

B. C. U.

II 291553

GH. STOICA

DEVIAȚII MARI

EDITURA UNIVERSITĂȚII BUCUREȘTI
1995

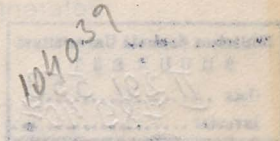


BIBLIOTECA CENTRALĂ
UNIVERSITARĂ
București

Cota II 297553

Inventar 789407

GH. STOICA



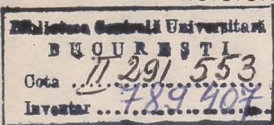
DEVIATII MARI

5

EDITURA UNIVERSITĂȚII BUCUREȘTI

- 1 9 9 5 -

II
Referenți științifici: Prof. dr. Ion Cuculescu
Prof. dr. Constantin Tudor



DEF 343/95

Toate drepturile sunt rezervate Editurii Universității București.
Orice reproducere sau traducere, fie și parțială, precum
și contrafacerea de orice tip intră sub incidența Codului Penal.

ISBN-973-575-007-4

Cuprins

1	DEVIATII MARI PE DREAPTA	5
2	REZULTATE GENERALE	15
3	CAZUL GAUSIAN	31
4	APLICATII	41
5	PERTURBATII ALEATOARE MICI	59

INTRODUCERE

În acest curs prezentăm noțiunile și rezultatele de bază ale teoriei deviațiilor mari, împreună cu aplicațiile importante care decurg de aici.

Capitolul 1 se referă la primele rezultate de acest tip, obținute de H. Cramer (*Random Variables and Probability Distributions*, Cambridge Univ. Press, 1938) și H. Chernoff (*Ann. Math. Statist.* 23, 1952, pp. 493-507) în ceea ce privește suma normalizată a variabilelor aleatoare independente și identic repartizate, în cazul real și în raport cu o semidreaptă. Totodată studiem în detaliu proprietățile transformatei Cramer, în funcție de care se exprimă valorile asimptotice căutate în teoria deviațiilor mari.

În capitolul 2 prezentăm rezultatele generale ale acestei teorii, în cazul în care variabilele aleatoare iau valori într-un spațiu Banach separabil, urmând rezultatele lui M. Donsker-S. Varadhan (*Comm. Pure Appl. Math.* 28, 1975, pp. 1-47 ; 29, 1976, pp. 279-301 ; 29, 1976, pp. 389-461), în formularea lui R.R. Bahadur-S.L. Zabell (*Ann. Prob.* 7, 1979, pp. 587-621). Problema care rămâne acum de studiat este de a calcula explicit transformarea Cramer.

Cazul cel mai important (din punct de vedere practic) în care se folosesc rezultatele din capitolul 2 este cazul gaussian, adică atunci când legea variabilelor aleatoare considerate este gaussiană pe un spațiu Banach separabil. Prezentăm aceste lucruri în capitolul 3, în care tratăm apoi cazul particular al spațiilor Hilbert și, în fine cazul legilor traiectoriilor proceselor gaussiene.

Aceste rezultate permit ca, în capitolul 4, să justificăm studiul deviațiilor mari, prin câteva aplicații importante. Prezentăm rezultatul (cu caracter statistic) al lui I. Sanov (*Select. Trans. Math. Stat. Prob.* 1, 1961, pp. 213-244) privind deviațiile mari ale legii empirice a unui eșantion dat, apoi studiul "cozilor" măsurilor și proceselor gaussiene (după Donsker-Varadhan) și rezultatul lui M. Schilder (*Trans. Amer. Math. Soc.* 125, 1966, pp. 63-85) în care se calculează explicit transformarea Cramer a legii traiectoriilor mișcării browniene. Încheiem acest capitol cu prezentarea demonstrației legii tari a numerelor mari pentru

variabile aleatoare cu valori în spații Banach (după Ranga Rao) și o ultimă aplicație la obținerea formei funcționale a legii logaritmului iterat, după V. Strassen (*Z. Wahrsch. verw. Geb.* 3, 1964, pp. 211-226).

În capitolul 5 prezentăm rezultatele recente ale lui M.I. Freidlin-A.D. Wentzell (*Random Perturbations of Dynamical Systems*, Springer-Verlag, Berlin, 1984) privind perturbațiile aleatoare mici ale sistemelor dinamice, tratate ca probleme de deviații mari (uniforme), datorate unui proces gaussian sau unui zgomot alb; a doua situație revine la studiul deviațiilor soluțiilor ecuațiilor diferențiale stocastice perturbate. În spiritul acestui capitol, direcții mai generale decât cele tratate aici sunt cele legate de difuzii cu timp de explozie finit sau pe o varietate diferențiabilă, perturbații aleatoare care conduc la procese discontinue sau care provin din fenomene ergodice (măsuri aleatoare), cele legate de principiul de mediere, problemele echilibrului și stabilității. Nu am tratat aceste direcții, dar ele pot fi găsite în cartea citată a lui Freidlin-Wentzell, ca și în D.W. Stroock, *An Introduction to the Theory of Large Deviations*, Springer-Verlag, Berlin, 1984.

Am inclus o serie de exemple și exerciții, în majoritate aplicații imediate ale teoriei. Pentru a înțelege foarte bine acest curs, sunt necesare, în afară de ingredientele probabiliste (teoria proceselor și calculul stocastic), noțiuni legate de măsuri pe spații vectoriale, analiză funcțională, topologie, operatori liniari și funcții convexe.

Aș dori să mulțumesc d-lui profesor Paul Deheuvels, care mi-a pus la dispoziție mai multe versiuni ale acestei teorii, precum și d-lor profesori Ion Cuculescu și Constantin Tudor, care au citit manuscrisul și mi-au indicat punctele, necesare și importante din punct de vedere probabilist, pe care să pun accent. Mulțumiri totodată d-nei profesor Monica Dumitrescu, care mi-a indicat legăturile posibile ale acestei teorii cu statistica.

Gh. Stoica

Paris și București, 1995

DEVIATII MARI PE DREAPTA

CLASIFICAREA STATISTICA A ABATERILOR

Fie $F_n(x)$, $n \geq 1$ șir de funcții de repartiție care converge (slab) către o funcție de repartiție $F(x)$. Fie x_n , $n \geq 1$ șir de numere reale care converge către $+\infty$ când $n \rightarrow +\infty$. Este clar că $F_n(x_n)$ converge către 1 și că $F_n(-x_n)$ converge către 0 când $n \rightarrow +\infty$. Problema care interesează este obținerea vitezei de convergență, adică studiul comportamentului asimptotic al expresiilor $1 - F_n(x_n)$ și $F_n(-x_n)$ când $n \rightarrow +\infty$.

Fie $\{X_n, n \geq 1\}$ șir de variabile aleatoare reale independente și identic repartizate, cu media 0 și dispersia 1. Stim că, pentru orice $x \in \mathbb{R}$ avem

$$P \left[\frac{X_1 + \dots + X_n}{\sqrt{n}} \leq x \right] \rightarrow \Phi(x)$$

când $n \rightarrow +\infty$, unde $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-x^2/2} dx$ este funcția de repartiție a legii normale (gausiene) $N(0, 1)$. Fie $F_n(x_n) = P(X_1 + \dots + X_n \leq x)$; atunci $F_n(\sqrt{n}x) \rightarrow \Phi(x)$ când $n \rightarrow +\infty$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Cu alte cuvinte

$$1 - F_n(\sqrt{n}x_n) = P(X_1 + \dots + X_n > x_n \sqrt{n}) \rightarrow 1 - \Phi(x)$$

când $n \rightarrow +\infty$, unde $x_n \equiv x$. Abaterile x_n de acest tip se numesc *ordinare*; abaterile x_n cu $x_n = o(\sqrt{n})$ și $x_n \rightarrow +\infty$ se numesc *mari*, iar cele cu $x_n = c\sqrt{\log n}$ se numesc *abateri medii*.

În statistică sunt cunoscute rezultate de tipul următor.

În cazul abaterilor mari, dacă există $t > 0$ cu $E(e^{tX_1}) < +\infty$, atunci

$$\frac{1 - F_n(\sqrt{n}x_n)}{1 - \Phi(x_n)}$$

$$= e^{x_n^2/2} \left[\inf_t e^{-tx_n/\sqrt{n}} E(e^{tX_1}) \right]^n \left(1 + O\left(\frac{x_n + 1}{\sqrt{n}}\right) \right).$$

In cazul abaterilor medii, dacă există $k = k(c)$ cu $E|X_1|^k < +\infty$, atunci

$$\frac{1 - F_n(\sqrt{n}x_n)}{1 - \Phi(x_n)} \rightarrow 1 \text{ cand } n \rightarrow +\infty.$$

Să remarcăm că, dacă $x_n = x\sqrt{n}$ sau $x_n \simeq c\sqrt{n}$ sau $x_n/\sqrt{n} \rightarrow +\infty$, rezultatele de mai sus nu mai sunt adevărate. Dacă $x_n = x\sqrt{n}$, atunci trebuie discutat comportamentul la limită al expresiei

$$P\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \geq x\right).$$

In statistică, acest tip de abateri se numesc *excesive* (sau *abateri mari de la medie*).

Pe c mpul de probabilitate (Ω, \mathcal{K}, P) vom considera un  ir de variabile aleatoare reale $\{X_n, n \geq 1\}$ independente  i identic repartizate, cu reparti ia (legea) μ . Să notăm

$$\bar{X}_n := \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n). \quad (1.1)$$

Comportamentul asimptotic al probabilităţilor

$$P(\bar{X}_n \in A), A \text{ boreliană din } \mathbb{R}, \text{ c nd } n \rightarrow \infty$$

este descris, in ipoteza $\int |x| d\mu(x) < \infty$, de legea tare a numerelor mari. Mai precis, intruc t $\bar{X}_n \rightarrow m := \int x d\mu(x)$ aproape sigur, obținem că $\lim_{n \rightarrow \infty} P(\bar{X}_n \in A) = 1$ dacă A con ine o vecinătate a lui m , in timp ce $\lim_{n \rightarrow \infty} P(\bar{X}_n \in A) = 0$ dacă $m \notin A$.

Pentru n mare, un eveniment de tipul $\{\bar{X}_n \in A\}$ cu $m \notin A$ reprezintă o situa ie de "devia ie mare" in raport cu m (sau de

la media m). Calificativul "mare" se referă la faptul că \bar{X}_n evită o vecinătate a lui m a cărei mărime nu tinde la 0 când $n \rightarrow \infty$. In acest context, "deviațiile mici" corespund evenimentelor de tipul $\{\bar{X}_n \in A_n\}$ cu $A_n = m + \frac{1}{\sqrt{n}}B$, B boreliană din \mathbb{R} i.e. evenimente ale căror probabilități converg "in general" către limite nenule descrise de teorema limită centrală.

In acest capitol vom prezenta deviațiile mari in cazul in care multimea A de mai sus este o semi-dreaptă reală.

DEFINITIE. Notăm transformarea Laplace a repartiției μ aplicația $\hat{\mu} : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty]$ dată de

$$\hat{\mu}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{tx} d\mu(x) \quad (1.2)$$

și transformarea Cramer $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty]$ a lui μ aplicația

$$\lambda(x) = \sup_{t \in \mathbb{R}} [tx - \log \hat{\mu}(t)], \quad x \in \mathbb{R}. \quad (1.3)$$

Observații.

1. Ca anvelopă superioară de funcții liniare, λ este convexă și inferior semi-continuă.

Dacă are loc $\int |x| d\mu(x) < \infty$, atunci

2. $\hat{\mu}(t) \equiv +\infty$ pentru orice $t > 0 \iff \lambda(x) \equiv 0$ pentru orice $x \geq 0$.

