $A_{\bar{B}}$ obţinută prin eliminarea coloanei formată de vectorul artificial e^i, egalitatea precedentă arată că fiecare coloană a lui A^i se exprimă ca o combinaţie liniară a celor m-1 coloane P_j, $j \in J_1$ şi e^j, $j \in J_2 \setminus \{i\}$, deci rang.$A^i \leq$ m-1, adică liniile lui A^i sînt liniar dependente. Dacă ($A^i_{k.}$ este linia de rang k a lui A^i, rezultă existenţa constantelor α_k, k=1,...,m, $\sum_{k=1}^{m} \alpha_k^2 \neq 0$, astfel încît:

(I.3.10.)
$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_k A^i_{k.} = 0$$

Se observă că $\alpha_i \neq 0$. Deoarece, în caz contrar, (I.3.10) ar implica:

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{m} \alpha_k A^i_{k.} = 0$$

sau, echivalent, deoarece coloana eliminată din $\bar{A}$ este vectorul unitar e^i;

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{m} \alpha_k \bar{A}_{k.} = 0 \quad (\bar{A}_{k.} \text{ este linia k a lui } A_{\bar{B}})$$

Or, deoarece rangul lui $A_{\bar{B}}$ este m, ultima egalitate implică $\alpha_k=0$, k=1,...,m, în contradicţie cu presupunerea iniţială.

Se poate, deci, împărţi egalitatea (I.3.10.) cu α_i:

$$A^i_{i.} = \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{m} -\frac{\alpha_k}{\alpha_i} A^i_{k.}$$

de unde şi:

(I.3.11.)
$$A_{i.} = \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{m} -\frac{\alpha_k}{\alpha_i} A_{k.}$$

Deoarece sistemul Ax=b este compatibil,

(I.3.12.)
$$b_i = \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{m} -\frac{\alpha_k}{\alpha_i} b_k$$

Relaţiile (I.3.10.) şi (I.3.11.) demonstrează propoziţia.

<u>Propoziţia I.3.10</u>. Dacă $\bar{B}$ este o bază optimală a problemei (LSA) şi $J_2 \neq \emptyset$, atunci una din următoarele două alternative are loc:

1° există $i \in J_2$ astfel ca $z_{ki}=0$, $k \in J_1 \cup \bar{J}_1$

2° există $i \in J_2$, $j \in \bar{J}_1$ astfel ca $\bar{B}' = (\bar{B} \setminus \{e^i\}) \cup \{P_j\}$ va fi bază optimală pentru $(LSA_{\bar{B}})$.

Demonstrație:

Fie $\bar{x}_J = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ soluția optimă a problemei $(LSA_{\bar{B}})$, asociată bazei $\bar{B}$. Deoarece coeficienții funcției obiectiv sînt:

$$\bar{c}_j = \begin{cases} -1, \text{ pentru } j \in J_2 \\ 0, \text{ pentru } j \in J_1 \cup \bar{J}_1 \end{cases}$$

rezultă:

$$\bar{d}_j = \begin{cases} \sum_{\ell \in J_2} z_{j\ell}, \text{ pentru } j \in \bar{J}_1 \\ 0, \text{ altfel} \end{cases}$$

Una din următoarele două afirmații este adevărată:

(i) $\bar{d} = 0$

(ii) există $j \in \bar{J}_1$ cu $\bar{d}_j < 0$.

In ipoteza (i), rezultă, pentru fiecare $j \in J_1 \cup \bar{J}_1$,

$$\sum_{\ell \in J_2} z_{j\ell} = \bar{d}_j = 0$$

De aici, sau 1° se confirmă, sau există $j \in \bar{J}_1$ și $i \in J_2$ astfel ca $z_{ji} \neq 0$. De asemenea, (ii) implică existența unui z_{ji} nenul. In acest caz corolarul (ii) al teoremei I.3.3. conduce la alternativa 2° (deoarece $x_i = 0$).

In concluzie rezumăm metodologia obținerii unei soluții de bază inițială, reglementată de precedentele propoziții:

a) Se rezolvă problema asociată (LSA), utilizînd algoritmul simplex, avînd drept bază admisibilă inițială, baza canonică formată din eventualii vectori unitari existenți printre coloanele lui A și din vectorii artificiali adăugați. Dacă $\bar{v} = 0$ se obține o soluție optimă de bază, de forma $\bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ a problemei (LSA), în care x este o soluție de bază a problemei (LS). Dacă $\bar{v} < 0$, (LS) nu are soluţii.

b) In primul caz nu este, totdeauna, clară componenţa bazei asociate soluţiei x. Neexistînd nici o informaţie prealabilă asupra rangului matricei A, în cazul în care baza optimală a problemei (LSA) conţine şi vectori artificiali, nu se poate decide, direct, dacă rangul lui A este egal sau inferior lui m. Propoziţiile I.3.8.,I.3.10 furnizează un instrument necesar pentru eliminarea completă a tuturor vectorilor artificiali, precum şi a tuturor restricţiilor redundante (vezi schema nr. 4). In final se obţine baza admisibilă căutată.

3.4. Rezolvarea problemei programării liniare utilizînd algoritmul simplex (Metoda celor două faze)

In prealabil se aduce problema în forma standard cu $b \geqslant 0$.

Faza I. Se explorează compatibilitatea sistemului de restricţii rezolvînd problema asociată (LSA). Faza I se încheie în alternativa $\mathcal{X} = \emptyset$ sau prin obţinerea unei baze admisibile (şi a unei soluţii de bază) a problemei (LS).

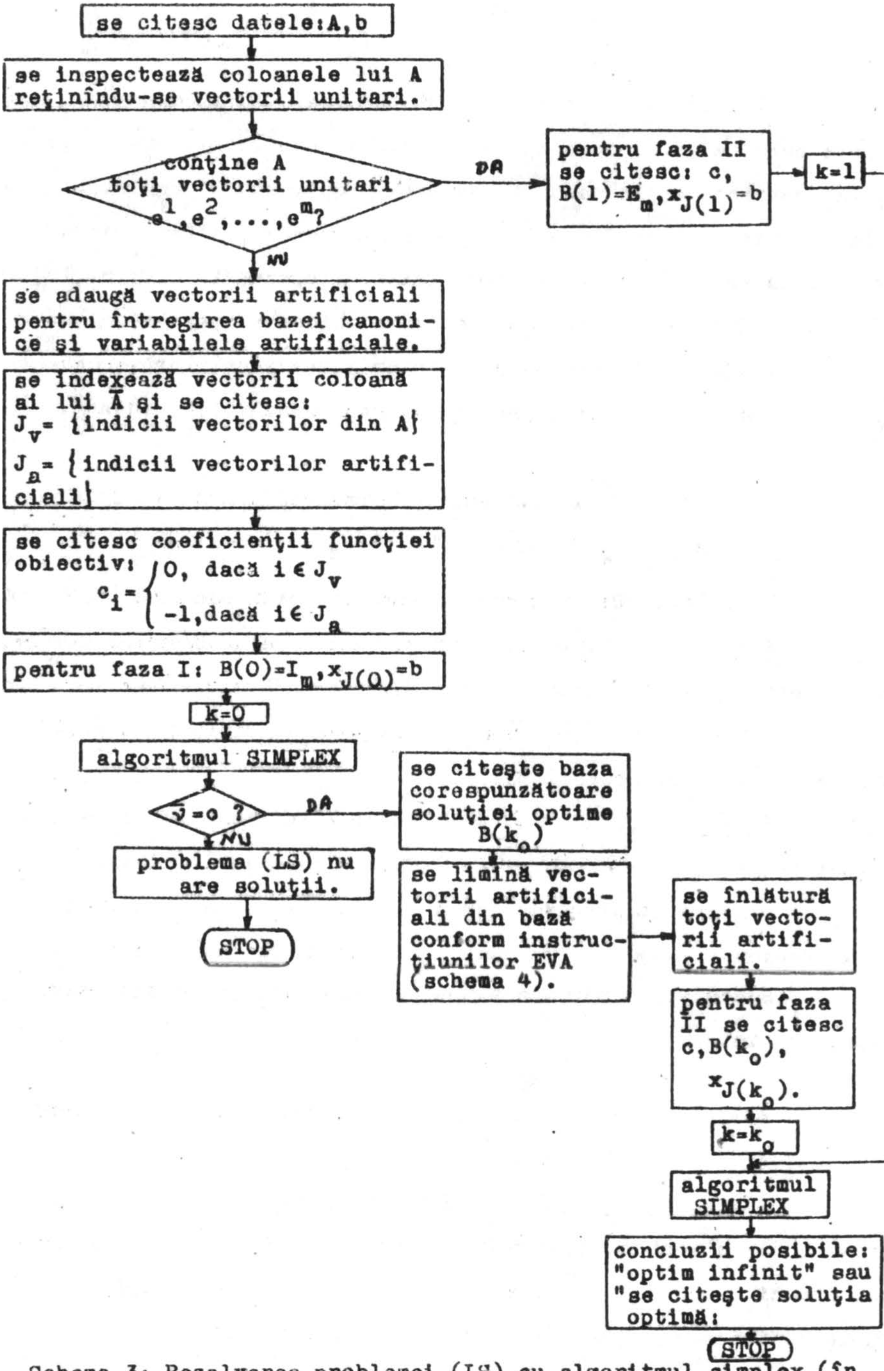
Faza II. In cazul $\mathcal{X} \neq \emptyset$, se rezolvă (LS) utilizînd algoritmul simplex cu baza admisibilă iniţială produsă în faza I.

Algoritmul sfîrşeşte prin obţinerea unei soluţii optime de bază a problemei, sau prin recunoaşterea infinitudinii optimului.

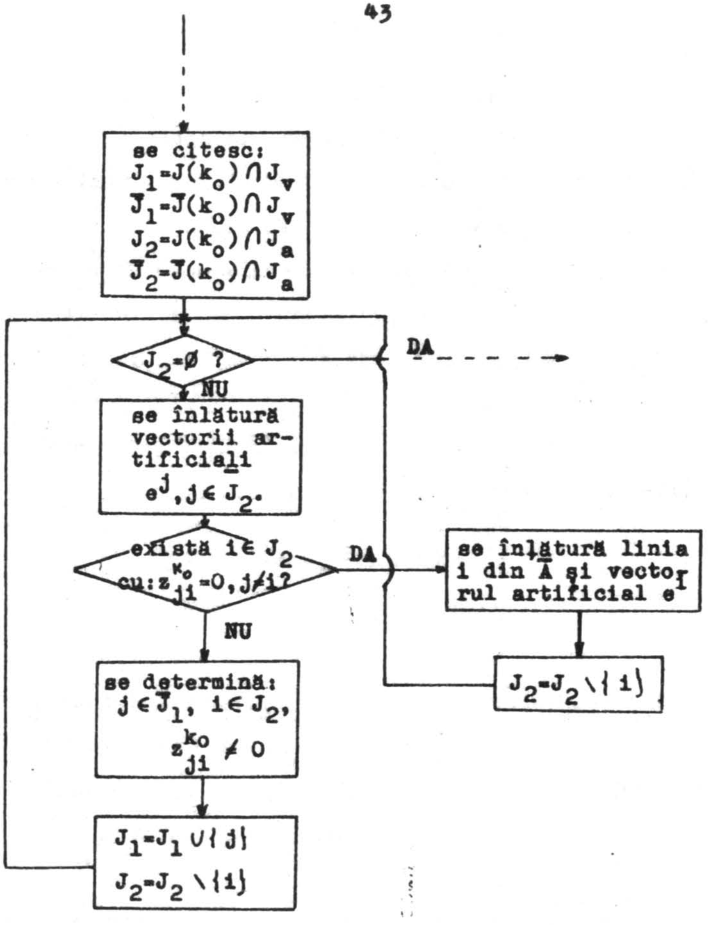
Succesiunea tuturor etapelor rezolvării problemei este sintetizată în schema nr. 3.

3.5. Convergenţa algoritmului simplex (Tehnica perturbării a lui Charnes).

Teorema I.3.4. Fie problema (LS) cu $\mathcal{X} \neq \emptyset$. Dacă iteratele succesive ale algoritmului simplex produc soluţii de bază nedegenerate, atunci algoritmul conduce, după un număr finit de paşi, la o soluţie optimă sau la recunoaşterea infinitudinii optimului.



Schema 3: Rezolvarea problemei (LS) cu algoritmul simplex (în două faze).



Schema 4. Instrucţiuni pentru eliminarea vectorilor artificiali din baza optimă a fazei I- EVA.

Demonstrație:

ext. $\mathcal{X}$ este finită. Fie $x^1, x^2, \ldots, x^k, \ldots$ soluțiile de bază asociate etapelor succesive ale algoritmului. In ipotezele teoremei $f(x^k) < f(x^{k+1})$, $k=1,2,\ldots$ (corolarul teoremei I.3.3.) deci, aceste soluții sînt distincte. De aici concluzia teoremei.

Tehnica perturbării, expusă în continuare, are drept corolar o regulă suplimentară care asigură convergența algoritmului simplex (în sensul teoremei) indiferent de natura soluțiilor de bază care pot apare pe parcursul său.

Fie $B(0) = \{P_{j_1}, \ldots, P_{j_m}\}$ o bază admisibilă a problemei (LS) (rang.A=m) și fie, pentru $\varepsilon > 0$, problema:

$$(LS_\varepsilon) \qquad \sup_{x \in \mathcal{X}_\varepsilon} c^T x \qquad \mathcal{X}_\varepsilon = \{ x \in R^n \mid x \geqslant 0,\ Ax = b(\varepsilon) \}$$

unde $b(\varepsilon) = b + \sum_{r=1}^{n} \varepsilon^r P_{j_r}$

Propoziția I.3.11. Există $\varepsilon_0 > 0$, astfel încît, oricare ar fi $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $B(0)$ este bază admisibilă a problemei (LS_ε), soluția asociată fiind nedegenerată. Dacă, în plus, $B(0)$ este optimală pentru (LS), la fel va fi și pentru: (LS_ε), $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.

Demonstrație:

Fără a restrînge generalitatea, putem presupune că $B(0) = \{P_1, \ldots, P_m\}$. Fie x^0 soluția problemei (LS) asociată bazei $B(0)$ și $x^0(\varepsilon)$ soluția sistemului $Ax=b(\varepsilon)$ pentru care $x^0_{\bar{J}(0)}(\varepsilon) = 0$. Atunci:

$$x^0_{J(0)}(\varepsilon) = B(0)^{-1} b(\varepsilon) = x^0_{J(0)} + \sum_{r=1}^{m} \varepsilon^r e^r + \sum_{r=m+1}^{n} \varepsilon^r z^0_r$$

și, pentru fiecare $i \in J(0)$,

$$x^0_i(\varepsilon) = x^0_i + \varepsilon^i + \sum_{r=m+1}^{n} \varepsilon^r z^0_{ri}$$

Dacă $\mu_i = \min_{r \in \bar{J}(0)} z^0_{ri} \geqslant 0$, atunci, evident, $x^0_i(\varepsilon) > 0$.

Dacă $\mu_i < 0$ şi $\varepsilon \leq 1/2$, putem scrie:

$$x_i^o(\varepsilon) > x_i^o + \varepsilon^{i} + 2\varepsilon^{m+1}\mu_i \geq x_i^o + \varepsilon^m(1+2\varepsilon\mu_i)$$

şi, alegînd $\varepsilon \leq -\frac{1}{2\mu_i}$, rezultă $x_i^o(\varepsilon) > 0$.

In concluzie, luînd $\varepsilon_o = \min\limits_{i \in J(0)} \delta_i$, $\delta_i = \begin{cases} \infty & \text{dacă } \mu_i \geq 0 \\ \min\{1/2, -\frac{1}{2\mu_i}\}, & \text{dacă } \mu_i < 0 \end{cases}$

va rezulta $x^o_{J(0)}(\varepsilon) > 0$, oricare ar fi $\varepsilon \in (0, \varepsilon_o)$.

Ultima afirmaţie a propoziţiei rezultă din faptul că problemele (LS) şi (LS_ε) au comuni coeficienţii variabilelor din funcţia obiectiv şi din sistemul de restricţii, singurile valori care intervin în testarea optimalităţii.

<u>Propoziţia I.3.12</u>. Dacă B este bază admisibilă (optimală) a problemelor (LS_ε) pentru orice $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon})$, ($\bar{\varepsilon} > 0$) şi $x(\varepsilon)$ este soluţia de bază asociată, atunci B este bază admisibilă (optimală) a problemei (LS), iar $x=x(0)$ este soluţia asociată.

Demonstraţie:

$$x_J(\varepsilon) = B^{-1}b(\varepsilon) = B^{-1}b + \sum_{r=1}^{n} \varepsilon^r Z_{j_r}$$

Deoarece membrul drept al acestei inegalităţi este negativ, rezultă, pentru $\varepsilon \to 0, x_J(0) = B^{-1}b \geq 0$, ceea ce dovedeşte că B este bază admisibilă a problemei (LS) iar $x=x(0)$ este soluţia de bază asociată.

In cazul optimalităţii argumentele sînt aceleaşi ca în demonstraţia precedentă.

<u>Propoziţia I.3.13</u>. Dacă B este bază admisibilă a problemelor (LS) pentru orice $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon})$, ($\bar{\varepsilon} > 0$) şi există $j \in \bar{J}$ pentru care $d_j > 0$ şi $Z_j \leq 0$ atunci (LS_ε) şi (LS) au optimul infinit.

Demonstraţie:

Rezultă din precedenta şi din teorema I.3.3.

Propoziţia I.3.14. Fie $B(k)$ bază admisibilă a problemelor (LS_ε) pentru $\varepsilon \in (0, \varepsilon_k)$, $(\varepsilon_k > 0)$ cu proprietatea că soluţia asociată $x^k(\varepsilon)$ este nedegenerată şi fie $j \in \bar{J}(k)$ astfel încît $d_j^k > 0$ şi $z_j^k \nleq 0$. Atunci există $0 < \varepsilon_{k+1} \leq \varepsilon_k$ şi un unic $i \in J(k)$ satisfăcînd (I.3.3.) astfel încît $B(k+1) = \{B(k) \setminus \{P_i\}\} \cup \{P_j\}$ constituie o bază admisibilă îmbunătăţită a problemelor (LS_ε) iar soluţia asociată este nedegenerată.

Demonstraţie:

Presupunem $B(0) = \{P_1, \ldots, P_m\}$. Fie $x^k, x^k(\varepsilon)$ soluţiile problemelor (LS), (LS_ε) asociate lui $B(k)$. Construim secvenţa de mulţimi nevide:

$$J(k) = J^0(k) \supseteq \ldots \supseteq J^s(k)$$

conform regulei de recurenţă:

$$(\text{I.3.13.}) \qquad J^t(k) = \left\{ i \in J^{t-1}(k) \,\middle|\, \frac{z_{t-1\,i}^k}{z_{ji}^k} = \min. \frac{z_{t-1\,\ell}^k}{z_{j\ell}^k},\ \ell \in J^{t-1}(k), \right.$$

$$\left. z_{j\ell}^k > 0 \right\}, \quad t = 1, \ldots, s$$

s fiind primul rang pentru care $|J^s(k)| = 1$. (pentru uniformitatea scrierii notăm $z_{oi}^k = x_i^k$, $i \in J(k)$).

Intr-adevăr, regula (I.3.13) conduce într-un număr de $s < n$ paşi la o mulţime formată dintr-un singur element. In caz contrar, daca $|J^t(k)| \geq 2$, $t=1,\ldots,n$, ar rezulta proporţionalitatea a două (sau mai multe) linii ale lui A, în contradicţie cu ipoteza rang.A=m.

Fie deci, $i \in J(k)$ astfel ca $J^s(k) = \{i\}$.

Pentru orice $\ell \in J(k) \setminus \{i\}$ există $t < s$ astfel ca $j \in J^t(k) \setminus J^{t+1}(k)$ şi atunci:

$$(\text{I.3.14.}) \qquad \frac{x_i^k(\varepsilon)}{z_{ji}^k} - \frac{x_\ell^k(\varepsilon)}{z_{j\ell}^k} = \delta \varepsilon^t + \sum_{r=t+1}^{n} \varepsilon^r \left(\frac{z_{ri}^k}{z_{ji}^k} - \frac{z_{r\ell}^k}{z_{j\ell}^k} \right)$$

unde $\delta = \dfrac{z_{ti}^k}{z_{ji}^k} - \dfrac{z_{t\ell}^k}{z_{j\ell}^k} < 0$.

Notînd cu $\mu_\ell = \max\limits_{t+1 \leq r \leq n} \left(\frac{z^k_{ri}}{z^k_{ji}} - \frac{z^k_{r\ell}}{z^k_{j\ell}}\right)$,

$$\delta_\ell = \begin{cases} \infty, \text{ dacă } \mu_\ell \leq 0 \\ \min. \left\{1/2, -\frac{\delta}{2\mu_\ell}\right\}, \ \mu_\ell > 0 \end{cases}$$

rezultă că, pentru $0 < \varepsilon \leq \delta_\ell$

$$\frac{x^k_i(\varepsilon)}{z^k_{ji}} - \frac{x^k_\ell(\varepsilon)}{z^k_{j\ell}} < 0$$

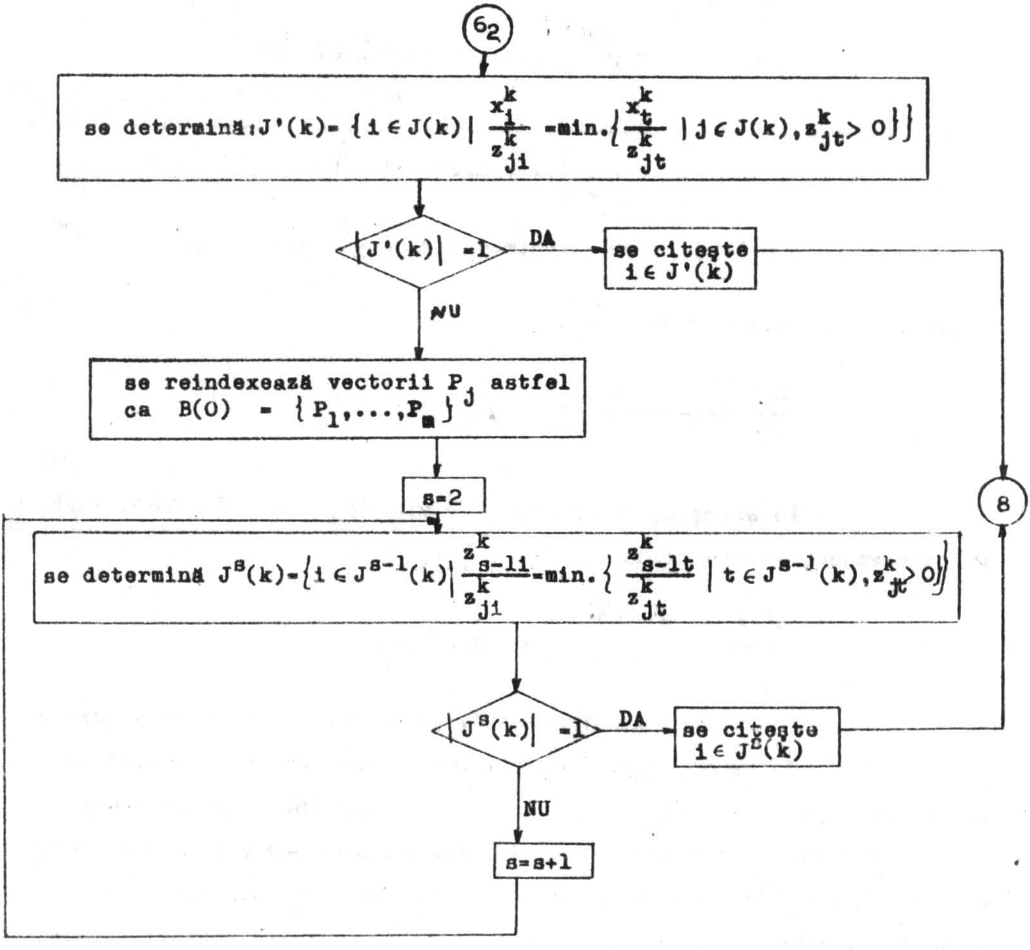
In sfîrşit, punînd $\varepsilon_{k+1} = \min. \{ \varepsilon_k, \delta_\ell, \ \ell \in J(k) \setminus \{i\}\}$ se observă că, pentru orice $\varepsilon \in (0, \varepsilon_{k+1})$,

$$\frac{x^k_i(\varepsilon)}{z^k_{ji}} < \frac{x^k_\ell(\varepsilon)}{z^k_{j\ell}}, \quad \ell \in J(k) \setminus \{i\}$$

De aici şi din teorema I.3.3. rezultă concluziile dorite.

Teorema I.3.5. Presupunem rang.A=m. Fie B(0) o bază admisibilă a problemei (LS). Există $\bar{\varepsilon} > 0$ astfel încît pentru orice $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon})$ algoritmul simplex este convergent pentru problemele (LS_ε). Dacă $x(\varepsilon)$ este soluţia optimă a problemei (LS_ε) atunci $x=x(0)$ este soluţie optimă a problemei (LS); dacă (LS_ε) are optim infinit, atunci (LS) va avea aceeaşi proprietate.

Observaţie: Toate rezultatele acestei secţiuni au fost legate de construcţia unei probleme "perturbate" pentru care se poate garanta convergenţa algoritmului. Dar, toate bazele admisibile ale problemelor perturbate sînt şi baze admisibile ale problemei originare; rezultă de aici că rezolvarea directă a problemei iniţiale cu algoritmul simplex va fi un proces finit dacă se respectă condiţiile evidenţiate. In esenţă, aceste condiţii se concretizează într-o regulă, extrasă din demonstraţia propoziţiei I.3.14. pe care o dăm în schema nr. 5.



Schema nr.5 : Modificarea algoritmului simplex cu regula suplimentară pentru asigurarea convergenţei

3.6. Dualitatea în programarea liniară

Definiție. Se numește duala problemei de programare liniară (LG) problema de programare liniară:

(LGD)
$$\inf_{v\in\mathcal{V}} \left\{ g(v) = (b^1)^T v^1 + (b^2)^T v^2 + (b^3)^T v^3 \right\}$$

$$\mathcal{V} = \left\{ v = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix},\ v^j \in R^{m_j},\ j=1,2,3 \;\middle|\; v^1 \geqslant 0,\ v^3 \leqslant 0, \sum_{j=1}^{3} A_{j1}^T v^j \geqslant c^1, \right.$$

$$\left. \sum_{j=1}^{3} A_{j2}^T v^j \leqslant c^2,\ \sum_{j=1}^{3} A_{j3} v^j = c^3 \right\},$$

Propoziția I.3.15. Duala problemei (LGD) este problema (LG).

Demonstrație:

Se retranscrie problema (LGD) ca o problemă de maxim, scriind apoi duala sa conform definiției. Se obține (LG) dacă se înmulțesc cu -1 restricțiile și se schimbă semnul variabilelor.

Tinînd seama de acest rezultat se observă că prin regula de construcție conținută în definiția dualității, problemele de programare liniară se asociază în perechi - numite cupluri duale.

In terminologia curentă, într-un cuplu de probleme duale una este denumită problema primală, iar cealaltă, problema duală, rolurile putîndu-se inversa.

Considerînd, pe rînd, una dintre probleme enunțată în forma canonică, respectiv, standard, prezentăm două cupluri de probleme duale.

Cuplu simetric de probleme duale:

(LC_1)
$$\sup_{x\in\mathcal{X}} \left\{ f(x) = c^T x \right\}, \quad \mathcal{X} = \left\{ x \in R^n \mid x \geqslant 0,\ Ax \leqslant b \right\}$$

(LC_2)
$$\inf_{v\in\mathcal{V}} \left\{ g(v) = b^T v \right\}, \quad \mathcal{V} = \left\{ v \in R^m \mid v \geqslant 0,\ A^T v \geqslant c \right\}$$

Cuplu nesimetric de probleme duale:

(LS) $\sup_{x \in \mathcal{X}} \{f(x) = c^T x\}$, $\mathcal{X} = \{x \in R^n \mid x \geqslant 0, Ax=b\}$

(LD) $\inf_{v \in \mathcal{V}} \{g(v) = b^T v\}$, $\mathcal{V} = \{v \in R^m \mid A^T v \geqslant c\}$

Propoziţia I.3.16. Fie cuplul dual (LS)-(LD). Dacă $x \in \mathcal{X}$ şi $v \in \mathcal{V}$ atunci $f(x) \leqslant g(v)$.

Demonstraţie:

Inmulţind cu $x \geqslant 0$ inegalitatea $A^T v \geqslant c$ se obţine $x^T A^T v \geqslant x^T c$. Dar, deoarece $x \in \mathcal{X}$, $Ax=b$ sau, $x^T A^T = b^T$ şi atunci, din inegalitatea precedentă rezultă $g(v) \geqslant f(x)$.

Propoziţia I.3.17. Fie cuplul dual (LS)-(LD). Dacă $\bar{x} \in \mathcal{X}$ şi $\bar{v} \in \mathcal{V}$ au proprietatea $f(\bar{x}) = g(\bar{v})$, atunci $\bar{x}$ şi $\bar{v}$ sînt soluţii optime.

Demonstraţia:

Să presupunem, prin absurd, că $\bar{x} \notin \mathcal{O}$. Atunci există $x \in \mathcal{X}$ astfel ca $f(x) > f(\bar{x}) = g(\bar{v})$, în contradicţie cu propoziţia precedentă.

Următoarele două teoreme fundamentale, pe care le vom demonstra pentru cuplul nesimetric de probleme duale, sînt valabile pentru orice cuplu dual.

Teorema I.3.6. (Teorema fundamentală a dualităţii). Pentru un cuplu de probleme duale are loc una şi numai una din următoarele situaţii:

1. ambele probleme admit soluţii optime şi valorile lor optime coincid.

2. nici una dintre probleme nu are soluţii posibile

3. una dintre probleme are optim infinit, iar cealaltă nu admite soluţii posibile.

Demonstraţie:

Separat, fiecare problemă a cuplului dual (LS)-(LD) poate satisface una din cele trei alternative:admite soluţie optimă, are optim infinit, nu are soluţii posibile. Rămîne să arătăm că dintr toate cazurile virtual posibile care rezultă de aici, relativ la cupl numai cele specificate în teoremă nu sînt contradictorii.

Conform teoremei I.2.9. problema (LS) admite o soluţie optimă x dacă şi numai dacă există $v \in R^m$ astfel încît condiţiile Kuhn-Tucker:

$$\text{(i)}\quad x \geqslant 0 \qquad\qquad \text{(ii)}\quad c-A^T v \leqslant 0$$
$$\text{(iii)}\quad x^T(c-A^T v) = 0 \qquad\qquad \text{(iv)}\quad Ax=b$$

să fie satisfăcute.

Este uşor de remarcat că datorită relaţiei (iv), egalitatea (iii) devine $c^T x = b^T v$. Or, în acest caz, ţinînd seama de propoziţie I.3.17. concludem că x este soluţie optimă a problemei (LS) dacă şi numai dacă există o soluţie optimă v a problemei (LD). Cu alte cuvinte, dacă una din cele două probleme admite soluţii optime, acelaşi lucru se poate afirma şi despre cea de a doua. De aici rezultă că ipotezele: "una dintre probleme admite soluţii optime şi cealaltă are optim infinit", "una dintre probleme admite soluţii optime şi cealaltă nu are soluţii" sînt false.

Să presupunem, acum, că $\sup_{x \in \mathcal{X}} f(x) = \infty$. Atunci propoziţia I.3.16. dovedeşte că $\mathcal{V} = \emptyset$. O concluzie similară se degaje în cazul $\inf_{v \in \mathcal{V}} g(v) = -\infty$ Se exclude, deci, şi alternativa: "ambele probleme au optim infinit". Cu aceasta teorema a fost demonstrată.

<u>Teorema I.3.7</u>. (Teorema ecarturilor complementare). Fie x şi v soluţii posibile ale cuplului dual. Atunci x şi v sînt soluţii optime dacă şi numai dacă, corespunzător fiecărei componente nenule x_i (v_j) a uneia din ele, restricţia de rang. i (j) a problemei duale este satisfăcută cu egalitate de către cealaltă soluţie şi, pentru fiecare restricţie de rang j(i) satisfăcută cu inegalitate strictă de soluţia x(v), componenta v_j (x_i) a soluţiei duale este nulă.

Demonstrație:

In cazul cuplului i (LS)-(LD) condiția din enunțul teoremei se scrie:

$$x^T(c-A^Tv) = 0$$

Atunci demonstrația teoremei rezultă din teorema I.2.9.

Corolar. Pentru cuplul dual simetric, (LC_1)-(LC_2), $x \in \mathcal{X}$, $v \in \mathcal{V}$ sînt soluții optime dacă și numai dacă:

$$x^T(c-A^Tv) = 0 \qquad v^T(Ax-b) = 0$$

3.7. Algoritmul simplex dual.

Presupunem că rangul matricei A este m. Fie B o bază a problemei (LS). Păstrăm toate notațiile introduse anterior.

Definiție B se numește bază dual-admisibilă a problemei (LS) dacă:

$$d_{\bar{J}} \leqslant 0$$

$x \in R^m$, asociat bazei B prin

$$Ax=b, \; x_{\bar{J}} = 0$$

se numește soluție dual-posibilă a problemei (LS).

Observație: o soluție dual-posibilă nu este, neapărat, soluție posibilă a problemei (LS) deoarece condiția $x \geqslant 0$ nu a fost impusă în definiția precedentă.

Propoziția I.3.18. B este bază dual-admisibilă a problemei (LS) dacă și numai dacă $v = (B^{-1})^T c_J$ este soluție posibilă a problemei duale (LD).

Propoziția I.3.19. Dacă B este bază optimală a problemei (LS) atunci $v = (B^{-1})^T c_J$ este soluție optimă a dualei (LD) și $v \in \text{ext.}\mathcal{V}$

Demonstrație:

Fie x soluția optimă asociată lui B.

$$g(v) = b^T(B^{-1})^T c_J = x_J^T c_J = c^T x$$

şi atunci, prima afirmaţie rezultă din propoziţiile I.3.17.,I.3.18.

Deoarece $d_J = 0$, rezultă că $P_j^T v = c_j$ şi cum $|J| = m$ şi P_j, $j \in J$ sînt liniar independenţi, concludem că $v \in \text{ext.}\mathcal{V}$.

Fie acum $B(k)$ o bază dual-admisibilă a problemei (LS), x^k soluţia dual-posibilă asociată şi $v^k = (B(k)^{-1})^T c_{J(k)}$ soluţia posibilă a dualei, asociată bazei $B(k)$, în sensul propoziţiei I.3.18.

<u>Teorema I.3.8</u>. (Test de optimalitate). Dacă $x^k \geqslant 0$, atunci x^k este soluţie optimă a problemei (LS).

Demonstraţie:

Evidentă.

In cele ce urmează, Q_i^k desemnează vectorul coloană obţinut prin transpunerea liniei i a matricei $B(k)^{-1}$.

<u>Teorema I.3.9</u>. (Test pentru recunoaşterea incompatibilităţii problemei). Dacă există $i \in J(k)$ astfel încît $x_i^k < 0$ şi $z_{ji}^k \geqslant 0$, $j \in \bar{J}(k)$, atunci problema (LS) nu are soluţii posibile ($\mathcal{X} = \emptyset$).

Demonstraţie:

Definim $v \in R^m$, $v = v^k + \theta Q_i^k$. Pentru fiecare j,

$$v^T P_j = c_{J(k)}^T B(k)^{-1} P_j + \theta (Q_i^k)^T P_j = c_{J(k)}^T Z_j^k + \theta z_{ji}^k$$

Tinînd seama de ipoteze, pentru orice $\theta \geqslant 0, v^T P_j \geqslant c_{J(k)}^T Z_j^k$

şi deoarece $B(k)$ este bază dual-admisibilă, rezultă că $v^T P_j \geqslant c_j$ pentru orice $j \in \bar{J}(k)$, sau, echivalent, $A^T v \geqslant c$.

Astfel, pentru orice $\theta \geqslant 0$, $v = v^k + \theta Q_i^k$ este soluţie posibilă a problemei duale (LD).

Pe de altă parte:

$$g(v) = b^T v = b^T v^k + \theta b^T Q_i^k = g(v^k) + \theta x_i^k$$

Or , deoarece $x_i^k < 0, g(v)$ poate fi făcut oricît de mic prin alegerea convenabilă a lui θ . Deci (LD) are optim infinit şi conform teoremei fundamentale a dualităţii, (LS) nu are soluţii posibile.

Teorema I.3.10. (Regulă pentru îmbunătăţirea soluţiei). Dacă există $i \in J(k)$, astfel ca $x_i^k < 0$ şi dacă nu toţi $z_{\ell i}^k$, $\ell \in \bar{J}(k)$ sînt nenegativi, atunci pentru $j \in \bar{J}(k)$ satisfăcînd condiţia:

(I.3.15.)
$$\frac{d_j^k}{z_{ji}^k} = \min. \left\{ \frac{d_\ell^k}{z_{\ell i}^k} \mid \ell \in \bar{J}(k),\ z_{\ell i}^k < 0 \right\}$$

$B(k+1) = \left(B(k) \setminus \{P_i\}\right) \cup \{P_j\}$ este bază dual-admisibilă şi $g(v^{k+1}) \leqslant g(v^k)$. $(v^{k+1} = (B(k+1)^{-1})^T c_{J(k+1)})$.

Demonstraţie:

Să presupunem că $J(k) = \{1,\dots,m\}$. Deoarece $z_{ji}^k \neq 0$, lema I.3.1. garantează că $B(k+1)$ este o bază pentru (LS). Pentru a arăta că este dual-admisibilă este suficient să verificăm (propoziţia I.3.18.) că v^{k+1} este soluţie posibilă a dualei.

Putem arăta că:

(I.3.16.)
$$v^{k+1} = v^k + \frac{d_j^k}{z_{ji}^k}\ Q_i^k$$

Pentru verificarea validităţii acestei relaţii se face observaţia că, prin înmulţire cu $B(k+1)^T$, se transcrie sub forma:

(I.3.17)
$$c_{J(k+1)} = B(k+1)^T v^k + \frac{d_j^k}{z_{ji}^k}\ B(k+1)^T\ Q_k^i$$

Componentele membrului drept al acestei egalităţi rezultă din calculul de mai jos:

$$(v^k)^T P_\ell + \frac{d_j^k}{z_{ji}^k} (Q_i^k)^T P_\ell = (v^k)^T B(k) Z_\ell^k + \frac{d_j^k}{z_{ji}^k} (Q_i^k)^T B(k) Z_\ell^k =$$

$$= c_{J(k)}^T B(k)^{-1} B(k) Z_\ell^k + \frac{d_j^k}{z_{ji}^k}\ z_{\ell i}^k = c_{J(k)}^T Z_\ell^k + \frac{d_j^k}{z_{ji}^k}\ z_{\ell i}^k$$

sau:

$$
(\mathrm{I.3.18.}) \qquad P^T v^{k+1} = \begin{cases} c_\ell \ , & \text{dacă} \quad \ell \in J(k) \setminus \{i\} \\ c_i + \dfrac{d_j^k}{z_{ji}^k} \ , & \text{dacă} \quad \ell = i \\ c_{J(k)}^T Z_j^k + d_j^k = c_j, & \text{dacă} \quad \ell = j \\ c_{J(k)}^T Z_\ell^k + \dfrac{d_j^k}{z_{ji}^k} z_{\ell i}^k, & \text{dacă} \quad \ell \in J(k) \setminus \{j\} \end{cases}
$$

Se poate acum constata valabilitatea egalităţii (I.3.17.) şi deci şi a lui (I.3.16.). Tot de aici, datorită alegerii indicilor i şi j rezultă

$$
P_\ell^T v^{k+1} \geqslant c_\ell \ , \quad \ell = 1,\dots,m
$$

sau, echivalent, $A^T v^{k+1} \geqslant c$, ceea ce dovedeşte că v^{k+1} este soluţie a dualei (LD).

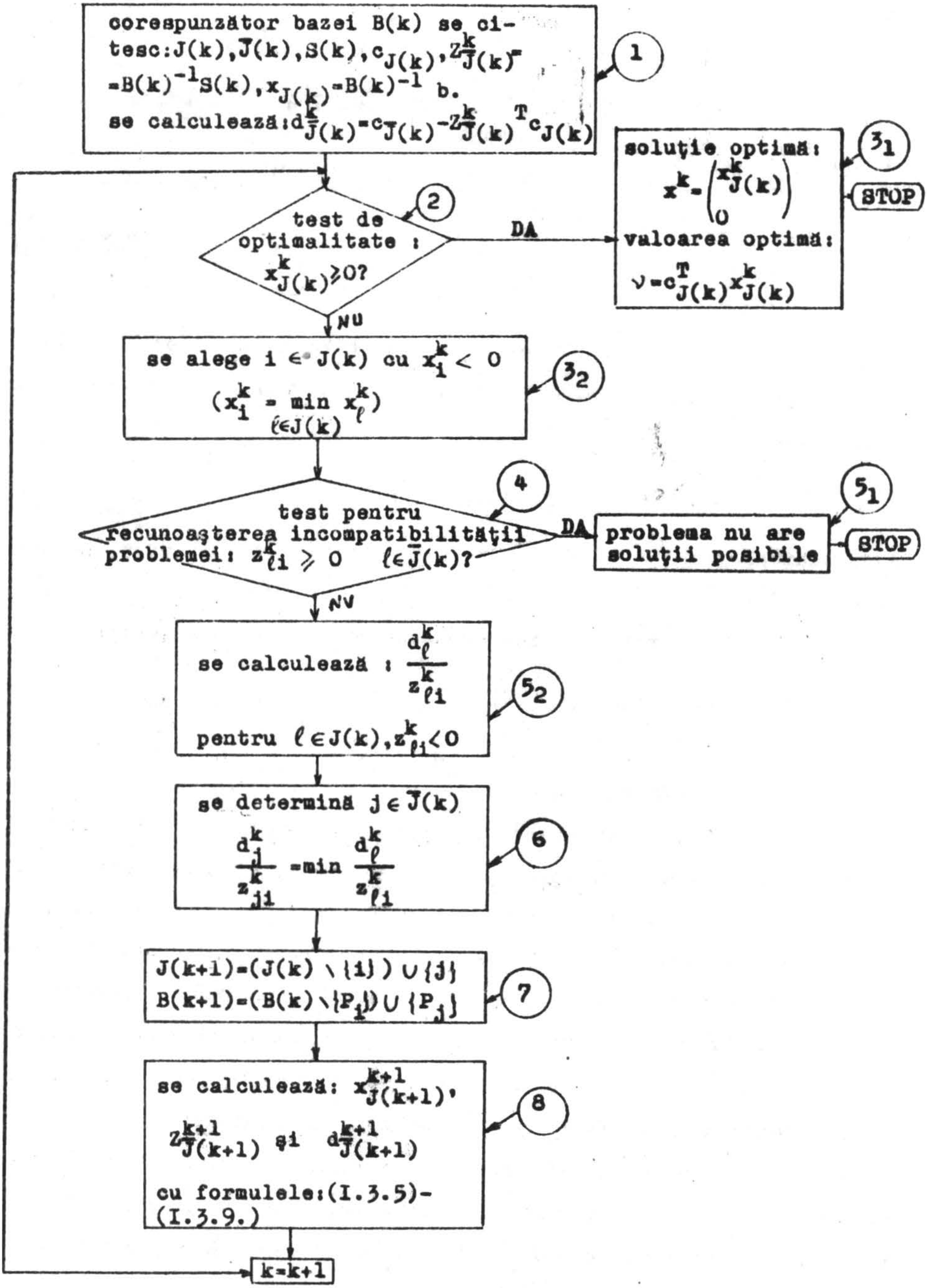
In sfîrşit, ultima parte a teoremei rezultă astfel:

$$
(\mathrm{I.3.19.}) \qquad g(v^{k+1}) = b^T v^k + \frac{d_j^k}{z_{ji}^k} \ b^T Q_i^k = g(v^k) + \frac{d_j^k}{z_{ji}^k} x_i^k \ g(v^k)
$$

inegalitatea fiind implicată de $d_j^k \leqslant 0$, $z_{ji}^k < 0$, $x_i^k < 0$.

<u>Observaţie</u>: Sensul pe care îl acordăm, în această teoremă, procesului de îmbunătăţire a soluţiei nu concordă cu cel atribuit de algoritmul simplex. Intr-adevăr, în algoritmul simplex dual nu se operează cu baze admisibile şi deci, nici cu soluţii posibile. Constucţia din teoremă nu duce la o soluţie posibilă mai bună a problemei (LS) ci la o nouă bază dual-admisibilă, Dar, deoarece soluţia posibilă a problemei duale, ataşată acestei baze este mai bună (pentru (LD)), aceasta îi conferă acelaşi caracter şi noii baze.

In schema nr. 6 redăm ordonarea calculelor implicate de algoritmul simplex dual pentru rezolvarea problemei (LS). Punctul de plecare îl constituie o soluţie dual-posibilă şi baza asociată ei.



Schema nr. 6. Algoritmul simplex dual

3.8. Determinarea unei baze dual-admisibile inițiale

Fie problema (LS) cu rang.A=m și $B=\{P_{j_1},\dots,P_{j_m}\}$ o bază a sa. Asociem problema:

$$(LS_M)\qquad \sup_{\tilde{x}\in\tilde{\mathcal{X}}_M}\{\tilde{f}(\tilde{x})=\tilde{c}^T\tilde{x}\}\quad,\quad \tilde{\mathcal{X}}_M=\left\{\tilde{x}=\begin{pmatrix}x\\ x_a\end{pmatrix}\in R^{n+1}\ \middle|\ \tilde{x}\geq 0,\ \tilde{A}\tilde{x}=\tilde{b}\right\}$$

unde $\tilde{c}=\begin{pmatrix}c\\ 0\end{pmatrix}\in R^{n+1}$, $\tilde{b}=\begin{pmatrix}b\\ M\end{pmatrix}\in R^{m+1}$, $\tilde{A}=\begin{pmatrix}A & 0\\ (e^J) & 1\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{m+1\,n+1}$

$$e_j^J=\begin{cases}1, & j\in J\\ 0, & j\in J\end{cases}\quad, M\in R$$

<u>Propoziția I.3.20</u>. $\tilde{B}=\begin{pmatrix}B & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ este nesingulară și oricare ar fi x soluție a sistemului Ax=b, cu $x_{\bar{J}}=0$, $\tilde{x}=\begin{pmatrix}x\\ M\end{pmatrix}$ este soluție a sistemului $\tilde{A}\tilde{x}=\tilde{b}$.

Notînd cu $\tilde{P}_1,\dots,\tilde{P}_n$, $\tilde{P}_{n+1}$ ($\tilde{P}_{n+1}=e^{m+1}$, cel de al m+1-lea vector unitar al spațiului R^{m+1}) coloanele lui $\tilde{A}$, din propoziție rezultă că $\tilde{B}=\{\tilde{P}_{j_1},\dots,\tilde{P}_{j_m},\tilde{P}_{n+1}\}$ este o bază a problemei (LS_M).

Notăm cu $\tilde{J}=J\cup\{n+1\}$, $\bar{\tilde{J}}=\bar{J}$ mulțimile indicilor bazici și nebazici corespunzători bazei $\tilde{B}$.

<u>Propoziția I.3.21</u>. Presupunem că B nu este bază dual-admisibilă a problemei (LS) și fie $j\in\bar{J}$ astfel ca $d_j=\max\limits_{1\leq k\leq n} d_k>0$. Atunci $\tilde{B}(0)=\{\tilde{P}_{j_1},\dots,\tilde{P}_{j_m},\tilde{P}_j\}$ constituie o bază dual-admisibilă a problemei (LS_M) oricare ar fi M.

Demonstrație:

$\tilde{B}(0)$ este bază. Intr-adevăr, egalitatea:

$\sum\limits_{k\in J}\alpha_k\tilde{P}_k+\alpha_j\tilde{P}_j=0$ implică $\alpha_j=0$ și de aici, datorită independenței elementelor lui B, $\alpha_k=0$, $k\in J$.

Prin calcul rezultă ușor:

$$\tilde{B}(0)^{-1}=\begin{pmatrix}B^{-1} & -B^{-1}P_j\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Atunci:

$$(\tilde{d}^o)^T = \tilde{c}^T - (\tilde{c}^T_{\tilde{J}(0)}\ \tilde{B}(0)^{-1}\tilde{A}) = \tilde{c}^T - (c^T_J, c_j)\begin{pmatrix} B^{-1} & -B^{-1}P_j \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & 0 \\ (e^J)^T & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= (c^T, 0) - (c^T_J B^{-1}A + d_j (e^J)^T, d_j) = (d^T - d_j (e^J)^T, -d_j) < 0$$

inegalitatea datorîndu-se modalităţii de alegere a lui d_j.

<u>Propoziţia I.3.22</u>. Dacă $\mathcal{X} \neq \emptyset$ atunci există $M_o \geq 0$, astfel încît (LS_M) să admită soluţii posibile, oricare ar fi $M \geq M_o$. Dacă (LS_{M_o}) admite o soluţie posibilă, atunci pentru orice $M \geq M_o$, (LS_M) admite, de asemenea, soluţii posibile.

Demonstraţie:

Dacă $x \in \mathcal{X}$, atunci $x_a = M - \sum_{j \in J} x_j \geq 0$ pentru orice $M \geq M_o = \sum_{j \in J} x_j$ şi deci $\tilde{x} = \begin{pmatrix} x \\ x_a \end{pmatrix} \in \tilde{\mathcal{X}}_M$.

<u>Corolar</u>. Dacă $\tilde{B}$ este bază optimală a problemei (LS_{M_o}), atunci este bază optimală pentru toate problemele (LS_M) cu $M \geq M_o$.

<u>Propoziţia I.3.23</u>. Fie, pentru un $M_o \geq 0$, $\tilde{B}^*$ bază optimală a tuturor problemelor (LS_M) cu $M \geq M_o$. Dacă $\tilde{P}_{n+1} \in \tilde{B}^*$ şi dacă $\tilde{x}^*(M) = \begin{pmatrix} x^*(M) \\ x^*_a(M) \end{pmatrix}$ este soluţia asociată, atunci $x^* = x^*(M)$ este soluţia optimă a lui (LS) (fiind, deci, independentă de M).

Demonstraţie:

Fie $\tilde{B}^* = (\tilde{P}_{j_1}, \ldots, \tilde{P}_{j_m}, \tilde{P}_{n+1})$. Atunci $B^* = \{P_{j_1}, \ldots, P_{j_m}\}$ este o bază a problemei (LS). Intr-adevăr, fie $\alpha_k, k=1,\ldots,m$ astfel ca:

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_k P_{jk} = 0$$

Pentru $\alpha_{m+1} = -\sum_{j_k \in J} \alpha_k$, rezultă:

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_k \tilde{P}_{j_k} + \alpha_{m+1}\tilde{P}_{n+1} = 0$$

Ori, această egalitate implică, datorită independenţei vectorilor bazei $\widetilde{B}^*$, $\alpha_k=0$, $k=1,\ldots,m$.

Mai departe, putem scrie:

$$\widetilde{x}^*_{\widetilde{J}^*}(M) = (\widetilde{B}^*)^{-1}\widetilde{b} = \begin{pmatrix} (B^*)^{-1} & 0 \\ -(e^{J\cap J^*})^T(B^*)^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (B^*)^{-1}b \\ M-(e^{J\cap J^*})^T(B^*)^{-1}b \end{pmatrix}$$

unde prin $e^{J\cap J^*}$ am notat vectorul din R^m cu componentele:

$$e_j^{J\cap J^*} = \begin{cases} 1, & \text{dacă } j\in J\cap J^* \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

Deoarece $\widetilde{B}^*$ este bază optimală, $\widetilde{x}^*(M) \geq 0$ şi, de aici, $(B^*)^{-1}b \geq 0$.

Din identitatea $\widetilde{x}^*(M) = \begin{pmatrix} x^*(M) \\ x_a^* \end{pmatrix}$ se vede că $x^*_{J^*}(M) = B^{-1}b$, $x^*_{\bar{J}^*}(M) = 0$.

Deci $x^* = x^*(M)$ este soluţie posibilă a problemei (LS). Pe de altă parte, deoarece $\widetilde{B}^*$ este bază dual-admisibilă,

$$\widetilde{d}^* = \begin{pmatrix} d^* \\ 0 \end{pmatrix} \leq 0$$

De aici, optimalitatea lui x^* .

Propoziţia I.3.24. In condiţiile propoziţiei precedente, dacă $\widetilde{P}_{n+1} \notin \widetilde{B}^*$ atunci va avea loc una din următoarele două alternative:

(i) (LS) are optim infinit

(ii) există $i\in \widetilde{J}^*$ astfel ca $\widetilde{B}^{**} = \left(B^* \setminus \{P_i^*\}\right) \cup \{\widetilde{P}_{n+1}\}$ să fie bază optimală pentru problemele (LS_M), $M \geq M_0$.

Demonstraţie:

Fie $\widetilde{B}^* = \{\widetilde{P}_{j_1},\ldots,\widetilde{P}_{j_m}, \widetilde{P}_{j_{m+1}}\}$. Fără a restrînge generalitatea, putem admite că $P_{j_1},\ldots,P_{j_m}$ sînt liniar independenţi şi

$$\tilde{P}_{j_{m+1}} = \begin{pmatrix} P_{j_{m+1}} \\ 1 \end{pmatrix}$$

(altfel, dezvoltat după ultima linie, ar rezulta det. $\tilde{B}^* = 0$).

Notînd $B^* = (P_{j_1}, \ldots, P_{j_m})$ putem scrie:

$$\tilde{B}^* = \begin{pmatrix} B^* & P_{j_{m+1}} \\ (e^{J \cap J^*})^T & 1 \end{pmatrix}$$

Un calcul elementar arată că:

$$(\tilde{B}^*)^{-1} = \begin{pmatrix} \left[E_m + \alpha (B^*)^{-1} P_{j_{m+1}} (e^{J \cap J^*})^T\right] (B^*)^{-1} & -\alpha (B^*)^{-1} P_{j_{m+1}} \\ -(e^{J \cap J^*})^T (B^*)^{-1} & \alpha \end{pmatrix}$$

unde,
$$\alpha = \frac{1}{1 - (e^{J \cap J^*})^T (B^*)^{-1} P_{j_{m+1}}}$$

Dar, deoarece $\tilde{B}^*$ este bază optimală, deci admisibilă, $\tilde{x}^*(M) \geqslant 0$, oricare ar fi $M \geqslant M_0$. Or,

$$\tilde{x}^*_{\tilde{J}^*}(M) = \begin{pmatrix} \left[E_m + \alpha (B^*)^{-1} P_{j_{m+1}} (e^{J \cap J^*})^T\right] (B^*)^{-1} b - \alpha M (B^*)^{-1} P_{j_{m+1}} \\ -\alpha (e^{J \cap J^*})^T (B^*)^{-1} b + \alpha M \end{pmatrix}$$

Este evident, atunci, că pentru ca $\tilde{x}^*(M) \geqslant 0$, oricare ar fi $M \geqslant M_0$ este necesar ca $\alpha > 0$ (altfel, ultima componentă ar fi negativă, pentru un M suficient de mare). Pe de altă parte, $\tilde{B}^*$ este bază dual-admisibilă a problemelor (LS_M). Deci $\tilde{d}^* \leqslant 0$. In particular, citind pe ultima componentă (a n+1-a), această egalitate vectorială, rezultă:

$$0 \geqslant \tilde{d}^*_{n+1} = 0 - \tilde{c}^T_{\tilde{J}^*} (\tilde{B}^*)^{-1} \tilde{P}_{n+1} = -\left(c^T_{J^*}, c_{j_{m+1}}\right) \begin{pmatrix} -\alpha (B^*)^{-1} P_{j_{m+1}} \\ \alpha \end{pmatrix} =$$

$$= -\alpha d^*_{j_{m+1}}$$

De aici două posibilităţi:

a) $\tilde{d}^*_{n+1} = 0$. Se poate efectua o iterată simplex, cu păstrarea optimalităţii, introducînd în bază pe $\tilde{P}_{n+1}$ (corolarul (ii) al teoremei I.3.3.) şi astfel se verifică alternativa (ii).

b) $\tilde{d}^*_{n+1} < 0$, sau implicit, $d^*_{j_{m+1}} > 0$

Se remarcă uşor că $x^*(M)$, definit prin:

$$x^*_j(M) = \tilde{x}^*_j(M),\ j = 1,\dots,n$$

este soluţie posibilă a problemei (LS), oricare ar fi $M \geq M_0$. Totodată,

$$f(x^*(M)) = \tilde{f}(\tilde{x}^*(M)) = c^T_{J^*}\left[E_m + \alpha(B^*)^{-1}P_{j_{m+1}}(e^{J \cap J^*})^T\right](B^*)^{-1}b -$$

$$- c_{j_{m+1}}(e^{J \cap J^*})^T(B^*)^{-1}b + \alpha M d^*_{j_{m+1}}$$

şi, dacă $M \to \infty$, $f(x^*(M)) \to \infty$, verificîndu-se, astfel, alternativa (i).

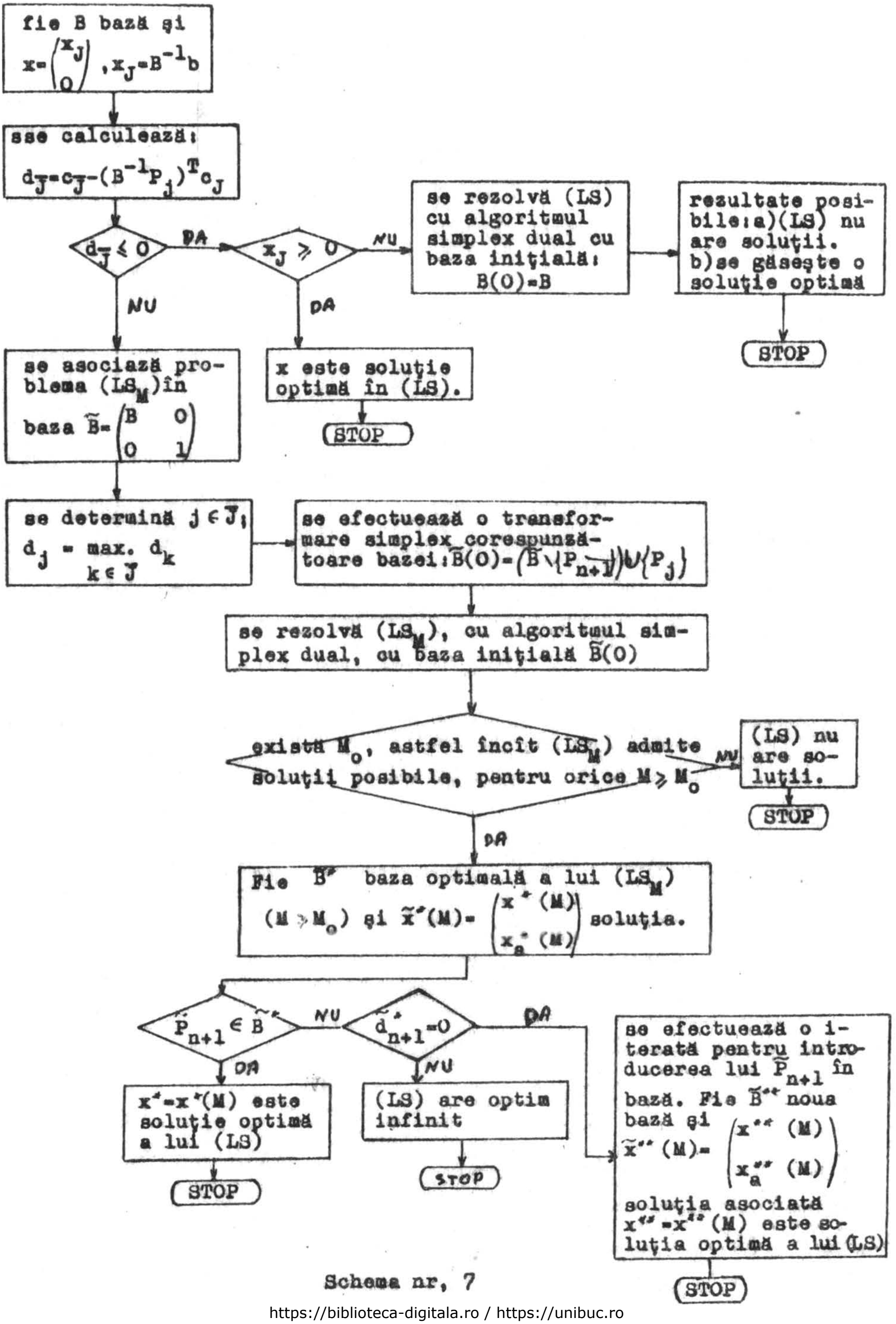
3.9. Rezolvarea problemei (LS) cu algoritmul simplex dual

Presupunem rang.A=m. (vezi schema nr. 7).

3.10. Convergenţa algoritmului simplex dual. (Regula lexicografică)

Algoritmul simplex dual generează un şir $\{B(k)\}_{k=0,1..}$ de baze dual-admisibile, de aşa manieră încît funcţia obiectiv a dualei descreşte pe şirul soluţiilor asociate. Relaţia (I.3.19.) implică descreşterea strictă a lui g, dacă la fiecare pas k, $d^k_j < 0$. (j fiind indicele noului vector bazic), ceea ce are ca efect finitudinea algoritmului (bazele nu se repetă).

Dacă proprietatea de mai sus nu este verificată, posibi-


fie B bază şi
$x=\begin{pmatrix} x_J \\ 0 \end{pmatrix}$, $x_J=B^{-1}b$
sse calculează:
$d_{\bar{J}}=c_{\bar{J}}-(B^{-1}P_j)^T c_J$
$d_{\bar{J}} \leq 0$
DA
$x_J \geq 0$
NU
se rezolvă (LS) cu algoritmul simplex dual cu baza iniţială: B(0)=B
rezultate posibile: a)(LS) nu are soluţii. b)se găseşte o soluţie optimă
STOP
NU
DA
se asociază problema (LS_M) în baza $\tilde{B}=\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
x este soluţie optimă în (LS).
STOP
se determină $j \in \bar{J}$; $d_j = \max_{k \in \bar{J}} d_k$
se efectuează o transformare simplex corespunzătoare bazei: $\tilde{B}(0)=(\tilde{B}\setminus\{P_{n+1}\})\cup\{P_j\}$
se rezolvă (LS_M), cu algoritmul simplex dual, cu baza iniţială $\tilde{B}(0)$
există M_0, astfel încît (LS_M) admite soluţii posibile, pentru orice $M \geq M_0$
NU
(LS) nu are soluţii.
STOP
DA
Fie $\tilde{B}^*$ baza optimală a lui (LS_M) ($M \geq M_0$) şi $\tilde{x}^*(M)=\begin{pmatrix} x^*(M) \\ x_a^*(M) \end{pmatrix}$ soluţia.
$\tilde{P}_{n+1} \in \tilde{B}^*$
NU
$\tilde{d}^*_{n+1}=0$
DA
DA
NU
$x^*=x^*(M)$ este soluţie optimă a lui (LS)
(LS) are optim infinit
se efectuează o iterată pentru introducerea lui $\tilde{P}_{n+1}$ în bază. Fie $\tilde{B}^{**}$ noua bază şi $\tilde{x}^{**}(M)=\begin{pmatrix} x^{**}(M) \\ x_a^{**}(M) \end{pmatrix}$ soluţia asociată $x^{**}=x^{**}(M)$ este soluţia optimă a lui (LS)
STOP
STOP
STOP

Schema nr, 7

litatea ciclajelor nu este eliminată şi deci, algoritmul poate să nu convească.

Ca şi în cazul algoritmului simplex primal, o modificare a procesului calculatoriu (în cazul de faţă, a criteriului de intrare în bază) poate înlătura complet acest impediment.

Fie B(0) o bază dual-admisibilă (iniţială) a problemei (LS) şi x^0 soluţia dual-posibilă asociată.

Fără a restrînge generalitatea, putem presupunem $J(0)=\{1,\ldots,m.\}$

Asociem şirului de baze dual-admisibile $\{B(k)\}$, construite succesiv, pe parcursul rezolvării problemei, sistemele de vectori: $\{X^k,\ \Delta_\ell^k,\ \ell\in \bar{J}(k)\}\subseteq R^{n+1}$ definite astfel:

(I.3.20)
$$X_t^k=\begin{cases} c^Tx^k, & t=0\\ x_t^0, & t=1,\ldots,n\end{cases}$$

(I.3.21.)
$$\Delta_{\ell t}^k=\begin{cases}-d_\ell^k & ,t=0\\ z_{\ell t}^k, & t\in J(k),\quad \ell\in\bar{J}(k)\\ -1, & t=\ell\\ 0, & t\in\bar{J}(k)\setminus\{\ell\}\end{cases}.$$

<u>Propoziţia I.3.25</u>. Dacă $B(k+1)=\left(B(k)\setminus\{P_i\}\right)\cup\{P_j\}$, atunci:

(I.3.22.)
$$X^{k+1}=X^k-\frac{x_i^k}{z_{ji}^k}\Delta_j^k$$

(I.3.23.)
$$\Delta_\ell^{k+1}=\Delta_\ell^k-\frac{z_{\ell i}^k}{z_{ji}^k}\Delta_j^k\quad,\ \ell\in\bar{J}(k+1)\setminus\{i\}$$

(I.3.24.)
$$\Delta_i^{k+1}=-\frac{1}{z_{ji}^k}\Delta_j^k$$

Demonstraţie:

Rezultă imediat din (I.3.5.)-(I.3.9.).

<u>Definiție</u>. Baza B(k) este dual-admisibilă în sens lexicografic (L-dual-admisibilă) dacă $\Delta_\ell^k \succ 0$, $\ell \in \bar{J}(k)$. (Simbolul $\succ$ desemnează relația de ordine "mai mare, în sens lexicografic").

<u>Propoziția I.3.26.</u>) Dacă baza inițială B(0) este L-dual-admisibilă şi dacă, în rezolvarea problemei (LS), regula (I.3.15.) a algoritmului simplex dual se înlocuieşte cu:

(I.3.25.) $\quad j \in \bar{J}(k)$ are proprietatea: $\frac{1}{-z_{ji}^k}\Delta_j^k = \text{L-min.}\ \frac{1}{-z_{\ell i}^k}\Delta_\ell^k$

atunci $\Delta_\ell^k \succ 0$, $k=0,1,\ldots$, $\ell \in \bar{J}(k)$ şi $X^k \succ X^{k+1}$, $k=0,1\ldots$

(L-min. se citeşte "minimul în sens lexicografic").

Demonstrație:

Prima afirmație se demonstrează prin inducție, relativ la k .

Presupunînd $\Delta_\ell^k \succ 0$, $\ell \in \bar{J}(k)$, deoarece $z_{ji}^k < 0$, rezultă imediat din (I.3.24.) că $\Delta_i^{k+1} \succ 0$.

Apoi, dacă $z_{\ell i}^k \geqslant 0$, $\Delta_\ell^{k+1} \succ 0$, fiind suma a doi vectori pozitivi lexicografic. Dacă $z_{\ell i}^k < 0$, deoarece $\Delta_\ell^{k+1} =$
$= z_{\ell i}^k \left(\frac{1}{z_{\ell i}^k}\Delta_\ell^k - \frac{1}{z_{ji}^k}\Delta_j^k\right)$, regula (I.3.25.) asigură L-pozitivitatea lui Δ_ℓ^{k+1} .

Atunci, cea de a doua concluzie a propoziției rezultă direct din (I.3.22.) deoarece $x_i^k < 0$, $z_{ji}^k < 0$, $\Delta_j^k \succ 0$.

<u>Teorema I.3.11</u>. Dacă baza inițială B(0) este L-dual-admisibilă, atunci algoritmul simplex dual modificat conform regulei (I.3.25.) rezolvă problema (LS) într-un număr finit de etape.

Demonstrație:

Dacă nu se verifică, pe parcurs, testul de incompatibilitate, atunci descreşterea strictă (în sens lexicografic) a vectorilor X^k, denotă faptul că bazele, succesiv construite, sînt diferite.

Observaţie: Necesitatea construcţiei ajutătoare definită prin (I.3.20.), (I.3.21.) nu apare decît pe plan teoretic. Practic, discuţia precedentă are ca efect modificarea, în cadrul algoritmului simplex dual, a criteriului de intrare în bază, conform schemei nr. 8 (regula lexicografică de determinare a noului vector bazic).

Construcţia unei baze iniţiale L-dual-admisibile :

(I) Fie B(0) bază dual-admisibilă a problemei (LS) astfel încît $\{j \in \bar{J}(0) \mid \Delta_j^o < 0\} \neq \emptyset$ (vectorii Δ_j^o sînt toţi nenuli).

Urmînd construcţia din § 3.8. considerăm problema (LS_M).

După reindexarea variabilelor, astfel încît $x_o = x_a$ şi $x_1, \ldots, x_m$ să fie variabilele bazice corespunzătoare lui B(0), se poate constata că $\widetilde{B}(0) = \{\widetilde{P}_o, \widetilde{P}_1, \ldots, \widetilde{P}_m\}$ constituie o bază L-dual-admisibilă a problemei (LS_M). Intr-adevăr, pentru $\ell \in \bar{J}(0)$, $\widetilde{\Delta}_\ell^o \in R^{n+2}$ este definit prin:

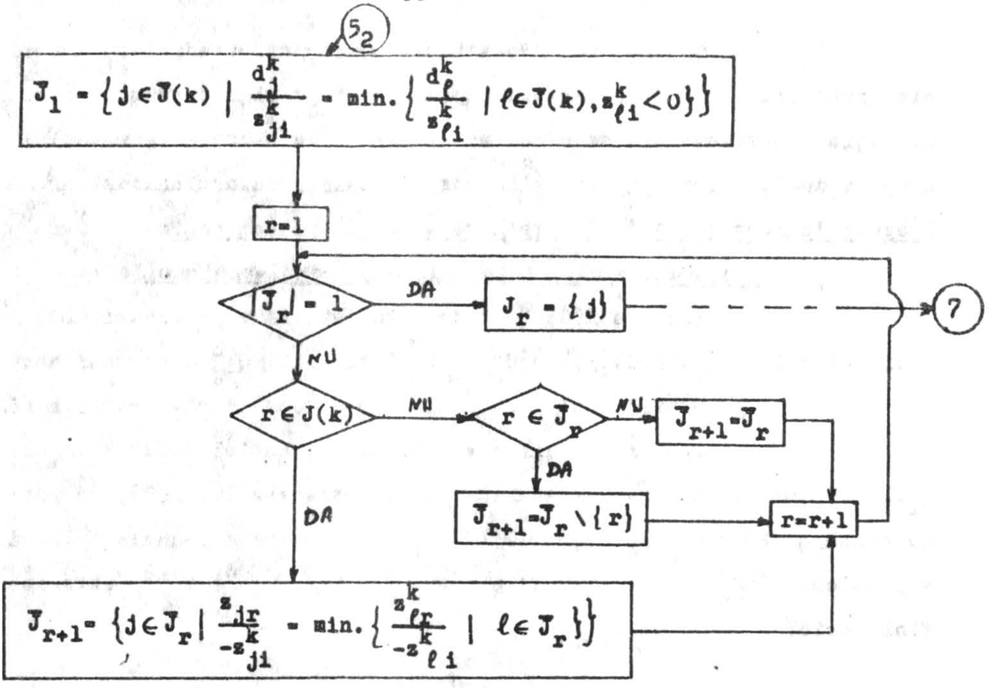
$$\widetilde{\Delta}_{\ell t}^o = \begin{cases} -i_\ell^o, & t=0 \\ 1, & t=a \\ z_{\ell t}^o, & t \in J(0) \\ -1, & t=\ell \\ 0, & t \in \bar{J}(0) \setminus \{\ell\} \end{cases}$$

şi deci, $\widetilde{\Delta}_\ell^o \succ 0$.

(II) Să presupunem acum că $B(0) = \{P_1, \ldots, P_m\}$ este o bază a problemei (LS) care nu este dual-admisibilă. Asociem problema (LS_M). Conform propoziţiei I.3.21., $\widetilde{B}(0) = \{\widetilde{P}_1, \ldots, \widetilde{P}_m, \widetilde{P}_j\}$ ($j \in \bar{J}(0)$ pentru care $d_j^o = \max\limits_{m+1 \leq k \leq n} d_k^o > 0$) constituie o bază dual-admisibilă a problemei (LS_M). Dacă B(0) nu este L-dual-admisibilă, atunci, printr-o succesiune de transformări simplex, se poate obţine o altă bază cu proprietatea dorită. Procedura este dată în discuţia ce urmează.

Fie $S_o = \{j \in \bar{J}(0) \mid \Delta_j^o < 0\}$ (evident, $\widetilde{\Delta}_{jo}^o = 0$).

Se determină $t_1 = \min\{t \mid$ există $\ell \in S_o$; $\widetilde{\Delta}_{\ell \tau}^o = 0$, $\tau < t$, $\widetilde{\Delta}_{\ell t}^o < 0\}$



Schema nr.8: Regula lexicografică pentru modificarea algoritmului simplex dual.

$$S_1 = \{ \ell \in S_o \mid \tilde{\Delta}^o_{\ell t_1} < 0 \} \qquad j_1 \in S_1 \text{ cu } \tilde{\Delta}^o_{j_1 t_1} = \min_{\ell \in S_1} \tilde{\Delta}^o_{\ell t_1}$$

Atunci $\tilde{B}(1) = \{\tilde{P}_1, \ldots, \tilde{P}_m, \tilde{P}_{j_1}\}$ este bază dual-admisibilă și

$$\tilde{x}^1_t = \tilde{x}^o_t, \ \tilde{\Delta}^1_{\ell t} = \tilde{\Delta}^o_{\ell t}, t < t_1, \ \ell \in \bar{\bar{J}}(1) \setminus \{ j \}$$

$$\tilde{\Delta}^1_{\ell t_1} \geqslant 0, \quad \ell \in \bar{\bar{J}}(1)$$

$$\tilde{\Delta}^1_{j t_1} > 0, \tilde{\Delta}^1_{jt} = 0, \ t < t_1, \text{ deci } \tilde{\Delta}^1_j \succ 0.$$

Intr-adevăr, egalitățile (I.3.22.)-(I.3.24.) devin în acest caz:

$$\tilde{X}^1 = \tilde{X}^o - \frac{x^o_j}{1} \tilde{\Delta}^o_{j_1}$$

$$\tilde{\Delta}^1_\ell = \tilde{\Delta}^o_\ell - \tilde{\Delta}^o_{j_1}, \ \ell \in J(1) \setminus \{ j \}$$

$$\tilde{\Delta}^1_j = -\tilde{\Delta}^o_{j_1}.$$

și cum $\tilde{\Delta}^o_{j_1 t} = 0$, $t < t_1$, iar $\tilde{\Delta}^o_{j_1 t_1} < 0$, concluziile sînt evidente.

Dacă $\tilde{B}(1)$ nu este L-dual-admisibilă, atunci, pentru:

$$t_2 = \min. \{ t \mid \text{există } \ell \in S_1, \ \tilde{\Delta}^1_{\ell z} = 0, \ z < t, \ \Delta^1_{\ell t} < 0 \} > i_1$$

se determină $S_2 = \{ \ell \in S_1 \mid \tilde{\Delta}^1_{\ell t_2} < 0 \} \subset S_1$, $j_2 \in S_2$ cu $\tilde{\Delta}^1_{j_2 t_2} = \min_{\ell \in S_2} \tilde{\Delta}^1_{\ell t_2}$

și se face schimbarea de bază:

$$\tilde{B}(2) = \{ \tilde{P}_1, \ldots, \tilde{P}_m, \tilde{P}_{j_2} \} = \left(B(1) \setminus \{ P_{j_1} \} \right) \cup \{ P_{j_2} \}$$

corespunzător căreia numărul vectorilor L-pozitivi crește cu cel puțin 1, etc.

(III) Un interes special îl prezintă situaţia în care B(0) este o bază optimală a problemei (LS). Dacă nu este L-dual-admisibilă, atunci printr-o succesiune de transformări se poate obţine una întrunind ambele calităţi.

Vom analiza numai cazul în care $\mathcal{X}$ este mărginită.

Pornind de la $S_0 = \{ j \in J(0) \mid \Delta_j^0 \prec 0\}$ determinăm succesiv, $\{t_r, S_r, j_r, B(r)\}_{r=1,2,\dots}$ astfel:

$$t_r = \min.\{ t \mid \text{există } \ell \in S_{r-1},\ \Delta_{\ell z}^{r-1} = 0,\ z < t,\ \Delta_{\ell t}^{r-1} < 0\} > i_{r-1}$$

$$S_r = \{ \ell \in S_{r-1} \mid \Delta_{\ell t_r}^{r-1} < 0\} \subset S_{r-1}$$

$$j_r \in S_r \text{ cu } \Delta_{j_r t_r}^{r-1} = \min_{\ell \in S_r}.\Delta_{\ell t_r}^{r-1}$$

$$B(r) = \{B(r-1) \setminus \{P_{i_r}\}) \cup \{P_{j_r}\}$$

unde i_r este indicele vectorului care iese din bază, în procedura simplex.