3. Există $t > 0$ astfel ca $\hat{\mu}(t) < \infty \iff \lim_{x \rightarrow \infty} \lambda(x) = +\infty$.

Intr-adevăr, dacă $\hat{\mu}(t) \equiv +\infty$ pentru orice $t > 0$, din relația (1.3.) obținem că $\lambda(x) = \sup_{t \leq 0} [tx - \log \hat{\mu}(t)]$ și deci $\lambda(x) \equiv 0$ pentru orice $x \geq 0$. Dacă există $t > 0$ astfel ca $\hat{\mu}(t) < \infty$, relația $\lambda(x) \geq tx - \log \hat{\mu}(t)$ arată că $\lim_{x \rightarrow \infty} \lambda(x) = +\infty$. Implicațiile reciproce din (2) și (3) rezultă din implicațiile directe din (3) resp. (2).

Rezultatele 1,2 și 3 rămân adevărate dacă înlocuim $t, x > 0$, $x \rightarrow +\infty$ prin $t, x < 0$, $x \rightarrow -\infty$

4. Dacă $\hat{\mu}$ este finită într-o vecinătate a lui 0, atunci funcția λ își atinge minimumul in punctul $m = \int_{\mathbb{R}} x d\mu(x)$, iar $\lambda''(m) = 1/\sigma^2$, unde σ^2 este dispersia lui μ .

Exemple.

Dacă $\mu = p\delta_u + (1-p)\delta_v$, cu $u < v$ și $0 < p < 1$, avem

$$\lambda(x) = \begin{cases} \frac{x-u}{v-u} \log \frac{x-u}{1-p} + \frac{v-x}{v-u} \log \frac{v-x}{p} - \log(v-u), & \text{dacă } u < x < v \\ +\infty, & \text{dacă } x < u \text{ sau } x > v \\ -\log p & \text{pentru } x = u \\ -\log(1-p) & \text{pentru } x = v. \end{cases}$$

Dacă μ este repartiția exponențială e_1 , atunci

$$\lambda(x) = \begin{cases} x - 1 - \log x, & \text{dacă } x > 0 \\ +\infty, & \text{dacă } x \leq 0. \end{cases}$$

Dacă μ este repartiția normală (gaussiană) $N(m, \sigma^2)$, atunci $\lambda(x) = \frac{1}{2\sigma^2} (x - m)^2$, $x \in \mathbb{R}$.

TEOREMA 1.1. Fie $\{X_n, n \geq 1\}$ șir de variabile aleatoare reale independente și identic repartizate, cu aceeași repartiție μ . Fie $\bar{X}_n := \frac{1}{n} (X_1 + \dots + X_n)$ și λ transformarea Cramer a lui μ . Atunci, pentru orice $a \in \mathbb{R}$, avem

$$-\lambda(a) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log P(\bar{X}_n \leq a) \quad (1.4)$$

$$-\lambda(a) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log P(\bar{X}_n \geq a).$$

Dacă $\int |x| d\mu(x) < \infty$, atunci au loc și inegalitățile următoare, valabile pentru orice $n \geq 1$:

$$\frac{1}{n} \log P(\bar{X}_n \leq a) \leq -\lambda(a), \text{ pentru } a \leq \int x dF(x) \quad (1.5)$$

$$\frac{1}{n} \log P(\bar{X}_n \geq a) \leq -\lambda(a), \text{ pentru } a \geq \int x dF(x).$$

Demonstrație. Legile variabilelor aleatoare $Y_n := X_n - a$ și $Z_n := -X_n$ au ca transformate Cramer funcțiile $x \rightarrow \lambda(x+a)$ resp. $x \rightarrow \lambda(-x)$. Este suficient deci de tratat cazul $\{a=0\}$ și de demonstrat numai inegalitățile privind $P(\bar{X}_n \geq 0)$.

Să arătăm formulele (1.5). Presupunem că $\int x d\mu(x) \leq 0$; definiția lui λ devine

$$\lambda(0) = \sup_{t \in \mathbb{R}} [-\log \hat{\mu}(t)] = \sup_{t \geq 0} [-\log \hat{\mu}(t)].$$

Pentru $t \geq 0$, putem scrie

$$\begin{aligned} P(\bar{X}_n \geq 0) &= P[e^{t(X_1 + \dots + X_n)} \geq 1] \\ &\leq E[e^{t(X_1 + \dots + X_n)}] = [\hat{\mu}(t)]^n; \end{aligned}$$

deci

$$\frac{1}{n} \log P(\bar{X}_n \geq 0) \leq \inf_{t \geq 0} [\log \hat{\mu}(t)] = -\lambda(0),$$

adică (1.5).

Demonstrația formulelor (1.4) folosește următoarea lemnă tehnică (cazul în care μ este "cu suport finit").

LEMA 1.2. Fie x_i, p_i ($1 \leq i \leq k$) numere reale astfel ca $p_i > 0$ și $\min_i x_i < 0 < \max_i x_i$. Notăm

$$b = \inf_{t \in \mathbb{R}} \left(\sum_{i=1}^k p_i e^{tx_i} \right) \text{ și } f(n_1, \dots, n_k) = n! \prod_{i=1}^k \frac{p_i^{n_i}}{n_i!}.$$

Atunci există o constantă $c > 0$ și un număr natural N astfel ca orice $n \geq N$ se poate scrie ca $n = n_1 + \dots + n_k$, unde numerele naturale n_i verifică

$$\sum_{i=1}^k n_i x_i \geq 0 \text{ și } f(n_1, \dots, n_k) \geq cn^{-k/2} b^n.$$

Demonstrația lemei 1.2. Conform formulei lui Stirling, pentru $z_i \in [1, \infty)$, obținem

$$f(z_1, \dots, z_k) \geq n^{-k/2} \prod_{i=1}^k \left(\frac{np_i}{z_i} \right)^{z_i} =: g(z_1, \dots, z_k)$$

Să fixăm $s \in \mathbb{R}$ astfel ca $b = \sum_{1 \leq i \leq k} p_i e^{sz_i}$. Atunci numerele reale $u_i = np_i e^{sz_i} / b$ verifică

$$\sum_{i=1}^k u_i = n, \quad \sum_{i=1}^k u_i x_i = 0,$$

$$g(u_1, \dots, u_k) = n^{-k/2} b^n.$$

Fără a pierde generalitatea, putem presupune că $x_i \leq x_k$ pentru orice i . Punem $N_i = [u_i]$ și $N_k = n - \sum_{i < k} u_i$. Pentru $A > 0$ fixat și B variind într-un interval mărginit fixat, există o constantă c_1 cu proprietatea

$$\left(\frac{v}{Av + B}\right)^{Av+B} \geq c_1 \left(\frac{v}{Av}\right)^{Av}$$

pentru orice $v \geq 1$ și $Av + B \geq 1$. De aici rezultă existența unei constante c_2 astfel ca $(np_i/N_i)^{N_i} \geq c_2 (np_i/u_i)^{u_i}$ pentru orice i și orice n suficient de mare. Deci, pentru n suficient de mare, cu $c_3 = c_2^k$, avem

$$\sum_{i=1}^k N_i = n, \quad \sum_{i=1}^k N_i x_i \geq 0,$$

$$g(N_1, \dots, N_k) \geq c_3 n^{-k/2} b^n,$$

și lema este demonstrată.

Demonstrația formulelor (1.4). Putem presupune că $\mu((0, \infty))$ și $\mu((-\infty, 0))$ sunt $\neq 0$. Fie $\mu = \sum_{i \geq 1} p_i \delta_{x_i}$ (suma cel mult numărabilă) și $p_i > 0$ pentru orice i . Pentru k suficient de mare, vom avea

$$\min_{1 \leq i \leq k} x_i < 0 < \max_{1 \leq i \leq k} x_i.$$

Sirul monoton de funcții $f_k(t) = \sum_{1 \leq i \leq k} p_i e^{tx_i}$ converge către $\hat{\mu}(t)$ când $k \rightarrow \infty$, deci converge uniform converge către $\hat{\mu}(t)$ pe orice compact inclus în $\{t \mid \hat{\mu}(t) < \infty\}$. Cum $f_k(t)$ tinde către $+\infty$ odată cu $|t|$, avem

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left[\inf_t f_k(t) \right] = \inf_t \hat{\mu}(t) = e^{-\lambda(0)}.$$

Punem $b_k = \inf_t f_k(t)$ și fixăm k . Cu notațiile din lema 1.2. obținem, pentru orice n

$$P(\bar{X}_n \geq 0) \geq f(n_1, \dots, n_k) \geq c_k n^{-k/2} b_k^n$$

și deci

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log P(\bar{X}_n \geq 0) \geq \log b_k.$$

Facem $k \rightarrow \infty$ și obținem formulele (1.4).

Să trecem la cazul general. Punem $Y_n^{(s)} = \frac{i}{s}$ pentru $\frac{i-1}{s} \leq X_n \leq \frac{i}{s}$. Fie μ_s legea comună a $Y_n^{(s)}$ -urilor și λ_s transformarea Cramer a lui μ_s . Construcția lui μ_s implică

$$\hat{\mu}_s(t) \geq e^{-|t|/s} \hat{\mu}(t) \text{ pentru orice } t, s > 0.$$

Cum $(0, +\infty)$ și $(-\infty, 0)$ nu sunt μ -neglijabile, avem că $\hat{\mu}(t) \geq Ae^{B|t|}$, cu A, B constante strict pozitive. Putem scrie

$$e^{-\lambda_s(1/s)} = \inf_t [e^{-t/s} \hat{\mu}_s(t)] \geq \inf_t [e^{-2|t|/s} \hat{\mu}(t)].$$

Sirul de funcții $g_s(t) = e^{-2|t|/s} \hat{\mu}(t)$ converge crescător către $\hat{\mu}(t)$ când $s \rightarrow \infty$ și către $+\infty$ când $|t| \rightarrow \infty$, pentru $s > 2/B$. Ca mai sus, aceasta implică

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \left[\inf_t g_s(t) \right] = \inf_t \hat{\mu}(t) = e^{-\lambda(0)}$$

și deci $\lim_{s \rightarrow \infty} [-\lambda_s(1/s)] \geq -\lambda(0)$.

Din cazul discret, pentru s fixat, obținem

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log P \left(Y_n^{-(s)} \geq 1/s \right) \geq -\lambda_s(1/s)$$

și ținând cont de incluziunea $\left\{ Y_n^{-(s)} \geq 1/s \right\} \subseteq \left\{ X_n \geq 0 \right\}$ obținem că

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log P \left(\bar{X}_n \geq 0 \right) \geq -\lambda_s(1/s);$$

facem $s \rightarrow \infty$ și obținem formula (1.4). \square

Observații.

1. Restricțiile asupra semnului expresiei $[a - \int x d\mu(x)]$ din formulele (1.5) nu sunt puse decât pentru a formula simplu singularul rezultat netrivial. Într-adevăr, dacă $\int x d\mu(x) < a$, avem de exemplu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log P \left(\bar{X}_n \leq a \right) = \sup_{n \geq 1} \frac{1}{n} \log P \left(\bar{X}_n \leq a \right) = 0.$$

2. Teorema 1.1. sugerează că probabilitatea de a găsi \bar{X}_n în vecinătatea lui x "are ordinul" $e^{-n\lambda(x)}$; în această formă, rezultatul este fals, dar acest enunț exprimă conținutul intuitiv al teoremei 1.1., după cum vom preciza mai departe. Să reținem pentru moment că valorile mari ale lui λ corespund punctelor în care aparițiile lui \bar{X}_n sunt puțin probabile.