Formulele (I.3.23.), (I.3.24.) arată că în urma acestor transformări numărul vectorilor Δ_ℓ pozitivi lexicografic creşte ($\Delta_{j_r t}^{r-1} = 0$ pentru $t < t_r$ iar $s_{j_r i_r}^r > 0$), în timp ce corolarul (ii) al teoremei I.3.3. garantează optimalitatea tuturor bazelor B(r).

3.11. Determinarea mulţimii soluţiilor optime ale problemei (LS)

Limităm discuţia numai la cazul în care $\mathcal{O}$ este poliedru convex. (Vezi propoziţia I.3.4.)

<u>Propoziţia I.3.27</u>. Fie B(0) o bază optimală a problemei (LS), astfel ca $d_{J(0)}^0 < 0$. Dacă x^0 este soluţia asociată, $\mathcal{O} = \{x^0\}$.

Demonstrație:

$v^{o} = (B(O)^{-1})^{T}c_{J(O)}$ este soluție optimă a problemei duale.

Atunci teorema ecarturilor complementare asigură că orice soluție optimă x a problemei (LS) satisface egalitatea:

$$x^{T}(c-A^{T}(B(O)^{-1})^{T}c_{J(O)}) = 0$$

și de aici,

$$x_{\bar{J}(O)} = 0$$

Atunci, din $Ax=b$, rezultă $x_{J(O)}=B(O)^{-1}b=x^{o}_{J(O)}$ și deci $x=x^{o}$.

<u>Teorema I.3.12</u>. Algoritmul descris în schema nr. 9 determină toate soluțiile optime ale problemei (LS).

Demonstrație:

Pornind de la un $x^{o} \in \text{ext.}\,\mathcal{O}$ se determină toate vîrfurile lui $\mathcal{O}$, adiacente lui x^{o}. Intr-adevăr, dacă B(O) este baza optimală asociată lui x^{o}, orice vîrf al poliedrului convex $\mathcal{O}$, adiacent lui x^{o}, este o soluție optimă de bază $x \neq x^{o}$, asociată unei baze de forma $B=(B(O) \setminus \{P_i\}) \cup \{P_j\}$, $i \in J(O)$, $j \in \bar{J}(O)$.

Fie B de forma specificată. Vom examina toate alternativele potențiale:

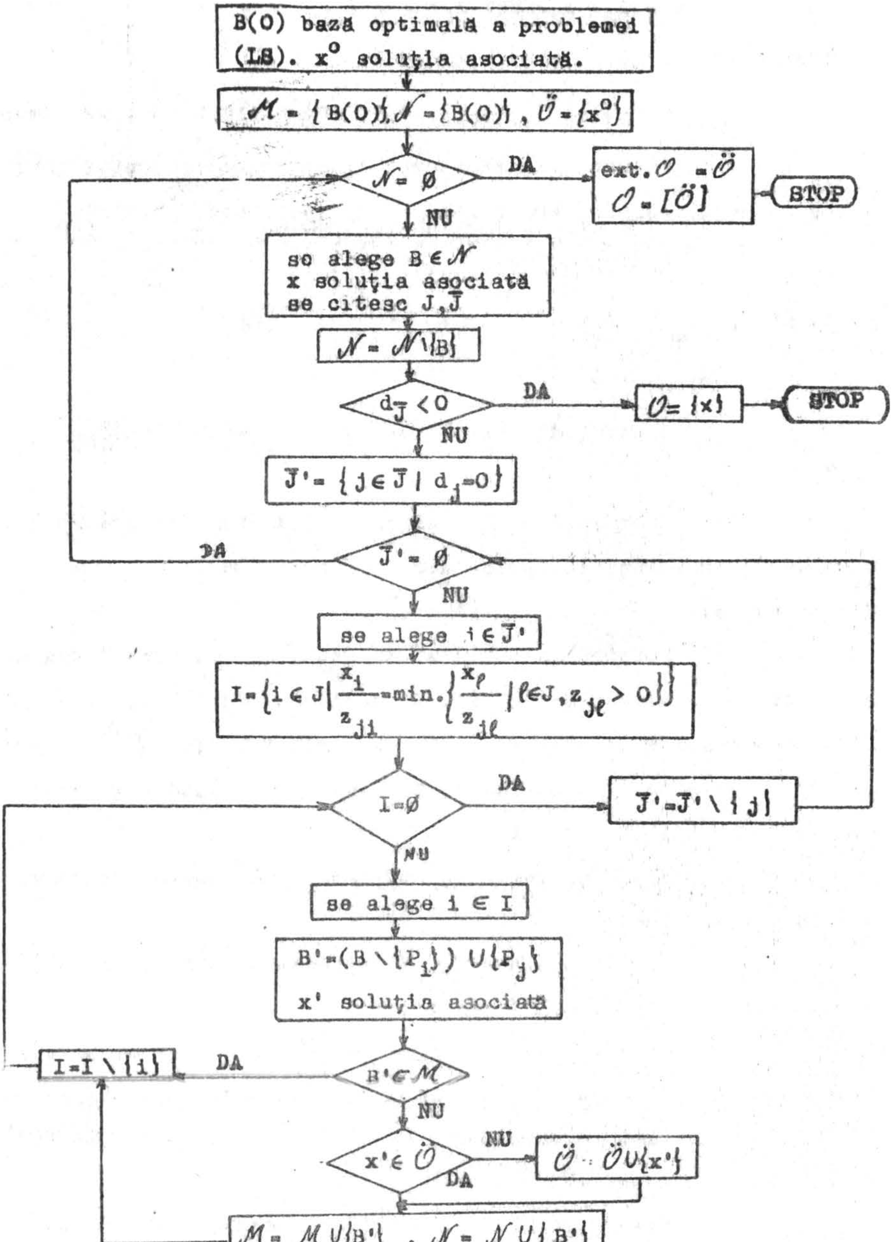
(i) situația $z^{o}_{ji}=0$ este incompatibilă cu cerința de independență a sistemului B (lema I.3.1.)

(ii) situația $d^{o}_{j}<0, x^{o}_{i}>0, z^{o}_{ji}>0$, conduce la $f(x)<f(x^{o})$, ceea ce contrazice optimalitatea lui x (chiar dacă x ar fi în $\mathcal{X}$).

(iii) situația $d^{o}_{j}<0, x^{o}_{i}>0, z^{o}_{ji}<0$ conduce la $f(x)>f(x^{o})$, imposibilă, deoarece $x^{o} \in \mathcal{O}$.

(iv) dacă $x^{o}_{i}=0$, se obține o nouă bază admisibilă corespunzătoare aceleeași soluții de bază (în acest caz $x_j=0$ și deci $x=x^{o}$)

(v) situația d^{o}_{j} este explorată de algoritm, în cadrul reglementărilor metodei simplex


B(O) bază optimală a problemei (LS). x° soluţia asociată.
M = {B(O)}, N = {B(O)}, Ö = {x°}
N = Ø
DA
ext. O = Ö
O = [Ö]
STOP
NU
se alege B ∈ N
x soluţia asociată
se citesc J, J̄
N = N \ {B}
d_J̄ < O
DA
O = {x}
STOP
NU
J' = {j ∈ J̄ | d_j = O}
DA
J' = Ø
NU
se alege j ∈ J'
I = {i ∈ J | x_i / z_ji = min. {x_l / z_jl | l ∈ J, z_jl > O}}
I = Ø
DA
J' = J' \ {j}
NU
se alege i ∈ I
B' = (B \ {P_i}) ∪ {P_j}
x' soluţia asociată
I = I \ {i}
DA
B' ∈ M
NU
x' ∈ Ö
NU
Ö = Ö ∪ {x'}
DA
M = M ∪ {B'}, N = N ∪ {B'}

Schema nr. 9

3.11. Problema transporturilor; formularea problemei, soluții

Problema transporturilor constituie un caz particular al problemei programării liniare.

Din considerate legate de interpretarea economică a modelului problema transporturilor este enunțată, de regulă, ca o problemă de minim:

$$\inf_{x\in\mathcal{X}}\left\{f(x)=\sum_{i,j=1}^{m,n} c_{ij}x_{ij}\right\} \quad , \mathcal{X}=\left\{x=(x_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}} \;\middle|\; x\geqslant 0,\ \sum_{j=1}^{n}x_{ij}\leq a_i,\right.$$

$$\left. i=1,2,\dots,m;\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij}\geqslant b_j\ ,\ j=1,2,\dots,n\right\}$$

unde $a_i, b_j > 0$, $c_{ij}\geqslant 0$, $i=1,2,\dots,m$, $j=1,2,\dots,n$, $\sum_{i=1}^{m} a_i \geqslant \sum_{j=1}^{n} b_j$.

In raționamentele expuse în continuare, x poate fi privit, după caz, sau ca un vector în R^{mn} :

$$x = \begin{pmatrix} x_{11}\\ x_{12}\\ \vdots\\ x_{1n}\\ x_{21}\\ \vdots\\ x_{mn}\end{pmatrix}$$

sau ca o matrice din $\mathcal{M}_{mn}$ cu element generic x_{ij}.

Corespunzător, coeficienții c_{ij} ai variabilelor din funcția obiectiv, capătă structura vectorului $c\in R^{mn}$ sau a matricei $c\in\mathcal{M}_{mn}$.

Forma standard (sau forma echilibrată) a problemei este:

(T) $$\inf_{x\in\mathcal{X}}\left\{f(x)=c^T x\right\}\ ,\ \mathcal{X}=\left\{x\in R^{mn}\mid x\geqslant 0,\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij}=a_i, i=1,2,\dots,m;\right.$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij}=b_j,\ j=1,2,\dots,n\} .$$

unde a_i, $b_j > 0$, $c_{ij} \geqslant 0$, $i=1,2,\dots,m$, $j=1,2,\dots,n$, $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$.

Observaţie: Aducerea problemei la forma (T) se poate face definind $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$, transformînd primele m restricţii în egalităţi prin adăugarea membrului sting al restricţiei de rang i a variabilei ecart x_{in+1}, înlocuind semnul " $\geqslant$ " cu "=" în ultimele n restricţii şi adiţionînd restricţiile:

$$x_{in+1} \geqslant 0,\ i=1,2,\dots,m\ ,\ \sum_{i=1}^{m} x_{in+1} = b_{n+1} .$$

Modelul de bază al problemei, asupra căruia ne oprim în următoarele este (T).

Teorema I.3.13. $\mathcal{X}$ este un poliedru convex, nevid.

Demonstraţie:

Definind x, cu $x_{ij} = \frac{a_i b_j}{M}$, $i=1,2,\dots,m$, $j=1,2,\dots,n$, se verifică că $x \in \mathcal{X}$. Pe de altă parte oricare ar fi $x \in \mathcal{X}$, $0 \leqslant x_{ij} \leqslant \min(a_i, b_j)$, deci $\mathcal{X}$ este mărginită.

Corolar: Problema (T) admite optim finit ($\mathcal{O} \neq \emptyset$).

Propoziţia I.3.28. Matricea coeficienţilor sistemului de ecuaţii care defineşte pe $\mathcal{X}$ are rangul m+n-1.

Demonstraţie:

Notînd cu P_{ij} vectorul coeficienţilor variabilei x_{ij} din sistemul de ecuaţii menţionat, se remarcă că:

$$P_{ij}=e^{i} + e^{m+j} \quad (e^{k} \text{ denotă vectorul unitar din } R^{m+n})$$

Corespunzător reprezentării vectoriale ale lui x , structura matricei A va fi:

$$A = (P_{11}, P_{12},\dots,P_{1n} , P_{21},\dots,P_{m1},\dots,P_{mn})$$

Dacă a_k^T este linia de rang k a lui A, este clar că:

$$\sum_{k=1}^{m} a_k^T - \sum_{k=m+1}^{m+n} a_k^T = 0$$

deci, rang. A < m+n.

Fie submatricea pătrată de ordin m+n-1 a lui A:

$$B = (\hat{P}_{1n}, \hat{P}_{2n}, \ldots, \hat{P}_{mn}, \hat{P}_{11}, \hat{P}_{12}, \ldots, \hat{P}_{1n-1})$$

unde, $\hat{P}_{ij} \in R^{m+n-1}$ se obţine din P_{ij} prin suprimarea ultimei componente. B este de forma:

$$B = \begin{pmatrix} I_m & B' \\ 0 & E_{n-1} \end{pmatrix}$$

deci, det. B=1, ceea ce demonstrează propoziţia.

Propoziţia I.3.29. Matricea A este unimodulară (Orice minor al său ia una din valorile: 0, $\pm$ 1).

Demonstraţie:

Prin inducţie relativ la ordinul k al minorului D^k:

Pentru k=1, evident D^k = 0 sau 1.

Fie D^k minor de ordin k. Deoarece, fiecare coloană a lui A are exact două elemente nenule (egale cu 1), este adevărată una din afirmaţiile:

(i) toate coloanele lui D^k au două elemente nenule.

(ii) există o coloană cu mai puţin de două elemente nenule.

Atunci:

- în cazul (i), D^k=0, deoarece suma liniilor sale plasate pe primele m linii ale lui A este egală cu suma liniilor sale situate pe ultimele n linii ale lui A.

- în cazul (ii), dacă coloana în cauză este nulă, evident şi D^k=0. Altfel, dezvoltîndu-l pe D^k după coloana cu un unic element nenul ($\pm$1), rezultă:

$$D^k = \pm D^{k-1}$$

şi, în baza ipotezei de inducţie, D^k poate lua doar una din cele trei valori specificate în enunţ.

<u>Propoziţia I.3.30</u>. Orice soluţie de bază a problemei (T) este funcţie liniară, cu coeficienţii 0, ± 1 de parametri a_i, b_j.

Demonstraţie:

Rezultă din propoziţia precedentă, observînd că pentru orice bază B, det. B= ± 1 şi că elementele lui B^{-1} nu pot fi decît 0, 1 şi -1. (In scrierea lui B se poate presupune că o restricţie a problemei a fost eliminată).

<u>Corolar</u>: Dacă a_i, b_j ; $i=1,2,\dots,m$, $j=1,2,\dots,n$ sînt numere întregi, atunci orice soluţie de bază a problemei (T) are componentele întregi.

<u>Propoziţia I.3.31</u>. Dacă $x \in \mathcal{X}$, atunci oricare ar fi $i \in \{1,2,\dots,m\}$ $(j \in \{1,2,\dots,n\})$ există $j \in \{1,2,\dots,n\}$ $(i \in \{1,2,\dots,m\})$ astfel ca $x_{ij} \neq 0$.

Demonstraţie:

Rezultă imediat din condiţiile $a_i > 0$, $b_j > 0$, satisfăcute problema (T).

<u>Propoziţia I.3.32</u>. Fie $x \in \text{ext.}\mathcal{X}$ şi J mulţimea perechilor de indici bazici. Una din alternativele:

1° Există $i, \ell \in \{1,2,\dots,m\}$ astfel încît:

$$|\{j \mid (i,j) \in J\}| = |\{j \mid (\ell,j) \in J\}| = 1$$

2° există $j,k \in \{1,2,\dots,n\}$ astfel încît:

$$|\{i \mid (i,j) \in J\}| = |\{i \mid (i,k) \in J\}| = 1$$

3° există $i \in \{1,2,\dots,m\}$, $j \in \{1,2,\dots,n\}$ astfel încît:

$$|\{k \mid (i,k) \in J\}| = |\{\ell \mid (\ell,j) \in J\}| = 1$$

este verificată.

Demonstraţie:

In caz contrar, ţinînd seama de propoziţia precedentă ar rezulta că J are cel puţin max (2m,2n) elemente ceea ce contravine propoziţiei I.3.28.

<u>Propoziţia I.3.33</u>. Fie $J' \subseteq \{1,2,\ldots,m\} \times \{1,2,\ldots,n\}$ astfel ca:

$$J' = \{(i_o,j_o),\ (i_1,j_o),\ldots,(i_q,j_q),\ (i_o,j_q)\}$$

Atunci vectorii sistemului $\{P_{ij}\}_{(i,j)\in J'}$ sînt liniar dependenţi.

Demonstraţie:

Se remarcă uşor că combinaţia liniară cu coeficienţii alternaţi ± 1 este nulă.

<u>Observaţie</u>: Numărul elementelor lui J' trebuie să fie par.

Vom numi o asemenea mulţime de indici un <u>T-ciclu</u> (al problemei date). $J' \setminus \{(i_o,j_o)\}$ va fi numită <u>T-lanţ</u> asociat lui (i_o,j_o).

<u>Propoziţia I.3.34</u> Fie $x \in \text{ext.}\mathcal{X}$ şi $(i,j) \in J$. Există atunci un unic T-lanţ asociat lui (i,j), $J'' \subset J$:

$$J'' = \{(i_1,j),(i_1,j_1),\ldots,(i_q,j_q),(i,j_q)\}$$

astfel încît $J' = J'' \cup \{(i,j)\}$ să constituie un T-ciclu.

Demonstraţie:

Vom nota, în cele ce urmează:

$$J_{i.} = \{j \mid (i,j) \in J\} \quad , \quad J_{.j} = \{i \mid (i,j) \in J\}$$

Procedeul constructiv, pentru obţinerea lui J' este descris în schema nr. 10.

Fie dar şirul de submulţimi de indici $J_o, J_1, J_2, \ldots$, construit conform acestei scheme, adică:

$$J_o = \{j\}$$

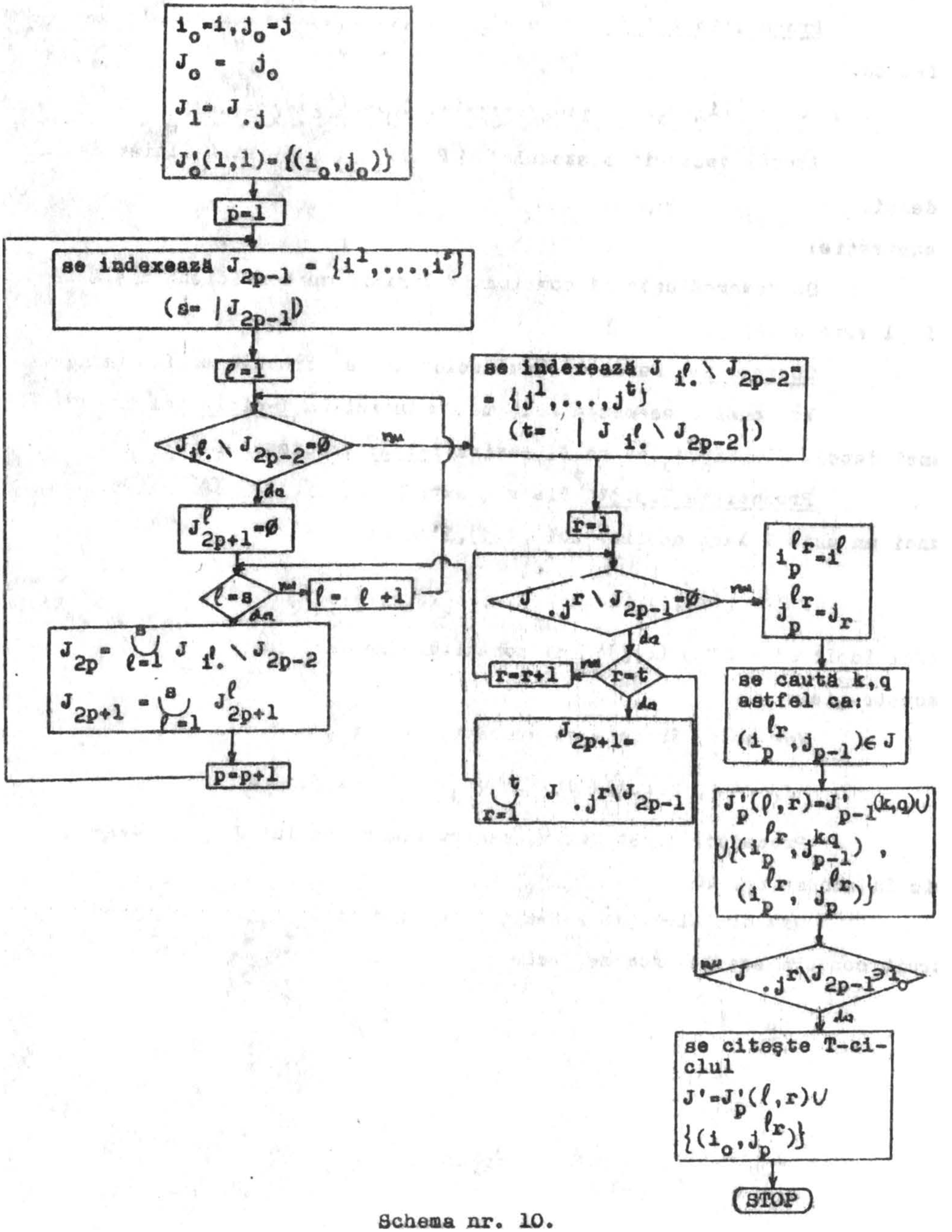
$$J_1 = J_{.j}$$

....

$$J_{2p} = \bigcup_{\ell \in J_{2p-1}} J_{\ell.} \setminus J_{2p-2}$$

$$J_{2p+1} = \bigcup_{\ell \in J_{2p}} J_{.\ell} \setminus J_{2p-1}$$

......


$i_o = i,\ j_o = j$
$J_o = j_o$
$J_1 = J_{.j}$
$J'_o(1,1) = \{(i_o, j_o)\}$
$p = 1$
se indexează $J_{2p-1} = \{i^1, \dots, i^s\}$
$(s = |J_{2p-1}|)$
$\ell = 1$
$J_{i^\ell .} \setminus J_{2p-2} = \emptyset$
nu
da
$J^\ell_{2p+1} = \emptyset$
$\ell = s$
$\ell = \ell + 1$
$J_{2p} = \bigcup_{\ell=1}^{s} J_{i^\ell .} \setminus J_{2p-2}$
$J_{2p+1} = \bigcup_{\ell=1}^{s} J^\ell_{2p+1}$
$p = p + 1$
se indexează $J_{i^\ell .} \setminus J_{2p-2} =$
$= \{j^1, \dots, j^t\}$
$(t = |J_{i^\ell .} \setminus J_{2p-2}|)$
$r = 1$
$J_{.j^r} \setminus J_{2p-1} = \emptyset$
$r = t$
$r = r + 1$
$J_{2p+1} = \bigcup_{r=1}^{t} J_{.j^r} \setminus J_{2p-1}$
$i_p^{\ell_r} = i^\ell$
$j_p^{\ell_r} = j_r$
se caută k, q
astfel ca:
$(i_p^{\ell_r}, j_{p-1}) \in J$
$J'_p(\ell, r) = J'_{p-1}(k,q) \cup$
$\cup \{(i_p^{\ell_r}, j_{p-1}^{kq}),$
$(i_p^{\ell_r}, j_p^{\ell_r})\}$
$J_{.j^r} \setminus J_{2p-1} \ni i_o$
se citeşte T-ciclul
$J' = J'_p(\ell, r) \cup$
$\{(i_o, j_p^{\ell_r})\}$
STOP

Schema nr. 10.

1° $J_k \neq \emptyset$, $k=1,2,\ldots$

Evident, $J_1 \neq \emptyset$ în baza propoziţiei I.3.31.

Să presupunem $J_s \neq \emptyset$, $s \leq k$, şi să luăm în considerare alternativa $k=2p$. Dacă, prin absurd, $J_{k+1} = \emptyset$ atunci sau $\bigcup_{\ell \in J_k} J_{\cdot \ell} = \emptyset$, ceea ce ar contrazice propoziţia I.3.31. sau $\bigcup_{\ell \in J_k} J_{\cdot \ell} \subseteq J_{k-1}$

In acest ultim caz să remarcăm că $J_{k-1} \neq \{1,2,\ldots,m\}$ (deoarece $J_{k-3} \neq \emptyset$) şi că incluziunea contrară este trivială, deci:

$$\bigcup_{\ell \in J_k} J_{\cdot \ell} = J_{k-1} \neq \{1,2,\ldots,m\}$$

Atunci componentele soluţiei x satisfac relaţiile:

$$\sum_{\ell \in J_k} x_{t\ell} = a_t, \ t \in J_{k-1}$$

$$\sum_{t \in J_{k-1}} x_{t\ell} = b_\ell \ , \quad \ell \in J_k$$

şi evident ,

$$\sum_{t \in J_{k-1}} a_t = \sum_{\ell \in J_k} b_\ell$$

O nouă problemă de tip (T) poate fi enunţată prin eliminarea restricţiilor de rang t $(t \in J_{k-1})$ şi $m+\ell$ $(\ell \in J_k)$ şi a variabilelor $x_{t\ell}$ cu $(t, \ell) \in J_{k-1} x J_k$ şi este clar că vectorul obţinut din x prin eliminarea componentelor în cauză este o soluţie posibilă a acesteia. O altă problemă de tip (T) va fi definită cu restricţiile eliminate anterior şi vectorul constituit din componentele omise din x este o soluţie posibilă a acestei a doua probleme.

Dacă ν_k = card. J_k, atunci numărul restricţiilor celor două probleme este:

$$m + n - (\nu_{k-1} + \nu_k)$$

respectiv,

$$\nu_{k-1} + \nu_k$$

Este clar, că cel puţin într-unul din cazuri numărul componentelor indexate în J ale soluţiei construite pe calea descrisă, este cel puţin egal cu numărul restricţiilor problemei.

Or , aceasta ar implica dependenţa liniară a vectorilor asociaţi componentelor indexate în J ale lui x, contravenind afirmaţiei $x \in \mathrm{ext}.\mathcal{X}$.

2^{o}. Oricare ar fi p natural şi $\ell \in J_{2p+1}$, există $\ell' \in J_{2p-1}$ şi $t \in J_{2p}$ astfel ca $(\ell', t), (\ell, t) \in J$. Analog, pentru orice $\ell \in J_{2p+2}$ există $\ell' \in J_{2p}$ şi $t \in J_{2p+1}$ astfel ca $(t, \ell'), (t, \ell) \in J$.

3^{o}. $\bigcup_{p=0}^{\infty} J_{2p+1} = \{1,2,\ldots,m\}$

Fie $k = [m/2]$ şi $\ell_k \in J_{2k+1}$. Există atunci, ℓ_{k-1} şi t_k în J_{2k-1}, respectiv J_{2k} astfel ca $(\ell_{k-1}, t_k), (\ell_k, t_k) \in J$ şi evident $\ell_k \neq \ell_{k-1}$.

Există de asemeni ℓ_{k-2} şi $t_{k-1} \in J_{2k-2}$ astfel ca:

$$(\ell_{k-2}, t_{k-1}), (\ell_{k-1}, t_{k-1}) \in J$$

Clar, $\ell_{k-2} \neq \ell_{k-1}$ dar $\ell_{k-2} \neq \ell_k$, în caz contrar, succesiunea $(\ell_{k-2}, t_{k-1}), (\ell_{k-1}, t_{k-1}), (\ell_{k-1}, t_k), (\ell_k, t_k)$ constituind un T-ciclu.

In acest fel, după un număr finit de paşi (inferior lui m), mulţimea $\{1,2,\ldots,m\}$ este complet epuizată prin construirea unui T-lanţ.

4^{o}. Există un T-ciclu de forma specificată în enunţ.

Fie p, astfel ca $i \in J_{2p+1}$. Procesul considerat la punctul 3^{o}, iniţiat în i conduce obligatoriu la un element $\ell \in J_1 = J_{\cdot j}$. Adăugînd T-lanţului astfel format punctul (i,j) se obţine un T-ciclu.

5^o. T-ciclul construit este unic.

Prin absurd, există două T-cicluri cu proprietățile cerute de propoziție:

$$(i,j),(i_1,j),(i_1,j_1),\ldots,(i_k,j_k),(i,j_k)$$

$$(i,j),(i_1',j),(i_1',j_1'),\ldots,(i_r',j_r'),(i,j_r')$$

Atunci succesiunea:

$$(i_1,j),(i_1,j_1),\ldots,(i_k,j_k),(i,j_k),(i,j_r'),(i_r',j_r'),\ldots$$
$$\ldots(i_1',j_1'),(i_1',j)$$

constituie un T-ciclu inclus în J ceea ce este absurd.

Corolar: Dacă $J'=\{(i,j),(i_1,j),(i_1,j_1),(i_2,j_1),\ldots,(i_q,j_q),(i,j_q)\}$ este T-ciclul asociat lui (i,j), atunci exprimarea vectorului P_{ij} în baza asociată soluției x este:

$$P_{ij}=P_{i_1j}-P_{i_1j_1}+\ldots+P_{i_rj_{r-1}}-P_{i_rj_r}+\ldots-P_{i_qj_q}+P_{ij_q}$$

3.13. Determinarea unei soluții de bază a problemei (T) (Metoda colțului nord-vest)

Teorema I.3.14. Prin metoda descrisă în schema nr.11 se obține o soluție de bază a problemei (T).

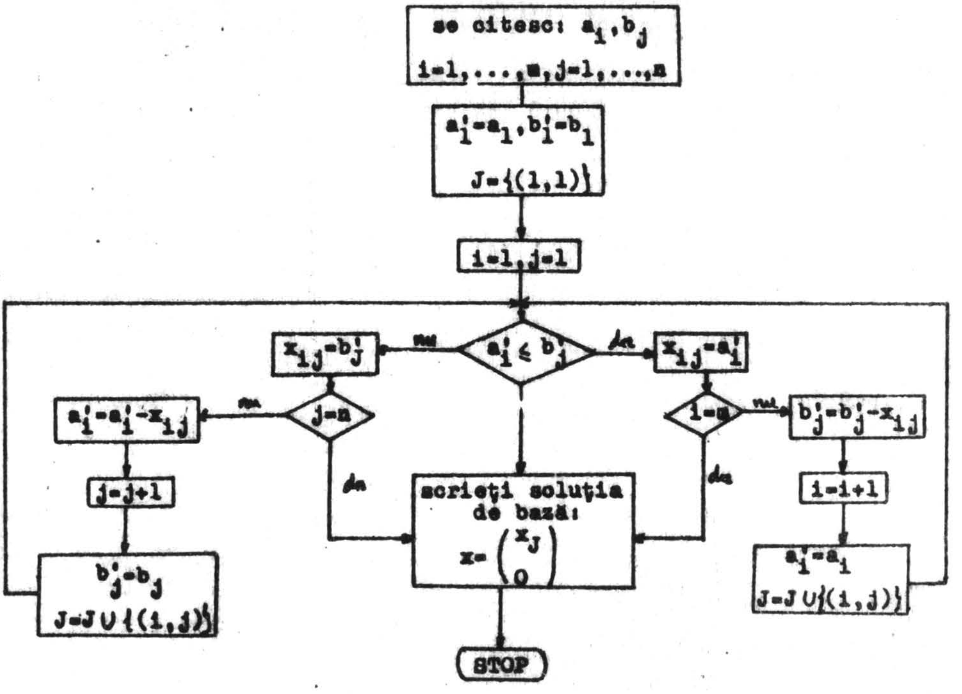
Demonstrație:

Fie $J=\{(i_1,j_1),\ldots,(i_r,j_r)\}$ mulțimea indicilor bazici indexați în concordanță cu ordinea în care sînt generați prin procedeul de mai sus și $x=\begin{pmatrix} x_J \\ 0 \end{pmatrix}$

Clar,

(I.3.26.) $\quad i_1=1,j_1=1$

$$i_{s+1}\geqslant i_s,j_{s+1}\geqslant j_s,i_{s+1}+j_{s+1}=i_s+j_s+1=s+2;\ s=1,2,\ldots,r-1.$$


se citesc: a_i, b_j
$i=1,\ldots,m, j=1,\ldots,n$
$a_1'=a_1, b_1'=b_1$
$J=\{(1,1)\}$
$i=1, j=1$
$a_i' \le b_j'$
nu
da
$x_{ij}=b_j'$
$x_{ij}=a_i'$
$j=n$
$i=m$
$a_i'=a_i'-x_{ij}$
$b_j'=b_j'-x_{ij}$
$j=j+1$
$i=i+1$
$b_j'=b_j$
$J=J\cup\{(i,j)\}$
$a_i'=a_i$
$J=J\cup\{(i,j)\}$
scrieţi soluţia de bază:
$x=\begin{pmatrix} x_J \\ 0 \end{pmatrix}$
STOP

Schema nr. 11

Se remarcă în plus că $(i_s,j) \notin J$ dacă $a'_{i_s} \leq b'_{j_s}$ şi implicit, $x_{i_s j}=0$, pentru $j > j_s$. Analog $(i,j_s) \notin J$, dacă $a'_{i_s} > b'_{j_s}$.

a) Dacă la pasul s,(s=1,2,...,r), se calculează $x_{i_s j_s}$, atunci:

$$\text{(i)} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j \in J_{i.}} x_{ij} = a_i \text{ , } i=1,\dots,i_s -1$$

$$\text{(ii)} \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{i \in J_{.j}} x_{ij}=b_j \text{ , } j=1,\dots,j_s -1$$

$$\text{(iii)} \Big(\sum_{j=1}^{n} x_{ij} - a_{i_s}\Big)\Big(\sum_{i=1}^{m} x_{ij_s} - b_{j_s}\Big) = 0$$

Demonstrăm aceste afirmaţii prin inducţie relativ la s.

Cum pentru s=1 validitatea relaţiilor (i)-(iii) este evidentă, să o demonstrăm pentru pasul s+1.

Presupunem $a'_{i_s} \leq b'_{j_s}$ (alternativa contrară poate fi analizată în acelaşi mod), deci $x_{i_s j_s} = a'_{i_s}, i_{s+1} = i_s+1, j_{s+1} = j_s$

Conform ipotezei de inducţie:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i=1,\dots,i_{s+1}-2$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \; j=1,\dots,j_{s+1} - 1$$

In plus, se observă că:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{i_s j} = x_{i_s j_s} + \sum_{\substack{j \in J_{i_s.} \\ j < j_s}} x_{i_s j} = a_{i_s}$$

deoarece, $x_{i_s j_s} = a'_{i_s} = a_{i_s} - \sum\limits_{\substack{j \in J_{i_s} \\ j < j_s}} x_{i_s j}$.

Un calcul asemănător arată că cel puţin una din egalităţile:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{i_{s+1} j} = a_{i_{s+1}} \quad , \quad \sum_{i=1}^{m} x_{i j_{s+1}} = b_s$$

este satisfăcută, în concordanţă cu una dintre alternativele posibile: $a'_{i_{s+1}} \leqslant b'_{j_{s+1}}$, $a'_{i_{s+1}} \geqslant b'_{j_{s+1}}$

b) $r = |J| = m+n-1$, $i_r = m$, $j_r = n$.

Clar, $r \leqslant m+n-1$, altfel $i_r + j_r > m+n$!

Vom examina una din cele două posibilităţi - simetrice- de încheiere ale algoritmului.

Să presupunem că $a'_{i_r} \leqslant b'_{j_r}$ şi $i_r = m$.

Rezultă din cele demonstrate anterior:

(i.3.27.) $$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i=1,\dots,m-1$$

(I.3.28.) $$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j=1,\dots,j_r-1$$

şi

(I.3.29.) $$\sum_{j=1}^{n} x_{mj} = x_{i_r j_r} + \sum_{\substack{j \in J_m \\ j < j_r}} x_{mj} = a_m$$

Cum $x_{ij} = 0$, pentru $i=1,\dots,m$ şi $j > j_r$, rezultă din (I.3.27.) şi (I.3.28.).

(I.3.30.) $$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} a_i$$

iar din (i.3.28.)

(I.3.31.) $$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{j=1}^{j_r-1} \sum_{i=1}^{m} x_{ij} + \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{j=1}^{j_r-1} b_j +$$

$$+ \sum_{\substack{i \in J_{\circ} j_r \\ i \leq m}} x_{ij_r} + x_{mj_r} = \sum_{j=1}^{j_r-1} b_j + b_{j_r} - b'_{j_r} + a'_{i_r} \leq \sum_{j=1}^{j_r} b_j$$

Relaţiile (I.3.30.) şi (I.3.31.) nu sînt contradictorii doar dacă $j_r = n$, $a'_{i_r} = b'_{j_r}$

De aici şi din concluziile etapei a) a demonstraţiei rezultă că $x \in \mathcal{X}$

c) $x \in \text{ext}\,\mathcal{X}$.

Fie combinaţia liniară nulă:

(I.3.32.) $$\sum_{(i,j) \in J} \alpha_{ij} P_{ij} = \sum_{k=1}^{m+n-1} \alpha_{i_k j_k} P_{i_k j_k} = 0$$

Deoarece $(1,1) \in J$, una din alternativele:

1°. $i_k > 1$, $k=2,\dots,m+n-1$

2°. $j_k > 1$, $k=2,\dots,m+n-1$

este adevărată. Citind atunci egalitatea vectorială (I.3.32.) pe componente de rang 1, în cazul 1°. sau pe cea de rang $m+1$, în cazul 2° se obţin $\alpha_{11} = \alpha_{i_1 j_1} = 0$

Presupunînd $\alpha_{i_k j_k} = 0$, $k=1,\dots,s$, (I.3.32.) devine:

$$\sum_{k=s+1}^{m+n-1} \alpha_{i_k j_k} P_{i_k j_k} = 0$$

Or, cum pentru $k=s+1,\dots,m+n-1$, sau $i_k > i_s$, sau $j_k > j_s$, deducem că $\alpha_{i_{s+1}j_{s+1}} = 0$ (citind egalitatea precedentă pe componenta de rang i_{s+1} sau pe cea de rang $m+j_{s+1}$).

3.14. Algoritm pentru îmbunătățirea soluției de bază a problemei (T)

Duala problemei (T) poate fi scrisă, succesiv, în formele:

$$\inf_{(t,z)^T\in\mathcal{Z}} \left(\sum_{i=1}^{m} a_i t_i + \sum_{j=1}^{n} b_j z_j\right), \quad \mathcal{Z} = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ z \end{pmatrix} \in R^{m+n} \;\middle|\; t_i+z_j \geqslant -c_{ij};\ i=1,2,\dots,m,\ \ j=1,2,\dots,n \right\}$$

$$(D)\quad \sup_{(u,v)^T\in\mathcal{U}} \left(\sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j\right) \qquad \mathcal{U} = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in R^{m+n} \;\middle|\; u_i+v_j \leqslant c_{ij};\ i= 1,2,\dots,m,\ j=1,2,\dots,n \right\}$$

<u>Propoziția I.3.35</u>. Dacă $x \in \text{ext.}\,\mathcal{X}$ este o soluție de bază a problemei (T) și $u\in R^m$, $v \in R^n$ satisfac sistemul:

$$u_i+v_j=c_{ij}\ ,\ (i,j) \in J^+ = \{(i,j) \in J \mid x_{ij} > 0\}$$

$$u_i+v_j \leqslant c_{ij}\ ;\ i=1,2,\dots,m,\ j=1,2,\dots,n$$

atunci $x \in \mathcal{O}$.

Demonstrație:

Rezultă imediat din teorema fundamentală a dualității și teorema ecarturilor complementare aplicate cuplului dual (T),(D).

Propoziţia I.3.36. Sistemul de ecuaţii:

$$u_i + v_j = c_{ij} \;;\; (i,j) \in J$$

asociat unei soluţii $x^o \in \mathrm{ext}\,\mathcal{X}$ (J fiind mulţimea indicilor bazici corespunzători), este compatibil simplu nedeterminat şi dacă (u',v'), (u'',v'') sînt două soluţii ale sale, există o constantă α astfel ca:

$$u''_i = u'_i + \alpha \quad , \quad v''_j = v'_j - \alpha \quad , \quad i=1,2,\ldots,m \;,\; j=1,2,\ldots,n.$$

Demonstraţie:

Fie B baza asociată soluţiei x^o. Este clar atunci, că matricea coeficienţilor sistemului din enunţ este B^T. De aici compatibilitatea sistemului. In plus se remarcă că numărul necunoscutelor întrece cu o unitate rangul lui $B(m+n-1)$.

Ultima afirmaţie o vom demonstra prin inducţie relativ la $r=m+n-1$.

Pentru $r=1$, fiind banal verificată, o vom presupune adevărată pentru orice problemă (T) cu dimensiunea cel mult $r-1$ ($m+n-1$ variabile).

Fie (u',v'), (u'',v'') două soluţii ale sistemului asociat lui x^o.

In concordanţă cu concluziile propoziţiei I.3.28. vom distinge două situaţii:

In prima (cazurile 2^o şi 3^o), fie $i \in \{1,2,\ldots,m\}$ şi $j \in \{1,2,\ldots,n\}$ astfel ca $(i,j) \in J$, $(\ell,j) \notin J$, oricare $\ell \neq i$.

Atunci sistemul de vectori $\{P_{st}\}$ $(s,t) \in J \setminus \{(i,j)\}$ constituie o bază admisibilă pentru problema:

$$\sum_{t=1}^{n} x_{st} = a_s \quad , \; s=1,\ldots,m,\; s \neq i.$$

$$\sum_{t=1}^{n} x_{it} = a_i - x^o_{ij}$$

$$\sum_{s=1}^{m} x_{st} = b_t, \quad t=1,2,\dots,n, \ t\neq j$$

şi deoarece (u',v'), (u'', v'') satisfac sistemul:

$$u_s + v_t = c_{st}, \ (s,t) \in J \setminus \{(i,j)\}$$

deducem din ipoteza de inducţie:

$$u''_s = u'_s + \alpha \ , \ v''_t = v'_t - \alpha \ , \ s=1,\dots,m \ , \ t=1,\dots,n, \ t\neq j, \ \alpha\in R.$$

In plus,

$$u'_i + v'_j = u''_i + v''_j = c_{ij}$$

şi de aici,

$$v''_j = c_{ij} - u''_i = c_{ij} - (u'_i + \alpha) = c_{ij} - (c_{ij} - v'_j + \alpha) = v'_j - \alpha$$

Corespunzător celei de a doua situaţii (cazul 1^{o}), alegem :

$i \in \{1,\dots,m\}$, $j\in \{1,\dots,n\}$ astfel ca:

$(i,j)\in J$, $(i,k) \notin J$, $k\neq j$.

Fie $B = (P_{st})_{(s,t) \in J}$ şi $\hat{B}$ submatricea lui B obţinută prin eliminarea coloanei P_{ij} şi a liniei corespunzătoare indicelui i .

Rezultă rang $\hat{B}=m+n-2=r-1$ şi deci coloanele lui $\hat{B}$ constituie o bază admisibilă pentru probleme:

$$\sum_{\substack{t=1\\t\neq j}}^{n} x_{st} = a_s \ , \ s=1,\dots,m, \ s\neq i$$

$$\sum_{\substack{s=1\\s\neq i}}^{m} x_{st} = b_t \ , \ t=1,\dots,n \ \ t\neq j$$

$$\sum_{\substack{s=1 \\ s\neq i}}^{m} x_{sj} = b_j - x_{ij}^{o}$$

De aici se continuă raționamentul ca în situația precedentă, inversînd rolurile lui u_i și v_j.

Teorema I.3.15. (Test de optimalitate). Dacă $x \in \mathrm{ext}\,\mathcal{X}$ și $u \in R^m$, $v \in R^n$, satisfac sistemul:

(I.3.33.)
$$u_i + v_j = c_{ij} \quad ; \ (i,j) \in J$$
$$u_i + v_j \leq c_{ij} \ ; \quad i=1,\dots,m \ , \ j=1,\dots,n$$

atunci $x \in \mathcal{O}$.

Demonstrație:

Rezultă din cele două propoziții precedente.

Vom adopta, în continuare, notațiile utilizate în cazul general al analizei algoritmului simplex, cu modificările impuse de specificul situației.

Astfel, dacă:

$$B(k) = \{P_{ij}\}_{(i,j) \in J(k)}$$

este o bază admisibilă asociată unei soluții $x^k \in \mathrm{ext}\,\mathcal{X}$, vom nota cu $\bar{\bar{B}}(k)$ matricea obținută din $(P_{ij})_{(i,j) \in J(k)}$ prin eliminarea unei linii (corespunzătoare uneia din ecuațiile redundante).

Atunci notațiile curente vor fi:

$$z_{ij}^k = \bar{\bar{B}}(k)^{-1} P_{ij} \ ; \ d_{ij}^k = c_{ij} - c_{J(k)} z_{ij}^k$$

Conform corolarului propoziției I.3.30.

(I.3.34.)
$$z_{ij,st}^k = \begin{cases} 1 \text{ dacă } (s,t) = (i_r, j_{r-1}) \in J' \\ -1 \text{ dacă } (s,t) = (i_r, j_r) \in J' \\ 0 \text{ dacă } (s,t) \notin J' \end{cases}$$

unde J' este T-ciclul asociat lui x^k și atunci:

(I.3.35.) $$d_{ij}^k=c_{ij}-c_{i_1 j}+c_{i_1 j_1}+\ldots-c_{i_r j_{r-1}}+c_{i_r j_r}-\ldots+c_{i_q j_q}-c_{i j_q}$$

Rezultă atunci imediat:

Propoziția I.3.37. Dacă $x^k \in \operatorname{ext} \mathcal{X}$ este o soluție de bază a problemei (T) și dacă (u^k, v^k) este o soluție a sistemului (I.3.33.) asociat, atunci

$$d_{ij}^k = c_{ij} - (u_i^k + v_j^k) \ , \quad i=1,\ldots,m, \ j=1,\ldots,n.$$

Teorema I.3.16. (Regulă pentru îmbunătățirea soluției). Dacă $x^k \in \operatorname{ext} \mathcal{X}$, (u^k, v^k) este o soluție a sistemului asociat (I.3.33.) și dacă există $(i,j) \in \bar{J}(k)$ astfel încît:

$$c_{ij} - (u_i^k + v_j^k) < 0$$

atunci, determinînd $(s,t) \in J(k)$ conform regulei:

(I.3.36.) $$x_{st}^k = \min_{\{(i_r, j_{r-1}) \in J'\}} x_{i_r j_{r-1}}^k$$ (unde J' este T-ciclul asociat lui (i,j)),

se obține o bază admisibilă îmbunătățită:

$$B(k+1) = (B(k) \setminus \{P_{st}\}) \cup \{P_{ij}\}$$

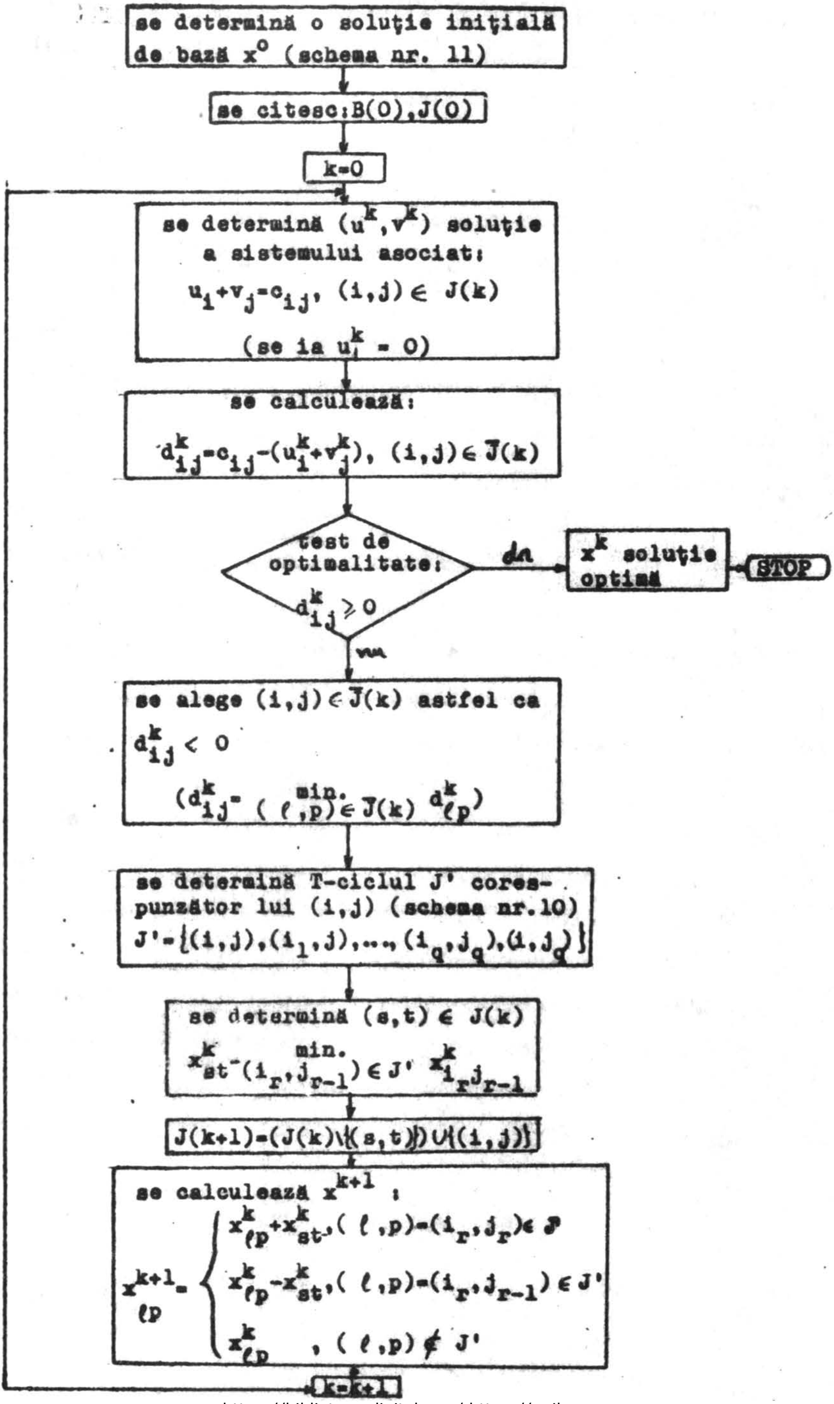
soluția x^{k+1} asociată acesteia avînd componentele:

$$x_{\ell p}^{k+1} = \begin{cases} x_{\ell p}^k + x_{st}^k \ , & \text{dacă } (\ell, p) = (i_r, j_r) \in J' \\ x_{\ell p}^k - x_{st}^k \ , & \text{dacă } (\ell, p) = (i_r, j_{r-1}) \in J' \\ x_{\ell p}^k & \text{dacă } (\ell, p) \notin J' \ . \end{cases}$$

Demonstrație:

Rezultă imediat din teorema I.3.3. și din cele de mai

Schema nr. 12


se determină o soluţie iniţială de bază x^0 (schema nr. 11)
se citesc: B(0), J(0)
k=0
se determină (u^k, v^k) soluţie a sistemului asociat:
$u_i + v_j = c_{ij}$, $(i,j) \in J(k)$
(se ia $u_1^k = 0$)
se calculează:
$d_{ij}^k = c_{ij} - (u_i^k + v_j^k)$, $(i,j) \in \bar{J}(k)$
test de optimalitate:
$d_{ij}^k \geq 0$
da
x^k soluţie optimă
STOP
nu
se alege $(i,j) \in \bar{J}(k)$ astfel ca $d_{ij}^k < 0$
$(d_{ij}^k = \min_{(\ell,p) \in \bar{J}(k)} d_{\ell p}^k)$
se determină T-ciclul J' corespunzător lui (i,j) (schema nr.10)
$J' = \{(i,j), (i_1,j), \ldots, (i_q,j_q), (i,j_q)\}$
se determină $(s,t) \in J(k)$
$x_{st}^k = \min_{(i_r, j_{r-1}) \in J'} x_{i_r j_{r-1}}^k$
$J(k+1) = (J(k) \setminus \{(s,t)\}) \cup \{(i,j)\}$
se calculează x^{k+1}:
$x_{\ell p}^{k+1} = \begin{cases} x_{\ell p}^k + x_{st}^k, & (\ell,p) = (i_r, j_r) \in J' \\ x_{\ell p}^k - x_{st}^k, & (\ell,p) = (i_r, j_{r-1}) \in J' \\ x_{\ell p}^k, & (\ell,p) \notin J' \end{cases}$
k=k+1

sus (se ţine seama de faptul că problema (T) este de "minim").

Schema nr. 12 cuprinde descrierea generală a algoritmului de rezolvare a problemei (T) .

§4. PRINCIPII GENERALE ALE METODELOR DE REZOLVARE A PROBLEMELOR DE PROGRAMARE CONVEXA NELINIARA

In evoluţia programării matematice - privită ca un capitol al cercetărilor operaţionale - efortul principal a fost dirijat spre elaborarea unor metode eficiente pentru determinarea soluţiilor optime ale problemelor.

Arsenalul tehnicilor de rezolvare a problemelor programării neliniare este foarte diversificat şi se îmbogăţeşte neîncetat.

Marea varietate a acestor tehnici şi metode este justificată, în primul rînd de înaltul grad de generalitate al modelului programării neliniare. Ideea unei eficienţe maxime a dus la necesitatea abordării rezolvării problemelor programării neliniare pe subclase particulare, definite de anumite proprietăţi specifice.

Trebuie menţionat şi faptul că, de cele mai multe ori, este foarte dificilă compararea eficienţei diferiţilor algoritmi, în lipsa unei evaluări destul de precise a rapidităţii convergenţei lor.

Examinînd multitudinea tehnicilor de rezolvare a problemelor programării neliniare, le putem grupa în cîteva clase, determinate de ideile majore care stau la baza elaborării lor.

Astfel, în programarea neliniară convexă, principiile dominante ale algoritmilor specifici sugerează includerea acestora în următoarele metode tip:

a) Metoda direcţiilor admisibile

b) Metoda planului de secţiune

c) Metode de optimizare secvenţială fără restricţii

Fie $\sup_{x \in \mathcal{X}} f(x)$, $\mathcal{X} \subseteq R^n$ nevidă, convexă, f concavă modelul general al unei probleme de programare convexă.

Un algoritm de tipul a) este un proces iterativ prin care se generează un şir $\{x^k\} \subseteq \mathcal{X}$ cu proprietăţile:

$$x^{k+1} = x^k + \lambda_k s^k \ , \ s^k \in R^n, \ \lambda_k \in R, \quad f(x^{k+1}) > f(x^k), k=1,\ldots$$

$$\lim_{k \to \infty} f(x^k) = \sup_{x \in \mathcal{X}} f(x)$$

La fiecare pas k, algoritmul conţine următoarele prevederi:

- determinarea unei "direcţii admisibile" s^k, astfel ca $\{x=x^k + \lambda s^k \mid \lambda \in R\} \cap \mathcal{X} \neq \emptyset$.

- determinarea "pasului optim" λ_k. De regulă valoarea lui λ_k se determină ea însăşi printr-un proces de optimizare locală, cerînd ca $f(x^{k+1})$ să fie cea mai mare valoare a lui f pe $\{x = x^k + \lambda s^k \mid \lambda \in R\} \cap \mathcal{X}$.

In cazul metodelor b), procedura tipică este următoarea: Se determină şirul descendent de tronsoane convexe;

$$\mathcal{X}_0 \supset \mathcal{X}_1 \supset \ldots \supset \mathcal{X}_k \supset \ldots \supset \mathcal{X}$$

şi un şir $\{x^k\}$, astfel ca $x^k \in \mathcal{X}_k \setminus \mathcal{X}_{k+1}$ şi $\lim_{k \to \infty} f(x^k) = \sup_{x \in \mathcal{X}} f(x)$

Construcţia şirului de tronsoane se face prin secţionarea succesivă a acestora cu hiperplane convenabil definite.

Astfel, la pasul k, rezolvînd o problemă de optimizare pe $\mathcal{X}_k$ se determină x^k, $\mathcal{X}_{k+1}$ rezultînd prin intersectarea lui $\mathcal{X}_k$ cu un semispaţiu definit de o restricţie liniară pe care x^k nu o satisface.

Metodele de optimizare secvenţială fără restricţii presupun construcţia unui şir de probleme de optimizare globală (fără restricţii), cu proprietatea ca şirul valor optime să tindă către valoarea optimului problemei date.

Un exemplu reprezentativ de astfel de metodă îl constituie "Metoda penalităţilor" ;

Fie $\{g_k\}$ un şir de funcţii de forma:

$$g_k(x,r_k) = f(x) + p(x,r_k)\ ,\ r_k \in R$$

cu proprietăţile:

$$\sup_{x\in\mathcal{X}} g_k(x,r_k) = g_k(x^k,r^k),\ k=1,2,\ldots,r_k \in R\ ,\ \text{cu}\ x^k \in \text{int.}\,\mathcal{X}$$

$$\lim_{r_k\to 0} g_k(x,r_k) = f(x)\ ,\ x\in\mathcal{X}$$

$$\lim_{x\to x^0} g_k(x,r_k) = -\infty\ ,\ r_k \neq 0,\ \text{dacă}\ x^0 \in \text{fr.}\,\mathcal{X}$$

$$\lim_{k\to\infty} g_k(x^k,r_k) = \sup_{x\in\mathcal{X}} f(x);\ \text{unde}\ g_k(x^k,r_k) = \sup_{x\in\mathcal{X}} g_k(x,r_k)$$

Aici p este funcţia "de penalitate" care joacă rolul unei bariere, împiedicînd depăşirea frontierei lui $\mathcal{X}$.

In general, metodele de rezolvare a problemelor de programare neliniară sînt metode iterative infinite, convergenţa lor fiind asigurată printr-o serie de proprietăţi analitice sau geometrice impuse problemei.

O menţiune specială se poate face pentru clasa problemelor de programare pătratică. Pentru aceste probleme, datorită proprietăţilor algebrice de o factură aparte (funcţia obiectiv algebrică şi restricţiile liniare) s-au obţinut algoritmi specifici cu caracter finit.

§5. PROGRAMAREA PATRATICA: METODA SIMPLEX PENTRU REZOLVAREA PROBLEMEI PROGRAMARII PATRATICE (P.Wolfe)

5.1. Problema programării pătratice.

Enunţul standard al unei probleme de programare pătratică (convexă) este:

(PS) $\qquad \sup_{x\in\mathcal{X}} f(x) \quad , \mathcal{X} = \{x \in R^n \mid x \geqslant 0, \quad Ax=b\}$

unde $f(x) = c^T x + \frac{1}{2} x^T Cx$, $c \in R^n$, C matrice simetrică, negativ semidefinită (nepozitiv definită).

Fără a restrînge generalitatea, vom presupune $b \geqslant 0$.

In unele ocazii este utilă prezentarea problemei în forma canonică:

(PC) $\qquad \sup_{x\in\mathcal{X}} f(x) \; ; \qquad \mathcal{X} = \{x \in R^n \mid x \geqslant 0, \; Ax \leqslant \ell\}$

Observaţie: Ipoteza "C simetrică" nu este, realmente, restrictivă, deoarece orice formă pătratică $h(x)=x^T Cx$ se poate pune sub forma $h(x) = x^T \bar{C}x$ cu $\bar{C}$ simetrică ($\bar{C} = \frac{1}{2}(C+C^T)$).

Propoziţia I.5.1. C negativ semidefinită implică:

(i) $x^T Cx = 0$ dacă şi numai dacă $Cx = 0$

(ii) $h(x) = x^T Cx$ este funcţie concavă pe R^n.

Demonstraţie:

Este suficient să demonstrăm propoziţia în cazul în care C este simetrică.

(i) Pentru orice $y \in R^n$ şi $\quad \lambda \in R$,

$0 \geqslant (y+\lambda x)^T C(y+\lambda x)=y^T Cy + 2\lambda y^T Cx + \lambda^2 x^T Cx$

Dacă $x^T Cx = 0$, atunci

$y^T Cy + 2\lambda y^T Cx \leqslant 0$, oricare ar fi $\quad \lambda \in R, y \in R^n$

ceea ce implică, evident $Cx = 0$.

Implicaţia inversă este banală.

(ii) Fie $\lambda\in[0,1]$, $x^1,x^2\in R^n$.

$$h(\lambda x^1+(1-\lambda)x^2)=\lambda^2(x^1-x^2)^T C(x^1-x^2)+\lambda(x^1-x^2)Cx^2+$$
$$+\lambda(x^2)^T C(x^1-x^2)+(x^2)^T Cx^2=-\lambda(1-\lambda)(x^1-x^2)^T C(x^1-x^2)+$$
$$+\lambda(x^1)^T Cx^1+(1-\lambda)(x^2)^T Cx^2\geqslant\lambda h(x^1)+(1-\lambda)h(x^2)$$

<u>Propoziţia I.5.2</u>. Dacă C este negativ definită, atunci det.C = 0.

Demonstraţie:

Se vede că $Cx=0$ dacă şi numai dacă $x=0$

<u>Propoziţia I.5.3</u>. Dacă C este negativ definită, atunci h(x) este strict concavă.

<u>Teorema I.5.1</u>. Problema (PS) admite o soluţie optimă $\bar{x}$ dacă şi numai dacă există $\bar{v}\in R^m$ astfel încît:

$$\bar{x}\geqslant 0 \qquad A\bar{x}=b$$
$$c+C\bar{x}-A^T\bar{v}\leqslant 0 \qquad \bar{x}^T(c+C\bar{x}-A^T\bar{v})=0$$

Demonstraţie:

Din teorema Kuhn-Tucker (I.2.9.) se deduce că o condiţie necesară şi suficientă pentru optimalitatea lui $\bar{x}$ este existenţa unui $\bar{u}$ astfel încît:

$$\bar{x}\geqslant 0 \qquad \frac{\partial L}{\partial v}(\bar{x},\bar{v})=0$$
$$\frac{\partial L}{\partial x}(\bar{x},\bar{v})\leqslant 0 \qquad \bar{x}^T\frac{\partial L}{\partial x}(\bar{x},\bar{v})=0$$

unde $L(x,v)=f(x)+v^T(b-Ax)$

Ţinînd seama de expresia lui f, rezultă imediat concluziile teoremei.

<u>Corolar</u>: $\bar{x}$ este soluţie optimă a problemei (PS) dacă şi numai dacă există $\bar{y}\in R^n$, $\bar{v}\in R^m$ astfel încît $(\bar{x},\bar{y},\bar{v})$ este soluţie a sistemului asociat:

$$(SA)\qquad \begin{aligned} &Ax = b\\ &Cx - A^Tv + y = -c\\ &x^Ty = 0\\ &x \geqslant 0\\ &y \geqslant 0 \end{aligned}$$

Demonstrație:

Rezultă din teorema precedentă, notînd $\bar{y} = -c - C\bar{x} + A^T\bar{v}$

<u>Propoziția I.5.4</u>. Dacă $\mathcal{X} = \{x \in R^n \mid x \geqslant 0, Ax=b\} \neq \emptyset$, atunci (PS) are optim infinit dacă și numai dacă sistemul:

$$(S_1)\qquad \begin{aligned} &Ax = b\\ &CX - A^Tv + y = -c\\ &x,y \geqslant 0 \end{aligned}$$

Este incompatibil.

Demonstrație:

Fie $x \in \mathcal{X}$. Prin absurd să admitem că $(\bar{x},\bar{v},\bar{y})$ este o soluție a sistemului (S_1). Atunci, deoarece f este concavă:

$$f(x)-f(\bar{x}) \leqslant (\nabla f(\bar{x}))^T(x-\bar{x}) = (C\bar{x} + c)^T(x-\bar{x}) = (A^T\bar{v}-\bar{y})^T(x-\bar{x})$$

$$= \bar{v}^TAx - \bar{y}^Tx - \bar{v}^TA\bar{x} + \bar{y}^T\bar{x}$$

Dar $Ax = A\bar{x} = b$ și $\bar{y}^Tx \geqslant 0$. Deci:

$$f(x) \leqslant f(\bar{x}) + \bar{y}^T\bar{x}$$

ceea ce contrazice nemărginirea lui f pe $\mathcal{X}$.

Reciproc, dacă (S_1) este incompatibil, atunci (SA) nu are soluții, ceea ce, în ipoteza $\mathcal{X} \neq \emptyset$ conduce la $\sup\limits_{x \in \mathcal{X}} f(x) = +\infty$

Să introducem următoarele notații:

Dacă J_1, J_2, J_3 este o desfacere a lui $\{1,\dots,n\}$ scriem:

$x^i = (x_j)_{j \in J_i}$, $y^i = (y_j)_{j \in J_i}$, $i=1,2,3$, și convenim ca, prin eventuale reordonări, să putem rescrie

$$x = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}, \qquad y = \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix}$$

Lema I.5.1. Dacă problema:

$$\sup.\left\{ g^T z \mid x,y,z \in R^n,\ v \in R^m, x,y,z \geq 0, Ax=b,\ Cx-A^Tv+y+Dz=h \right.$$
$$\left. x^3 = 0,\ y^1 = 0 \right\}$$

$(g,h \in R^n)$

admite o soluţie optimă $(\bar{x},\bar{y},\bar{v},\bar{z})$ cu $\bar{x}^1 > 0$, $\bar{y}^3 > 0$, atunci există $\bar{\eta} \in R^n$ astfel ca:

$$A\bar{\eta} = 0 \qquad \bar{\eta}^2 \geq 0$$
$$C\bar{\eta} = 0 \qquad g^T\bar{z} = h^T\bar{\eta}$$

$(\ \eta^i = (\eta_j)_{j \in J_i})$

Demonstraţie:

După o reordonare convenabilă a restricţiilor şi variabilelor, problema dată se poate rescrie sub forma:

$$\sup.\left\{ g^T z \mid x^1, x^2, y^2, y^3, z \geq 0,\ (A_1, A_2, A_3)\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ 0 \end{pmatrix} = b, \right.$$

$$\left. \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ 0 \end{pmatrix} - A^T v + \begin{pmatrix} 0 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix} + Dz = h \right\}$$

Duala acestei probleme este:

$$\inf.\left\{ b^T\gamma + h^T\eta \mid A_1^T\gamma + C_{11}^T\eta^1 + C_{21}^T\eta^2 + C_{31}^T\eta^3 \geq 0, \right.$$
$$A_2^T\gamma + C_{12}^T\eta^1 + C_{22}^T\eta^2 + C_{32}^T\eta^3 \geq 0,\ -A\eta = 0,$$
$$\left. \eta^2 \geq 0,\ \ \eta^3 \geq 0,\ D^T\eta \geq g \right\}$$

Teorema fundamentală a dualității asigură existența unei soluții optime ($\bar{\zeta}$, $\bar{\eta}$) a dualei și

(3.5.1.) $$b^T\bar{\zeta} + h^T\bar{\eta} = g^T\bar{z}$$

Datorită teoremei ecarturilor complementare, deoarece $\bar{x}^1, \bar{y}^3 > 0$, restricțiile corespunzătoare variabilelor x^1 și y^3 din duală sînt verificate cu egalitate de soluția optimă a acesteia.

Putem, deci, scrie:

(I.5.2.) $$A_1^T\bar{\zeta} + C_{11}^T\bar{\eta}^1 + C_{21}^T\bar{\eta}^2 = 0$$

(I.5.3.) $$A_2^T\bar{\zeta} + C_{12}^T\bar{\eta}^1 + C_{22}^T\bar{\eta}^2 \geqslant 0$$

(I.5.4.) $$A\bar{\eta} = 0$$

(I.5.5.) $$\bar{\eta}^2 \geqslant 0, \ \bar{\eta}^3 = 0$$

Inmulțind (I.5.2.) și (I.5.3.) cu $\bar{\eta}^1$, respectiv $\bar{\eta}^2 \geqslant 0$ și sumînd obținem:

$$(\bar{\eta}^1)^T A_1^T\bar{\zeta} + (\bar{\eta}^1)^T C_{11}^T\bar{\eta}^1 + (\bar{\eta}^1)^T C_{21}^T\bar{\eta}^2 + (\bar{\eta}^2)^T A_2^T\bar{\zeta} + (\bar{\eta}^2)^T C_{12}^T\bar{\eta}^1 +$$

$$+ (\bar{\eta}^2)^T C_{22}^T\bar{\eta}^2 \geqslant 0$$

Tinînd seama și de (I.5.4.) rezultă:

$$((\bar{\eta}^1)^T, (\bar{\eta}^2)^T) \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\eta}^1 \\ \bar{\eta}^2 \end{pmatrix} \geqslant 0$$

sau, deoarece $\bar{\eta}_3 = 0$,

$$\bar{\eta}^T C\bar{\eta} \geqslant 0$$

De aici, deoarece C este negativ semidefinită, concludem că $\bar{\eta}^T C\bar{\eta} = 0$ și din propoziția I.5.1. rezultă :

(I.5.6.) $$C\bar{\eta} = 0$$

Atunci (I.5.2.) şi (I.5.3.) devin;

$$A_1^T \bar{\eta} = 0 \quad , \quad A_2^T \bar{\eta} \geqslant 0$$

Putem scrie:

$$b^T\bar{\eta} = \bar{\eta}^T A\bar{x} = \bar{\eta}^T A_1 \bar{x}^1 + \bar{\eta}^T A_2 \bar{x}^2 - \bar{\eta}^T A_2 \bar{x}^2 = 0$$

ultima egalitate rezultînd din teorema ecarturilor complementare.

Deci $b^T\bar{\eta} = 0$ şi atunci (I.5.1.) implică:

$$g^T\bar{z} = h^T\bar{\eta} \tag{I.5.7.}$$

Relaţiile (I.5.4.), (I.5.5.), (I.5.6.) şi (I.5.7.) conţin concluziile lemei.

<u>Propoziţia I.5.5</u>. Dacă $\mathcal{X} \neq \emptyset$, atunci (PS) are optim infinit dacă şi numai dacă există $\bar{\eta} \in R^n$ soluţie a sistemului:

$$(S_2) \qquad \begin{aligned} A\eta &= 0 \\ C\eta &= 0 \\ \eta &\geqslant 0 \\ c^T\eta &> 0 \end{aligned}$$

Demonstraţie:

Dacă $\sup\limits_{x\in\mathcal{X}} f(x) = +\infty$, (S_1) este incompatibil. Deci problema de programare liniară:

$$\sup.\ \left\{ -e^T z \,|\, x,y,z \geqslant 0,\ Ax=b\ ,\ Cx - A^T v + y + Dz = -c \right\}$$

unde $D=(d_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, $d_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{dacă } i\neq j \\ 1, & \text{dacă } i=j \text{ şi } c_i \leqslant 0 \\ -1, & \text{dacă } i=j \text{ şi } c_i > 0 \end{cases}$

are optimul nenul.

Fie $(\bar{x},\bar{y},\bar{v},\bar{z})$ o soluţie optimă.

Atunci compatibilitatea lui (S_2) rezultă imediat din lema I.5.1., făcînd identificările:

$$g = -e,\ h = -c\ ,\ J_1 = J_3 = \emptyset$$

şi ţinînd seama de faptul că $-e^T\bar{z} < 0$.

Reciproc, fie $\bar{\eta}$ soluţie a sistemului (S_2) şi $x \in \mathcal{X}$ Deoarece, pentru $\alpha \geqslant 0$, $x + \alpha\bar{\eta} \geqslant 0$ şi

$$A(x + \alpha\bar{\eta}) = Ax + \alpha A\bar{\eta} = b$$

rezultă că $x + \alpha\bar{\eta} \in \mathcal{X}$ pentru orice $\alpha \geqslant 0$.

Dar, $f(x + \alpha\bar{\eta}) = f(x) + 2\alpha x^T C\bar{\eta} + \alpha^2 \bar{\eta}^T C\bar{\eta} +$

$$+ \alpha c^T\bar{\eta} = f(x) + \alpha c^T\bar{\eta}$$

şi deoarece $c^T\bar{\eta} > 0$, rezultă că, dacă $\alpha \to \infty$, $f(x + \alpha\bar{\eta}) \to \infty$

5.2. Rezolvarea problemei (PS) cu metoda simplex; forma scurtă

Metoda de rezolvare a problemei de programare pătratică elaborată de P.Wolfe, se bazează pe o versiune modificată a algoritmului simplex, utilizată pentru rezolvarea sistemului (SA).

In continuare vom expune cele două variante ale algoritmului lui Wolfe, "forma scurtă" şi „forma lungă". După cum vom vedea, forma scurtă a algoritmului este recomandată pentru unele cazuri particulare ale problemei. Metoda completă - forma lungă - valabilă pentru condiţiile generale în care am enunţat problema (PS) se bazează în mod esenţial pe forma scurtă a algoritmului.

Prima variantă a metodei constă în rezolvarea problemei de programare liniară asociată sistemului (SA);

$$\text{(LSA)} \qquad \sup.\left\{-e^T(z^1+z^2) \mid x,y,z^1,z^2 \in R^n, v \in R^m, x,y,z^1,z^2 \geqslant 0, Ax=b,\right.$$
$$\left. Cx - A^Tv + y + z^1 - z^2 = -c \right\}$$

utilizînd algoritmul simplex, cu regula adiţională;

(a) pentru fiecare $i=1,2,\ldots,n$, x_i şi y_i nu pot fi, simultan, nenuli.

<u>Teorema I.5.2</u>. Se poate utiliza algoritmul simplex în rezolvarea problemei (LSA) de aşa manieră, încît, respectînd regula (a) să se realizeze una din situaţiile finale:

(i) Problema (LSA) nu are soluţii posibile

(ii) se obţine o soluţie optimă $(\bar{x},\bar{y},\bar{v},\bar{z}^1,\bar{z}^2)$ a problemei (LSA).

(iii) se obţine o soluţie de bază $(\bar{x},\bar{y},\bar{v},\bar{z}^1,\bar{z}^2)$ a problemei (LSA) care nu mai poate fi îmbunătăţită fără violarea regulei (a).

Demonstraţie:

Rezolvarea problemei (LSA) se face conform metodologiei simplex, în două faze. Pentru aducerea problemei la forma standard se notează $v=v^1-v^2$, $v^1,v^2 \geqslant 0$, (deoarece v nu este supus restricţiei de semn). Cu aceste notaţii, matricea sistemului de ecuaţii este:

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C & E_n & -A^T & A^T & E_n & -E_n \end{pmatrix}$$

(ordinea variabilelor: x,y,v^1,v^2,z^1,z^2).

Se observă că în ecuaţia de rang $m+i$ $(i=1,\dots,n)$ semnul uneia din variabilele z_i^1, z_i^2 coincide cu cel al termenului liber; în consecinţă respectiva variabilă poate fi inclusă în rîndul variabilelor bazice corespunzătoare bazei iniţiale. Pentru completarea acestei baze se adaugă variabile artificiale în grupul primelor m ecuaţii. Fără a restrînge generalitatea, să presupunem că primele r coloane $(o \leqslant r \leqslant m)$ ale matricei $\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix}$ coincid cu primii r vectori unitari ai spaţiului R^{m+n}.

Atunci, prima fază a metodei simplex, cere rezolvarea problemei:

$$(LS_1) \quad \sup. \left\{-e^T x^a \mid x,y,z^1,z^2 \in R^n, v^1,v^2 \in R^m, x^a \in R^{m-r}, x,x^a,y,v^1,v^2, z^1,z^2 \geqslant 0,\ \tilde{A}\tilde{x}=b,\ Cx-A^Tv^1+A^Tv^2+y+z^1-z^2=-c\right\}$$

unde $\tilde{A} = (A, e^{r+1}, \ldots, e^m), \tilde{x} = \begin{pmatrix} x \\ x^a \end{pmatrix}$,

cu regula suplimentară (a), baza inițială fiind baza canonică a spațiului R^{m+n} și soluția de bază inițială:

$$x_j = \begin{cases} b_j, j=1,\ldots,r \\ 0, \ j=r+1,\ldots,n \end{cases} \qquad x_j^a = b_j, \ j=r+1,\ldots,n,$$

$$z_i^1 = \begin{cases} -c_i, \text{ dacă } c_i \leqslant 0 \\ 0, \text{ dacă } c_i > 0 \end{cases} \qquad z_i^2 = \begin{cases} c_i, \text{ dacă } c_i > 0 \\ 0, \text{ dacă } c_i \leqslant 0 \end{cases} \quad v^1 = v^2 = y = 0$$

Următoarea observație este esențială: pe întreg parcursul primei faze, regula (a) poate fi respectată, fără ca aceasta să denatureze rezultatul.

Intr-adevăr, deoarece în (LS_1) coeficienții variabilelor y^i și z_i^1 , $i=1,\ldots,n$, coincid, două asemenea variabile nu pot face parte, simultan, dintr-o aceeași bază. Mai mult , ori de cîte ori y_i este susceptibilă de a deveni variabilă bazică, poate fi aleasă în loc z_i^1. Procedînd astfel, se poate menține, în permanență, pe parcursul primei faze a algoritmului simplex, $y=0$. De aici, rezultă concluziile teoremei.

Observație: In practică, în rezolvarea problemei (LS_1), variabilelor y li se acordă un rol pasiv față de criteriul de intrare în bază; pentru aceasta, nu se calculează diferențele d_j corespunzătoare acestor variabile. Cu această excepție, celelalte prevederi ale algoritmului simplex se aplică nealterate.

Teorema I.5.3. In condițiile teoremei 2.8.2.;

1^o. Dacă se realizează (i) atunci (PS) nu are soluții posibile.

2^o. Dacă se realizează (ii) și $\bar{z}^1 = \bar{z}^2 = 0$ atunci $\bar{x}$ este soluţia optimă a problemei (PS).

3^o. Dacă se realizează (ii) şi $e^T(\bar{z}^1+\bar{z}^2) > 0$, atunci (PS) are optim infinit.

4^o. Dacă se realizează (iii) şi dacă $\bar{z}^1=\bar{z}^2=0$ atunci $\bar{x}$ este soluţie optimă a problemei (PS).

Demonstraţie:

Intr-adevăr, în situaţia (i) sistemul $x \geq 0, Ax=b$ este incompatibil deoarece în faza întîi a metodei simplex aplicată problemei (LSA) nu au fost eliminate variabilele artificiale x^a.

Celelalte concluzii rezultă din observaţia că în situaţiile (ii) şi (iii), sistemul $x \geq 0$, $Ax=b$ este compatibil.

<u>Observaţii</u>: 1) Numărul variabilelor problemei (LSA) poate fi redus, nefiind necesare toate variabilele z_i^2. Prezenţa lui z_i^2 se impune doar dacă $c_i > 0$.

2) Faza I se încheie după eliminarea completă a tuturor variabilelor artificiale x^a. Inainte de a trece la faza II se pot elimina şi variabilele z_i^1, z_i^2 nebazice.

3) In situaţia (iii) dacă $e^T(\bar{z}^1+\bar{z}^2) \neq 0$, ipotezele de lucru nu permit degajarea unei concluzii, deoarece regula (a) nu este naturală pentru procesul calculatoriu al algoritmului simplex.

<u>Teorema I.5.4</u>. Următoarele condiţii sînt suficiente pentru ca algoritmul simplex modificat cu regula (a) să conducă problema (LSA) fie la situaţiile finale (i), (ii) fie la situaţia finală (iii) cu $\bar{z}^1=\bar{z}^2=0$:

(j) $c=0$

(jj) C negativ definită

(jjj) In enunţul (PC), C este negativ definită

Demonstraţie:

Să presupunem că prima fază a metodei simplex a finalizat cu (ii) sau (iii). S-a obţinut astfel, o soluţie de bază $(x^o, y^o, v^o, z^{1o}, z^{2o})$ a problemei (LSA). Atunci cea de a doua fază a metodei simplex rezolvă problema:

$$(LS_2) \qquad \sup \left\{ -e^T z \mid x,y,z \geqslant 0,\ Ax=b\ ,\ Cx-A^T v+y+Dz=-c \right\}$$

unde D este matricea diagonală cu elementele:

$$d_{ii} = \begin{cases} 1, \text{ dacă } z_i^{1o} \text{ este variabilă bazică} \\ -1, \text{ dacă } z_i^{2o} \text{ este variabilă bazică} \\ 0, \text{ altfel} \end{cases}$$

plecînd de la soluţia de bază iniţială (x^o, y^o, u^o, z^o), unde am renotat:

$$z_i^o = \begin{cases} z^{1o}, \text{ dacă } z_i^{1o} \text{ este variabilă bazică} \\ z^{2o}, \text{ dacă } z_i^{2o}, \text{ este variabilă bazică} \\ 0, \text{ altfel} \end{cases}$$

Fie acum (x,y,v,z) soluţia finală a problemei (LS_2) obţinută cu algoritmul simplex modificat cu regula (a).

Notăm $J_1 = \left\{ j \mid \overline{x}_j > 0 \right\}$, $J_3 = \left\{ j \mid \overline{y}_j > 0 \right\}$

Atunci $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{v}, \overline{z})$ este soluţie optimă a problemei:

$$\sup\left\{ -e^T z \mid x,y,z \geqslant 0, Ax=b,\ Cx-A^T u+y+Dz=-C, x^3= o, y^1=o \right\}$$

Intr-adevăr, în caz contrar, algoritmul simplex, ar produce la următorul pas, o nouă soluţie de bază îmbunătăţită a acestei probleme. Deoarece $\overline{x}_j = 0,\ j \in J_2 \cup J_3,\ \overline{y}_j = 0,\ j \in J_1 \cup J_2$ şi problema impune restricţiile $x^3 = y^1 = 0$, în noua soluţie de bază ar putea apare, cu valori nenule (în plus, faţă de soluţia actuală), cel mult una din variabilele $x_j, y_j, j \in J_2$. Astfel, noua soluţie ar satisface şi ea condiţia suplimentară (a), ceea ce contravine presupunerii făcute asupra soluţiei $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{v}, \overline{z})$.

De aici, lema I.5.1., cu identificările:

$$g=-e, \quad h=-c$$

implică existenţa unui $\overline{\eta} \in R^n$, pentru care:

$$A\overline{\eta} = 0,\ C\overline{\eta} = 0,\ e^T\overline{z} = c^T\overline{\eta}$$

Atunci,

In ipoteza (j), $e^T\bar{z} = 0$ şi deci $\bar{z} = 0$.

In ipoteza (jj), $C\bar{\eta} = 0$ şi propoziţia I.5.2. implică $\bar{\eta} = 0$, deci, $e^T\bar{z} = 0$ şi din nou, $\bar{z} = 0$.

In ipoteza (jjj) problema (PC) poate fi reformulată în forma standard prin introducerea unor variabile ecart x^c:

$$\sup \left\{ f'(x') \mid x' = \begin{pmatrix} x \\ x^c \end{pmatrix} \subset R^{n+m}\ x' \geq 0,\ A'x' = b \right\}$$

unde $f'(x') = (c')^T x' + \frac{1}{2}(x')^T C' x'$, $c' = \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}$, $C' = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Conform lemei $C'\bar{\eta}' = 0$ cu $\bar{\eta}' = \begin{pmatrix} \bar{\eta} \\ \bar{\eta}^c \end{pmatrix}$. De aici $C\bar{\eta} = 0$, Dar C este negativ definită şi atunci urmăm raţionamentele cazului precedent.

In concluzie, în toate cele trei ipoteze menţionate de teoremă, soluţia finală obţinută pentru (LSA) - dacă există - are componenta z nulă.

Observaţie: Teorema demonstrată stabileşte condiţii în care forma scurtă a algoritmului lui Wolfe este eficientă. Cu alte cuvinte, în aceste cazuri, regula suplimentară (a) nu perturbă în mod esenţial desfăşurarea metodei simplex .

Practic, desfăşurarea schemelor algoritmului simplex are loc cu următoarea modificare (valabilă pentru faza II):

La pasul k, corespunzător soluţiei de bază (x^k, y^k, v^k, z^k) se determină: $J_1^k = \{ j \mid x_j^k > 0 \}$, $J_3^k = \{ j \mid y_j^k > 0 \}$

La pasul k+1 variabilele x_j, $j \in J_3$ şi y_j, $j \in J_1$ sînt pasive (nu se pot introduce în bază).

5.3. Rezolvarea problemei (PS) cu metoda simplex; forma lungă.

Fie, pentru $\lambda \in R$, problema de programare pătratică:

(PS_λ) $\quad \sup\limits_{x\in\mathcal{X}} f(x, \lambda)$; $\quad \mathcal{X} = \{x \in R^n \mid x \geqslant 0,\ Ax=b\}$

unde $f(x,\lambda) = \lambda c^T x + \frac{1}{2} x^T C x$

Evident, $(PS_1) = (PS)$

<u>Propoziţia I.5.6</u>. Dacă $\mathcal{X} \neq \emptyset$, problemele (PS_λ) sau admit optim finit, oricare ar fi $\lambda \geqslant 0$, sau au optim infinit pentru orice $\lambda > 0$ ((PS_o)) admiţînd evident optim finit).

Demonstraţie:

Rezultă imediat din propoziţia I.5.5.

Metoda completă, forma lungă a algoritmului lui Wolfe, rezolvă problema (PS) în trei faze:

Fazele I şi II:

Utilizînd forma scurtă a algoritmului, se rezolvă (PS_o).

Teorema I.5.4. (condiţia (j) garantează valabilitatea algoritmului.

Dacă (PS_o) nu are soluţii posibile, atunci nici (PS) nu are.

Altfel, fazele I şi II conduc la o soluţie de bază a sistemului:

$$\begin{aligned} &Ax = b \\ &Cx - A^T v + y = 0 \\ &x, y \geqslant 0 \end{aligned}$$

care satisface condiţia $x^T y = 0$. Fie $(\bar{x},\bar{y},\bar{u})$ aceasta.

Faza III:

Se rezolvă problema de programare liniară:

(L_λ) $\quad \sup\{\lambda \mid x, y, \lambda \geqslant o,\ Ax=b\ ,\ Cx - A^T v + y + \lambda c = o,\ \lambda \leqslant 1\}$

plecînd de la soluţia de bază iniţială $(\bar{x},\bar{y},\bar{v},o)$, cu algoritmul simplex modificat de regula (a).

<u>Teorema I.5.5</u>. Algoritmul simplex modificat cu regula (a) conduce la o soluţie de bază a problemei (L_λ), $(x^*, y^*, v^*, \lambda^*)$, cu λ^*

egal cu O sau 1. In primul caz, (PS) are optim infinit. In cel de al doilea caz, x^* este soluţie optimă a problemei (PS).

Demonstraţie:

Evident, $(\bar{x},\bar{y},\bar{v},o)$ este soluţie a problemei (L_λ) satisfăcînd şi (a).

Să înlăturăm, pentru moment, restricţia $\lambda \leq 1$. Atunci două situaţii apar posibile:

(k) procesul de îmbunătăţire a soluţiei, cu respectarea condiţiei (a), indică infinitudinea optimului.

(kk) se obţine o soluţie $(x^*, y^*, v^*, \lambda^*)$ care nu mai poate fi îmbunătăţită (sau este optimă sau, îmbunătăţirea ei ar viola (a)).

Situaţia (k) indică infinitudinea optimului problemei în absenţa restricţiei de mărginire a lui λ, însă în prezenţa regulei (a). Atunci este clar că (L_λ) are un optim egal cu 1, soluţia optimă putînd fi obţinută pe calea proprie algoritmului descris. Fie ea $(x^*,y^*,v^*,1)$. Atunci (x^*,y^*,v^*) este o soluţie a sistemului asociat problemei, (SA) şi deci x^* este soluţie optimă a lui (PS).

In cazul (kk) condiţiile de aplicabilitate ale lemei I.5.1. sînt asigurate scriind:

$$D = (d_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}, \; d_{ij} = \begin{cases} o, & \text{dacă } i \neq j \\ c_i, & \text{dacă } i=j \end{cases}$$

$$s_i = \lambda \quad, i = 1,\ldots,n, \; h = o, \; g = -\frac{1}{n} e, \; J_1 = \{ j \mid x_j^* > o \},$$

$$J_3 = \{ j \mid v_j^* > o \}$$

Există, deci η astfel încît:

$$g^T s^* = h^T \eta$$

adică, $\lambda^* = 0$.

Am arătat deci, că rezolvarea problemei (L_λ) cu algoritmul simplex modificat finalizează cu $\lambda^* = 1$ sau 0.

Pentru a completa demonstrația, rămîne să arătăm că, în cazul $\lambda^* = 0$, (PS) are optim infinit.

Putem presupune, fără a restrînge generalitatea, că rangul sistemului de ecuații din problema (L_λ) este m+n. Observăm, în acest caz, că n dintre variabilele x_i, y_i trebuie să fie bazice (deoarece, numărul variabilelor u_i, bazice, nu poate depăși m). Să admitem că în soluția de bază $(x^*, y^*, v^*, 0)$ toate variabilele bazice x_i, y_i au valori nenule (se poate utiliza tehnica perturbării pentru a asigura nedegenerarea soluțiilor). Atunci, se poate lua în lemă, $J_2=\emptyset$. Concluziile complete ale acestei leme impun asupra lui η proprietățile:

$$A\eta = 0,\ C\eta = 0,\quad \eta^3 = 0,\ c^T\eta \geq 1 > 0$$

Vom arăta că $\eta^1 \geq 0$. Intr-adevăr, în caz contrar, alegem

$$\alpha = \min\left\{\frac{-x_i^*}{\eta_i} \mid i \in J_1,\ \eta_i < 0\right\} > 0$$

Notînd $x = x^* + \alpha\eta$, rezultă că $(x', v^*, y^*, 0)$ este o altă soluție de bază a problemei (L_λ) asociată aceleeași baze ca și precedenta. Această concluzie este absurdă, deoarece o bază determină unic soluția de bază, iar $x \neq x^*$. Concludem că $\eta \geq 0$. De aici și din propoziția I.5.5. rezultă infinitudinea optimului pentru problema (PS).

§6. PROGRAMAREA CONVEXA CU RESTRICTII LINIARE; METODA DIRECTIILOR ADMISIBILE (M.Frank, P.Wolfe)

6.1. Problema

Fie problema de programare neliniară convexă, cu restricții liniare:

(CL) $\sup_{x \in \mathcal{X}} f(x)$; $\mathcal{X} = \{x \in R^n \mid x \geqslant 0 \text{ , } Ax=b\}$

unde $f \in C^1$ este concavă.

Pentru valabilitatea algoritmului prezentat, adoptăm următoarea ipoteză:

I. Ipoteza mărginirii: $(\nabla f(y))^T x$ este mărginită superior pe $\mathcal{X}$, oricare ar fi $y \in \mathcal{X}$.

6.2. Algoritmul

Teorema I.6.1. (Testul de optimalitate) Presupunem $\mathcal{X} \neq \emptyset$ şi $x^k \in \mathcal{X}$. Dacă $\bar{x}^k$ este o soluţie optimă a problemei de programare liniară

$$(LS_k) \qquad \sup_{x \in \mathcal{X}} (\nabla f(x^k))^T x$$

şi

$$(I.6.1.) \quad (\bar{x}^k - x^k)^T \nabla f(x^k) = 0$$

atunci x^k este soluţie optimă a problemei (CL).

Demonstraţie:

Din (I.6.1.) şi din proprietatea de optimalitate a lui $\bar{x}^k$ rezultă că:

$$(I.6.2.) \quad (\nabla f(x^k))^T x^k = (\nabla f(x^k))^T \bar{x}^k \geqslant (\nabla f(x^k))^T x \text{ , pentru orice } x \in \mathcal{X}$$

Dar, deoarece f este concavă

$$(I.6.3.) \quad f(x) - f(x^k) \leqslant (x-x^k)^T \nabla f(x^k), \text{ oricare ar fi } x.$$

In plus, pentru $x \in \mathcal{X}$, (I.6.2.) şi (I.6.3.) dau:

$$f(x^k) \geqslant f(x)$$

Corolar: Dacă x^k este soluţie optimă a problemei (LS_k), atunci este şi soluţie optimă a problemei (CL).

Teorema I.6.2. (Regulă de îmbunătăţire a soluţiei). Fie $x^k \in \mathcal{X}$ şi $\bar{x}^k$ soluţie optimă a problemei (LS_k). Dacă:

$$(\text{I.6.4.}) \qquad (\bar{x}^k - x^k)\,\nabla f(x^k) > 0$$

atunci există $x^{k+1} \in \mathcal{X}$ de forma $x^{k+1} = x^k + \lambda_k(\bar{x}^k - x^k)$, $\lambda_k \in (0,1]$ astfel încît $f(x^{k+1}) > f(x^k)$

Demonstraţie:

Notînd $s^k = \bar{x}^k - x^k$ este evident că $\varphi(\lambda) = f(x^k + \lambda s^k)$ este concavă pe $[0,1]$. Atunci $\varphi'(\lambda) = (s^k)^T \nabla f(x^k + \lambda s^k)$ este descrescătoare pe $[0,1]$. In plus, datorită lui (I.6.4.),

$$\varphi'(0) = (s^k)^T \nabla f(x^k) > 0$$

De aici:

(i) dacă $\varphi'(1) = (s^k)^T \nabla f(x^k) \geqslant 0$

rezultă că $\varphi'(\lambda) \geqslant 0$, oricare ar fi $\lambda \in [0,1]$ şi deci φ îşi atinge maximul pe $[0,1]$ în $\lambda = 1$. Punînd $x^{k+1} = x^k$, rezultă că $f(x^{k+1}) > f(x^k)$.

(ii) dacă $\varphi'(1) < 0$

există $\lambda_k \in (0,1]$ astfel ca $\varphi'(\lambda_k) = 0$. λ_k este punct de maxim al lui φ pe $[0,1]$ şi punînd $x^{k+1} = x^k + \lambda_k s^k$, deducem că $f(x^{k+1}) > f(x^k)$.

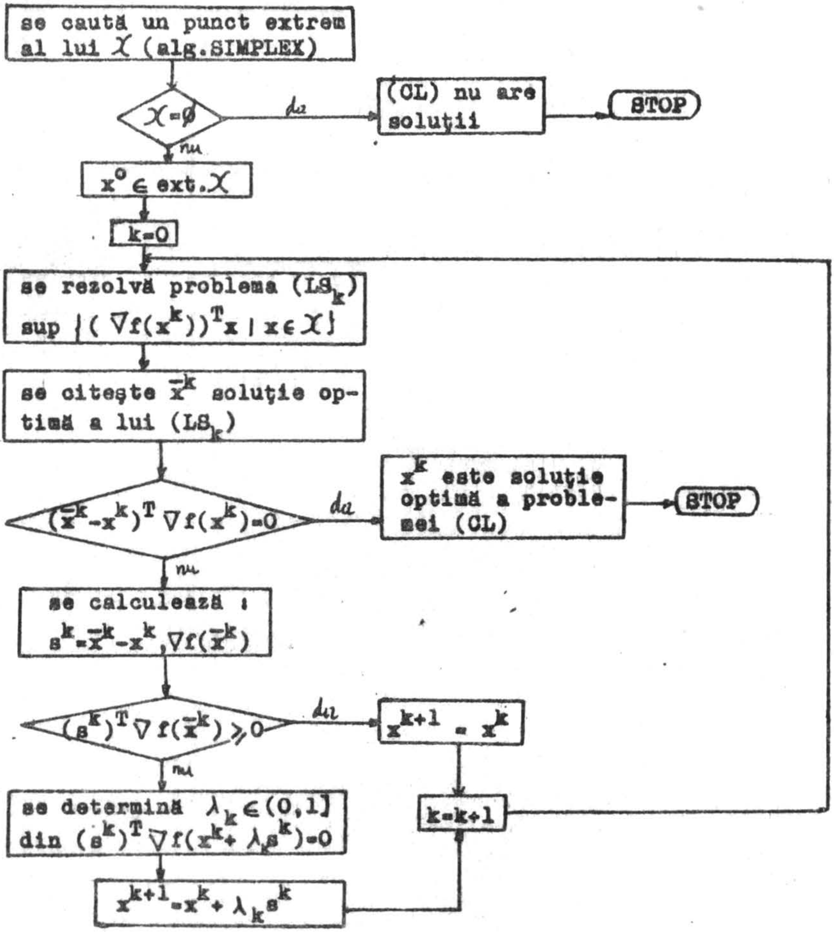
Aceste două rezultate fundamentează algoritmul descris în schema nr. 13.

6.3. Convergenţa algoritmului

Teorema I.6.3. In ipoteza I, una din următoarele alternative se verifică:

(j) algoritmul rezolvă problema (CL) într-un număr finit de paşi.

(jj) algoritmul generează un şir $\{x^k\} \subseteq \mathcal{X}$, astfel încît $\{f(x^k)\}$ converge către $\nu = \sup_{x \in \mathcal{X}} f(x)$ şi orice punct de


se caută un punct extrem al lui $\mathcal{X}$ (alg.SIMPLEX)
$\mathcal{X}=\emptyset$
da
(CL) nu are soluţii
STOP
nu
$x^0 \in$ ext.$\mathcal{X}$
k=0
se rezolvă problema (LS_k)
sup $\{(\nabla f(x^k))^T x \mid x \in \mathcal{X}\}$
se citeşte $\bar{x}^k$ soluţie optimă a lui (LS_k)
$(\bar{x}^k - x^k)^T \nabla f(x^k) = 0$
da
x^k este soluţie optimă a problemei (CL)
STOP
nu
se calculează :
$s^k = \bar{x}^k - x^k$, $\nabla f(\bar{x}^k)$
$(s^k)^T \nabla f(\bar{x}^k) \geq 0$
da
$x^{k+1} = x^k$
nu
se determină $\lambda_k \in (0,1]$
din $(s^k)^T \nabla f(x^k + \lambda_k s^k) = 0$
k=k+1
$x^{k+1} = x^k + \lambda_k s^k$

Schema nr. 13

acumulare al lui $\{x^k\}$ este o soluţie optimă a lui (CL).

Demonstraţie:

Dacă $\mathcal{X} = \emptyset$ sau (2.9.1.) se verifică pentru un k, atunci alternativa (j) este valabilă.

Altfel, să presupunem că pentru fiecare k=1,2,... are loc (I.6.4.). Sirul $\{x^k\}$ este în poliedrul convex $[x^0, \text{ext}\,\mathcal{X}]$

Intr-adevăr, $\bar{x}^0 \in \text{ext}\,\mathcal{X}$ (datorită ipotezei I) şi $x^1 \in [x^0, \bar{x}^0]$

Mai departe, deoarece $\bar{x}^k \in \text{ext.}\mathcal{X}$ (ipoteza I) şi $x^k \in [x^0, \text{ext.}\mathcal{X}]$ (Ipoteza de inducţie), este clar că $x^{k+1} \in [x^k, \bar{x}^k] \subseteq$ $\subseteq [x^0, \text{ext.}\mathcal{X}]$.

Fie x^* un punct de acumulare al şirului $\{x^k\}$. Există deci $\{x^{k_r}\} \subseteq \{x^k\}$ cu $\lim x^{k_r} = x^*$.

Sirul $\{f(x^k)\}$ este strict crescător (teorema I.6.2.) şi mărginit (f continuă pe compactul $[x^0, \text{ext.}\mathcal{X}]$ Există deci $f^* =$ $= \lim. f(x^k)$.

Să arătăm că x^* este soluţie optimă a problemei (CL) şi că $f(x^*) = f^*$.

Deoarece ext.$\mathcal{X}$ este finită, există $\bar{x} \in \text{ext.}\mathcal{X}$ şi $\{k'_r\} \subseteq \{k_r\}$ astfel ca $\bar{x}^{k'_r} = \bar{x}$.

Atunci,

$$(\bar{x}-x)^T \nabla f(x^{k'_r}) \geqslant 0, \text{ pentru orice } k'_r \text{ şi } x \in \mathcal{X}.$$

Trecînd la limită pentru $k'_r \to \infty$, deducem:

$$(\bar{x}-x)^T \nabla f(x^*) \geqslant 0, \text{ oricare ar fi } x \in \mathcal{X}. \quad \text{(I.6.5.)}$$

In particular,

$$(\bar{x}-x^*)^T \nabla f(x^*) \geqslant 0. \quad \text{(I.6.6.)}$$

Pe de altă parte, pentru fiecare k'_r şi $\lambda \in (0,1]$

$$\frac{f(x^{k'_r} + \lambda(\bar{x}-x^{k'_r}))-f(x^{k'_r})}{\lambda} \leqslant \frac{f(x^{k'_r+1})-f(x^{k'_r})}{\lambda} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{f(x^{k'_{r+1}}) - f(x^{k'_r})}{\lambda}$$

Trecînd la limită pentru $k'_r \to \infty$

$$\frac{f(x^* + \lambda(\bar{x}-x^*)) - f(x^*)}{\lambda} \leqslant 0$$

şi pentru $\lambda \to 0$,

(I.6.7.) $$(\bar{x}-x^*)^T \nabla f(x^*) \leqslant 0$$

Din (I.6.6.) şi (I.6.7.) rezultă:

$$(\bar{x}-x^*)^T \nabla f(x^*) = 0$$

Iar de aici şi din (I.6.5.),

$$(x-x^*)^T \nabla f(x^*) \leqslant 0, \text{ oricare ar fi } x \in \mathcal{X}$$

ceea ce dovedeşte că x^* este soluţie optimă a problemei:

$$\sup_{x \in \mathcal{X}} (\nabla f(x^*))^T x$$

De aici şi din corolarul teoremei I.6.1. rezultă concluzia teoremei.

§7. PROGRAMAREA NELINIARA CONVEXA; METODA PLANULUI DE SECTIUNE (J.E.Kelley)

7.1. Problema

Fie problema de programare convexă:

(C) $$\sup_{x \in \mathcal{X}} f(x); \; \mathcal{X} = \{x \in R^n \mid g_j(x) \leqslant 0 \; , \; j \in J_1; \; h_j(x) \leqslant 0, \; j \in J_2 \}$$

unde $f, g_j \in C^1$, f este concavă, g_j sînt convexe şi h_j sînt funcţii liniare afine.

Fie $\mathcal{X}_L$ tronsonul convex

$$\mathcal{X}_L = \{x \in R^n \mid h_j(x) \leqslant 0, \; j \in J_2 \}$$

Dacă $\mathcal{X}_L \neq \emptyset$, fie $x^0 \in \mathcal{X}_L$. Admitem următoarele ipoteze:

I. Ipoteza mărginirii: $\mathcal{X}_0 = \{x \in \mathcal{X}_L | g_j(x^0) + (x-x^0)^T \nabla g_j(x^0) \leq 0,\ j \in J_1\}$ este mărginită.

II. Ipoteza liniarității: f este liniară $(f(x)=c^T x, c \in R^n)$

<u>Observație</u>: Ipoteza II nu este restrictivă. Orice problemă de tip (C) poate fi echivalentă cu una satisfăcînd această cerință :

(C') $\sup \left\{ x_0 \mid \begin{pmatrix} x \\ x_0 \end{pmatrix} \in R^{n+1}, x \in \mathcal{X}, -f(x)+x_0 \leq 0 \right.$

Intr-adevăr, să notăm cu $\mathcal{X}'$ mulțimea soluțiilor posibile ale lui (C').

Fie $\bar{x}$ o soluție optimă a lui (C). Definim $\bar{x}_0 = f(\bar{x})$

Evident, $\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{x}_0 \end{pmatrix} \in \mathcal{X}'$. Vom arăta că este optimă. Prin absurd, există $\begin{pmatrix} x \\ x_0 \end{pmatrix} \in \mathcal{X}'$ cu $x_0 > \bar{x}_0$. Dar, $x \in \mathcal{X}$ și deci: $f(x) \geqslant x_0 > \bar{x}_0 = f(\bar{x})$, ceea ce contrazice optimalitatea lui $\bar{x}$.

Reciproc, fie $\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{x}_0 \end{pmatrix}$ soluție optimă a lui (C')

Atunci $\bar{x} \in \mathcal{X}$. Să arătăm că este optimă. Prin absurd există $x \in \mathcal{X}$ cu $f(x) > f(\bar{x})$. Punînd $x_0 = f(x)$, avem $\begin{pmatrix} x \\ x_0 \end{pmatrix} \in \mathcal{X}'$ și

$$x_0 = f(x) > f(\bar{x}) \geqslant \bar{x}_0$$

în contradicție cu presupunerea inițială.

7.2. Algoritmul

Construim, recursiv, șirurile $\{x^k\}$, $\{\mathcal{X}_k\}$, $k=0,1,\dots$ astfel:

(I.7.1.) Dacă $\mathcal{X}_{k-1} = \emptyset$ stop. Altfel, fie x^k soluție optimă a problemei de programare liniară:

(LS_{k-1}) $\quad \sup\limits_{x \in \mathcal{X}_{k-1}} c^T x$

(I.7.2.) Dacă $x^k \in \mathcal{X}$ stop. Altfel alegînd

$$i \in \{ i \in J_1 \mid g_i(x^k) = \max_{j \in J_1} g_j(x^k) \}$$

se definește

$$\mathcal{X}_k = \{ x \in \mathcal{X}_{k-1} \mid g_i(x^k) + (x-x^k)^T \nabla g_i(x^k) \leq 0 \}$$

<u>Teorema I.7.1.</u>) Sirurile $\{x^k\}$, $\{\mathcal{X}_k\}$ construite conform regulilor (I.7.1.), (I.7.2.) satisfac proprietățile:

(I.7.3.) $\mathcal{X}_{k-1} \supseteq \mathcal{X}_k \supseteq \mathcal{X}$, $k=1,2,\dots$

(I.7.4.) $x^k \notin \mathcal{X}_k$, $k=1,2,\dots$

(I.7.5.) $f(x^{k-1}) \geq f(x^k) \geq \nu = \sup \{ f(x) \mid x \in \mathcal{X} \}$

Demonstrație:

Incluziunea $\mathcal{X}_{k-1} \supset \mathcal{X}_k$, $k=1,2,\dots$, fiind evidentă, să demonstrăm că $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{X}_k$. Prin inducție relativ la k.

Fie $x \in \mathcal{X}$. Cum g_j sînt convexe, pentru fiecare $j \in J_1$:

$$g_j(x) - g_j(x^o)^T \geq (x-x^o)^T \nabla (g_j(x^o), \text{ pentru orice } x \in R^n.$$

In particular, pentru $x \in \mathcal{X}$,

$$g_j(x^o) + (x-x^o)^T \nabla g_j(x^o) \leq g_j(x) \leq 0$$

deci $x \in \mathcal{X}_o$.

Pentru $k=1,2,\dots$, presupunem $x \in \mathcal{X}_{k-1}$

Inegalitatea anterioară, scrisă pentru $i \in J_1$ determinat conform regulei (I.7.2.), arată că $x \in \mathcal{X}_k$. Cu aceasta (I.7.3.) a fost verificată.

(I.7.4.) rezultă banal din (I.7.2.)

In sfîrșit (I.7.3.) implică (I.7.5.)

Corolar. Dacă $x^k \in \mathcal{X}$ atunci x^k este soluţie optimă a problemei (C).

Descrierea algoritmul se face în schema nr. 14.

7.3. Convergenţa algoritmului.

Teorema I.7.2. In ipotezele I şi II una din următoarele două situaţii are loc:

(i) algoritmul rezolvă probleme (C) într-un număr finit de paşi

(ii) algoritmul generează un şir $\{x^k\}$ astfel încît $\lim f(x^k) = \nu = \sup\limits_{x\in\mathcal{X}} f(x)$ şi orice punct de acumulare al lui $\{x^k\}$ este o soluţie optimă a problemei (C).

Demonstraţie:

Din teorema precedentă deducem că dacă pentru un $k, \mathcal{X}_k = \emptyset$ atunci (C) nu are soluţii posibile, iar dacă $x^k \in \mathcal{X}$, x^k este soluţie optimă. Să presupunem că aceste alternative nu se produc.

Atunci şirul $\{x^k\}$ conţinut în compactul $\mathcal{X}_0$ conţine cel puţin un subşir convergent. Fie $\{x^{k_r}\} \subseteq \{x^k\}$ acesta şi;

$\bar{x} = \lim x^{k_r}$

Vom arăta că $\bar{x} \in \mathcal{X}$.

Prin absurd, presupunem că există $j \in J_1$ astfel ca:

$$g_j(\bar{x}) = \varepsilon > 0$$

Atunci, există $k(\varepsilon)$ astfel că dacă $k_r \geqslant k(\varepsilon)$,

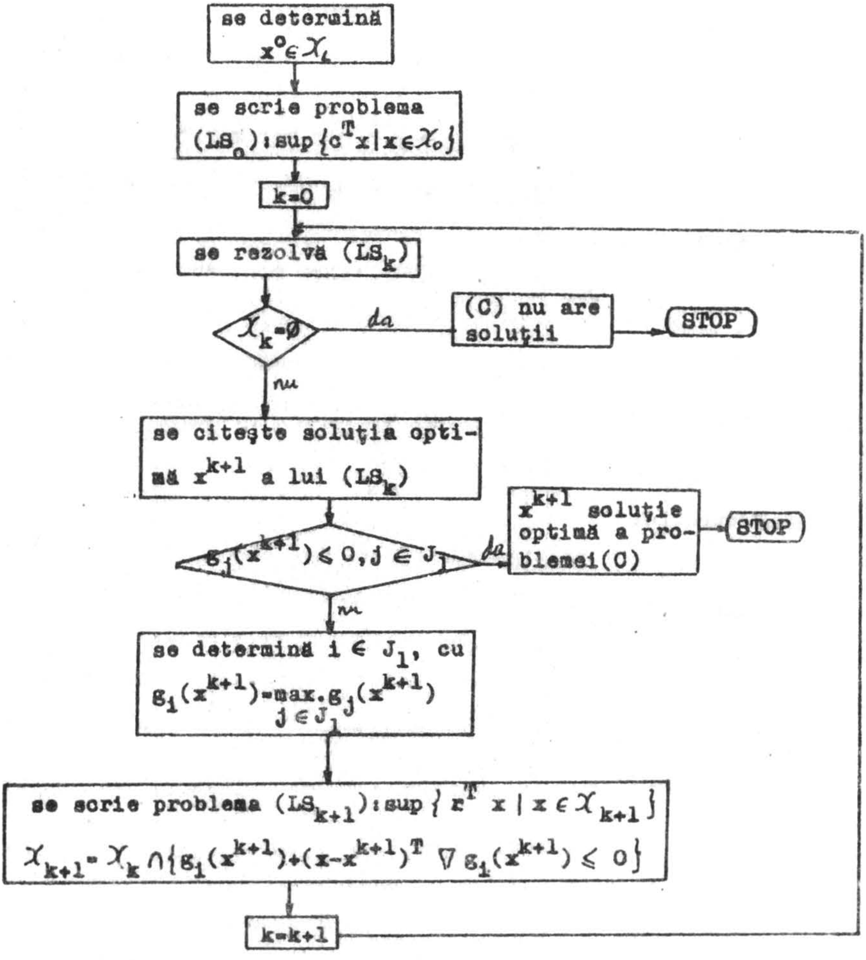
$$g_j(x^{k_r}) > \frac{\varepsilon}{2}$$

Pentru $k_s > k_r, x^{k_s} \in \mathcal{X}_{k_r}$ şi există $i \in J_1$ pentru care:

$$g_i(x^{k_r}) + (x^{k_s} - x^{k_r})^T \nabla g_i(x^{k_r}) \leqslant 0$$

sau

$$g_i(x^{k_r}) \leqslant \|x^{k_s} - x^{k_r}\| \cdot \|\nabla g_i(x^{k_r})\| \leqslant \|x^{k_s} - x^{k_r}\| \cdot M$$


se determină
$x^0 \in \mathcal{X}_0$
se scrie problema
(LS_0): $\sup\{c^T x \mid x \in \mathcal{X}_0\}$
k=0
se rezolvă (LS_k)
$\mathcal{X}_k = \emptyset$
da
(C) nu are soluţii
STOP
nu
se citeşte soluţia optimă x^{k+1} a lui (LS_k)
$g_j(x^{k+1}) \leq 0, j \in J_1$
da
x^{k+1} soluţie optimă a problemei (C)
STOP
nu
se determină $i \in J_1$, cu
$g_i(x^{k+1}) = \max_{j \in J_1} g_j(x^{k+1})$
se scrie problema (LS_{k+1}): $\sup\{c^T x \mid x \in \mathcal{X}_{k+1}\}$
$\mathcal{X}_{k+1} = \mathcal{X}_k \cap \{g_i(x^{k+1}) + (x - x^{k+1})^T \nabla g_i(x^{k+1}) \leq 0\}$
k=k+1

Schema nr. 14

$(M = \sup\limits_{x \in \mathcal{X}_o} \| \nabla g_i(x) \|)$

Or , prin construcţia şirului $\{\mathcal{X}_k\}$,

$$g_i(x^{k_r}) = \max_{j \in J_1} g_j(x^{k_r}) > \frac{\varepsilon}{2}$$

şi de aici,

$$\| x^{k_s} - x^{k_r} \| \geqslant \frac{\varepsilon}{2M}$$

oricare ar fi $k_s > k_r$, contrazicînd convergenţa şirului $\{ x^{k_r} \}$

Deci $\bar{x} \in \mathcal{X}$

Pe de altă parte, şirul $\{ f(x^k) \}$ monoton şi mărginit este convergent. Dacă $\bar{f} = \lim f(x^k)$, atunci (I.7.5.) implică:

$$\bar{f} \geqslant \nu$$

Dar $\bar{f} = \lim f(x^{k_r}) = f(\bar{x}) \leqslant \nu$.

Deci $f(\bar{x}) = \nu$ ceea ce dovedeşte optimalitatea lui $\bar{x}$.

§ 8. PROGRAMAREA NELINIARA CONVEXA; METODA PENALITATII (METODA SUMT - A.V.Fiacco, G.P.Mc.Cormick)

8.1. Principiul metodei

Fie problema:

(CG) $\sup\limits_{x \in \mathcal{X}} f(x)$; $\mathcal{X} = \{ x \in R^n \mid g_j(x) \leqslant 0,\ j=1,\dots,m \}$

şi

$$p(x,r) = f(x) + r \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{g_j(x)}$$

<u>Teorema I.8.1.</u> Dacă următoarele ipoteze sînt verificate:

(i) $\mathcal{X}_o = \{ x \in \mathcal{X} \mid g(x) < 0 \} \neq \emptyset$

(ii) $f, g_j \in C^1$, $j=1,\dots,m$

(iii) f concavă, g_j convexe, $j=1,\ldots,m$

(iv) $\{x\in\mathcal{X} \mid f(x) \geqslant k\}$ este mărginită, pentru orice $k \in R$

(v) $p(\cdot,r)$ este strict concavă pe $\mathcal{X}_o$, oricare ar fi $r > 0$.

atunci:

a) pentru fiecare $r > 0$, $p(x,r)$ își atinge maximul pe $\mathcal{X}$ într-un punct $x(r)\in\mathcal{X}_o$, pentru care $\frac{\partial}{\partial x}p(x(r),r) = 0$

b) dacă $r_k > 0$, $r_k \to 0$, atunci $\lim\limits_{k\to\infty} p(x(r_k),r_k) = \sup\limits_{x\in\mathcal{X}} f(x) = \nu$

c) oricare ar fi șirul $\{r_k\}$ convergent strict descrescător la o, șirul $\{f(x(r_k))\}$ converge strict crescător la ν, șirul $\left\{\sum\limits_{j=1}^{m} \frac{1}{g_j(x(r_k))}\right\}$ este strict descrescător, iar șirul $\left\{r_k \sum\limits_{j=1}^{m} \frac{1}{g_j(x(r_k))}\right\}$ converge la 0.

Demonstrație:

Fie $x^0\in \mathcal{X}_o$ și $k_o=f(x^0)$

Evident $\nu = \sup\limits_{x\in\mathcal{X}} f(x) = \sup\{f(x) \mid x\in\mathcal{X},\ f(x)\geqslant k_o\}$

și datorită ipotezelor (ii) și (iv) f își atinge maximul pe compactul $\{x\in\mathcal{X} \mid f(x)\geqslant k_o\}$, deci:

$$\nu = \max\{f(x) \mid x\in\mathcal{X}, f(x)\geqslant k_o\} < +\infty$$

a) Notînd $M_o = p(x^0,r)$, $r > 0$ fixat, definim:

$$S_o = \{x\in\mathcal{X} \mid f(x)\geqslant M_o\}$$

$$S_j = \left\{x\in\mathcal{X} \;\middle|\; \frac{r}{g_j(x)} \geqslant M_o-\nu\right\}$$

Atunci $S = \bigcap\limits_{j=0}^{m} S_j$ este nevidă, compactă, inclusă în $\mathcal{X}_o$.

Intr-adevăr compacitatea lui S fiind o consecinţă a ipotezelor (ii) şi (iv), să arătăm că $S \neq \emptyset$.

$$M_o = f(x^o) + r \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{g_j(x^o)} < f(x^o)$$

deci, $x^o \in S_o$.

$$r \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{g_j(x^o)} = - f(x^o) + M_o \geqslant M_o - \nu$$

cu atît mai mult, pentru fiecare $j=1,\ldots,m$,

$$\frac{r}{g_j(x^o)} \geqslant M_o - \nu$$

deci $x^o \in S_j$, $j=1,\ldots,m$

In concluzie $x^o \in S \neq \emptyset$.

Să remarcăm şi că $S \cap fr.\mathcal{X} = \emptyset$, deoarece în vecinătatea frontierei, $r \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{g_j(x)} \to -\infty$. Deci S este inclusă în $\mathcal{X}_o$.

Cu aceste observaţii se poate conclude că p îşi atinge maximul pe S, pentru orice $r > 0$ fixat.

Există $x(r) \in S \subseteq \mathcal{X}_o$ astfel ca:

$$p(x(r),r) = \max_{x \in S} p(x,r) = \nu(r)$$

Evident, $\nu(r) \leqslant \sup_{x \in \mathcal{X}_o} p(x,r)$

Se poate arăta că are loc egalitatea. Prin absurd, există $x \in \mathcal{X}_o \setminus S$ cu $p(x,r) > \nu(r)$.

Deoarece $x \notin S$, atunci sau $f(x) < M_o$, sau există j astfel ca $\frac{r}{g_j(x)} < M_o - \nu$. Ambele alternative implică $p(x,r) < M_o$, şi de aici afirmaţia absurdă; $\nu(r) < M_o$.

Concludem că:

$$\nu(r) = \sup_{x\in\mathcal{X}_o} p(x,r) = \max_{x\in\mathcal{X}_o} p(x,r)$$

Cum $\mathcal{X}_o$ este deschisă, concluzia a) este verificată.

b) Presupunem $r_k > 0$, $r_k \to 0$.

Notăm $x^k = x(r_k)$, $k=1,2,\ldots,$

Fie $\varepsilon>0$. Alegem $x_\varepsilon\in\mathcal{X}_o$ astfel ca $f(x_\varepsilon)>\nu-\frac{\varepsilon}{2}$

Punem $r^* = \frac{\varepsilon}{2m} \min_j |g_j(x_\varepsilon)|$

Deoarece $r_k \to 0$, există k^* astfel ca pentru $k > k^*$, să rezulte $r_k \leqslant r^*$. Atunci:

$$\nu \geqslant p(x^k,r_k) \geqslant p(x(r^*),r_k) = f(x(r^*))+r_k\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{g_j(x(r^*))} \geqslant$$

$$\geqslant f(x(r^*))+r^*\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{g_j(x(r^*))} = p(x(r^*),r^*) \geqslant$$

$$\geqslant p(x_\varepsilon,r^*) = f(x_\varepsilon)+r^*\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{g_j(x_\varepsilon)} \geqslant \nu-\frac{\varepsilon}{2}-\frac{\varepsilon}{2}=\nu-\varepsilon$$

Am demonstrat deci, că

$$\lim p(x(r_k),r_k)=\nu$$

c) Din definiţia lui $x(r)$ şi datorită ipotezei (v),

$$\text{(I.8.1.)}\qquad f(x^{k+1})+r_{k+1}\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{g_j(x^{k+1})} > f(x^k)+r_{k+1}\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{g_j(x^k)}$$

$$\text{(I.8.2.)}\qquad f(x^k)+r_k\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{g_j(x^k)} > f(x^{k+1})+r_k\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{g_j(x^{k+1})}$$

Din aceste două inegalităţi rezultă:

$$(r_{k+1}-r_k)\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{g_j(x^{k+1})} > (r_{k+1}-r_k)\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{g_j(x^k)}$$

şi cum $r_k > r_{k+1}$, rezultă

(I.8.3.) $$\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{g_j(x^{k+1})} < \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{g_j(x^k)}$$

Atunci (I.8.1.) şi (I.8.3.) implică:

$$f(x^{k+1})-f(x^k) > r_{k+1} \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{g_j(x^k)} - \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{g_j(x^{k+1})} \right) > 0$$

Deci, şirul $\{ f(x^k) \}$ este strict crescător. Fiind şi mărginit superior (de ν), există $\nu^* = \lim\limits_{k \to \infty} f(x^k)$

Pe de altă parte, deoarece şi şirul $\{ p(x^k, r_k) \}$ este convergent, cu limita ν, va rezulta convergenţa şirului.

$$\left\{ r_k \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{g_j(x^k)} \right\}$$ precum şi egalitatea:

$$\nu = \nu^* + \lim_{k \to \infty} r_k \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{g_j(x^k)}$$

şi, deoarece $\nu^* \leq \nu$ iar şirul $r_k \sum\limits_{j=1}^{m} \frac{1}{g_j(x^k)}$ are termeni negativi,

concludem că $\nu^* = \nu$, deci:

(I.8.4.) $\lim\limits_{k \to \infty} f(x^k) = \nu$, convergenţa fiind strict crescătoare

(I.8.5.) $$\lim_{k \to \infty} r_k \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{g_j(x^k)} = 0$$

<u>Propoziţia I.8.1.</u> Fiecare dintre condiţiile:

(j) f strict concavă

(jj) există $j=1,\dots m$ astfel ca g_j să fie strict convexă

(jjj) $\mathcal{X} \subseteq \{ x \in R^n \mid x \geq 0 \}$

este suficientă pentru satisfacerea condiției (v).

8.2. Descrierea algoritmului

1. Se determină $x_0 \in \mathcal{X}_0$ (observația 1))

2. Se alege $r_1 > 0$ (observația 2))

3. La psul k, (k=1,2,...) se determină $x^k=x(r_k)$ punct de maxim liber al lui $p(x,r_k)$ (teorema I.8.1.,b))

4. Se testează admisibilitatea lui x^k. Dacă se acceptă se trece la 5, altfel se alege $r_k' > r_k$ și se trece la 3. cu $r_k=r_k'$ (observația 3))

5. Se testează optimalitatea lui x^k. In caz afirmativ, algoritmul se încheie, altfel se trece la 6. (observația 4))

6. Se alege $0 < r_{k+1} < r_k$ și se trece la 3. cu k=k+1 (observația 5)).

<u>Observații</u>: 1) Dacă un punct interior al lui $\mathcal{X}_0$ nu este cunoscut, se poate determina folosind algoritmul însuși:

Presupunem că pentru un $y^1 \in R^n$, $g(y^1) \nless 0$. Notă :

$$K_1=\{ j|g_j(y^1) < 0 \},\quad L_1=\{j \mid g_j(y^1) \geqslant 0\}$$

Se rezolvă, cu algoritmul SUMT, problema:

$$\inf \{g_i(x) \mid g_j(x) \leqslant 0,\quad j \in K_1\} \quad \text{pentru un } i \in L_1$$

Algoritmul asigură că soluția optimă, y^2 se află în interiorul lui $\{ x \mid g_j(x) \leqslant 0,\quad j \in K_1\}$

Dacă $\inf \{g_i(x) \mid g_j(x) \leqslant 0,\ j \in K_1\} \geqslant 0$, atunci $\mathcal{X}_0 = \emptyset$. Altfel, se reia procedura cu $K_2 = \{ j \mid g_j(y^2) < 0\} \supset K_1$

2) In principiu, r_1 poate fi ales arbitrar pozitiv. Evident tendința ar fi să se aleagă foarte mic. Se constată însă, că, de regulă, viteza convergenței algoritmului de optimizare fără res-

tricţii de la 3° descreşte odată cu r. Mai mult, există pericolul, ca datorită erorilor acumulate în procesul iterativ de calculare a lui $(x(r_1)$, acesta să iasă din $\mathcal{X}$ (pentru r prea mic, rolul funcţiei de penalitate ar putea fi făcut neglijabil). Se poate recomanda următorul mod de alegere al lui r_1

$$\left|\frac{\partial p(x^0,r_1)}{\partial x}\right| = \min_{r\geq 0}\left|\frac{\partial p(x^0,r)}{\partial x}\right|$$

3) Testul de verificare a admisibilităţii lui x^k, poate fi: $\max_j \; g_j(x^k) \leq \delta$, unde δ este "pragul de admisibilitate" prestabilit (vezi şi observaţia precedentă).

4) In cazul unui proces iterativ infinit, optimalitatea soluţiei devine de fapt "optimalitate aproximativă". Există diverse procedee de a evalua, abaterea unei soluţii de la optim. In cazul nostru un criteriu l-ar putea constitui valoarea $\left| r_k \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{g_j(x^k)} \right|$

(vezi teorema I.8.1.c)).

5) Cum, în procesul calculatoriu, ne limităm la un număr finit de etape ale algoritmului, descreşterea şirului $\{r_k\}$ poate fi făcută cu pas constant (vezi şi observaţia 2)).

CAPITOLUL II

PROGRAMAREA DISCRETA

§ 1. DEFINIREA PROBLEMEI

Enunţul tipic al unei probleme de programare discretă este:

$$\text{(GD)} \qquad \sup_{x \in \mathcal{X}} f(x)$$

$\mathcal{X}$ fiind o submulţime discretă a lui R^n definită într-o manieră constructivă.

De regulă, mulţimea soluţiilor posibile ale problemei este dată prin impunerea condiţiilor de integritate asupra unora din coordonatele punctelor din corpul limitat de un număr de hipersuprafeţe $g_j(x)=0$, $j=1,\dots,m$, de unde şi denumirea - frecvent utilizată pentru clasa respectivă a programării matematice - programarea în întregi.

Este notabil faptul că o gamă destul de variată de probleme de programare discretă poate fi integrată condiţiilor proprii programării în întregi. De exemplu, dacă variabilele problemei sînt constrînse a lua valori într-o mulţime finită, complet specificată ($x_i \in \{ x_i^1 \quad x_i^{k_i} \}$, $i=1,\dots,n$) se poate reformula problema ca o problemă de programare în întregi, prin substituţiile:

$$x_i = \sum_{j=1}^{k_i} \delta_i^j x_i^j \quad , \ i=1,\dots,k_i, \ \delta_i^j \in \{0,1\}$$

In mare, ideile pe care se sprijină, sugerează clasarea metodelor de rezolvare a problemelor de programare discretă în două categorii importante:

a) metoda planului de secţiune

b) metode combinatoriale

Metodele de tip a) se bazează pe aceleaşi principii ca şi în cazul programării convexe, utilizînd însă unele tehnici specifice caracterului discret al problemei.

Metodele combinatoriale au la bază proceduri de investigare directă a mulţimii soluţiilor posibile, fără a fi necesară enumerarea completă a acestora.

O astfel de metodă, acţionînd după principiul de "ramificare şi mărginire" (Branch and Bound), foloseşte următoarea schemă: la pasul k ($k=1,2,\ldots$) o mulţime de soluţii posibile se desface în mai multe componente. Un criteriu specific, elimină unele componente, examinînd numai un număr restrîns de puncte ale acestora.

Pasul următor reia operaţiunea pentru una din componentele rămase. In urma acestor eliminări succesive, mulţimea soluţiilor posibile este investigată complet, reţinîndu-se soluţiile optime.

§ 2. PROGRAMAREA LINIARA DISCRETA

2.1. Enunţul problemei

Limitîndu-ne la cazul condiţiilor speciale de integritate impuse variabilelor, numim problemă de programare liniară discretă, orice problemă echivalentă cu:

$$\text{(LD)} \qquad \sup_{x\in\mathcal{X}} \{f(x)=c^T x\} \ , \qquad \mathcal{X}=\{x\in R^n \mid x\geq 0,\ Ax=b,\ x_i\in Z, i\in D\}$$

unde $D \subseteq \{1,\ldots,n\}$

Dacă $D=\{1,\ldots,n\}$ problema (LD) se numeşte total discretă, altfel, adoptăm denumirea de problemă de "programare liniară mixtă (discretă)".

2.2. Algoritmul ciclic "mixt" pentru rezolvarea problemei de programare liniară discretă (R.Gomory).

Fie problema de programare liniară

$$(LS_0) \qquad \sup_{x \in \mathcal{X}_0} c^T x \ , \quad \mathcal{X}_0 = \{x \in R^n \mid x \geq 0, \ Ax=b\}$$

<u>Propoziţia II.2.1</u>. Dacă (LS_0) nu are soluţii posibile, atunci nici (LD) nu are soluţii posibile. Dacă x^0 este soluţie optimă a lui (LS_0) şi $x_i^0 \in Z$, $i \in D$, atunci x^0 este optimă şi pentru (LD).

Fie acum x^0 o soluţie optimă a lui (LS_0) şi B(O) baza asociată.

In afara notaţiilor curente din capitolul I introducem şi:

$$r_i^0 = x_i^0 - [x_i^0] \ , \ r_{ji}^0 = z_{ji}^0 - [z_{ji}^0] \ , \ j=1,\dots,n \ , \ i \quad J(o)$$

<u>Teorema II.2.1</u>. Dacă există $i \in D$ astfel încît $x_i^0 \notin Z$, atunci:

$$\mathcal{X} \subseteq \mathcal{X}_0 \cap \mathcal{D}_{a^i, r_i^0}$$

unde $\mathcal{D}_{a^i, r_i^0} = \{x \in R^n \mid (a^i)^T x \geq r_i^0\}$

componentele lui a^i fiind definite prin:

$$a_j^i = \begin{cases} r_{ji}^0 \ , \text{ dacă } j \in D, \ r_{ji}^0 \leq r_i^0 \\ \dfrac{r_i^0}{1-r_i^0}(1-r_{ji}^0), \text{ dacă } j \in D, \ r_{ji}^0 > r_i^0 \\ z_{ji}^0, \text{ dacă } j \notin D, \ z_{ji}^0 \geq 0 \\ \dfrac{r_i^0}{1-r_i^0} \ |z_{ji}^0| \ , \text{ dacă } j \notin D, \ z_{ji}^0 < 0 \end{cases}$$

în plus, $x^o \notin \mathcal{D}_{a^i, r_i^o}$.

Demonstrație:

Fie $x \in \mathcal{X}$. Inmulțind cu $B(0)^{-1}$ egalitatea $Ax=b$, obținem:

$$B(0)^{-1}Ax=B(0)^{-1}b = x^o_{J(0)}$$

și, pentru componenta de rang i,

(II.2.1.) $$x_i^o = x_i + \sum_{j\in J(0)} s_{ji}^o x_j$$

Cu notațiile:

$$J' = J(0) \cap D, J'' = J(0) \setminus J'$$

și pentru fiecare descompunere a lui J' în două părți complementare J_1', J_2', egalitatea (II.2.1.) se poate scrie:

$$x_i^o = x_i + \sum_{j\in J_1'} r_{ji}^o x_j + \sum_{j\in J_1'} [s_{ji}^o] x_j - \sum_{j\in J_2'} (1-r_{ji}^o)x_j +$$

$$+ \sum_{j\in J_2'} (1+[s_{ji}^o])x_j + \sum_{j\in J''} s_{ji}^o x_j$$

și, datorită ipotezei, există un întreg δ astfel încît:

(II.2.2.) $$\sum_{j\in J_1'} r_{ji}^o x_j - \sum_{j\in J_2'} (1-r_{ji}^o)x_j + \sum_{j\in J''} s_{ji}^o x_j - r_i^o =$$

Notăm: $J_+'' = \{ j \in J'' \mid s_{ji}^o \geq 0\}$, $J_-'' = \{ j \in J'' \mid s_{ji}^o < 0\}$

Corespunzător celor două alternative complementare:

(i) $\delta \geq 0$

(ii) $\delta \leq -1$

deducem din (II.2.2.) că una din următoarele două inegalități este adevărată:

(II.2.3.) $$\sum_{j\in J_1'} r^0_{ji}\, x_j + \sum_{j\in J''_+} s^0_{ji} x_j \geqslant r^0_i$$

(II.2.4.) $$-\sum_{j\in J_2'} (1-r^0_{ji}) x_j + \sum_{j\in J''_-} s^0_{ji} x_j \leqslant r^0_i - 1$$

Ultima relație devine, după înmulțirea cu $\frac{r^0_i}{r^0_i-1} < 0$,

(II.2.4') $$\sum_{j\in J_2'} \frac{r^0_i}{1-r^0_i} (1-r^0_{ji}) x_j + \sum_{j\in J''_-} \frac{r^0_i}{1-r^0_i} \,|\, s^0_{ji} \,|\, \geqslant r^0_i$$

Deoarece atît în (II.2.3.) cît și în (II.2.4'.) membrul stîng este nenegativ, rezultă că:

(II.2.5.) $$\sum_{j\in J_1'} r^0_{ji} x_j + \sum_{j\in J_2'} \frac{r^0_i}{1-r^0_i} (1-r^0_{ji}) x_j + \sum_{j\in J''_+} s^0_{ji} x_j +$$

$$+ \sum_{j\in J''_-} \frac{r^0_i}{1-r^0_i} \,|\, s^0_{ji} \,|\, x_j \geqslant r^0_i$$

Aici, J_1' și J_2' realizează o desfacere arbitrară a lui J' ,

Alegînd:

$$J_1' = \left\{ j\in J' \,\middle|\, r^0_{ji} \leqslant \frac{r^0_i}{1-r^0_i} (1-r^0_{ji}) \right\} = \left\{ j\in J' \,\middle|\, r^0_{ji} \leqslant r^0_i \right\}$$

$$J_2' = \left\{ j\in J' \,\middle|\, r^0_{ji} > \frac{r^0_i}{1-r^0_i} (1-r^0_{ji}) \right\} = \left\{ j\in J' \,\middle|\, r^0_{ji} > r^0_i \right\}$$

se verifică prima parte a teoremei.

A doua afirmație rezultă banal, ținînd seama de faptul că $x^0_j = 0$ pentru $j \in J(0)$ și $r^0_i > 0$.

<u>Corolar</u>. Fie problema:

$$(LS_1) \qquad \sup_{\begin{pmatrix} x \\ x_{n+1}\end{pmatrix}\in\mathcal{X}_1} c^T x \ , \quad \mathcal{X}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x_{n+1}\end{pmatrix} \subseteq R^{n+1} \,\middle|\, x \geqslant 0, x_{n+1} \geqslant 0,\ A_1\begin{pmatrix} x \\ x_{n+1}\end{pmatrix} = b^1 \right\}$$

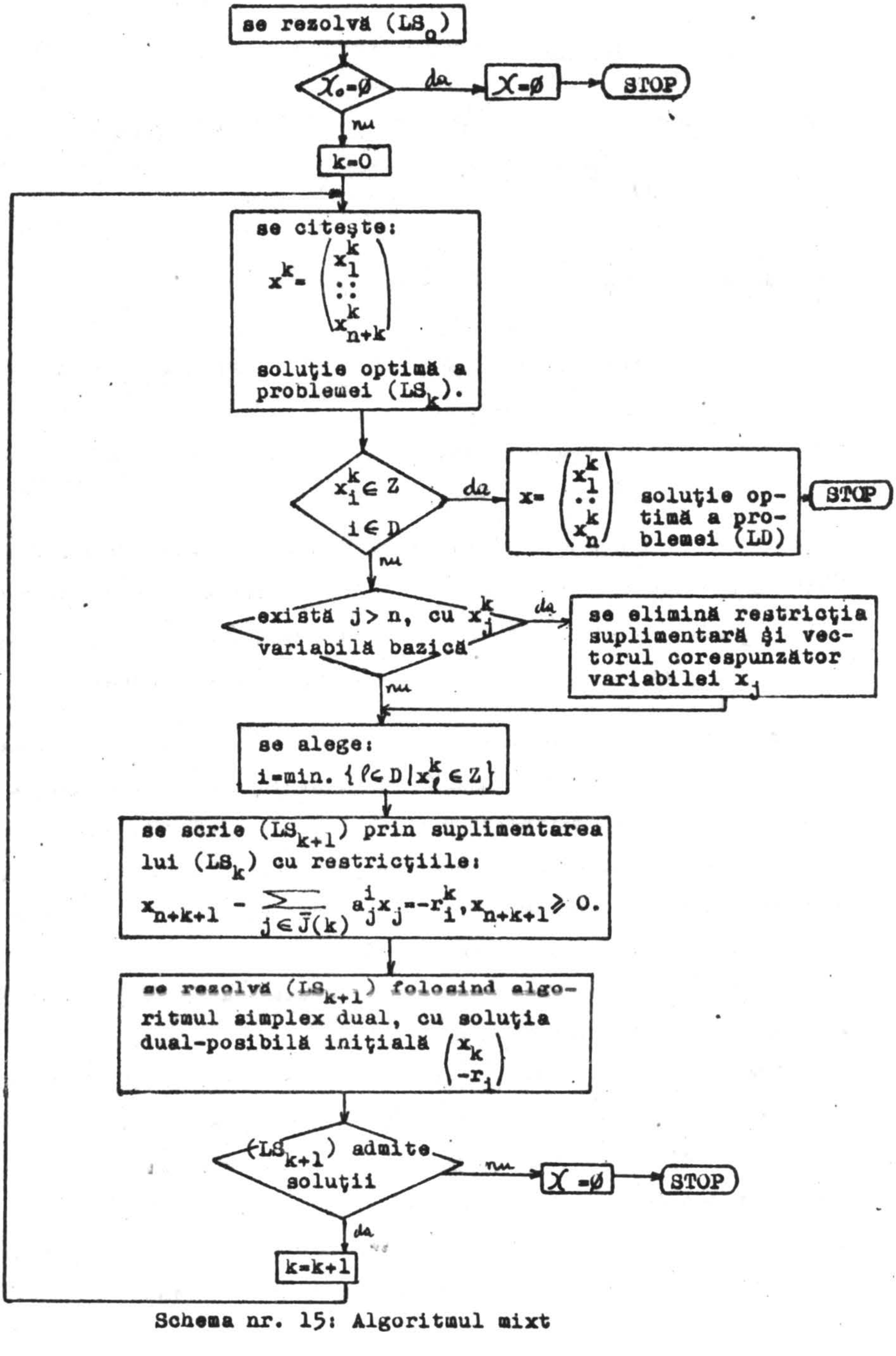
unde $A_1 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ -(a^i)^T & 1 \end{pmatrix}$, $b^1 = \begin{pmatrix} b \\ -r_i^o \end{pmatrix}$

Atunci, oricare ar fi $x \in \mathcal{X}$ există x_{n+1} astfel încît $\begin{pmatrix} x \\ x_{n+1}\end{pmatrix} \in \mathcal{X}_1$.

In același timp, nu există x_{n+1} astfel ca $\begin{pmatrix} x^o \\ x_{n+1}\end{pmatrix} \in \mathcal{X}_1$.

<u>Observație</u>: (i) Ideea de bază a algoritmului, reflectată în această teoremă, constă în restrîngerea treptată a tronsonului $\mathcal{X}_o$ prin "tăierea" sa cu hiperplane de tipul celui ce mărginește pe $\mathcal{D}_{a^i, r_i^o}$, la fiecare pas noul tronson obținut conținînd pe $\mathcal{X}$ dar eliminînd o parte nevidă a lui $\mathcal{X}_o$. Fiecărui tronson i se asociază o problemă de programare liniară cerînd maximizarea lui $f(x)$. Dacă soluția obținută nu satisface restricțiile de integritate, la etapa următoare este eliminată din mulțimea soluțiilor posibile. Iterînd procedura constructivă evidențiată în teorema II.2.1. (și în corolarul său), se obține o secvență de probleme de programare liniară. Acest algoritm este descris sintetic în schema nr. 15. Intuitiv, algoritmul pare a fi cu atît mai eficient, cu cît "tăieturile" operate la fiecare etapă sînt mai substanțiale. Se observă că mulțimea definită de (II.2.5.) (care conține pe $\mathcal{X}$) este cu atît mai redusă cu cît coeficienții nenegativi din primele două sume sînt mai mici. De aici și modul de alegere a mulțimilor de indici J_1' și J_2' .

In sfîrșit să remarcăm că consistența algoritmului presupune existența soluțiilor optime pentru întreaga secvență de probleme de programare liniară construită.



Schema nr. 15: Algoritmul mixt

(ii) Schema conţine o instrucţiune care limitează numărul restricţiilor adiţionale pe parcursul desfăşurării algoritmului.

2.3. Convergenţa algoritmului

Presupunem $f(x)=c^T x$ mărginită superior pe $\mathcal{X}$.

Problema (LD) este echivalentă cu:

$$(LD') \quad \sup_{\binom{x_0}{x}\in\mathcal{X}'} x_0 \;, \quad \mathcal{X}'=\left\{ \binom{x_0}{x} \in R^{n+1} \mid x_0-c^T x=0,\ Ax=b, x\geq 0, x_i\in Z,\ i\in D\right\}$$

Fără a restrînge generalitatea putem presupune că $D=\{1,2,\dots,|D|\}$. Nefiind supusă restricţiei de semn, variabila x_0 va fi în permanenţă bazică, pe tot parcursul rezolvării problemei (LD').

Atunci, corespunzător unei baze dual-admisibile $B(k)$ notăm:

$$X^k=\begin{pmatrix} x_0^k \\ x_1^k \\ \vdots \\ x_n^k \end{pmatrix}, \quad \Delta_\ell^k=(\Delta_{\ell t}^k)_{t=0,\dots,n}, \quad \Delta_{\ell t}^k=\begin{cases} z_{\ell 0}^k \,, & t=0 \\ z_{\ell t}^k, & t\in J(k), \ell\in \bar{J}(k) \\ -1 \,, & t=\ell \\ 0, & t\in \bar{J}(k)\setminus\{\ell\} \end{cases}$$

putem observa că:

$$X_0^k=x_0^k=c^T x^k \;, \quad \Delta_{\ell 0}^k=z_{\ell 0}^k=d_\ell^k$$

şi deci, vectorilor X^k, Δ_ℓ^k , $\ell\in\bar{J}(k)$ le putem acorda semnificaţia pe care o aveau în capitolul I.3.10. (aici ei apar într-o formă eliptică, prima componentă fiind suprimată datorită identităţii ei cu cea de a doua.)

Teorema II.2.2. Algoritmul mixt rezolvă problema

$$\sup.\left\{ x_o \,\middle|\, \begin{pmatrix} x_o \\ x \end{pmatrix} \in \mathcal{X}' \cap \{x_o \in Z\} \right\}$$

într-un număr finit de iterate simplex, cu condiţia respectării regulei lexicografice în aplicarea algoritmului simplex dual.

Demonstraţie:

Putem presupune că rezolvarea problemei de programare liniară obţinută prin omisiunea restricţiilor de integritate (ciclul o al algoritmului) a dus la o soluţie L-dual-admisibilă (vezi capitolul I.3.10. (III)). Atunci regula lexicografică garantează că toate bazele succesive obţinute pe parcursul rezolvării problemelor încadrate în algoritmul mixt vor fi L-dual-admisibile.

Corespunzător etapelor 0,1,2,... ale acestui algoritm, fie $x^o, x^1, x^2, \ldots$ soluţiile optime obţinute şi:

$$X^k = \begin{pmatrix} x_o^k \\ x_1^k \\ \vdots \\ x_n^k \end{pmatrix}, \quad k=0,1,\ldots$$

Pe parcursul ciclului k al algoritmului, este posibil ca, pornind de la soluţia x^{k-1}, algoritmul simplex dual să genereze mai multe soluţii dual-posibile, încheind cu soluţia optimă x^k (a problemei asociate ciclului). Fie $x^{k-1,0} = x^{k-1}, x^{k-1,1}, \ldots, x^{k-1,s_k} = x^k$ aceste soluţii şi:

$$X^{k-1,s} = \begin{pmatrix} x_o^{k-1,s} \\ x_1^{k-1,s} \\ \vdots \\ x_n^{k-1,s} \end{pmatrix}, \quad s=1,\ldots,s_k,\ k=0,1,\ldots$$

Avem: $X^0 \succ X^1 \succ \ldots$

(dar şi: $X^{k-1,0} \succ X^{k-1,1} \succ \ \ldots \ \succ X^{k-1,s}$, $k=0,1,\ldots$)

In ipoteza mărginirii lui $x_o = c^T x$ pe $\mathcal{X}$, şirul $\{x_o^k\}$ $k=0,1\ldots$ este mărginit şi monoton descrescător, deci convergent. Vom arăta că după un număr finit de termeni el devine staţionar, limita fiind întreagă.

Cu acelaşi raţionament, parcurgînd, în ordine, primele $|D|+1$ componente ale vectorilor X^k, vom arăta că, pentru fiecare $t=1,2,\ldots,|D|$, şirul $\{X_t^k\}$, descrescător de la un anumit rang şi mărginit inferior (de o, deoarece x^k este soluţie optimă în problema de programare liniară corespunzătoare ciclului k), devine staţionar, limita sa fiind întreagă.

Raţionînd prin reducere la absurd, să presupunem că există $\bar{k}$ şi i ($0 \leq i \leq |D|$), astfel încît, pentru orice $k \geq \bar{k}$ şi $t < i$, $X_t^k = X_t^{*}$ dar şirul $\{X_i^k\}$ descreşte, fără a deveni staţionar, dincolo de $\bar{k}$.

Dacă $X_i^{*} = \lim. X_i^k$, atunci există $k^{*} \geq \bar{k}$, astfel încît,

(II.2.6.) $\quad [X_i^{*}] < X_i^{k,s} < [X_i^{*}] + 1$

pentru fiecare $k \geq k^{*}$, $s=0,1,\ldots s_k$.

Atunci ciclul k+1 introduce o restricţie suplimentară, asociată componentei $X_i^k \notin Z$. Ca rezultat al primei iterate simplex-dual, avem:

(II.2.7.) $$X_i^{k^*+1} = X_i^{k^*} - \frac{X_i^{k^*} - [X_i^{k^*}]}{a_j^i} \Delta_{ji}^k \quad , \quad j \in J(k^*)$$

Ori, $\Delta_{ji}^k \neq 0$ ($\Delta_{ji}^k = 0$ ar implica $a_j^i = 0$, în contradicţie cu procedura simplex).

Mai mult, $\Delta_{ji}^k > 0$, deoarece, în caz contrar, $X_i^{k^*,1} > X_i^{k^*}$, ceea ce ar contraveni descreşterii lexicografice a şirului $\{X^k\}$. In acest caz, construcţia restricţiei suplimentare duce la concluzia:

$$\frac{\Delta_{ji}^{k}}{a_j^i} \geqslant 1$$

şi atunci:

(II.2.8.) $\qquad x_i^{k^*,1} < x_i^{k^*} - (x_i^{k^*} - [x_i^{k^*}]) - [x_i^{k^*}] - [x_i^*]$

în contradicţie cu (II.2.6.).

In sfîrşit, să arătăm că $x_t^* \in Z$, $t = 0,1,\ldots,|D|$.

Altfel, dacă $\bar{k} = \min.\{k \mid x_t^k = x_t^*\}$, ciclul $\bar{k}+1$ introduce o restricţie suplimentară asociată componentei $x_t^{\bar{k}}$. Relaţiile de tip (II.2.7.) , (II.2.8.), valabile în acest caz, duc la concluzia că $x_t^{\bar{k},1} < x_t^{\bar{k}}$ şi cum şirul $\{x_t^{\bar{k},s}\}$ descreşte, $x_t^{\bar{k}+1} < x_t^{\bar{k}}$, contravenind ipotezei de staţionaritate a şirului $\{x_t^k\}$.

<u>Corolar</u> . Dacă $c_i \in Z$, $i \in D$, $c_i = 0$, $i \notin D$, atunci problema (LD) poate fi rezolvată într-un număr finit de etape cu algoritmul mixt. In particular, pentru o problemă total discretă, această concluzi este valabilă dacă c are componente întregi.

§ 3. PROGRAMAREA PATRATICA DISCRETA; METODA PLANULUI DE SECTIUNE (H.P.Kunzi, W.Oettli).

3.1. Problema

O problemă de programare pătratică discretă (în întregi) poate fi enunţată sub forma:

(PD) $\qquad \sup_{x \in \mathcal{X}} f(x), \quad \mathcal{X} = \{x \in Z^n \mid x \geqslant 0,\ Ax \leqslant b\}$,

unde $f(x) = c^T x + \frac{1}{2} x^T C x$, C simetrică, negativ definită.

Vom adopta şi următoarele două ipoteze:

I. Ipoteza de mărginire: $\mathcal{X}_0 = \{x \in R^n \mid x \geqslant 0,\ Ax \leqslant b\}$ este mărginită.

II. $y \notin \mathcal{X}_0$, unde y este punctul de maxim global al funcţiei strict concave f, pe R^n.

Fie problema de programare pătratică (convexă):

(PC) $$\sup_{x \in \mathcal{X}_0} f(x)$$

<u>Propoziţia II.3.1</u>. Dacă $\mathcal{X}_0=\emptyset$ atunci $\mathcal{X}=\emptyset$. Dacă x^o este soluţia optimă (unică) a lui (PC) şi dacă $x^o \in Z^n$, atunci x^o este soluţia optimă a problemei (PD).

Să notăm $\bar{f} = f(y)$, $f^o=f(x^o)$, $L=\bar{f}-f^o$.

<u>Lema II.3. 1</u>. Fie $x \in \mathcal{X}_0$ şi $\bar{x} = [x,y] \cap \{x \mid f(x)=f^o\}$.

Atunci:

(II.3.1.) $$x - y = \frac{1}{\lambda_x} (\bar{x} - y)$$

unde,

(II.3.2.) $$\lambda_x = \sqrt{\frac{L}{\bar{f}-f(x)}}$$

Demonstraţie:

$\bar{x}= \lambda_x x+(1- \lambda_x)y$ cu $\lambda_x \in (0,1]$ ($\bar{x} \neq y$ conform ipotezei II).

De aici rezultă imediat (II.3.1.)

λ_x poate fi determinat din egalitatea $f^o=f(\bar{x})$

Să observăm , în prealabil, că $\nabla f(y)=0$, deci:

(II.3.3.) $$Cy+c=0$$

şi de aici,

(II.3.4.) $$\bar{f}=\frac{1}{2} c^T y$$

Atunci:

$$f^o=f(x)= \frac{1}{2} [\lambda_x x+(1- \lambda_x)y]^T C [\lambda_x x+(1- \lambda_x)y] + \lambda_x c^T x +$$
$$+(1- \lambda_x)c^T y= \frac{1}{2}\lambda_x^2 x^T Cx+ \frac{1}{2}(1- \lambda_x)^2 y^T Cy+ \lambda_x (1- \lambda_x)x^T Cy+$$
$$+ \lambda_x c^T x+(1- \lambda_x)c^T y= \frac{1}{2} \lambda_x^2 x^T Cx+ \lambda_x^2 c^T x-(1- \lambda_x)^2 \bar{f}+ 2(1-\lambda_x)\bar{f}=$$
$$= \lambda_x^2 f(x) + (1- \lambda_x^2) \bar{f}$$

de unde, rezultă (II.3.2.).

Lema II.3.2. Dacă $x \in \mathcal{X}_0$ atunci:

$$(c+C\bar{x})^T (y-\bar{x}) = 2L \quad ((\nabla f(\bar{x}))^T (y-\bar{x}) = 2L)$$

Demonstrație:

$$(c+C\bar{x})^T (y-\bar{x}) = c^T y - c^T \bar{x} + \bar{x}^T C y - \bar{x}^T C \bar{x} = -2f(\bar{x}) + 2\bar{f} = 2L$$

Lema II.3.3. Oricare ar fi $x, z \in \mathcal{X}_0$,

$$(c+C\bar{z})^T (y-x) \leqslant (c+C\bar{x})^T (y-x)$$

Demonstrație:

Datorită concavității lui f, avem:

$$(\bar{z}-\bar{x})^T \nabla f(\bar{x}) \geqslant f(\bar{z}) - f(\bar{x}) = 0$$

Atunci, folosind lema II.3.1. și (II.3.3.), putem scrie:

$$(c+C\bar{x})^T (y-x) - (c+C\bar{z})^T (y-x) = (\bar{x}-\bar{z})^T C (y-x) =$$

$$= (\bar{x}-\bar{z})^T \frac{1}{\lambda_x} C (y-\bar{x}) = \frac{1}{\lambda_x} (\bar{z}-\bar{x})^T (c+C\bar{x}) = \frac{1}{\lambda_x} (\bar{z}-\bar{x}) \nabla f(\bar{x}) \geqslant 0$$

3.2. Algoritmul

Teorema II.3.1. x^* este soluție optimă a lui (PD) dacă și numai dacă există $\mu^* \geqslant 0$ astfel ca (x^*, μ^*) să fie soluție optimă a problemei:

$$\text{(OA)} \qquad \inf \{ \mu \mid x \in Z^n,\ \mu \in R,\ x \geqslant 0,\ \mu \geqslant 0,\ Ax \leqslant b,\ \bar{f} - f(x) \leqslant L\mu \} .$$

Demonstrație:

Notăm cu $\bar{\mathcal{X}}$ mulțimea soluțiilor posibile ale lui (OA).

Dacă x^* este soluție optimă a lui (PD) se poate verifica imediat că (x^*, μ^*) cu $\mu^* = \frac{\bar{f} - f(x^*)}{L}$ este soluție optimă a lui (OA).

Pentru implicația inversă, se observă imediat că $x^* \in \mathcal{X}$ și că $\mu^* = \frac{\bar{f}-f(x^*)}{L}$. Dacă, prin absurd, x^* nu este optimă în (PD), atunci există $x \in \mathcal{X}$ cu $f(x) > f(x^*)$.

Definind, $\mu = \frac{\bar{f}-f(x)}{L}$

rezultă că $(x, \mu) \in \overline{\mathcal{X}}$ și că $\mu < \mu^*$, ceea ce ar contrazice optimalitatea lui (x^*, μ^*).