PROPOZITIA 1.3. *Fie $[u, v] \subset [-\infty, +\infty]$ anvelopa convexă închisă a suportului repartiției μ cu $\int |x| d\mu(x) < +\infty$. Atunci $\lambda(x) = +\infty$ pentru $x \notin [u, v]$ în timp ce $\lambda(x)$ este finită și continuă pentru $x \in (u, v)$. În plus, λ este continuă la stânga în v (dacă v este finit) și continuă la dreapta în u (dacă u este finit). Pentru v finit, relația $\lambda(v) = +\infty$ este echivalentă cu $\mu(\{v\}) = 0$ (rezultat analog pentru u finit). În particular avem*

$$\int_{\mathbb{R}} e^{s\lambda(x)} d\mu(x) < \infty \text{ pentru orice } s < 1 \quad (1.6)$$

și

$$\hat{\mu}(t) < \infty \text{ pentru orice } t > 0 \iff \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\lambda(x)}{x} = +\infty \quad (1.7)$$

(rezultat analog pentru $t < 0$, $x \rightarrow -\infty$).

Demonstrație. Deoarece $\bar{X}_n \in [u, v]$ aproape sigur, formulele (1.4) aplicate cu $a < u$ și $a > v$ arată că $\lambda(a) = +\infty$ pentru $a \notin [u, v]$. Reciproc, fie $m = \int x d\mu(x)$; dacă $a \geq m$ și $\lambda(a) = +\infty$, formulele (1.5) arată că $P(\bar{X}_n \geq a) = 0$ și deci $\mu(\{a\}) = 0$, ceea ce implică $a \geq v$. Argument analog pentru $a \leq m$. Deci λ este finită pe (u, v) ; în plus am văzut că $\lambda(v) = +\infty$ implică $\mu(\{v\}) = 0$, iar formulele (1.4) demonstrează reciproca. Toate proprietățile de continuitate ale lui λ sunt consecințe simple ale faptului că λ este convexă și inferior semi-continuă.

Formula (1.6) este evidentă dacă $\hat{\mu}(t) = +\infty$ pentru orice $t > 0$ sau dacă v este finit. În cazul contrar, întrucât λ este convexă și continuă pe $(u, +\infty)$, derivata ei λ' există pe $(u, +\infty)$ (mai puțin, eventual, pe o mulțime numărabilă). O integrare prin părți împreună cu condiția $\lim_{x \rightarrow +\infty} \lambda(x) = +\infty$ arată că

$\int_m^{+\infty} e^{s\lambda(x)} d\mu(x)$ este finită dacă integrala

$$I := \int_m^{+\infty} e^{s\lambda(x)} \lambda'(x) \mu([x, +\infty)) dx$$

este finită. Din formulele (1.5) aplicate pentru $n = 1$, obținem că $\mu([x, +\infty)) \leq e^{-\lambda(x)}$ pentru $x \geq m$, deci

$$I \leq \int_m^{+\infty} e^{(s-1)\lambda(x)} \lambda'(x) dx < +\infty \text{ pentru } s < 1.$$

Raționăm analog pentru $\int_{-\infty}^m$ și formula (1.6) este demonstrată.

Să demonstrăm formula (1.7). Dacă $\hat{\mu}(t)$ este finită pentru orice $t > 0$, din definiția transformării Cramer rezultă, pentru $t, x > 0$, că $\frac{\lambda(x)}{x} \geq t - \frac{1}{x} \log \hat{\mu}(t)$ și deci $\liminf_{x \rightarrow +\infty} \frac{\lambda(x)}{x} \geq t$. Cum t este arbitrar, obținem că $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\lambda(x)}{x} = +\infty$.

Reciproc, pentru orice $t > 0$ fixat, are loc majorarea $t x \leq \frac{1}{2} \lambda(x)$ pentru x suficient de mare. Din formula (1.6), obținem

$$\int_A^{+\infty} e^{tx} d\mu(x) \leq \int_A^{+\infty} e^{1/2\lambda(x)} d\mu(x) < +\infty,$$

deci $\hat{\mu}(t)$ este finită. \square

Remarcă. În formula (1.6), condiția $s < 1$ nu poate fi îmbunătățită (în general). De exemplu, dacă μ este gaussiană sau exponențială, atunci $\int_{\mathbb{R}} e^{s\lambda(x)} d\mu(x) = +\infty$. Acest fapt rămâne adevărat pentru orice probabilitate μ pe \mathbb{R} cu suport necompact astfel ca $\hat{\mu}(t)$ să fie finită cel puțin într-un $t \neq 0$. În acest caz, λ ar putea fi caracterizată ca funcția convexă "cea mai mare la ∞ " astfel ca $\int_{\mathbb{R}} e^{s\lambda(x)} d\mu(x)$ este finită pentru $s < 1$ și infinită pentru $s = 1$.

REZULTATE GENERALE

Fie \mathbf{E} spațiu Banach real și separabil inzestrat cu borelienele $\mathcal{B}(\mathbf{E})$, iar μ o probabilitate pe \mathbf{E} . Fie (Ω, P) câmp de probabilitate complet și $X_n : \Omega \rightarrow \mathbf{E}$ șir de variabile aleatoare independente și identic repartizate, cu legea μ . Punem $\bar{X}_n = \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$.

Pentru orice $A \in \mathcal{B}(\mathbf{E})$, notăm

$$\underline{l}(A) = \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log P(\bar{X}_n \in A),$$

$$\bar{l}(A) = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log P(\bar{X}_n \in A)$$

și observăm că $-\infty \leq \underline{l}(A) \leq \bar{l}(A) \leq 0$.

Dacă $\underline{l}(A) = \bar{l}(A)$, notăm

$$l(A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log P(\bar{X}_n \in A).$$

PROPOZIȚIA 2.1. *Limita $l(A)$ există pentru orice parte $A \in \mathcal{B}(\mathbf{E})$ convexă. Oricare ar fi $A, B \in \mathcal{B}(\mathbf{E})$, avem*

$$\max[\underline{l}(A), \underline{l}(B)] \leq \underline{l}(A \cup B) \leq \bar{l}(A \cup B) \leq \max[\bar{l}(A), \bar{l}(B)].$$

In particular, dacă $l(A_i)$ există pentru $i = 1, \dots, n$, atunci există $l(A_1 \cup \dots \cup A_n)$ și este egală cu $\max[l(A_1), \dots, l(A_n)]$.

Demonstrație. Punem

$$X = \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n) \text{ și } Y = \frac{1}{m}(X_{n+1} + \dots + X_{n+m});$$

atunci $\bar{X}_{n+m} = \frac{n}{n+m}X + \frac{m}{n+m}Y$, iar convexitatea lui A implică $(X \in A) \cap (Y \in A) \subset (\bar{X}_{n+m} \in A)$. Deducem că $\mu_n(A)\mu_m(A) \leq$

$\mu_{n+m}(A)$, unde μ_n este legea lui \bar{X}_n , deci funcția $f: \mathbb{N} \rightarrow [0, \infty]$, $f(n) = -\log \mu_n(A)$ este subaditivă, și deci există $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{n}$.

Apoi folosim faptul că \underline{l} și \bar{l} sunt funcții crescătoare și că, pentru $c > \max[\bar{l}(A), \bar{l}(B)]$ și n mare, $\mu_n(A)$ și $\mu_n(B)$ sunt majorate de e^{nc} , deci $\mu_n(A \cup B) \leq 2e^{nc}$, adică $\bar{l}(A \cup B) \leq c$. \square

DEFINIȚIE. Vom numi transformarea Cramer a măsurii μ aplicația $\lambda: \mathbf{E} \rightarrow [0, +\infty]$, dată de

$$\lambda(x) = -\inf \{l(A), A \text{ deschisă și convexă, cu } x \in A\}. \quad (2.1)$$

Exercițiu. Cu notațiile de mai sus, arătați că

$$\lambda(x) = -\lim_{\delta \rightarrow 0} l(B(x, \delta)),$$

unde $B(x, \delta)$ este bila din \mathbf{E} de centru x și rază δ .

A priori, această definiție nu coincide cu definiția din capitolul 1 în cazul $\mathbf{E} = \mathbf{R}$. Vom vedea că acest lucru se întâmplă în cazul în care momentele de ordinul 1 ale tuturor proiecțiilor (continue) 1-dimensionale ale lui μ sunt finite.

LEMA 2.2. Transformata Cramer λ a lui μ este funcție convexă și inferior semi-continuă.

Demonstrație. Într-adevăr, pentru $x \in \mathbf{E}$ și $c < \lambda(x)$ date, există o vecinătate deschisă și convexă A a lui x astfel ca $c < -l(A)$. Pentru orice $y \in A$, vom avea

$$\lambda(y) = \sup \{-l(B), B \text{ vecinătate deschisă și convexă a lui } y\},$$

deci $\lambda(y) \geq -l(A) > c$. Funcția λ este inferior semicontinuu deoarece verifică relația $\lambda(x) \leq \liminf_{y \rightarrow x} \lambda(y)$.

Convexitatea se verifică pe dreptele spațiului, deci este suficient de arătat că $\lambda(\frac{x+y}{2}) \leq \frac{1}{2}\lambda(x) + \frac{1}{2}\lambda(y)$ pentru orice $x, y \in \mathbf{E}$. Pentru orice deschis convex care conține $\frac{x+y}{2}$, există deschisi convexi B, C care conțin x respectiv y și astfel ca $(\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C) \subset A$. Să punem $X = \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$ și $Y = \frac{1}{n}(X_{n+1} + \dots + X_{2n})$;

incluziunea $(X \in B) \cup (Y \in C) \subset (\bar{X}_{2n} \in A)$ implică $\mu_n(B) \mu_n(C) \leq \mu_{2n}(A)$, unde μ_n este legea lui \bar{X}_n . Trecem la limită după n și obținem

$$\frac{1}{2}l(B) + \frac{1}{2}l(C) \leq l(A),$$

deci $-\frac{1}{2}\lambda(x) - \frac{1}{2}\lambda(y) \leq l(A)$ iar apoi luăm inf după A în membrul drept. \square

DEFINIȚIE. Fie (E, μ) ca mai înainte și λ transformarea Cramer a lui μ . Numim *funcționala Cramer* a lui μ aplicația $\Lambda : \mathcal{P}(E) \rightarrow [0, +\infty]$ definită prin

$$\Lambda(A) = \inf_{x \in A} \lambda(x), \quad A \subset E. \quad (2.2)$$

Să observăm că a cunoaște λ este echivalent cu a cunoaște Λ .

TEOREMA 2.3. Fie $X_n : \Omega \rightarrow E$ șir de variabile aleatoare independente și cu aceeași lege μ , iar Λ funcționala Cramer asociată lui μ . Atunci

(a) Pentru orice $A \in \mathcal{B}(E)$ avem

$$-\Lambda(\overset{\circ}{A}) \leq l(A). \quad (2.3)$$

(b) Dacă \bar{A} este compact, atunci

$$\bar{l}(A) \leq -\Lambda(\bar{A}). \quad (2.4)$$

(c) Pentru orice reuniune finită A de deschise convexe ale lui E , avem

$$l(A) = -\Lambda(A). \quad (2.5)$$

Demonstrație. Dacă $x \in \overset{\circ}{A}$, există o vecinătate deschisă și convexă C a lui x astfel ca $C \subset \overset{\circ}{A}$ și avem $l(A) \geq l(C) = l(C) - \lambda(x)$. Luăm sup după $x \in \overset{\circ}{A}$ și obținem formula (2.3).



- 789407 -

Intrucât l este monotonă, avem $l(A) \leq l(\bar{A})$, deci putem presupune A compact pentru a demonstra (2.4.). Fie $a > -\Lambda(A)$; pentru orice $x \in A$ avem $a > -\lambda(x)$ și deci există un deschis convex $C_x \ni x$ astfel ca $a > l(C_x)$. Fie $C_{x_i}, i = 1, \dots, k$ o acoperire finită a lui A . Din propoziția 2.1. știm că

$$l(A) \leq \max_{i=1, \dots, k} l(C_{x_i}) < a$$

și cum a este arbitrar, obținem (2.4.).