Fie acum problema de programare liniară discretă (mixtă):

$$(LD_1) \qquad \inf\{\mu \mid x \in Z^n,\ \mu \in R, x \geq 0, \mu \geq 0,\ Ax \leq b,\ (c+C\bar{x}^0)^T (y-x) \leq 2L\mu\}$$

<u>Propoziția II.3.2</u>. Dacă $\mathcal{X} \neq \emptyset$, atunci $\mathcal{X}_1 \neq \emptyset$. ($\mathcal{X}_1$ este mulțimea soluțiilor posibile ale problemei (LD_1))

<u>Teorema II.3.2</u>. Dacă (x, μ) este soluție posibilă a problemei (OA), atunci $(x, \sqrt{\mu})$ este soluție posibilă a problemei (LD_1)

Demonstrație:

Utilizînd, succesiv, lemele (II.3.3.), (II.3.1.), (II.3.2.), putem scrie:

$$(c+C\bar{x}^0)^T(y-x) \leq (c+C\bar{x})^T(y-x) = \frac{1}{\lambda_x}(c+C\bar{x})^T(\bar{y}-\bar{x}) = \frac{2L}{\lambda_x}$$

Pe de altă parte, deoarece $(x, \mu) \in \overline{\mathcal{X}}$,

$$\mu \geq \frac{\bar{f}-f(x)}{L} = \frac{1}{\lambda_x^2}$$

Deci, $\frac{2L}{\lambda_x} \leq 2L\sqrt{\mu}$, adică $(x, \sqrt{\mu}) \in \mathcal{X}_1$.

<u>Teorema II.3.3</u>. Dacă (x^*, μ^*) este soluție optimă a problemei (LD_1) și dacă:

(II.3.5.) $\qquad (c+C\bar{x}^*)^T (y-x^*) \leq 2L\mu^*$, atunci $(x^*, (\mu^*)^2)$ este soluție optimă a problemei (OA).

Demonstrație:

Din (II.3.5.) și din lemele (II.3.1., II.3.2., deducem:

$$2L\mu^* \geq (c+C\bar{x}^*)^T(y-x^*) = \frac{1}{\lambda_{x^*}}(c+C\bar{x}^*)^T(y-\bar{x}^*) = \frac{2L}{\lambda_{x^*}}$$

De aici,

$$\mu^* \geq \frac{1}{\lambda_{x^*}} = \sqrt{\frac{\bar{f}-f(x^*)}{L}}$$

sau, $\bar{f}-f(x^*) \leq L(\mu^*)^2$

ceea ce împreună cu proprietățile lui x dovedește apartenența lui $(x^*, (\mu^*)^2$ la $\bar{\mathcal{X}}$.

In sfîrșit, să notăm că dacă aceasta nu ar fi soluție optimă a lui (OA), atunci ar exista $(x, \mu) \in \bar{\mathcal{X}}$ cu $\mu < (\mu^*)^2$. Dar, conform teoremei II.3.2. atunci $(x, \sqrt{\mu}) \in \mathcal{X}_1$ și deci $\sqrt{\mu} \geq \mu^*$ în contradicție cu inegalitatea precedentă.

Corolar (test de optimalitate) . In condițiile teoremei 2.12.3., x^* este soluție optimă a problemei (PD).

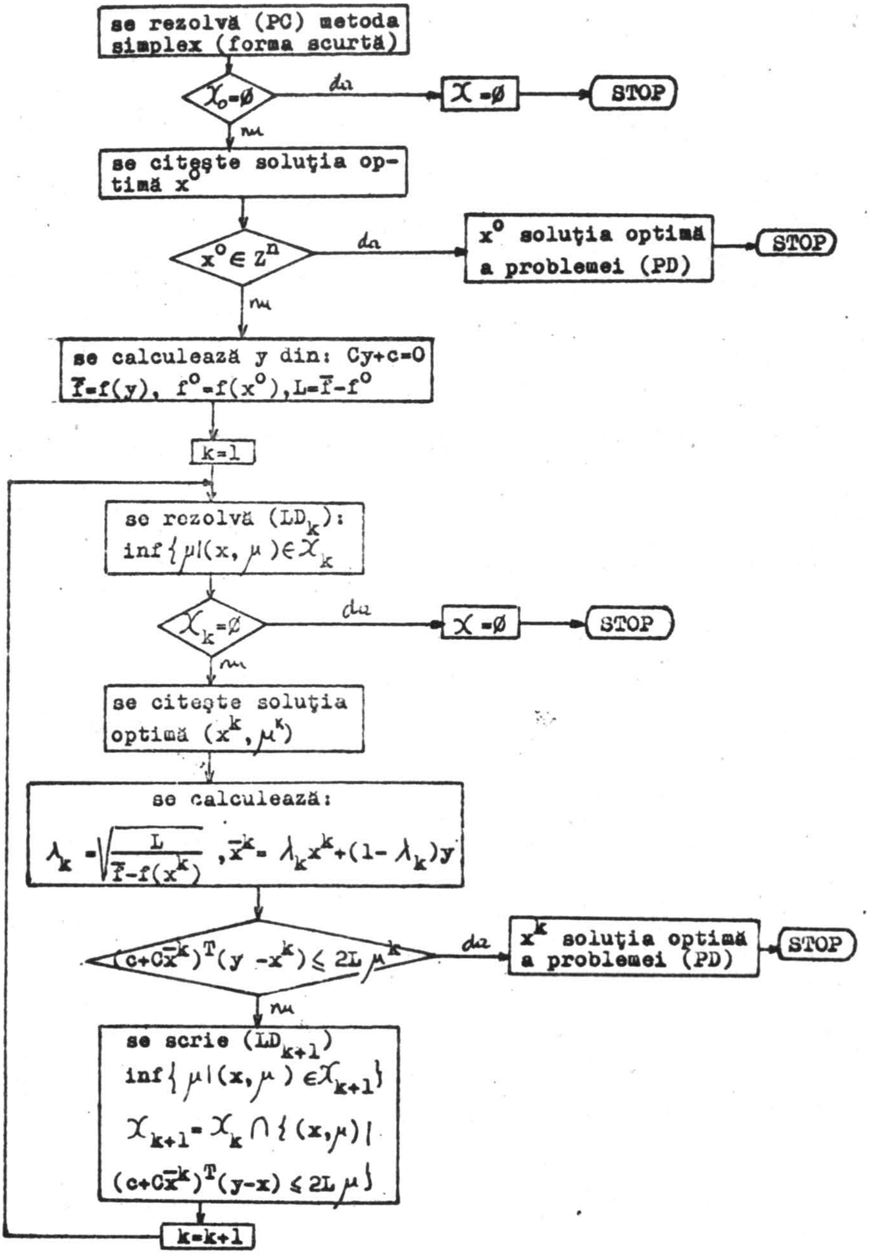
Algoritmul, prevede o etapă inițială în care se caută soluția problemei de programare pătratică convexă (PC), și apoi o succesiune de cicluri, fiecare constînd în rezolvarea unei probleme de programare liniară discretă și în testarea optimalității soluției obținute conform corolarului teoremei precedente.

Fiecare nouă problemă se construiește, pornind de la precedenta, prin asocierea unei noi restricții liniare (se secționează mulțimea soluțiilor posibile cu un hiperplan).

Descrierea algoritmului este dată în schema nr. 16.

2.3. Convergența algoritmului.

Teorema II.3.4. Dacă, pentru $k' > k$, $x^{k'} = x^k$, atunci x^k este soluția optimă a problemei (PD). Această situație apare, cu necesitate, pentru un $k' \leq |\mathcal{X}|$


se rezolvă (PC) metoda simplex (forma scurtă)
$\mathcal{X}_0=\emptyset$
da
$\mathcal{X}=\emptyset$
STOP
nu
se citeşte soluţia optimă x^0
$x^0 \in Z^n$
da
x^0 soluţia optimă a problemei (PD)
STOP
nu
se calculează y din: $Cy+c=0$
$\bar{f}=f(y)$, $f^0=f(x^0)$, $L=\bar{f}-f^0$
$k=1$
se rezolvă (LD_k):
$\inf\{\mu|(x,\mu)\in\mathcal{X}_k$
$\mathcal{X}_k=\emptyset$
da
$\mathcal{X}=\emptyset$
STOP
nu
se citeşte soluţia optimă (x^k,μ^k)
se calculează:
$\lambda_k=\sqrt{\frac{L}{\bar{f}-f(x^k)}}$, $\bar{x}^k=\lambda_k x^k+(1-\lambda_k)y$
$(c+C\bar{x}^k)^T(y-x^k)\leq 2L\mu^k$
da
x^k soluţia optimă a problemei (PD)
STOP
nu
se scrie (LD_{k+1})
$\inf\{\mu|(x,\mu)\in\mathcal{X}_{k+1}\}$
$\mathcal{X}_{k+1}=\mathcal{X}_k\cap\{(x,\mu)|$
$(c+C\bar{x}^k)^T(y-x)\leq 2L\mu\}$
$k=k+1$

Schema nr. 16

Demonstrație:

Evident, $(x^{k'}, \mu_{k'})$ ca soluție optimă a problemei $(LD_{k'})$ satisface restricția suplimentară de rang k;

$$(c+C\bar{x}^{k})^T(y-x^{k'}) \leq 2\mu^k L$$

și cum $x^{k'} = x^k$ și (x^k, μ^k) este soluție optimă în (LD_k), rezultă, conform teoremei II.3.3. că x^k este soluția optimă a problemei (PD). Ultima afirmație rezultă banal, datorită finitudinii lui $\mathcal{X}$ în ipoteza de mărginire I.

Concluzia acestei teoreme atestă faptul că algoritmul duce la rezolvarea problemei (PD) într-un număr finit de cicluri.

Corolar. Dacă rezolvarea problemelor de programare liniară discretă (LD_k) se face într-un număr finit de pași, atunci, metoda prezentă este finită și exactă.

§ 4. PROGRAMAREA CONVEXA DISCRETA; METODA "BRANCH AND BOUND" (A.H.Land, A.G.Doig, R.J.Dakin)

4.1. Problema

Fie problema de programare convexă în întregi:

$$(CD) \qquad \sup_{x\in\mathcal{X}} f(x); \quad \mathcal{X} = \{x \in R^n \mid g_j(x) \leq 0, j=1,\dots,m,\ x_i \in Z, i\in D\}$$

cu f concavă, g_j, $j=1,\dots,m$ convexe, $D \subseteq \{1,\dots,n\}$

Drept condiții prealabile pentru consistența algoritmului prezentat admitem următoarele:

I. Ipoteza mărginirii: $\mathcal{X}_0 = \{x \in R^n \mid g_j(x) \leq 0, j=1,..,m\}$ este mărginită.

II. Există un algoritm (numit algoritmul continuu) pentru rezolvarea problemei de programare convexă:

$$(C_0) \qquad \sup_{x\in\mathcal{X}_0} f(x)$$

4.2. Algoritmul

Presupunînd $\mathcal{X}_o \neq \emptyset$, fie x^o o soluţie optimă a problemei (C_o).

Propoziţia II.4.1. Dacă $x_i^o \in Z$, $i \in D$, atunci x^o este soluţie optimă a problemei (CD).

In caz contrar, să presupunem că pentru un $i \subset D, x_i^o \notin Z$.

Notăm:

$$\mathcal{X}_1 = \{x \in \mathcal{X}_o \mid x_i \leq [x_i^o]\} \quad , \mathcal{X}_2 = \{x \in \mathcal{X}_o \mid x_i \geq [x_i^o] + 1\}$$

Propoziţia II.4.2. $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{X}_1 \cup \mathcal{X}_2$, $x^o \notin \mathcal{X}_1 \cup \mathcal{X}_2$.

Corolarul 1. Dacă $\mathcal{X}_1 \cup \mathcal{X}_2 = \emptyset$, atunci $\mathcal{X} = \emptyset$.

Corolarul 2. Dacă $\mathcal{X}_1 = \emptyset$ ($\mathcal{X}_2 = \emptyset$) şi x^2 (x^1) este soluţie optimă a problemei:

(C_2) sup. $\{f(x) \mid x \in \mathcal{X}_2\}$ ((C_1) sup. $\{f(x) \mid x \in \mathcal{X}_1\}$)

astfel încît $x_i^2 \in Z$ $(x_i^1 \in Z)$ $i \in D$, atunci x^2 (x^1) este soluţie optimă a problemei (CD).

Corolarul 3. Dacă $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2 \neq \emptyset$ şi x^2 este soluţie optimă a problemei (C_2) (x^1 este soluţie optimă a problemei (C_1)) astfel încît, $x_i^2 \in Z$ $(x_i^1 \in Z)$, $i \in D$ şi $f(x^2) \geq \sup\{f(x) \mid x \in \mathcal{X}_1\}$ $(f(x^1) \geq \sup\{f(x) \mid x \in \mathcal{X}_2\}$) atunci $x^2(x^1)$ este soluţie optimă a problemei (CD).

Propoziţia II.4.3. Dacă $\mathcal{X}_k \subset \mathcal{X}_o$ şi $x \in \mathcal{X}$ astfel încît $f(x) > \sup\{f(x) \mid x \in \mathcal{X}_k\}$ atunci nici o soluţie optimă a problemei (CD) nu se poate afla în $\mathcal{X}_k$.

Ideea fundamentală a algoritmului (descris în schema 17) este explorarea, pe secţiuni, a poliedrului convex $\mathcal{X}_o$ care conţine mulţimea soluţiilor posibile $\mathcal{X}$. La fiecare pas k, plecînd de la un punct al lui $\mathcal{X}_o$ (x^r) care nu este în $\mathcal{X}$, o anumită submulţime convexă a lui $\mathcal{X}_o$ ($\mathcal{X}_r$) se desface în trei părţi. Una din acestea se elimină, neputînd conţine soluţii ale problemei (CD) ($\{x \in \mathcal{X}_r \mid [x_i^r] < x_i < [x_i^r] + 1$), iar celelalte două ($\mathcal{X}_s$, $\mathcal{X}_{s+1}$) constituie mulţimile de soluţii posibile a două probleme de programare convexă, cu funcţie obiectiv f, ale căror soluţii optime se determină. Dacă una din aceste probleme are ca soluţie optimă un punct din $\mathcal{X}$, respectiva soluţie se reţine, dar mulţimea din care a fost selectată nu mai face obiectul unei viitoare explorări neputînd conţine soluţii "mai bune" ale problemei (CD). Acelaşi lucru se întîmplă cu oricare din mulţimile explorate, dacă optimul lui f este inferior valorii atinse de funcţia obiectiv într-un punct din $\mathcal{X}$ găsit anterior (propoziţia II.4.2.).

Astfel, algoritmul sugerează un proces de ramificare ale cărui noduri corespund unor probleme de programare convexă rezolvabile cu algoritmul "continuu". La fiecare pas k, de la un nod r sînt generate două noi probleme (C_s), (C_{s+1}), care se obţin din problema curentă prin adiţionarea unei restricţii liniare. Procesul este stopat într-un nod r în una din următoarele situaţii: (i) problema curentă (C_r) nu are soluţii, (ii) soluţia optimă a problemei curente este în $\mathcal{X}$, (iii) soluţia optimă a problemei curente nu este în $\mathcal{X}$, dar valoarea funcţiei obiectiv este inferioară celei atinse într-o soluţie din $\mathcal{X}$ generată la alt nod.

Algoritmul se încheie cînd procesul de ramificare a fost stopat, fiecare nod terminal fiind în una din cele trei alternative. In acest caz o soluţie optimă a problemei (CD) este dată de orice nod stopat după regula (ii) care realizează maximul în clasa acestor noduri.

Debutul algoritmului este reglementat de propoziţia II.4.1. şi corolarele sale.

4.3. Convergenţa algoritmului.

Ipoteza de mărginire I, garantează finitudinea algoritmului.

Intr-adevăr, în $\mathcal{X}$, fiecare componentă x_i, $i \in D$, variază într-un interval mărginit $[\alpha_i, \beta_i]$. De fiecare dată cînd componenta i a soluţiei curente este găsită neîntreagă, algoritmul elimină din poliedrul $\mathcal{X}_o$ o submulţime a cărei proiecţie pe coordonata i este interiorul unui interval de lungime 1 din $[\alpha_i, \beta_i]$. De aici finitudinea algoritmului.

Observaţie: Evident, referindu-ne la finitudinea algoritmului am subînţeles că el se desfăşoară într-un număr finit de cicluri proprii. Cum fiecare ciclu presupune rezolvarea unei probleme de programare convexă, convergenţa algoritmului global este condiţionată de convergenţa subalgoritmului utilizat la acest punct. De aici necesitatea ipotezei II.

4.4. Cazul liniar

Dacă (CD) se înlocuieşte cu (LD):

(LD) $\quad \sup \{ c^T x \mid x \in R^n,\ x \geqslant 0,\ Ax=b,\ x_i \in Z,\ i \in D \}$

fie x^o soluţie optimă a problemei

(LS_o) $\quad \sup \{ c^T x \mid x \in R^n,\ x \geqslant 0,\ Ax=b \}$

şi $i \in D$, astfel ca $x_i^o \notin Z$.

Considerăm problemele:

(LS_1) $\quad \sup \{ c^T x \mid x \in \mathcal{X}_1 \} \quad \mathcal{X}_1 = \mathcal{X}_o \cap \{ x_i \leqslant [x_i^o] \}$

(LS_2) $\quad \sup \{ c^T x \mid x \in \mathcal{X}_2 \},\ \mathcal{X}_2 = \mathcal{X}_o \cap \{ x_i \geqslant [x_i^o] + 1 \}$

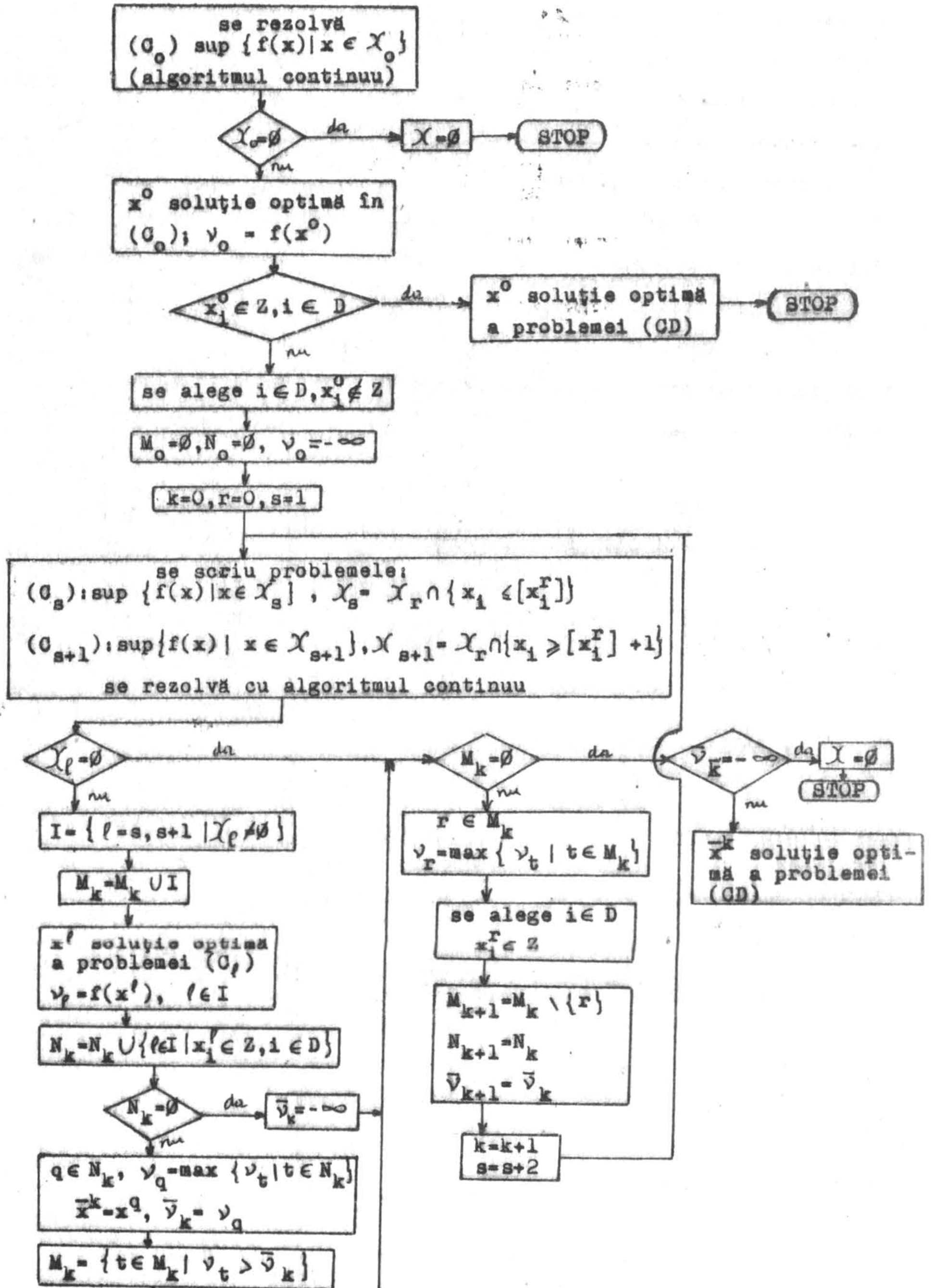
Dacă B(O) este baza admisibilă, asociată soluţiei x^o, atunci, deducem că $x_i \leqslant [x_i^o]$ este echivalentă cu:

$$- \sum_j z_{ji}^o x_j \leqslant [x_i^o] - x_i^o$$

sau

(II.4.1.) $$- \sum_j z_{ji}^o x_j + x_{n+1} = [x_i^o] - x_i^o,\ x_{n+1} \geqslant 0$$

Astfel, problema (LS_1) poate fi constituită prin adiţionarea restricţiilor (II.4.1.) construite cu datele furnizate de


se rezolvă
(C_o) sup $\{f(x) \mid x \in \mathcal{X}_o\}$
(algoritmul continuu)
$\mathcal{X}_o = \emptyset$
da
$\mathcal{X} = \emptyset$
STOP
nu
x^o soluţie optimă în
(C_o); $\nu_o = f(x^o)$
$x_i^o \in Z, i \in D$
da
x^o soluţie optimă
a problemei (CD)
STOP
nu
se alege $i \in D, x_i^o \notin Z$
$M_o = \emptyset, N_o = \emptyset, \nu_o = -\infty$
$k=0, r=0, s=1$
se scriu problemele:
(C_s): sup $\{f(x) \mid x \in \mathcal{X}_s\}$, $\mathcal{X}_s = \mathcal{X}_r \cap \{x_i \leq [x_i^r]\}$
(C_{s+1}): sup $\{f(x) \mid x \in \mathcal{X}_{s+1}\}$, $\mathcal{X}_{s+1} = \mathcal{X}_r \cap \{x_i \geq [x_i^r] + 1\}$
se rezolvă cu algoritmul continuu
$\mathcal{X}_\ell = \emptyset$
da
$M_k = \emptyset$
da
$\bar{\nu}_k = -\infty$
da
$\mathcal{X} = \emptyset$
STOP
nu
$I = \{\ell = s, s+1 \mid \mathcal{X}_\ell \neq \emptyset\}$
$M_k = M_k \cup I$
x^ℓ soluţie optimă
a problemei (C_ℓ)
$\nu_\ell = f(x^\ell)$, $\ell \in I$
$N_k = N_k \cup \{\ell \in I \mid x_i^\ell \in Z, i \in D\}$
$N_k = \emptyset$
da
$\bar{\nu}_k = -\infty$
nu
$q \in N_k$, $\nu_q = \max\{\nu_t \mid t \in N_k\}$
$\bar{x}^k = x^q$, $\bar{\nu}_k = \nu_q$
$M_k = \{t \in M_k \mid \nu_t > \bar{\nu}_k\}$
nu
$r \in M_k$
$\nu_r = \max\{\nu_t \mid t \in M_k\}$
se alege $i \in D$
$x_i^r \notin Z$
$M_{k+1} = M_k \setminus \{r\}$
$N_{k+1} = N_k$
$\bar{\nu}_{k+1} = \bar{\nu}_k$
$k=k+1$
$s=s+2$
nu
$\bar{x}^k$ soluţie optimă a problemei (CD)

Schema nr. 17.

ultima iterată simplex a problemei (LS_0). Variabila suplimentară introdusă, x_{n+1} devine variabila bazică pentru noua problemă, alături de variabilele bazei B(0). Cum valoarea sa este negativă, rezolvarea problemei (LS_1) poate fi făcută cu algoritmul simplex dual, procesul calculatoriu fiind asemănător cu cel din algoritmul mixt al lui Gomory.

Observații asemănătoare se pot face și asupra rezolvării lui (LS_2) și în general, sînt valabile pentru problemele generate la fiecare pas al algoritmului.

4.5. Cazul variabilelor bivalente.

O mențiune specială asupra algoritmului o putem face în cazul în care variabilele supuse condițiilor de integritate nu pot lua decît valorile 0 sau 1.

Intr-adevăr, dacă problema curentă (C_r) are soluția optimă x^r și, pentru un $i \in D$, $x_i^r \notin Z$, cuplul de probleme derivat este:

(CS) $\qquad \sup \{f(x) \mid x \in \mathcal{X}_r,\ x_i = 0\}$

(C_{s+1}) $\qquad \sup \{f(x) \mid x \in \mathcal{X}_r,\ x_i = 1\}$

Condițiile suplimentare specificînd valori precise pentru una din variabile, pot fi integrate celorlalte restricții, efectul principal fiind reducerea numărului variabilelor în noile probleme (în cazul general asistăm la creșterea numărului restricțiilor).

CAPITOLUL III

PROGRAMAREA DINAMICA

§ 1. PROCESE SECVENTIALE DE DECIZIE. PRINCIPIUL OPTIMALITATII

Programarea dinamică este o tehnică de abordare a unor clase de probleme de optimizare al căror model matematic reclamă un proces secvenţial de decizie.

Intr-o astfel de problemă, la fiecare etapă (moment) $t \in T$ $(T \subset R)$, se alege o decizie x_t dintr-o mulţime de decizii accesibile $\mathcal{X}_t$, putîndu-se măsura utilitatea deciziei alese, u_t. Pe ansamblu, problema cere determinarea deciziei globale $x = \{x_t\}_{t \in T}$ care optimizează o funcţie obiectiv globală f, definită, în mod esenţial, pe baza utilităţilor parţiale $\{u_t\}_{t \in T}$.

Natura intimă a procesului de decizie secvenţială face ca evoluţia sa să fie controlată de parametrii de stare $\{\xi_t\}_{t \in T}$ a căror lege de variaţie este presupusă cunoscută şi dependentă de deciziile alese:

(III.1.1) $$F(t, x_t, \xi_t) = 0$$

In general, $\mathcal{X}_t$ şi u_t depind de starea procesului:

$$\mathcal{X}_t = \mathcal{X}_t(\xi_t), \quad u_t = u_t(x_t, \xi_t)$$

O traiectorie a procesului, corespunzătoare deciziei globale $x = \{x_t\}_{t \in T}$ este funcţie ξ (cu $\xi(t) = \xi_t$) definită pe T prin (II.1.1.).

In particular, o traiectorie optimă ξ^* este o traiectorie corespunzătoare unei decizii optime x^* (care maximizează (minimizează) funcţia obiectiv f).

Tehnica programării dinamice constă în reducerea problemei de optimizare (asupra lui f), la o familie de probleme de optimizare, asociate fiecărei etape $t \in T$, în care alegerea se face asupra unei singure variabile de decizie x_t.

Principiul dominant al acestei tehnici, principiul optimalităţii al lui R. Bellman, poate fi - în general - enunţat astfel: o condiţie necesară pentru ca o traiectorie ξ^* să fie optimă pe T este ca, oricare ar fi $t_1, t_2 \in T$, $t_1 < t_2$, ea să fie optimă între t_1 şi t_2, cînd $\xi_{t_1} = \xi^*(t_1)$.

§ 2. PROGRAMAREA DINAMICA DISCRETA CU NUMAR FINIT DE STADII

2.1. Formalizarea problemei. Analiza prospectivă şi analiza retrospectivă.

Presupunem $T = \{1,2,\ldots,n\}$

Pentru fiecare $i \in T$, $\mathcal{X}_i = \mathcal{X}_i(\xi_i)$ este mulţimea deciziilor admisibile, dacă starea actuală este ξ_i şi $u_i = u_i(x_i, \xi_i)$ reprezintă utilitatea parţială asociată etapei i, corespunzătoare deciziei $x_i \in \mathcal{X}_i(\xi_i)$.

Funcţia obiectiv a problemei este: $f(u_1(x_1, \xi_1), \ldots, u_n(x_n, \xi_n))$.

Traiectoriile procesului descriu, în acest caz, legea de succesiune a stărilor în cele n etape. După cum această succesiune respectă sau inversează ordinea naturală a stadiilor, vorbim despre analiza prospectivă sau analiza retrospectivă.

Astfel, analiza prospectivă este caracterizată de legităţi de tipul:

(DP) $\quad \xi_{i+1} = g_i(x_i, \xi_i), \; x_i \in \mathcal{X}_i(\xi_i), \; i=1,\ldots,n-1$

în timp ce, în analiza retrospectivă, ecuațiile traiectoriilor sînt de forma:

$$\text{(DR)} \qquad \xi_{i-1}=g_i(x_i, \xi_i) \;,\; x_i\in \mathcal{X}_i(\xi_i) \;,\; i=2,\dots,n$$

Este ușor de observat că toate elementele descriptive ale problemei sînt determinate de decizia aleasă și de o stare dată și anume, starea inițială ξ_1, în cazul (DP) și, respectiv, starea finală ξ_n, în cazul (DR). Renotăm, pentru ξ_1 dat:

$$\tilde{g}_1(x_1, \xi_1)=g_1(x_1, \xi_1),\tilde{u}_1(x_1, \xi_1)=u_1(x_1, \xi_1),x_1\in \tilde{\mathcal{X}}_1(\xi_1) = \\ = \mathcal{X}_1(\xi_1)$$

$$\tilde{g}_2(x_1,x_2, \xi_1)=g_2(x_2,\tilde{g}_1(x_1, \xi_1)),\tilde{u}_2(x_1,x_2, \xi_1)=u_2(x_2,\tilde{g}_1(x_1, \xi_1)), \\ x_2\in \tilde{\mathcal{X}}_2(x_1, \xi_1) = \mathcal{X}_2(\tilde{g}_1(x_1, \xi_1))$$

....

$$\tilde{g}_i(x_1,\dots,x_i, \xi_1)=g_i(x_i,\tilde{g}_{i-1}(x_1,\dots,x_{i-1}, \xi_1)),\tilde{u}_i(x_1,\dots,x_i,\xi_1)= \\ =u_i(x_i,\tilde{g}_{i-1}(x_1,\dots,x_{i-1}, \xi_1)),x_i\in \tilde{\mathcal{X}}_i(x_1,\dots,x_{i-1}, \xi_1) = \\ = \mathcal{X}_i(\tilde{g}_{i-1}(x_1,\dots,x_{i-1}, \xi_1)) \;;\; i=2,\dots,n$$

$$\tilde{f}(x_1,\dots,x_n, \xi_1)=f(\tilde{u}_1(x_1, \xi_1)\dots,\tilde{u}_n(x_1,\dots,x_n, \xi_1))$$

iar, în cazul analizei retrospective, pentru un ξ_n dat,

$$\tilde{\tilde{g}}_n(x_n, \xi_n)=g_n(x_n, \xi_n),\tilde{\tilde{u}}_n(x_n, \xi_n)=u_n(x_n, \xi_n),x_n\in \tilde{\tilde{\mathcal{X}}}_n(\xi_n) = \\ = \mathcal{X}_n(\xi_n)$$

....

$$\tilde{\tilde{g}}_i(x_i,\dots,x_n, \xi_n)=g_i(x_i,\tilde{\tilde{g}}_{i+1}(x_{i+1},\dots,x_n, \xi_n)),\tilde{\tilde{u}}_i(x_i,\dots,x_n,\xi_n)= \\ =u_i(x_i,\tilde{\tilde{g}}_{i+1}(x_{i+1},\dots,x_n, \xi_n)),x_i\in \mathcal{X}_i(\tilde{\tilde{g}}_{i+1}(x_{i+1},\dots,x_n,\xi_n)= \\ = \tilde{\tilde{\mathcal{X}}}_i(x_{i+1},\dots,x_n, \xi_n),\; i=1,\dots,n-1$$

$$\tilde{\tilde{f}}(x_1,\dots,x_n, \xi_n)=f(\tilde{\tilde{u}}_1(x_1,\dots,x_n, \xi_n),\dots,\tilde{\tilde{u}}_n(x_n, \xi_n))$$

Definiţie O decizie x^* este optimă relativ la starea iniţială (finală) ξ_1 (ξ_n), într-o problemă analizată prospectiv (retrospectiv), dacă:

$$\tilde{f}(x^*, \xi_1) = \max.\{\tilde{f}(x, \xi_1) \mid x_i \in \tilde{\mathcal{X}}_i(x_1,\dots,x_{i-1}, \xi_1),\ 1 \leq i \leq n\}$$

$$(\tilde{\tilde{f}}(x^*, \xi_n) = \max.\{\tilde{\tilde{f}}(x, \xi_n) \mid x_i \in \tilde{\tilde{\mathcal{X}}}_i(x_{i+1},\dots,x_n, \xi_n),\ 1 \leq i \leq n)\}$$

Convenim, în cele ce urmează, ca, referindu-ne la problemele de optimizare, în condiţiile în care traiectoriile sînt definite în maniera prospectivă, respectiv, retrospectivă, să le desemnăm prin (DP), (DR).

2.2. Probleme decompozabile. Principiul optimalităţii

Definiţie. Problema (DP) este decompozabilă prospectiv, dacă există funcţiile $F_1,\dots,F_n$, $F_i : R^2 \longrightarrow R$, $F_i(\alpha, .)$ nedescrescătoare pentru fiecare $\alpha \in R$ $(i=1,\dots,n)$ astfel încît:

(III.2.1.) $$f_{n-i+1}(u_i(x_i, \xi_i),\dots,u_n(x_n, \xi_n)) = F_{n-i+1}(u_i(x_i, \xi_i), f_{n-i}(u_{i+1}(x_{i+1}, \xi_{i+1}),\dots, u_n(x_n, \xi_n))),$$

pentru $i=1,\dots,n$ ($f_o = 0$) sau echivalent,

(III.2.1.) $$\tilde{f}_{n-i+1}(x_i,\dots,x_n, \xi_i) = F_{n-i+1}(u_i(x_i, \xi_i), \tilde{f}_{n-1}(x_{i+1},\dots,x_n, g_i(x_i, \xi_i))),\ i=1,2,\dots,n$$

unde f_{n-i+1} este funcţia obiectiv asociată procesului de decizie limitat la etapele $i, i+1,\dots,n$ ($f_n = f$).

Definiţie. Problema (DR) este decompozabilă restrospectiv, dacă există funcţiile $G_1,\dots,G_n$, $G_i : R^2 \longrightarrow R$, $G_i(\alpha, .)$ nedescrescătoare pentru fiecare $\alpha \in R$ $(i=1,\dots,n)$, astfel încît:

(III.2.2.) $f_i(u_1(x_1, \quad {}_1),\dots,u_i(x_i, \quad {}_i))=G_i(u_i(x_i, \quad {}_i),$
$f_{i-1}(x_1,\dots,x_{i-1},g_i(x_i, \quad {}_i)))$, $i=1,\dots,n$

sau, echivalent

(III.2.2') $f_i(x_1,\dots,x_i, \quad {}_i)=G_i(u_i(x_i, \quad {}_i),$
$f_{i-1}(x_1,\dots,x_{i-1},g_i(x_i, \quad {}_i)))$, $i=1,\dots,n$

unde f_i este funcţia obiectiv asociată procesului de decizie limitat la etapele $1,2,\dots,i$ ($f_n = f$).

Să notăm, în cele ce urmează,

$$\tilde{h}_{n-i+1}(\xi_i) = \max_{\substack{x_j\in\tilde{\mathcal{X}}_j(\xi_i)\\ i\leq j\leq n}} \tilde{f}_{n-i+1}(x_i,\dots,x_n,\xi_i)$$

unde, $\tilde{\mathcal{X}}_j(\xi_i)=\mathcal{X}_j(g_{j-1}(x_{j-1},g_{j-2}(x_{j-2}(\dots,g_i(x_i,\xi_i))),j>i,\tilde{\mathcal{X}}_i(\xi_i)=$
$= \mathcal{X}_i(\xi_i)$

şi:

$$\tilde{\tilde{h}}_i(\xi_i)= \max_{\substack{x_j\in\tilde{\tilde{\mathcal{X}}}_j(\xi_i)\\ 1\leq j\leq i}} \tilde{\tilde{f}}(x_1,\dots,x_i,\xi_i)$$

unde, $\tilde{\tilde{\mathcal{X}}}_j(\xi_i)= \mathcal{X}_j(g_{j+1}(x_{j+1},g_{j+2}(x_{j+2},\dots,g_i(x_i,\xi_i))),j<i,\tilde{\tilde{\mathcal{X}}}_i(\xi_i)=$
$= \mathcal{X}_i(\xi_i)$

Presupunem, în cele ce urmează, că aceste mărimi au sens.

<u>Teorema III.2.1</u>. (principiul optimalităţii). I. Dacă problema (DP) este decompozabilă prospectiv, atunci:

(III.2.3.) $$\tilde{h}_{n-i+1}(\xi_i) = \max_{x_i\in\mathcal{X}_i(\xi_i)} F_{n-i+1}(u_i(x_i,\xi_i),\tilde{h}_{n-i}(g_i(x_i,\xi_i)))$$
$i=1,2,\dots,n$

II. Dacă problema (DR) este decompozabilă retrospectiv, atunci:

(III.2.4.) $$\tilde{\tilde{h}}_i(\xi_i) = \max_{x_i\in\mathcal{X}_i(\xi_i)} G_i(u_i(x_i,\xi_i),\tilde{\tilde{h}}_{i-1}(g_i(x_i,\xi_i))),$$

$i=1,\dots,n$

Demonstrație:

I. $\tilde{h}_{n-i+1}(\xi_i) = \max\limits_{x_i\in\mathcal{X}_i(\xi_i)}\Big[\max\limits_{\substack{x_j\in\mathcal{X}_j(\xi_j)\\ i+1\leq j\leq n}} F_{n-i+1}(u_i(x_i,\xi_i),$

$$f_{n-i}(x_{i+1},\dots,x_n,g_i(x_i,\xi_i)))\Big] =$$

$$= \max_{x_i\in\mathcal{X}_i(\xi_i)} F_{n-i+1}(u_i(x_i,\xi_i),\tilde{h}_{n-i}(g_i(x_i,\xi_i)))$$

ultima egalitate datorîndu-se monotoniei lui F_{n-i+1}.

II. Rezultă printr-un calcul analog.

Un caz particular îl reprezintă staționaritatea într-un proces secvențial de decizie. Fie $\mathcal{S}$ mulțimea stărilor posibile.

<u>Definiție</u>. Problema (DP)((DR)) este staționară, dacă, pentru $i\neq j$, $\xi_i=\xi_j=\xi$ implică:

$$\mathcal{X}_i(\xi_i) = \mathcal{X}_j(\xi_j) = \mathcal{X}(\xi)$$

și, pentru fiecare $\xi\in\mathcal{S}$, există $g(\cdot,\xi):\mathcal{X}(\xi)\to R$ și $u(\cdot,\xi):\mathcal{X}(\xi)\longrightarrow R$
astfel ca:

$$g_i(\cdot,\xi) = g_j(\cdot,\xi) = g(\cdot,\xi)$$
$$u_i(\cdot,\xi) = u_j(\cdot,\xi) = u(\cdot,\xi)$$

Relațiile (III.2.3.), (III.2.4.) devin în acest caz:

(III.2.3') $\quad \tilde{h}_{n-i+1}(\xi) = \max\limits_{x\in\mathcal{X}(\xi)} F_{n-i+1}(u(x,\xi),\tilde{h}_{n-i}(g(x,\xi))),\quad i=1,2,\dots,n$

(III.2.4'.) $\quad \tilde{h}_i(\xi) = \max\limits_{x\in\mathcal{X}(\xi)} G_i(u(x,\xi),\tilde{h}_{i-1}(g(x,\xi))),\quad i=1,\dots,n$

2.3. Tehnica de rezolvare a problemei

Fie problema (DP).

Pasul 1. Se determină $x_n^*(\xi_n) \in \mathcal{X}_n(\xi_n)$, astfel ca:

$$\tilde{f}_1(x_n^*(\xi_n),\xi_n) = \max_{x_n \in \mathcal{X}_n(\xi_n)} \tilde{f}_1(x_n, \xi_n)$$

Se citeşte $\tilde{h}_1(\xi_n) = \tilde{f}_1(x_n^*(\xi_n), \xi_n)$

Pasul i. Se determină $x_i^*(\xi_i) \in \mathcal{X}_i(\xi_i)$, astfel ca:

$$F_{n-i+1}(u_i(x_i^*(\xi_i), \xi_i), \tilde{h}_{n-i}(g_i(x_i^*(\xi_i), \xi_i))) =$$

$$= \max_{x_i \in \mathcal{X}_i(\xi_i)} F_{n-i+1}(u_i(x_i, \xi_i), \tilde{h}_{n-i}(g_i(x_i, \xi_i)))$$

Se citeşte $\tilde{h}_{n-i+1}(\xi_i) = F_{n-i+1}(u_i(x_i^*(\xi_i), \xi_i),$
$\tilde{h}_{n-i}(g_i(x_i^*(\xi_i))$

Odată cu pasul n, ultima componentă $x_1^*(\xi_1)$ este determinată.

Apoi, starea iniţială ξ_1 fiind dată, ecuaţiile traiectoriei optime permit aflarea deciziei optime x^* ; $x_1^* = x_1^*(\xi_1)$, $x_2^* = x_2^*(g_1(x_1^*, \xi_1))$. etc.

Rezolvarea, în cazul analizei retrospective, foloseşte idei asemănătoare, ordinea etapelor fiind inversată.

§ 3. PROGRAMAREA DINAMICA DISCRETA CU NUMAR INFINIT DE STADII

3.1. Funcţii obiectiv în procesele secvenţiale de decizie, cu un număr infinit de stadii

Necesitatea de a defini în mod constructiv, cu ajutorul utilităţilor asociate etapelor, funcţia obiectiv globală, limitează considerabil, în cazul proceselor secvenţiale de decizie cu un număr infinit de stadii, varietatea formelor acesteia.

Ne vom axa, în continuare, pe două modalități de definire a funcției obiectiv globale, modalități impuse, de altfel, de cerințele concrete ale multor probleme de factură economică care au inspirat tehnicile programării dinamice.

Prima, corespunde cazului aditiv simplu, în care:

$$\tilde{f}(x, \zeta_1) = \sum_{i=1}^{\infty} u_i(x_i, \zeta_i), \tag{III.3.1.}$$

$x=(x_1, x_2, \ldots,)$, $\zeta_i = \tilde{g}_{i-1}(x_1, \ldots, x_{i-1}, \zeta_1)$, $i=2,3,\ldots$

şi poate fi adoptată cu precauţiile necesare care să asigure convergenţa seriei.

A doua modalitate este reprezentată de suma utilităţilor actualizate:

$$\tilde{f}^{\alpha}(x, \zeta_1) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha^{i-1} u_i(x_i, \zeta_i), \quad \zeta_i = \tilde{g}_{i-1}(x_1, \ldots, x_{i-1}, \zeta_1) \tag{III.3.2.}$$

$i=2,3,\ldots,$

unde $\alpha \in (0,1)$ se numeşte coeficient de actualizare şi constituie o definiţie consistentă, dacă utilităţile pe etape sînt echi-mărginite.

3.2. Relaţii de recurenţă pentru cazul staţionar

Observînd că, formal, funcţia obiectiv $\tilde{f}$ din (III.3.1.) se obţine din (III.3.2.) pentru $\alpha = 1$, raţionamentele următoare vor fi valabile pentru ambele probleme considerate.

Analizînd prospectiv procesul de decizie, fie:

$$\bar{f}_n^{\alpha}(x_1, \ldots, x_n, \zeta_1) = \sum_{i=1}^{n} \alpha^{i-1} u_i(x_i, \zeta_i), \quad \zeta_i = \tilde{g}_{i-1}(x_1, \ldots, x_{i-1}, \zeta_1))$$

obiectivul global al procesului de decizie limitat la primele n etape, iniţiat în starea ζ_1.

Plasîndu-ne în cazul staţionar, putem scrie:

$$\bar{f}_n^{\alpha}(x_1,\ldots,x_n,\xi_1)=u(x_1,\xi_1)+\alpha\sum_{i=2}^{n}\alpha^{i-2}u(x_i,\tilde{g}(x_2,\ldots,x_{i-1},\xi_2)=$$

$$=u(x_1,\xi_1)+\alpha\sum_{i=1}^{n-1}\alpha^{i-1}u(x_{i+1},\tilde{g}(x_2,\ldots,x_i,g(x_i,\xi_1)))=$$

$$=u(x_1,\xi_1)+\alpha\,\bar{f}_{n-1}^{\alpha}(x_2,\ldots,x_n,g(x_1,\xi_1))$$

Dar, limitîndu-ne la procesul finit cu n etape, putem considera că $\bar{f}_n^{\alpha}(x_1,\ldots,x_n,\xi_1)=\tilde{f}_n^{\alpha}(x_1,\ldots,x_n,\xi_1)$ şi $\bar{f}_{n-1}^{\alpha}(x_2,\ldots,x_n,g(x_1,\xi_1))=\tilde{f}_{n-1}^{\alpha}(x_2,\ldots,x_n,g(x_1,\xi_1))$ (conform notaţiilor din §2), astfel că $\bar{f}_{n-1}^{\alpha}(x_2,\ldots,x_n,g(x_1,\xi_1))$ poate fi interpretat atît ca obiectivul global al procesului de decizie în primele n-1 etape, cu starea iniţială $g(x_1,\xi_1)$ cît şi ca obiectivul procesului de decizie de la etapa a 2-a pînă la cea de a n-a. Notînd:

$$v_n^{\alpha}(\xi)=\sup_{\substack{x_i\in\mathcal{X}_i(\xi)\\ 1\le i\le n}}\bar{f}_n^{\alpha}(x_1,\ldots,x_n,\xi)$$

deducem, datorită teoremei III.2.1.,

(III.3.3.) $$v_n^{\alpha}(\xi)=\sup_{x\in\mathcal{X}(\xi)}\left[u(x,\xi)+\alpha v_{n-1}^{\alpha}(g(x,\xi))\right],\quad n=2,3,\ldots$$

Pentru $\alpha=1$;

(III.3.4.) $$v_n(\xi)=\sup_{x\in\mathcal{X}(\xi)}\left[u(x,\xi)+v_{n-1}(g(x,\xi))\right],\quad n=2,3,\ldots$$

unde, $v_n(\xi)=\sup\limits_{\substack{x_i\in\mathcal{X}(\xi)\\ 1\le i\le n}}\bar{f}_n(x_1,\ldots,x_n,\xi)$

In ipoteza convergenţei seriei definitorii pentru $\tilde{f}^{\alpha}$, aceasta este limita şirului $\bar{f}_n^{\alpha}$. De aici, dacă şirul v_n^{α} (v_n) este convergent, limita se va fi interpretată ca valoare a optimului pentru problema cu număr infinit de etape.

3.3. Ecuaţiile funcţionale ale programării dinamice

Fie $\mathcal{S}$ mulţimea stărilor posibile, asupra căreia facem presupunerea:

$$\xi \in \mathcal{S}, x \in \mathcal{X}(\xi) \text{ implică } g(x, \xi) \in \mathcal{S}, \mathcal{S} \subset R^q, \text{ mărginită.}$$

Teorema III.3.1. Dacă, în cazul problemei de decizie staţionară, cu un număr infinit de stadii:

$$\sup_{\substack{x_i \in \mathcal{X}(\xi) \\ i=1,2,\dots}} \tilde{f}^{\alpha}(x, \xi), \quad \alpha \in (0,1)$$

utilităţile parţiale sînt uniform mărginite pe mulţimea stărilor $\mathcal{S}$, ($|u(x, \xi)| < M$, pentru orice $\xi \in \mathcal{S}$ şi $x \in \mathcal{X}(\xi)$), atunci şirul $\{v_n^{\alpha}\}$ converge uniform către o funcţie $v^{\alpha}: \mathcal{S} \to R$, care este unica soluţie a ecuaţiei:

$$\text{(III.3.5.)} \qquad v^{\alpha}(\xi) = \sup_{x \in \mathcal{X}(\xi)} \left[u(x, \xi) + \alpha v^{\alpha}(g(x, \xi)) \right], \quad \xi \in \mathcal{S}$$

Demonstraţie:

Fie operatorul W_α definit pe spaţiul funcţiilor mărginite definite pe $\mathcal{S}$, care asociază aplicaţiei $r: \mathcal{S} \to R$, aplicaţia $W_\alpha(r)$ dată de:

$$(W_\alpha(r))(\xi) = \sup_{x \in \mathcal{X}(\xi)} \left[u(x, \xi) + \alpha r(g(x, \xi)) \right]$$

Vom arăta că W_α este o contracţie (pentru $\alpha \in (0,1)$)

$$\| W_\alpha(r) - W_\alpha(s) \| = \sup_{\xi \in \mathcal{S}} | (W_\alpha(r))(\xi) - (W_\alpha(s))(\xi) |$$

Din definiţia supremului rezultă, pentru fiecare $\varepsilon > 0$, existenţa deciziilor x_ε, $x'_\varepsilon \in \mathcal{X}(\xi)$ astfel ca:

$$u(x'_\varepsilon, \xi) + \alpha r(g(x'_\varepsilon, \xi)) - u(x'_\varepsilon, \xi) - \alpha s(g(x'_\varepsilon, \xi)) - \varepsilon \le (W_\alpha(r))(\xi) -$$

$$-(W_\alpha(s))(\xi) \le u(x_\varepsilon, \xi) + \alpha r(x_\varepsilon, \xi)) + \varepsilon - u(x_\varepsilon, \xi) - \alpha s(g(x_\varepsilon, \xi))$$

sau:

(III.3.6.) $$\left|(W_\alpha(r))(\xi)-(W_\alpha(s))(\xi)\right| \leq \varepsilon + \max.\left\{\alpha\left|r(g(x_\varepsilon,\xi)) - s(g(x_\varepsilon,\xi)\right|, \alpha\left|r(g(x'_\varepsilon,\xi))-s(g(x'_\varepsilon,\xi))\right|\right\}$$

şi de aici, deoarece ε este arbitrar,

(III.3.7.) $$\| W_\alpha(r)-W_\alpha(s)\| \leq \alpha \| r-s \|$$

Observînd că:

(III.3.8.) $$v_n^\alpha = W_\alpha(v_{n-1}^\alpha),\ n=1,2,\ldots \quad (v_0^\alpha = 0)$$

putem scrie:

$$\| v_{n+1}^\alpha - v_n^\alpha \| = \| W_\alpha(v_n^\alpha)-W_\alpha(v_{n-1}^\alpha)\| \leq \alpha^{n+1} \| v_1^\alpha \| =$$

$$= \alpha^{n+1} \sup_{\xi\in\mathcal{G},\, x\in\mathcal{X}(\xi)} |u(x,\xi)| \leq M\alpha^{n+1}$$

Deci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(v_n^\alpha - v_{n-1}^\alpha)$ este absolut şi uniform convergentă. Atunci şirul sumelor parţiale, $\{v_n^\alpha\}$ este uniform convergent. Fie $v^\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} v_n^\alpha$ (limita uniformă).

Trecînd la limită în (III.3.8.) şi ţinînd seama de continuitatea contracţiei W_α, rezultă:

$$v^\alpha = W_\alpha(v^\alpha)$$

ceea ce este echivalent cu (III.3.5.).

Pentru completarea demonstraţiei teoremei, fie v^α, $\bar{v}^\alpha$ două soluţii ale ecuaţiei (III.3.5.).

$$\| v^\alpha - \bar{v}^\alpha \| = \| W_\alpha(v^\alpha)-W_\alpha(\bar{v}^\alpha)\| \leq \alpha\| v^\alpha - \bar{v}^\alpha \| < \| v^\alpha - \bar{v}^\alpha \|$$

deci, $v^\alpha = \bar{v}^\alpha$

<u>Teorema III.3.2</u>. Dacă, în cazul problemei de decizie staţionară, cu un număr infinit de stadii:

$$\sup_{\substack{x_i\in\mathcal{X}(\xi)\\ i=1,2,\ldots}} f(x,\xi)$$

sînt îndeplinite condiţiile:

(III.3.9.) $0\in\mathcal{S}$, $u(x,0)=0$ pentru orice $x\in\mathcal{X}(0)$ şi $u(x,.)$ este continuă în $\xi=0$, uniform în raport cu x, şi uniform mărginită pe $\mathcal{S}$

(III.3.10.) $\|g(x,\xi)\|\leq\beta\|\xi\|$, pentru orice $x\in\mathcal{X}(\xi)$, unde $\beta\in(0,1)$,

(III.3.11.) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} w(\beta^n c)<\infty$, oricare ar fi $c\in R$, unde:

$$w(c)=\sup_{\xi\in\mathcal{S}(c)}\ \sup_{x\in\mathcal{X}(\xi)}|u(x,\xi)|\text{ , şi } \mathcal{S}(c)=\{\xi\in\mathcal{S}\mid\|\xi\|\leq c\}$$

atunci şirul $\{v_n\}$ converge uniform la o funcţie $v:\mathcal{S}\to R$, continuă în $\xi=0$, care este unica soluţie continuă în $\xi=0$, satisfăcînd condiţiile iniţiale $v(0)=0$ a ecuaţiei:

(III.3.12.) $$v(\xi)=\sup_{x\in\mathcal{X}(\xi)}\left[u(x,\xi)+v(g(x,\xi))\right]\quad,\ \xi\in\mathcal{S}$$

Demonstraţie:

Relaţia (III.3.6.) pentru $\alpha=1$ şi $r=v_n$, $s=v_{n-1}$, devine, ţinînd seama şi de relaţia de recurenţă (III.3.4.);

$$|v_{n+1}(\xi)-v_n(\xi)|\leq\sup_{x\in\mathcal{X}(\xi)}|v_n(g(x,\xi))-v_{n-1}(g(x,\xi))|$$

Notînd $w_n(c)=\sup\limits_{\xi\in\mathcal{S}(c)}|v_{n+1}(\xi)-v_n(\xi)|$, deducem folosind (III.3.10.).

$$w_n(c)\leq\sup_{\xi\in\mathcal{S}(c)}\ \sup_{x\in\mathcal{X}(\xi)}|v_n(g(x,\xi))-v_{n-1}(g(x,\xi))|\leq$$

$$\leq\sup_{\xi\in\mathcal{S}(\beta c)}|v_n(\xi)-v_{n-1}(\xi)|=w_{n-1}(\beta c)$$

şi prin iterarea acestei inegalităţi:

(III.3.13.) $$w_n(c)\leq w_0(\beta^n c)$$

Or,

$$w_0(c)=\sup_{\xi\in\mathcal{S}(c)}|v_1(\xi)-v_0(\xi)|=\sup_{\xi\in\mathcal{S}(c)}\left|\sup_{x\in\mathcal{X}(\xi)}u(x,\xi)\right|\leq w(c)$$

şi deci (III.3.13.) se scrie:

$$w_n(c) \leq w(\beta^n c),\ n=1,2,\ldots$$

Atunci ipoteza (III.3.11.) implică convergența seriei $\sum_{n=0}^{\infty} w_n(c)$, pentru orice c, ceea ce implică, datorită mărginirii lui $\mathcal{Y}$, convergența absolută şi uniformă a seriei:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (v_{n+1}(\xi)-v_n(\xi))$$

Concludem că şirul sumelor parțiale $\{v_n\}$ este uniform convergent. Fie v limita sa.

Să remarcăm că v(0)=0.

Intr-adevăr, $v_1(0)=\sup_{x\in\mathcal{X}(0)} |u(x,0)| =0$. Presupunînd $v_n(0)=0$, relațiile de recurență (III.3.4.) implică $v_{n+1}(0)=0$. De aici,

$$v(0)=\lim_{n\to\infty} v_n(0)=0$$

v este continuă în origine. Intr-adevăr, datorită ipotezei (III.3.9.), pentru $\varepsilon>0$, există $c_\varepsilon>0$ astfel ca $\xi\in\mathcal{Y}(c_\varepsilon)$ să implice:

$$\sup_{x\in\mathcal{X}(\xi)} |u(x,\xi)|<\varepsilon$$

sau,

$$\sup_{\xi\in\mathcal{Y}(c_\varepsilon)}\ \sup_{x\in\mathcal{X}(\xi)} |u(x,\xi)|<\varepsilon$$

Or, în acest caz, pentru $\xi\in\mathcal{Y}(c_\varepsilon)$, $|v_1(\xi)|\leq\varepsilon$, ceea ce demonstrează continuitatea lui v_1 în $\xi=0$. Relațiile de recurență (III.3.4.) şi continuitatea lui u, asigură, printr-un raționament inductiv, continuitatea, în origine, a lui v_n, n=1,2,... Ori, deoarece convergența şirului $\{v_n\}$ este uniformă, rezultă de aici că v este continuă în $\xi=0$.

Pentru $\alpha=1$, (III.3.7.) implică continuitatea operatorului $W=W_1$. Atunci, deoarece $v_{n+1}=W(v_n)$, deducem că

$$v=W(v)$$

şi cu aceasta, ecuaţia funcţională (III.3.12.) este verificată de v.

Pentru ultima afirmaţie a teoremei, fie $v,\bar{v}$ două soluţii ale ecuaţiei (III.3.12.), continue şi egale cu o în $\xi=0$.

Fie, pentru $c>0$, $z(c)=\sup_{\xi\in\mathcal{S}(c)}|v(\xi)-\bar{v}(\xi)|$

Cum $v(0)=\bar{v}(0)=0$ şi $v,\bar{v}$ sînt continui în origine, rezultă că pentru $\varepsilon>0$, există $c_\varepsilon>0$, astfel ca:

$|v(\xi)-\bar{v}(\xi)|<\varepsilon$, oricare ar fi $\xi\in\mathcal{S}(c_\varepsilon)$ şi deci,

$z(c_\varepsilon)<\varepsilon$

Concludem că $\lim\limits_{c\to 0} z(c)=0$;

Pe de altă parte, (III.3.6.) în care luăm $r=v$ şi $s=\bar{v}$ duce la:

$$|v(\xi)-\bar{v}(\xi)|\leqslant \sup_{x\in\mathcal{X}(\xi)}|v(g(x,\xi))-\bar{v}(g(x,\xi))|$$

şi de aici, pentru $c>0$,

$$z(c)<\sup_{\xi\in\mathcal{S}(c)}\ \sup_{x\in\mathcal{X}(\xi)}|v(g(x,\xi))-\bar{v}(g(x,\xi))|\leqslant \sup_{\xi\in\mathcal{S}(\beta c)}|v(\xi)-$$

$$-\bar{v}(\xi)| = z(\beta c)$$

Iterată de n ori, această inegalitate devine:

$$0\leqslant z(c)\leqslant z(\beta^n c)\quad,\ n=1,2,\ldots$$

şi cum $\lim\limits_{n\to\infty} z(\beta^n c)=0$, rezultă $z=0$ şi deci $v=\bar{v}$.

CAPITOLUL IV

ELEMENTE DE TEORIA JOCURILOR

Constituită ca teorie matematică cu importante valenţe aplicative, teoria jocurilor are ca obiect studiul modelelor situaţiilor conflictuale şi competiţionale.

Printr-o situaţie conflictuală sau competiţională se înţelege un cadru, definit printr-un ansamblu de reguli, în care acţionează mai mulţi factori de decizie raţionali (oameni sau grupuri umane), fiecare urmărind realizarea unui obiectiv propriu. Deoarece cadrul existent limitează posibilităţile de acţiune ale decidenţilor, iar starea de conflict sau competiţie presupune o interdependenţă a obiectivelor personale, apare necesară relevarea şi fundamentarea ştiinţifică a modalităţilor de acţiune optimă.

Modelul matematic al unei astfel de situaţii este alcătuit dintr-un ansamblu de elemente descriptive, care transpun în limbajul specific matematic, regulile cărora trebuie să li se conformeze acţiunile factorilor de decizie (numiţi, aici, jucători), precum şi din concepte fundamentale care reflectă în mod consistent noţiunile de comportament, utilitate a comportamentului, cîştig. Problema fundamentală a teoriei jocurilor constă în definirea, în termeni logici, a comportamentului optim al jucătorilor şi în determinarea acestuia .

Coexistenţa, în limbajul comun, a noţiunilor "situaţie conflictuală" şi "situaţie competiţională" este o reflectare a unor diferenţe calitative care decurg din interpretarea diversităţii şi opoziţiei intereselor factorilor de decizie.

Intr-un mod mult mai precis şi mai gradat, aceste diferenţe sînt marcate în teoria jocurilor fie în însăşi structura modelelor, fie în definiţia conceptului de optimalitate.

O diferenţiere netă este provocată de anumite ipoteze care, fără a fi prezente explicit în ansamblul de concepte descriptive care constituie modelul jocului, sînt de o importanţă majoră pentru justificarea, din punct de vedere pragmatic, a modului de definire al conceptului fundamental de optimalitate. Se adoptă astfel o clasificare a jocurilor în două categorii în studiul cărora ideile conducătoare sînt diferite; jocurile necooperative şi jocurile cooperative.

A. Teoria jocurilor necooperative.

Ipoteza implicit admisă în studiul acestor jocuri este absenţa comunicării între jucători şi independenţa alegerii acţiunilor personale.

§ 1. Jocuri în forma extinsă

1.1. Modelul unui joc în forma extinsă

Fie $(W, \prec)$ o mulţime nevidă, parţial ordonată.

Dacă $w \prec w'$, $w, w' \in W$, spunem că w este predecesor al lui w' şi w' este succesor al lui w.

Dacă $w \prec w'$ şi nu există $w'' \in W$, astfel încît $w \prec w'' \prec w'$, spunem că w este predecesor imediat al lui w', iar w' este succesor imediat al lui w.

Fie $\mathfrak{f} : W \to \mathcal{P}(W)$ definită prin $\mathfrak{f}(w)$ = mulţimea succesorilor imediaţi ai lui w.

<u>Definiţie</u> $(W, \prec)$ este o mulţime de poziţii dacă:

a) există $w^0 \in W$ astfel încît $\mathfrak{f}^{-1}(w^0) = \{w \mid \mathfrak{f}(w) = w^0\} = \emptyset$ (w^0 se numeşte poziţie iniţială)

b) oricare ar fi $w \in W$, $w \neq w^o$, $|\,\rho^{-1}(w)| = 1$

c) dacă $w' \prec w$ şi $w'' \prec w$ atunci sau $w' \prec w''$ sau $w'' \prec w'$

d) pentru fiecare $w \in W$ există un întreg nenegativ, m, astfel încît $w^o = (\rho^{-1})^m(w)$, $((\rho^{-1})^m = \underbrace{\rho^{-1} \circ \rho^{-1} \circ \dots \circ \rho^{-1}}_{m \text{ ori}}$ $(\rho^{-1})^o$ fiind aplicaţia identică)

e) $\rho(w)$ este cel mult numărabilă, $w \in W$.

Definiţie Un şir $\pi = (\pi(0), \pi(1), \dots,) \in W^{\infty}$ se numeşte partidă, dacă $\pi(k+1) \in \rho(\pi(k))$, $k=0,1,\dots;$ $\pi(0)=w^o$.

Notăm cu E mulţimea partidelor.

Definiţie Un joc de n persoane, cu generator, în forma extinsă, este ansamblul:

$$\Gamma = \left(I_n';(W,\prec);\ \{W_k\}_{k=0,1,\dots};\ \{M_i\}_{i\in I_n'};\ \mathcal{M}_{i}, i\in I_n';\right.$$

$$\left. P_o;\ f_i,\ i \in I_n\right)$$

unde:

I. $I_n' = \{0,1,\dots,n\}$ ($I_n = \{1,\dots,n\}$ desemnează mulţimea jucătorilor raţionali, 0 fiind rezervat generatorului jocului sau factorului aleator).

II. $(W,\prec)$ este o mulţime de poziţii structurată prin două desfaceri ale sale:

1°. o desfacere $\{W_k\}_{k=0,1,\dots}$ (partiţia rangurilor), unde $W_o = \{w^o\}$, $W_k = \{w \mid w^o = (\rho^{-1})^m(w)\}$, $k=1,2,\dots$

2°. o desfacere $\{M_i\}_{i\in I_n'}$ (partiţia jucătorilor)

III. Pentru fiecare $i \in I_n'$, $\mathcal{M}_i = \{M_{ij}\}_{j\in \Xi_i}$ este o desfacere a lui M_i (partiţia informaţională a jucătorului i) avînd proprietăţile:

1°. pentru fiecare $j \in \Xi_i$, există k astfel ca $M_{ij} \subseteq W_k$

2°. pentru fiecare $j \in \Xi_i$, există o mulţime $I_{ij} \subset R$ şi o familie de funcţii f_{ij}^w, $w \in M_{ij}$ astfel încît f_{ij}^w aplică bijectiv

$\mathfrak{f}(w)$ pe I_{ij} (I_{ij} se numeşte mulţimea alternativelor jucătorului i pentru mulţimea informaţională M_{ij}).

IV. $P_o = \{p_j\}_{j\in \Xi_o}$, cu p_j repartiţii pe I_{oj},

V. $f_i : E \to R$, $i \in I_n$ sînt funcţii mărginite (funcţiile de cîştig ale jucătorilor)

Definiţie Jocul Γ este cu informaţie completă dacă $|M_{ij}| = 1$, $j\in \Xi_i$, $i \in I_n'$.

1.2. Strategii. Funcţii de utilitate

Definiţie $x_i : \mathcal{M}_i \longrightarrow R$, astfel ca $x_i(M_{ij}) \in I_{ij}$, $j\in \Xi_i$ se numeşte strategie individuală (pură) a jucătorului $i \in I_n$.

Notăm cu X_i mulţimea strategiilor lui i şi cu X produsul cartezian al mulţimilor X_i, $i \in I_n$. Un element $x=(x_1,\dots,x_n)$ al lui X se numeşte strategie a jocului.

Fie $x \in X$.

Pentru fiecare k=1,2,..., definim o probabilitate de trecere P_x^k de la $(W_{k-1}, \mathcal{P}(W_{k-1}))$ la $(W_k, \mathcal{P}(W_k))$ prin:

$$P_x^k(w,A_k) = \begin{cases} 1, \text{ dacă } w \in M_{ij} \in \mathcal{M}_i, i\in I_n \text{ şi } ((f_{ij}^w)^{-1} \circ x_i)(M_{ij}) \in A_k \\ 0, \text{ dacă } w\in M_{ij} \in \mathcal{M}_i, i \in I_n \text{ şi } ((f_{ij}^w)^{-1} \circ x_i)(M_{ij}) \notin A_k \\ (p_j \circ f_{oj}^w)(\mathfrak{f}(w) \cap A_k), \text{ dacă } w \in M_{oj} \end{cases}$$

oricare ar fi $w \in W_{k-1}$ şi $A_k \in \mathcal{P}(W_k)$.

Fie acum, spaţiul măsurabil produs:

$$(\prod_{k=0}^{\infty} W_k, \bigotimes_{k=0}^{\infty} \mathcal{P}(W_k))$$

pe care definim probabilitatea P_x prin valorile ei pe mulţimile cilindrice de forma $C_{w^o,w^1,\dots,w^t} = \{(\alpha^o, \alpha^1,\dots) \in \prod_{k=0}^{\infty} W_k \mid \alpha^j = w^j,\ j=0,1,\dots t\}$

$$P_x(C_{w^0,w^1,\dots,w^t}) = \prod_{k=1}^{t} P_x^k(w^{k-1},w^k)$$

Se observă că E este măsurabilă în spaţiul produs şi că $P_x(E)=1$. Intr-adevăr, $E=\lim. E^k$, unde $\{E^k\}$ este şirul descendent de mulţimi măsurabile :

$$E^k = \bigcup_{\substack{w^j \in \rho(w^{j-1})\\ j=1,\dots,k}} C_{w^0,w^1,\dots,w^k}$$

Or , un calcul simplu arată că $P_x(E^k)=1$, oricare ar fi k .

Vom presupune că funcţiile de cîştig, f_i, sînt măsurabile în raport cu $\bigotimes_{k=0}^{\infty} \mathcal{P}(W_k)$

<u>Definiţie</u> Funcţia de utilitate a jucătorului $i \in I_n$ este aplicaţia

$$F_i : X \longrightarrow R ;$$

$$F_i(x) = \int_E f_i(\pi)\, dP_x(\pi).$$

Pentru fiecare $i \in I_n$, fie B_{ij} mulţimea probabilităţilor pe spaţiul măsurabil $(I_{ij}, \mathcal{P}(I_{ij}))$ $j \in \Xi_i$

Fie $(\Sigma_i, \mathcal{K}_i)$ spaţiul produs; $\Sigma_i = \prod_j I_{ij}, \mathcal{K}_i = \bigotimes_j \mathcal{P}(I_{ij})$.

<u>Definiţie</u> Dacă $\beta_j \in B_{ij}, j \in \Xi_i$, probabilitatea produs $\beta_i = \bigotimes_{j \in \Xi_i} \beta_{ij}$ pe spaţiul $(\Sigma_i, \mathcal{K}_i)$ se numeşte strategie de comportare a jucătorului i. Notăm cu B_i mulţimea strategiilor de comportare ale lui i.

Dacă $\beta_i \in B_i$, $i \in I_n$, atunci probabilitatea produs $\beta = \bigotimes_{i \in I_n} \beta_i$ pe spaţiul produs $(\prod_i \Sigma_i, \bigotimes_i \mathcal{K}_i)$ se numeşte strategie de comportare a jocului Γ .

Fie acum $u_i : X_i \to \Sigma_i$, definită prin:

$$u_i(x_i) = \sigma_i = (x_i(M_{ij}))_{j \in \Xi_i}$$

Dacă notăm $\mathcal{B}_i = \{ u_i^{-1}(A_i) \mid A_i \in \mathcal{K}_i \}$, atunci $(X_i, \mathcal{B}_i)$ este un spaţiu măsurabil.

<u>Definiţie</u> O probabilitate s_i definită pe $(X_i, \mathcal{B}_i)$ se numeşte strategie mixtă a jucătorului i.

Notăm cu S_i mulţimea strategiilor mixte ale lui i.

<u>Propoziţia IV.1.1</u>. Dacă β_i este o strategie de comportare a lui i, atunci $\beta_i \circ u_i^{-1}$ este o strategie mixtă a lui i.

Observaţii: a) Strategiile de comportare pot fi echivalate cu strategii mixte de o formă particulară. Intr-adevăr, pe cînd orice strategie de comportare β_i este o probabilitate produs pe spaţiul produs $(\prod_i \Sigma_i, \bigotimes_i \mathcal{K}_i)$, în schimb, pentru o strategie mixtă s_i, $s_i \circ u_i$ este o probabilitate arbitrară pe acelaşi spaţiu produs.

b) Strategiile pure pot fi înglobate în mulţimea strategiilor mixte dacă se identifică fiecare strategie x_i cu probabilitatea degenerată pe X_i avînd masa concentrată în x_i, ε_{x_i}.

<u>Definiţie</u> Funcţia de utilitate medie a jucătorului i este aplicaţia $\mathcal{F}_i : S \to R$;

$$\mathcal{F}_i(s) = \int_X F_i(x)ds(x)$$

unde S este mulţimea $\{ s = \bigotimes_{i \in I_n} s_i \mid s_i \in S_i,\ i \in I_n \}$, numită mulţimea strategiilor mixte ale jocului Γ.

In particular, vom scrie $\mathcal{F}_i(\beta)$ pentru $\mathcal{F}_i(\bigotimes_i \beta_i \circ u_i^{-1})$ şi $\mathcal{F}_i(x_i)$ pentru $\mathcal{F}_i(\bigotimes_i \varepsilon_{x_i})$.

1.3. Definiţia optimalităţii în jocurile necooperative; punctul de echilibru

Definiţie $\bar{x} \in X$ se numeşte punct de echilibru al jocului Γ, dacă, pentru fiecare $i \in I_n$.

$$F_i(\bar{x}) \geq F_i(\bar{x}^i; x_i), \text{ oricare ar fi } x_i \in X_i.$$

(notăm $x^i; y_i$ strategia jocului de forma $(x_1,\dots,x_{i-1},y_i,x_{i+1},\dots,x_n)$)

Definiţie $\bar{s} \in S$ se numeşte punct de echilibru mixt al jocului Γ, dacă, pentru fiecare $i \in I_n$,

$$\mathcal{F}_i(\bar{s}) \geq \mathcal{F}_i(\bar{s}^i; s_i), \text{ oricare ar fi } s_i \in S_i.$$

(notăm $s^i; q_i$ strategia mixtă a jocului de forma $\bigotimes_{\substack{j\in I_n \\ j\neq i}} s_j \otimes q_i$).

Vom spune că jocul este finit dacă există un întreg pozitiv ν astfel încît $W_{\nu+1} = \emptyset$ şi $\rho(w)$ este finită, oricare ar fi $w \in W$.

Teorema IV.1.1. Orice joc finit, cu informaţie completă, admite puncte de echilibru.

Demonstraţia teoremei va fi consecinţa unor rezultate preliminare.

Observăm că definiţia jocului finit presupune că $\rho(w)=\emptyset$, pentru orice $w \in W_\nu$. Să notăm cu $T=\{w \in W \mid \rho(w)=\emptyset\}$ şi cu $Q=W \setminus T$.

In acest caz, dacă $\pi \in E$ este o partidă a jocului, există $k \leq \nu$ şi $t \in T$ astfel ca $\pi(k)=t$. Aceasta justifică identificarea mulţimilor E şi T, astfel că, vom utiliza notaţiile $f_i(t)$, $P_x(t)$, în loc de $f_i(\pi)$, respectiv $P_x(\pi)$, dacă t este definit de π ca mai înainte.

Să observăm de asemenea, că dacă $\pi \in E$ şi $t \in T$ se asociază lui π, atunci, pentru fiecare $x \in X$, P_x este probabilitatea pe spaţiul finit $\prod_{k=0}^{\nu} W_k$, definită prin:

$$P_x(\pi)=P_x(t)=\prod_{k=1}^{\nu} P_x^k(\pi(k-1), \pi(k)).$$

Fie $w \in Q$, $w \neq w^o$. Notăm cu Γ^w jocul definit de ansamblul:

$$\left(I_n';(W^w,\prec);\{W_k^w\};\{M_i^w\}_{i\in I_n};\mathcal{M}_i^w,\ i\in I_n;P_o^w;\ f_i^w,\ i\in I_n\right)$$

unde:

$W^w=\{w'\in W \mid w'\succ w\}$, $T^w=T\cap W^w$, $Q^w=Q\cap W^w$

$W_o^w=\{w\}$, $W_k^w=\{w'\in W^w \mid w=(\rho^{-1})^k(w')\}$, $k\geqslant 1$

$M_i^w=M_i\cap W^w$, $i\in I_n$, $\mathcal{M}_i^w=\{M_{ij}^w\}$ cu $M_{ij}^w=M_{ij}\cap W^w$

$P_o^w=\{p_j\}_{j\in\Xi_o^w}$ unde $\Xi_i^w=\{j\in\Xi_i \mid M_{ij}^w\neq\emptyset\}$

f_i^w este restricţia lui f_i la T^w, $i\in I_n$.

Fie y^w o strategie a jocului Γ^w. Definim jocul $\Gamma^d(y^w)$ prin:

$$\left(I_n';(W^d,\prec);\{W_k^d\};\{M_i^d\}_{i\in I_n};\mathcal{M}_i^d,\ i\in I_n;P_o^d;f_i^{y^w},\ i\in I_n\right)$$

unde:

$W^d=(W\setminus W^w)\cup\{w\}$. $T^d=(T\cap W^d)\cup\{w\}$, $Q^d=(Q\cap W^d)\setminus\{w\}$

$W_k^d=W_k\cap W^d$

$M_i^d=M_i\cap W^d$, $i\in I_n$, $\mathcal{M}_i^d=\{M_{ij}^d\}$, cu $M_{ij}^d=M_{ij}\cap W^d$

$P_o^d=\{p_j\}_{j\in\Xi_o^d}$ unde $\Xi_o^d=\{j\in\Xi_o \mid M_{oj}^d\neq\emptyset\}$

$$f_i^{d,y_w}(t)=\begin{cases} f_i(t), & \text{dacă } t\in T^d\setminus\{w\} \\ F_i^w(y^w), & \text{dacă } t=w. \end{cases}$$

(F_i^w fiind funcţia de utilitate a lui i în Γ^w)

<u>Definiţie</u> Spunem că jocul Γ este decompozabil în w dacă $M^w_{ij} \in \mathcal{M}_i$ oricare ar fi $j \in \Xi^w_i$, $i \in I_n$.

In acest caz, pentru fiecare strategie y^w a jocului Γ^w, se spune că Γ^w şi $\Gamma^d(y^w)$ realizează descompunerea lui Γ, în poziţia w, conformă cu strategia y^w.

Este evident că dacă jocul Γ este cu informaţie completă satisface banal condiţia decompozabilităţii în orice poziţie.

Fie Γ un joc decompozabil în w, y^w o strategie a lui Γ^w şi $\Gamma^d(y^w)$ definit ca mai înainte. Pentru fiecare strategie x_i, $i \in I_n$ a unui jucător, în jocul Γ, definim x^w_i, respectiv, x^d_i ca fiind restricţiile lui x_i la $\mathcal{M}^w_i$ şi $\mathcal{M}^d_i$. Evident, x^w_i şi x^d_i sînt strategii ale lui i în cele două jocuri care realizează descompunerea lui Γ. Spunem că x^w_i şi x^d_i realizează descompunerea strategiei x_i şi scriem: $x_i = (x^w_i, x^d_i)$. Se poate remarca că dacă x^w_i şi x^d_i sînt strategii ale lui i în jocurile Γ^w, respectiv, $\Gamma^d(y^w)$, atunci x_i definită prin:

$$x_i(M_{ij}) = \begin{cases} x^w_i(M_{ij}), \text{ dacă } j \in \Xi^w_i \\ x^d_i(M_{ij}), \text{ dacă } j \in \Xi^d_i \end{cases}$$

constituie o strategie a lui i în jocul Γ.

<u>Lema IV.1.1.</u> Pentru fiecare $x \in X$;

$$P_x(t) = \begin{cases} P_{x^d}(t) & , \text{ dacă } t \in T^d \\ P_{x^d}(w) . P_{x^w}(t) & , \text{ dacă } t \in T^w \end{cases}$$

Demonstraţie:

Fie $t \in T$. Există $\pi \in E$ şi $k \leq \nu$, astfel ca $\pi(k) = t$

Presupunem $t \in T^d$. Atunci pentru orice $m \leq k$, $\pi(m) \in W^d$

Din definiţia lui P_x, rezultă:

$$P_x(t)=P_x(\pi)=\prod_{m=1}^{k} P_x^m(\pi(m-1),\ \pi(m))$$

unde:

$$P_x^m(w,w')=\begin{cases} 1, \text{ dacă } w\in M_{ij}\in \mathcal{M}_i, i\in I_n \text{ şi } x_i(M_{ij})=f_{ij}^w(w') \\ 0, \text{ dacă } w\in M_{ij}\in \mathcal{M}_i, i\in I_n \text{ şi } x_i(M_{ij})\neq f_{ij}^w(w') \\ p_j(f_{oj}^w(w')), \text{ dacă } w\in M_{oj}\in \mathcal{M}_o \end{cases}$$

Or , este uşor de verificat că $P_x^m(\pi(m-1),\ \pi(m)) = P_{x^w}^m(\pi(m-1), \pi(m))$, $m \leqslant k$ şi astfel prima parte a lemei a fost demonstrată. Pentru cea de a doua parte, fie $t\in T^w$. Să admitem că $w\in W_r$, $r\leqslant \nu$. Atunci $\pi(r)=w$ şi deci:

$$P_x(t)=\prod_{m=1}^{r} P_x^m(\pi(m-1), \pi(m)).\prod_{m=r+1}^{k} P_x^m(\pi(m-1), \pi(m))$$

Or , în primul produs, $P_x^m(\pi(m-1), \pi(m))=P_{x^d}^m(\pi(m-1), \pi(m))$, iar pentru $m > r$, $P_x^m(\pi(m-1), \pi(m))=P_{x^w}^m(\pi(m-1), \pi(m))$. Ţinînd seama de faptul că w este în $\Gamma^d(y^x)$ identificat cu o partidă, se obţine egalitatea dorită.

<u>Lema IV.1.2.</u> Fie y^w strategie a jocului Γ^w şi y^d o strategie a jocului $\Gamma^d(y^w)$. Dacă $y=(y^w,y^d)$, atunci:

$$F_i(y) = F_i^{d,y^w}(y^d)$$

unde F_i^w, F_i^{d,y^w} denotă funcţiile de utilitate ale lui i în cele două componente ale descompunerii lui Γ .

Demonstraţie:

$$F_i(y)=\sum_{i\in T} P_y(t)f_i(t)=\sum_{i\in T^w} P_y(t)f_i(t)+\sum_{t\in T\setminus T^w} P_y(t)f_i(t)=$$

$$=P_{y^d}(w)\sum_{t\in T^w} P_{y^w}(t)f_i(t) + \sum_{t\in T\setminus T^w} P_{y^d}(t)f_i(t) =$$

$$=P_{y^d}(w)F_i^w(y^w) + \sum_{t\in T\setminus T^w} P_{y^d}(t)f_i(t) = \sum_{t\in T^d} P_{y^d}(t)f_i^{d,y^w}(t) =$$

$$=F_i^{d,y^w}(y^d).$$

Demonstraţia teoremei:

Vom raţiona prin inducţie relativ la $s = |Q|$.

Intrucît pentru $s=1$, teorema devine banală, să o presupunem adevărată pentru orice joc cu $|Q| \leqslant s$. Fie acum Γ astfel ca $|Q| = s+1$.

Fie $w \in Q$. $w \neq w^0$ Construim jocul Γ^w. Evident $|Q^w| \leqslant s$ şi deci Γ^w admite cel puţin un punct de echilibru. Fie x^w acesta.

Realizăm descompunerea lui Γ în w, conformă cu x^w. Deoarece $|Q^d| \leqslant s$, jocul $\Gamma^d(x^w)$ admite cel puţin un punct de echilibru, x^d.

Fie $x=(x^w,x^d) \in X$, $i \in I_n$ şi $y_i \in X_i$.

Descompunem strategia $(x^i;y_i) \in X$ în $(x^{wi};y_i^w)$ şi $(x^{di};y_i^d)$.

Tinînd seama de definiţia punctului de echilibru şi de lema 4.1.2., putem scrie, succesiv:

$$F_i(x) = F_i^{d,x^w}(x^d) \geqslant F_i^{d,x^w}(x^{di};y_i^d) = \sum_{t\in T\setminus T^w} P_{(x^{di};y_i^d)}(t)f_i^{d,x^w}(t) +$$

$$+ P_{(x^{di};y_i^d)}(w)\, f_i^{d,x^w}(w) = \sum_{t\in T\setminus T^w} P_{(x^{di};y_i^d)}(t)f_i(t) +$$

$$+ P_{(x^{di};y_i^d)}(w)F_i^w(x^w) \geqslant \sum_{t\in T\setminus T^w} P_{(x^{di};y_i^d)}(t)f_i^{d,(x^{wi};y_i^w)}(t) +$$

$$+ P_{(x^{di};y_i^d)}(w)F_i^w(x^{wi};y_i^w) = F_i^{d,(x^{wi};y_i^w)}(x^{di};y_i^d) = F_i(x^i;y_i).$$

§ 2. Jocuri în forma normală

2.1. Modelul

Definiție. Numim joc de n persoane, în forma normală, ansamblul:

$$\Gamma = \{X_i,\ F_i,\ i \in I_n\}$$

unde: $I_n = \{1,\dots,n\}$, X_i sînt mulțimi nevide și F_i funcții cu valori reale definite pe produsul cartezian, X, al mulțimilor X_i, $i \in I_n$.

Orice $i \in I_n$ se numește jucător, X_i se numește mulțimea strategiilor (pure) ale lui i, iar F_i se numește funcția de utilitate a jucătorului i .

Modelul jocului în forma normală este considerat cea mai adecvată definiție axiomatică a jocului pentru studiul necooperativ.

Intr-o viziune unitară a teoriei jocurilor, se poate considera forma normală a jocului ca model derivat din modelul fundamental-veritabila definiție axiomatică-jocul în forma extinsă. Acest lucru poate fi motivat de construcția făcută în secțiunea 1.2. a precedentului paragraf.

Formal, optimalitatea în teoria jocurilor necooperative este definită prin noțiunea de punct de echilibru. Definiția acestuia, dată în secțiunea 1.2., se integrează perfect în modelul jocului în forma normală.

Vom nota, în cele ce urmează, cu $\mathcal{E}(\Gamma)$ mulțimea punctelor de echilibru ale jocului, în forma normală Γ .

Propoziția IV.2.1. Dacă $h_i, i \in I_n$ sînt funcții crescătoare pe R și dacă $\Gamma = \{X_i, F_i,\ i \in I_n\}$, $\Gamma' = \{X_i, F_i',\ i \in I_n\}$ sînt două jocuri astfel încît $F_i' = h_i \circ F_i$, $i \in I_n$, atunci $\mathcal{E}(\Gamma) = \mathcal{E}(\Gamma')$.

Demonstrație:

Rezultă imediat din definiția punctului de echilibru.

2.2. Existența punctelor de echilibru

Vom nota cu X^i produsul cartezian al mulțimilor X_j, $j \in I_n$, $j \neq i$.

<u>Teorema IV.2.1</u>. Fie jocul $\Gamma = \{X_i, F_i, i \in I_n\}$ cu X_i nevidă, convexă și compactă în R^{m_i}, F_i continuă pe X și concavă pe X_i pentru fiecare $x^i \in X^i$ fixat, $i \in I_n$. Atunci Γ admite cel puțin un punct de echilibru.

Demonstrație:

Definim $F : X \times X \to R, F(x,y) = \sum_{i=1}^{n} F_i(y^i; x_i)$

a) $F(.,y)$ este concavă pe X pentru fiecare $y \in X$ fixat. Intr-adevăr, fie $x', x'' \in X$, $\lambda \in [0,1]$. Atunci:

$$F(\lambda x' + (1-\lambda)x'', y) = \sum_{i=1}^{n} F_i(y^i; \lambda x_i' + (1-\lambda)x_i'') \geq \lambda \sum_{i=1}^{n} F_i(y^i; x_i') +$$

$$+ (1-\lambda) \sum_{i=1}^{n} F_i(y^i; x_i'') = \lambda F(x', y) + (1-\lambda) F(x'', y)$$

b) există $\bar{x} \in X$ astfel încît $F(\bar{x}, \bar{x}) \geq F(x, \bar{x})$, pentru orice $x \in X$.

Prin absurd, pentru fiecare $x \in X$, există $y \in X$ astfel ca:

$$F(x,x) < F(y,x)$$

Punem pentru $y \in X$, $G(y) = \{x \in X \mid F(x,x) < F(y,x)\}$

Se verifică că $G(y)$ sînt deschise și $X = \bigcup_{y \in X} G(y)$.

Cum X este compactă, se poate extrage o acoperire finită.

Există deci $Z = \{y^1, \ldots, y^k\} \subset X$, astfel ca $X = \bigcup_{j=1}^{k} G(y^j)$.

Definim funcţiile continue pe X:

$$g_j(x)=\max.\{F(y^j,x)-F(x,x)\ ,\ 0\}\qquad j=1,\dots,k$$

şi aplicaţia $\varphi:[Z]\to[Z]$, $\varphi(x)=\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{\sum_{j=1}^{k}g_j(x)}\ \sum_{j=1}^{k}g_j(x)y^j$

Deoarece $g_j(x)\geqslant 0$ şi $\max_j g_j(x)>0$, pentru orice $x\in X$, φ este bine definită şi continuă.

Atunci conform teoremei de punct fix a lui Brouwer (propoziţia A.1.31.) există un punct fix al lui φ. Fie x^* acesta.

Deci:

$$x^*=\varphi(x^*)=\frac{1}{\sum_{j=1}^{k}g_j(x^*)}\ \sum_{j=1}^{k}g_j(x^*)\,y_j$$

Deoarece $\max.\ g_j(x^*)>0$, concavitatea lui F implică:

$$F(x^*,x^*)\geqslant\frac{1}{\sum_{j=1}^{k}g_j(x^*)}\ \sum_{j=1}^{k}g_j(x^*)F(y^j,x^*)>$$

$$>\frac{1}{\sum_{j=1}^{k}g_j(x^*)}\ \sum_{j=1}^{k}g_j(x^*)\,F(x^*,x^*)=F(x^*,x^*)$$

obţinînd astfel o inegalitate falsă, datorată ipotezei de absurd.

c) $\overline{x}$ este punct de echilibru

Fie $i\in I_n$ şi $x_i\in X_i$. Inlocuind în b) pe x cu $(\overline{x}^i;x_i)$ se obţine:

$$\sum_{j=1}^{n}F_j(\overline{x})\geqslant F_i(\overline{x}^i;\ x_i)+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}F_j(\overline{x})$$

şi deci,

$$F_i(\overline{x})\geqslant F_i(\overline{x}^i;x_i)$$

2.3. Rezolvarea jocurilor bimatriceale

Prin joc bimatriceal se înţelege un joc de două persoane, în forma normală, avînd mulţimea strategiilor finită.

Fie deci, $X_1 = \{1,\dots,m\}$, $X_2 = \{1,\dots,n\}$ şi să notăm

$$a_{ij} = F_1(i,j),\ b_{ij} = F_2(i,j);\ i \in X_1,\ j \in X_2$$

Atunci matricele $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$, $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$, pot servi pentru definirea tuturor elementelor constituente ale formei normale ale jocului. Adoptăm reprezentarea $\Gamma = (A,B)$ pentru forma normală a unui joc bimatriceal.

Fie S_1, S_2 mulţimile probabilităţilor pe X_1, respectiv, X_2, pe care le vom numi mulţimile strategiilor mixte ale celor doi jucători şi $S = \{ s = s_1 \otimes s_2 \mid s_i \in S_i,\ i=1,2 \}$. Vom scrie, pentru comoditatea notaţiei (s_1, s_2) în loc de $s_1 \otimes s_2$.

$$S_1 = \left\{ s_1 = (p_1,\dots,p_m) \mid p_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{m} p_i = 1 \right\}$$

$$S_2 = \left\{ s_2 = (q_1,\dots,q_n) \mid q_j \geq 0,\ \sum_{j=1}^{n} q_j = 1 \right\}$$

Funcţiile de utilitate medie ale celor doi jucători sînt $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 : S \longrightarrow R$;

$$\mathcal{F}_1(s) = \sum_{i,j=1}^{m,n} a_{ij} p_i q_j,\quad \mathcal{F}_2(s) = \sum_{i,j=1}^{m,n} b_{ij} p_i q_j \text{ , dacă } s = (s_1, s_2)$$

<u>Definiţie</u> Numim extensia aleatoare a jocului bimatriceal $\Gamma = (A,B)$ jocul, în forma normală $\tilde{\Gamma} = \{ S_1, S_2, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \}$

Punctele de echilibru ale lui $\tilde{\Gamma}$ vor fi numite puncte de echilibru aleatoare ale lui Γ . Prin rezolvarea jocului bimatriceal Γ vom înţelege determinarea mulţimii punctelor de echilibru ale extensiei sale aleatoare.

Teorema IV.2.2. Orice joc bimatriceal admite cel puţin un punct de echilibru aleator. (Extensia aleatoare a oricărui joc bimatriceal admite puncte de echilibru).

Această teoremă este o consecinţă imediată a teoremei 4.2.1.

Propoziţia IV.2.2. $\bar{s} = (\bar{s}_1, \bar{s}_2)$ este un punct de echilibru aleator al jocului bimatriceal $\Gamma = (A, B)$ dacă şi numai dacă:

(IV.2.1.) $\mathcal{F}_1(\bar{s}_1, \bar{s}_2) \geqslant \mathcal{F}_1(i, \bar{s}_2)$, pentru orice $i \in X_1$

(IV.2.2.) $\mathcal{F}_2(\bar{s}_1, \bar{s}_2) \geqslant \mathcal{F}_2(\bar{s}_1, j)$, pentru orice $j \in X_2$

Demonstraţie:

Observaţie: în acest enunţ, strategia pură $i \in X_1$ a primului jucător a fost identificată cu strategia mixtă $s_1 = (p_1, \ldots, p_m)$ cu $p_i = 1$, $p_j = 0$, $j \neq i$. O identificare analoagă se face şi între strategiile celui de al doilea jucător, justificînd astfel notaţiile folosite.

In acest caz, (IV.2.1.), (IV.2.2.) rezultă din definiţia punctului de echilibru.

Reciproc, să presupunem că (IV.2.1.) şi (IV.2.2.) sînt adevărate. Fie $s_1 = (p_1, \ldots, p_m)$ şi $s_2 = (q_1, \ldots, q_n)$ două strategii mixte arbitrare. Inmulţind (IV.2.1.) cu $p_i \geqslant 0$, pentru fiecare $i \in X_1$ şi sumînd se obţine:

$$\mathcal{F}_1(\bar{s}_1, \bar{s}_2) \geqslant \mathcal{F}_1(s_1, \bar{s}_2)$$

Printr-un procedeu asemănător, din (IV.2.2.) se obţine:

$$\mathcal{F}_2(\bar{s}_1, \bar{s}_2) \geqslant \mathcal{F}_2(\bar{s}_1, s_2)$$

s_1, s_2 fiind arbitrare, ultimile două inegalităţi probează că $\bar{s}$ este punct de echilibru.

Cu notaţiile : $A_{i.}$ = linia i a matricei A, $B_{.j}$ = coloana j a matricei B, (IV.2.1.) şi (IV.2.2.) se pot scrie:

(IV.2.1.)' $\quad \bar{s}_1 A \bar{s}_2^T \geq A_{i.} \bar{s}_2^T, \quad i=1,\dots,m$

(IV.2.2.)' $\quad \bar{s}_1 B \bar{s}_2^T \geq \bar{s}_1 B_{.j} \quad j=1,\dots,n$

<u>Definiţie</u> Perechea (x,y), $x \in R^m, y \in R^n$, $x \neq 0$, $y \neq 0$, se numeşte punct acceptabil al jocului bimatriceal Γ, dacă satisface sistemul:

(i) $B^T x \leq e$

(ii) $x \geq 0$

(iii) $Ay \leq e$

(iv) $y \geq 0$

(v) $y^T(B^T x - e) = 0$

(vi) $x^T(Ay - e) = 0$

<u>Teorema (IV.2.3.)</u> Fie jocul bimatriceal $\Gamma = (A,B)$, cu $A,B > 0$. Dacă $s=(s_1,s_2)$ este un punct de echilibru aleator atunci (x,y) este punct acceptabil, unde $x = \frac{1}{s_1 B s_2^T} s_1^T$, $y = \frac{1}{s_1 A s_2^T} s_2^T$

Reciproc, dacă (x,y) este un punct acceptabil, atunci (s_1,s_2) cu $s_1 = \frac{1}{e^T x} x^T$, $s_2 = \frac{1}{e^T y} y^T$, constituie un punct de echilibru aleator al lui Γ.

Demonstraţie:

Fie $(s_1,s_2) \in \mathcal{E}(\tilde{\Gamma})$. Deoarece $A,B > 0$, rezultă $s_1 A s_2^T > 0$, $s_1 B s_2^T > 0$.

Atunci x,y definiţi mai sus satisfac (ii) şi (iv).

Impărţind inegalităţile (IV.2.1.)', (IV.2.2.)' cu $s_1 A s_2^T$, respectiv, $s_1 B s_2^T$, se obţine:

$A_{i.} y \leq 1$, $i=1,2,\dots,m$

$$x^T B_{.j} \leq 1,\ j=1,2,\dots,n$$

verificîndu-se, în acest fel, (i) şi (iii). Un calcul simplu arată că (v) şi (vi) sînt de asemenea verificate.

Reciproc, fie (x,y) punct acceptabil şi (s_1,s_2) definiţi ca în enunţul teoremei. Se observă că s_1,s_2 sînt strategii mixte ale celor doi jucători. (iv) şi (vi) implică:

$$s_1 A s_2^T = \frac{x^T A y}{e^T x . e^T y} = \frac{e^T x}{e^T x . e^T y} = \frac{1}{e^T y} \tag{IV.2.3.}$$

$$s_1 B s_2^T = \frac{x^T B y}{e^T x . e^T y} = \frac{e^T y}{e^T x . e^T y} = \frac{1}{e^T x} \tag{IV.2.4.}$$

Dar, conform (ii), $A_{i.} y \leqslant 1, i=1,\dots,m$ şi deci

$$A_{i.}\ s_2^T \leqslant \frac{1}{e^T y} \quad , i=1,\dots,m$$

Analog, (i) implică: $s_1 B_{.j} \leqslant \frac{1}{e^T x}$

Atunci, din (IV.2.3.) şi (IV.2.4.) se obţin (IV.2.1.)', (IV.2.2.)' deci (s_1,s_2) este punct de echilibru.

Fie, acum:

$$\mathcal{U} = \{ (x,u), x\in R^m, u\in R^n \mid B^T x + u = e, x \geqslant 0, u \geqslant 0 \}$$

$$\mathcal{V} = \{ (y,v), y\in R^n, v\in R^m \mid Ay + v = e, y \geqslant 0, v \geqslant 0. \}$$

<u>Lema IV.2.1</u>. (x,y), $x\neq 0$, $y\neq 0$, este punct acceptabil al jocului Γ dacă şi numai dacă există u şi v astfel încît $(x,u)\in\mathcal{U}$, $(y,v)\in\mathcal{V}$ şi:

$$v^T x = 0\ ,\ u^T y = 0. \tag{IV.2.5.}$$

<u>Lema IV.2.2</u>. Fie $(x,u)\in\mathcal{U}$, $(y,v)\in\mathcal{V}$ verificînd (IV.2.5.). Atunci $x=0$ dacă şi numai dacă $y=0$.

Se poate observa că dacă $A,B > 0$, $\mathcal{U}$ şi $\mathcal{V}$ sînt poliedre convexe nevide. Admit deci, fiecare, un număr finit de puncte extreme.

In acest caz, fie $\mathcal{X} = \{x \mid x\neq 0$, există u astfel ca $(x,u) \in \text{ext.}\,\mathcal{U}\}$, mulţime finită.

Pentru fiecare $x\in\mathcal{X}$ să notăm cu $E(x)$ mulţimea finită:

$E(x) = \{y \mid$ există v astfel ca $(y,v)\in \text{ext.}\,\mathcal{V}$ şi $v^Tx + u^Ty = 0\}$

Pentru fiecare submulţime $\mathcal{X}'\subseteq\mathcal{X}$, punem $E(\mathcal{X}') = \bigcap_{x\in\mathcal{X}'} E(x)$.

Notînd cu $\mathcal{A}$ mulţimea punctelor acceptabile ale lui Γ avem:

<u>Teorema IV.2.4</u>. Dacă $A > 0$, $B > 0$, $\mathcal{A}=\bigcup_{\mathcal{X}'\subseteq\mathcal{X}}\left([\mathcal{X}']\times[E(\mathcal{X}')]\right)$

Demonstraţie:

Să presupunem că $\mathcal{X}' = \{x^1,\dots,x^s\}\subseteq\mathcal{X}$. Există deci, $u^1,\dots,u^s$ astfel ca $(x^k,u^k)\in\mathcal{U}$, $k=1,\dots,s$.

Fie $x\in[\mathcal{X}']$. Există, $\lambda_k \geqslant 0$, $k=1,\dots,s$, $\sum_{k=1}^{s}\lambda_k=1$, $x = \sum_{k=1}^{s}\lambda_k x^k$,

Definind, $u = \sum_{k=1}^{s}\lambda_k u^k$, rezultă $(x,u)\in\mathcal{U}$

Să admitem că $E(\mathcal{X}')=\{y^1,\dots,y^t\}$. Există deci, $v^1,\dots,v^t$, astfel ca $(y^h,v^h)\in\mathcal{V}$, $h=1,\dots,t$ şi $(v^h)^Tx^k + (u^k)^Ty^h = 0, k=1,\dots,s$ $h=1,\dots,t$.

Dacă $y\in[E(\mathcal{X}')]$ există $\mu_h \geqslant 0, h=1,\dots,t$, $\sum_{h=1}^{t}\mu_h$ $y= \sum_{h=1}^{t}\mu_h y^h$.

Definind $v= \sum_{h=1}^{t}\mu_h v^h$, rezultă $(y,v)\in\mathcal{V}$

In plus, se verifică imediat că $v^T x + u^T y = 0$. Deoarece $x\neq 0, y\neq 0$, concludem datorită lemei IV.2.1. că $(x,y)\in \mathcal{A}$

Reciproc, fie $(\bar{x},\bar{y})\in \mathcal{A}$. Conform lemei IV.2.1., există $\bar{u}$ şi $\bar{v}$ astfel ca $(\bar{x},\bar{u})\in \mathcal{U}$, $(\bar{y},\bar{v})\in \mathcal{V}$ şi $\bar{v}^T\bar{x} + \bar{u}^T\bar{y} = 0$

Atunci $(\bar{x},\bar{u})$ este soluţie optimă a problemei de programare liniară:

$$\min_{(x,u)\in \mathcal{U}} (\bar{v}^T x + u^T \bar{y})$$

Deoarece, $\mathcal{U}$ este poliedru convex, problema admite un număr finit de soluţii optime de bază şi orice soluţie optimă este o combinaţie liniară convexă a acestora.

Fie deci $(x^1,u^1),\ldots,(x^s,u^s)$ soluţiile optime de bază ale problemei. Evident $x^k\neq 0, k=1,\ldots,s$. Atunci $\mathcal{X}' = \{x^1,\ldots,x^s\}\subseteq \mathcal{X}$ şi $\bar{x}\in [\mathcal{X}']$

Deoarece valoarea optimului problemei este 0, rezultă că $\bar{v}^T x^k + (u^k)^T\bar{y} = 0$, $k=1,\ldots,s$ şi deci, $(\bar{y},\bar{v})$ este soluţie optimă a problemei de programare liniară:

$$\min_{(y,v)\in \mathcal{V}} \sum_{k=1}^{s} (v^T x^k + (u^k)^T y)$$

Şi în acest caz, putem afirma că numărul soluţiilor optime de bază este finit şi că $(\bar{y},\bar{v})$ este o combinaţie liniară convexă a acestora. Fie (y^h,v^h), $h=1,\ldots,t$ toate soluţiile optime de bază ale problemei. $\bar{y}\in [y^1,\ldots,y^t]$.

Să remarcăm că fiecare (y^h,v^h) are proprietatea:
$(y^h,v^h)\in \mathcal{V}$ şi $(v^h)^T x^k + (u^k)^T y^h = 0$, $k=1,\ldots,s$. Concludem că $\{y^1,\ldots,y^t\} = E(\mathcal{X}')$ şi deci:

$$(\bar{x},\bar{y})\in [\mathcal{X}']\times[E(\mathcal{X}')]$$

Această teoremă, împreună cu concluziile teoremei 4.2.3. permit elaborarea unei metode eficiente pentru determinarea mulţimii punctelor de echilibru ale unui joc bimatriceal.

a) Dacă A,B $>$ 0, se trece la b). Altfel, dacă de exemplu există $a_{ij} < 0$, se alege $a \in R$ şi se scrie $A' = (a'_{ij})$ cu $a'_{ij} = a_{ij} + a > 0$. Cu A=A' se trece la b) (Propoziţia IV.2.1. asigură că o astfel de transformare nu afectează mulţimea punctelor de echilibru ale jocului).

b) Se determină mulţimile finite ext. $\mathcal{U}$, ext $\mathcal{V}$. Se reţine $\mathcal{X} = \{x \mid \text{există } u,(x,u) \in \text{ext.}\mathcal{U} \quad x \neq o\}$.

c) Se determină, pentru fiecare $x \in \mathcal{X}$, mulţimea finită E(x).

Pentru fiecare $\mathcal{X}' \subseteq \mathcal{X}$, se determină $E(\mathcal{X}')$.

d) Se determină $\mathcal{A}$ conform teoremei IV.2.4.

e) Prin transformarea liniară din teorema 4.2.3. se determină $\mathcal{E}(\Gamma)$.

<u>Corolar</u> $\mathcal{E}(\Gamma)$ este o reuniunea finită de poliedre convexe.

2.4. Jocuri de două persoane, cu sumă nulă. Rezolvarea jocurilor matriceale

Un joc de două persoane se spune că este cu sumă nulă dacă $F_1 + F_2 = 0$.

Notăm $F = F_1$, funcţia de utilitate a primului jucător.

Forma normală a unui joc de două persoane, cu sumă nulă este definită de tripletul $\Gamma = \{X_1, X_2, F\}$

Presupunem, în cele ce urmează, că operatorii max şi min sînt bine definiţi.

<u>Definiţie</u> $\bar{x}_1 \in X_1$ se numeşte strategie max min a primului jucător dacă $\min\limits_{x_2 \in X_2} F(\bar{x}_1, x_2) = \max\limits_{x_1 \in X_1} \min\limits_{x_2 \in X_2} F(x_1, x_2)$. Analog, $\bar{x}_2 \in X_2$ se numeşte strategie maxmin a celui de al doilea jucător dacă:

$$\max_{x_1 \in X_1} F(x_1, x_2) = \min_{x_2 \in X_2} \max_{x_1 \in X_1} F(x_1, x_2)$$

$$v_1 = \max_{x_1 \in X_1} \min_{x_2 \in X_2} F(x_1,x_2) \text{ şi } v_2 = \min_{x_2 \in X_2} \max_{x_1 \in X_1} F(x_1,x_2)$$

se numesc valorile maxmin ale celor doi jucători (sau valoarea maxmin, respectiv, minmax, a jocului).

<u>Propoziţia IV.2.3</u>. $v_1 \leq v_2$

Dacă $v_1 = v_2$, valoarea comună o vom nota cu v şi va fi numită valoarea jocului.

<u>Teorema IV.2.5</u>. $v_1 = v_2$ dacă şi numai dacă $\mathcal{E}(\Gamma) \neq \emptyset$. In acest caz, dacă $(x_1,x_2) \in \mathcal{E}(\Gamma)$, $F(x_1,x_2) = v$.

Demonstraţie:

Fie $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ strategii maxmin ale celor doi jucători.

Deoarece $v_1 = v_2 = v$, se poate scrie:

$$\max_{x_1 \in X_1} F(x_1,\bar{x}_2) = v_2 = v = v_1 = \min_{x_2 \in X_2} F(\bar{x}_1,x_2)$$

Atunci, pentru două strategii arbitrare x_1, x_2,

(IV.2.6.) $$F(x_1,\bar{x}_2) \leq v \leq F(\bar{x}_1,x_2)$$

Luînd $x_1 = \bar{x}_1$, $x_2 = \bar{x}_2$, rezultă şi $F(\bar{x}_1,\bar{x}_2) = v$

Atunci, (IV.2.6.) arată că $(\bar{x}_1,\bar{x}_2) \in \mathcal{E}(\Gamma)$

Reciproc, fie $(\bar{x}_1,\bar{x}_2) \in \mathcal{E}(\Gamma)$. Punînd $v = F(\bar{x}_1,\bar{x}_2)$,

$F(x_1,\bar{x}_2) \leq v \leq F(\bar{x}_1,x_2)$, pentru orice $x_1 \in X_1 x_2 \in X_2$

Atunci, $\max_{x_1 \in X_1} F(x_1,\bar{x}_2) \leq v \leq \min_{x_2 \in X_2} F(\bar{x}_1,x_2)$

şi cu atît mai mult,

$$v_2 \leq v \leq v_1$$

De aici şi din propoziţia IV.2.3. rezultă $v_1 = v_2$.

<u>Propoziţia IV.2.4.</u> Dacă pentru jocul de două persoane, cu sumă nulă Γ , $\mathcal{E}(\Gamma) \neq \emptyset$ atunci:

1^o. orice punct de echilibru este format din strategii maxmin ale celor doi jucători şi reciproc, orice pereche de strategii maxmin formează un punct de echilibru.

2^o. oricare ar fi $(x_1,x_2) \in \mathcal{E}(\Gamma)$, $F(x_1,x_2) = v$

3^o. $\mathcal{E}(\Gamma)$ are proprietatea de interşanjabilitate, adică $(\bar{x}_1,\bar{x}_2)$, $(\bar{y}_1,\bar{y}_2) \in \mathcal{E}(\Gamma)$ implică $(\bar{x}_1,\bar{y}_2),(\bar{y}_1,\bar{x}_2) \in \mathcal{E}(\Gamma)$

Demonstraţie:

Primele două proprietăţi fiind o consecinţă directă a teoremei precedente, să demonstrăm 3^o.

Deoarece $(\bar{x}_1,\bar{x}_2) \in \mathcal{E}(\Gamma)$ rezultă:

(IV.2.7.) $\qquad F(x_1,\bar{x}_2) \leq F(\bar{x}_1,\bar{x}_2)$, pentru orice $x_1 \in X_1$

şi, în particular,

(IV.2.8.) $\qquad F(\bar{y}_1,\bar{x}_2) \leq v$

Deoarece $(\bar{y}_1,\bar{y}_2)$ este punct de echilibru:

(IV.2.9.) $\qquad F(\bar{y}_1,\bar{y}_2) \leq F(\bar{y}_1,x_2)$, pentru orice $x_2 \in X_2$

în particular,

(IV.2.10.) $\qquad v = F(\bar{y}^1,\bar{y}^2) \leq F(\bar{y}_1,\bar{x}_2)$

(IV.2.8.) şi (IV.2.10.) arată că $F(\bar{y}_1,\bar{x}_2) = v$ şi atunci (IV.2.7.), (IV.2.9.) probează că $(\bar{y}_1,\bar{x}_2) \in \mathcal{E}(\Gamma)$

Aceste proprietăţi remarcabile ale mulţimii punctelor de echilibru ale unui joc de două persoane, cu sumă nulă, îndreptăţesc denumirea de "soluţie" acordată în acest caz lui $\mathcal{E}(\Gamma)$.

<u>Definiţie</u> $x_1 \in X_1$ se numeşte strategie optimă a primului jucător dacă există $x_2 \in X_2$ astfel încît $(x_1,x_2) \in$ ext. (Γ). $x_2 \in X_2$ se numeşte strategie optimă a celui de al doilea jucător, dacă există $x_1 \in X_1$ astfel încît $(x_1,x_2) \in \mathcal{E}(\Gamma)$.

Notăm cu $\mathcal{O}_1(\Gamma)$, respectiv $\mathcal{O}_2(\Gamma)$ mulţimile strategiilor optime ale celor doi jucători.

<u>Propoziţia IV.2.5.</u> $\mathcal{E}(\Gamma) = \mathcal{O}_1(\Gamma) \times \mathcal{O}_2(\Gamma)$ şi dacă $\mathcal{E}(\Gamma) \neq \emptyset$, mulţimile strategiilor optime coincid cu mulţimile strategiilor maxmin.

Numim joc matriceal, un joc de două persoane, cu sumă nulă finit. Cu alte cuvinte, un joc matriceal este un joc bimatriceal pentru care $B = -A$.

Utilizăm reprezentarea $\Gamma = (A)$ pentru forma normală a unui joc matriceal.

Fie $\tilde{\Gamma} = (S_1, S_2, \mathcal{F})$ extensia aleatoare a jocului matriceal $\Gamma = (A)$, $\mathcal{F}(s_1,s_2) = \mathcal{F}_1(s_1,s_2) = s_1 A s_2^T$

Conform teoremei IV.2.2. extensia aleatoare a oricărui joc matriceal admite puncte de echilibru. Păstrăm notaţia v pentru valoarea jocului de două persoane cu sumă nulă $\tilde{\Gamma}$ (o vom numi, de asemeni, valoarea lui Γ).

<u>Propoziţia IV.2.6.</u> $(s_1,s_2) \in \mathcal{E}(\tilde{\Gamma})$ dacă şi numai dacă:

$$\mathcal{F}(i,s_2) \leq \mathcal{F}(s_1,s_2) \leq \mathcal{F}(s_1,j)\ ,\ i \in X_1,\ j \in X_2$$

sau, echivalent,

$$A_{i.}\, s_2^T \leq v \leq s_1 A_{.j},\ i=1,\ldots,m,\quad j=1,\ldots,n$$

v fiind valoarea jocului.

Demonstraţie:

Este o consecinţă a propoziţiei IV.2.2. şi a teoremei (IV.2.5.

Fie cuplul dual de probleme de programare liniară:

$$(LC_1) \qquad \min_{x \in \mathcal{X}} e^T x, \qquad \mathcal{X} = \{ x \in R^m \mid x \geq 0,\ A^T x \geq e \}$$

$$(LC_2) \qquad \max_{y \in \mathcal{Y}} e^T y \qquad \mathcal{Y} = \{ y \in R^n \mid y \geq 0,\ Ay \leq e \}$$

<u>Teorema IV.2.6.</u> Presupunem $A > 0$. Dacă $\bar{x}, \bar{y}$ sînt soluţii optime ale celor două probleme (LC_1), (LC_2) atunci $(s_1,s_1) \in \mathcal{E}(\tilde{\Gamma})$

şi v este valoarea jocului, unde $s_1 = v\bar{x}^T$, $s_2 = v\bar{y}^T$, $v = \frac{1}{e^T\bar{x}} = \frac{1}{e^T\bar{y}}$.

Reciproc, dacă $(s_1,s_2) \in \mathcal{E}(\tilde{\Gamma})$ şi v este valoarea jocului, atunci $\bar{x} = \frac{1}{v} s_1^T$ şi $\bar{y} = \frac{1}{v} s_2^T$ sînt soluţii optime ale problemelor (LC_1),(LC_2)

Demonstraţie:

Deoarece $A > 0$, $\mathcal{Y}$ este un poliedru convex nevid $(0 \in \mathcal{Y})$.

Atunci teorema fundamentală a dualităţii afirmă că cele două probleme au optim finit şi că valorile optimelor coincid.

Mai mult se poate arăta că mulţimile soluţiilor optime sînt mărginite.

Fie $\bar{x}$, $\bar{y}$ soluţii optime ale celor două probleme şi $u = e^T\bar{x} = e^T\bar{y}$. $u > 0$ (deoarece $0 \notin \mathcal{X}$). Atunci cu s_1, s_2 definiţi în teoremă, avem:

$s_1 A \geqslant ve$, $As_2^T \geqslant ve$, sau, scris pe componente:

$A_{i.}\ s_2^T \leqslant v \leqslant s_1 A_{.j}$, $i=1,\dots,m$, $j=1,\dots,n$

şi deci, conform precedentei propoziţii $(s_1,s_2) \in \mathcal{E}(\tilde{\Gamma})$

Reciproc, fie $(s_1,s_2) \in \mathcal{E}(\tilde{\Gamma})$. Din propoziţia IV.2.6., rezultă că $\bar{x} = \frac{1}{v} s_1^T$ şi $\bar{y} = \frac{1}{v} s_2^T$ sînt soluţii posibile ale problemelor (LC_1) şi (LC_2). Observînd că $e^T\bar{x} = e^T\bar{y}$ $(=1/v)$, rezultă că cele două soluţii sînt optime.

Concluziile acestei teoreme, justifică următorul algoritm pentru determinarea soluţiei unui joc matriceal:

a) Dacă $A > 0$, se trece la b). Altfel, se alege $a \in R$, astfel ca $A' = (a'_{ij}) > 0$, unde $a'_{ij} = a_{ij} + a$. Cu $A=A'$ se trece la b).

b) Se scriu problemele (LC_1) şi (LC_2). Se determină mulţimile soluţiilor optime (se găsesc, cu algoritmii simplex, toate soluţiile optime de bază).

c) Transformarea liniară din teorema IV.2.6. permite obţinerea lui $\mathcal{O}_1(\tilde{\Gamma})$ şi $\mathcal{O}_2(\tilde{\Gamma})$ deci a lui $\mathcal{E}(\tilde{\Gamma})$.

§ 3. Jocuri stochastice (finite)

3.1. Definiţia jocului stochastic

Definiţie Numim structură de joc stochastic, ansamblul:

$$\vec{\Gamma} = \{T;\ I_n;\ I';\ X_i^k,\ i \in I_n,\ k \in I;\ u_i^k, i \in I_n,\ k \in I;\ \pi^0;\ \pi(x),\ x \in X\}$$

unde: $T = \{1,2,\ldots,\}$ se numeşte mulţimea etapelor jocului

$I_n = \{1,2,\ldots,n\}$ se numeşte mulţimea jucătorilor

$I' = \{0,1,2,\ldots,N\}$, se numeşte mulţimea stărilor (starea o poartă numele de "stare de oprire", $I = \{1,2,\ldots,N\}$ se numeşte mulţimea stărilor "transiente").

X_i^k este o mulţime nevidă - mulţimea strategiilor (pure) ale jucătorului i în starea k, pentru fiecare $i \in I_n$ şi $k \in I$,

$$X^k = \prod_{i \in I_n} X_i^k,\quad X_i = \prod_{k \in I} X_i^k,\quad X = \prod_{k \in I} X^k \quad (\text{sau } X = \prod_{i \in I_n} X_i)$$

$u_i^k : X^k \longrightarrow R$ se numeşte funcţia de utilitate parţială a lui i în starea k, $i \in I_n$, $k \in I$,

$\pi^0 = (\pi_k)_{k \in I}$, $\pi_k \geqslant 0$, $\sum_{k \in I} \pi_k = 1$, se numeşte repartiţia iniţială a stărilor,

pentru fiecare $x \in X$, $\pi(x)$ este o matrice stochastică;

$\pi(x) = (\pi_{k\ell})_{k,\ell \in I}$, numită matricea probabilităţilor de trecere, asociată lui x, cu proprietăţile:

$$\pi_{k\ell}(x) = \pi_{k\ell}(x^k), \qquad \pi_{0\ell}(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } \ell \neq 0 \\ 1, & \text{dacă } \ell = 0 \end{cases}$$

In cazul particular, cînd π^0 este o repartiţie degenerată de tipul $\pi_k=1$, $k \in I$, $\pi_\ell = 0$, $\ell \neq k$, scriem $\vec{\Gamma}^k$ în loc de $\vec{\Gamma}$ şi spunem că jocul stochastic are starea iniţială k.

Fie acum, $\Delta = \bigcup_{k \in I} (k, X^k)$ şi $\Delta^t = \underbrace{\Delta \times \Delta \times \cdots \times \Delta}_{t \text{ ori}}$

<u>Definiţie</u> O strategie globală a jucătorului i în jocul stochastic, cu structura $\vec{\Gamma}$ este o aplicaţie $\delta_i = (\delta_i^t)_{t \in T}$, unde:

$$\delta_i^1 : I \to \bigcup_{k \in I} X_i^k, \text{ astfel încît } \delta_i^1(k) \in X_i^k, k \in I$$

$$\delta_i^t : \Delta^{t-1} x I \to \bigcup_{k \in I} X_i^k \text{ astfel încît } \delta_i^t(d^{t-1}, k) \in X_i^k,$$

dacă $d^{t-1} \in \Delta^{t-1}$, $k \in I$, $t \geq 2$.

Notînd cu $\mathcal{D}_i$ mulţimea strategiilor globale ale lui i, un element $\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_n) \in \mathcal{D} = \prod_{i \in I_n} \mathcal{D}_i$, se numeşte strategie globală a jocului.

<u>Definiţie</u>. O strategie globală δ_i se numeşte markoviană, dacă pentru orice $t \in T$, $k \in I$, d^{t-1}, $d^{t-1} \in \Delta^{t-1}$, rezultă

$$\delta_i^t(d^{t-1}, k) = \delta_i^t(d^{t-1}, k) = \delta_i^t(k)$$

<u>Definiţie</u>. O strategie markoviană δ_i se numeşte staţionară, dacă, pentru orice $t, \tau \in T$, $k \in I$, rezultă $\delta_i^t(k) = \delta_i^\tau(k) = \delta_i(k)$

<u>Observaţie</u>: O strategie staţionară δ_i se identifică cu un element $x_i \in X_i$ ($x_i^k = \delta_i(k)$, $k \in I$).

Pentru fiecare $\delta \in \mathcal{D}$, vom defini un cîmp de probabilitate $\{\Omega, \mathcal{K}, P_\delta\}$ şi un proces stochastic $\{\xi_\delta^t\}_{t \in T}$, astfel:

$$\Omega = \{\omega = (\omega_t)_{t \in T} \mid \omega_t \in I, t \in T \text{ şi } \omega_t = 0 \text{ implică } \omega_\tau = 0, \tau \geq t\}$$

$\mathcal{K}$ = corpul borelian generat de clasa mulţimilor cilindrice;

$$C_{k_1,\dots,k_t} = \{\omega\in\Omega \mid \omega_\tau = k_\tau,\ \tau\le t\}$$

P_δ se definește pe mulțimile cilindrice prin:

$$P(C_{k_1,\dots,k_t}) = \pi_{k_1}\pi_{k_1k_2}(\delta^1(k_1))\dots\pi_{k_{t-1}k_t}(\delta^{t-1}(k_1,\dots,k_{t-1})),$$

unde am folosit notațiile:

$$\delta^\tau(k_1,\dots,k_\tau) = \delta^\tau(k_1,\ \delta^1(k_1),k_2,\ \delta^2(k_2),\dots,k_\tau\ ),\quad \tau\le t$$

și

$$\xi_\delta^t(\omega) = \omega_t,\ \omega\in\Omega$$

Propoziția IV.3.1. Dacă δ este o strategie markoviană, atunci $\{\xi_\delta^t\}$ este un lanț Markov.

Demonstrație:

Fie $t_1 < t_2 \dots < t_r$ din T și $k_{t_1},\dots,k_{t_r}\in I'$

$$P_\delta(\xi_\delta^{t_r} = k_{t_r} \mid \xi_\delta^{t_j} = k_{t_j},\ j=1,\dots,r) = \frac{P_\delta(\xi_\delta^{t_j} = k_{t_j},\ j=1,\dots,r)}{P_\delta(\xi_\delta^{t_j} = k_{t_j},\ j=1,\dots,r-1)} =$$

$$= \frac{\displaystyle\sum_{\substack{k_{\tau_1}\in I\\ 1\le\tau_1<t_1}}\cdots\cdots\sum_{\substack{k_{\tau_r}\in I\\ t_{r-1}\le\tau_r<t_r}} P_\delta(C_{k_1,\dots,k_r})}{\displaystyle\sum_{\substack{k_{\tau_1}\in I\\ 1\le\tau_1<t_1}}\cdots\cdots\sum_{\substack{k_{\tau_{r-1}}\in I\\ t_{r-2}\le\tau_{r-1}<t_{r-1}}} P_\delta(C_{k_1,\dots,k_{r-1}})} =$$

$$= \sum_{\substack{k_{\tau_r}\in I\\ t_{r-1}\le\tau_r<t_r}} \pi_{k_{t_{r-1}}\,k_{t_{r-1}+1}}(\delta^{t_{r-1}}(k_1,\dots,k_{t_{r-1}}))\dots\dots$$

$$\pi_{k_{t_{r-1}}\,k_{t_r}}(\delta^{t_r-1}(k_1,\dots,k_{t_r-1})) =$$

$$\frac{\sum\limits_{\substack{k_{\tau_1} \in I \\ 1 \le \tau_1 < t_{r-1}}} \cdot \sum\limits_{\substack{k_{\tau_2} \in I \\ t_{r-1} < \tau_2 < t_r}} P_\delta (C_{k_1, \dots, k_{t_r}})}{\sum\limits_{\substack{k_{\tau_1} \in I \\ 1 \le \tau_1 < t_{r-1}}} P_\delta (C_{k_1} \dots k_{t_{r-1}})} =$$

$$= P_\delta (\xi_\delta^{t_r} = k_{t_r} \mid \xi_\delta^{t_{r-1}} = k_{t_{r-1}})$$

Propoziţia IV.3.2. Dacă δ este strategie staţionară, atunci $\{ \xi_\delta^t \}$ este un lanţ Markov omogen (cu probabilităţi de trecere staţionare).

Jocul stochastic, cu structura Γ (pentru care vom folosi aceeaşi notaţie), este un proces secvenţial de decizie în care sînt antrenaţi cei n jucători. La momentul iniţial starea jocului fiind determinată de repartiţia π^0, dacă la un moment t, procesul este în starea k, atunci alegerea strategiei x^k determină utilităţile parţiale $u_i^k(x^k)$ ale jucătorilor şi, cu probabilitatea $\pi_{k\ell}(x^k)$, noua stare ℓ pentru etapa t+1. Dacă noua stare este o atunci procesul se încheie.

Problema fundamentală a teoriei jocurilor stochastice este definirea şi determinarea comportamentului optim global al fiecărui jucător, relativ la o măsură a utilităţii acestuia pentru întregul proces.

Comportamentul global al unui jucător este definit în prezentul context prin noţiunea de strategie globală, măsura utilităţii acestui comportament este dată printr-o funcţie a cîştigului mediu global obţinută prin compunerea utilităţilor parţiale rezultate în toate etapele procesului.

Modul de compunere, în rezultanta globală, a acestor utilităţi, poate lua mai multe forme, cu semnificaţii sociale diferite şi, din punct de vedere matematic, diferenţiază clase distincte de jocuri stochastice.

In cele ce urmează, vom lua în discuţie, pentru exemplificare , o singură clasă de jocuri stochastice denumită după modalitatea de definire a cîştigului global, <u>clasa jocurilor stochastice cu utilităţi actualizate</u>. In acest caz funcţia de cîştig mediu global a jucătorului $i \in I_n$ este $F_i : \mathcal{D} \longrightarrow R$, dată de:

(IV.3.1.) $$F_i(\delta) = M_\delta \left(\sum_{t \in T} \alpha^{t-1} u_i(\delta^t) \right)$$

unde M_δ este operatorul "valoare medie în raport cu probabilitatea P_δ" ,$u_i^k(\delta^t)$ este notaţia prescurtată pentru $u_k^i(x^k)$ dacă $x^k = \delta^t(d^{t-1},k)$ cînd d^{t-1} este determinat, iar $\alpha \in (0,1)$ este o constantă numită "factor de actualizare".

<u>Observaţie</u>: In formalizarea prezentă, γ_δ^t reprezintă starea jocului la momentul t, dacă se utilizează strategia δ .

Mai explicit, se poate scrie:

(IV.3.2.) $$F_i(\delta) = \sum_{t \in T} \alpha^{t-1} \sum_{\substack{k_\tau \in I \\ 1 \leq \tau \leq t}} P_\delta(\gamma_\delta^\tau = k ,$$

$$\tau = 1,\dots,t)\ u_i^{k_t}(\delta^t(k_1,\dots,k_t))$$

<u>Propoziţia IV.3.3</u>. Dacă u_i^k, $k \in I$ sînt funcţii mărginite, atunci F_i este mărginită.

Demonstraţie:

$$\text{Punînd: } a = \sup_{\substack{x^k \in X^k \\ k \in I}} |u_i^k(x^k)|$$

rezultă:

$$F_i(\delta) \leqslant a \sum_{t \in T} \alpha^{t-1} = \frac{a}{1-\alpha}$$

Vom nota cu F_i^k funcţia de cîştig mediu global a jucătorului în jocul stochastic Γ^k.

3.2. Jocul stochastic - tip particular al modelului jocului în forma extinsă.

Se poate remarca că definiţia jocului stochastic poate fi redusă la cea a unui joc în forma extinsă, de n persoane, cu generator, dacă ţinem seama de următoarele observaţii şi identificări: (în ipoteza; X_i^k sînt cel mult numărabile, $i \in I_n$, $k \in I$):

$$M_i = \bigcup_{r=0}^{\infty} W_{r(n+1)+i},\ i=0,1\ldots,n\ ,\ \text{mulţimi numărabile}$$

Fie $M_o = \{ w^j \mid j \in \Xi_o \}$, $\Xi_o = \{1,2,\ldots, \}$. Atunci:

$M_{oj} = \{w^j\}$, $j \in \Xi_o$. $I_{oj} = I_o = \{0,1,\ldots,N\}$, pentru orice $j \in \Xi_o$,

$f_{oj}^{w^j} = f_o^{w^j}$, $j \in \Xi_o$. Pentru $w^j \in M_o$, notăm $w^j_{(k)} = (f_o^{w^j})^{-1}(k)$

Atunci: $\rho(w^j_{(o)}) = \emptyset$, pentru orice $j \in \Xi_o$.

Dacă $i \in I_n$, $\mathcal{M}_i = \{M_{ij}(k)\}_{j \in \Xi_o, k \in I}$, unde:

$$M_{ij}(k) = \{ w \ \ (\rho^{-1})^{i-1}(w) = w^j_{(k)} \}$$

Notînd cu $I_{ij}(k)$ mulţimea alternativelor lui i pentru mulţimea informaţională $M_{ij}(k)$, atunci $I_{ij}(k) = X_i^k$, pentru $j \in \Xi_o$. Notăm cu f_i^{wk} bijecţia care aplică $\rho(w)$ pe $I_{ij}(k)$, $w \in M_{ij}(k)$.

Pentru identificarea lui $P_o = \{p_j\}$ $j \in \Xi_o$, remarcăm că $p_o = \pi^o$.

Dacă $w^j \in W_{r(n+1)}$, $r \neq 0$, atunci există $w \in W_{(r-1)(n+1)}$ şi $k \in \{1,\ldots,N\}$ astfel ca $w^j \succ w_{(k)}$. De asemeni există $\bar{w}^1,\ldots,\bar{w}^n$,

$$\bar{w}^i \in W_{(r-1)(n+1)+i} \subseteq M_i \text{ şi } x_i^k \in X_i^k,\ i \in I_n,\ \text{astfel ca:}$$

$$\bar{w}^{i+1} = (f^{\bar{w}^i k})^{-1}(x_i^k) \text{ şi } w_{(k)} = \bar{w}^1 \prec \bar{w}^2 \prec \cdots \prec \bar{w}^n \prec w^j$$

Atunci identificăm p_j cu $\pi_{k\ell}(x^k))_{\ell\in I'}$.

In sfîrşit, dacă $\pi \in E$ este o partidă, să notăm:

$$v_i^t(\pi(t(n+1)+i))=u_i^t(x_i^k),$$ dacă există $w \in W_{t(n+1)}$ astfel ca $w_{(k)} \in \pi(t(n+1)+i)$ şi $\pi(t(n+1)+i+1)$ se identifică cu alternativa x_i^k.

Atunci $f_i(\pi)=\sum_{t\in T} \alpha^{t-1} v_i^t(\pi(n+1)+i))$.

3.3. Forma normală a jocului stochastic.

<u>Definiţie</u> Forma normală a jocului stochastic $\vec{\Gamma}$ este:

$$\vec{\Gamma}_n=\{\mathcal{D}_i, F_i, i\in I_n\}$$

<u>Definiţie</u> Forma normală redusă a jocului stochastic este:

$$\vec{\Gamma}_{nr}=\{X_i, F_i, i\in I_n\}$$

aici, X_i avînd semnificaţia de mulţimi ale strategiilor staţionare ale jucătorilor.

Analog se definesc formele normale ale jocului stochastic $\vec{\Gamma}^k$, înlocuind în definiţiile de mai sus F_i cu F_i^k.

Fie, acum, $\vec{\Gamma}$ un joc stochastic finit; cu alte cuvinte să presupunem că X_i^k, $i\in I_n$, $k\in I$, sînt mulţimi finite.

Fie S_i^k mulţimea probabilităţilor pe X_i^k; $S_i^k=\{s_i^k= (p(x_i^k))_{x_i^k\in X_i^k},\ p(x_i^k)\geq 0,\ \sum_{x_i^k} p(x_i^k)=1\}$.

Notăm $S^k=\prod_{i\in I_n} S_i^k=\{s^k=\bigotimes_i s_i^k \mid s_i^k\in S_i^k\}$, $S_i= \prod_{k\in I}$, $S=\prod_{k\in I} S^k$ $(S=\prod_{i\in I_n} S_i)$

<u>Definiție</u> Extensia aleatoare a jocului stochastic $\vec{\Gamma}$ este jocul stochastic $\tilde{\vec{\Gamma}}$, a cărui structură este:

$$\{T;\ I_n;\ I';\ S_i^k, i \in I_n,\ k \in I; u_i^k, i \in I_n, k \in I;\ \pi^0;\ \pi(s), s \in S\}$$

unde:

$$u_i^k : S^k \to R,\ u_i^k(s^k) = \sum_{x^k \in X^k} u_i^k(x^k) \prod_{j \in I_n} p(x_i^k)$$

$$\pi(s) = (\pi_{k\ell}(s))_{k,\ell \in I},\ \pi_{k\ell}(s) = \pi_{k\ell}(s^k) = \sum_{x^k \in X^k} \pi_{k\ell}(x^k) \prod_{j \in I_n} p(x_j^k)$$

In acest caz, o strategie globală în jocul $\tilde{\vec{\Gamma}}$ se va numi strategia globală mixtă a jocului $\vec{\Gamma}$.

<u>Observație</u>: O strategie staționară a lui i în jocul $\tilde{\vec{\Gamma}}$ se identifică cu un element al lui S_i.

In contextul secțiunii precedente, strategiile globale mixte ale lui $\vec{\Gamma}$ apar definite ca strategii de comportare.

Utilizarea, în teoria jocurilor stochastice, a strategiilor de comportare este motivată de faptul că acest tip de strategii aleatoare este singurul concept capabil să descrie comportamentul jucătorilor, în evoluția sa temporală, în concordanță cu însăși structura specifică a jocurilor stochastice.

Fie $\tilde{\mathcal{D}}_i$, respectiv $\tilde{\mathcal{D}}$, mulțimile strategiilor globale mixte ale jucătorilor și ale jocului. Păstrînd notațiile F_i, F_i^k pentru funcțiile de cîștig mediu global ale jucătorului în jocurile $\tilde{\vec{\Gamma}}$, respectiv $\tilde{\vec{\Gamma}}^k$, $k \in I$, putem defini forma normală și forma redusă a lui $\tilde{\vec{\Gamma}}$.

$$\tilde{\vec{\Gamma}}_n = \{\tilde{\mathcal{D}}_i, F_i, i \in I_n\} \quad , \quad \tilde{\vec{\Gamma}}_{nr} = \{S_i, F_i, i \in I_n\}$$

și ale lui $\tilde{\vec{\Gamma}}^k$.

$$\tilde{\vec{\Gamma}}_n^k = \{\tilde{\mathcal{D}}_i, F_i^k, i \in I_n\} \quad , \quad \tilde{\vec{\Gamma}}_{nr}^k = \{S_i, F_i^k, i \in I_n\}$$

Problema fundamentală a teoriei jocurilor stochastice, se reduce în viziunea necooperativă, la definirea comportamentului optim prin proprietățile punctului de echilibru al formei normale a jocului.

3.4. Existența punctelor de echilibru în jocurile stochastice finite

Propoziția IV.3.4. Dacă $s \in S$ este o strategie staționară a jocului $\overset{\approx}{\Gamma}$, atunci:

$$F_i^k(s) = u_i^k(s^k) + \alpha \sum_{\ell \in I} \pi_{k\ell}(x^k) F_i^\ell(s)$$

Demonstrație:

$$F_i^k(s) = u_i^k(s^k) + \sum_{t \geq 2} \alpha^{t-1} \sum_{\substack{\ell_\tau \in I \\ 2 \leq \tau \leq t}} P_s(\xi_s^1 = k, \xi_s^\tau = \ell_\tau, \tau =$$

$$= 2, \ldots, t) u_i^{\ell_t}(s^{\ell_t}) =$$

$$= u_i^k(s^k) + \alpha \sum_{\ell \in I} \pi_{k\ell}(s^k) \Big[u_i^\ell(s^\ell) + \sum_{t \geq 3} \alpha^{t-2} \cdot$$

$$\cdot \sum_{\substack{\ell_\tau \in I \\ 3 \leq \tau \leq t}} P_s(\xi_s^2 = \ell, \xi_s^\tau = \ell_\tau, \tau = 3, \ldots, t) u_i^{\ell_t}(s^{\ell_t}) \Big] =$$

$$= u_i^k(s^k) + \alpha \sum_{\ell \in I} \pi_{k\ell}(s^k) \Big[u_i^\ell(s^\ell) + \sum_{t \geq 3} \alpha^{t-2} \sum_{\substack{\ell_\tau \in I \\ 2 \leq \tau \leq t-1}} P_s(\xi_s^1 =$$

$$= \ell, \xi'_s = \ell_\tau, \tau = 2, \ldots, t-1) \cdot$$

$$\cdot u_i^{t-1}(s^{t-1}) \Big] = u_i^k(s^k) + \alpha \sum_{\ell \in I} \pi_{k\ell}(s^k) \Big[u_i^\ell(s^\ell) +$$

$$+ \sum_{t \geq 2} \alpha^{t-1} \sum_{\substack{\ell_\tau \in I \\ 2 \leq \tau \leq t}} P_s(\xi_s^1 = \ell, \xi_s^\tau = \ell_\tau, \tau =$$

$$= 2, \ldots, t) u_i^{\ell_t}(s^{\ell_t}) \Big] = u_i^k(s^k) + \alpha \sum_{\ell \in I} \pi_{k\ell}(s^k) F_i^\ell(s).$$

(s-a folosit propoziţia IV.3.2.)

Fie $s \in S$ fixat. Pentru fiecare $i \in I_n$, definim:

$$Z_{is} : R^N \longrightarrow R^N \quad , \; Z_{is}(v) = (z^k_{is}(v))_{k \in I}, \text{ cu}$$

$$z^k_{is}(v) = \max_{s^k_i \in S^k_i} \Big[u^k_i(s^k \setminus r^k_i) + \alpha \sum_{\ell \in I} \pi_{k\ell}(s^k \setminus r^k_i) v^\ell \Big], v \in R^N.$$

(folosim notaţiile: $(s^k \setminus r^k_i) = (s^k_1 \otimes \ldots \otimes s^k_{i-1} \otimes r^k_i \otimes s^k_{i+1} \otimes \ldots \otimes s^k_n)$)

<u>Propoziţia IV.3.5.</u> Z_{is} este o contracţie.

Demonstraţie:

Fie $v, y \in R^N$

$$\| Z_{is}(v) - Z_{is}(y) \| = \max_{k \in I} \left| z^k_{is}(v) - z^k_{is}(y) \right|$$

Fie $\bar{s}^k_i, \bar{\bar{s}}^k_i \in S^k_i$, $k \in I$ astfel ca:

$$z^k_{is}(v) = u^k_i(s^k \setminus \bar{\bar{s}}^k_i) + \alpha \sum_{\ell \in I} \pi_{k\ell}(s^k \setminus \bar{\bar{s}}^k_i) v^\ell, \; k \in I$$

$$z^k_{is}(y) = u^k_i(s^k \setminus \bar{s}^k_i) + \alpha \sum_{\ell \in I} \pi_{k\ell}(s^k \setminus \bar{s}^k_i) y^\ell, \; k \in I$$

Rezultă pentru fiecare k:

$$\alpha \sum_{\ell \in I} \pi_{k\ell}(s^k \setminus \bar{s}^k_i)(v^\ell - y^\ell) \leq z^k_{is}(v) - z^k_{is}(y) \leq$$

$$\leq \alpha \sum_{\ell \in I} \pi_{k\ell}(s^k \setminus \bar{\bar{s}}^k_i)(v^\ell - y^\ell)$$

adică ,

$$\| Z_{is}(v) - Z(y) \| \leq \alpha \| v - y \|$$

<u>Propoziţia IV.3.6.</u> Oricare ar fi $v \in R^n$,

$$z^k_{is}(v) = \max_{x^k_i \in X^k_i} \Big[u^k_i(s^k \setminus x^k_i) + \alpha \sum_{\ell \in I} \pi_{k\ell}(s^k \setminus x^k_i) v^\ell \Big], k \in I.$$

Demonstrație:

Inegalitatea $\geqslant$, rezultă din definiția lui Z_{is} și din faptul că mulțimea X_i^k se scufundă în S_i^k.

Pentru a demonstra egalitatea se raționează prin absurd.

Să presupunem că există $\bar{s}_i^k=(p(x_i^k))_{x_i^k\in X_i^k}$ astfel ca:

$$u_i^k(s^k\setminus \bar{s}_i^k)+\alpha\sum_{\ell\in I}\pi_{k\ell}(s^k\setminus \bar{s}_i^k)v^\ell > u_i^k(s^k\setminus x_i^k)+$$

$$+\alpha\sum_{\ell\in I}\pi_{k\ell}(s^k\setminus x_i^k)v^\ell$$

oricare ar fi x_i^k . Inmulțind cu $p(x_i^k)\geqslant 0$ și sumînd pe X_i^k se obține o inegalitate falsă.

<u>Propoziția IV.3.7.</u> Fie v_{is} unicul punct fix al operatorului Z_{is} și $\bar{s}_i=\bigotimes_k \bar{s}_i^k\in S_i$, astfel încît:

$$\text{(IV.3.3.)}\qquad v_{is}^k=z_{is}^k(v_{is})=u_i^k(s^k\setminus\bar{s}_i^k)+\alpha\sum_{\ell\in I}\pi_{k\ell}(s^k\setminus\bar{s}_i^k)v_{is}^\ell,k\in I$$

Atunci, pentru fiecare $k\in I$ și $r_i\in S_i$,

$$F_i^k(s\setminus\bar{s}_i)=v_{is}^k\geq F_i^k(s\setminus r_i)$$

(aici, $s\setminus r_i=s_1\otimes s_2\otimes\cdots\otimes s_{i-1}\otimes r_i\otimes s_{i+1}\otimes\cdots\otimes s_n$)

Demonstrație:

Conform propoziției IV.3.4.,

$$F_i^k(s\setminus\bar{s}_i)=u_i^k(s^k\setminus\bar{s}_i^k)+\alpha\sum_{\ell\in I}\pi_{k\ell}(s^k\setminus\bar{s}_i^k)F_i^\ell(s\setminus\bar{s}_i),k\in I$$

De aici și din (IV.3.3.) rezultă $F_i^k(s\setminus\bar{s}_i)=v_{is}^k$, $k\in I$.

Intr-adevăr, fie $b=\max\limits_{k\in I}\left|F_i^k(s\setminus\bar{s}_i)-v_{is}^k\right|$

Atunci:

$$b \leq \alpha \left| \sum_{\ell \in I} \pi_{k\ell}(s^k \setminus \bar{s}_i^k)(F_i^\ell(s \setminus \bar{s}_i) - v_{is}^\ell) \right| \leq \alpha\, b$$

Rezultă că b = 0 şi de aici egalitatea anunţată.

Pe de altă parte, pentru $r_i \in S_i$, din (IV.3.3.) şi din propoziţia IV.3.4., rezultă:

$$F_i^k(s \setminus r_i) = u_i^k(s^k \setminus r_i^k) + \alpha \sum_{\ell \in I} \pi_{k\ell}(s^k \setminus r_i^k) F_i^\ell(s \setminus r_i) \leq$$

$$\leq v_{is}^k + \alpha \sum_{\ell \in I} \pi_{k\ell}(s^k \setminus r_i^k)\left[F_i^\ell(s \setminus r_i) - v_{is}^\ell\right],\ k \in I,$$

sau,

$$F_i^k(s \setminus r_i) - v_{is}^k \leq \alpha \sum_{\ell \in I} \pi_{k\ell}(s^k \setminus r_i^k)\left[F_i^\ell(s \setminus r_i) - v_{is}^\ell\right] \leq$$

$$\leq \alpha \max_{\ell \in I} (F_i^\ell(s \setminus r_i) - v_{is}^\ell), \text{ pentru orice } k \in I,$$

de unde rezultă:

$$\max_{\ell \in I} (F_i^\ell(s \setminus r_i) - v_{is}^\ell) \leq 0$$

<u>Teorema IV.3.1</u>. Jocurile $\tilde{\tilde{\Gamma}}_{nr}^k = \{S_i, F_i^k, i \in I_n\}$ admit un punct de echilibru $\bar{s}$, acelaşi pentru toţi $k \in I$.

Demonstraţie:

Definim $\varphi : S \longrightarrow S$, $\varphi = (\varphi_i^k)_{i \in I_n, k \in I}$, prin:

$$\varphi_i^k(s) = \frac{1}{1 + \sum_{x_i^k} g_i^k(s; x_i^k)} (s_i^k + g_i^k(s))$$

unde $g_i^k(s) = (g_i^k(s; x_i^k))_{x_i^k \in X_i^k}$

iar $g_i^k(\cdot, x_i^k) : S \longrightarrow R$ este aplicaţia continuă definită de:

$$g_i^k(s; x_i^k) = \max\left\{ 0, u_i^k(s^k \setminus x_i^k) + \alpha \sum_{\ell \in I} \pi_{k\ell}(s^k \setminus x^k) F_i^\ell(s) - \right.$$

$$\left. - F_i^k(s) \right\},\ k \in I,\ x_i^k \in X_i^k.$$

Se verifică imediat consistenţa definiţiei lui φ ca aplicaţie continuă a compactului S în S. Atunci teorema de punct fix a lui Brouwer (propoziţia A.1.31.) asigură existenţa unui punct fix al lui φ. Fie deci $\bar{s} \in S$ astfel ca $\bar{s} = \varphi(\bar{s})$.

Atunci $\bar{s}_i^k = \varphi_i^k(\bar{s})$, $i \in I_n$ şi $k \in I$, sau,

$$\bar{s}_i^k \sum_{x_i^k \in X_i^k} g_i^k(\bar{s}; x_i^k) = g_i^k(\bar{s}),\ k \in I.$$

Vom arăta că $g_i^k(\bar{s}; x_i^k) = 0$, oricare ar fi $i \in I_n$, $k \in I$, $x_i^k \in X_i^k$.

Prin absurd, pentru un $i \in I_n$ şi $k \in I$,

$$\bar{X}_i^k = \{ x_i^k \in X_i^k \mid g_i^k(\bar{s}; x_i^k) > 0 \} \neq \emptyset$$

Atunci:

(IV.3.4.)
$$\bar{s}_i^k = \frac{1}{\sum\limits_{x_i^k} g_i^k(\bar{s}; x_i^k)}\ g_i^k(\bar{s})$$

iar, pe de altă parte, pentru fiecare $x_i^k \in \bar{X}_i^k$,

(IV.3.5.) $$u_i^k(\bar{s}^k \setminus x_i^k) + \alpha \sum_{\ell \in I} \pi_{k\ell}\, (\bar{s}^k \setminus x_i^k) F_i^\ell(\bar{s}) > F_i^k(\bar{s})$$

Multiplicînd (IV.3.5.) cu $\dfrac{g_i^k(\bar{s}; x_i^k)}{\sum\limits_{x_i^k} g_i^k(\bar{s}; x_i^k)} > 0$ şi sumînd după $x_i^k \in \bar{X}_i^k$, ţinînd seama de (IV.3.4.), rezultă:

$$u_i^k(\bar{s}_i^k) + \alpha \sum_{\ell \in I} \pi_{k\ell}\, (\bar{s}^k) F_i^\ell(\bar{s}) > F_i^k(\bar{s})$$

inegalitate falsă, datorită propoziţiei IV.3.4.

Deci, pentru fiecare $i \in I_n$, $k \in I$,

$$F_i^k(\bar{s}) \geqslant \max_{x_i^k \in X_i^k} \left[u_i^k(\bar{s}^k \setminus x_i^k) + \alpha \sum_{\ell \in I} \pi_{k\ell}(\bar{s}^k \setminus x_i^k) F_i^\ell(\bar{s}) \right]$$

De aici, datorită propozițiilor IV.3.6. și IV.3.4., rezultă:

$$F_i^k(\bar{s}) = \max_{s_i^k \in S_i^k} \left[u_i^k(\bar{s}^k \setminus s_i^k) + \alpha \sum_{\ell \in I} \pi_{k\ell}(\bar{s}^k \setminus s_i^k) F_i^\ell(\bar{s}) \right]$$

In acest caz, propoziția IV.3.7. implică:

$$F_i^k(\bar{s}) \geqslant F_i^k(\bar{s} \setminus s_i), \text{ pentru orice } s_i \in S_i$$

ceea ce demonstrează teorema.

Corolar In condițiile teoremei, $\widetilde{\widetilde{\Gamma}}_{nr}$ admite un punct de echilibru.

Demonstrație:

Este suficient să remarcăm că:

$$F_i(s) = \sum_{k \in I} \pi_k F_i^k(s), \quad s \in S.$$

Fără demonstrație, menționăm și următorul rezultat:

Propoziția IV.3.8. Dacă $s \in S$, atunci, pentru fiecare $i \in I_n$,

$$\max_{\widetilde{\delta}_i \in \widetilde{D}_i} F_i(s \setminus \widetilde{\delta}_i) = \max_{r_i \in S_i} F_i(s \setminus r_i)$$

Semnificația acestui rezultat este majoră în teoria jocurilor stochastice. Teorema IV.3.1. poate fi reformulată, afirmînd existența, în forma normală a jocului $\widetilde{\widetilde{\Gamma}}$, a unui punct de echilibru format din strategii aleatoare staționare. Deci:

Orice joc stochastic finit, admite un punct de echilibru aleator staționar, același pentru orice stare inițială.

3.5. Rezolvarea jocurilor de două persoane, cu sumă nulă

Jocul stochastic, de două persoane (n=2) Γ , este numit, de două persoane, cu sumă nulă, dacă $u_1^k = - u_2^k$ (notat u^k) pentru $k \in I$.

O consecinţă imediată este: $F_1^k = - F_2^k$ (scriem, F^k), $k \in I$.

<u>Definiţie</u>. Numim vectorul-valoare a jocului stochastic finit, de două persoane, cu sumă nulă, Γ , $\bar{v} = (\bar{v}^k)_{k \in I}$, unde $\bar{v}^k$ este valoarea jocului de două persoane, cu sumă nulă $\tilde{\Gamma}^k_{nr} = \{S_1, S_2, F^k\}$.

Pentru, $v \in R^N$, fie jocul matriceal definit de matricea $A^k(v)$,

$$A^k(v) = (a_{ij}^k(v))_{i \in X_1^k, j \in X_2^k}, \text{ unde:}$$

$$a_{ij}^k(v) = u^k(i,j) + \alpha \sum_{\ell \in I} \pi_{k\ell}(i,j) v^\ell , \quad i \in X_1^k, j \in X_2^k,$$

$$k \in I.$$

Cum orice joc matriceal admite cel puţin un punct de echilibru aleator, există val. $A^k(v)$ = valoarea jocului $A^k(v)$ şi $\mathcal{O}_1(A^k(v)$, $\mathcal{O}_2(A^k(v))$, mulţimile strategiilor optime ale celor doi jucători, în acest joc.

Fie operatorul:

$$Z : R^N \longrightarrow R^N , \quad Z(v) = (z^k(v))_{k \in I}, \; z^k(v) = \text{val. } A^k(v)$$

<u>Propoziţia IV.3.9</u>. Z este o contracţie.

Demonstraţie:

Fie $v,y \in R^N$

$$\| Z(v) - Z(y) \| = \max_{k \in I} |z^k(v) - z^k(y)| = \max_{k \in I} | \text{ val. } A^k(v) -$$

$$- \text{ val.} A^k(y)| \leq \max_{k \in I} \max_{i \in X_1^k, j \in X_2^k} | a_{ij}^k(v) - a_{ij}^k(v)| =$$

$$= \max_{k\in I}\ \max_{i\in X_1^k,\, j\in X_2^k} \alpha \left|\sum_{\ell\in I} \pi_{k\ell}(i,j)(v^\ell - y^\ell)\right| \leq \alpha \max_{\ell\in I} |v^\ell - y^\ell| =$$

$$= \alpha \|v - y\| .$$

Să definim acum, şirul $\{v(t)\}_{t=0,1,\dots}$, $v(t) \in R^N$,
$v(t+1) = Z(v(t)), t \geq 1$, $v(0) \in R^N$

<u>Propoziţia IV.3.10</u>. Sirul $\{v(t)\}$ este convergent, limita sa fiind, unicul punct fix al contracţiei Z.

Demonstraţie:

Datorită propoziţiei precedente.

$$\|v(t) - v(t-1)\| = \|Z(v(t-1)) - Z(v(t-2))\| \leq$$

$$\leq \alpha\|v(t-1) - v(t-2)\| \leq \dots \leq \alpha^{t-1} \|v(1) - v(0)\|$$

Atunci, pentru orice t,r,

$$\|v(t+r) - v(t)\| \leq \sum_{m=t+1}^{t+r} \|v(m) - v(m-1)\| \leq$$

$$\leq \|v(1) - v(0)\| . \sum_{m=t+1}^{t+r} \alpha^{r}$$

Concludem că şirul $\{v(t)\}$ este Cauchy, deci convergent.

Fie $\overline{v} = \lim_{t\to\infty} v(t)$

Deoarece $v(t+1) = Z(v(t))$, prin trecere la limită, rezultă:

$$\overline{v} = Z(\overline{v})$$

şi cu aceasta propoziţia este demonstrată.

<u>Teorema IV.3.2</u>. Fie $\overline{v}$ punctul fix al contracţiei Z. Atunci $\overline{v}$ este vectorul-valoare al jocului Γ. Mulţimea punctelor de echilibru ale lui $\widetilde{\Gamma}$ este: $\{ \overline{s} = (\overline{s}_1,\overline{s}_2) \mid \overline{s}_i^k \in \mathcal{O}_i(A^k(\overline{v})), k \in I, i=1,2.\}$

Demonstrație:

Fie $\bar{s} = (\bar{s}_1, \bar{s}_2) \in \mathcal{E}(\tilde{\Gamma}_{nr})$

Atunci, conform propoziției IV.3.4.;

$$v_{1\bar{s}}^k = F^k(\bar{s}) \geq F^k(s_1, \bar{s}_2),\ \text{pentru orice } s_1 \in S_1$$

$$v_{2\bar{s}}^k = -F^k(\bar{s}) \geq -F^k(\bar{s}_1, s_2),\ \text{pentru orice } s_2 \in S_2$$

$k \in I$, unde $v_{1\bar{s}}$, $v_{2\bar{s}}$ sînt punctele fixe ale operatorilor $Z_{1\bar{s}}$, respectiv $Z_{2\bar{s}}$.