Din definiția lui Λ , avem întotdeauna $\Lambda(A \cup B) = \inf[\Lambda(A), \Lambda(B)]$. Conform propoziției 2.1. putem presupune A deschisă și convexă pentru a demonstra formula (2.5.). Din (2.3.) rezultă că $-\Lambda(A) \leq l(A)$, deci este suficient de demonstrat inegalitatea inversă când $l(A)$ este finită.

Pentru $\epsilon > 0$ dat, putem găsi $N \in \mathbb{N}$ astfel ca

$$\frac{1}{n} \log \mu_n(A) \geq l(A) - \epsilon \text{ pentru } n \geq N.$$

Intrucât A este deschis și convex, există un compact convex K inclus în A astfel ca $\mu(A \setminus K) \leq \epsilon$, deci

$$\frac{1}{N} \log \mu_N(A) - \frac{1}{N} \log \mu_N(K) \leq \epsilon.$$

Aceasta înseamnă că funcția $f(n) = -\log \mu_n(K)$ verifică $f(N) \leq -[l(A) - 2\epsilon]N$ și, intrucât K este convex, rezultă că f este subaditivă (vezi propoziția 2.1.). În particular avem $f(pN) \leq -[l(A) - 2\epsilon]Np$ pentru orice $p \in \mathbb{N}^*$ și deci

$$-l(K) = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{f(pN)}{pN} \leq -l(A) + 2\epsilon.$$

Formula (2.4.) arată inegalitatea $\Lambda(K) \leq -l(K)$. Ultimele două inegalități, împreună cu $\Lambda(A) \leq \Lambda(K)$ implică $\Lambda(A) \leq -l(A) + 2\epsilon$ și cum ϵ este arbitrar, obținem $\Lambda(A) \leq -l(A)$. \square

PROPOZIȚIA 2.4. Transformarea Cramer asociată lui μ se poate calcula cu formula

$$\lambda(x) = \sup \{-l(H), H \text{ semi-spațiu deschis, cu } x \in H\}.$$

Demonstratie. Fie $a < \lambda(x)$. Mulțimea convexă și închisă $C = \{y; \lambda(y) \leq a\}$ nu-l conține pe x . Există deci un semi-spațiu deschis H al lui E astfel ca $H \cap C = \emptyset$ și $x \in H$. În particular $\Lambda(H) \geq a$. Din relația $-l(H) = \Lambda(H)$ obținem că $-l(H) \geq a$, deci $r = \sup \{-l(H), H \text{ semi-spațiu deschis, cu } x \in H\}$ este $\geq a$ pentru $a < \lambda(x)$ i.e. $r \geq \lambda(x)$. Inegalitatea opusă rezultă direct din definiția lui $\lambda(x)$. \square

Observație. Propoziția 2.4. reduce calculul lui λ la calculul lui $l(H)$ cu H semi-spațiu deschis, iar aceasta este o problemă 1-dimensională, apropiată de cea rezolvată în capitolul 1. Acest fapt ne va permite să calculăm λ în orice dimensiune, pornind de la $\hat{\mu}$ (transformata Laplace a lui μ) iar funcționala Λ devine în principiu calculabilă.

Fie μ probabilitate pe $\mathcal{B}(E)$. Notăm $\hat{\mu}(t) := \int_E e^{\langle t, x \rangle} d\mu(x)$, $t \in E'$ (dualul lui E), transformarea Laplace a lui μ . Funcția $\log \hat{\mu}(t)$ este definită pe E' , cu valori în $[0, +\infty]$, este convexă și inferior semi-continuă (E' este inzestrat cu topologia slabă $\sigma(E', E)$). Are loc următorul rezultat.

PROPOZIȚIA 2.5. *Cu notațiile precedente, dacă*

$$\int_E |\langle t, x \rangle| d\mu(x) \text{ este finită pentru orice } t \in E',$$

atunci

$$\lambda(x) = \sup_{t \in E'} [\langle t, x \rangle - \log \hat{\mu}(t)], \quad x \in E.$$

Demonstrație. Să considerăm μ centrată și $E = \mathbb{R}$ (cazul în care μ nu este centrată se reduce prin translație la calculele ce urmează). Avem de arătat că

$$f(x) := \sup_{t \in \mathbb{R}} [tx - \log \hat{\mu}(t)]$$

coincide cu

$$g(x) := -\lim_{\epsilon \searrow 0} l((x - 2\epsilon, x + 2\epsilon)), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Cum μ este centrată, formulele (1.5.) implică pentru $x \geq 0$

$$l((x - 2\epsilon, x + 2\epsilon)) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log P(\bar{X}_n \geq x - 2\epsilon) \\ \leq -f(x - 2\epsilon),$$

deci

$$g(x) \geq \lim_{\epsilon \searrow 0} f(x - 2\epsilon) \text{ pentru } x \geq 0. \quad (2.6)$$

Formulele (1.4.) implică pentru $x \geq 0$

$$-f(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log P(\bar{X}_n \geq x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log P(\bar{X}_n > x)$$

și, conform formulei 2.5., obținem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log P(\bar{X}_n > x) = -\Lambda((x, +\infty)) = -\inf_{y > x} g(y),$$

deci

$$f(x) \geq \inf_{y > x} g(y) \text{ pentru } x \geq 0.$$

Legea numerelor mari arată că $g(0) = 0$ și cum g este convexă, inferior semicontinuuă și pozitivă, avem $\inf_{y > x} g(y) = \lim_{\epsilon \searrow 0} g(x + \epsilon)$ pentru $x \geq 0$, deci

$$f(x) \geq \lim_{\epsilon \searrow 0} g(x + \epsilon) \quad (2.7)$$

Pot avea loc următoarele situații. Există $a, b \in [0, +\infty]$ astfel ca f, g să fie respectiv

- 1) continue finite pe $[0, a), [0, b)$
- 2) $\equiv +\infty$ pe $(a, +\infty), (b, +\infty)$
- 3) continue la stânga în a pentru a finit (în b pentru b finit).

Cu inegalitățile (2.6.), (2.7.), arătăm succesiv că $a = b$, apoi că f și g coincid pe $[0, +\infty) \setminus \{a\}$, deci coincid pe $[0, +\infty)$. Similar tratăm problema comparării lui f și g pe $(-\infty, 0]$.

În cazul general, fie $x \in \mathbb{E}$. Orice semi-spațiu deschis care-l conține pe x se scrie

$$H_{t,r}^+ = \{y \in \mathbb{E} ; \langle t, y \rangle - r > 0\}, \text{ cu} \\ \langle t, x \rangle - r > 0 \text{ pentru } t \in \mathbb{E}', r \in \mathbb{R}$$

sau

$$H_{t,r}^- = \{y \in \mathbf{E} ; \langle t, y \rangle - r < 0\}, \text{ cu} \\ \langle t, x \rangle - r < 0 \text{ pentru } t \in \mathbf{E}', r \in \mathbf{R}.$$

Fie $t : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{R}$ forma liniară asociată lui $t \in \mathbf{E}'$ și să notăm $Y_n = t(X_n)$, $L_r^+ = t(H_{t,r}^+) = (r, +\infty)$ și $L_r^- = t(H_{t,r}^-) = (-\infty, r)$, $u = t(x)$, $\mu_t = t(\mu)$, $l_t(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log P(\bar{Y}_n \in A) = l[t^{-1}(A)]$, unde A este deschis și convex în \mathbf{R} . Conform propoziției 2.4., notând transformarea Cramer a lui μ_t prin λ_t , obținem

$$\lambda_t(u) = \max \left\{ \left[\sup_{r < u} -l_t(L_r^+) \right], \left[\sup_{r > u} -l_t(L_r^-) \right] \right\}$$

de unde, ținând cont că $l_t(L_r^\pm) = l | t^{-1}(L_r^\pm) | = l(H_{t,r}^\pm)$, obținem

$$\lambda_t(u) = \max \left\{ \left[\sup_{r < t(x)} -l(H_{t,r}^+) \right], \left[\sup_{r > t(x)} -l(H_{t,r}^-) \right] \right\}.$$

Luăm sup în membrul drept din ultima inegalitate după $t \in \mathbf{E}'$ și obținem $\sup \{-l(H), H \text{ semi-spățiu deschis, cu } x \in H\}$, care este egal (cf. propoziției 2.4.) cu $\lambda(x)$. Obținem deci

$$\lambda(x) = \sup_{t \in \mathbf{E}'} \lambda_t(\langle t, x \rangle) = \sup_{t \in \mathbf{E}'} \lambda_{t(\mu)}[t(x)].$$

Din cazul $\mathbf{E} = \mathbf{R}$ (studiat anterior) avem

$$\lambda_t[t(x)] = \varphi_t[t(x)] = \sup_{s \in \mathbf{R}} [s \cdot t(x) - \log \hat{\mu}_t(s)].$$

Cum însă $\hat{\mu}_t(s) = \hat{\mu}(st)$ pentru $s \in \mathbf{R}$, $t \in \mathbf{E}'$, obținem $\lambda(x) = \sup_{t \in \mathbf{E}'} \sup_{s \in \mathbf{R}} [s \cdot t(x) - \log \hat{\mu}(st)]$, ceea ce arată că $\lambda(x) = \sup_{t \in \mathbf{E}'} [\langle t, x \rangle - \log \hat{\mu}(t)]$. \square

Exemple.

1. $\mathbf{E} = \mathbf{R}^d$, μ este gaussiană de medie M și matrice de covariație Σ (presupusă inversabilă). Atunci

$$\lambda(x) = \frac{1}{2} (x - M)^* \Sigma^{-1} (x - M).$$

2. $\mathbf{E} = \mathbf{R}^d$, $d\mu(x) = f(x)dx$ cu $f(x) \sim \frac{c}{|x|^r}$ când $|x| \rightarrow +\infty$. Atunci $\hat{\mu}(t) = +\infty$ pentru orice $t \neq 0$, deci $\lambda \equiv 0$ (cf. propoziției 2.5.).

Observații.

1. Din teorema 2.3. rezultă că λ este identic nulă \Leftrightarrow pentru orice parte boreliană A a lui \mathbf{E} , de interior nevid, are loc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log P(\bar{X}_n \in A) = 0,$$

deci situația $\lambda \equiv 0$ necesită o descriere mai fină a comportamentului asimptotic al $P(\bar{X}_n \in A)$, care poate converge către 0 (atunci când $\int_{\mathbf{E}} x d\mu(x) \notin \bar{A}$) e.g. cu viteză polinomială în $\frac{1}{n}$.

2. Fie $\mathbf{E} = \mathbf{R}^d$, μ probabilitate pe \mathbf{E} astfel ca $\int_{\mathbf{E}} |x| d\mu(x) < +\infty$ și μ nu încarcă nici un subspațiu afin (propriu) al lui \mathbf{R}^d . Dacă λ este transformata Cramer a lui μ , atunci corespondența dintre λ și μ este biunivocă; în teoria funcțiilor convexe (în dualitate), se arată că mulțimea $D(\lambda) := \{x \in \mathbf{R}^d; \lambda(x) \text{ finită}\}$ are interiorul nevid și că λ este diferențiabilă pe $\overset{\circ}{D}(\lambda)$. În plus, dacă $y \in \partial \overset{\circ}{D}(\lambda)$, atunci $\lim_{x \rightarrow y, x \in \overset{\circ}{D}(\lambda)} \|\lambda'(x)\| = +\infty$. Similar, funcția $\log \hat{\mu}$ este diferențiabilă pe $\overset{\circ}{D}(\log \hat{\mu})$. Totodată, dacă $\hat{\mu}(t)$ este finită pentru orice $t \in \mathbf{R}^d$, atunci putem scrie $\lambda(x) = \langle z, x \rangle - \log \hat{\mu}(z)$, pentru orice $x \in \overset{\circ}{D}(\lambda)$, unde z este soluția (unică) a ecuației $\frac{d}{dz} \hat{\mu}(z) = x$.

Evaluarea lui $l(A)$ se bazează pe teorema 2.3. Restricția " \bar{A} compact" pentru validitatea formulei $\bar{l}(A) \leq -\Lambda(\bar{A})$ este prea puternică în majoritatea aplicațiilor. În vedea în continuare situații când această condiție devine inutilă.

LEMA 2.6. Fie μ probabilitate pe spațiul Banach real și separabil \mathbf{E} , X_n ($n \geq 1$) șir de variabile aleatoare independente de lege μ , cu valori în \mathbf{E} . Dacă, pentru orice $a > 0$ există un

compact $K_a \subset \mathbf{E}$ astfel ca $P(\bar{X}_n \notin K_a) \leq e^{-na}$ pentru orice $n \geq N(a)$, atunci, pentru orice $B \in \mathcal{B}(\mathbf{E})$ avem

$$\bar{l}(B) \leq -\Lambda(\bar{B}).$$

In plus, daca λ este transformarea Cramer a lui μ , atunci mulțimile $\{x \in \mathbf{E}; \lambda(x) \leq b\}$ sunt convexe și compacte, pentru orice $b > 0$.

Demonstrație. Este clar că $\bar{l}(\mathbf{E} \setminus K_a) \leq -a$. Avem

$$\begin{aligned} \bar{l}(B) &\leq \max\{\bar{l}(B \cap K_a), \bar{l}(B \cap (\mathbf{E} \setminus K_a))\} \\ &\leq \max\{\bar{l}(\bar{B} \cap K_a), -a\}. \end{aligned}$$

Cum $\bar{B} \cap K_a$ este compact, teorema 2.3. implică

$$\bar{l}(\bar{B} \cap K_a) \leq -\Lambda(\bar{B} \cap K_a) \leq -\Lambda(\bar{B}),$$

deci $\bar{l}(B) \leq \max\{-\Lambda(\bar{B}), -a\}$ pentru orice $a > 0$, deci $\bar{l}(B) \leq -\Lambda(\bar{B})$.

Fie $b > 0$ și $a > b$ fixat. Mulțimea $\mathbf{E} \setminus K_a$ este deschisă, deci teorema 2.3. implică

$$-\Lambda(\mathbf{E} \setminus K_a) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log P(\bar{X}_n \in (\mathbf{E} \setminus K_a)),$$

deci, din definiția lui K_a rezultă $-\Lambda(\mathbf{E} \setminus K_a) \leq -a$. In particular avem $\lambda(x) \geq a$ pentru $x \notin K_a$, deci $\{x \in \mathbf{E}; \lambda(x) \leq b\} \subset K_a$ și apoi folosim faptul că λ este inferior semicontinuuă. Observați că $\{x \in \mathbf{E}; \lambda(x) \leq b\}$ este și convexă (deoarece λ este convexă). \square

Observație. Demonstrația lemei 2.6. funcționează in ipoteza \mathbf{E} =spatiu vectorial topologic.

PROPOZITIA 2.7. Fie \mathbf{E} dualul unui spatiu Banach \mathbf{F} și μ probabilitate pe $\mathcal{B}(\mathbf{E})$ astfel ca

$$\int_{\mathbf{E}} e^{s\|x\|} d\mu(x) \text{ este finită pentru } s \text{ într-o vecinătate a lui } 0.$$

Atunci, dacă Λ este transformata Cramer a lui μ , pentru orice $A \in \mathcal{B}(\mathbf{E})$ avem

$$\begin{aligned} -\Lambda \left(\overset{\circ}{A} \right) &\leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log P \left(\bar{X}_n \in A \right) \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log P \left(\bar{X}_n \in A \right) \leq -\Lambda \left(\bar{A} \right), \end{aligned} \quad (2.8)$$

unde $\overset{\circ}{A}$, \bar{A} sunt in raport cu topologia slabă $\sigma(\mathbf{E}, \mathbf{F})$ pe \mathbf{E} . In plus, mulțimile $\{x \in \mathbf{E}; \lambda(x) \leq b\}$ sunt compacte (slabe) pentru orice $b > 0$.

Observații. Dacă $\mathbf{E} = \mathbf{F}'$, atunci $\mathcal{B}(\mathbf{E})$ este același pentru orice topologie între topologia normei și cea slabă. In particular, transformarea Cramer λ și funcționala Cramer Λ sunt aceleași pentru topologiile normei și slabă. Să reamintim că dualul lui \mathbf{E} cu topologia slabă este \mathbf{F} .

Demonstrația propoziției 2.7. Formulele (2.8.) vor rezulta din teorema 2.3. după construcția compactilor K_a din lema 2.6. Fie B_a bila închisă de rază a din \mathbf{E} , care este slab compactă. Din formulele (1.5.) obținem

$$\begin{aligned} P \left(\bar{X}_n \in B_a \right) &= P \left(\|X_n\| > a \right) \\ &\leq P \left\{ \frac{1}{n} \left(\|X_n\| + \dots + \|X_n\| \right) > a \right\} \leq e^{-n\alpha(a)}, \end{aligned}$$

unde α este transformarea Cramer a lui $\nu =$ legea lui $\|X_n\|$.

Prin ipoteza $\hat{\nu}$ este finită într-o vecinătate a lui 0, deci $\lim_{a \rightarrow +\infty} \alpha(a) = +\infty$. Rămâne să aplicăm lema 2.6. \square

COROLAR 2.8. Fie $\mathbf{E} = \mathbf{R}^d$ și μ probabilitate pe $\mathcal{B}(\mathbf{E})$ astfel ca $\hat{\mu}(t)$ să fie finită pentru orice t într-o vecinătate a lui 0. Atunci, pentru orice $A \in \mathcal{B}(\mathbf{E})$ avem

$$\begin{aligned} -\Lambda \left(\overset{\circ}{A} \right) &\leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log P(\bar{X}_n \in A) \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log P(\bar{X}_n \in A) \leq -\Lambda \left(\bar{A} \right). \end{aligned}$$

In plus, $\lambda(x) \rightarrow +\infty$ când $x \rightarrow \infty$ in \mathbf{R}^d .

Observație. In ipotezele corolarului 2.8., se observă că relația $\Lambda \left(\overset{\circ}{A} \right) = \Lambda \left(\bar{A} \right)$ (care implică $\Lambda \left(\overset{\circ}{A} \right) = \Lambda \left(\bar{A} \right) = \Lambda(A)$) este suficientă pentru existența lui $l(A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log P(\bar{X}_n \in A)$ precum și a relației $l(A) = -\Lambda(A)$. Reciproca este falsă: fie $\mathbf{E} = \mathbf{R}$, $\mu = \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_1$ și $A = (0, +\infty)$. Atunci avem $l(A) = -\Lambda(A)$ deoarece A este deschis convex, in timp ce $\Lambda(A) = \Lambda \left(\overset{\circ}{A} \right) = +\infty$ iar $\Lambda \left(\bar{A} \right) = \lambda(1) = \log 2$.

Exerciții.

1. Este adevărat că $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log P(\bar{X}_n \in A)$ există pentru orice A deschisă in cazul $\mathbf{E} = \mathbf{R}^d$?

2. In cazul $\mathbf{E} = \mathbf{R}^d$ se pot arăta următoarele inegalități (cf. P. Bartfai, On the multivariate Chernoff theorem, Preprint Math. Inst. of the Hungarian Acad. of Sciences, 1977). Pentru $A \subset \mathbf{R}^d$ deschisă avem

$$e^{-\Lambda(A)} \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \left[P(\bar{X}_n \in A) \right]^{1/n}$$

și pentru $A \subset \mathbf{R}^d$ deschisă și convexă avem

$$P(\bar{X}_n \in A) \leq \left[e^{-\Lambda(A)} \right]^n$$

In general, rezultatul

$$\left[P(\bar{X}_n \in A) \right]^{1/n} \rightarrow e^{-\Lambda(A)}$$

pentru orice $A \subset \mathbf{R}^d$ boreliană este fals. Bartfai a dat un exemplu de mulțime A închisă cu interior nevid, astfel ca $\Lambda(A) < +\infty$ și

$$P(\bar{X}_n \in A) = 0, \text{ pentru } n = 1, 2, \dots \square$$

Interiorul unei mulțimi $B \in \mathcal{B}(\mathbf{E})$ este mai mare în topologia tare decât în cea slabă, în timp ce aderența ei este mai mică. Deci, valorile $-\Lambda(\overset{\circ}{B})$ și $-\Lambda(\bar{B})$ se îmbunătățesc când trecem de la topologia slabă la cea a normei. Propoziția 2.7. nu permite utilizarea acestor valori decât pentru topologia slabă, cel puțin în ce-l privește pe $-\Lambda(\bar{B})$. În continuare vom întări ipotezele, pentru a putea utiliza topologia tare.

Fie Γ spațiu topologic polonez; în acest curs vom considera $\Gamma = \mathbf{R}^d$ ($d \geq 1$) sau $\Gamma = \mathbf{E}$ (spațiu Banach separabil). Fie $\mathcal{M}(\Gamma)$ spațiul măsurilor mărginite pe $\mathcal{B}(\Gamma)$ și $\mathcal{M}_1(\Gamma)$ submulțimea convexă și închisă a probabilităților pe $\mathcal{B}(\Gamma)$. Spațiul $\mathcal{M}(\Gamma)$ îl considerăm înzestrat cu topologia convergenței slabe: $\mu_n \Rightarrow \mu$ dacă $\int f d\mu_n \rightarrow \int f d\mu$ pentru orice $f \in C_b(\Gamma)$. O parte $\mathcal{C} \subset \mathcal{M}(\Gamma)$ este relativ compactă dacă, pentru orice $\epsilon > 0$, există K_ϵ compact în Γ astfel ca $\mu^\pm(\Gamma \setminus K_\epsilon) \leq \epsilon$, pentru orice $\mu = \mu^+ - \mu^- \in \mathcal{C}$.

Fie $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbf{E})$ cu $\int_{\mathbf{E}} \|x\| d\mu(x) < +\infty$. Atunci există și este unic un element notat $b(\mu) \in \mathbf{E}$ astfel ca

$$\langle t, b(\mu) \rangle = \int_{\mathbf{E}} \langle t, x \rangle d\mu(x) \text{ pentru orice } t \in \mathbf{E}',$$

numit *baricentrul* lui μ . Au loc următoarele proprietăți:

1. Dacă $\mu(C) = 1$ atunci $b(\mu) \in C$, unde C este convex închis din \mathbf{E} .

2. Fie $\mu_n \in \mathcal{M}_1(\mathbf{E})$ convergent către $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbf{E})$. Dacă B este o bilă închisă din \mathbf{E} astfel ca $\mu_n(B) = 1$ pentru orice n , atunci $b(\mu_n) \rightarrow b(\mu)$ când $n \rightarrow +\infty$.

LEMA 2.9. Fie $f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ funcție continuă cu $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(t)}{t} = +\infty$. Atunci mulțimea

$$\mathcal{F}(f, a) := \left\{ \mu \in \mathcal{M}_1(\mathbf{E}) ; \int_{\mathbf{E}} f(\|x\|) d\mu(x) \leq a \right\}$$

este închisă în $\mathcal{M}(\mathbf{E})$. Aplicația $\mu \rightarrow b(\mu)$ este bine-definită și continuă pe $\mathcal{F}(f, a)$.