Din egalitățile de mai sus, rezultă $v_{1\bar{s}} = -v_{2\bar{s}}$ (notat $v_{\bar{s}}$).

Din definiția contracțiilor $Z_{i\bar{s}}$, rezultă:

$$\text{(IV.3.6.)} \qquad v_{1\bar{s}}^k = \max_{s_1^k \in S_1^k} \left[u^k(s_1^k, \bar{s}_2^k) + \alpha \sum_{\ell \in I} \pi_{k\ell}(s_1^k, \bar{s}_2^k) v_{1\bar{s}} \right]$$

$$\text{(IV.3.7.)} \qquad v_{1\bar{s}}^k = -\min_{s_2^k \in S_2^k} \left[-u^k(\bar{s}_1^k, s_2^k) - \alpha \sum_{\ell \in I} \pi_{k\ell}(\bar{s}_1^k, s_2^k) v_{1\bar{s}} \right] =$$

$$= \min_{s_2^k \in S_2^k} \left[u^k(\bar{s}_1^k, s_2^k) + \alpha \sum_{\ell \in I} \pi_{k\ell}(\bar{s}_1^k, s_2^k) v_{1\bar{s}} \right]$$

(IV.3.6.) și (IV.3.7.) se pot scrie, împreună:

$$u^k(s_1^k, \bar{s}_2^k) + \alpha \sum_{\ell \in I} \pi_{k\ell}(s_1^k, \bar{s}_2^k) v_{\bar{s}}^{\ell} \leq v_{\bar{s}}^k \leq u^k(\bar{s}_1^k, s_2^k) +$$

$$+ \alpha \sum_{\ell \in I} \pi_{k\ell}(\bar{s}_1^k, s_2^k) v_{\bar{s}}^{\ell}\ ,\ \text{pentru orice } s_1 \in S_1 \text{ și}$$

$s_2 \in S_2$.

Ori, această dublă inegalitate dovedește că $v_{\bar{s}}^k$ este valoarea jocului $A^k(v_{\bar{s}})$ și $\bar{s}^k$ este un punct de echilibru al acestui joc, $k \in I$. Atunci, datorită propoziției IV.3.9. $v_{\bar{s}} = v$.

Reciproc fie $\bar{s}$, astfel ca $\bar{s}^k = (\bar{s}_1^k, \bar{s}_2^k)$ să fie punct de echilibru al jocului $A^k(\bar{v})$, $k \in I$. Atunci, pentru fiecare $k \in I$.

$$\overline{v}^k = \max_{s_1^k \in S_1^k} \left[u^k(s_1^k, \overline{s}_2^k) + \alpha \sum_{\ell \in I} \pi_{k\ell}(s_1^k, \overline{s}_2^k)\overline{v}^\ell \right]$$

şi, din propoziţia IV.3.4., decidem că $F^k(\overline{s}) = \overline{v}^k \geqslant F^k(s_1^k, \overline{s}_2^k), k \in I$,

Analog se demonstrează şi cea de a doua inegalitate care probează că $\overline{s}$ este punct de echilibru al jocului.

Ca o consecinţă a acestor rezultate, se poate schiţa o metodă iterativă, pentru rezolvarea jocurilor stochastice finite, de două persoane, cu sumă nulă:

a) Se alege $v(0) \in R^N$

b) La etapa t, se determină valorile celor N jocuri matriceale definite de matricele $A^k(v(t-1)), k \in I, t \geqslant 1$, utilizînd metoda expusă în secţiunea 2.4. Notăm $v(t) = (v^k(t))_{k \in I}$, unde $v^k(t) =$ $=$ val. $A^k(v(t-1))$.

c) Şirul $\{v(t)\}$ converge către vectorul-valoare al jocului stochastic $\vec{\Gamma}$. Dacă $\overline{v}$ este limita şirului $\{v(t)\}$, atunci $\overline{s} = (\overline{s}_1, \overline{s}_2)$ cu $\overline{s}_i^k \in \mathcal{O}_i(A^k(\overline{v}))$, $k \in I$, $i=1,2$, constituie un punct de echilibru al jocului stochastic.

B. Teoria jocurilor cooperative

Principalele ipoteze, admise, implicit, în această teorie sînt: libera comunicare între jucători, posibilitatea coordonării acţiunilor acestora pe baza unor principii de raţionalitate individuală şi colectivă.

Multitudinea teoretizărilor diferite ale situaţiilor competiţionale cooperative, este motivată, în special, de modul diferit în care se reflectă, într-o formalizare logică, înţelesul termenului "cooperare". In prezenta lucrare, ne vom situa pe linia clasică a teoriei von Neumann-Morgenstern şi a extensiilor sale imediate.

Deşi nu se poate defini o măsură a gradului de cooperare admis într-un joc, se face o demarcaţie între două tipuri, calitativ diferite, de relaţii cooperative. Corespunzător acestora, jocurilor cooperative se studiază separat, în două clase distincte:

a) Jocurile cooperative fără compensaţii (sau, fără plăţi interpersonale), în care efectele cooperării se concretizează numai în stabilirea, în comun , a modalităţilor de acţiune.

b) Jocurile cooperative cu compensaţii (cu plăţi interpersonale), în care cooperarea intervine direct în determinarea cîştigurilor jucătorilor, măsurile individuale ale utilităţilor acţiunilor nefiind singurele determinante. Mai precis, în acest caz se admite transferarea de la un jucător la altul a unei părţi din cîştigul dobîndit. Admitem în plus ipoteza transferului liniar cu rata 1/1, adică "o unitate din cîştigul unui jucător transferată altuia măreşte cîştigul acestuia tot cu o unitate".

O situaţie limită în teoria jocurilor cooperative este cea a jocurilor total cooperative, în care relaţiile de cooperare se manifestă, neapărat, în plenul colectivităţii jucătorilor, în general, problemele sociale de mare interes impunînd admiterea posibilităţii unor încercări de înţelegere separată pe grupuri (coaliţii).

§ 4. Jocuri total cooperative

4.1. Modelul jocului total cooperativ

Definiţie. Un joc de n persoane, total cooperativ este reprezentat de ansamblul:

$$\Gamma = \{ I_n, U, u^o \}$$

unde $I_n = \{1,\dots,n\}$ este mulţimea jucătorilor U este o submulţime nevidă, compactă şi convexă a lui R^n, numită mulţimea utilităţilor admisibile şi $u^o \in R^n$ cu proprietatea $U_o = \{ u \in U \mid u \geqslant u^o \} \neq \emptyset$ (u^o se numeşte utilitatea situaţiei de status-quo).

Definiţie. Fie $u, u' \in U$. Spunem că u domină pe u' (u dom.u') dacă $u \geqslant u'$ şi $u \neq u'$.

4.2. Raţionalitate şi optimalitate

<u>Definiţie</u>. Soluţia cooperativă a jocului $\Gamma = \{I_n, U, u^o\}$ (mulţimea de negociere) este submulţimea $\mathcal{S}$ a lui U cu proprietăţile:

(i) $u \geqslant u^o$, oricare ar fi $u \in \mathcal{S}$.

(ii) oricare ar fi $u \in \mathcal{S}$, nu există $u' \in U$ astfel ca u' dom.u.

<u>Teorema IV.4.1</u>. pentru orice joc total cooperativ Γ, soluţia cooperativă este nevidă.

Demonstraţie:

Fie $a \in R^n$, $a > 0$. Aplicaţia continuă $f(u) = a^T u$ îşi atinge maximul pe compactul U_o. Fie $\bar{u} \in U_o, f(\bar{u}) = \max_{u \in U_o} f(u)$. Atunci $\bar{u} \in \mathcal{S}$.

Intr-adevăr $\bar{u} \geqslant u^o$. Dacă, prin absurd, ar exista $u' \in U$, astfel ca u' dom.u, atunci, pe de o parte ar rezulta $u' \in U_o$, iar pe de alta:

$$f(u') = a^T u' > a^T \bar{u} = f(\bar{u})$$

contrazicînd alegerea lui $\bar{u}$.

Să notăm, în cele ce urmează, cu $\mathcal{G}_n$, mulţimea tuturor jocurilor total cooperative, de n persoane. Numărul jucătorilor fiind astfel fixat, simplificăm notaţia, desemnînd un joc din $\mathcal{G}_n$ prin (U, u^o).

<u>Definiţie</u>. Numim schemă de arbitrare (în sensul lui J.Nash), o aplicaţie $\Phi : \mathcal{G}_n \longrightarrow R^n$, cu proprietăţile:

I. $\Phi(U, u^o) \in U$

II. $\Phi(U, u^o) \geqslant u^o$

III. nu există $u \in U$ astfel ca u dom. $\Phi(U, u^o)$.

IV. Dacă $g : R^n \longrightarrow R^n$ este o transformare liniară afină,

$$g(u) = u', u_i' = a_i u_i + b_i, a_i > 0, b_i \in R, i \in I_n, \text{ atunci}$$

$$\Phi(g(U), g(u^o)) = g(\Phi(U, u^o)).$$

V. Dacă $U' \subset U$ şi $\Phi(U,u^o) \in U'$, atunci $\Phi(U,u^o) = \Phi(U',u^o)$.

VI. Dacă U este simetrică în raport cu o mulţime $\mathcal{J}$ de indici (pentru $i \neq j$, $i,j \in \mathcal{J}$, $u \in U$ implică $(u_1,\ldots,u_{i-1},u_j,u_{i+1},\ldots,u_{j-1},u_i,u_{j+1},\ldots,u_n) \in U$) şi dacă $u_i^o = u_j^o, i,j \in \mathcal{J}$, atunci notînd $u^* = \Phi(U,u^o)$, rezultă $u_i^* = u_j^*, i,j \in \mathcal{J}$

Utilitatea $u^* = \Phi(U,u^o)$ se numeşte soluţia negocierilor, pentru jocul $\Gamma = (U,u^o)$.

Facem, pentru cele ce urmează, următoarele convenţii de notaţie:

Dacă $J_1,\ldots,J_k$ este o desfacere a lui I_n, scriem $u_{J_r} = (u_i)_{i \in J_r}$ şi $u = (u_{J_1},\ldots,u_{J_k})$. De asemeni scriem $\bar{J}$ în loc de $I_n \setminus J$.

<u>Teorema IV.4.2</u>. Există o unică aplicaţie Φ satisfăcînd proprietăţile I-VI şi $\Phi(U,u^o) = u^*$, unde:

(k) dacă există $J \subseteq I_n, J \neq \emptyset$ şi $\bar{u} \in U_o$ astfel ca $u_{\bar{J}} = u_{\bar{J}}^o$ pentru toţi $u \in U_o$ şi $\bar{u}_J > u_J^o$, atunci $u^* = (u_J^*, u_{\bar{J}}^o)$ cu u_J^* unicul punct de maxim al lui $h_J(u) = \prod_{i \in J} (u_i - u_i^o)$ pe U_o.

(kk) dacă $U_o = \{u^o\}$, atunci $u^* = u^o$.

Demonstraţia teoremei se sprijină pe următoarele leme:

<u>Lema IV.4.1</u>. Există $J \subseteq I_n$, astfel ca:

1) $u_{\bar{J}} = u_{\bar{J}}^o$, pentru toţi $u \in U_o$

2) există $u \in U_o$, astfel ca $u_J > u_J^o$

Demonstraţie:

Dacă există $u \in U, u > u^o$, lema este evidentă

Altfel, fie $J = I_n \setminus \{i \mid u_i = u_i^o$, oricare ar fi $u \in U_o\}$

$J \neq \emptyset$. Intr-adevăr, dacă pentru fiecare $i \in I_n$ ar exista $u(i) \in U_o$ cu $u(i)_i > u_i^o$, atunci $u = \frac{1}{n} \sum_{i \in I_n} u(i) \in U_o$ (mulţime convexă) şi $u > u^o$. Dacă $J = \emptyset$, lema este demonstrată. In caz contrar, pentru fiecare $i \in J$ există $u(i) \in U_o$ cu $u(i)_i > u_i^o$. Evident, $u =$

$=\frac{1}{|J|}\sum_{i\in J} u(i)\in U_o$ şi $u_J > u_J^o$.

<u>Lema IV.4.2</u>. Dacă $J\subseteq I_n$, $J\neq\emptyset$ şi există $\bar{u}\in U_o$ cu $\bar{u}_J > u_J^o$, atunci $h_J(u) = \prod_{i\in J}(u_i-u_i^o)$ îşi atinge maximul pe U_o într-un unic punct.

Demonstraţie:

Fie $\bar{U}_o=\{u\in U_o \mid h_J(u)\geqslant h_J(\bar{u})>0\}$. Evident, $\max\limits_{u\in U_o} h_J(u) = \max\limits_{u\in\bar{U}_o} h_J(u)$. Funcţia $f_J = \ln h_J$, definită pe $\bar{U}_o^J=\{u_J=(u_j)_{j\in J} \mid u\in\bar{U}_o\}$ este strict concavă şi îşi atinge maximul într-un unic punct u_J^*. Definind $u^*=(u_J^*,u_{\bar{J}}^o)$, deducem că $h_J(u^*)>h_J(u), u\in U_o$, $u\neq u^*$.

<u>Lema IV.4.3</u>. Dacă $J\subseteq I_n, J\neq\emptyset$ şi U este convexă, $e^J\in U$ (unde $e_j^J=1$, dacă $j\in J$ şi $e_j^J=0$, dacă $j\in\bar{J}$) şi $h_J(u)=\prod_{j\in J} u_j\leqslant 1$, oricare ar fi $u\in U$, atunci $U\subseteq\{u \mid \sum_{j\in J} u_j\leqslant |J|\}$.

Demonstraţie:

Prin absurd, există $\bar{u}\in U$ astfel ca $\sum_{j\in J}\bar{u}_j>|J|$

Datorită convexităţii lui U, $[\bar{u},e^J]\subseteq U$.

Fie $f(\lambda)=h_J(\lambda\bar{u}+(1-\lambda)e^J)$.

$f'(\lambda)=(\bar{u}-e^J)^T\nabla h_J(\lambda\bar{u}+(1-\lambda)e^J)$

Deoarece $f'(0)=(\bar{u}-e^J)^T e^J=\sum_{j\in J}\bar{u}_j-|J|>0$.

rezultă existenţa unui $\bar{\lambda}\in(0,1]$ astfel ca $f'(\lambda)>0$ pe $[0,\bar{\lambda}]$

Deci $f(\bar{\lambda})>f(0)$, adică $h_J(\bar{\lambda}\bar{u}+(1-\bar{\lambda})e^J)>h_J(e^J)=1$, ceea ce contrazice ipotezele asumate.

Demonstraţia teoremei:

a) Din lemele IV.4.1. şi IV.4.2. rezultă că Φ este bine definită.

b) Φ verifică ipotezele I-VI.

Deoarece în cazul (kk) verificarea acestora este trivială, să ne situăm în ipotezele de la (k).

I. şi II. sînt evidente

III. Presupunem că există $u \in U$, u dom. u^* . Atunci $u_{\bar{J}}=u^o_{\bar{J}}=u^*_{\bar{J}}$, deci $u_J \geqslant u^*_J$, $u_J \neq u^*_J$. Dar aceasta ar implica $h_J(u) > h_J(u^*)$, în contradicţie cu alegerea lui u^* .

IV. Notăm $U'=g(U)$, $U'_o=g(U)$,$U'_o=g(U_o)$, $u^{o\prime}=g(u^o)$,$u^{*\prime} = \Phi(U',u^{o\prime})$.

Se observă că ipotezele de la (k) sînt verificate şi de U'_o. Atunci $u^{*\prime} = (u^{*\prime}_J, u^{o\prime}_{\bar{J}})$ unde $u^{*\prime}_J$ este punctul de maxim al lui $h'_J(u') = \prod_{i\in J} (u'_i-u^{o\prime}_i)= \prod_{i\in J} a_i \prod_{i\in J} (u_i-u^o_i)$. De aici şi din lema 4.4.2. rezultă: $u^{*\prime} = g(u^*)$

V. Scriem $U'_o=U'\cap U_o$ şi $u^* = \Phi(U,u^o)$. Se observă că $u^*\in U'_o$ şi $u^*_J > u^o_J$

Atunci ipoteza (k) este verificată şi pentru jocul (U',u^o) şi deci $\Phi(U',u^o)=(u^{*\prime}_J,u^o_{\bar{J}})$ cu $u^{*\prime}_J$ unicul punct de maxim al lui h_J pe U'_o. Dar, deoarece $u^*\in U'$, $u^*_J=u^{*\prime}_J$.

VI. Admitem că $J=\{1,\dots,k\}$,$k \leqslant n$. Fie $i,j \in J, i < j$. Deoarece $u^o_i = u^o_j$ putem scrie $h_J(u^*)=(u^*_1-u^o_1)..(u^*_j-u^o_i)..(u^*_i-u^o_j)..(u^*_k-u^o_k)..$ Datorită simetriei lui U, rezultă că $(u^*_1,\dots,u^*_j,\dots,u^*_i,\dots,u^*_k)$ este punctul de maxim al lui h_J. Atunci din lema IV.4.2. rezultă $u^*_i=u^*_j$.

c) Demonstrăm unicitatea lui Φ . Fie Φ' verificînd I-VI.

In ipoteza (kk),I şi II implică $\Phi'(U,u^o)=u^o= \Phi(U,u^o)$.

Ne situăm în ipoteza (k). Fie r=card.J

Fie $g_1:R^n \longrightarrow R^n, g_1(u)=u'$, $u'_i=u_i-u^o_i$, $i \in I_n$.

Notăm $U'=g_1(U)$. Clar, $g_1(u^o)=0$ şi $U'_o=\{u'\in U' \mid u'\geqslant 0\}$.

In ipotezele asumate, există $u' \in U'_o$ astfel ca $u'_J>0$, $u'_{\bar{J}}=0$.

Alegem $\bar{u}'\in U'_o$ astfel ca $\prod_{i\in J} \bar{u}' = \max_{u'\in U'_o} \prod_{i\in J} u'_i$

Definim $g_2: R^n \to R^n, g_2(u')=u'', u_i'' = \begin{cases} u_i', & \text{dacă } i \in \bar{J} \\ \dfrac{u_i'}{\bar{u}_i'}, & \text{dacă } i \in J \end{cases}$

Notăm $U''=g_2(U')$; $U_o''=g_2(U_o')$. Se observă că $g_2(0)=0$ şi că $h_J''(u'')=\prod_{i\in J} u_i'' \leq 1$, oricare ar fi $u'' \in U_o''$. De asemenea $\bar{u}'' \in U_o''$, unde am notat:

$$\bar{u}_i'' = \begin{cases} 1, & \text{dacă } i \in J \\ 0, & \text{dacă } i \in \bar{J} \end{cases}$$

Atunci conform lemei IV.4.3., $U_o'' \subseteq \{ u \in R^n \mid u \geq 0, \sum_{i \in J} u_i \leq r\} = U''$.

Dar U''' este o mulţime compactă, convexă, simetrică relativ la mulţimea de indici J. Ipotezele I,II,III,VI, impun ca $\Phi'(U''', 0)=\bar{u}''$.

Atunci datorită lui V, $\Phi'(U'', 0)= \Phi'(U_o'', 0)=\bar{u}''$.

Pe de altă parte datorită lui IV, $\Phi'(U'', 0)=u^{*''}$, unde

$$u_i^{*''} = \begin{cases} \dfrac{u_i^*-u_i^o}{\bar{u}_i'}, & \text{dacă } i \in J \\ u_i^*-u_i^o, & \text{dacă } i \in \bar{J} \end{cases}, \text{ unde } u^* = \Phi'(U,u^o).$$

Prin identifćarea lui $u^{*''}$ cu $\bar{u}''$, rezultă că:

$$u_i^* = \begin{cases} \bar{u}_i'+u_i^o, & \text{dacă } i \in J \\ u_i^o, & \text{dacă } i \in \bar{J} \end{cases}$$

Or datorită alegerii lui $\bar{u}'$ se vede că $u^* = \Phi(U,u^o)$.

Cu aceasta teorema este demonstrată.

4.3. Modelul jocurilor total cooperative derivat din modelul jocului în forma normală

O modalitate constructivă pentru obținerea modelului jocului total cooperativ, are la bază elementele definitorii ale modelului jocului în forma normală și interpretarea lor intuitivă.

Fie jocul, în forma normală $\Gamma = \{ X_i, F_i, i \in I_n \}$ unde X_i sînt mulțimi nevide și compacte în spații topologice separate, iar F_i sînt continue. Să notăm cu $\mathcal{B}_i$ familia mulțimilor boreliene din X_i și cu $\mathcal{B}_C = \mathcal{B}(\bigotimes_{i \in C} \mathcal{B}_i)$ corpul borelian generat de produsele de mulțimi boreliene din $\mathcal{B}_i, C \subseteq I_n$.

<u>Definiție</u>. Numim strategie de cooperare a coaliției C, o probabilitate s_C pe $(X_C, \mathcal{B}_C)$, $X_C = \prod_{i \in C} X_i$.

Notăm cu S_C mulțimea strategiilor de cooperare ale coaliției C.

Folosim notația s pentru s_{I_n} și S pentru S_{I_n} .

Dacă $s \in S$, notăm cu $\mathcal{F}_i(s)$ utilitatea medie a lui i;

$$\mathcal{F}_i(s) = \int_X F_i(x) ds(x)$$

<u>Propoziția IV.4.1</u>. Jocul $\{ S_i, \mathcal{F}_i, i \in I_n \}$ admite cel puțin un punct de echilibru.

Demonstrație:

S_i sînt mulțimi compacte și convexe, $\mathcal{F}_i$ definită pe $\bigotimes_{i \in I_n} S_i$ este liniară în variabila s_i pe S_i, atunci din teorema IV.2.1. rezultă existența punctelor de echilibru.

Pentru fiecare $i \in I_n$, fie:

$$v_i = \max_{s_i \in S_i} \; \min_{s_{I_n \setminus \{i\}} \in S_{I_n \setminus \{i\}}} \mathcal{F}_i(s_i \otimes s_{I_n \setminus \{i\}}),$$

valoarea maxmin a jucătorului i,

a) Jocuri fără compensații.

Definim $U = \{u \in R^n \mid$ există $s \in S$ astfel ca $u_i = \mathcal{F}_i(s)$, $i \in I_n\}$.

$$u_i^o = v_i,\ i \in I_n$$

Putem verifica că modelul construit satisface exigențele definiției din secțiunea 4.1.

Propoziția IV.4.2. $U = [\{(F_1(x) \ldots F_n(x)) \mid x \in X\}]$

Demonstrație:

Notăm cu A membrul drept și dovedim egalitatea prin dublă incluziune.

Să presupunem, prin absurd, că există $u \in U, u \notin A$. Atunci mulțimile convexe, compacte, disjuncte u și A pot fi separate strict, printr-un hiperplan $a^T x = \alpha$. (Propoziția A.1.11.) Deci:

$$\text{(IV.4.1.)} \qquad a^T u < \alpha < \sum_{i \in I_n} a_i F_i(x), \text{ pentru orice } x \in X.$$

Dar, există $s \in S$, astfel ca $u_i = \int_X F_i(x) ds(x)$.

Integrînd inegalitatea (IV.4.1.) în raport cu s, se obține inegalitatea falsă $a^T u < a^T u$.

Reciproc fie $y \in A$. Există $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1} \in X$ și $\lambda_j \geq 0$, $j = 1, \ldots, n+1$, $\sum \lambda_j = 1$, astfel ca (propoziția A.1.7.),

$$y_i = \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j F_i(x^j), i \in I_n.$$

Definind $s \in S$, cu $s(x^j) = \lambda_j$ și $s(B) = 0$, dacă $B \in \mathcal{B}$, $B \not\ni x^j$, $j = 1, \ldots, n+1$, rezultă că $y_i = \int_X F_i(x) ds(x), i \in I_n$, deci $y \in U$.

Corolar. U este convexă și compactă.

Propoziția IV.4.3. $U_o \neq \emptyset$.

Demonstrație:

Fie $\bar{s}$ un punct de echilibru al jocului $\{S_i, \mathcal{F}_i, i \in I_n\}$

Punînd $\bar{u}_i = \mathcal{F}_i(\bar{s}), i \in I_n$, este ușor de verificat că $\bar{u} \in U_o$.

b) Jocuri cu compensații.

Definim $U = \{u \in R^n \mid u \geqslant u^o, \sum_{i \in I_n} u_i = \max_{s \in S} \sum_{i \in I_n} \mathcal{F}_i(s)$

$u_i^o = v_i, \ i \in I_n$.

Se observă că U este compactă, convexă, nevidă (poliedru convex). De fapt, $U = U_o = \mathcal{S}$

Observație. In ambele cazuri a) și b), u^o putea fi definit și astfel:

pentru fiecare $i \in I_n$, se alege o strategie maxmin a lui i,

$$\bar{s}_i \in S_i; \quad \min_{s_{I_n \setminus \{i\}} \in S_{I_n \setminus \{i\}}} \mathcal{F}_i(\bar{s}_i \otimes s_{I_n \setminus \{i\}}) = \max_{s_i \in S_i} \ \min_{s_{I_n \setminus \{i\}} \in S_{I_n \setminus \{i\}}} \mathcal{F}_i(s_i \otimes s_{I_n \setminus \{i\}}).$$

Se definește: $u_i^o = \mathcal{F}_i(\bar{s})$ cu $\bar{s} = \bigotimes_{i \in I_n} s_i, \ i \in I_n$

§ 5. Jocuri cooperative, în forma funcției caracteristice, cu compensații

5.1. Funcția caracteristică. Imputații.

Fie $\mathcal{P}(I_n)$ mulțimea părților lui I_n, pe care o vom numi mulțimea coalițiilor jocului. Notăm $\bar{C} = I_n \setminus C$

Definiție. $\nu : \mathcal{P}(I_n) \to R$ se numește funcție caracteristică, dacă:

(IV.5.1.) $\quad \nu(\emptyset) = 0$

(IV.5.2.) $\quad \nu(C \cup D) \geqslant \nu(C) + \nu(D)$, pentru orice $C, D \in \mathcal{P}(I_n)$,

$C \cap D = \emptyset$

<u>Definiţie</u>. Funcţia caracteristică ν se spune că este cu sumă constantă dacă,

(IV.5.3.) $\quad (\overline{C}) = a - \nu(C)\ , \quad C \in \mathcal{P}(I_n)$, unde $a = \nu(I_n)$.

In particular, dacă a=0, funcţia caracteristică are suma nulă.

<u>Definiţie.</u> Funcţia caracteristică ν se spune că este inesenţială, dacă (IV.5.2.) este verificată, totdeauna cu egalitate. Altfel ν este esenţială.

<u>Propoziţia IV.5.1</u>. ν este inesenţială dacă şi numai dacă:

$$\nu(I_n) = \sum_{i \in I_n} \nu(i),\ \text{(am notat } \nu(i) = \nu(\{i\})\text{)}.$$

Demonstraţie:

Necesitatea fiind evidentă, să demonstrăm suficienţa condiţiei. Fie $C \in \mathcal{P}(I_n)$, $C \neq \emptyset$. Din (IV.5.2.) rezultă:

$$\nu(I_m) \geqslant \nu(C) + \nu(\overline{C}) \geqslant \sum_{i \in C} \nu(i) + \sum_{i \in \overline{C}} \nu(i) = \sum_{i \in I_n} \nu(i).$$

Deoarece termenii extremi sînt egali, concludem că:

$\nu(C) = \sum_{i \in C} \nu(i)$, pentru orice coaliţie C şi deci ν este aditivă.

<u>Definiţie</u>. $u = (u_1, \ldots, u_n)$ se numeşte imputaţie determinată de ν dacă:

(IV.5.4.) $\quad u_i \geqslant \nu(i)\ ,\ i \in I_n$

(IV.5.5.) $\quad \sum_{i \in I_n} u_i = \nu(I_n)$

Notăm cu U mulţimea imputaţiilor determinate de ν.

<u>Propoziţia IV.5.2</u>. Dacă ν este inesenţială atunci $U = \{u^0\}$, unde $u_i^0 = \nu(i)$, $i \in I_n$. Dacă ν este esenţială, atunci U este un poliedru convex nedegenerat (conţine o infinitate de puncte)

iar $u^0 \notin U$.

Demonstrație:

$u \in U$ dacă și numai dacă z definit prin: $z_i = u_i - \nu(i)$ $i \in I_n$, satisface condițiile:

(IV.5.6.) $z \geq 0$

(IV.5.7.) $\sum_{i \in I_n} z_i = \nu(I_n) - \sum_{i \in I_n} \nu(i)$

Dacă ν este inesențială, atunci membrul drept din (IV.5.7.) este 0 și deci, singura soluție a sistemului (IV.5.6.), (IV.5.7.) este $z = 0$.

Dacă ν este esențială atunci $\nu(I_n) - \sum_{i \in I_n} \nu(i) = \delta > 0$.

Deci (IV.5.6.),(IV.5.7.) definește un poliedru convex nedegenerat (este ușor de remarcat că conține cel puțin două elemente distincte) și neconținînd originea.

Definiție. Numim joc cooperativ, cu compensații, în forma funcției caracteristice, ansamblul:

$$\Gamma = \{I_n, \nu, U\}$$

In cele ce urmează jocul va fi numit esențial sau inesențial după cum funcția sa caracteristică are o asemenea proprietate, iar U va fi numită mulțimea imputațiilor jocului.

Definiție. Spunem că u domină relativ la C pe u', $u, u' \in U$, $C \neq \emptyset$ ($u \succ_C u'$) dacă:

(IV.5.8.) $\sum_{i \in C} u_i \leq \nu(C)$

(IV.5.9.) $u_i > u_i'$, $i \in C$

(condiția (IV.5.8.) o vom numi efectivitatea lui C față de u).

Propoziția IV.5.3. Dacă $1 < |C| < n$, „$\succ_C$" este o relație de ordine parțială pe U.

Se verifică imediat că, dacă $C=\{i\}$, sau , $C=I_n$, atunci (IV.5.8.) (IV.5.9.) pe de o parte şi (IV.5.4.), (IV.5.5.), pe de altă parte sînt contradictorii.

Altfel, dacă $\succ_C$ este bine definită, se observă că este tranzitivă.

Definiţie. Spunem că u domină pe u', $u,u' \in U$, $(u \succ u')$, dacă există C, astfel ca $u \succ_C u'$.

Observaţie. Relaţia $\succ$ nu este o relaţie de ordine, nefiind tranzitivă. Mai mult se poate ca $u \succ u'$ (relativ la o coaliţie) şi $u' \succ u$ (relativ la o altă coaliţie).

Introducem notaţiile:

$$\mathrm{dom.}_C u = \{u' \in U \mid u \succ_C u'\}$$
$$\mathrm{dom.}u = \{u' \in U \mid u \succ u'\}$$
$$\mathrm{dom.}_C G = \{u' \in U \mid \text{există } u \in G, u \succ_C u'\}$$
$$\mathrm{dom.}G = \{u' \in U \mid \text{există } u \in G,\ u \succ u'\} \quad , u \in U, G \subseteq U.$$

Propoziţia IV.5.4. Oricare ar fi $u \in U$, $\mathrm{dom.}u \neq U \setminus \{u\}$ (nu există o "cea mai bună imputaţie").

Demonstraţie:

In cazul jocurilor inesenţiale, relaţia de dominare nefiind definită, fie Γ un joc esenţial.

Fie $u \in U$. Propoziţia IV.5.2. , implică existenţa unui $i \in I_n$, astfel ca $\varepsilon = u_i - \nu(i) > 0$.

Definim u' astfel:

$$u_i' = \begin{cases} u_j + \dfrac{\varepsilon}{n-1} & \text{, dacă } j \neq i \\ \nu(i), \text{ dacă } j = i \end{cases}$$

Se verifică imediat apartenenţa lui u' la U. Deoarece, singura componentă a lui u mai mare decît cea a lui u' este u_i rezultă că $u \not\succ u'$.

<u>Definiţie</u>. Jocurile $\Gamma = \{ I_n, \nu, U \}$ şi $\Gamma' = \{ I_n, \nu', U' \}$ sînt izomorfe, dacă există o bijecţie h a lui U pe U', astfel ca:

$u \underset{C}{\succ} \bar{u}$ dacă şi numai dacă $h(u) \underset{C}{\succ} h(\bar{u})$, $C \in \mathcal{P}(I_n)$.

<u>Definiţie</u>. Jocurile $\Gamma = \{ I_n, \nu, U \}$ şi $\Gamma' = \{ I_n, \nu', U' \}$ sînt echivalente strategic, dacă există constantele $k > 0$, $a_i \in R$, $i \in I_n$, astfel ca pentru fiecare $C \in \mathcal{P}(I_n)$;

$$\nu'(C) = k\, \nu(C) + \sum_{i \in C} a_i . \qquad \text{(IV.5.10.)}$$

(folosim notaţia $\Gamma \underset{s}{\sim} \Gamma'$).

<u>Propoziţia IV.5.5</u>. Dacă $\Gamma \underset{s}{\sim} \Gamma'$, atunci $h: R^n \to R^n$, $h(u) = u', u'_i = ku_i + a_i$, $i \in I_n$, defineşte un izomorfism al jocurilor Γ, Γ' .

Demonstraţia este imediată.

<u>Propoziţia IV.5.6</u>. Relaţia $\underset{s}{\sim}$ este o relaţie de echivalenţă. Dacă $\Gamma \underset{s}{\sim} \Gamma'$, atunci Γ' este esenţial dacă şi numai dacă Γ este esenţial.

Demonstraţie:

$\Gamma \underset{s}{\sim} \Gamma$ (IV.5.10.) se verifică cu $k=1, a_i=0, i \in I_n$.

$\Gamma \underset{s}{\sim} \Gamma'$ implică $\Gamma' \underset{s}{\sim} \Gamma$. Intr-adevăr, cu constantele $\frac{1}{k} > 0$, $-a_i$, schimbînd rolurile lui ν şi ν' , (IV.5.10.) se verifică.

$\Gamma \underset{s}{\sim} \Gamma'$ şi $\Gamma' \underset{s}{\sim} \Gamma''$ implică $\Gamma \underset{s}{\sim} \Gamma''$. Din (IV.5.10.) şi:

$\nu''(C) = k'\ \nu'(C) + \sum_{i \in C} a'_i$, rezultă:

$$\nu''(C) = kk'\ \nu(C) + \sum_{i \in C} (k'a_i + a'_i).$$

ceea ce dovedeşte echivalenţa lui Γ şi Γ'' .

Să considerăm acum $\Gamma \underset{s}{\sim} \Gamma'$, Γ esenţial. Există deci $C, D \in \mathcal{P}(I_n)$, $C \cap D = \emptyset$, astfel ca $\nu(C \cup D) > \nu(C) + \nu(D)$. Atunci, este clar că (IV.5.10.) implică $\nu'(C \cup D) > \nu'(C) + \nu'(D)$.

__Definiție__. Jocul esențial $\Gamma = \{I_n, \nu, U\}$ este în forma redusă (-1,0) dacă $\nu(i) = -1$, $i \in I_n$ și $\nu(I_n) = 0$.

__Propoziția IV.5.7__. Fie $\Gamma = \{I_n, \nu, U\}$ un joc esențial. Există un unic joc Γ', în forma redusă (-1,0) eshivalent strategic cu Γ.

Demonstrație:

Definim $\nu' : \mathcal{P}(I_n) \longrightarrow R$,

$$\nu'(C) = n \frac{\nu(C) - \sum_{i\in C} \nu(i)}{\nu(I_n) - \sum_{i\in I_n} \nu(i)} - \text{card.}C, C \in \mathcal{P}(I_n).$$

Se verifică imediat că ν' satisface (IV.5.1.), (IV.5.2.) deci este funcție caracteristică și că este în forma redusă.

Cu identificările:

$$k = \frac{n}{\nu(I_n) - \sum_{i\in I_n} \nu(i)} > 0, \quad a_i = \frac{-n\ \nu(i)}{\nu(I_n) - \sum_{i\in I_n} \nu(i)} - 1, i \in I_n$$

se verifică (IV.5.10.), deci $\Gamma \underset{s}{\sim} \Gamma'$!

Să presupunem că ν'' este funcția caracteristică a unui joc în forma redusă, echivalent strategic cu Γ. Atunci, există $k' > 0$, $a'_i \in R, i \in I_n$, astfel ca:

$$\nu''(C) = k' \nu'(C) + \sum_{i \in C} a'_i, \quad C \subseteq I_n$$

Luînd $C = \{i\}$, rezultă, de aici, $-1 = -k + a_i, i \in I_n$

Luînd $C = I_n$, rezultă $\sum_{i \in I_n} a'_i = 0$. Sumînd egalitățile de mai sus și folosind-o pe ultima, rezultă $k'=1$ și apoi, $a'_i = 0$, $i \in I_n$, deci $\nu' = \nu''$.

5.2. O definiţie constructivă a modelului jocului în forma funcţiei caracteristice.

Fie $\Gamma = \{X_i, F_i, i \in I_n\}$ un joc în forma normală definit ca în secţiunea 4.3. Fie S_C mulţimea strategiilor de cooperare ale coaliţiei C.

Notăm $\mathcal{F}_C = \sum_{i \in C} \mathcal{F}_i$.

Definim $\nu : \mathcal{P}(I_n) \longrightarrow R$, $\nu(C) =$
$= \max_{s_C \in S_C} \min_{s_{\overline{C}} \in S_{\overline{C}}} \mathcal{F}_C(s_C \otimes s_{\overline{C}})$, $C \neq \emptyset$, $\nu(\emptyset) = 0$.

<u>Propoziţia IV.5.8.</u> ν are proprietăţile (IV.5.1.), (IV.5.2.).

Demonstraţie:

Fie C, D două coaliţii nevide, disjuncte.

$$\nu(C \cup D) = \max_{s_{C \cup D} \in S_{C \cup D}} \min_{s_{\overline{C \cup D}} \in S_{\overline{C \cup D}}} \mathcal{F}_{C \cup D}(s_{C \cup D} \otimes s_{\overline{C \cup D}}) \geqslant$$

$$\geqslant \min_{s_{\overline{C \cup D}} \in S_{\overline{C \cup D}}} \mathcal{F}_C(s_{C \cup D} \otimes s_{\overline{C \cup D}}) + \min_{s_{\overline{C \cup D}} \in S_{\overline{C \cup D}}} \mathcal{F}_D(s_{C \cup D} \otimes s_{\overline{C \cup D}})$$

pentru orice $s_{C \cup D} \in S_{C \cup D}$.

Fie $s_C \in S_C$ şi $s_D \in S_D$. Atunci:

$$\min_{s_{\overline{C \cup D}} \in S_{\overline{C \cup D}}} \mathcal{F}_C(s_C \otimes s_D \otimes s_{\overline{C \cup D}}) \geqslant \min_{s_{\overline{C}} \in S_{\overline{C}}} \mathcal{F}_C(s_C \otimes s_{\overline{C}})$$

şi:

$$\min_{s_{\overline{C \cup D}} \in S_{\overline{C \cup D}}} \mathcal{F}_D(s_C \otimes s_D \otimes s_{\overline{C \cup D}}) \geqslant \min_{s_{\overline{D}} \in S_{\overline{D}}} \mathcal{F}_D(s_D \otimes s_{\overline{D}})$$

Din cele trei inegalităţi deducem:

$$\nu(C \cup D) \geqslant \min_{s_{\overline{C}} \in S_{\overline{C}}} \mathcal{F}_C(s_C \otimes s_{\overline{C}}) + \min_{s_D \in S_{\overline{D}}} \mathcal{F}_D(s_D \otimes s_{\overline{D}})$$

Cum, s_C şi s_D sînt arbitrare, inegalitatea se păstrează dacă se ia maximul, succesiv, după s_C şi s_D, rezultînd (IV.5.2.).

<u>Propoziţia IV.5.9</u>. Dacă Γ este un joc cu sumă constantă a $(\sum_{i\in I_n} F_i = a)$, atunci ν satisface şi: (IV.5.3.).

Demonstraţie:

$$\nu(\overline{C}) = \max_{s_{\overline{C}}\in S_{\overline{C}}} \min_{s_C\in S_C} \mathcal{F}_{\overline{C}}(s_C \otimes s_{\overline{C}}) =$$

$$= \max_{s_{\overline{C}}\in S_{\overline{C}}} \min_{s_C\in S_C} (a-\mathcal{F}_C(s_C\otimes s_{\overline{C}})=a-\min_{s_{\overline{C}}\in S_{\overline{C}}} \max_{s_C\in S_C} \mathcal{F}_C(s_C\otimes s_{\overline{C}})$$

Să considerăm jocul de două persoane, cu sumă nulă $(S_C, S_{\overline{C}}, \mathcal{F}_C)$. S_C şi $S_{\overline{C}}$ fiind mulţimi convexe şi compacte iar $\mathcal{F}_C$ fiind liniară în variabilele s_C şi $s_{\overline{C}}$, separat, rezultă existenţa punctelor de echilibru (propoziţia IV.4.1.), ceea ce este echivalent cu egalitatea:

$$\min_{s_{\overline{C}}\in S_{\overline{C}}} \max_{s_C\in S_C} \mathcal{F}_C(s_C \otimes s_{\overline{C}}) = \max_{s_C\in S_C} \min_{s_{\overline{C}}\in S_{\overline{C}}} \mathcal{F}_C(s_C\otimes s_{\overline{C}})$$

Atunci, ţinînd seama de definiţia lui ν şi de egalitatea anterior obţinută, rezultă (IV.5.3.).

<u>Teorema IV.5.1</u>. Fie $\nu:\mathcal{P}(I_n) \longrightarrow R$, cu proprietăţile (IV.5.1.), (IV.5.2.). Atunci există un joc de n persoane în forma normală $\Gamma = \{X_i, F_i, i \in I_n\}$ astfel ca $\nu(C) = \max_{s_C\in S_C} \min_{s_{\overline{C}}\in S_{\overline{C}}} \mathcal{F}_C(s_C\otimes s_{\overline{C}})$, pentru orice $C \in \mathcal{P}(I_n)$.

Demonstraţie:

Pentru fiecare $i \in I_n$, fie $X_i = \{x_i : I_n \to \{0,1\} \mid x_i(i)=1.\}$

Pentru fiecare $x = (x_1,\dots,x_n) \in X = \prod_{i\in I_n} X_i$, definim:

$$A_i(x) = \{k \in I_n \mid x_i(k) = 1\} \quad \text{şi}$$

$$C_i(x)= \begin{cases} A_i(x), & \text{dacă pentru orice } k \in A_i(x), A_k(x)=A_i(x) \\ \{i\}, & \text{altfel} \end{cases}$$

Se verifică uşor că pentru $i \neq j$, sau $C_i(x) = C_j(x)$, sau $C_i(x) \cap C_j(x) = \emptyset$. Atunci din $\{C_i(x)\}_{i \in I_n}$ se poate extrage o partiţie $\mathscr{C}(x)$.

Definim $F_i : X \longrightarrow R$,

$$F_i(x) = \frac{v(C(x))}{|C(x)|} \text{ , dacă } i \in C(x) \in \mathscr{C}(x).$$

Fie jocul $\Gamma = \{X_i, F_i, i \in I_n\}$

Fie acum $C \in \mathscr{P}(I_n), C \neq \emptyset$.

Definim $x \in X$, cu $x_i(k) = \begin{cases} 1, \text{ dacă } k \in C \\ 0, \text{ dacă } k \in \overline{C} \end{cases}$ $, i \in C, x_i \in X_i$, arbitrar, dacă $i \in \overline{C}$. Evident, $C \in \mathscr{C}(x)$.

Atunci, $\sum_{i \in C} F_i(x) = v(C)$. Dar, $x_{\overline{C}}$ este arbitrar, deci

$$\min_{s_{\overline{C}} \in S_{\overline{C}}} \mathscr{F}_C(x_C \otimes s_{\overline{C}}) = v(C). \text{ De aici,}$$

$$\max_{s_C \in S_C} \max_{s_{\overline{C}} \in S_{\overline{C}}} \mathscr{F}_C(s_C \otimes s_{\overline{C}}) \geq v(C).$$

Definim $x \in X$, cu $x_j(i) = 0$ dacă $i \in C$, $j \in \overline{C}$.

Atunci, dacă $C(x) \in \mathscr{C}(x)$, rezultă că $C(x) \subseteq C$ sau $C(x) \subseteq \overline{C}$.

Putem scrie:

$$\sum_{i \in C} F_i(x) = \sum_{C(x) \subseteq C} \sum_{i \in C(x)} F_i(x) = \sum_{C(x) \subseteq C} v(C(x)) \leq v(C).$$

Cu atît mai mult,

$$\min_{s_{\overline{C}} \in S_{\overline{C}}} \mathscr{F}_C(x_C \otimes s_{\overline{C}}) \leq v(C).$$

Si cum x_C nu a fost particularizat,

$$\max_{s_C \in S_C} \min_{s_{\overline{C}} \in S_{\overline{C}}} \mathscr{F}_C(s_C \otimes s_{\overline{C}}) \leq v(C).$$

<u>Teorema IV.5.2</u>. Fie $\nu: \mathcal{P}(I_n) \longrightarrow R$, cu proprietăţile (IV.5.1.), (IV.5.2.), (IV.5.3.). Atunci există un joc în forma normală $\Gamma = \{X_i, F_i, i \in I_n\}$ de n persoane, cu sumă constantă, a, astfel ca $\nu(C) = \max\limits_{s_C \in S_C} \min\limits_{s_{\overline{C}} \in S_{\overline{C}}} \mathcal{F}_C(s_C \otimes s_{\overline{C}})$, pentru orice $C \in \mathcal{P}(I_n)$.

Demonstraţie:

Definim mulţimile strategiilor ca în teorema precedentă şi asociem fiecărui $x \in X$, aceeaşi desfacere $\mathcal{C}(x)$ a lui I_n.

Pentru fiecare $i \in I_n$, definim funcţia de utilitate:

$$F_i(x) = \frac{\nu(C(x))}{|C(x)|} + \frac{1}{n}\Big(a - \sum_{C(x) \in \mathcal{C}(x)} \nu(C(x))\Big), \text{ dacă}$$

$i \in C(x) \in \mathcal{C}(x)$.

Se verifică imediat că $\sum\limits_{i \in I_n} F_i(x) = a$, pentru orice $x \in X$.

Fie C. Pentru fiecare $x \in X$ cu $x_i(k) = \begin{cases} 1, \text{ dacă } k \in C \\ 0, \text{ dacă } k \in \overline{C} \end{cases}$, $i \in C$

putem scrie

$$\sum_{i \in C} F_i(x) = \nu(C) + \frac{|C|}{n}\Big(a - \sum_{C(x) \in \mathcal{C}(x)} \nu(C(x))\Big) \geqslant$$

$$\geqslant \nu(C) + \frac{|C|}{n}(a - \nu(I_n))$$

şi, deoarece $\nu(I_n) = a$,

(IV.5.11.)

$$\nu(C) \leq \sum_{i \in C} F_i(x)$$

şi, de aici, deoarece $x_{\overline{C}}$ nu a fost specificat,

$$\text{(IV.5.12.)} \qquad \nu(C) \leq \max_{s_C \in S_C} \min_{s_{\overline{C}} \in S_{\overline{C}}} \mathcal{F}_C(s_C \otimes s_{\overline{C}})$$

Schimbînd în (IV.5.12.) rolurile lui C şi $\overline{C}$ se obţine:

$$\nu(\overline{C}) \leq \max_{s_{\overline{C}} \in S_{\overline{C}}} \min_{s_C \in S_C} \mathcal{F}_C(s_C \otimes s_{\overline{C}})$$

Deoarece, $\max\limits_{s_{\overline{C}} \in S_{\overline{C}}} \min\limits_{s_C \in S_C} \mathcal{F}_{\overline{C}}(s_C \otimes s_{\overline{C}}) = a -$

$$- \min\limits_{s_{\overline{C}} \in S_{\overline{C}}} \max\limits_{s_C \in S_C} \mathcal{F}_C(s_C \otimes s_{\overline{C}}) =$$

$$= a - \max\limits_{s_C \in S_C} \min\limits_{s_{\overline{C}} \in S_{\overline{C}}} \mathcal{F}_C(s_C \otimes s_{\overline{C}})$$

iar ν are proprietatea (IV.5.3.), rezultă:

$$\nu(C) \geq \max\limits_{s_C \in S_C} \min\limits_{s_{\overline{C}} \in S_{\overline{C}}} \mathcal{F}_C(s_C \otimes s_{\overline{C}})$$

care împreună cu (IV.5.12.) probează adevărul teoremei.

3.3. Soluţiile jocului.

<u>Definiţie</u>: $\mathcal{S} \subseteq U$, se numeşte soluţie (mulţime stabilă) a jocului cooperativ $\Gamma = \{I_n, \nu, U\}$, dacă dom.$\mathcal{S}$ = $U \setminus \mathcal{S}$.

<u>Propoziţia IV.5.10</u>. Orice soluţie a jocului Γ este o mulţime închisă şi mărginită (în topologia indusă pe U).

Demonstraţie:

Deoarece U este un poliedru convex, mărginirea lui $\mathcal{S}$ este evidentă.

Să notăm cu $\overline{\mathcal{S}}$ complementara lui $\mathcal{S}$ în raport cu U.

Evident, $\overline{\mathcal{S}} = \bigcup\limits_{u \in \mathcal{S}} \text{dom.} u$

Ori, $\text{dom.} u = \bigcup\limits_{C \in \mathcal{P}(I_n)} \text{dom.}_C u$ şi $\text{dom.}_C u$ este $\emptyset$, dacă C nu este efectivă faţă de u şi o mulţime deschisă altfel. Deci $\overline{\mathcal{S}}$ este descnisă.

Următoarele două afirmaţii, rezultă direct din definiţiile lui U şi $\mathcal{S}$.

<u>Propoziţia IV.5.11</u>. Orice joc de două persoane admite, ca unică soluţie pe U.

Cda.223/982 Fasc.12

<u>Propoziția IV.5.12</u>. Orice joc inesențial de n persoane, admite ca unică soluție, pe U.

<u>Propoziția IV.5.13</u>. Dacă h stabilește un izomorfism al jocurilor $\Gamma = \{I_n, \nu, U\}$ și $\Gamma' = \{I_n, \nu', U'\}$ atunci $\mathcal{S}$ este soluție a lui Γ dacă și numai dacă $\mathcal{S}' = h(\mathcal{S})$ este soluție a jocului Γ'.

Demonstrație:

Fie $\mathcal{S}$ soluție a jocului Γ. Vom demonstra egalitatea dom. $\mathcal{S}' = U' \setminus \mathcal{S}'$ prin dublă incluziune.

dom. $\mathcal{S}' \subseteq U' \setminus \mathcal{S}'$. Prin absurd, există $\bar{u}', u' \in \mathcal{S}'$ astfel ca $\bar{u}' \succ u'$.

Ar rezulta atunci că $h^{-1}(\bar{u}') \succ h^{-1}(u')$, în contradicție cu proprietățile soluției $\mathcal{S}$.

dom. $\mathcal{S}' \supseteq U' \setminus \mathcal{S}'$. Intr-adevăr, fie $u' \in U' \setminus \mathcal{S}'$. Deoarece $h^{-1}(u') \in U \setminus \mathcal{S}$, există $\bar{u} \in \mathcal{S}$ astfel ca $\bar{u} \succ h^{-1}(u')$. Dar atunci $\bar{u}' = h(\bar{u}) \succ u', \bar{u}' \in \mathcal{S}'$.

Cealaltă implicație a propoziției se stabilește într-o manieră analoagă, datorită bijectivității lui h.

<u>Teorema IV.5.3.</u> Orice joc de trei persoane admite cel puțin o soluție nevidă. In particular, soluțiile unui joc esențial, de trei persoane, cu sumă nulă, sînt următoarele mulțimi nevide:

$$\mathcal{S}_0 = \Big\{ \Big(\nu(1), \frac{-\nu(1)+\nu(2)-\nu(3)}{2}, \frac{-\nu(1)-\nu(2)+\nu(3)}{2} \Big), \Big(\frac{\nu(1)-\nu(2)-\nu(3)}{2}, \nu(2), \frac{-\nu(1)-\nu(2)+\nu(3)}{2} \Big), \Big(\frac{\nu(1)-\nu(2)-\nu(3)}{2}, \frac{-\nu(1)+\nu(2)-\nu(3)}{2}, \nu(3) \Big) \Big\}$$

$$\mathcal{S}_{i\alpha} = \Big\{ u = (u_1, u_2, u_3) \mid u_i = \nu(i) \, \frac{1+\alpha}{3} \, (\nu(1) + \nu(2) + \nu(3)),$$

$$u_j \geq \nu(j), u_k \geq \nu(k), u_1+u_2+u_3 = 0 \Big\}, \quad -1 \leq \alpha < \frac{1}{2}, \text{ pentru fiecare}$$

permutare $\{i, j, k\}$ a mulțimii $\{1, 2, 3\}$

Demonstrație:

Pentru simplificarea demonstrației, vom argumenta doar cea de a doua parte a teoremei.

Fie Γ un joc esențial, cu sumă nulă, în forma redusă (-1,0).

Deci, $\nu(i)=-1, i=1,2,3$, $\nu(I_3)=0$, $\nu(\{1,2\})=\nu(\{1,3\})=\nu(\{2,3\})=1$.

$$U=\{u=(u_1,u_2,u_3) \mid u_i \geq -1, i=1,2,3,\ u_1+u_2+u_3=0\}$$

Punctăm demonstrația printr-o suită de observații:

(1) Toate cele trei coaliții a cîte doi jucători sînt efective pentru fiecare $u \in U$.

(2) Dacă $u \succ u'$, atunci $u_i \neq u_i'$, pentru $i=1,2,3$. De aici, $u \not\succ u'$ și $u' \not\succ u$ dacă și numai dacă, pentru un $i \in I_3, u_i=u_i'$.

Fie $\mathcal{S}$ o soluție.

(3) $|\mathcal{S}|>1$ (rezultă din propoziția IV.5.4.

Din (2) și (3) rezultă că pentru orice soluție $\mathcal{S}$ este valabilă una din următoarele două afirmații:

(a) $\mathcal{S}$ conține cel puțin trei imputații, care au, două cîte două, o componentă comună, nu aceeași pentru toate.

(b) $\mathcal{S}$ este formată numai din imputații coincizînd pe o anumită componentă.

Analizăm, în continuare, alternativa (a):

(4) $\mathcal{S} \supseteq \{u^1,u^2,u^3\}$, unde $u^1=(-(b+c),b,c), u^2=(a,-(a+c),c), u^3 = (a,b),-(a+b))$ cu $a,b,c \geq -1$, $a+b+c \neq 0$ (dacă $a+b+c=0$ cele trei ar coincide).

(5) $\mathcal{S} = \{u^1,u^2,u^3\}$. Intr-adevăr, dacă în $\mathcal{S}$ ar mai exista o imputație u diferită de cele trei, observația (2) ar implica:

$$u_1 = -(b+c), u_2=-(a+c), u_3=-(a+b)$$

şi, deoarece $u \in U, u_1+u_2+u_3=0$, deci $a+b+c=0$, contrar lui (4).

(6) $a+b+c > 0$ într-adevăr U fiind convexă, $u = \frac{1}{2}(u^2+u^3) \in U$. Dar $u \notin \mathcal{S}$ şi deci $u \in \text{dom.}\ \mathcal{S}$. De aici necesitatea ca $u^1 \succ u$. Or aceasta implică valabilitatea a cel puţin uneia din inegalităţile: $b > u_2, c > u_3$. Un calcul simplu, probează afirmaţia făcută.

(7) $a = b = c = \frac{1}{2}$. Vom demonstra aceste egalităţi prin reducere la absurd. Presupunem de exemplu că $c \neq \frac{1}{2}$.

Dacă $c < \frac{1}{2}$, ar rezulta dom. $\{u^1,u^2,u^3\} \not\supseteq \{(-1,1-c,c), (1-c,-1,c)\}$, pentru că în caz contrar, ar trebui ca $b > 1-c > \frac{1}{2}$, $a > 1-c > \frac{1}{2}$ şi deci $u_3^3 < -1$!

Dacă $c > \frac{1}{2}$, se observă că $(a,1-a,-1) \in U \setminus \{u^1,u^2,u^3\}$ dar nu aparţine la dom. $\{u^1,u^2,u^3\}$. Pentru că afirmaţia contrară ar conduce la $u^1 \succ (a,1-a,-1)$ deci $b > 1-a$ sau $-(b+c) > a$. In primul caz, $a+b > 1$ deci $u_3^3 < -1$, iar în cel de al doilea $a+b+c < 0$, ambele alternative fiind absurde.

(8) $\mathcal{S} = \{(-1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}), (\frac{1}{2},-1,\frac{1}{2}), (\frac{1}{2},\frac{1}{2},-1)\}$ este o soluţie.

Rămîne să arătăm că orice imputaţie u, diferită de cele trei este dominată de una dintre acestea. Din definiţia lui U, rezultă că $u = 0$ sau cel puţin una din din componentele lui u este negativă. In prima alternativă u este dominat de oricare din cele trei elemente ale lui $\mathcal{S}$. In cel de al doilea caz, să admitem că $u_1 < 0$. Atunci $u_2+u_3 < 1$ şi deci una din cele două componente u_1,u_2 este mai mică ca $\frac{1}{2}$. Dacă de exemplu $u_2 < \frac{1}{2}$ atunci $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2},-1) \succ u$.

Să analizăm acum, alternativa (b):

Presupunem că $u_1 = \alpha$, pentru orice $u \in \mathcal{S}$.

(9) $\mathcal{S} = \{u \in U \mid u_1 = \alpha\}$. (Rezultă din (2))

(10) $-1 \leq \alpha < \frac{1}{2}$. Intr-adevăr dacă $\alpha \geq \frac{1}{2}$, deoarece $(-1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}) \notin \mathcal{S}$ ar trebui să existe $u \in \mathcal{S}$, $u \succ (-1,\frac{1}{2},\frac{1}{2})$. Or aceasta ar implica $u_2 > \frac{1}{2}$

şi $u_3 > \frac{1}{2}$ deci $u_1 < -1$!

(11) $\mathcal{S}$ este soluţie. Este suficient să arătăm că dom. $\mathcal{S} \supseteq U \setminus \mathcal{S}$.

Fie $u \in U \setminus \mathcal{S}$. Dacă $u_1 > \alpha$, notînd $\delta = u_1 - \alpha > 0$, observăm că $\bar{u} = (\alpha, u_2 + \frac{\delta}{2}, -u_2 - \frac{\delta}{2} - \alpha) \in \mathcal{S}$ şi $\bar{u} \succ u$.

Dacă $u_1 < \alpha$, atunci $u \in$ dom. $\{\bar{u}^1, \bar{u}^2\}$ unde $\bar{u}^1 = (\alpha, -1, 1-\alpha)$ şi $\bar{u}^2 = (\alpha, 1-\alpha, -1)$. Altfel ar fi adevărate inegalităţile:

$$u_2 \geqslant 1-\alpha, u_3 \geqslant 1-\alpha \text{ şi deci } u_1 \leqslant 2\alpha - 2 < -1 \text{ !}$$

Am determinat astfel toate soluţiile unui joc de trei persoane, cu sumă nulă, în forma redusă (-1,0). De aici concluziile teoremei rezultă datorită propoziţiilor IV.5.7. şi IV.5.13.

5.4. Nucleul jocului

Definiţie $\mathcal{N} \subseteq U$ este nucleul jocului $\Gamma = \{I_n, \nu, U\}$ dacă, $u \in \mathcal{N}$ este echivalent cu $\sum_{i \in C} u_i \geqslant \nu(C)$, oricare ar fi $C \in \mathcal{P}(I_n)$.

Propoziţia IV.5.14. $\mathcal{N}$ este mulţimea imputaţiilor nedominate.

Demonstraţie:

Fie $u \in \mathcal{N}$. Prin absurd, presupunem că există $C \in \mathcal{P}(I_n)$ şi $u' \in U$, astfel ca $u' \succ_C u$. Ar rezulta $\nu(C) \geqslant \sum_{i \in C} u'_i > \sum_{i \in C} u_i$, în contradicţie cu definiţia nucleului.

Reciproc, să arătăm că dacă u este o imputaţie nedominată, atunci aparţine lui $\mathcal{N}$. In caz contrar, ar exista $C \in \mathcal{P}(I_n)$ astfel ca $\sum_{i \in C} u_i < \nu(C)$.

Notăm cu $\varepsilon = \nu(C) - \sum_{i \in C} u_i > 0$ şi cu $v = \nu(I_n) - \nu(C) - \sum_{i \in \bar{C}} \nu(i)$.

Din IV.5.2. rezultă $v \geq 0$. Definim u' :

$$u_i' = \begin{cases} u_i + \frac{\varepsilon}{k}, & \text{dacă } i \in C \\ \nu(i) + \frac{v}{n-k}, & \text{dacă } i \in \overline{C} \end{cases} \qquad (k = |C|)$$

Se observă că $u' \in U$ și $u' \succ_C u$.

<u>Propoziția IV.5.15</u>. Pentru orice joc de două persoane $\mathcal{N} = U$.

<u>Propoziția IV.5.16</u>. Pentru orice joc inesențial de n persoane, $\mathcal{N} = U$.

<u>Propoziția IV.5.17</u>. Pentru orice joc esențial cu sumă constantă, $\mathcal{N} = \emptyset$.

Demonstrație:

Fie Γ un joc cu sumă constantă. Presupunem $\mathcal{N} \neq \emptyset$. Fie $u \in \mathcal{N}$ și $C \neq \emptyset$. Atunci:

$$\sum_{i \in C} u_i \geq \nu(C), \quad \sum_{i \in \overline{C}} u_i \geq \nu(\overline{C})$$

și, de aici, deoarece jocul este cu sumă constantă (4.5.3.);

$$\sum_{i \in I_n} u_i \geq \nu(C) + \nu(\overline{C}) = \nu(I_n).$$

Dar, termenii extremi ai acestei relații sînt egali. De aici $\sum_{i \in C} u_i = \nu(C)$ și cum C este arbitrară $u_i = \nu(i), i \in I_n$, sau $\sum_{i \in I_n} (i) = \nu(I_n)$, ceea ce atestă că Γ este inesențial.

<u>Definiție</u>. Familia de coaliții $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_k\} \subseteq \mathcal{P}(I_n)$ se spune că este balansată dacă există constantele nenegative $r_1, \dots, r_k$ astfel încît:

$$\sum_{C_j \ni i} r_j = 1, \text{ pentru fiecare } i \in I_n$$

$r = (r_j)_{j=1,\dots,k}$ se numeşte vector-pondere al familiei balansate $\mathcal{C}$.

Observaţie: Dacă $\mathcal{C}$ este o desfacere a lui I_n, este o familie balansată, vectorul pondere asociat fiind $r_j=1, j=1,\dots,k$.

In general, din definiţia anterioară nu rezultă unicitatea vectorului pondere asociat unei familii balansate.

Definiţie. Jocul $\Gamma = \{ I_n, \nu, U \}$ se numeşte balansat dacă pentru fiecare familie balansată de coaliţii $\mathcal{C}$ şi pentru fiecare vector-pondere r, al acesteia,

$$\sum_{j=1}^{k} r_j \, \nu(C_j) \leq \nu(I_n). \tag{IV.5.13.}$$

Teorema IV.5.4. Jocul $\Gamma = \{ I_n, \nu, U \}$ are nucleul nevid dacă şi numai dacă este balansat.

Demonstraţie:

Fie problemele de programare liniară, duale:

$$\text{(L)} \quad \min_{u\in\mathcal{U}} \left\{ f(u) = \sum_{i\in I_n} u_i \right\}, \quad \mathcal{U} = \left\{ u \,\middle|\, \sum_{i\in C} u_i \geq \nu(C), C\in\mathcal{P}(I_n) \right\}$$

$$\text{(D)} \quad \max_{r\in\mathcal{R}} \left\{ g(r) = \sum_{C\in\mathcal{P}(I_n)} r_C \, \nu(C) \right\}, \quad \mathcal{R} = \left\{ r=(r_C)_{C\in\mathcal{P}(I_n)} \,\middle|\, r \geq 0, \sum_{C\ni i} r_C = 1, i\in I_n \right\}$$

Se observă că următoarele trei afirmaţii sînt echivalente

- $\mathcal{N} \neq \emptyset$
- (L) are soluţii optime şi $\min\limits_{u\in\mathcal{U}} f(u) = \nu(I_n)$
- (D) are soluţii optime şi $\max\limits_{r\in\mathcal{R}} g(r) = \nu(I_n)$

Presupunem $\mathcal{N} \neq \emptyset$. Fie $\mathcal{C}$ o familie de coaliţii, balansată şi r un vector pondere asociat. Definim:

$$r'_C = \begin{cases} r_C & \text{dacă } C \in \mathcal{C} \\ 0, & \text{dacă } C \notin \mathcal{C} \end{cases}, \quad C \in \mathcal{P}(I_n)$$

Evident $r' = (r_C)_{C \in \mathcal{P}(I_n)}$ este soluţie posibilă a problemei (D) şi deci $\sum\limits_{C\in\mathcal{C}} r'_C\, \nu(C) = \sum\limits_{C \in \mathcal{P}(I_n)} r_C\, \nu(C) \leq \max\limits_{r\in\mathcal{R}} g(r) = \nu(I_n)$.

Deci, jocul Γ este balansat.

Reciproc, să presupunem că Γ este balansat. Fie $r \in \mathcal{R}$.

Fie $\mathcal{C} = \{C \in \mathcal{P}(I_n) \mid r_C \neq 0\}$. Atunci $\mathcal{C}$ este balansată şi $(r_C)_{C\in\mathcal{C}}$ este un vector-pondere al său. Atunci:

$$\sum_{C \in \mathcal{P}(I_n)} r_C\, \nu(C) = \sum_{C\in\mathcal{C}} r_C\, \nu(C) \leq \nu(I_n),$$

Deoarece $r \in \mathcal{R}$, este arbitrar, concludem că $\max\limits_{r\in\mathcal{R}} g(r) \leq \nu(I_n)$.

Pe de altă parte, $r_C = 0$, pentru $C \neq I_n$ şi $r_{I_n} = 1$, defineşte o soluţie posibilă a lui (D) pentru care $g(r) = \nu(I_n)$. Deci

$$\max_{r\in\mathcal{R}} g(r) = \nu(I_n) \text{ şi } \mathcal{N} \neq \emptyset .$$

Propoziţia IV.5.18. Pentru orice soluţie $\mathcal{S}$ nevidă a lui Γ, $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{S}$.

§ 6. Jocuri cooperative, în forma funcţiei caracteristice, fără compensaţii

6.1. Funcţia caracteristică. Raţionalitate

Definiţie: $\nu: \mathcal{P}(I_n) \to \mathcal{P}(R^n)$ se numeşte funcţie caracteristică dacă:

(IV.6.1.) $\nu(C)$ este convexă şi închisă în R^n, oricare $C \in \mathcal{P}(I_n)$

(IV.6.2.) $\nu(\emptyset) = R^n$

(IV.6.3.) $u \in \nu(C)$ şi $u' \in R^n$ cu $u'_i \leq u_i$, $i \in C$ implică $u' \in \nu(C)$

(IV.6.4.) $\nu(C \cup D) \supseteq \nu(C) \cap \nu(D)$, oricare ar fi $C, D \in \mathcal{P}(I_n)$, $C \cap D = \emptyset$.

<u>Definiţie</u>. Un joc cooperativ, de n persoane, în forma funcţiei caracteristice este definit de ansamblul:

$$\Gamma = \{ I_n, \nu, H \}$$

unde I_n este mulţimea jucătorilor, ν este o funcţie caracteristică, iar H este o mulţime convexă şi compactă, conţinută în $\nu(I_n)$ astfel ca:

(IV.6.5.) $u \in \nu(I_n)$ dacă şi numai dacă există $u' \in H, u \leqslant u'$.

Pentru fiecare $i \in I_n$, să notăm:

$$v_i = \max_{u \in \nu(i)} u_i$$

<u>Definiţie</u>. $u \in H$ are proprietatea de raţionalitate individuală (r.i) dacă $u_i \geqslant v_i$ pentru toţi $i \in I_n$.

Notăm cu $U_i = \{u \in H \mid u$ are proprietatea r.i.$\}$

<u>Definiţie</u>. $u \in H$ are proprietatea de raţionalitate colectivă (r.c.) dacă nu există $u' \in H$ astfel ca $u' > u$.

Notăm cu $U_c = \{u \in H \mid u$ are proprietatea r.c.$\}$

Punem $U_{ic} = U_i \cap U_c$.

<u>Definiţie</u>. Spunem că u domină pe u', relativ la coaliţia C ($u \succ_C u'$) $u, u' \in R^n$, $C \neq \emptyset$ dacă:

a) $u \in \nu(C)$

b) $u_i > u_i'$, $i \in C$

<u>Propoziţia IV.6.1</u>. Dacă $C \neq \emptyset$, "$\succ_C$" este o relaţie de ordine (parţială) pe R^n .

<u>Definiţie</u>. Spunem că u domină pe u' ($u \succ u'$), dacă există $C \in \mathcal{P}(I_n)$, $C \neq \emptyset$, astfel ca $u \succ_C u'$.

<u>Observaţie</u>: "$\succ$" nu este o relaţie de ordine nefiind tranzitivă şi nici antisimetrică.

Folosim notaţiile:

$\mathrm{dom.}u = \{u' \in R^n \mid u \succ u'\}$ $\qquad \mathrm{dom.}_C u = \{u' \in R^n \mid u \succ_C u'\}$

$\mathrm{dom.}G = \{u' \in R^n \mid \text{există } u \in G, u \succ u'\}$

$\mathrm{dom.}_C G = \{u' \in R^n \mid \text{există } u \in G, u \succ_C u'\}$, $G \subset R^n \}$

6.2. O definiţie constructivă a modelului jocului cooperativ fără compensaţii

Fie $\Gamma = \{X_i, F_i, i \in I_n\}$ un joc de n persoane, în forma normală, cu proprietăţile enunţate în secţiunea 4.3.

Definim $\nu : \mathcal{P}(I_n) \longrightarrow \mathcal{P}(R^n)$

$\nu(\emptyset) = R^n$

$\nu(C) = \{u \in R^n \mid \text{există } s_C \in S_C, \mathcal{F}_i(s_C \otimes s_{\overline{C}}) \geqslant u_i,$
$i \in C,\ s_{\overline{C}} \in S_{\overline{C}}\}$

şi,

$$H = \{u \in R^n \mid \text{există } s \in S, u_i = \mathcal{F}_i(s), i \in I_n\}$$

<u>Teorema IV.6.1.</u> $\Gamma = \{I_n, \nu, H\}$ este un joc în forma funcţiei caracteristice.

Demonstraţie:

Fie $C \neq \emptyset$ şi $u^t \in \nu(C), t=1,2,\ldots$, un şir convergent şi $u = \lim.\, u^t$. Există $s_C(t) \in S_C$, astfel ca:

(IV.6.6.) $\mathcal{F}_i(s_C(t) \otimes s_{\overline{C}}) \geqslant u_i$, pentru toţi $i \in C, s_{\overline{C}} \in S_{\overline{C}}$,

$t=1,2,\ldots$

Deoarece S_C este compactă şirul $\{s_C(t)\}$ conţine un subşir convergent $\{s_C(t_r)\}$. Fie $s_C = \lim.\, s_C(t_r) \in S_C$.

Atunci, punînd t_r în loc de t în (IV.6.6.) şi trecînd la limită, continuitatea lui $\mathcal{F}_i$, implică:

$$\mathcal{F}_i(s_C \otimes s_{\overline{C}}) \geqslant u_i, i \in C, s_{\overline{C}} \in S_{\overline{C}} \ .$$

Deci $\nu(C)$ este închisă. Convexitatea lui $\nu(C)$ rezultă imediat, datorită liniarității lui $\mathcal{F}_i$ pe S_C .

Proprietățile (IV.6.2.), (IV.6.3.) fiind evidente să verificăm (IV.6.4.). Fie deci, $C,D \in \mathcal{P}(I_n), C,D \neq \emptyset$, $C \cap D = \emptyset$ și $u \in \nu(C) \cap \nu(D)$.

Există, deci $s_C \in S_C$ și $s_D \in S_D$ astfel ca:

$$\mathcal{F}_i(s_C \otimes s_{\overline{C}}) \geq u_i \text{ pentru toți } s_{\overline{C}} \in S_{\overline{C}}, i \in C$$

$$\mathcal{F}_i(s_D \otimes s_{\overline{D}}) \geq u_i \text{ pentru toți } s_{\overline{D}} \in S_{\overline{D}}, i \in D$$

In particular, dacă $s_{\overline{C \cup D}} \in S_{\overline{C \cup D}}$, deoarece $s_D \otimes s_{\overline{C \cup D}} \in S_{\overline{C}}$ și $s_D \otimes s_{\overline{C \cup D}} \in S_{\overline{D}}$, cele două inegalități dau:

$$\mathcal{F}_i(s_C \otimes s_D \otimes s_{\overline{C \cup D}}) \geq u_i, i \in C \cup D$$

și, deoarece $s_{\overline{C \cup D}}$ este arbitrară în $S_{\overline{C \cup D}}$, iar $s_C \otimes s_D \in S_{C \cup D}$, concludem că $u \in \nu(C \cup D)$.

In sfîrșit, remarcînd că H este convexă, compactă (propoziția IV.4.2.) inclusă în $\nu(I_n)$, să verificăm (IV.6.5.).

Fie $u \in \nu(I_n)$. Există deci $s \in S$, astfel ca $\mathcal{F}_i(s) = u_i, i \in I_n$. Dar u' cu $u'_i = \mathcal{F}_i(s)$ aparține lui H și astfel o implicație a fost dovedită. Reciproc, dacă există $u' \in H$ astfel ca $u \leq u'$, aceasta înseamnă că există $s \in S$, astfel ca $u'_i = \mathcal{F}_i(s) \geq u_i, i \in I_n$ și deci $u \in \nu(I_n)$.

6.3. Soluții. Nucleu.

Fie K o parte a lui R^n și $G \subseteq K$.

<u>Definiție</u>. G este K-stabilă dacă $G = K \setminus \text{dom}.G$.

<u>Definiție</u>. Se numește soluție a jocului cooperativ, fără compensații $\Gamma = \{I_n, \nu, H\}$ o mulțime $\mathcal{G}$,U_{ic} - stabilă.

Propoziţia IV.6.2. $\mathcal{S}$ este soluţie dacă şi numai dacă este U_i - stabilă.

Pentru demonstraţie vom utiliza lema:

Lema IV.6.1. Dacă $u \in U_i \setminus U_{ic}$, atunci există $\overline{u} \in U_{ic}$ astfel ca $\overline{u} \succ u$.

Demonstraţie:

Fie $u \in U_i \setminus U_{ic}$. Există deci $u' \in H$ astfel ca $u' > u$. Evident, $u' \in U_i$. Fie $f(y) = \min\limits_{i \in I_n} (y_i - u_i)$. Se observă că $f(u') > 0$.

Fiind continuă, f îşi atinge maximul pe compactul U_i. Există deci, $\overline{u} \in U_i$, cu $f(\overline{u}) = \max\limits_{y \in U_i} f(y) > 0$. Evident $\overline{u} \in U_{ic}$. Deoarece, altfel, ar exista $y \in U_i \subseteq H, y > \overline{u}$ şi deci $f(y) > f(\overline{u})$, contrar alegerii lui $\overline{u}$.

In concluzie, există $\overline{u} \in U_{ic}, \overline{u} > u$.

Demonstraţiei propoziţiei:

Fie $\mathcal{S}$ soluţie. Fie $u \in U_i \setminus U_{ic}$. Conform lemei, există $\overline{u} \in U_{ic}$, $\overline{u} > u$. Dacă $\overline{u} \in \mathcal{S}$, atunci $\overline{u} \succ_{I_n} u$ $(\overline{u} \in U_{ic} \subseteq H \subsetneq \mathcal{V}(I_n))$ şi deci $u \in$ dom.$\mathcal{S}$.

Dacă $\overline{u} \in$ dom.$\mathcal{S}$, atunci există $\overline{\overline{u}} \in \mathcal{S}$ şi $C \neq \emptyset$ astfel ca $\overline{\overline{u}} \succ_C \overline{u}$. Deci $\overline{\overline{u}} \succ_C u$, adică, din nou $u \in$ dom.$\mathcal{S}$.

Deci $\mathcal{S} = U_i$ - dom.$\mathcal{S}$.

Pentru cea de a doua implicaţie, fie $\mathcal{S} = U_i \setminus$ dom.$\mathcal{S}$.

Deci $\mathcal{S} \cap$ dom.$\mathcal{S} = \emptyset$ şi $\mathcal{S} \supseteq U_i \setminus$ dom.$\mathcal{S} \supseteq U_{ic} \setminus$ dom.$\mathcal{S}$

Cu alte cuvinte, $\mathcal{S} = U_{ic} \setminus$ dom.$\mathcal{S}$.

Propoziţia IV.6.3. Orice joc de două persoane are o unică soluţie nevidă U_{ic} .