Demonstrație. Lema lui Fatou arată că $\mathcal{F}(f, a)$ este închisă. Pe de altă parte, pentru $\mu \in \mathcal{F}(f, a)$ și $r > 0$, avem

$$\begin{aligned} \left\| \int_{\|x\| \geq r} x d\mu(x) \right\| &\leq \int_{\|x\| \geq r} \|x\| d\mu(x) \\ &\leq \epsilon(r) \int_{\|x\| \geq r} f(\|x\|) d\mu(x) \leq a\epsilon(r), \end{aligned}$$

unde $\epsilon(r) = \sup_{\|x\| \geq r} [\|x\| / f(\|x\|)]$; observăm că $\lim_{r \rightarrow +\infty} \epsilon(r) = 0$ și aplicăm proprietatea 2 de mai sus a baricentrelor pentru a obține continuitatea aplicației $\mu \rightarrow b(\mu)$ pe $\mathcal{F}(f, a)$. \square

LEMA 2.10. Fie Γ spațiu topologic polonez și X_n șir de variabile aleatoare independente cu valori în Γ , cu aceeași lege μ . Sa considerăm legea empirică a eșantionului X_1, \dots, X_n i.e. variabila aleatoare $Z_n = \frac{1}{n}(\delta_{X_1} + \dots + \delta_{X_n})$ cu valori în $\mathcal{M}_1(\Gamma)$. Atunci, pentru orice $a > 0$, există un compact \mathcal{K}_a în $\mathcal{M}_1(\Gamma)$ și un număr natural $N(a)$, astfel ca

$$P(Z_n \notin \mathcal{K}_a) \leq e^{-na}.$$

Demonstrație. Fie b_p, ϵ_p șiruri de numere pozitive care converg către 0. Pentru fiecare p alegem un compact K_p în Γ astfel ca $\mu(\Gamma \setminus K_p) \leq b_p$. Notăm

$$\mathcal{F}_p = \{ \nu \in \mathcal{M}_1(\Gamma) \text{ cu } \nu(\Gamma \setminus K_p) \leq b_p \}.$$

Să arătăm că

$$P(Z_n \notin \mathcal{F}_p) \leq \left(\frac{b_p}{\epsilon_p} \right)^{1/2n\epsilon_p} \text{ pentru orice } n, p. \quad (2.9)$$

Dacă acest lucru este arătat atunci, cu notația $\mathcal{K} := \bigcap_{p \geq 1} \mathcal{F}_p$ (care este compact în $\mathcal{M}_1(\Gamma)$) și cu formula (2.9.), obținem

$$P(Z_n \notin \mathcal{K}) \leq \sum_{p \geq 1} P(Z_n \notin \mathcal{F}_p) \leq \sum_{p \geq 1} \left(\frac{b_p}{\epsilon_p} \right)^{1/2n\epsilon_p}$$

Este suficient apoi de considerat $b_p = \epsilon_p u^{2p/\epsilon_p}$ cu $0 < u < 1/2$ pentru a obține

$$P(Z_n \notin \mathcal{K}) \leq \sum_{p \geq 1} u^{2p} \leq 2u^n$$

și lema este demonstrată. Rămâne de arătat formula (2.9.). Suprimăm indicele p pentru ușurința calculelor. Are loc

$$\begin{aligned} P(Z_n \notin \mathcal{F}) &= P \left\{ \frac{1}{n} [1_{K^c}(X_1) + \dots + 1_{K^c}(X_n)] > \epsilon \right\} \\ &= P(\bar{U}_n > \epsilon), \end{aligned}$$

unde $U_i = 1_{K^c}(X_i)$ este variabila aleatoare cu legea binomială $\alpha\delta_1 + (1 - \alpha)\delta_0$, cu $\alpha = \mu(K^c)$ și a cărei transformare Cramer o notăm cu λ . După formulele (1.5.) avem

$$P(Z_n \notin \mathcal{F}) \leq e^{-n\lambda(\epsilon)}. \quad (2.10)$$

Dar, pentru $\epsilon \in (0, 1)$ avem

$$\lambda(\epsilon) = \epsilon \log \frac{\epsilon}{\alpha} + (1 - \epsilon) \log \frac{1 - \epsilon}{1 - \alpha}$$

și luăm $b_p < \epsilon_p$ (deci $\alpha \leq b_p < \epsilon_p$) și $\epsilon_p \leq \frac{1}{2}$ pentru a obține $\lambda(\epsilon_p) \geq \epsilon_p \log \frac{\epsilon_p}{b_p} + \frac{1}{2} \log \frac{1}{2}$. Impunem condiția $\frac{1}{2}\epsilon_p \log \frac{\epsilon_p}{b_p} \geq \frac{1}{2} \log \frac{1}{2}$ pentru a obține $\lambda(\epsilon_p) \geq \frac{1}{2}\epsilon_p \log \frac{\epsilon_p}{b_p}$, ceea ce, împreună cu (2.10.), demonstrează (2.9.). □

TEOREMA 2.11. Fie \mathbf{E} spațiu Banach real, separabil și μ probabilitate pe \mathbf{E} astfel ca

$$\int_{\mathbf{E}} e^{s\|x\|} d\mu(x) \text{ este finită pentru orice } s \in \mathbf{R}.$$

Atunci, pentru orice $A \in \mathcal{B}(\mathbf{E})$ avem

$$\begin{aligned} -\Lambda \left(\overset{\circ}{A} \right) &\leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log P \left(\bar{X}_n \in A \right) \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log P \left(\bar{X}_n \in A \right) \leq -\Lambda \left(\bar{A} \right), \end{aligned}$$

unde Λ este funcționala Cramer asociată lui μ . În plus, mulțimile $\{x \in \mathbf{E}; \lambda(x) \leq b\}$ sunt compacte pentru orice $b > 0$ finit.

Demonstrație. Fie ν legea comună a variabilelor $\|X_n\|$ și să notăm $m = \int_{\mathbf{R}} x d\nu(x)$. Vom arăta existența unei funcții f continuă și convexă pe $[0, +\infty)$ astfel ca

$$f(x) = 0 \text{ pentru } 0 \leq x \leq m$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \quad (2.11)$$

$$\int_0^{+\infty} e^{sf(x)} d\nu(x) \text{ este finită pentru } s < 1.$$

Cum $\hat{\nu}$ este finită pe \mathbf{R} (din ipoteză), putem lua $f(x) = \lambda_{\nu}(x)$ pentru $x \in [m, +\infty)$, unde λ_{ν} este transformarea Cramer a lui ν și $f(x) = 0$ pentru $x \in [0, m]$. Cu notațiile din lemele 2.9. și 2.10., avem

$$\begin{aligned} P(Z_n \notin \mathcal{F}(f, a)) &= P \left\{ \frac{1}{n} [f(\|X_1\|) + \dots + f(\|X_n\|)] > a \right\} \\ &\leq e^{-n\lambda_{\theta}(a)}, \end{aligned}$$

unde prin λ_{θ} am notat transformarea Cramer asociată lui θ , legea lui $f(\|X_1\|)$. Conform formulelor (2.11.), $\hat{\theta}(s)$ este finită

in vecinătatea lui 0, deci $\lambda_\theta(a)$ converge către $+\infty$ când $a \rightarrow +\infty$. Deci, pentru orice $A > 0$ există a_A astfel ca

$$P(Z_n \notin \mathcal{F}(f, a)) \leq e^{-nA}.$$

Fie acum $\mathcal{L}_A := \mathcal{K}_A \cap \mathcal{F}(f, a)$, unde \mathcal{K}_A este compactul din lema 2.10. Conform acestei leme și a ultimei formule, obținem

$$P(Z_n \notin \mathcal{L}_A) \leq 2e^{-nA} \text{ pentru } n \geq N(A).$$

In plus, conform lemei 2.9., \mathcal{L}_A este compact in $\mathcal{M}_1(\mathbf{E})$, pe care aplicația $\pi \rightarrow b(\pi)$ este bine-definită și continuă. Deci imaginea $L_A = b(\mathcal{L}_A)$ este compactă in \mathbf{E} și

$$P(X_n \notin L_A) = P(b(Z_n) \notin b(\mathcal{L}_A)) \leq P(Z_n \notin \mathcal{L}_A) \leq 2e^{-nA}$$

pentru $n \geq N(A)$. Rămân de aplicat lema 2.6. și teorema 2.3. \square

CAZUL GAUSIAN

Fie \mathbf{E} spațiu Banach separabil. O probabilitate μ pe $\mathcal{B}(\mathbf{E})$ se numește *gaussiană* dacă, pentru orice funcțională liniară și continuă $t : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{R}$, legea $t(\mu)$ este gaussiană pe \mathbf{R} . Dacă în plus $t(\mu)$ este centrată pentru orice $t \in \mathbf{E}'$, spunem că μ este *centrată*.

TEOREMA 3.1. *Dacă μ este probabilitate gaussiană centrată pe \mathbf{E} , atunci $\int_{\mathbf{E}} e^{s\|x\|} d\mu(x)$ este finită pentru orice $s \in \mathbf{R}$. În particular, $\int_{\mathbf{E}} \|x\|^2 d\mu(x)$ este finită.*

Demonstrație. Putem presupune μ centrată. Fie x, x_1, \dots, x_n variabile aleatoare independente din \mathbf{E} , toate având legea μ . Să observăm că, pentru $n \geq 1$, legea lui $\frac{1}{n^{1/2}} \sum_{k=1}^n x_k$ în raport cu μ^n este aceeași cu legea lui x în raport cu μ . Vom arăta că este suficient ca $\int_{\mathbf{E}} e^{s\|x\|} d\mu(x)$ să fie finită pentru un singur $s \in \mathbf{R}$. Într-adevăr, dacă este așa, atunci

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbf{E}} e^{n^{1/2}s\|x\|} d\mu(x) \\ &= \int_{\mathbf{E}} \exp\left(n^{1/2} \frac{s}{n^{1/2}} \left\| \sum_{k=1}^n x_k \right\| \right) \mu^n(dx_1, \dots, dx_n) \\ & \leq \left(\int_{\mathbf{E}} e^{s\|x\|} d\mu(x) \right)^n \end{aligned}$$

Acum să observăm că, dacă x, y sunt variabile aleatoare pe \mathbf{E} , independente și cu legea μ , atunci $\left(\frac{x+y}{2^{1/2}}, \frac{x-y}{2^{1/2}}\right)$ are aceeași lege sub μ^2 ca și (x, y) . Pentru $0 < s < t$, avem

$$\mu^2\left((x, y) \in \mathbf{E}^2 : \|x\| \leq s, \|y\| \geq t\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \mu^2 \left((x, y) \in \mathbf{E}^2 : \|x - y\| \leq 2^{1/2}s, \|x + y\| \geq 2^{1/2}t \right) \\
&\leq \mu^2 \left((x, y) \in \mathbf{E}^2 : \left| \|x\| - \|y\| \right| \leq 2^{1/2}s, \|x\| + \|y\| \geq 2^{1/2}t \right) \\
&\leq \mu^2 \left((x, y) \in \mathbf{E}^2 : \|x\| \wedge \|y\| \geq \frac{t-s}{2^{1/2}} \right),
\end{aligned}$$

deci

$$\begin{aligned}
&\mu(x \in \mathbf{E} : \|x\| \leq s) \mu(x \in \mathbf{E} : \|x\| \geq t) \\
&\leq \left(\mu \left(x \in \mathbf{E} : \|x\| \geq \frac{t-s}{2^{1/2}} \right) \right)^2
\end{aligned}$$

Luăm $t_0 = s$ și $t_{n+1} = s + 2^{1/2}t_n$ pentru a obține

$$\begin{aligned}
&\mu(x \in \mathbf{E} : \|x\| \geq t_{n+1}) / \mu(x \in \mathbf{E} : \|x\| \leq s) \\
&\leq \left(\mu(x \in \mathbf{E} : \|x\| \geq t_n) / \mu(x \in \mathbf{E} : \|x\| \leq s) \right)^2.
\end{aligned}$$

Deci

$$\begin{aligned}
&\mu(x \in \mathbf{E} : \|x\| \geq t_n) \\
&\leq \mu(x \in \mathbf{E} : \|x\| \leq s) \times \exp \left[2^n \log \frac{\mu(x \in \mathbf{E} : \|x\| \geq s)}{\mu(x \in \mathbf{E} : \|x\| \leq s)} \right]
\end{aligned}$$

pentru orice $0 < s < t$ și $n \geq 0$. În particular, alegem pe s astfel ca $\mu(x \in \mathbf{E} : \|x\| \geq s) / \mu(x \in \mathbf{E} : \|x\| \leq s) = \rho < 1$; obținem

$$\mu \left(x \in \mathbf{E} : \|x\| \geq \frac{2^{(n+1)/2} - 1}{2^{1/2} - 1} s \right) \leq e^{2^n \log \rho}. \square$$

Să notăm \mathbf{E}' dualul lui \mathbf{E} și $\langle t, x \rangle$ dualitatea dintre $t \in \mathbf{E}'$ și $x \in \mathbf{E}$. Pentru μ centrată, definim covariația lui μ prin $K : \mathbf{E}' \times \mathbf{E}' \rightarrow \mathbf{R}$,

$$K(s, t) = \int_{\mathbf{E}} (s, x)(t, x) d\mu(x); \quad s, t \in \mathbf{E}'.$$

Intrucât $|K(s, t)| \leq c^2 \|s\| \|t\|$ cu $c^2 = \int \|x\|^2 d\mu(x)$, observăm că aplicația K este biliniară și continuă pe $\mathbf{E}' \times \mathbf{E}'$

iar $K(s, t) \geq 0$ pentru $t \in \mathbf{E}'$. Spațiul \mathbf{E}' se scufundă într-un spațiu Hilbert \mathbf{H} în felul următor. Fiecarei $t \in \mathbf{E}'$ îi asociem variabila aleatoare gaussiană reală Z^t definită pe câmpul de probabilitate $(\mathbf{E}, \mathcal{B}(\mathbf{E}), \mu)$ prin $Z^t(x) = \langle t, x \rangle$. Fie \mathbf{H} închiderea în $L^2(\mathbf{E}, \mathcal{B}(\mathbf{E}), \mu)$ a spațiului vectorial $\{Z^t, t \in \mathbf{E}'\}$. Aplicația $Z: \mathbf{E}' \rightarrow \mathbf{H}$ este liniară, continuă și de imagine densă. În plus, dacă notăm $[\cdot, \cdot]$ produsul scalar din $L^2(\mathbf{E}, \mathcal{B}(\mathbf{E}), \mu)$ (deci și din \mathbf{H}), avem

$$K(s, t) = [Z^s, Z^t] \text{ pentru orice } s, t \in \mathbf{E}' .$$

Să observăm că, dacă $v \in L^2(\mathbf{E}, \mathcal{B}(\mathbf{E}), \mu)$, atunci

$$\int_{\mathbf{E}} \|x\| |v(x)| d\mu(x) \leq c \|v\|_{L^2(\mathbf{E}, \mathcal{B}(\mathbf{E}), \mu)} ,$$

deci formula $Sv = \int_{\mathbf{E}} xv(x)d\mu(x)$ definește un operator liniar și continuu $S: L^2(\mathbf{E}, \mathcal{B}(\mathbf{E}), \mu) \rightarrow \mathbf{E}$. Din construcție avem

$$\int_{\mathbf{E}} Z^s(x)v(x)d\mu(x) = \int_{\mathbf{E}} \langle s, x \rangle v(x)d\mu(x) = \langle s, \int_{\mathbf{E}} xv(x)d\mu(x) \rangle$$

și deci

$$[Z^t, v] = \langle t, Sv \rangle \text{ pentru } t \in \mathbf{E}' , v \in L^2(\mathbf{E}, \mathcal{B}(\mathbf{E}), \mu) ,$$

ceea ce arată că restricția lui S la \mathbf{H} este injectivă.

În concluzie, dată fiind o probabilitate gaussiană μ pe spațiul Banach separabil \mathbf{E} , îi putem asocia un spațiu Hilbert separabil \mathbf{H} cu produsul scalar notat $[\cdot, \cdot]_{\mathbf{H}}$, o injecție liniară și continuă $S: \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{E}$, o aplicație liniară și continuă (de imagine densă) $Z: \mathbf{E}' \rightarrow \mathbf{H}$ astfel ca

$$[Z^t, v]_{\mathbf{H}} = \langle t, Sv \rangle \text{ pentru } t \in \mathbf{E}' , v \in \mathbf{H} ,$$

$$[Z^t, Z^s]_{\mathbf{H}} = K(t, s) \text{ pentru } t, s \in \mathbf{E}' .$$

PROPOZITIA 3.2. Fie μ probabilitate gaussiană centrată pe spațiul Banach separabil \mathbf{E} . Fie \mathbf{H} spațiul Hilbert și $S : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{E}$ injecția liniară și continuă asociate lui μ ca mai înainte. Atunci transformarea Cramer λ a lui μ este dată de

$$\lambda(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \|S^{-1}x\|_{\mathbf{H}}^2 & \text{dacă } x \in S(\mathbf{H}) \\ +\infty, & \text{dacă } x \in \mathbf{E} \setminus S(\mathbf{H}). \end{cases}$$

In plus, operatorul S este compact.

Demonstrație. Transformarea Laplace $\hat{\mu}(t)$ se scrie

$$\hat{\mu}(t) = \int_{\mathbf{E}} e^{(t,x)} d\mu(x) = E[\exp(Z^t)],$$

deci $\log \hat{\mu}(t) = \frac{1}{2} [Z^t, Z^t]_{\mathbf{H}} = \frac{1}{2} K(t, t)$. Propoziția 2.5. arată că

$$\lambda(x) = \sup_{t \in \mathbf{E}'} \left[\langle t, x \rangle - \frac{1}{2} K(t, t) \right], \quad x \in \mathbf{E}, \text{ deci}$$

$$\lambda(x) = \sup_{t \in \mathbf{E}'} \left[\langle t, x \rangle - \frac{1}{2} \|Z^t\|^2 \right]. \quad (3.1)$$

Fie acum $x \in \mathbf{E}$ fixat astfel ca $\lambda(x) < +\infty$. Pentru $t \in \text{Ker } Z$ și orice $a \in \mathbf{R}$, conform formulei (3.1.), avem $\lambda(x) \geq a \langle t, x \rangle$, ceea ce implică $\langle t, x \rangle = 0$. Aceasta înseamnă că există o aplicație liniară $g : \text{Im } Z \rightarrow \mathbf{R}$ astfel ca $g(Z^t) = \langle t, x \rangle$ pentru orice $t \in \mathbf{E}'$. Tot din formula (3.1.) rezultă

$$|g(v)| \leq \lambda(x) + \frac{1}{2} \|v\|_{\mathbf{H}}^2 \quad \text{pentru } v \in \text{Im } Z,$$

deci g este marginită pe intersecția dintre $\text{Im } Z$ și bila unitate din \mathbf{H} . Cum $\text{Im } Z$ este densă în \mathbf{H} , aplicația g se prelungește (unic) la o funcțională liniară și continuă pe \mathbf{H} i.e. există $w \in \mathbf{H}$ astfel ca $g(v) = [v, w]_{\mathbf{H}}$ pentru orice $v \in \mathbf{H}$. În particular $\langle t, x \rangle = g(Z^t) = [Z^t, w]_{\mathbf{H}} = \langle t, Sw \rangle$ pentru orice $t \in \mathbf{E}'$, deci $x = Sw$ i.e. $x \in S(\mathbf{H})$.

Reciproc, fie $x \in S(\mathbf{H})$ și să scriem $x = Sw$ cu $w \in \mathbf{H}$. Conform formulei (3.1.), avem

$$\lambda(x) = \sup_{t \in \mathbf{E}'} \left\{ [Z^t, w]_{\mathbf{H}} - \frac{1}{2} \|Z^t\|_{\mathbf{H}}^2 \right\}$$

și cum $\text{Im } Z$ este densă în \mathbf{H} , obținem

$$\lambda(x) = \sup_{v \in \mathbf{H}} \left\{ [v, w]_{\mathbf{H}} - \frac{1}{2} \|v\|_{\mathbf{H}}^2 \right\}.$$

Pentru $\|v\|_{\mathbf{H}} = a$ fixat, $\sup [v, w]_{\mathbf{H}}$ este atins și este egal cu $a \|w\|_{\mathbf{H}}$. Cum $\sup (a \|w\|_{\mathbf{H}} - \frac{1}{2} a^2)$ este egal cu $\frac{1}{2} \|w\|_{\mathbf{H}}^2$, obținem $\lambda(x) = \frac{1}{2} \|w\|_{\mathbf{H}}^2 = \frac{1}{2} \|S^{-1}x\|_{\mathbf{H}}^2$ și în particular $\lambda(x) < +\infty$.

Calculul lui λ arată că imaginea prin S a bilei unitate din \mathbf{H} este $\{x \in \mathbf{E} : \lambda(x) \leq 1\}$. Această mulțime este compactă (cf. teoremei 2.11.), deci S este operator compact. \square

TEOREMA 3.3. *Fie μ probabilitate gaussiană centrată pe spațiul Banach separabil \mathbf{E} . Fie $X : \Omega \rightarrow \mathbf{E}$ variabilă aleatoare de lege μ . Fie Λ funcționala Cramer asociată lui μ . Atunci, pentru orice $A \in \mathcal{B}(\mathbf{E})$ avem*

$$\begin{aligned} -\Lambda \left(\overset{\circ}{A} \right) &\leq \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^2 \log P(\epsilon X \in A) \\ &\leq \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^2 \log P(\epsilon X \in A) \leq -\Lambda \left(\bar{A} \right). \end{aligned}$$

Demonstrație. Fie $\epsilon \in (0, 1)$ și notăm $n(\epsilon)$ partea întreagă a lui $1/\epsilon^2$. Putem scrie

$$\epsilon = \frac{b(\epsilon)}{n(\epsilon)^{1/2}}, \text{ cu } 1 - \epsilon^2 \leq b^2(\epsilon) \leq 1. \quad (3.2)$$

Fie $X_p : \Omega \rightarrow \mathbf{E}$ șir de variabile aleatoare independente, toate cu legea μ . Întrucât μ este gaussiană, media normalizată $p^{1/2} \bar{X}_p$ are aceeași lege ca și X pentru orice p . În consecință

$$\begin{aligned} P(\epsilon X \in A) &= P(\epsilon n(\epsilon)^{1/2} \bar{X}_{n(\epsilon)} \in A) \\ &= P\left(\bar{X}_{n(\epsilon)} \in \frac{1}{b(\epsilon)} A\right) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Să notăm $F = \left\{ x \in \mathbf{E} : x = ay, 1 \leq a \leq 2, y \in \bar{A} \right\}$. Din definiția lui Λ și remarcând că transformarea Cramer λ a lui μ satisface $\lambda(ax) = a^2\lambda(x)$ pentru orice $a \in \mathbf{R}$, $x \in \mathbf{E}$, obținem

$$\Lambda(F) = \inf_{x \in F} \lambda(x) \quad (3.4)$$

$$= \inf_{y \in \bar{A}} \inf_{1 \leq a \leq 2} a^2 \lambda(y) = \inf_{y \in \bar{A}} \lambda(y) = \Lambda(\bar{A}).$$

Pe de altă parte, $\frac{1}{b(\epsilon)}A \subset F$ dacă ϵ este suficient de mic (F este închisă) și cum $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} n(\epsilon) = +\infty$, teorema 2.11. implică

$$\begin{aligned} & \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{n(\epsilon)} \log P \left(\bar{X}_{n(\epsilon)} \in \frac{1}{b(\epsilon)}A \right) \\ & \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log P \left(\bar{X}_n \in F \right) \leq -\Lambda(F), \end{aligned}$$

ceea ce, împreună cu formulele (3.2.)-(3.4.) dau a doua inegalitate din concluzia teoremei.