Demonstraţie:

Din definiţia lui U_{ic} şi a relaţiei de dominare, rezultă că dom. $U_{ic} = \emptyset$.

<u>Definiţie</u> $\mathcal{N} = U_{ic} \setminus \mathrm{dom.}\, U_{ic}$ se numeşte nucleu al jocului. (Nucleul este mulţimea elementelor nedominate din U_{ic}) .

<u>Propoziţia IV.6.4</u>. Nucleul unui joc de două persoane este U_{ic}.

Demonstraţie:

Rezultă cu aceeaşi motivaţie ca în propoziţia 4.6.3.

<u>Definiţie</u>. Jocul Γ se spune că este balansat, dacă, oricare ar fi familia balansată de coaliţii $\mathcal{C}$,

$$\bigcap_{C \in \mathcal{C}} \nu(C) \subseteq \nu(I_n)$$

Fără demonstraţii, excesiv de ample, cităm următoarele două rezultate, de foarte mare însemnătate pentru teoria jocurilor cooperative fără compensaţii:

<u>Teorema IV.6.2</u>. Orice joc de trei persoane admite soluţii nevide.

<u>Teorema IV.6.3</u>. Orice joc balansat are nucleu nevid.

CAPITOLUL V

ELEMENTE DE TEORIA ASTEPTARII

Constituită inițial ca un capitol al teoriei probabilităților vizînd aplicații în tehnologie și economie, teoria așteptării se prezintă astăzi ca un complex ansamblu de metode analitice și tehnici numerice, avînd la bază cele mai importante rezultate ale teoriei proceselor stochastice. Obiectul său este studiul și interpretarea, în vederea unei organizări optime, a fenomenelor de așteptare, adică a acelor fenomene de natură tehnică sau socială, în care existența unui mecanism ce execută un serviciu de masă implică așteptarea sau aglomerația solicitatorilor.

Ca și în celelalte capitole ale cercetării operaționale, principalele orientări ale teoriei așteptării constă în identificarea și clasificarea modelelor fundamentale ale fenomenelor specifice, în analiza cu un aparat matematic adecvat a acestora, în scopul relevării principalelor caracteristici și proprietăți.

Mai recent, odată cu amplificarea rolului calculatoarelor în procesele de analiză și decizie, o direcție importantă de dezvoltare a teoriei așteptării o constituie tehnica simulării, prin care, ocolind abordarea completă a conexiunilor interne dintre diferitele componente ale modelului , se pot determina unele caracteristici numerice necesare pentru fundamentarea deciziilor ce vizează organizarea optimă a procesului studiat.

Prezentul capitol este consacrat, exclusiv, studiului analitic al unor modele tipice ale teoriei așteptării.

§ 1. Elemente tipice ale modelelor teoriei așteptării. Caracteristicile modelelor

1.1. Modelul.

Modelul matematic al unui fenomen de așteptare poate fi considerat drept imaginea abstractizată a unui sistem material alcătuit din următoarele componente principale:

1°. fluxul de intrare

2°. camera de așteptare

3°. sistemul de serviciu

Fluxul de intrare este termenul consacrat pentru ansamblul de indicatori care descriu evoluția în timp a cererii serviciului de către masa solicitatorilor.

Vom aborda numai cazul în care mulțimea solicitatorilor este discretă, constituită din "unități", și serviciul este reclamat, individual, de fiecare unitate.

Vom presupune că modelul studiat are în vedere comportarea sistemului pe o perioadă de timp care debutează la un moment t_0, convențional identificat cu 0.

Fie u_t numărul de unități sosite (care solicită serviciul) în intervalul $[0,t)$. Procesul stochastic $\{u_t\}_{t\in[0,\infty)}$ va fi, în acest context, entitatea matematică care descrie, în cadrul modelului, fluxul de intrare. In ipotezele asumate aici, legea probabilistă a procesului $\{u_t\}_{t\in[0,\infty)}$ poate fi definită implicit prin legea care guvernează lungimile intervalelor de timp scurse între sosirile unităților consecutive. Deoarece, nu este obligatoriu ca momentul $t = 0$ să coincidă cu momentul sosirii unei unități, lungimea intervalului de timp între $t = 0$ și momentul primei sosiri observate va fi numită "timp rezidual al sosirilor". Repartiția acesteia este, de asemeni, un element determinant pentru legea fluxului de intrare.

Camera de aşteptare, în înţelesul pur fizic, este spaţiul în care unităţile sosite aşteaptă momentul începerii serviciului, dacă acesta nu coincide cu momentul sosirii lor. In acest spaţiu, care poate avea o capacitate limitată sau nelimitată, se presupune că unităţile se dispun în "şiruri de aşteptare".In modelele analizate vom admite un singur şir de aşteptare. De asemeni vom presupune că unităţile sînt "disciplinate", adică aşteaptă pînă cînd sistemul de serviciu devine disponibil pentru a le satisface serviciul solicitat. Vom presupune de asemeni că instantaneu, în momentul creării unei disponibilităţi în sistemul de serviciu, o unitate din camera de aşteptare (dacă există) intră în serviciu.

Sistemul de serviciu este ansamblul fizic care asigură serviciul solicitat de unităţi. El este alcătuit din "staţii" care execută integral sau parţial serviciul unităţilor.

In modelele analizate vom presupune că din punctul de vedere al serviciului unităţile sînt "omogene", adică solicită, toate, acelaşi tip de serviciu şi că sistemul de serviciu constă în una sau mai multe staţii identice dispuse în paralel, fiecare satisfăcînd integral serviciul unei unităţi şi neputînd primi, simultan, mai multe unităţi.

Notînd cu v_t numărul de unităţi care sînt primite în sistemul de serviciu şi îşi satisfac integral serviciul în intervalul $[0,t)$, procesul stochastic $\{v_t\}_{t\in[0,\infty)}$ - numit fluxul serviciului - constituie principalul element descriptiv al sistemului de serviciu prezent în modelul matematic.

In ipotezele de omogenitate admise în acest capitol, pentru caracterizarea fluxului serviciului sînt determinate repartiţia variabilei aleatoare reprezentînd durata serviciului unei unităţi şi repartiţia timpului rezidual de serviciu, adică a intervalului de timp dintre momentul $t = 0$ şi momentul încheierii serviciului unităţii aflate în curs de servire la momentul 0.

Vom utiliza aici şi noţiunea de "flux potenţial al serviciului staţiei k", $\{\bar{v}_t^k\}$ $t \in [0,\infty)$, cu semnificaţia; $\bar{v}_t^k$ = numărul unităţilor care pot fi servite de staţia k în intervalul $[0,t)$, dacă aceasta funcţionează neîntrerupt.

In modelul unui fenomen de aşteptare, alături de $\{v_t\}$, sistemul de serviciu este definit şi de "disciplina serviciului".

Disciplina serviciului precizează ordinea în care sînt satisfăcute cererile unităţilor. Vom lua în considerare următoarele tipuri de discipline:

- disciplina "primul sosit, primul servit" (FIFO), în care unităţile intră în serviciu în ordinea sosirilor.
- disciplina "ultimul sosit, primul servit"(LIFO), în oare la prima disponibilitate a sistemului de serviciu este admisă ultima unitate sosită.

In concluzie modelul unui fenomen de aşteptare va fi reprezentat în acest capitol, de un ansamblu;

(rep.i/rep.s/s/c/d)

unde:

- rep.i denotă elementele definitorii ale repartiţiei fluxului de intrare.
- rep.s denotă elementele definitorii ale repartiţiei fluxului de serviciu.
- s este numărul staţiilor (identice) care funcţionează în paralel, în cadrul sistemului de serviciu
- c este indicativul care precizează capacitatea camerei de aşteptare
- d este indicativul disciplinei serviciului.

1.2. Caracteristicile modelului

In cele ce urmează prin "sistem de aşteptare" vom înţelege ansamblul format din şirul de aşteptare şi sistemul de serviciu.

Pentru fiecare $t \in [0,\infty)$, vom nota cu x_t numărul unităților aflate în sistemul de aşteptare la momentul t.

Definiţie. Procesul stochastic $\{x_t\}_{t\in[0,\infty)}$ se numeşte procesul stărilor sistemului de aşteptare.

In teoria aşteptării procesul stărilor sistemului constituie principalul element ce caracterizează comportarea modelului.

Definim, în continuare, o serie de alte caracteristici funcţionale ale modelului prin care se pot obţine informaţiile necesare pentru organizarea optimă a fenomenului de aşteptare.

Pentru fiecare $t\in[0,\infty)$ fie $\bar{x}_t = \max\{0, x_t - s\}$. Evident $\bar{x}_t$ poate fi interpretat ca numărul unităţilor din şirul de aşteptare (lungimea cozii) la momentul t.

Fie acum şirurile $\{\tau_k\}_{k=0,1,..}$ $\{\beta_k\}_{k=0,1...}$ definite recursiv astfel:

$$\tau_0 = \inf\{\tau \geqslant 0, x_\tau = 0\}\ , \quad \beta_0 = \tau_0$$

$$\beta_k = \inf\{\tau \geqslant \tau_{k-1}, x_\tau \neq 0\}\ , \quad \tau_k = \inf\{\tau > \beta_k, x_\tau = 0\}\ \ k \geqslant 1$$

Definiţie: $e_n = \beta_n - \tau_{n-1}$ se numeşte durata celei de a n-a perioade de neocupare a sistemului de serviciu.

Definiţie $b_n = \tau_n - \beta_n$, $n = 1,2,\ldots.$ se numeşte durata celei de a n-a perioade de ocupare a sistemului de serviciu. Dacă $\beta_0 \neq 0$, atunci $b_0 = \beta_0$ se numeşte perioada iniţială de ocupare a sistemului de serviciu.

O perioadă de neocupare a sistemului de serviciu, reprezintă intervalul de timp în care sistemul de serviciu este inactiv, datorită lipsei solicitatorilor.O perioadă de ocupare a sistemului de serviciu reprezintă un interval de timp în care, cel puţin o staţie satisface cererea unei unităţi.

Evident, perioadele de neocupare şi de ocupare alternează.

In ipotezele asumate în acest paragraf, $e_2, e_3, \ldots$, respectiv, $b_1, b_2, \ldots$ sînt familii de variabile aleatoare independente, identic repartizate. Dacă $x_0 = 0$, atunci sistemul de serviciu debutează cu o perioadă de neocupare e_1. Repartiţia acesteia nu este însă, neapărat identică cu a unei variabile $e_n, n \geq 2$. Dacă $x_0 \neq 0$, debutul se face printr-o perioadă de ocupare, repartiţia acesteia fiind, evident, dependentă cu starea iniţială x_0.

Definiţie $x(b_n) = u_{\tau_n} - u_{\beta_n}$, $n \geq 1$, este numărul unităţilor servite în cea de a n-a perioadă de ocupare. $x(b_0) = u_{\tau_0} + x_0$ este numărul unităţilor servite în perioada iniţială de ocupare.

Fie $h_t = \max \{0, s - x_t\}$, $t \geq 0$.

Definiţie h_t este numărul staţiilor neocupate la momentul t.

Definiţie. Se numeşte timp virtual de aşteptare, în şir, la momentul t, lungimea w_t a intervalului de timp pe care l-ar petrece în şirul de aşteptare, o ipotetică unitate ce ar sosi la momentul t.

In cazul modelelor cu s staţii şi disciplina FIFO se poate observa că:

$$w_t = \begin{cases} 0, \text{ dacă } x_t < s \\ \inf.\{\tau \mid v_{t+\tau} - v_t = x_t - s + 1\}, \text{ dacă } x_t \geq s. \end{cases}$$

Definiţie. Timpul de aşteptare în şir al celei de a n-a unităţi (în ordinea sosirii) este lungimea w_n a intervalului de timp măsurat între momentul sosirii în sistemul de aşteptare a celei de a n-a unităţi şi momentul în care aceasta intră în sistemul de serviciu.

Să notăm şi o altă interpretare a procesului $\{v_t\}$. In modelele în care unităţile servite părăsesc intantaneu sistemul de aşteptare, $\{v_t\}_{t \in [0,\infty)}$ poate fi interpretat şi ca "flux de ieşire"din sistemul de serviciu.

Se remarcă că procesele stochastice $\{\bar{x}_t\}_{t \in [0,\infty)}$ $\{w_t\}_{t \in [0,\infty)}$

$\{w_n\}_{n\geq 1}$ caracterizează gradul de organizare a modelului, din punctul de vedere al solicitatorilor, reflectînd bugetul de timp al acestora

Procesele $\{h_t\}_{t\in[0,\infty)}$, $\{e_n\}_{n\geq 1}$, $\{b_n\}_{n\geq 0}$, $\{v_t\}_{t\in[0,\infty)}$ pot fi considerate caracteristici ale sistemului de serviciu.

§2. Procese de naştere şi moarte.

2.1. Definiţia procesului.

Definiţie: Un lanţ Markov omogen (cu probabilităţi de trecere staţionare), $\{x_t\}_{t\in[0,\infty)}$, cu spaţiul stărilor $I=\{0,1,\dots\}$ se numeşte proces de naştere şi moarte, dacă:

$$(V.2.1.)\qquad q_{ij}=\begin{cases}\mu_i & \text{pentru } j=i-1,\ i\geq 1\\ \lambda_i & \text{pentru } j=i+1,\ i\in I\\ -\lambda_i-\mu_i & \text{pentru } j=i,\ i\in I\\ 0 & \text{astfel}\end{cases}$$

unde $\lambda_i,\ \mu_i\geq 0,\ i\in I,\ \mu_0=0.$

(s-au folosit notaţiile din anexa A.2.)

Teorema V.2.1. Pentru fiecare $t>0$, $i\in I$, probabilităţile de trecere $p_{ij}(t)$ satisfac sistemul:

$$(V.2.2.)\qquad \frac{d}{dt}p_{i0}(t)=-\lambda_0 p_{i0}(t)+\mu_1 p_{i1}(t)$$

$$(V.2.3.)\qquad \frac{d}{dt}p_{ij}(t)=\lambda_{j-1}p_{ij-1}(t)-(\lambda_j+\mu_j)p_{ij}(t)+$$

$$+\mu_{j+1}p_{ij+1}(t)\ ;\ j\geq 1.$$

cu condiţiile iniţiale $p_{ij}(0)=\delta_{ij}, i,j\in I.$

Demonstraţie:

Fie $\Delta t>0$. Relaţia Chapman-Kolmogorov (A.2.1) implică:

$$p_{ij}(t+\Delta t) = \sum_{k\in I} p_{ik}(t)\, p_{kj}(\Delta t) = p_{ij}(t)p_{jj}(\Delta t) +$$

$$+ \sum_{k\in I\setminus\{j\}} p_{ik}(t)p_{kj}(\Delta t)$$

şi de aici,

$$\frac{p_{ij}(t+\Delta t)-p_{ij}(t)}{\Delta t} = p_{ij}(t)\,\frac{p_{jj}(\Delta t)-1}{\Delta t} + \tag{V.2.4.}$$

$$\sum_{k\in I\setminus\{j\}} p_{ik}(t)\,\frac{p_{kj}(\Delta t)}{\Delta t}$$

Dacă $\Delta t \to 0$, deoarece limita membrului drept există,

$$\frac{d}{dt}\, p_{ij}(t) = \sum_{k\in I} p_{ik}(t)\, q_{kj}$$

şi, ţinînd seama de (V.2.1.), teorema este demonstrată.

2.2. Cazul echilibrului statistic. Repartiţia staţionară.

Peste tot în acest capitol, admiţînd ipoteza "echilibrului statistic" (ES), vom înţelege: "există $p_j = \lim\limits_{t\to\infty} p_{ij}(t)$, independentă de i, pentru fiecare $j\in I$" .

Evident,

$$p_j \geq 0,\ j\in I,\quad \sum_{j\in I} p_j = 1. \tag{V.2.5.}$$

Din relaţia Chapman-Kolmogorov, rezultă că, pentru fiecare $t > 0$,

$$p_j = \sum_{i\in I} p_i p_{ij}(t)\ ,\ j\in I \tag{V.2.6.}$$

Se observă că $p = (p_j)_{j \in I}$ este singura soluţie a sistemului (V.2.5.),(V.2.6.). Intr-adevăr, dacă $q = (q_j)_{j \in I}$ este o repartiţie satisfăcînd (V.2.6.), atunci:

$$q_j = \lim_{t \to \infty} \sum_{i \in I} q_i p_{ij}(t) = \sum_{i \in I} q_i p_j = p_j, \quad j \in I.$$

<u>Definiţie</u>. $p = (p_j)_{j \in I}$ se numeşte repartiţia staţionară a procesului $\{x_t\}$ $t \in [0, \infty)$

Fie $p(t) = (p_j(t))_{j \in I}$ repartiţia variabilei $x_t, t \in [0, \infty)$;

$$p_j(t) = p(x_t = j), \; j \in I.$$

<u>Propoziţia V.2.1</u>. $\lim_{t \to \infty} p_j(t) = p_j$, $j \in I$.

Demonstraţie:

Intr-adevăr, pentru fiecare $s, t > 0$, rezultă din

$$p_j(s+t) = \sum_{i \in I} p_i(s) p_{ij}(t) \; , \; j \in I \; .$$

Dar,

$$\lim_{t \to \infty} \sum_{i \in I} p_i(s) p_{ij}(t) = p_j \sum_{i \in I} p_i(s) = p_j \; , \text{ oricare}$$

ar fi s.

Deci:

$\lim_{t \to \infty} p_j(t)$ există şi este egală cu p_j .

<u>Teorema V.2.2</u>. In ipoteza (ES), repartiţia staţionară a procesului de naştere şi moarte $\{x_t\}$ $t \in [0, \infty)$ satisface sistemul:

(V.2.7.) $$-\lambda_0 p_0 + \mu_1 p_1 = 0$$

(V.2.8.) $$\lambda_{j-1} p_{j-1} - (\lambda_j + \mu_j) p_j + \mu_{j+1} p_{j+1} = 0, \; j \geq 1.$$

Demonstrație:

Rezultă trecînd la limită în (V.2.4.), succesiv, pentru $t \to \infty$ și apoi pentru $\Delta t \to 0$.

Corolar. In condițiile teoremei V.2.2., dacă $\mu_i > 0, i \geq 1$, atunci repartiția staționară este dată de:

$$p_j = \frac{\lambda_{j-1} \cdots \lambda_0}{\mu_j \cdots \mu_1} p_0, \quad p_0 = \frac{1}{1 + \sum\limits_{j \geq 1} \frac{\lambda_{j-1} \cdots \lambda_0}{\mu_j \cdots \mu_1}}$$

cu condiția ca $\sum\limits_{j \geq 1} \frac{\lambda_{j-1} \cdots \lambda_0}{\mu_j \cdots \mu_1} < +\infty$

Demonstrație:

Notăm $b_j = \mu_j p_j - \lambda_{j-1} p_{j-1}$

Atunci (V.2.8.) implică $b_{j+1} = b_j, j \geq 1$, deci:

$$b_j = b_1, j \geq 1,$$

Dar, din (V.2.7.), $b_1 = 0$ și de aici,

$$p_j = \frac{\lambda_{j-1}}{\mu_j} p_{j-1}, \quad j \geq 1$$

De aici rezultă expresia lui p, condiția de convergență fiind consecința lui (V.2.5.).

2.3. Procese Poisson

Definiție. Procesul de naștere și moarte $\{x_t\}$ $t \in [0, \infty)$ se numește proces Poisson de parametru λ, dacă,

$$\lambda_i = \lambda > 0, i \in I, \quad \mu_i = 0, i \in I .$$

Teorema V.2.3. Fie $\{x_t\}_{t \in [0,\infty)}$ un proces Poisson de parametru λ. Pentru fiecare $t \geqslant 0$, matricea de trecere P(t) este dată de:

$$p_{ij}(t) = \begin{cases} \dfrac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!} e^{-\lambda t}, & j=i,i+1,\dots \\ 0, & j=0,1,\dots,i-1 \end{cases}, i \in I$$

Demonstrație:

Sistemul (V.2.2.),(V.2.3.) devine în acest caz;

(V.2.9.) $\quad \frac{d}{dt} p_{io}(t) = -\lambda p_{io}(t)$

(V.2.10.) $\quad \frac{d}{dt} p_{ij}(t) = \lambda p_{ij-1}(t) - \lambda p_{ij}(t)$, $j \geqslant 1$.

Căutînd soluția de forma $p_{ij}(t) = c_j(t)e^{-\lambda t}$, rezultă:

(V.2.9'.) $\quad \frac{d}{dt} p_o(t) = 0$

(V.2.10'.) $\quad \frac{d}{dt} c_j(t) = \lambda c_{j-1}(t)$, $j \geqslant 1$

cu condițiile inițiale:

$$c_j(0) = \delta_{ij}, \ j \in I$$

Soluția ecuației (V.2.9'.) este $c_o(t) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } i=0 \\ 0, & \text{dacă } i>0 \end{cases}$

De asemenea din (V.2.10') rezultă:

$c_j(t) = 0$, pentru $j < i$ și $c_i(t) = 1$, dacă $i > 0$.

Verificăm prin inducție că:

$$c_j(t) = \frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!}, \ j \geqslant i$$

Intr-adevăr, din (V.2.10'.),

$$c_{j+1}(t) = \lambda\int c_{j-1}(t)dt = \frac{\lambda^{j-i+1}}{(j-i)!}\int t^{j-i}dt = \frac{(\lambda t)^{j-i+1}}{(j-i+1)!} + k$$

şi ţinînd seama de condiţiile iniţiale, $k = 0$.

Propoziţia V.2.2. $P(x_{s+t}-x_s = j|x_s = i) = \frac{(\lambda t)^j}{j!} e^{-\lambda t}$,

$i,j \in I, s, t > 0$.

Demonstraţie:

Datorită teoremei V.2.3. putem scrie:

$$P(x_{s+t} - x_s = j|x_s = i) = P(x_{s+t} = i+j|x_s = i) = \frac{(\lambda t)^j}{j!} e^{-\lambda t}$$

Corolar. Variabilele $x_{s+t} - x_s$ şi x_s sînt independente, $s,t > 0$.

Propoziţia V.2.3. $P(x_{s+t} - x_s = j) = \frac{(\lambda t)^j}{j!} e^{-\lambda t}$,

$j \in I;\ s,t > 0$.

Demonstraţie:

$$P(x_{s+t} - x_s = j) = \sum_{i\in I} P(x_s = i)P(x_{s+t} - x_s = j \mid x_s = i) =$$

$$= \frac{(\lambda t)^j}{j!} e^{-\lambda t}\sum_{i\in I} P(x_s = i) = \frac{(\lambda t)^j}{j!} e^{-\lambda t} .$$

Corolar. Repartiţia lui $x_{s+t} - x_s$ este independentă de s.

Propoziţia V.2.4. Pentru $t \geqslant 0$, $\Delta t > 0$,

$$P(x_{t+\Delta t} - x_t = 0) = 1 - \lambda \Delta t + 0_1(\Delta t)$$

$$P(x_{t+\Delta t} - x_t = 1) = \lambda \Delta t + 0_2(\Delta t)$$

$$P(x_{t+\Delta t} - x_t \geqslant 2) = 0_3(\Delta t)$$

unde $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{O_k(\Delta t)}{\Delta t} = 0$, $k = 1,2,3.$

Demonstrație:

Din propoziția V.2.3., pentru $s=t, t=\Delta t$,

$$P(x_{t+\Delta t} - x_t = 0) = e^{-\lambda \Delta t} = 1 - \lambda \Delta t + O_1(\Delta t),$$

unde $O_1(\Delta t) = e^{-\lambda\Delta t} - 1 + \lambda\Delta t$ şi evident, $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{O_1(\Delta t)}{\Delta t} = 0$

$$P(x_{t+\Delta t} - x_t = 1) = \lambda\Delta t e^{-\lambda\Delta t} = \lambda\Delta t + O_2(\Delta t)$$

unde $O_2(\Delta t) = -\lambda^2(\Delta t)^2 + \lambda\Delta t O_1(\Delta t)$

In sfîrşit, $P(x_{t+\Delta t} - x_t \geq 2) = 1 - P(x_{t+\Delta t} - x_t \leq 1) =$

$$= -O_1(\Delta t) - O_2(\Delta t)$$

şi notăm cu $O_3(\Delta t)$ membrul drept al ultimei egalități.

2.4. Definiția constructivă a procesului Poisson. Flux Poisson.

Definiție. O variabilă aleatoare z se spune că urmează repartiția $\Gamma(\lambda, n)$; $\lambda > 0, n > 0$, dacă funcția sa de repartiție este:

$$F_z(t) = P(z < t) = \begin{cases} 0, \text{ pentru } t \leq 0 \\ \dfrac{\lambda^n}{\Gamma(n)} \displaystyle\int_0^t x^{n-1} e^{-\lambda x}\, dx, \text{ pentru } t > 0. \end{cases}$$

In particular, pentru n=1, repartiția $\Gamma(\lambda, 1)$ se mai numeşte şi repartiția exponențială de parametru $\lambda > 0$.

Vom nota două proprietăți remarcabile ale acestei repartiții.

Propoziţia V.2.5. Fie z o variabilă aleatoare repartizată exponenţial cu parametrul $\lambda > 0$. Atunci pentru $s,t > 0$,

$$P(z < s+t \mid z \geqslant s) = P(z < t) = F_z(t)$$

Demonstraţie:

Egalitatea fiind trivială pentru $t \leqslant 0$, fie $t > 0$.

$$P(z < s+t \mid z \geqslant s) = \frac{P(s \leqslant z < s+t)}{P(z \geqslant s)} = \frac{-e^{-\lambda(t+s)} + e^{-\lambda s}}{e^{-\lambda s}} = 1-e^{-\lambda t}.$$

Propoziţia V.2.6. Dacă $z_1,\ldots,z_n$ sînt variabile aleatoare independente, identic repartizate, urmînd repartiţia exponenţială de parametru λ, atunci $y = \sum_{i=1}^{n} z_i$ urmează repartiţia $\Gamma(\lambda, n)$.

Demonstraţie:

Prin inducţie relativ la n, folosind proprietăţile convoluţiei repartiţiilor.

Teorema V.2.4. Fie $\{z_k\}_{k=1,2,..}$ un şir de variabile aleatoare independente, identic repartizate, urmînd repartiţia exponenţială de parametru $\lambda > 0$. Atunci familia de variabile aleatoare $\{x_t\}_{t \in [0,\infty)}$ definită prin:

$$x_t = \max.\left\{ j \mid \sum_{k=1}^{j} z_k < t \right\},\ t > 0;\ x_0 = 0$$

este un proces Poisson de parametru λ.

Demonstraţia teoremei va utiliza rezultatele stabilite prin lemele următoare.

Să notăm cu $z_{(j)} = \sum_{k=1}^{j} z_k$. De asemeni, prin $f_j, f_{(j)}$ vom nota densităţile de repartiţie ale variabilelor aleatoare $z_j, z_{(j)}$.

Lema V.2.1. $P(x_t = j) = e^{-\lambda t}\dfrac{(\lambda t)^j}{j!}$, $t \geqslant 0$, $j \in I$.

Demonstraţie:

Observăm că variabilele aleatoare $z_{(j)}$ şi z_{j+1} sînt independente. Atunci:

$$P(x_t = j) = P(z_{(j)} < t, z_{(j)} + z_{j+1} \geq t) =$$

$$= \int_{\{\tau_{(j)} < t \leq \tau_{(j)} + \tau_{j+1}\}} f_{(j)}(\tau_{(j)}) f_{j+1} d\tau_{(j)} d\tau_{j+1}$$

De aici şi din propoziţia V.2.6. rezultă:

$$P(x_t = j) = \frac{\lambda^{j+1}}{(j-1)!} \int_0^t \left(\tau_{(j)}^{j-1} e^{-\lambda \tau_{(j)}} \int_{t-\tau_{(j)}}^{\infty} e^{-\lambda \tau_{j+1}} \right) d\tau_{(j)} =$$

$$= \frac{\lambda^{j+1}}{(j-1)!} \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} \int_0^t \tau_{(j)}^{j-1} d\tau_{(j)} = \frac{(\lambda t)^j}{j!} e^{-\lambda t} .$$

<u>Lema V.2.2</u>. Pentru orice întreg pozitiv n, oricare ar fi $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ şi $j_1, \ldots, j_n \in I$

$$P\left(x_{t_r} = \sum_{k=1}^{r} j_k, r=1,\ldots,n\right) = \prod_{r=1}^{n} e^{-\lambda(t_r - t_{r-1})} \frac{[\lambda(t_r - t_{r-1})]^{j_r}}{j_r!}$$

Demonstraţie:

Prin inducţie relativ la n.

Pentru n=1, egalitatea este dovedită prin lema V.2.1.

Să o presupunem adevărată pentru $n \geq 1$.

Fie $A_{n+1} = \left\{ x_{t_r} = \sum_{k=1}^{r} j_k, r=1,\ldots,n+1 \right\}$. Să notăm $s_r = \sum_{k=1}^{r} j_k$.

Evident $A_{n+1} = \left\{ z_{(s_r)} < t_r \leq z_{(s_r+1)} ; r=1,\ldots,n+1 \right\}$

Definim variabilele aleatoare:

$y_1^1 = z_{(j_1)}$, $y_2^1 = z_{j_1+1}$

$y_1^r = z_{(s_r)} - z_{(s_{r-1}+1)}$, $y_2^r = z_{s_r+1}$, $r=2,\ldots,n+1$

$y_{(1)} = (y_1^1, y_2^1)$, $y_{(2)} = (y_1^2, y_2^2, \ldots, y_1^{n+1}, y_2^{n+1})$

$y = (y_{(1)}, y_{(2)})$

Evident, $y_{(1)}, y_{(2)}$ sînt variabile aleatoare independente, deci $Poy^{-1} = (Poy_{(1)}^{-1}) \otimes (Poy_{(2)}^{-1})$.

Cu notaţiile introduse se poate scrie:

$$A_{n+1} = \left\{ \sum_{k=1}^{r} y_1^k + \sum_{k=1}^{r-1} y_2^k < t_r \leq \sum_{k=1}^{r} y_1^k + \sum_{k=1}^{r} y_2^k \;,\; r=1,\ldots,n+1 \right\}$$

şi

$$y(A_{n+1}) = \left\{ \tau = (\tau_{(1)}, \tau_{(2)}) \,\middle|\, \sum_{k=1}^{r} \tau_1^k + \sum_{k=1}^{r-1} \tau_2^k < t_r \leq \sum_{k=1}^{r} \tau_1^k + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{r} \tau_2^k \;,\; r=1,\ldots,n+1 \right\}$$

(indicii variabilelor τ au aceeaşi semnificaţie ca şi cei ai variabilelor aleatoare y).

$$P(A_{n+1}) = (Poy^{-1})(y(A_{n+1})) = \int (Poy_{(2)}^{-1})(y(A_{n+1}))_{\eta_{(1)}} \quad d(Poy^{-1})(\eta_{(1)})$$

unde:

$$y(A_{n+1})\ \eta_{(1)} = \left\{ \tau_{(2)} \mid (\eta_{(1)}, \tau_{(2)}) \in y(A_{n+1}) \right\}$$

Se remarcă atunci că:

$$y_{(2)}^{-1}(y(A_{n+1}))\ \eta_{(1)} = \begin{cases} \left\{ \sum_{k=2}^{r} y_1^k + \sum_{k=2}^{r-1} y_2^k < t_r - \eta_1^1 - \eta_2^1 \leq \sum_{k=2}^{r} y_1^k + \sum_{k=2}^{r} y_2^k, \right. \\ \left. r=2,\ldots,n+1 \right\} \\ \quad \text{dacă } \eta_1^1 < t_1 \leq \eta_1^1 + \eta_2^1 < t_2 \\ \emptyset \text{ , altfel} \end{cases}$$

sau, echivalent,

$$y_{(2)}^{-1}(y(A_{n+1}))\ \eta_{(1)} = \begin{cases} \left\{ x_{t_r} - \eta_1^1 - \eta_2^1 = \sum_{k=2}^{r} j_k - 1, r=2,\ldots,n+1 \right\} \\ \quad \text{dacă } \eta_1^1 < t_1 \leq \eta_1^1 + \eta_2^1 < t_2 \\ \emptyset, \text{ altfel.} \end{cases}$$

şi deci:

$$P(A_{n+1}) = \int_{\{\eta_1^1 < t_1 \leq \eta_1^1 + \eta_2^1 < t_2\}} P(x_{t_r} - \eta_1^1 - \eta_2^1 = \sum_{k=2}^{r} j_k - 1, r=2,\ldots,n+1).$$

$$d(Poy_{(1)}^{-1})(\eta_{(1)})$$

Dar conform ipotezei de inducţie,

$$P(x_{t_r} - \eta_1^1 - \eta_2^1 = \sum_{k=2}^{r} j_k - 1,\ r=2,\ldots,n+1) = e^{-\lambda(t_2 - \eta_1^1 - \eta_2^1)} \cdot$$

$$\cdot \frac{[\lambda(t_2 - \eta_1^1 - \eta_2^1)]^{j_2 - 1}}{(j_2-1)!} \prod_{r=3}^{n+1} e^{-\lambda(t_r - t_{r-1})} \frac{[\lambda(t_r - t_{r-1})]^{j_r}}{j_r!}$$

Fie a produsul ce apare în membrul drept al ultimei egalităţi. Deoarece y_1^1, y_2^1 sînt independente, urmînd repartiţiile $\Gamma(\lambda, j_1)$ respectiv, exponenţială cu parametru μ, putem scrie:

$$P(A_{n+1}) = a \int_{\{\eta_1^1 < t_1 \leq \eta_1^1 + \eta_2^1 < t_2\}} e^{-\lambda(t_2 - \eta_1^1 - \eta_2^1)} \frac{[\lambda(t_2 - \eta_1^1 - \eta_2^1)]^{j_2-1}}{(j_2-1)!} \cdot$$

$$\cdot \frac{\lambda^{j_1}}{(j_1-1)!} (\eta_1^1)^{j_1-1} e^{-\lambda \eta_1^1} \lambda e^{-\lambda_2^1} d\eta_1^1 d\eta_2^1 =$$

$$= a \cdot \frac{\lambda^{j_1+1}}{(j_1-1)!(j_2-1)!} e^{-\lambda t_2} \int_0^{t_1} (\eta_1^1)^{j_1-1} \int_{t_1 - \eta_1^1}^{t_2 - \eta_1^1} [\lambda(t_2 - \eta_1^1 - \eta_2^1)]^{j_2-1} \cdot$$

$$d\eta_2^1 d\eta_1^1 = a \cdot \frac{(\lambda t_1)^{j_1}}{j_1!} \frac{[\lambda(t_2 - t_1)]^{j_2}}{j_2!} e^{-\lambda t_2} =$$

$$= a \frac{[\lambda(t_1-t_o)]^{j_1}}{j_1!} \frac{[\lambda(t_2-t_1)]^{j_2}}{j_2!} e^{-\lambda(t_2-t_1)} e^{-\lambda(t_1-t_o)} =$$

$$= \prod_{r=1}^{n+1} e^{-\lambda(t_r-t_{r-1})} \frac{[\lambda(t_r-t_{r-1})]^{j_r}}{r!}$$

Lema V.2.3. Pentru $s,t \geq 0, i, j \in I$,

$$P(x_{s+t}= j|x_s = i) = \begin{cases} e^{-\lambda t} \dfrac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!}, j \geq i \\ 0, j < i. \end{cases}$$

Demonstrație:

$$P(x_{s+t}=j|x_s=i) = \frac{P(x_{s+t}=i+(j-i), x_s=i)}{P(x_s=i)}, \; j \geq i$$

și egalitatea enunțată rezultă din lemele V.2.2. și V.2.1.

Demonstrația teoremei:

In virtutea lemelor V.2.2. și V.2.3.,

$$P(x_{t_n} = \sum_{k=1}^{n} j_k | x_{t_r} = \sum_{k=1}^{r} j_k, r=1,\dots,n-1) = \frac{P(x_{t_r} = \sum_{k=1}^{r} j_k, r=1,\dots,n)}{P(x_{t_r} = \sum_{k=1}^{r} j_k, r=1,\dots,n-1)} =$$

$$= \frac{\prod_{r=1}^{n} e^{-\lambda(t_r-t_{r-1})} \dfrac{[\lambda(t_r-t_{r-1})]^{j_r}}{j_r!}}{\prod_{r=1}^{n-1} e^{-\lambda(t_r-t_{r-1})} \cdot \dfrac{[\lambda(t_r-t_{r-1})]^{j_r}}{j_r!}} = e^{-\lambda(t_n-t_{n-1})} \frac{[\lambda(t_n-t_{n-1})]^{j_n}}{j_n!} =$$

$$= P(x_{t_n} = \sum_{k=1}^{n} j_k | x_{t_{n-1}} = \sum_{k=1}^{n-1} j_k)$$

ceea ce dovedește că $\{x_t\}$ este un lanț Markov. Potrivit lemei V.2.3.

este omogen. In sfîrşit, dacă $j > i, i \in I$,

$$q_{ij} = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} \frac{p_{ij}(t)}{t} = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^{j-i}}{t(j-i)!} = \frac{\lambda^{j-i}}{(j-i)!} \lim_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} \frac{t^{j-i}}{t} =$$

$$= \begin{cases} \lambda, \text{ dacă } j = i+1 \\ 0, \text{ dacă } j > i+1 \end{cases}$$

Dacă $j < i, i \in I$, atunci $p_{ij}(t) = 0$ pentru orice $t \geq 0$ şi deci $q_{ij} = 0$.

Dacă $j = i$,

$$q_{ii} = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} \frac{p_{ii}(t)-1}{t} = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} \frac{e^{-\lambda t}-1}{t} = -\lambda$$

Cu acestea teorema este demonstrată.

Referindu-ne la un proces Poisson definit constructiv, în maniera teoremei V.2.4., îl vom numi flux Poisson.

§ 3. Modele de aşteptare $M/M/s/\infty$.

3.1. Modelul

Indicativul M/M/s (introdus de D.G.Kendall), presupune următoarele proprietăţi ale modelului:

I. Intervalele de timp dintre sosirile unităţilor consecutive sînt variabile aleatoare independente, identic repartizate, urmînd repartiţia exponenţială de parametru $\lambda > 0$.

II. Sistemul de serviciu este constituit din $s(s \geq 1)$ staţii identice, funcţionînd independent, în paralele, fiecare putînd asigura serviciul integral al unei unităţi într-un timp a cărui durată este o variabilă aleatoare repartizată exponenţial de parametru $\mu > 0$.

III. Unităţile sînt disciplinate. Cînd o unitate termină serviciul părăseşte instantaneu sistemul de aşteptare, locul său fiind luat, tot instantaneu, de o altă unitate aflată în aşteptare (dacă şirul de aşteptare nu este vid). Dacă în momentul sosirii unei unităţi, mai multe staţii sînt neocupate, unitatea alege o staţie liberă în conformitate cu o lege aleatoare nespecificată.

In plus, facem presupunerea:

IV. Capacitatea camerei de aşteptare este nelimitată.

Fie t_o (identificat, prin convenţie, cu 0) momentul iniţial al observaţiilor şi $t_1, t_2, \ldots$ momentele sosirilor consecutive ale unităţilor ulterioare lui t_o.

Notînd $u_k = t_k - t_{k-1}, k=1,2,\ldots$ avem:

$$u_t = \max \left\{ j \mid \sum_{k=1}^{j} u_k < t \right\}, t > 0, \ u_o = 0$$

Ipoteza I şi propoziţia V.2.5., împreună cu teorema V.2.4. duc la concluzia că $\{u_t\}_{t \in [0,\infty)}$ este un flux Poisson de parametru λ.

Fie $r \in \{1,\ldots,s\}$ indicativul unei staţii şi $\overline{v}_1^r, \overline{v}_2^r, \ldots$ lungimile intervalelor de timp necesare pentru satisfacerea serviciului unităţilor care solicită acest serviciu staţiei r (numerotarea în ordinea servirii), ulterior momentului t_o. ($\overline{v}_1^r$ poate fi durata integrală a serviciului primei unităţi servite, dacă aceasta a intrat în serviciu după t_o sau timpul rezidual al serviciului unităţii aflate în staţia r la momentul t_o).

<u>Definiţie</u>. $\{\overline{v}_t^r\}_{t \in [0,\infty)}$, definit prin:

$$\overline{v}_t^r = \max \left\{ j \mid \sum_{k=1}^{j} \overline{v}_k^r < t \right\}, \quad t > 0, \ \overline{v}_o^r = 0$$

se numeşte fluxul potenţial al serviciului staţiei r.

$\{\overline{v}_t^{\,r_1\ldots r_k}\}_{t\in[0,\infty)}$ cu $\overline{v}_t^{\,r_1\ldots r_k} = \sum_{q=1}^{k} \overline{v}_t^{\,r_q}$ $(k \leq s)$ se numeşte fluxul potenţial al serviciului staţiilor $r_1,\ldots,r_k$. In particular, $\{\overline{v}_t\}_{t\in[0,\infty)}$, $\overline{v}_t = \overline{v}_t^{\,1\ldots s}$ va fi fluxul potenţial al serviciului întregului sistem de servire.

$\{\overline{v}_t^{\,r}\}_{t\in[0,\infty)}$ este proces Poisson de parametru μ, $r\in\{1,\ldots,s\}$ (Teorema V.2.4. şi Propoziţia V.2.5.)

<u>Propoziţia V.3.1.</u> Pentru $1 \leq k \leq s$ şi $r_1,\ldots,r_k\in\{1,\ldots,s\}$

$$P(\overline{v}_t^{\,r_1\ldots r_k}=j) = e^{-\mu kt}\frac{(\mu kt)^j}{j!},\quad t \geq 0,\ j \in I .$$

Demonstraţie:

Deoarece staţiile funcţionează independent,

$$P(\overline{v}_t^{\,r_1\ldots r_k}=j)= \sum_{\substack{0\leq \ell_1,\ldots,\ell_k\leq j\\ \ell_1+\ldots+\ell_k=j}} P(\overline{v}_t^{\,r_q}=\ell_q,\ 1\leq q\leq k) =$$

$$= \sum_{\substack{0\leq \ell_1,\ldots,\ell_k\leq j\\ \ell_1+\ldots+\ell_k=j}} \prod_{q=1}^{k} P(\overline{v}_t^{\,r_q}=\ell_q)=e^{-\mu kt}\frac{(\mu t)^j}{j!}\sum\frac{j!}{\ell_1!\ldots\ell_k!}$$

$$= e^{-\mu kt}\frac{(\mu t)^j}{j!}k^j$$

Vom folosi în cele ce urmează, notaţia $P(v_t=j/i)$, pentru probabilitatea ca în intervalul $[0,t)$, j unităţi să-şi fi satisfăcut serviciul, dacă la momentul 0 i unităţi erau în serviciu sau solicitau serviciul.

Propoziţia V.3.2. Pentru $\Delta t > 0$,

$$P(v_{\Delta t}=0|i) = \begin{cases} 1-i\lambda\Delta t + O(\Delta t), & \text{dacă } i < s \\ 1-s\lambda\Delta t + O(\Delta t), & \text{dacă } i \geq s \end{cases}$$

$$P(v_{t}=1|i) = \begin{cases} i\lambda\Delta t + O(\Delta t), & \text{dacă } i < s \\ s\lambda\Delta t + O(\Delta t), & \text{dacă } i \geq s \end{cases}$$

$$P(v_{t} \geq 2|i) = O(\Delta t), i \in I.$$

Demonstraţie:

Notăm cu $S_{r_1..r_i}$ evenimentul "la momentul 0 staţiile $r_1,\dots,r_i$ sînt ocupate". Atunci: dacă $i < s$, utilizînd propoziţia V.3.1. putem scrie:

$$P(v_{t}=0/i) = \sum_{\{r_1,\dots,r_i\} \subseteq \{1,\dots,s\}} \frac{P(v_{\Delta t}=0|S_{r_1..r_i})P(S_{r_1..r_i})}{P(\bigcup S_{r_1..r_i})} =$$

$$= \sum \frac{P(\bar{v}_{\Delta t}^{\,r_1..r_i}=0)P(S_{r_1..r_i})}{P(\bigcup S_{r_1..r_i})} = e^{-i\mu\Delta t} = 1-i\mu\Delta t+O(\Delta t)$$

$$P(v_{\Delta t}=1|i) = \sum \frac{P(\bar{v}_{\Delta t}^{\,r_1..r_i}=1)P(S_{r_1..r_i})}{P(\bigcup S_{r_1..r_i})} =$$

$$= e^{-i\mu\Delta t}.i\mu\Delta t = i\mu\Delta t + O(\Delta t)$$

şi în consecinţă,

$$P(v_{\Delta t} \geq 2|i) = O(\Delta t).$$

Dacă $i \geq s$,

$$P(v_{\Delta t}=0|i) = P(v_{\Delta t}=0|S_{1,\dots,s}) = P(\bar{v}_{\Delta t} = 0) = e^{-s\mu\Delta t} =$$

$$= 1-s\mu\Delta t + O(\Delta t).$$

$$P(v_{\Delta t}=1 \mid i) = P(v_{\Delta t}=1 \mid S_{1\ldots s}) = P(\bar{v}_{\Delta t} = 1) = e^{-s\mu\Delta t}.s\mu\Delta t =$$

$$= s\mu\Delta t + O(\Delta t)$$

şi deci,

$$P(v_{\Delta t} \geq 2 \mid i) = O(\Delta t).$$

(simbolul $O(\Delta t)$ a fost utilizat aici pentru expresii diferite, dar cu proprietatea limită comună, definită în propoziţia V.2.4.).

3.2. Ecuaţiile modelului

Consecinţă a ipotezelor de structură a modelelor descrise aici, procesul $\{x_t\}_{t\in[0,\infty)}$ al stărilor sistemului de aşteptare, este un proces de naştere şi moarte.

Intr-adevăr, este evident că spaţiul stărilor procesului este $I = \{0,1,\ldots\}$ şi că modificările stărilor procesului se datoresc, exclusiv, fluxului sosirilor şi legii timpului de serviciu.

Or, deoarece $\{u_t\}$ este un proces Poisson, numărul unităţilor sosite într-un interval $[s,s+t)$, $s,t \geq 0$ este independent de x_s, de s şi de evoluţia sistemului în intervalul $[0,s)$ (vezi corolarele propoziţiilor V.2.2., V.2.3.). De aici, rezultă că $\{x_t\}$ este un lanţ Markov omogen. Pentru întregirea afirmaţiei făcute la începutul acestei secţiuni demonstrăm propoziţia.

<u>Propoziţia V.3.3</u>. Dacă $\Delta t > 0$, atunci:

$$P_{ij}(\Delta t)=P(x_{\Delta t}=j \mid x_0 = i) = \begin{cases} i\mu\Delta t+O(\Delta t), \text{ dacă } 1 \leq i < s, j=i-1 \\ s\mu\Delta t+O(\Delta t), \text{ dacă } i \geq s, j=i-1 \\ -\lambda\Delta t+O(\Delta t), \text{ dacă } j=i=0 \\ -(\lambda+i\mu)\Delta t+O(\Delta t), \text{ dacă } j=i < s \\ -(\lambda+s\mu)\Delta t+O(\Delta t), \text{ dacă } j=i \geq s \\ \lambda\Delta t+O(\Delta t), \text{ dacă } j=i+1, i \in I \\ O(\Delta t), \text{dacă } j \leq i-2, i \geq 2, \text{ sau } j \geq i+2, \\ i \in I. \end{cases}$$

Demonstraţie:

Pentru fiecare $i,j \in I$,

$$p_{ij}(\Delta t) = P(x_{\Delta t}=j|x_o=i) = \sum_{k \geqslant \max\{0,j-i\}} P(u_{\Delta t}=k, v_{\Delta t}=k+i-j/x_o=i)$$

a) Dacă $j \leqslant i-2, i \geqslant 2$,

$$p_{ij}(\Delta t) = \sum_{k=0}^{\infty} P(u_{\Delta t}=k, v_{\Delta t}=k+i-j\ x_o=i) \leqslant P(u_{\Delta t}=0, v_{\Delta t}=i-j/x_o=i) \leqslant$$

$$\leqslant P(v_{\Delta t}=i-j|x_o=i) \leqslant P(v_{\Delta t} \geqslant 2|i) = O(\Delta t),$$

egalitatea finală decurgînd din propoziţia V.3.2.

b) Dacă $j \geqslant i+2, i \in I$,

$$p_{ij}(\Delta t) = \sum_{k=j-i}^{\infty} P(u_{\Delta t}=k, v_{\Delta t}=k+i-j/x_o=i) \leqslant P(u_{\Delta t}=j-i, v_{\Delta t}=0/x_o=i) \leqslant$$

$$\leqslant P(u_{\Delta t}=j-i) \leqslant P(u_{\Delta t} \geqslant 2) = O(\Delta t)$$

ultima egalitate rezultînd din propoziţia V.2.4.

c) Dacă $j=i-1, i \geqslant 1$,

$$p_{ij}(\Delta t) = P(u_{\Delta t}=0, v_{\Delta t}=1|x_o=i) + \sum_{k=1}^{\infty} P(u_{\Delta t}=k, v_{\Delta t}=k+1\ x_o=i)$$

Dar, $P(u_{\Delta t}=0, v_{\Delta t}=1|x_o=i) = P(u_{\Delta t}=0)\ P\,(v_{\Delta t}=1/u_{\Delta t}=0, x_o=i) =$

$$= P(u_{\Delta t}=0)\ P(v_{\Delta t}=1|i)$$

Tinînd seama de propoziţia V.3.1. şi V.3.2., rezultă:

$$P(u_{\Delta t}=0, v_{\Delta t}=1|x_o=i) = \begin{cases} i\mu\Delta t+O(\Delta t), & \text{dacă } i < s \\ s\mu\Delta t+O(\Delta t), & \text{dacă } i \geqslant s \end{cases}$$

Pe de altă parte,

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(u_{\Delta t}=k, v_{\Delta t}=k+1\ x_o=i) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} P(v_{\Delta t}=k+1|x_o=i) =$$

$$= P(v_{\Delta t} \geqslant 2|i) = O(\Delta t).$$

d) Dacă $j=i+1, i \in I$,

$$P_{ij}(\Delta t) = \sum_{k=1}^{\infty} P(u_{\Delta t}=k, v_{\Delta t}=k-1 | x_0=i) = P(u_{\Delta t}=1, v_{\Delta t}=0 | x_0=i) +$$

$$+ \sum_{k \geq 2} P(u_{\Delta t} = k, v_{\Delta t}=k-1 \; x_0=i)$$

Dar, $P(u_{\Delta t}=1, v_{\Delta t}=0|x_0=i) = P(u_{\Delta t} = 1) P(v_{\Delta t}=0 | u_{\Delta t}=1, x_0=i)$

şi,

$$P(v_{\Delta t}=0 | x_0=i+1) \leq P(v_{\Delta t}=0 | u_{\Delta t}=1, x_0=i) \leq P(v_{\Delta t}=0 | x_0=i)$$

sau, ţinînd seama de propoziţia V.3.2.,

$$P(u_{\Delta t}=1, v_{\Delta t}=0 \mid x_0=i) = \lambda \Delta t + O(\Delta t) .$$

In plus, se observă că,

$$\sum_{k \geq 2} P(u_{\Delta t}=k, v_{\Delta t}=k-1 \; x_0=i) \leq \sum_{k \geq 2} P(u_{\Delta t}=k)=P(u_{\Delta t} \geq 2) = O(\Delta t).$$

e) Dacă $j=i, i \geq 0$,

$$P_{ij}(\Delta t) = \sum_{k=0}^{\infty} P(u_{\Delta t}=k, v_{\Delta t}=k | x_0=i) = P(u_{\Delta t}=0) P(v_{\Delta t}=0 | u_{\Delta t}=0,$$

$$x_0=i) + P(u_{\Delta t}=1) P(v_{\Delta t}=1 | u_{\Delta t}=1, x_0=i) + \sum_{k \geq 2} P(u_{\Delta t}=k, v_{\Delta t}=k | x_0=i)$$

Dar,

$$P(v_{\Delta t} = 0 | u_{\Delta t}=0, x=i) = P(v_{\Delta t}=0 | i)$$

$$P(v_{\Delta t} = 1 | u_{\Delta t}=1, x_0=i) \leq P(v_{\Delta t}=1 | i+1)$$

$$\sum_{k \geq 2} P(u_{\Delta t}=k, v_{\Delta t}=k | x_0=i) \leq P(u_{\Delta t} \geq 2)$$

şi de aici şi din propoziţiile V.2.4., V.3.2., rezultă evaluarea lui $P_{ij}(\Delta t)$.

In final, concluziile propoziţiei rezultă imediat din concluziile de la a) şi e).

Corolar

$$q_{ij} = \begin{cases} i\mu & , \text{dacă } 1 \leq i < s, j=i-1 \\ s\mu & , \text{dacă } i \geq s, j=i-1 \\ -\lambda & , \text{dacă } j=i=0 \\ -(\lambda + i\mu) & , \text{dacă } j=i < s \\ -(\lambda + s\mu) & , \text{dacă } j=i \geq s \\ \lambda & , \text{dacă } j=i+1, i \in I \\ 0 & , \text{altfel.} \end{cases}$$

Teorema V.3.1. Pentru $t \geq 0, i \in I$, probabilităţile de trecere $p_{ij}(t) = P(x_t=j \mid x_o=i)$ verifică sistemul:

(V.3.1.) $$\frac{d}{dt} p_{io}(t) = -\lambda p_{io}(t) + \mu p_{i1}(t)$$

(V.3.2.) $$\frac{d}{dt} p_{ij}(t) = \lambda p_{ij-1}(t) - (\lambda + j\mu)p_{ij}(t)+(j+1)\mu p_{ij+1}(t),$$

$1 \leq j < s$,

(V.3.3.) $$\frac{d}{dt} p_{ij}(t) = \lambda p_{ij-1}(t) - (\lambda + s\mu)p_{ij}(t)+s\mu p_{ij+1}(t),$$

$j \geq s$

Demonstraţie:

Se obţine prin transcrierea teoremei V.2.1., observînd că corolarul propoziţiei V.3.3. permite identificările:

$$\lambda_i = \lambda \quad, i \in I$$

$$\mu_i = \begin{cases} 0, \text{ dacă } i=0 \\ i\mu, \text{ dacă } 1 \leq i < s \\ s\mu, \text{ dacă } i \geq s \end{cases}$$

3.3. Determinarea repartiţiilor stărilor în cazul s=1

Repartiţiile finit dimensionale ale procesului stărilor sistemului de aşteptare $\{x_t\}$ sînt determinate de repartiţia iniţială (repartiţia lui x_o) şi de matricele de trecere $P(t), t > 0$).

Intr-adevăr, pentru $0=t_0 < t_1 < \dots < t_n$ şi $i_0, i_1, \dots, i_n \in I$,

$$P(x_{t_k}=i_k, 0 \leq k \leq n) = P(x_0=i_0) \prod_{k=1}^{n} P_{i_{k-1} i_k}(t_k - t_{k-1})$$

De aici decurge rolul esenţial pe care îl joacă, în studiul modelelor considerate, determinarea probabilităţilor de trecere ale procesului de naştere şi moarte $\{x_t\}$, probabilităţi date de sistemul enunţat în teorema V.3.1.

Pentru simplificarea demonstraţiei şi aşa extrem de laborioasă, vom lua în considerare numai cazul modelelor cu o staţie.

<u>Teorema V.3.2</u>. Pentru $s=1$, soluţia sistemului (V.3.1.), (V.3.3.) este:

$$p_{ij}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\mu} \sum\limits_{r=0}^{\infty} g_{i+r+1}(t), & \text{pentru } j=0 \\ \frac{1}{\lambda} \left[\sum\limits_{r=1}^{j} \rho^r g_{i-j+2r-1}(t) + \rho^{r+1} \sum\limits_{r=0}^{\infty} g_{i+j+r+1}(t) \right], & 1 \leq j < i \\ (1-\delta_{io}) \frac{1}{\lambda} \sum\limits_{r=j-i+1}^{j} \rho^r g_{i-j+2r-1}(t) + \frac{1}{\lambda} \rho^{r+1} \sum\limits_{n=0}^{\infty} g_{i+j+r+1}(t), & j > i \end{cases}$$

unde $g_k(t) = k^{-\frac{k}{2}} \cdot e^{-(\lambda+\mu)t} \cdot t^{-1} \cdot J_k(2t\sqrt{\lambda\mu})$, $k \geq 1$, J_k fiind funcţiile Bessel de speţa I modificate (vezi anexa A.3.) şi $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$.

Demonstraţie:

Pentru $s=1$, sistemul (V.3.1.),(V.3.3.) devine:

(V.3.4.) $$\frac{d}{dt} p_{io}(t) = -\lambda p_{io}(t) + \mu p_{i1}(t)$$

(V.3.5.) $$\frac{d}{dt} p_{ij}(t) = \lambda p_{ij-1}(t) - (\lambda + \mu) p_{ij}(t) + \mu p_{ij+1}(t), \; j \geq 1$$

cu condiţiile iniţiale $p_{ij}(0) = \delta_{ij}$.

Rezolvarea acestui sistem o vom face utilizînd "metoda funcţiei generatoare".

Pentru $i \in I$, fie $G_i(t,z) = \sum_{j=0}^{\infty} p_{ij}(t) z^j$, $|z| \leqslant 1$, funcția generatoare a repartiției $(p_{ij}(t))_{j \in I}$, $t \geqslant 0$.

Inmulțind (V.3.4.) cu z și (V.3.5.) cu z^{j+1}, pentru $j \geqslant 1$, obținem, prin sumare, egalitatea:

$$z \sum_{j=0}^{\infty} \frac{d}{dt} p_{ij}(t) z^j = \lambda z^2 \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij-1}(t) z^{j-1} -$$

$$- \lambda z \sum_{j=0}^{\infty} p_{ij}(t) z^j - \mu z \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}(t) z^j + \mu \sum_{j=0}^{\infty} p_{ij+1}(t) z^{j+1}$$

sau,

(V.3.6.) $$z \frac{\partial G_i(t,z)}{\partial t} = \left[z^2 - (\lambda + \mu) z + \mu \right] G_i(t,z) - \mu(1-z) p_{io}(t)$$

Vom nota cu $\overline{f}(s)$ transformata Laplace a funcției f; $\overline{f}(s) = \int_0^{\infty} e^{-t} f(t) dt$.

Să remarcăm că, pentru Re. $(s) > 0$, transformatele Laplace ale funcțiilor p_{ij} și $G_i(.,z)$ sînt bine definite,

Intr-adevăr, pentru $|z| \leqslant 1$ și Re.$(s) > 0$,

$$\left| \int_0^{\infty} e^{-st} G_i(t,z) dt \right| \leqslant \int_0^{\infty} \left| e^{-st} \sum_{j=0}^{\infty} p_{ij}(t) z^j \right| dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^{\infty} |e^{-st}| \sum_{j=0}^{\infty} p_{ij}(t) dt \leqslant \int_0^{\infty} | e^{-st} | dt \leqslant 2 \int_0^{\infty} e^{-t\mathrm{Re.}(s)} dt < \infty$$

$$\left| \int_0^{\infty} e^{-st} p_{ij}(t) dt \right| \leqslant \int_0^{\infty} | e^{-st} | dt < \infty$$

Atunci din (V.2.6.) deoarece $G_i(0,z) = p_{ii}(0) z^i = z^i$, deducem:

(V.3.7.) $$(- \lambda z^2 + (\lambda + \mu + s) z - \mu) \overline{G}_i(s,z) = z^{i+1} - \mu (1-z) \overline{p}_{io}(s)$$

Se observă că trinomul din membrul stîng are o singură rădăcină în cercul unitate. Intr-adevăr, fie $f(z) = (\lambda + \mu + s) z$, $g(z) = -\mu - \lambda z^2$. Pentru $|z| = 1$ și Re.$(s) > 0$,

$$| f(z) | = | \lambda + \mu + s | > \lambda + \mu \geqslant | \mu + \lambda z^2 | = | g(z) |$$

Deoarece $f(z)$ are o singură rădăcină în $D = \{ z \mid |z| \leq 1 \}$, rezultă că una singură din rădăcinile trinomului se găsește în D (teorema lui Rouché; dacă f și g sînt funcții olomorfe în domeniul închis D și $|f(z)| > |g(z)|$ pe frontiera lui D, atunci numărul zerourilor lui f+g, în D, coincide cu numărul zerourilor lui f, în D).

Fie z_1, z_2 zerourile lui $-\lambda z^2 + (\lambda + \mu + s)z - \mu$, cu $|z_1| \leq 1$.

Deoarece $\overline{G}_i(s,z)$ este bine definit pentru $|z| \leq 1$, este necesar ca și membrul drept al egalității (V.3.7.) să se anuleze în z_1.

De aici:

$$\overline{p}_{io}(s) = \frac{z_1^{i+1}}{\mu(1-z_1)} = \frac{1}{\mu} \sum_{r=0}^{\infty} z_1^{i+r+1} \tag{V.3.8.}$$

Atunci, din (V.3.7.), după simplificarea cu $z-z_1$, obținem:

$$\overline{G}_i(s,z) = -\frac{1}{\lambda(z-z_2)} \left[z^i + z_1 z^{i-1} + \ldots + z_1^{i-1} z + \frac{z_1^i}{1-z_1} \right]$$

Deoarece $|z| \leq 1$, $|z_2| > 1$, rezultă $\left| \frac{z}{z_2} \right| < 1$ și atunci,

$$\overline{G}_i(s,z) = \frac{1}{\lambda z_2} \left(1 - \frac{z}{z_2}\right)^{-1} \left[z^i + z_1 z^{i-1} + \ldots + z_1^{i-1} z + \frac{z_1^i}{1-z_1} \right] =$$

$$= \frac{1}{\lambda z_2} \left[z^i + z_1 z^{i-1} + \ldots + z_1^{i-1} z + \frac{z_1^i}{1-z_1} \right] \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{z_2}\right)^k$$

Din definiția lui G_i rezultă că $\overline{p}_{ij}(s)$ este coeficientul lui z^j din dezvoltarea în serie de puteri a lui $\overline{G}_i(s,z)$.

Putem scrie:

$$\overline{p}_{ij}(s) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} \left[\frac{z_1^i}{z_2^{j+1}(1-z_1)} + \sum_{r=1}^{j} \frac{z_1^{i-j+r-1}}{z_2^r} \right], & 1 \leq j \leq i \\[2ex] \frac{1}{\lambda} \left[\frac{z_1^i}{z_2^{j+1}(1-z_1)} + (1-\delta_{io}) \sum_{r=j-i+1}^{j} \frac{z_1^{i-j+r-1}}{z_2^r} \right], & j > i \end{cases}$$

Deoarece z_1 şi z_2 sînt rădăcinile ecuaţiei

(V.3.10.) $$\lambda z^2 - (\lambda + \mu + s)z + \mu = 0$$

rezultă că $z_1 z_2 = \rho^{-1}$ şi atunci:

$$\bar{p}_{ij}(s) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda}\left[\rho^{j+1}\dfrac{z_1^{i+j+1}}{1-z_1} + \sum\limits_{r=1}^{j} \rho^r z_1^{i-j+2r-1}\right], & 1 \leq j \leq i \\ \frac{1}{\lambda}\left[\rho^{j+1}\dfrac{z_1^{i+j+1}}{1-z_1} + (1-\delta_{io})\sum\limits_{r=j-i+1}^{j} \rho^r z_1^{i-j+2r-1}\right], & j > i \end{cases}$$

şi, după dezvoltarea în serie a lui $(1-z_1)^{-1}$,

$$\bar{p}_{ij}(s) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda}\left[\sum\limits_{r=1}^{j} \rho^r z_1^{i-j+2r-1} + \rho^{j+1}\sum\limits_{r=0}^{\infty} z^{i+j+r+1}\right], & 1 \leq j \leq i \\ \frac{1}{\lambda}\quad (1-\delta_{io})\sum\limits_{r=j-i+1}^{j} \rho^r z^{i-j+2r-1} + \rho^{j+1}\sum\limits_{r=0}^{\infty} z_1^{i+j+r+1}\Big], & j > i \end{cases}$$

Pentru a obţine rezultatul final, vom demonstra următoarea lemă.

<u>Lema V.3.1</u>. $z_1^k = \bar{g}_k(s)$, unde $g_k(t) = k.\ \rho^{\frac{k}{2}}.e^{-(\lambda+\mu)t}.$ $.t^{-1}.J_k(2t\sqrt{\lambda\mu})$.

Demonstraţie:

Prin inducţie relativ la k.

Pentru k=1, pe de parte,

$$z_1 = \frac{\lambda + \mu + s - \sqrt{(\lambda+\mu+s)^2 - 4\lambda\mu}}{2\lambda} = \frac{\lambda+\mu+s}{2\lambda}\Big[1 -$$

$$- \left(1 - \frac{4\lambda\mu}{(\lambda+\mu+s)^2}\right)^{1/2}\Big] =$$

$$= \frac{\lambda+\mu+s}{2\lambda}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1.3\ldots(2n-3)}{2^n n!}\left(\frac{4\lambda\mu}{(\lambda+\mu+s)^2}\right)^n =$$

$$= \rho^{-\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{n!(n+1)!}\left(\frac{\sqrt{\lambda\mu}}{\lambda+\mu+s}\right)^{2n+1}$$

iar pe de altă parte,

$$\bar{g}_1(s) = \rho^{-\frac{1}{2}} \int_0^{\infty} e^{-(\lambda+\mu+s)t} . t^{-1} . J_1(2t\sqrt{\lambda\mu})\,dt =$$

$$= \rho^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(\lambda+\mu+s)t} . t^{-1} . \frac{(t\sqrt{\lambda\mu})^{2n+1}}{n!\,(n+1)!} =$$

$$= \rho^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+1)!} \left(\frac{\sqrt{\lambda\mu}}{\lambda+\mu+s}\right)^{2n+1} \cdot \Gamma(2n+1) =$$

$$= \rho^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} \left(\frac{\sqrt{\lambda\mu}}{\lambda+\mu+s}\right)^{2n+1} .$$

Mai departe folosind propoziția A.3.2. și ipoteza de inducție, putem scrie:

$$\bar{g}_{k+1}(s) = \int_0^{\infty} e^{-(\lambda+\mu+s)t} . (k+1) . \rho^{-\frac{k+1}{2}} . t^{-1} . J_{k+1}(2t\sqrt{\lambda\mu})\,dt =$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-(\lambda+\mu+s)t} . (k+1) . \rho^{-\frac{k+1}{2}} . t^{-1} \Big[J_{k-1}(2t\sqrt{\lambda\mu}) -$$

$$- \frac{2k}{2t\sqrt{\lambda\mu}} J_k(2t\sqrt{\lambda\mu}) dt =$$

$$= \rho^{-1} \int_0^{\infty} e^{-(\lambda+\mu+s)t} \big[-(k-1)+2k\big]\, \rho^{-\frac{k-1}{2}} . t^{-1} . J_{k-1}(2t\sqrt{\lambda\mu})\,dt -$$

$$- \int_0^{\infty} e^{-(\lambda+\mu+s)t} . (k+1) . \rho^{-\frac{k+1}{2}} . t^{-1} \frac{2k}{2t\sqrt{\lambda\mu}} J_k(2t\sqrt{\lambda\mu})\,dt =$$

$$= \rho^{-1} . z_1^{k-1} + \int_0^{\infty} e^{-(\lambda+\mu+s)t} . 2k . \rho^{-\frac{k+1}{2}} . \Big[\frac{1}{t} J_{k-1}(2t\sqrt{\lambda\mu}) -$$

$$- \frac{k+1}{2t^2\sqrt{\lambda\mu}} J_k(2t\sqrt{\lambda\mu}) \Big]\, dt$$

Dar, $\frac{1}{t}\ J_{k-1}(2t\sqrt{\lambda\mu}\ ) - \frac{k+1}{2t^2\sqrt{\lambda\mu}}\ J_k(2t\sqrt{\lambda\mu}\ ) =$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\sqrt{\lambda\mu}\ )^{2n+k+1}}{n!(n+k)-}(2n+k-1)\ t^{2n+k-2} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(t\sqrt{\lambda\mu})^{2n+k-1}}{n!\ (n+k)!}\right)$$

şi integrînd prin părţi, obţinem,

$$\bar{g}_{k+1}(s) = -\rho^{-1} z_1^{k-1} + 2k\rho^{-\frac{k+1}{2}}.\frac{\lambda+\mu+s}{2}\int_0^{\infty} e^{-(\lambda+\mu+s)t}.$$

$$.\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(t\sqrt{\lambda\mu}\ )^{2n+k-1}}{n!(n+k)!}\,dt = -\rho^{-1}.z_1^{k-1} + \frac{\lambda+\mu+s}{\lambda}\int_0^{\infty} k\,\rho^{-\frac{k}{2}}.$$

$$.e^{-(\lambda+\mu+s)t}.\ t^{-1}.J_k(2t\sqrt{\lambda\mu}\ )dt = -\rho^{-1}.z_1^{k-1} + \frac{\lambda+\mu+s}{\lambda}\ z_1^k.$$

Or , din (V.3.9.) rezultă că:

$$-\rho^{-1} - z_1^{k-1} + \frac{\lambda+\mu+s}{\lambda}\ z_1^k = z_1^{k+1}$$

Astfel lema a fost probată.

Folosind acest rezultat în (V.3.8.) şi (V.3.10.) se obţin imediat expresiile lui $p_{ij}(t), i,j \in I$.

3.4. Cazul echilibrului statistic; repartiţia staţionară a procesului stărilor.

In ipoteza echilibrului statistic, fie $p = (p_j)_{j\in I}$ repartiţia staţionară a lanţului Markov $\{x_t\}_{t\in[0,\infty)}$.

Să notăm $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$, $\rho^* = \frac{\rho}{s}$

Atunci rezultă din corolarul teoremei V.2.2.

(V.3.11.) $$p_j = \begin{cases} \dfrac{\rho^j}{j!}\, p_o, & 1 \leqslant j < s \\[2ex] \dfrac{\rho^j}{s!\, s^{j-s}}, & j \geqslant s \end{cases}$$

(V.3.12.) $$p_o = \frac{1}{\sum\limits_{j=0}^{s-1} \dfrac{\rho^j}{j!} + \dfrac{\rho^s}{s!} \sum\limits_{j=s}^{\infty} \left(\dfrac{\rho}{s}\right)^{j-s}} = \frac{1}{\sum\limits_{j=0}^{s-1} \dfrac{\rho^j}{j!} + \dfrac{\rho^s}{s!} \dfrac{1}{1-\rho^*}}$$

cu condiţia ca $\rho^* < 1$.

In particular, pentru $s=1$

(V.3.13.) $$p_j = \frac{\rho^j}{j!}\, p_o,\ j \geqslant 1,\ p_o = 1 - \rho$$

Fie $m = \sum\limits_{j=0}^{\infty} j\, p_j$, valoarea medie a repartiţiei p (numărul mediu de unităţi aflate în sistemul de aşteptare)

Propoziţia V.3.4. In ipoteza echilibrului statistic (ES),

$$\lim_{t\to\infty} M(x_t | x_o = i) = \lim_{t\to\infty} M(x_t) = m\ ,\ i \in I \text{ şi}$$

(V.3.14.) $$m = \rho + p_o \frac{\rho^s}{s!} \frac{\rho^*}{(1-\rho^*)^2}$$

Demonstraţie:

$$M(x_t | x_o = i) = \sum_{j=0}^{\infty} j\, p_{ij}(t),\ M(x_t) = \sum_{j=0}^{\infty} j\, p_j(t)$$

şi deoarece $\lim\limits_{t\to\infty} p_{ij}(t) = \lim\limits_{t\to\infty} p_j(t) = p_j$, rezultă:

$$\lim_{t\to\infty} M(x_t | x_o = i) = \lim_{t\to\infty} M(x_t) = m$$

Ultima egalitate a propoziţiei rezultă prin calcul:

$$m = \sum_{j=0}^{\infty} j\, p_j = p_o\left[\sum_{j=0}^{s-1} j \frac{\rho^j}{j!} + \sum_{j=s}^{\infty} j \frac{\rho^j}{s!\, s^{j-s}}\right] = p_o\left[\rho \sum_{j=1}^{s-1} \frac{\rho^{j-1}}{(j-1)!} + \right.$$

$$\left. + \rho \frac{\rho^{s-1}}{(s-1)!} + \frac{\rho^s}{s!} \sum_{j=s+1}^{\infty} (s+(j-s))\, \rho^{*\ j-s}\right] =$$

$$= p_0 \left[\rho \sum_{j=0}^{s-1} \frac{\rho^j}{j!} + s \frac{\rho^s}{s!} \frac{\rho^*}{1-\rho^*} + \frac{\rho^{s+1}}{s \cdot s!} \frac{1}{(1-\rho^*)^2} \right] =$$

$$= p_0 \rho \left[\sum_{j=0}^{s-1} \frac{\rho^j}{j!} + \frac{\rho^s}{s!} \frac{1}{1-\rho^*} \right] + p_0 \frac{\rho^s}{s!} \frac{1}{(1-\rho^*)^2}$$

şi ţinînd seama de (V.3.11.) rezultă (V.3.14.)

<u>Corolar.</u> Pentru $s=1$, $m = \dfrac{\rho}{1-\rho}$

<u>Propoziţia V.3.5.</u> In ipoteza (ES) $\lim_{t\to\infty} M(\bar{x}_t | x_0 = i) =$ $\lim_{t\to\infty} M(\bar{x}_t) = \bar{m}$, $i \in I$, unde:

$$\bar{m} = p_0 \frac{\rho^s}{s!} \cdot \frac{\rho^*}{(1-\rho^*)^2} \tag{V.3.15.}$$

Demonstraţie:

$$M(\bar{x}_t | x_0 = i) = \sum_{j\in I} jP(\bar{x}_t = j | x_0 = i) = \sum_{j=1}^{\infty} jP(\bar{x}_t = j | x_0 = i) =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} jP(x_t = j+s | x_0 = i) = \sum_{j=1}^{\infty} jp_{i\,j+s}(t)$$

şi în ipoteza echilibrului statistic,

$$\lim_{t\to\infty} M(\bar{x}_t | x_0 = i) = \sum_{j=1}^{\infty} jp_{j+s}$$

Notînd cu $\bar{m}$ suma din membrul drept, valoarea acesteia rezultă din următorul calcul:

$$\bar{m} = \sum_{j=s+1}^{\infty} (j-s)p_j = p_0 \sum_{j=s+1}^{\infty} (j-s) \frac{\rho^s}{s! s^{j-s}} =$$

$$= p_0 \frac{\rho^{s+1}}{s \cdot s!} \sum_{j=s+1}^{\infty} (j-s) \rho^{*\,j-s-1} = p_0 \frac{\rho^{s+1}}{s \cdot s!} \frac{1}{(1-\rho^*)^2} =$$

$$= p_0 \rho^s \frac{\rho^*}{s!(1-\rho^*)^2}$$

Observînd că $M(\bar{x}_t) = \sum_{j=1}^{\infty} jp_{j+s}(t)$, demonstraţia propoziţiei se completează uşor.

Corolar. Pentru $s=1$, $\bar{m} = \dfrac{\rho^2}{1-\rho}$

3.5. Caracteristicile sistemului de serviciu

Propoziţia V.3.6. In ipoteza (ES), $\lim\limits_{t\to\infty} M(h_t | x_0 = i) =$

$= \lim\limits_{t\to\infty} M(h_t) = s - \rho$, $i \in I$.

Demonstraţie:

Se observă că:

$$M(h_t | x_0 = i) = \sum_{j=0}^{s-1} (s-j) p_{ij}(t) \ , \ M(h_t) = \sum_{j=0}^{s-1} (s-j)\, p_j(t)$$

In ipoteza (ES) ambele medii tind către $\sum\limits_{j=0}^{s-1} (s-j) p_j$.

Concluzia propoziţiei rezultă din următorul calcul:

$$\sum_{j=0}^{s-1} (s-j) p_j = p_0 \sum_{j=0}^{s-1} (s-j) \frac{\rho^j}{j!} = p_0 s \left[\sum_{j=0}^{s-1} \frac{\rho^j}{j!} + \frac{\rho^s}{s!} \frac{1}{1-\rho^*}\right] -$$

$$- p_0 \left[\sum_{j=0}^{s-1} j \frac{\rho^j}{j!} + s \frac{\rho^s}{s!} \frac{1}{1-\rho^*}\right] = s - p_0 \rho \left[\sum_{j=1}^{s-1} \frac{\rho^{j-1}}{(j-1)!} +\right.$$

$$\left. + \frac{\rho^{s-1}}{(s-1)!} \frac{1}{1-\rho^*}\right] = s - p_0 \rho \left[\sum_{j=0}^{s-1} \frac{\rho^s}{s!} + \frac{\rho^{s-1}}{(s-1)!} \left(\frac{1}{1-\rho^*} -\right.\right.$$

$$\left.\left. - 1\right)\right] = s - p_0 \rho \left[\sum_{j=0}^{s-1} \frac{\rho^j}{j!} + \frac{\rho^s}{s!} \frac{1}{1-\rho^*}\right] = s - \rho \ .$$

Propoziţia V.3.7. $P(e_n < t) = \begin{cases} 0, & \text{pentru } t \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda t}, & \text{pentru } t > 0. \end{cases}$

Demonstraţie:

Dacă o perioadă de neocupare începe la momentul τ , durata sa se confundă cu lungimea intervalului de timp, scursă de la acest moment şi pînă în momentul primei sosiri în sistem. Atunci concluzia propoziţiei decurge imediat din propoziţia V.2.5.

In continuare vom deduce repartiţiile perioadelor de ocupare ale sistemului şi repartiţiile numărului de unităţi servite în perioadele de ocupare. Vom aborda această problemă pentru modelele cu o staţie.

Fie $0 \leq t_1 < \ldots < t_n \ldots$ momentele sosirilor unităţilor în sistemul de aşteptare.

Fie $x_n = x_{t_n} - 1$, numărul unităţilor aflate în sistem în momentul sosirii celei de a n-a unităţi (fără a o socoti şi pe aceasta).

Propoziţia V.3.8. Pentru fiecare $i \in I$

$$P(x_{n+1}=j|x_n=i) = q_{ij} = \begin{cases} \left(\frac{1}{1+\rho}\right)^{i+1}, & \text{dacă } j=0 \\ \frac{\rho}{1+\rho}\left(\frac{1}{1+\rho}\right)^{i+1-j}, & \text{dacă } 1 \leq j \leq i+1 \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

$n \geq 1$.

Demonstraţie:

Dacă $x_n=i$, fie $v_1, \ldots, v_{i+1}$ duratele serviciilor celor i unităţi aflate în sistem la momentul t_n şi a unităţii sosite la acest moment (indexarea este conformă cu ordinea servirii).

$$P(x_{n+1}=0|x_n=i) = P\left(\sum_{r=1}^{i+1} v_r < u_{n+1}\right)$$

Or, $\sum_{r=1}^{i+1} v_r$ urmează o repartiţie $\Gamma(\mu, i+1)$ şi deci probabilitatea de mai sus este independentă de n şi:

$$P(x_{n+1}=0|x_n=i) = q_{i0} = \int_0^\infty \left(\int_x^\infty e^{-\lambda y} dy\right) \frac{\mu^{i+1}}{\Gamma(i+1)} x^i e^{-\mu x} dx =$$

$$= \frac{\mu^{i+1}}{\Gamma(i+1)} \int_0^\infty e^{-(\lambda+\mu)x} . x^i dx = \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{i+1} = \left(\frac{1}{1+\rho}\right)^{i+1}$$

Dacă $1 \leq j \leq i+1$,

$$P(x_{n+1}=j|x_n=i) = P(\sum_{r=1}^{i+1-j} v_r < u_{n+1} \leq \sum_{r=1}^{i+2-j} v_r) =$$

$$= P(\sum_{r=1}^{i+1-j} v_r < u_{n+1}) - P(\sum_{r=1}^{i+2-j} v_r < u_{n+1}) = (\frac{1}{1+\rho})^{i+1-j} -$$

$$- (\frac{1}{1+\rho})^{i+2-j} = (\frac{1}{1+\rho})^{i+1-j} (\frac{\rho}{1+\rho})$$

Observaţie: Procesul stochastic, cu parametru discret, $\{x_n\}$ este un lanţ Markov. Acest fapt se verifică imediat, ţinînd seama de definiţia sa şi de faptul că procesul stărilor este Markov. In plus prin propoziţia demonstrată mai sus s-a stabilit că $\{x_n\}$ este un lanţ Markov omogen, probabilităţile de trecere după un pas depinzînd doar de stări.

Propoziţia V.3.9. Pentru $i \in I, n \geq 1, k \geq 1$,

$$P(x_{n+k}=0, x_r \neq 0, n+1 \leq r \leq n+k-1 | x_n=i) = q_{io}^{(k)} = \frac{i+1}{2k+i-1} C_{2k+i-1}^{k-1} \cdot$$

$$\cdot (\frac{1}{1+\rho})^{k+i} \cdot (\frac{\rho}{1+\rho})^{k-1}$$

Demonstraţie:

Pentru n fixat demonstrăm egalitatea prin inducţie la k. Dacă k=1, egalitatea se verifică, deoarece,

$$q_{io}^{(1)} = P(x_{n+1}=0|x_n=i) = q_{io} = (\frac{1}{1+\rho})^{i+1}$$

Admiţînd valabilitatea propoziţiei pentru rangul k, putem scrie:

$$q_{io}^{(k+1)} = \sum_{j \geq 1} P(x_{n+k+1}=0, x_r \neq 0, n+1 \leq r \leq n+k, x_{n+1}=j | x_n=i) =$$

$$= \sum_{j \geq 1} P(x_{n+k+1}=0, x_r \neq 0, n+1 \leq r \leq n+k | x_{n+1}=j).$$

$$\cdot P(x_{n+1}=j | x_n=i) = \sum_{j \geq 1} P(x_{n+k}=0, x_r \neq 0, n+1 \leq r \leq n+k-1 / x_n=j).$$

$$\cdot q_{ij} = \sum_{j \geq 1} q_{jo}^{(k)} q_{ij}$$

ultimile două egalităţi datorîndu-se faptului că $\{x_n\}$ este un lanţ Markov omogen.

De aici,

$$q_{io}^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{i+1} \frac{j+1}{2k+j-1} C_{2k+j-1}^{k-1} \left(\frac{\rho}{1+\rho}\right)^k \left(\frac{1}{1+\rho}\right)^{k+i+1} =$$

$$= \frac{1}{2k+i+1} C_{2k+i+1}^{k} \left(\frac{\rho}{1+\rho}\right)^k \left(\frac{1}{1+\rho}\right)^{k+i+1}$$

(egalitatea: $\sum_{j=1}^{i+1} \frac{j+1}{2k+j-1} C_{2k+j-1}^{k-1} = \frac{i+1}{2k+i+1} C_{2k+i+1}^{k}$ poate fi uşor verificată, prin inducţie relativ la i).

Prin definiţie, $q_{io}^{(k)}$ este probabilitatea cu care prima trecere a sistemului din starea i în starea o să aibă loc după k"paşi" (după k sosiri). Este evident însă, că acestei probabilităţi i se poate da şi următoarea interpretare:

<u>Propoziţia V.3.10</u>. $q_{io}^{(k)} = P(x(b_o) = k / x_o = i), i \geq 1$

$$q_{oo}^{(k)} = P(x(b_n) = k),\ n \geq 1, k \geq 1.$$

Să definim, pentru $|z| \leq 1$, $G(z) = \sum_{k=1}^{\infty} q_{oo}^{(k)} z^k$

<u>Propoziţia V.3.11</u>. Este adevărată egalitatea:

(V.3.16.) $$G(z) = \frac{1+\rho}{2\rho}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{4\rho}{(1+\rho)^2}\, z}\right), \quad |z| \leq 1.$$

Demonstraţie:

Deoarece $\left|\frac{4\rho z}{(1+\rho)^2}\right| \leq 1$, se poate scrie:

$$\left(1 - \frac{4\rho}{(1+\rho)^2}\, z\right)^{\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2k+3}{2}\right)\left(\frac{-4}{(1+\rho)^2} z\right)^k \cdot \frac{1}{k!}$$

Atunci, expresia din membrul drept din (V.3.16.) devine:

$$\frac{1+\rho}{2\rho}\left(1 - \left(1 - \frac{4\rho}{(1+\rho)^2}\, z\right)^{\frac{1}{2}}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{1+\rho}\right)^{k-1} \left(\frac{1}{1+\rho}\right)^k \frac{2^{k-1}}{k!}\ .$$

$$. \ 1.3.\ldots.(2k-3)z^k = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{1+\rho}\right)^{k-1} \left(\frac{}{1+\rho}\right)^k \frac{(2k-1)!\, z^k}{(2k-1)k!\,(k-1)!} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} q_{oo}^{(k)} z^k = G(z) .$$

<u>Propoziţia V.3.12</u>. Dacă $\rho \leq 1, \sum_{k=1}^{\infty} q_{oo}^{(k)} = 1$ şi $\begin{pmatrix} k \\ q_{oo}^{(k)} \end{pmatrix}_{k \geq 1}$ este repartiţia lui $x(b_n)$, pentru orice $n \geq 1$.

Dacă $\rho > 1, \sum_{k=1}^{\infty} q_{oo}^{(k)} = \frac{1}{\rho}$ şi $x(b_n)$ este infinită cu probabilitatea nenulă $1 - \frac{1}{\rho}$.

Demonstraţie:

Observăm că $\sum_{k=1}^{\infty} q_{oo}^{(k)} = G(1)$.

Atunci, din V.3.16.,

$$G(1) = \frac{1+\rho}{2\rho}\left(1 - \frac{|1-\rho|}{1+\rho}\right) = \begin{cases} 1, \text{ dacă } \rho \leq 1 \\ \frac{1}{\rho} , \text{ dacă } \rho > 1 \end{cases}$$

Concluziile propoziţiei rezultă de aici şi din propoziţia V.3.10.

<u>Observaţie:</u> Variabilele $x(b_n), n \geq 1$, au toate o aceeaşi repartiţie. In cele ce urmează vom nota simplu cu b, orice perioadă de ocupare (diferită de cea iniţială, în cazul în care $x_o \neq 0$).

<u>Propoziţia V.3.13</u>. Dacă $\rho < 1, M(x(b)) = \frac{1}{1-\rho}$.

Demonstraţie:

Se observă că $M(x(b)) = \sum_{k=1}^{\infty} k q_{oo}^{(k)} = G'(1)$.

Un calcul simplu completează demonstraţia.

<u>Propoziţia V.3.14</u>. Dacă $\rho < 1$,

$$P(b < t) = \begin{cases} 0, \text{ pentru } t \leq 0, \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} C_{2k-1}^{k-1} \left(\frac{\rho}{1+\rho}\right)^{k+1} \left(\frac{1}{1+\rho}\right)^k \frac{\mu^k}{\Gamma(k)} \cdot \\ \cdot \int_0^t x^{k-1} e^{-\mu x} dx , \text{ pentru } t > 0 \end{cases} \tag{V.3.17.}$$

şi

$$M(b) = \frac{1}{\mu-\lambda} = \frac{1}{\mu(1-\rho)}$$

Demonstrație:

$$(V.3.18.)\qquad P(b<t)=\sum_{k=1}^{\infty} P(b<t\,|\,x(b)=k)P(x(b)=k)$$

Să observăm că dacă $x(b)=k$, atunci durata perioadei de ocupare a sistemului de serviciu coincide cu suma duratelor serviciilor a k unități și cum această sumă este repartizată $\Gamma(\mu,k)$.

$$P(b<t\,|\,x(b)=k)=\frac{\mu^k}{\Gamma(k)}\int_0^t x^{k-1}e^{-\mu x}dx$$

Inlocuind în (V.3.18.) rezultă (V.3.17.).

$$M(b)=\int_0^{\infty} t\,dP(b<t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}C_{2k-1}^{k-1}\left(\frac{\rho}{1+\rho}\right)^{k-1}\left(\frac{1}{1+\rho}\right)^k\frac{\mu^k}{\Gamma(k)}\cdot$$

$$\cdot\int_0^{\infty} t^k e^{-\mu t}dt=\frac{1}{\mu}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{2k-1}C_{2k-1}^{k-1}\left(\frac{\rho}{1+\rho}\right)^{k-1}\left(\frac{1}{1+\rho}\right)^k=$$

$$=\frac{1}{\mu}M(x(b))=\frac{1}{\mu(1-\rho)}\ .$$

3.6. Fluxul de ieșire (cazul s=1).

Presupunem că o unitate părăsește sistemul de serviciu imediat ce își încheie serviciul.

Fie atunci $0\leq t_1'<t_2'<\ldots$ momentele plecărilor unităților servite și $y_j=t_j'-t_{j-1}'$, $j\geq 1(t_0'=0)$.

<u>Propoziția V.3.15</u>. In ipoteza (ES).

$$\lim_{t_{j-1}'\to\infty} P(y_j<t)=\begin{cases}0, & \text{pentru } t\leq 0\\ 1-e^{-\lambda t}, & \text{pentru } t>0\end{cases}$$

Demonstrație:

$$\text{Să observăm că } y_j=\begin{cases}v_j, & \text{dacă } x_{t_{j-1}'}\neq 0\\ v_j+\theta, & \text{dacă } x_{t_{j-1}'}=0\end{cases}$$

unde θ este intervalul de timp scurs între momentul t_{j-1}' și momentul sosirii unității de rang j. Atunci pentru $t>0$,

$$P(y_j < t) = \sum_{i \in I} P(y_j < t / x_{t'_{j-1}} = i) P(x_{t'_{j-1}} = i) =$$

$$= P(x_{t'_{j-1}} = 0) P(v_j + \theta < t) + \sum_{i \geq 1} P(x_{t'_{j-1}} = i) P(v_j < t)$$

Dar v_j este repartizată exponențial cu parametrul μ iar θ este timpul rezidual al sosirilor la momentul t'_{j-1} și conform propoziției V.2.5. este repartizată exponențial cu parametrul λ. In plus, v_j și θ sînt independente.

Deci,

$$P(y_j < t) = P(x_{t'_{j-1}} = 0) \int_0^t \left(\int_0^{t-x} \lambda e^{-\lambda y} dy \right) \mu e^{-\mu x} dx +$$

$$+ \sum_{i \geq 1} P(x_{t'_{j-1}} = i) \int_0^t \mu e^{-\mu x} dx =$$

$$= P(x_{t'_{j-1}} = 0) \left((1 - \frac{1}{1-\rho} e^{-\lambda t} + \frac{\rho}{1-\rho} e^{-\mu t} \right) +$$

$$+ (1 - e^{-\mu t}) \sum_{i \geq 1} P(x_{t'_{j-1}} = i)$$

In ipoteza (ES),

$$\lim_{t'_{j-1} \to \infty} P(y_j < t) = (1-\rho)(1 - \frac{1}{1-\rho} e^{-\lambda t} + \frac{\rho}{1-\rho} e^{-\mu t}) +$$

$$+ \rho (1 - e^{-\mu t}) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

<u>Observație</u>: Variabilele aleatoare $\{y_j\}_{j \geq 1}$ sînt independente. O motivație intuitivă a acestei afirmații o constituie faptul că duratele serviciilor diferitelor unități sînt variabile aleatoare independente, iar serviciul este independent de fluxul de intrare.

Cu această observație, deoarece $v_t = \max \{ j \mid \sum_{r=1}^{j} y_r < t \}$, $t > 0$, rezultă că, asimptotic, fluxul de ieșire $\{v_t\}_{t \in [0,\infty)}$ se comportă ca un proces Poisson de parametru λ.

3.7. Timpul de aşteptare.

Durata aşteptării în şirul de aşteptare sau în sistemul de aşteptare este, evident, dependentă de tipul disciplinei serviciului.

a) Modelul M/M/s/∞/FIFO

<u>Propoziţia V.3.16</u>. In ipoteza (ES),

$$\lim_{t\to\infty} P(w_t < \tau) = \begin{cases} 0, \text{ pentru } \tau \leq 0 \\ 1-p_0 \dfrac{\rho^s}{s!(1-\rho^*)} e^{-s\mu(1-\rho^*)\tau}, \text{ pentru } \tau > 0. \end{cases}$$

Demonstraţie:

Dacă $\tau > 0$,

$$P(w_t \geq \tau) = \sum_{j=s}^{\infty} P(x_t=j)P(w_t \geq \tau \mid x_t=j)$$

Dar, pentru $j \geq s$,

$$P(w_t \geq \tau \mid x_t=j) = P(\overline{v}_\tau \leq j-s)$$

ambii membri ai acestei egalităţi exprimînd probabilitatea ca la momentul $\tau+t$, sistemul de serviciu să fie complet ocupat.

Atunci, ţinînd seama de propoziţia V.3.

$$P(w_t \geq \tau) = \sum_{j=s}^{\infty} P(x_t=j) \sum_{r=0}^{j-s} e^{-\mu s\tau} \frac{(\mu s\tau)^r}{r!}$$

Dar în ipoteza (ES), $\lim\limits_{t} P(x_t=j)=p_j$ şi deci,

$$\lim_{t\to\infty} P(w_t < \tau)=p_0 e^{-\mu s\tau} \frac{\rho^s}{s!} \sum_{j=s}^{\infty} (\rho^*)^{j-s} \sum_{r=0}^{j-s} \frac{(\mu s)^r}{r!} \tau^r =$$

$$= p_0 \frac{\rho^s}{s!} e^{-\mu s\tau} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mu s)^k}{k!} \sum_{r=0}^{\infty} \rho^{*k+r} \tau^k =$$

$$= p_0 \frac{\rho^s}{s!} e^{-\mu s\tau} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mu s\rho^*)^k}{k!} \tau^k \sum_{r=0}^{\infty} \rho^{*r} =$$

$$= p_0 \frac{\rho^s}{s!(1-\rho^*)} e^{-\mu s\tau} e^{\mu s\rho^*\tau} = p_0 \frac{\rho^s}{s!(1-\rho^*)} e^{-\mu s(1-\rho^*)\tau}$$

Corolar. Pentru s=1,

$$\lim_{t\to\infty} P(w_t < \tau) = \begin{cases} 0, \text{ pentru } \tau \le 0 \\ 1-\rho e^{-\mu(1-\rho)\tau}, \text{pentru } \tau > 0. \end{cases}$$

Propoziţia V.3.15. In ipoteza (ES),

$$\lim_{t\to\infty} M(w_t) = p_0 \frac{\rho^s}{s!} \frac{1}{s\mu(1-\rho^*)^2}$$

Demonstraţie:

$$M(w_t) = \int_0^\infty \tau \, dP(w_t<\tau) = \sum_{j=s}^\infty P(x_t=j) \sum_{r=0}^{j-s} \frac{(\mu s)^r}{r!}(\mu s \tau^{r+1} -$$

$$- r\tau^r)\, e^{-\mu s\tau} d\tau = \frac{1}{\mu s} \sum_{j=s}^\infty (j-s+1)P(x_t=j)$$

De aici,

$$\lim_{t\to\infty} M(w_t) = p_0 \frac{\rho^s}{s!\mu s} \sum_{j=s}^\infty (j-s+1)\rho^{*\,j-s} = p_0 \frac{\rho^s}{s!\mu s} \frac{1}{(1-\rho^*)^2}$$

Corolar. Pentru s=1,

$$\lim_{t\to\infty} M(w_t) = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)}$$

Observaţie. In general, timpul virtual de aşteptare în şir, w_t nu reprezintă timpul real pe care o unitate trebuie să-l petreacă în şirul de aşteptare, pînă în momentul începerii serviciului propriu. Un exemplu concludent, în acest sens, îl constituie modelele cu o staţie, cu timp de serviciu constant şi egal cu intervalul de timp dintre sosiri. Evident, în acest caz durata aşteptării, în şir, a oricărei unităţi este un multiplu al duratei serviciului, pe cînd durata timpului virtual de aşteptare, măsurată de la un moment t arbitrar, poate lua şi valori diferite de multiplii duratei serviciului. Totuşi, în cazul modelelor studiate în acest capitol, timpul virtual de aşteptare, are o repartiţie foarte apropiată de cea a timpului actual de aşteptare. Acest fapt se datorează proprietăţii speciale de care se bucură repartiţia exponenţială, exprimată în propoziţia V.2.5. Mai precis, repartiţia timpului scurs între momentul arbitrar t şi momentul primei sosiri ulterioare, este aceeaşi cu repartiţia timpului trecut între momentele celor două sosiri consecutive care-l încadrează pe t.

In afara acestor considerente, pentru modelele cu disciplina FIFO, w_t are şi o altă semnificaţie importantă - este lungimea intervalului de timp, măsurat de la momentul t, necesar pentru creerea unui loc liber în sistemul de serviciu.

b) Modelul M/M/1/∞/LIFO

Propoziţia V.3.16. Pentru orice $t \geq 0$.

$$P(w_t < \tau) = \begin{cases} 0, \text{ pentru } \tau \leq 0 \\ p_t(0) + (1-p_t(0)) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} C_{2k-1}^{k-1} \left(\frac{\rho}{1+\rho}\right)^{k-1} \left(\frac{1}{1+\rho}\right)^k \cdot \\ \cdot \frac{\mu^k}{\Gamma(k)} \int_0^{\tau} x^{k-1} e^{-\mu x} dx, \text{ pentru } \tau > 0. \end{cases}$$

Demonstraţia foloseşte concluziile următoarelor două leme.

Lema V.3.2. Fie u, v, două variabile aleatoare independente repartizate exponenţial cu parametrii λ, respectiv μ. Atunci, dacă $z = u - v$,

$$P(z < t) = \begin{cases} \frac{\rho}{1+\rho} e^{\mu t}, \text{ dacă } t \leq 0 \\ 1 - \frac{1}{1+\rho} e^{-\lambda t}, \text{ dacă } t > 0. \end{cases} \tag{V.3.18.}$$

Demonstraţie:

Fie f_u, f_v, densităţile de repartiţie ale lui u şi v.

$$P(z < t) = \iint_{x-y<t} f_u(x) f_v(y) dx dy.$$

Dacă $t \leq 0$,

$$P(z < t) = \int_{-x}^{\infty} (\mu e^{-\mu y} \int_0^{y+t} \lambda e^{-\lambda x} dx) dy = \frac{\rho}{1+\rho} e^{\mu t}$$

Dacă $t > 0$,

$$P(z < t) = \int_0^{\infty} \left(\mu e^{-\mu y} \int_0^{y+t} \lambda e^{-\lambda x} dx\right) dy = 1 - \frac{1}{1+\rho} e^{-\lambda t}$$

<u>Lema V.3.3.</u> Fie $z_1, \ldots, z_k$ variabile aleatoare independente, identic repartizate, urmînd repartiția dată de (V.3.18.). Atunci:

$$P(z_1 < 0, \ldots, z_1 + \ldots + z_{k-1} < 0, z_1 + \ldots + z_k \geq 0) =$$

$$= \frac{1}{2k-1} C_{2k-1}^{k-1} \left(\frac{\rho}{1+\rho}\right)^{k-1} \cdot \left(\frac{1}{1+\rho}\right)^k$$

Demonstrație:

Fie $t \geq 0$. Demonstrăm, prin inducție relativ la k, egalitatea:

(V.3.19.) $$P(z_1 < t, \ldots, z_1 + \ldots + z_{k-1} < t, z_1 + \ldots + z_k \geq t) =$$

$$= \left(\frac{1}{1+\rho}\right)^k e^{-\lambda t} \sum_{j=0}^{k-1} a_j^k \left(\frac{\rho}{1+\rho}\right)^j (\lambda t)^{k-j-1}$$

unde,

(V.3.20.) $$a_j^k = \begin{cases} \frac{1}{(k-1)!}, & \text{pentru } j=0 \\ \frac{k-1}{(k-2)!}, & \text{pentru } j=1 \\ \frac{(k-j)(k+1)\ldots(k+j-1)}{j!(k-j-1)!}, & \text{pentru } 2 \leq j \leq k-1 \end{cases}$$

$k \geq 1$.

Intr-adevăr, pentru $k=1$, $P(z_1 \geq t) = \frac{1}{1+\rho} e^{-\lambda t}$ și (V.3.19.) este banal verificată.

O presupunem adevărată la pasul k. Putem scrie:

$$P(z_1 < t, \ldots, z_1 + \ldots + z_k < t, z_1 + \ldots + z_{k+1} \geq t) =$$

$$= \int_{-\infty}^{t} P(z_2 < t-x, \ldots, z_2 + \ldots + z_k < t-x, z_2 + \ldots + z_{k+1} \geq t-x) f_{z_1}(x) dx$$

Dar, $z_1, z_2, \ldots, z_{k+1}$ sînt identic repartizate și atunci, ipoteza de inducție, în care t se înlocuiește cu $t-x \geq 0, x \in (-\infty, t)$, permite identificarea ultimei integrale cu:

$$\frac{1}{(1+\rho)^k} \sum_{j=0}^{k-1} a_j^k \left(\frac{\rho}{1+\rho}\right)^j \lambda^{k-j-1} \int_{-\infty}^{t} (t-x)^{k-j-1} e^{-\lambda(t-x)} f_{z_1}(x) dx =$$

$$= \frac{1}{(1+\rho)^{k+1}} e^{-\lambda t} \sum_{j=0}^{k-1} a_j^k \left(\frac{\rho}{1+\rho}\right)^j \lambda^{k-j} \left[\int_{-\infty}^{0} (t-x)^{k-j-1} e^{(\lambda+\mu)x} dx + \right.$$

$$\left. + \int_0^t (t-x)^{k-j-1} dx \right]$$

Integrînd succesiv prin părţi, se obţine:

$$\int_{-\infty}^{0} (t-x)^r e^{(\lambda+\mu)x} dx = \sum_{i=0}^{r} \frac{r!}{(r-i)!} \quad \frac{t^{r-i}}{(\lambda+\mu)^{i+1}}$$

şi atunci

$$P(z_1 < t, \ldots, z_1 + \ldots z_k < t, z + \ldots + z_{k+1} \geqslant t) =$$

$$= \left(\frac{1}{1+\rho}\right)^{k+1} e^{-\lambda t} \left[\sum_{j=0}^{k-1} a_j^k \left(\frac{\rho}{1+\rho}\right)^j \lambda^{k-j} \sum_{i=0}^{k-j-1} \frac{(k-j-1)!}{(k-j-1-i)!} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \frac{t^{k-j-1-i}}{(\lambda+\mu)^{i+1}} + \sum_{j=0}^{k-1} a_j^k \left(\frac{\rho}{1+\rho}\right)^j \frac{(\lambda t)^{k-j}}{k-j} \right] =$$

$$= \left(\frac{1}{1+\rho}\right)^{k+1} e^{-\lambda t} \left[\sum_{j=0}^{k-1} a_j^k (k-j-1)! \sum_{r=j+1}^{k} \left(\frac{\rho}{1+\rho}\right)^r \frac{(\lambda t)^{k-r}}{(k-r)!} + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=0}^{k-1} a_j^k \left(\frac{\rho}{1+\rho}\right)^j \cdot \frac{(\lambda t)^{k-j}}{k-j} \right]$$

sau, reordonînd termenii sumelor după puterile lui λ t,

(V.3.21.)
$$P(z_1 < t, \ldots, z_1 + \ldots + z_k < t, z_1 + \ldots + z_{k+1} \geqslant t) =$$
$$= \left(\frac{1}{1+\rho}\right)^{k+1} e^{-\lambda t} \sum_{j=1}^{k} a_j^{k+1} \left(\frac{\rho}{1+\rho}\right)^j (\lambda t)^{k-j}$$

unde,

$$a_j^{k+1} = \sum_{s=0}^{j} \frac{(k-s-1)!}{(k-j)!} a_s^k, \quad 0 \leq j \leq k \quad (a_k^k = 0)$$

Ţinînd seama de (V.3.20.), rezultă,

(V.3.22.)
$$a_j^{k+1} = \begin{cases} \frac{1}{k!}, & \text{pentru } j=0 \\ \frac{k}{(k-1)!}, & \text{pentru } j=1 \\ \frac{(k-j+1)(k+2)\ldots(k+j)}{j!(k-j)!}, & \text{pentru } 2 \leq j \leq k \end{cases}$$

Intr-adevăr, pentru justificarea relaţiilor (V.3.22.), observăm că pentru $j \geq 2$,

$$\sum_{s=0}^{j} \frac{(k-s-1)!}{(k-j)!} a_s^k = \sum_{s=0}^{j} \frac{(k-s)(k+1)\ldots(k+s-1)}{(k-j)!s!} =$$

$$= \frac{1}{(k-j)!} \sum_{s=0}^{j} \frac{k-s}{k+s} C_{k+s}^{k}$$

Pe de altă parte,

$$\frac{(k-j+1)(k+2)\ldots(k+j-1)}{j!(k-j)!} = \frac{1}{(k-j)!} \frac{k-j+1}{k+j+1} C_{k+j+1}^{k+1}$$

Or , egalitatea,

$$\sum_{s=0}^{j} \frac{k-s}{k+s} C_{k+s}^{k} = \frac{k-j+1}{k+j+1} C_{k+j+1}^{k+1}$$

se verifică, cu uşurinţă prin inducţie relativ la j.

Cu egalităţile (V.3.21.), (V.3.22.) a fost demonstrată (V.3.19.). De aici, pentru $t=0$, rezultă,

$$P(z_1 < 0,\ldots,z_1+\ldots+z_{k-1} < 0, z_1+\ldots+z_k \geq 0) = a_{k-1}^{k} \left(\frac{\rho}{1+\rho}\right)^{k-1} \left(\frac{1}{1+\rho}\right)^{k}$$

$$\text{Or , } a_{k-1}^{k} = \frac{(k+1)\ldots(2k-2)}{(k-1)!} = \frac{(2k-2)!}{k!(k-1)!} = \frac{1}{2k-1} C_{2k-1}^{k-1}$$

şi astfel lema este demonstrată.

Demonstraţia propoziţiei:

In cazul disciplinei LIFO, dacă $x_t = i \neq 0$, timpul virtual de aşteptare raportat la momentul t, ia sfîrşit în momentul în care, în afara celor i-1 unităţi aflate în şirul de aşteptare la momentul t, în sistemul de aşteptare nu se mai află nici o altă unitate.

Cu alte cuvinte, pe durata w_t este servită unitatea aflată în staţie la momentul t şi de asemenea sînt servite toate unităţile care, sosind în sistemul de aşteptare după t, găsesc staţia ocupată de o altă unitate sosită tot după acest moment.

Fie $t_1', t_2', \ldots$ momentele sosirilor succesive ale unităţilor, ulterioare lui t. Notăm $u_j' = t_j' - t_{j-1}'$, $j=1,2,\ldots$ $(t_0' = t)$.

Datorită ipotezelor modelului şi propoziţiei V.2.5., $u_1', u_2', \ldots$ sînt variabile aleatoare independente urmînd, toate, repartiţia exponenţială cu parametru μ.

Fie v_1 timpul rezidual al serviciului unităţii aflate în staţie la momentul t şi $v_2, v_3, \ldots$ duratele serviciilor unităţilor sosite şi servite în intervalul w_t.

Din nou, datorită ipotezelor şi a propoziţiei V.2.5., $v_1, v_2, \ldots$ sînt variabile aleatoare independente, urmînd repartiţia exponenţială de parametru μ.

Punem $z_j = u_j' - v_j, j \geq 1$ şi $z_{(k)} = \sum_{j=1}^{k} z_j$.

Cu aceste notaţii:

$$w_t = \begin{cases} 0, \text{ dacă } x_t = 0 \\ v_1, \text{ dacă } x_t = i \neq 0 \text{ şi } z_{(1)} \geq 0 \\ v_1 + \ldots + v_k, \text{ dacă } x_t = i \neq 0 \text{ şi} \\ z_{(1)} < 0, \ldots, z_{(k-1)} < 0, z_{(k)} \geq 0, k \geq 2 \end{cases}$$

Atunci putem scrie:

$$P(w_t < z) = \sum_{i=0}^{\infty} P(x_t = i) P(w_t < z \mid x_t = i) = P(x_t = 0) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{\infty} P(x_t = i) \sum_{k=1}^{\infty} P(w_t < z / x_t = i, z_{(1)} < 0, \ldots, z_{(k-1)} < 0, z_{(k)} \geq 0) \cdot$$

$$\cdot P(z_{(1)} < 0, \ldots, z_{(k-1)} < 0, z_{(k)} \geq 0) =$$

$$= P(x_t = 0) + \sum_{i=1}^{\infty} P(x_t = i) \sum_{k=1}^{\infty} P\Big(\sum_{j=1}^{k} v_j < z\Big) P(z_{(1)} < 0, \ldots, z_{(k-1)} < 0,$$

$$z_{(k)} \geq 0) = p_t(0) + (1 - p_t(0)) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} C_{2k-1}^{k-1} \Big(\frac{\rho}{1+\rho}\Big)^{k-1} \Big(\frac{1}{1+\rho}\Big)^{k} \cdot$$

$$\frac{\mu^k}{\Gamma(k)} \int_0^{z} x^{k-1} e^{-\mu x} dx.$$

<u>Propoziţia V.3.17</u>. In ipoteza (ES), dacă $\rho < 1$,

$$\lim_{t \to \infty} M(w_t) = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)}$$

Demonstrație:

$$M(w_t) = \int_0^{\infty} \tau \, dP(w_t < \tau) = (1-p_t(0)) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} C_{2k-1}^{k-1} \left(\frac{\rho}{1+\rho}\right)^{k-1} \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{1}{1+\rho}\right)^k \frac{\mu^k}{\Gamma(k)} \int_0^{\infty} \tau^k e^{-\mu\tau} d\tau$$

Dar, în ipoteza (ES), $\lim_{t\to\infty} (1-p_t(0)) = \rho$. De aici,

$$\lim_{t\to\infty} M(w_t) = \rho M(b) = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)}$$

(vezi propoziția V.3.14.)

<u>Observație</u>: In ipoteza (ES), valoarea asimtotică a timpului mediu de așteptare în șir este aceeași pentru ambele discipline de servire studiate aici.

ANEXE

A.1. Mulţimi convexe în R^n.

Definiţie. $\mathcal{C} \subseteq R^n$ este convexă dacă, oricare ar fi submulţimea sa finită $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ şi sistemul de numere λ_x, $\lambda_x \geq 0$, $x \in \mathcal{C}'$, $\sum_{x \in \mathcal{C}'} \lambda_x = 1$, rezultă $\sum_{x \in \mathcal{C}'} \lambda_x x \in \mathcal{C}$.

Exemple de mulţimi convexe:

a) segmentul determinat de x şi y; $[x,y] = \{z = \lambda x + (1-\lambda) y \mid \lambda \in [0,1]\}$, $x,y \in R^n$.

b) dreapta $\overline{xy} = \{z = \lambda x + (1-\lambda)y \mid \lambda \in R\}$, $x,y \in R^n$, $x \neq y$, sau,

$$\mathcal{L}_{xy} = \{z = x + \lambda y \mid \lambda \in R\},\ x,y \in R^n,\ y \neq 0.$$

c) raza incidentă în x; $\mathcal{R}_{xy} = \{z = x + \lambda y \mid \lambda \geq 0\}$, $x,y \in R^n$, $y \neq 0$.

d) hiperplanul; $\mathcal{H}_{a\alpha} = \{x \mid a^T x = \alpha\}$, $a \in R^n$, $a \neq 0$, $\alpha \in R$

e) semispaţiul închis mărginit de $\mathcal{H}_{a,\alpha}$; $\mathcal{D}_{a\alpha} = \{x \mid a^T x \geq (\leq) \alpha\}$

f) semispaţiul deschis mărginit de $\mathcal{H}_{a,\alpha}$; $\mathring{\mathcal{D}}_{a,\alpha} = \{x \mid a^T x > (<) \alpha\}$

g) tronsonul; intersecţia unui număr finit de semispaţii închise.

h) poliedrul convex; tronsonul mărginit.

Propoziţia A.1.1. $\mathcal{C} \subseteq R^n$ este convexă dacă şi numai dacă, oricare ar fi $x,y \in \mathcal{C}$, atunci $[x,y] \subseteq \mathcal{C}$.

Propoziţia A.1.2. Dacă $\{\mathcal{C}_\alpha\}_{\alpha \in I}$ este o familie de mulţimi convexe, atunci $\bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{C}_\alpha$ este convexă.

Propoziţia A.1.3. Dacă $\varphi : R^n \to R^n$ este o aplicaţie afină şi $\mathcal{C}$ este convexă, atunci $\varphi(\mathcal{C})$ este convexă.

Definiţie. Dimensiunea lui $\mathcal{C}$ (dim. $\mathcal{C}$) este dimensiunea celei mai mici varietăţi liniare $\mathcal{V}$ care conţine pe $\mathcal{C}$. Prin int. $\mathcal{C}$, fr. $\mathcal{C}$ vom desemna interiorul, respectiv, frontiera lui $\mathcal{C}$ definite relativ la topologia indusă în $\mathcal{V}$.

Propoziţia A.1.4. Dacă $\mathcal{C}$ este convexă atunci int. $\mathcal{C}$ este convexă.

Observaţie. Deoarece orice varietate liniară $\mathcal{V}$ a lui R^n este translatata unui subspaţiu liniar, putem considera, în cazul $\mathcal{C} \subseteq R^n$, dim. $\mathcal{C}$ $= r < n$, că $\mathcal{C} \subseteq R^r$.

Definiţie. Acoperirea convexă a lui $\mathcal{C}$ ($[\mathcal{C}]$) este intersecţia tuturor mulţimilor convexe care conţin pe $\mathcal{C}$.

Definiţie. Acoperirea convexă închisă a lui $\mathcal{C}$ ($[\overline{\mathcal{C}}]$) este intersecţia tuturor mulţimilor convexe închise care conţin pe $\mathcal{C}$.

Propoziţia A.1.5. $[\mathcal{C}]$ şi $[\overline{\mathcal{C}}]$ sînt mulţimi convexe.

Propoziţia A.1.6. $[\overline{\mathcal{C}}]$ coincide cu închiderea lui $[\mathcal{C}]$.

Propoziţia A.1.7. $[\mathcal{C}] = \{x \in R^n \mid$ există $x^1, \dots, x^{n+1} \in \mathcal{C}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1} \geq 0$, $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$, astfel ca $x = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x^i$.

Demonstraţie:

a) $[\mathcal{C}] = \{x \in R^n \mid$ există $\mathcal{C}_x \subset \mathcal{C}$, $|\mathcal{C}_x| < \infty$ şi $\{\lambda_a\}_{a \in \mathcal{C}_x} \subset R$, $\lambda_a \geq 0$,

$$\sum_{a \in \mathcal{C}_x} \lambda_a = 1, \text{ astfel ca } x = \sum_{a \in \mathcal{C}_x} \lambda_a a \}$$

Egalitatea se demonstrează prin dublă incluziune.

b) Fie $x \in [\mathcal{C}]$ şi $a^1, \dots, a^k \in \mathcal{C}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_k \geq 0$. $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$, $x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a^i$

Presupunem $k > n+1$ (în caz contrar, propoziţia este verificată). Atunci $\{a^i\}_{i=1,\dots,k}$ sînt liniar dependenţi. Există deci, $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in R$, $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i^2 \neq 0$, pentru care:

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i a^i = 0 \ , \ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 0$$

Deci, oricare ar fi β ,

(A.1.1.) $$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a^i + \beta \sum_{i=1}^{k} \alpha_i a^i = \sum_{i=1}^{k} (\lambda_i + \beta \alpha_i) a^i \ .$$

Alegînd $\beta = \min\limits_{\alpha_i < 0} \dfrac{\lambda_i}{-\alpha_i} = -\dfrac{\lambda_j}{\alpha_j} > 0$, rezultă:

$$\lambda_i + \beta\alpha_i \geq 0, \text{ pentru } i \neq j, \quad \lambda_j + \beta \alpha_j = 0$$

şi deci, (A.1.1.) dă o reprezentare a lui x ca o combinaţie liniară convexă a cel mult k-1 elemente din $\mathscr{C}$. Procesul continuă pînă cînd numărul elementelor reprezentării devine cel mult n+1.

<u>Propoziţia A.1.8</u>. Fie $f: \mathscr{C} \to R$ liniară. Atunci f este continuă şi există $a \in R^n$, $a \neq 0$, astfel ca $f(x) = c^T x$

Demonstraţie:

Fie $e^1, \ldots, e^n$ vectorii unitari din R^n. Notăm $a_i = f(e^i)$, $a = (a_i)$.

Atunci, pentru orice $x \in R^n$, $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e^i$ şi deci:

$$f(x) = f\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i e^i\Big) = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i = a^T x \ .$$

Fie $x^0 \in \mathscr{C}$.

$$|f(x) - f(x^0)| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i| |x_i - x_i^0| \leq \max_i |x_i - x_i^0| \sum_{i=1}^{n} a_i =$$

$$= \| x - x^0 \| \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i$$

De aici continuitatea lui f.

<u>Propoziţia A.1.9</u>. Dacă $\mathscr{C}$ este compactă, atunci $[\mathscr{C}]$ este compactă.

Demonstraţie:

Fie $\varphi^n = \{ s = (\lambda_i)_{i=1,\ldots,n+1} \mid \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1 \} \subset R^{n+1}$

Evident, $\mathcal{S}^n$ este poliedru convex, deci mulţime compactă şi convexă. Fie:

$$f : \underbrace{\mathcal{S}^n \times \mathcal{C} \times \ldots \times \mathcal{C}}_{n+1 \text{ ori}} \to R^n;\ f(s,x^1,\ldots,x^{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x^i$$

Deci, $f(\mathcal{S}^n \times \mathcal{C} \times \ldots \times \mathcal{C}) = [\mathcal{C}]$. In plus, f este continuă:

$$\| f(s,x^1,\ldots,x^{n+1}) - f(\bar{s},\bar{x}^1,\ldots,\bar{x}^{n+1}) \| = \| \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x^i - \sum_{i=1}^{n+1} \bar{\lambda}_i \bar{x}^i \| \leq$$

$$\leq \| \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x^i - \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \bar{x}^i \| + \| \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \bar{x}^i - \sum_{i=1}^{n+1} \bar{\lambda}_i \bar{x}^i \| \leq \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \| x^i - \bar{x}^i \| +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n+1} |\lambda_i - \bar{\lambda}_i| \| \bar{x}^i \| \leq \max_{1 \leq i \leq n+1} \| x^i - \bar{x}^i \| + \max_i |\lambda_i - \bar{\lambda}_i| \sum_{i=1}^{n+1} \| \bar{x}^i \| \leq$$

$$\leq (1 + \sum_{i=1}^{n+1} \| \bar{x}^i \|) \max_{i,j} \{ |x_j^i - \bar{x}_j^i| ,\ |\lambda_i - \bar{\lambda}_i| \} =$$

$$= (1 + \sum_{i=1}^{n+1} \| \bar{x}^i \|) \| (s,x^1,\ldots,x^{n+1}) - (\bar{s},\bar{x}^1,\ldots,\bar{x}^{n+1}) \|$$

In concluzie, $[\mathcal{C}]$ este imaginea compactului $\mathcal{S}^n \times \mathcal{C} \times \ldots \times \mathcal{C}$ prin funcţia continuă f.

<u>Corolar</u>. Dacă $a^1,\ldots,a^k \in R^n$, atunci $[a^1,\ldots,a^k]$ este compactă, convexă.

<u>Propoziţia A.1.10</u>. Dacă $\mathcal{C}$ este nevidă, convexă şi închisă şi $0 \notin \mathcal{C}$ atunci există $a \neq 0$, $\alpha > 0$, astfel încît $\mathcal{C} \subset \mathring{\mathcal{D}}_{a,\alpha}$

Demonstraţie:

Fie $\mathcal{B}(0,r) = \{ x \in R^n \mid \| x \| \leq r \}$ cu r suficient de mare, astfel ca:

$$\mathcal{C} \cap \mathcal{B}(0,r) \neq \emptyset$$

Dar $\mathcal{C} \cap \mathcal{B}(0,r)$ este compactă, convexă şi deci, aplicaţia $\| \cdot \|$ îşi atinge minimul într-un punct x^0;

$$\|x^0\| = \min_{x \in \mathcal{C} \cap \mathcal{B}(0,r)} \|x\| \quad , 0 < \|x^0\| \leq r$$

Atunci, pentru orice $x \in \mathcal{C}$, $\|x\| \geq \|x^0\|$.

Definind $a = x^0$, rezultă $a^T x \geq \|x^0\|^2$.

Intr-adevăr, pentru $\lambda \in (0,1)$, $\lambda x + (1-\lambda)x^0 \in \mathcal{C}$ şi deci, $\|\lambda x + (1-\lambda)x^0\|^2 \geq \|x^0\|^2$

$$\lambda\|x\|^2 + \lambda\|x^0\|^2 + 2(1-\lambda)(x^0)^T x \geq 2\|x^0\|^2$$

Pentru $\lambda \to 0$, rezultă: $(x^0)^T x \geq \|x^0\|^2$

Luînd $\alpha = \dfrac{\|x^0\|^2}{2}$ rezultă propoziţia.

<u>Propoziţia A.2.11.</u> (Teorema de separaţie strictă). Fie $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ convexe, disjuncte, $\mathcal{C}_1$ compactă, $\mathcal{C}_2$ închisă. Atunci există un hiperplan $\mathcal{H}_{a,\alpha}$ care le separă strict.

Demonstraţie:

$\mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_2 = \{ z = x - y \mid x \in \mathcal{C}_1, y \in \mathcal{C}_2 \}$ este închisă şi convexă. De asemeni $0 \notin \mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_2$ ($\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \emptyset$). Există, deci $a \neq 0$, $\beta > 0$ astfel ca $a^T z > \beta$ oricare ar fi $z \in \mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_2$. Atunci:

$$a^T x > a^T y + \beta \quad , \text{ oricare ar fi } x \in \mathcal{C}_1,\ y \in \mathcal{C}_2.$$

Luînd $\alpha = \sup_{y \in \mathcal{C}_2} a^T y + \beta/2 < \infty$, rezultă;

$$a^T x > \alpha > a^T y \quad , \text{ oricare ar fi } x \in \mathcal{C}_1, y \in \mathcal{C}_2$$

şi deci hiperplanul $\mathcal{H}_{a,\alpha}$ separă strict pe $\mathcal{C}_1$ de $\mathcal{C}_2$.

<u>Propoziţia A.1.12</u>. Fie $\mathcal{C}$ convexă, nevidă, $0 \notin \mathcal{C}$. Atunci există $a \neq 0$ astfel ca $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}_{a,0}$.

Demonstraţie:

Pentru fiecare $x \in \mathcal{C}$, fie $\mathcal{C}_x = \{ y \mid \|y\| = 1, y^T x \geq 0 \}$

Oricare ar fi $x^1, \ldots, x^k \in \mathcal{C}$, $[x^1, \ldots, x^k]$ este compactă, convexă, neconţinînd originea. Există deci $\bar{y} \neq 0$ cu $\bar{y}^T x > 0$, pentru toţi $x \in [x^1, \ldots, x^k]$. Luînd $a = \bar{y} \dfrac{1}{\|\bar{y}\|}$, rezultă $a^T x > 0$, pentru toţi $x \in [x^1, \ldots, x^k]$.

Deci, $a \in \bigcap_{i=1}^{k} \mathcal{C}_{x_i}$, adică familia de închise $\{\mathcal{C}_x\}_{x \in \mathcal{C}}$ din compactul $\{y \mid \|y\| = 1\}$ are proprietatea intersecţiei finite. De aici,

$$\bigcap_{x \in \mathcal{C}} \mathcal{C}_x \neq \emptyset \text{ , există deci, } a \in \mathcal{C}_x, x \in \mathcal{C} \text{ cu } a \neq 0 \ (\|a\| = 1),$$

cu alte cuvinte, $a^T x \geq 0$, pentru toţi $x \in \mathcal{C}$.

Propoziţia A.1.13. (Teorema de separaţie nestrictă). Fie $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ convexe cu int. $(\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2) = \emptyset$. Atunci există $a \in \mathbb{R}^n$, $a \neq 0$, astfel încît $a^T x \geq a^T y$, pentru orice $x \in \mathcal{C}_1$ şi $y \in \mathcal{C}_2$.

Demonstraţie:

int. $(\mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_2)$ este convexă şi $0 \notin$ int.$(\mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_2)$. Atunci există $a \neq 0$, astfel încît int.$(\mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_2) \subseteq \mathcal{D}_{a,0}$. Rezultă de aici că $\mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_2 \subseteq \mathcal{D}_{a,0}$.

Deci $a^T z \geq 0$ pentru orice $z \in \mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_2$, adică $a^T x \geq a^T y$, pentru orice $x \in \mathcal{C}_1$ şi $y \in \mathcal{C}_2$.

Propoziţia A.1.14. (Prima teoremă de intersecţie). Fie $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_k$ convexe, compacte, astfel ca:

$$K = \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{C}_i \text{ este convexă}$$

$$\bigcap_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} \mathcal{C}_j \neq \emptyset, \ i = 1, \ldots, k.$$

Atunci, $\bigcap_{i=1}^{k} \mathcal{C}_i \neq \emptyset$.

Demonstraţie:

Prin inducţie relativ la k.

$k=2$. $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2 \neq \emptyset$, convexe, compacte şi $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ convexă. Prin absurd admitem că $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \emptyset$. Există, atunci un hiperplan $\mathcal{H}_{a,\alpha}$ care separă strict pe $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$;

(A.1.2.) $$a^T x < \alpha < a^T y, x \in \mathcal{C}_1, y \in \mathcal{C}_2.$$

Fie $x \in \mathcal{C}_1$ şi $y \in \mathcal{C}_2$. Atunci $[x,y] \subset \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$. Cum $f(z)=a^T z$ este continuă, $f([x,y])$ este compactă şi conţine, deci, pe $[f(x),f(y)]$.

Rezultă existenţa unui $z \in \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ cu $f(z)=\alpha$. De aici sau $z \in \mathcal{C}_1$, sau $z \in \mathcal{C}_2$, contravenind lui (A.1.2.).

Presupunem propoziţia adevărată pentru cel mult k mulţimi. Fie $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_{k+1}$ satisfăcînd ipotezele. Notăm $\mathcal{C} = \bigcap_{i=1}^{k} \mathcal{C}_i$.

$\mathcal{C} \neq \emptyset$ este compactă şi convexă. Prin absurd, $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}_{k+1} = \emptyset$.

Există un hiperplan $\mathcal{H}_{a,\alpha}$ care separă strict pe $\mathcal{C}$ de $\mathcal{C}_{k+1}$.

Definim $\mathcal{C}_i' = \mathcal{C}_i \cap \mathcal{H}_{a,\alpha}$, $i=1,\dots,k+1$. Atunci:

(A.1.3.) $$\bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{C}_i' = \bigcup_{i=1}^{k+1} \mathcal{C}'_i = \left(\bigcup_{i=1}^{k+1} \mathcal{C}_i\right) \cap \mathcal{H}_{a,\alpha} = \mathcal{K} \cap \mathcal{H}_{a,\alpha}$$

ultimul termen al acestor egalităţi fiind, evident, mulţime convexă.

(A.1.4.) $$\bigcap_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} \mathcal{C}_j' \neq \emptyset \text{ , } i=1,\dots,k$$

Intr-adevăr, în caz contrar, $\emptyset = \mathcal{H}_{a,\alpha} \cap \left(\bigcap_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} \mathcal{C}_j\right)$,

ceea ce ar implica una din alternativele:

(i) $$\bigcap_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} \mathcal{C}_j = \emptyset$$

(ii) $$\left(\bigcap_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} \mathcal{C}_j\right) \cap \mathcal{C}_{k+1} = \bigcap_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k+1} \mathcal{C}_j = \emptyset$$

(iii) $$\left(\bigcap_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} \mathcal{C}_j\right) \cap \mathcal{C} = \mathcal{C} = \emptyset$$

toate trei fiind interzise de ipotezele propoziţiei.

(A.1.3.),(A.1.4.) şi ipoteza de inducţie implică:

$$\bigcap_{i=1}^{k} \mathscr{C}_i' \neq \emptyset$$

adică, $\mathscr{C} \cap \mathscr{H}_{a,\alpha} \neq \emptyset$, contrazicînd proprietatea de separaţie strictă a hiperplanului $\mathscr{H}_{a,\alpha}$.

<u>Propoziţia A.1.15</u>. (A doua teoremă de intersecţie). Fie $\mathscr{C}_1, \ldots, \mathscr{C}_k$ convexe şi închise şi $\mathscr{C}$ convexă, astfel ca:

$$\mathscr{C} \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} \mathscr{C}_i$$

$$\mathscr{C} \cap \Big(\bigcap_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} \mathscr{C}_j \Big) \neq \emptyset , \ i=1,\ldots,k .$$

Atunci, $\mathscr{C} \cap \Big(\bigcap\limits_{i=1}^{k} \mathscr{C}_i \Big) \neq \emptyset$.

Demonstraţie:

Pentru fiecare $i=1,\ldots,k$, alegem $x^i \in \mathscr{C} \cap \Big(\bigcap\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} \mathscr{C}_j \Big)$.

$\mathscr{D} = [x^1,\ldots,x^k]$ este compactă, convexă, inclusă în $\mathscr{C}$.

Notînd $\mathscr{D}_i = \mathscr{D} \cap \mathscr{C}_i$, $i=1,\ldots,k$ rezultă:

$$\bigcup_{i=1}^{k} \mathscr{D}_i = \mathscr{D} \cap \Big(\bigcup_{i=1}^{k} \mathscr{C}_i \Big) = \mathscr{D} \quad \text{, convexă}$$

$$\bigcap_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} \mathscr{D}_j \neq \emptyset \ (\text{conţine pe } x^i), \ i=1,\ldots,k.$$

Conform propoziţiei precedente, $\bigcap\limits_{i=1}^{k} \mathscr{D}_i \neq \emptyset$, adică $\mathscr{D} \cap \Big(\bigcap\limits_{i=1}^{k} \mathscr{C}_i \Big) \neq \emptyset$ şi cu atît mai mult

$$\mathscr{C} \cap \Big(\bigcap_{i=1}^{k} \mathscr{C}_i \Big) \neq \emptyset .$$

Definiţie. x este punct extrem al mulţimii convexe $\mathcal{C}$ dacă nu există $x^1, x^2 \in \mathcal{C}$, astfel ca $x \in [x^1, x^2]$, $x \neq x^1$, $x \neq x^2$.

Notăm cu ext. $\mathcal{C}$ mulţimea punctelor extreme ale lui $\mathcal{C}$. (profilul lui $\mathcal{C}$).

Propoziţia A.1.16. Dacă φ este o transformare afină a lui R^n în R^n atunci ext. $\varphi(\mathcal{C}) \subseteq \varphi(\text{ext. } \mathcal{C})$.

Propoziţia A.1.17. Dacă $\mathcal{R}_{x,y}$ este o rază incidentă în x, atunci x este singurul punct extrem al ei.

Propoziţia A.1.18. Dacă $x^1, \dots, x^k \in R^n$ atunci

ext. $[x^1, x^2] = \{x^1, x^2\}$, ext. $[x^1, \dots, x^k] \subseteq \{x^1, \dots, x^k\}$.

Definiţie. Fie $\mathcal{C}$ convexă. $\mathcal{H}_{a,\alpha}$ este hiperplan de sprijin la $\mathcal{C}$ dacă $\mathcal{C} \cap \mathcal{H}_{a,\alpha} \neq \emptyset$ şi $\inf\limits_{x \in \mathcal{C}} a^T x = \alpha$ sau $\sup\limits_{x \in \mathcal{C}} a^T x = \alpha$

Definiţie. Fie $\mathcal{C}$ convexă. Se numeşte faţă de ordin $n-r (r \in Z, 0 \leq r \leq n)$ a lui $\mathcal{C}$ o submulţime nevidă $\mathcal{F}$ cu proprietatea că există r hiperplane de sprijin la $\mathcal{C}$, $\mathcal{H}_{a^j, \alpha_j}$, $j=1,\dots,r$, liniar independente, astfel ca $\mathcal{F} = \mathcal{C} \cap \left(\bigcap\limits_{j=1}^{r} \mathcal{H}_{a^j, \alpha_j}\right)$.

O faţă de ordin o se numeşte vîrf al lui $\mathcal{C}$.

O faţă de ordin 1 se numeşte muchie a lui $\mathcal{C}$.

Propoziţia A.1.19. Dacă x este vîrf al lui $\mathcal{C}$ atunci $x \in$ ext. $\mathcal{C}$.

Demonstraţie:

Presupunem $x \notin$ ext. $\mathcal{C}$. Există, deci $x^1, x^2 \in \mathcal{C}$, $x^1 \neq x^2$ şi $\lambda \in (0,1)$ astfel încît $x = \lambda x^1 + (1-\lambda) x^2$.

Deoarece $\mathcal{H}_{a^j, \alpha_j}$ sînt hiperplane de sprijin la $\mathcal{C}$, putem presupune $(a^j)^T y \geq \alpha_j$, $j=1,\dots,n$, pentru orice $y \in \mathcal{C}$. In particular,

$$(a^j)^T x^i \geq \alpha_j, j=1,\dots,n, i=1,2.$$

De aici și din inegalitățile precedente,

$(a^j)^T x^i = \alpha_j$, $j=1,\dots,n$, $i=1,2$,

Or, sistemul $(a^j)^T x = \alpha_j$, $j=1,\dots,n$ are soluție unică. Deci $x = x^1 = x^2$.

<u>Propoziția A.1.20</u>. Fie $\mathscr{C}$ convexă și $\mathscr{H}_{a,\alpha}$ un hiperplan de sprijin la $\mathscr{C}$. Atunci ext. $\mathscr{C} \cap \mathscr{H}_{a,\alpha} \subseteq$ ext. $\mathscr{C}$.

Demonstrație:

Fie $x \in$ ext. $\mathscr{C} \cap \mathscr{H}_{a,\alpha}$ și presupunem prin absurd că $x \notin$ ext. $\mathscr{C}$.

Există, deci $x^1, x^2 \in \mathscr{C}$, $x^1 \neq x^2$ și $\lambda \in (0,1)$ astfel ca $x = \lambda x^1 + (1-\lambda) x^2$.

Presupunem $a^T y \geq \alpha$, oricare ar fi $y \in \mathscr{C}$. Deoarece $x \in \mathscr{H}_{a,\alpha}$,

$$\alpha = a^T x = \lambda a^T x^1 + (1-\lambda) a^T x^2 .$$

Deci, $a^T x^1 = a^T x^2 = \alpha$, adică $x^1, x^2 \in \mathscr{C} \cap \mathscr{H}_{a,\alpha}$ contrazicînd presupunerea asupra lui x.

<u>Propoziția A.1.21</u>. (Teorema hiperplanului de sprijin). Dacă $\mathscr{C}$ este nevidă, convexă, închisă și mărginită inferior (superior), atunci ext. $\mathscr{C} \neq \emptyset$ și orice hiperplan de sprijin la $\mathscr{C}$ conține cel puțin un punct extrem al lui $\mathscr{C}$.

Demonstrație:

Prin inducție relativ la r = dim. $\mathscr{C}$.

r=1. $\mathscr{C}$ este de forma $[\alpha, \infty)$ și concluziile sînt evidente.

Presupunem adevărată propoziția pentru orice mulțime de dimensiune cel mult r. Fie $\mathscr{C}$ cu dim. $\mathscr{C}$ = r+1 și $\mathscr{H}_{a,\alpha}$ un hiperplan de sprijin la $\mathscr{C}$. (Există asemenea hiperplane; de exemplu $(e^i)^T x = \alpha_i$, cu $\alpha_i = \inf_{x \in \mathscr{C}} (e^i)^T x = \min_{x \in \mathscr{C}} (e^i)^T x$, $i=1,\dots,n$)

Atunci $\mathscr{C}' = \mathscr{C} \cap \mathscr{H}_{a,\alpha}$ este nevidă, convexă, mărginită inferior, cu dim. $\mathscr{C}'$ = r. Există, conform ipotezei de inducție, $x \in$ ext. $\mathscr{C}'$.

Prin absurd presupunem că $x \notin$ ext. $\mathcal{C}$. Fie $x^1, x^2 \in \mathcal{C}$, $x^1 \neq x^2$, $\lambda \in (0,1)$ astfel ca $x = \lambda x^1 + (1-\lambda)x^2$. Dar:

(A.1.5.) $\qquad a^T x^1 \geq \alpha$, $a^T x^2 \geq \alpha$ și deci

(A.1.6.) $\qquad \alpha = a^T x = \lambda a^T x^1 + (1-\lambda) a^T x^2 \geq \alpha$

Din (A.1.5.) și (A.1.6.) rezultă:

$$a^T x^1 = a^T x^2 = \alpha$$

adică $x^1, x^2 \in \mathcal{H}_{a,\alpha}$ sau $x^1, x^2 \in \mathcal{C}'$ contrazicînd $x \in$ ext.$\mathcal{C}'$

Deci $x \in$ ext. $\mathcal{C}$.

Propoziția A.1.22. Dacă $\mathcal{C}$ este nevidă și convexă, atunci pentru fiecare $x \in$ fr. $\mathcal{C}$ există un hiperplan de sprijin la $\mathcal{C}$ care conține pe x.

Demonstrație:

Rezultă imediat din propoziția A.1.13. luînd $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}$, $\mathcal{C}_2 = \{x\}$, $\alpha = a^T x$.

Propoziția A.1.23. Fie $\mathcal{T} \subset R^n$ un tronson convex. Atunci ext. $\mathcal{T}$ este mulțimea punctelor lui $\mathcal{T}$ care sînt intersecțiile a cîte n hiperplane frontieră liniar independente.

Demonstrație:

Fie $\mathcal{T} = \bigcap_{i=1}^{k} \mathcal{D}_{a^i, \alpha_i}$

Dacă $x \in \mathcal{T}$ și $(a^i)^T x = \alpha_i$, $i=1,\dots,n$ cu $\{a^i\}_{i=1,\dots,n}$ liniar independenți, atunci x este vîrf al lui $\mathcal{T}$ și deci punct extrem.

Reciproc, fie $x \in$ ext.$\mathcal{T}$ și $J \subset \{1,\dots,k\}$ astfel încît,

$$(a^i)^T x = \alpha_i, i \in J$$

$$(a^i)^T x < \alpha_i, i \in \{1,\dots,k\} \setminus J$$

Notăm $A^J = ((a^i)^T)_{i \in J}$ și $A^J_{.s}$ coloana a s-a a lui A^J. $A^J_{.s}$, $s=1,\dots,n$ sînt liniar independente. Altfel, există

β_s, $\sum_{s=1}^{n} \beta_s^2 \neq 0$, $\sum_{s=1}^{n} \beta_s A^J_{.s} = 0$. Punînd $b=(\beta_s)_{s=1,\dots,n}$, se poate determina $\varepsilon \neq 0$ astfel ca $x \pm \varepsilon b \in \mathcal{T}$. De aici, $x = \frac{1}{2}(x+\varepsilon b) + \frac{1}{2}(x-\varepsilon b)$ şi deci $x \notin$ ext. $\mathcal{T}$.

In concluzie, $|J| \geq n$ şi există n hiperplane frontieră liniar independente pe care se află x.

<u>Propoziţia A.1.24</u>. Fie $\mathcal{C}$ nevidă, convexă şi compactă. Atunci $\mathcal{C} = [\overline{\text{ext.}\mathcal{C}}]$

Demonstraţie:

$\mathcal{C} \supseteq [\overline{\text{ext.}\mathcal{C}}]$ deoarece $\mathcal{C}$ este convexă şi închisă.

Prin absurd, presupunem incluziunea inversă falsă. Atunci există $x^0 \in \mathcal{C}$, $x^0 \notin [\overline{\text{ext.}\mathcal{C}}]$. In acest caz, există $\mathcal{H}_{a,\alpha}$ care separă strict pe x^0 de $[\overline{\text{ext.}\mathcal{C}}]$

$$a^T x^0 < \alpha < a^T x, \; x \in [\overline{\text{ext.}\mathcal{C}}]$$

De aici,

$$\beta = \min_{x \in \mathcal{C}} a^T x \leq a^T x^0 < \alpha < a^T x, \; x \in [\overline{\text{ext.}\mathcal{C}}]$$

Or , $a^T x = \beta$ defineşte un hiperplan de sprijin la $\mathcal{C}$. Există deci $y \in$ ext. $\mathcal{C}$ astfel ca $a^T y = \beta$, ceea ce contrazice lanţul de inegalităţi de mai sus.

<u>Propoziţia A.1.25</u>. Dacă $\mathcal{C}$ este compactă şi $|\text{ext.}\mathcal{C}| < \infty$ atunci $\mathcal{C} = [\text{ext.}\mathcal{C}]$

Demonstraţie:

Tinînd seama de precedenta este suficient să demonstrăm egalitatea:

$$[\text{ext.}\mathcal{C}] = [\overline{\text{ext.}\mathcal{C}}]$$

Deoarece $[\text{ext.}\mathcal{C}]$ este compact, $[\text{ext.}\mathcal{C}] \supseteq [\overline{\text{ext.}\mathcal{C}}]$. Incluziunea inversă este trivială, prin definiţia celor două acoperiri.

<u>Corolar</u>. Dacă $\mathcal{C}$ este poliedru convex, atunci $\mathcal{C} = [\text{ext.}\mathcal{C}]$.

<u>Propoziţia A.1.26</u>. Dacă $\mathcal{C}$ este convexă, închisă şi $x^1, x^2 \in \mathcal{C}$ atunci pentru orice $y \neq 0$, $\mathcal{R}_{x^1 y} \subseteq \mathcal{C}$ dacă şi numai dacă

$\mathcal{R}_{x^2 y} \subseteq \mathcal{C}$.

Demonstrație:

Presupunem $\mathcal{R}_{x^1 y} \subseteq \mathcal{C}$.

Fie $\mu \geqslant 0$ și $\lambda \in (0,1)$. Atunci $x^1 + \frac{\mu}{\lambda} y \in \mathcal{C}$ și deoarece $\mathcal{C}$ este convexă, rezultă că $\lambda (x^1 + \frac{\mu}{\lambda} y) + (1-\lambda) x^2 \in \mathcal{C}$. Sau,

$$x^2 + \mu y + \lambda (x^1 - x^2) \in \mathcal{C}$$

Dar, deoarece $\mathcal{C}$ este închisă, pentru $\lambda \to 0$, rezultă,

$$x^2 + \mu y \in \mathcal{C} \text{ și deci } \mathcal{R}_{x^2 y} \subseteq \mathcal{C}.$$

Observație. Mulțimea $cc\,\mathcal{C} = \{ y \mid \mathcal{R}_{xy} \subseteq \mathcal{C} \}$ este independentă de $x \in \mathcal{C}$.

Definiție. $cc\,\mathcal{C}$ se numește conul caracteristic al lui $\mathcal{C}$.

Propoziția A.1.27. Fie tronsonul $\mathcal{T} = \bigcap_{j=1}^{k} \mathcal{D}_{a^j, \alpha_j}$

Atunci: $cc\,\mathcal{T} = \bigcap_{j=1}^{k} \mathcal{D}_{a^j, 0}$.

Demonstrație:

Fie $y \in cc\,\mathcal{T}$. Atunci, pentru orice $x \in \mathcal{T}$ și $\lambda \geqslant 0$, $x + \lambda y \in \mathcal{T}$.

Deci, $(a^j)^T x + \lambda (a^j)^T y \geqslant \alpha_j$, oricare ar fi $\lambda \geqslant 0$, $j=1,\dots,k$.

Dacă, prin absurd, $(a^j)^T y < 0$, alegînd λ suficient de mare, inegalitatea precedentă ar fi contrazisă. Deci $(a^j)^T y \geqslant 0$, $j=1,\dots,k$ adică $y \in \bigcap_{j=1}^{k} \mathcal{D}_{a^j, 0}$.

Propoziția A.1.28. $\mathcal{C}$ convexă și închisă este nemărginită dacă și numai dacă conține o rază.

Demonstrație:

Fie $x^0 \in \mathcal{C}$ și pentru fiecare $\lambda \geqslant 0$, notăm,

$$\mathcal{S}(x^0, \lambda) = \{ x \mid \| x - x^0 \| = \lambda \}.$$

Deoarece $\mathcal{C}$ este nemărginită, rezultă că, pentru fiecare $\lambda > 0$,

$\mathcal{P}_\lambda = \mathcal{S}(x^0, \lambda) \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$.

Fie $f_\lambda : \mathcal{P}_\lambda \to \mathcal{S}(0,1)$, definită prin:

$f_\lambda(x) = \frac{x-x^0}{\lambda}$

şi notăm $\mathcal{F}_\lambda = f_\lambda(\mathcal{P}_\lambda)$. Clar, $\mathcal{F}_\lambda$ este închisă şi nevidă, oricare ar fi $\lambda > 0$.

Fie acum $\lambda < \lambda'$ şi $y' \in \mathcal{F}_{\lambda'}$. Există $x' \in \mathcal{P}_{\lambda'}$ cu $y' = \frac{x'-x^0}{\lambda'}$

Dar, deoarece $\mathcal{C}$ este convexă, $[x^0, x'] \subseteq \mathcal{C}$ şi deci:

$x = \frac{\lambda}{\lambda'}x' + (1 - \frac{\lambda}{\lambda'})x^0 \in \mathcal{C}$. Observînd că $\|x - x^0\| = \frac{\lambda}{\lambda'}\|x' - x^0\| = \lambda$ şi că $y' = \frac{x-x^0}{\lambda}$ deducem că $\mathcal{F}_{\lambda'} \subseteq \mathcal{F}_\lambda$.

Atunci, datorită compacităţii lui $\mathcal{S}(0,1)$, $\bigcap_{\lambda>0} \mathcal{F}_\lambda \neq \emptyset$. Fie y un element din această intersecţie. Rezultă $\mathcal{R}_{x^0 y} \subset \mathcal{C}$.

Cealaltă implicaţie a propoziţiei este banală.

<u>Propoziţia A.1.29</u>. Dacă $\mathcal{C}$ este convexă şi închisă, atunci cc $\mathcal{C} \neq \{0\}$ dacă şi numai dacă $\mathcal{C}$ este nemărginită.

<u>Propoziţia A.1.30</u>. Dacă $\mathcal{C}$ este convexă şi închisă şi nu conţine drepte, atunci $\mathcal{C} = [\overline{\text{ext.}\mathcal{C}}] + \text{cc}\,\mathcal{C}$.

Demonstraţie:

Prin inducţie relativ la n = dim. $\mathcal{C}$.

Pentru n=1, adevărul propoziţiei este evident.

Presupunem adevărată propoziţia pentru orice mulţime cu dimensiunea cel mult n. Fie $\mathcal{C}$ cu dim. $\mathcal{C}$ = n+1 şi $x \in \mathcal{C}$. Dacă este mărginită, atunci, concluzia rezultă din propoziţiile A.1.22. şi A.1.27.

Altfel, fie $t \in \text{cc}\,\mathcal{C}$, $t \neq 0$. Deoarece $\mathcal{C}$ nu conţine drepte,

$$\text{sup.}\{\lambda \geq 0 \mid x - \lambda t \in \mathcal{C}\} = \lambda_0 < +\infty$$

Mai mult, $\mathcal{C}$ fiind închisă, $y' = x - \lambda_0 t \in \text{fr.}\,\mathcal{C}$.

Fie $\mathcal{H}$ hiperplan de sprijin la $\mathcal{C}$ conţinînd pe y', şi $\mathcal{C}' = \mathcal{C} \cap \mathcal{H}$

Deoarece dim. $\mathcal{C}' = n$ şi $\mathcal{C}'$ satisface ipotezele propoziţiei, rezultă că :

$$y' = z+u, \text{ cu } z \in [\overline{\text{ext.}\mathcal{C}'}] \quad , u \in \text{cc}\,\mathcal{C}' .$$

De aici,

$$x = z+u+ \lambda_0 t$$

Or , ext. $\mathcal{C}' \subseteq$ ext. $\mathcal{C}$ şi deci $z \in [\overline{\text{ext.}\mathcal{C}}]$ şi notînd $y = u+ \lambda_0 t$, rezultă $y \in \text{cc}\,\mathcal{C}$

Corolar. Dacă $\mathcal{T}$ este un tronson convex mărginit inferior (superior) atunci $\mathcal{T} = [\text{ext}\,\mathcal{T}] + \text{cc}\,\mathcal{T}$ cu $\text{cc}\,\mathcal{T} \neq \{0\}$ dacă şi numai dacă $\mathcal{T}$ este nemărginit.

Demonstraţie:

Intr-adevăr, în acest caz, deoarece $|\text{ext.}| < \infty$, $[\text{ext.}\,\mathcal{T}] = [\overline{\text{ext.}\,\mathcal{T}}]$

In plus, dacă $\mathcal{T}$ este mărginit inferior, nu conţine drepte.

Propoziţia A.1.31. (Teorema de punct fix a lui Brouwer). Fie $\mathcal{C}$ nevidă, convexă şi compactă în R^n şi $\varphi : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ continuă. Atunci există $\bar{x} \in \mathcal{C}$, astfel ca $\bar{x} = \varphi(\bar{x})$.

A.2. Lanţuri Markov

Fie (Ω, $\mathcal{K}$, P) un cîmp de probabilitate, $T \subset R$ şi $\{x_t\}_{t \in T}$ o familie de variabile aleatoare cu valori în mulţimea $I = \{0,1,\ldots\}$ (numită mulţimea stărilor).

Definiţie $\{x_t\}_{t\in T}$ este un lanţ Markov, dacă, pentru orice întreg $n > 0$ şi pentru orice $t_1,\ldots,t_n \in T$, $t_1 < t_2 \ldots < t_n$ şi $i_1,\ldots,i_n \in I$,

$$P(x_{t_n} = i_n \mid x_{t_k} = i_k, k=1,\ldots,n-1) = P(x_{t_n} = i_n \mid x_{t_{n-1}} = i_{n-1})$$

ori de cîte ori membrul stîng al egalităţii există.

Vom lua în considerare cazurile $T = \{0,1,\ldots\}$ şi $T = [0,\infty)$.

In primul caz şirul $\{x_n\}_{n=0,1,\ldots}$ se va numi lanţ Markov cu parametru discret, în cel de al doilea $\{x_t\}_{t\in[0,\infty)}$ se va numi lanţ Markov cu parametru continuu.

Pentru fiecare $s,t \in T, s < t$, definim "matricea de trecere":

$$P(s,t) = (p_{ij}(s,t))_{i,j\in I}$$

unde:

$$p_{ij}(s,t) = P(x_t = j \mid x_s = i)$$

Propoziţia A.2.1. Dacă $s, \tau, t \in T, s < \tau < t$, atunci este verificată relaţia Chapman-Kolmogorov:

$$P(s,t) = P(s, \tau).P(\tau, t)$$

Fie $p(t) = (p_0(t), p_1(t), \ldots)$ repartiţia variabilei $x_t, t \in T$

$$p_j(t) = P(x_t = j), j \in I$$

Propoziţia A.2.2. Dacă $s,t \in T, s < t$, atunci,

$$p(t) = P(s,t).p(s)$$

<u>Definiţie</u> Lanţul Markov $\{x_t\}_{t\in T}$ este omogen (are probabilităţile de trecere staţionare) dacă $P(s,s+t)$ este independentă de s, pentru orice $t \in T$.

In acest caz notăm cu $P(t)=P(s,s+t), s \geq 0$, matricea de trecere după timpul t. Prin definiţie P(O) este matricea unitate.

Pentru un lanţ Markov omogen, relaţia Chapman-Kolmogorov se scrie:

(A.2.1.) $\quad P(s+t)=P(s).P(t), s,t \in T$

De asemenea propoziţia 2, devine:

(A.2.2.) $\quad p(s+t)=P(t).p(s)$

Pentru un lanţ Markov cu parametru discret, se poate arăta că este omogen dacă $P(m,m+1)$ nu depinde de m.

In cazul $T=[0,\infty)$, vom folosi notaţiile:

$$q_{ij} = \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \frac{p_{ij}(t)}{t}, i,j \in I, i\neq j$$

$$q_{ii} = \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \frac{p_{ii}(t)-1}{t}, i \in I$$

ori de cîte ori aceste limite există.

A.3. <u>Funcţiile Bessel modificate, de speţa I.</u>

<u>Definiţie</u> Pentru r întreg, seria de puteri

$$J_r(z) = \sum_{j=\max.\{0,-r\}}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2j+r}}{\Gamma(j+1)\Gamma(j+r+1)}, \quad |z|\leq 1$$

se numeşte funcţia Bessel modificată, de speţa I, de ordinul r.

<u>Propoziţia A.3.1.</u> $J_{-r}(z) = J_r(z), |z| \leq 1$

Demonstraţie:

Presupunem $r \geq 0$

$$J_{-r}(z) = \sum_{j=r}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2j-r}}{\Gamma(j+1)\,\Gamma(j-r+1)}$$

sau, punînd k=j-r,

$$J_{-r}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+r}}{\Gamma(k+r+1)\,\Gamma(k+1)} = J_r(z)$$

<u>Propoziţia A.3.2</u>. Pentru $r \geq 1$, $z(J_{r-1}(z)-J_{r+1}(z)) = 2rJ_r(z)$, $|z| \leq 1$.

Demonstraţie:

$$z(J_{r-1}(z)-J_{r+1}(z)) = 2\Bigg[\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2j+r}}{\Gamma(j+1)\Gamma(j+r)} - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2j+r}}{\Gamma(j)\Gamma(j+r+1)}\Bigg] = 2\Bigg[\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{r}}{\Gamma(1)\Gamma(r)} +$$

$$+ r\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2j+r}}{\Gamma(j+1)\Gamma(j+r+1)}\Bigg] = 2r\Bigg[\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{r}}{\Gamma(1)\Gamma(r+1)} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2j+r}}{\Gamma(j+1)\Gamma(j+r+1)}\Bigg] = 2rJ_r(z).$$

Bun de tipar 29 ian. Apărut februarie 1982

Tiraj 593 Coli tipar (Fasc.) 15

Tipar executat sub comanda nr. 223
Tipografia Universităţii Bucureşti

Lei ~~19,75~~ 20