Fie $x \in \overset{\circ}{A}$. Există o vecinătate deschisă și convexă V a lui x astfel ca, pentru ϵ suficient de mic, să avem $V \subset \frac{1}{b(\epsilon)}A$. Conform aceleiași teoreme 2.11., avem

$$\begin{aligned} \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^2 \log P(\epsilon X \in A) & \geq \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{b^2(\epsilon)}{n(\epsilon)} \log P(\bar{X}_{n(\epsilon)} \in V) \\ & = -\Lambda(V) \geq -\lambda(x). \end{aligned}$$

Luăm sup în membrul drept din ultima inegalitate după $x \in \overset{\circ}{A}$ și obținem prima inegalitate din concluzia teoremei. \square

Sa considerăm acum \mathbf{E} spațiu Hilbert separabil și μ probabilitate gaussiană (centrată) pe $\mathcal{B}(\mathbf{E})$. Are loc $\mathbf{E} = \mathbf{E}'$, iar covariația $K(s, t)$ asociată lui μ se scrie

$$K(s, t) = \langle s, Tt \rangle = \langle Ts, t \rangle \text{ pentru } s, t \in \mathbf{E},$$

unde $T : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}$ este operator liniar, continuu, autoadjunct, pozitiv și de urmă finită. Aceasta înseamnă ca există o bază ortonormală e_n a lui \mathbf{E} și numere pozitive r_n astfel ca $\sum_{n=1}^{+\infty} r_n < +\infty$ și

$$Tx = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle x, e_n \rangle r_n e_n \text{ pentru } x \in \mathbf{E}.$$

Vom nota $T^{1/2}$ rădăcina pătrată (unică) auto-adjunctă a lui T , definită prin

$$T^{1/2}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle x, e_n \rangle r_n^{1/2} e_n \text{ pentru } x \in \mathbf{E}$$

și \mathbf{H} închiderea lui $T^{1/2}(\mathbf{E})$. Atunci \mathbf{H} este ortogonalul lui $\text{Ker } T$ în \mathbf{E} , iar $\text{Ker } T$, \mathbf{H} sunt nucleul și aderența imaginii lui $T^{1/2}$. În particular, restricția lui $T^{1/2}$ la subspațiul închis \mathbf{H} este injectivă și $T^{1/2}(\mathbf{E}) = T^{1/2}(\mathbf{H})$.

PROPOZITIA 3.4. Fie μ probabilitate gaussiană (centrată) pe spațiul Hilbert separabil \mathbf{E} , $T : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}$ operatorul de covariație asociat lui μ ca mai înainte și \mathbf{H} ortogonalul lui $\text{Ker } T$ în \mathbf{E} . Notăm cu S restricția lui $T^{1/2}$ la \mathbf{H} , deci $S : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{E}$ este injectiv și aplică \mathbf{H} pe $T^{1/2}(\mathbf{E})$. Atunci transformarea Cramer λ a lui μ este dată de

$$\lambda(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \|S^{-1}x\|_{\mathbf{H}}^2 & \text{dacă } x \in T^{1/2}(\mathbf{E}) \\ +\infty, & \text{dacă } x \notin T^{1/2}(\mathbf{E}). \end{cases}$$

Demonstrație. Pentru orice $s \in \mathbf{E}' = \mathbf{E}$, notăm $Z^s = T^{1/2}s$. Intrucât operatorul $T^{1/2}$ lasă pe \mathbf{H} invariant și verifică $\overline{T^{1/2}(\mathbf{E})} = \mathbf{H}$, obținem că $Z : \mathbf{E}' \rightarrow \mathbf{H}$ este operator liniar, continuu, de imagine densă, în timp ce $S : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{E}$ este injectiv. Rămâne de aplicat propoziția 3.2., observând că $S(\mathbf{H}) = T^{1/2}(\mathbf{E})$. \square

Fie $X_t : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$, $t \in [0, 1]$ proces gaussian centrat cu traiectoriile continue a.s. Atunci covariația ρ a procesului, definită prin

$$\rho(s, t) = \int_{\Omega} X_s(\omega)X_t(\omega)dP(\omega), \text{ pentru } s, t \in [0, 1],$$

este continuă în (s, t) . De exemplu, dacă ρ satisface condiția Hölder

$$|\rho(s, t) - \rho(s', t')| \leq ct. [|s - s'|^\alpha + |t - t'|^\alpha]$$

pentru $s, t, s', t' \in [0, 1]$, atunci procesul X_t admite o versiune cu traiectoriile continue a.s.

Mai mult, deindată ce procesul X_t admite o versiune cu traiectoriile continue a.s., putem găsi o versiune a procesului cu traiectoriile continue *peste tot*. Obținem astfel o aplicație măsurabilă $X : \Omega \rightarrow C[0, 1]$, unde $X(\omega)$ este funcția care lui $t \in [0, 1]$ îi asociază $X_t(\omega)$, iar $C[0, 1]$ este spațiul funcțiilor continue pe $[0, 1]$ înzestrat cu corpul borelianelor.

Fie μ imaginea probabilității P (dată pe Ω) prin aplicația X , numită *legea procesului X_t* . Atunci μ este probabilitate gaussiană centrată pe $(\mathbf{E}, \mathcal{B}(\mathbf{E}))$, unde $\mathbf{E} = C[0, 1]$ înzestrat cu structura sa uzuală de spațiu Banach.

Intr-adevar, \mathbf{E}' este spațiul măsurilor Radon mărginite pe $[0, 1]$; pentru orice $\pi \in \mathbf{E}'$, variabila aleatoare $Z^\pi : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{R}$ definită prin

$$Z^\pi(f) = \langle \pi, f \rangle = \int_{[0,1]} f(t) d\pi(t), \text{ pentru } f \in \mathbf{E}$$

are aceeași lege (atunci când \mathbf{E} este înzestrat cu probabilitatea μ) ca și variabila aleatoare $Y : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ definită prin

$$Y(\omega) = \int_{[0,1]} X_t(\omega) d\pi(t).$$

Deci imaginea măsurii μ prin orice funcțională liniară și continuă este gaussiană centrată, deci μ este gaussiană centrată.

Covariația K a lui μ este dată de

$$\begin{aligned} K(\pi, \eta) &= \text{Cov} \left[\int_{[0,1]} X_t d\pi(t), \int_{[0,1]} X_t d\eta(t) \right] \\ &= \iint_{[0,1] \times [0,1]} \rho(s, t) d\pi(s) d\eta(t). \end{aligned}$$

PROPOZITIA 3.5. Fie $X_t : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$, $t \in [0, 1]$ proces gaussian centrat cu traiectoriile continue a.s., de covariație $\rho(s, t)$, $s, t \in [0, 1]$. Să definim operatorul $R : L^2[0, 1] \rightarrow L^2[0, 1]$ prin $Rf(t) = \int_0^1 \rho(t, s)f(s)ds$. Atunci R ia valori in $C[0, 1]$, este auto-adjunct, pozitiv, compact și de urmă finită. Fie \mathbf{H} ortogonalul lui $\text{Ker } R$ in $L^2[0, 1]$ și S restricția la \mathbf{H} a operatorului $R^{1/2}$, deci $S : \mathbf{H} \rightarrow L^2[0, 1]$ este injectiv și aplică \mathbf{H} pe $R^{1/2}(L^2[0, 1])$.

Fie μ legea procesului X_t . Atunci transformarea Cramer λ a lui μ este dată (pentru $f \in C[0, 1]$) de :

$$\lambda(f) = \begin{cases} \frac{1}{2} \|S^{-1}f\|_{L^2[0,1]}^2 & \text{dacă } f \in R^{1/2}(L^2[0, 1]) \\ +\infty, & \text{dacă } f \notin R^{1/2}(L^2[0, 1]). \end{cases}$$

Demonstrația se va baza pe lema următoare.

LEMA 3.6. Fie \mathbf{C} , \mathbf{L} spații Banach separabile și μ probabilitate gaussiană centrată pe \mathbf{C} . Dacă există o injecție continuă $i : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{L}$, atunci transformările Cramer ale măsurilor μ și $i(\mu)$ sunt legate prin relația

$$\lambda_\mu = \lambda_{i(\mu)} \circ i.$$

Demonstrația lemei 3.6. Fie $i^* : \mathbf{L}^* \rightarrow \mathbf{C}^*$ aplicația duală a lui i . Din definiția covariației obținem

$$K_{i(\mu)}(s, t) = K_\mu(i^*(s), i^*(t)) \text{ pentru } s, t \in \mathbf{L}^*.$$

Cum i este injectivă, $i^*(\mathbf{L}^*)$ este densă in \mathbf{C}^* și deci, pentru $x \in \mathbf{C}$, avem

$$\begin{aligned} \lambda_\mu(x) &= \sup_{t \in \mathbf{C}^*} \left[\langle t, x \rangle - \frac{1}{2} K_\mu(t, t) \right] \\ &= \sup_{i^*(s) \in \mathbf{C}^*} \left[\langle i^*(s), x \rangle - \frac{1}{2} K_\mu(i^*(s), i^*(s)) \right] \end{aligned}$$

$$= \sup_{s \in L^*} \left[\langle s, i(x) \rangle - \frac{1}{2} K_{i(\mu)}(s, s) \right]$$

i.e. $\lambda_\mu(x) = \lambda_{i(\mu)}(i(x))$. \square

Demonstrația propoziției 3.5. Luăm $C := C[0, 1]$ și $L := L^2[0, 1]$; dacă i este injecția canonică, lema 3.6. arată că, pentru $f \in C[0, 1]$ avem $\lambda_\mu(f) = \lambda_{i(\mu)}(f)$ unde prin abuz de limbaj am identificat f și $i(f)$. Apoi, covariația lui $i(\mu)$ este dată de $K_{i(\mu)}(f, g) = \langle Rf, g \rangle_{L^2[0,1]}$, iar calculul lui $\lambda_{i(\mu)}$ pentru spațiul Hilbert L a fost făcut în propoziția 3.4. Folosim în final că λ este "restricția" lui $\lambda_{i(\mu)}$ la C . \square

APLICATII

APLICATIE IN STATISTICA

Vom formula și demonstra această aplicație în cazul real, deși rămâne adevărată în contextul unui spațiu topologic polonez. Să remarcăm importanța ei intrinsecă, deoarece se calculează explicit transformarea Cramer a legii empirice asociate unui eșantion dat.

Notăm $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$) spațiul măsurilor reale mărginite (resp. spațiul probabilităților pe dreaptă). Pentru $\mu, \nu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$, definim informația (sau informația Kullback) lui ν în raport cu μ prin

$I_\mu(\nu) = \int f(x) \log f(x) d\mu(x)$, dacă ν este absolut continuă în raport cu μ și $f(x) = \frac{d\nu}{d\mu}(x)$,

$I_\mu(\nu) = +\infty$, dacă ν nu este absolut continuă în raport cu μ .

Observăm că $I_\mu(\nu)$ este cu atât "mai mare" cu cât ν este mai îndepărtată de μ . În particular $I_\mu(\nu) = 0 \Leftrightarrow \nu = \mu$.

TEOREMA 4.1. Fie X_n șir de variabile aleatoare reale independente, cu aceeași lege μ . Să considerăm legea empirică a eșantionului X_1, \dots, X_n i.e. $Z_n := \frac{1}{n}(\delta_{X_1} + \dots + \delta_{X_n})$ cu valori în $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$. Atunci, pentru orice $A \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ avem

$$\begin{aligned} -I_\mu \left(\overset{\circ}{A} \right) &\leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log P(Z_n \in A) \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log P(Z_n \in A) \leq -I_\mu \left(\bar{A} \right), \end{aligned}$$

unde $I_\mu(A) = \inf_{\nu \in A} I_\mu(\nu)$. Pentru orice reuniune A de deschise

și convexe din $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$, avem

$$-I_\mu(A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log P(Z_n \in A).$$

In fine, transformarea Cramer λ a legii lui δ_{X_1} coincide cu I_μ pe $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ și este egală cu $+\infty$ pe $\mathcal{M}(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$. In plus, mulțimile $\{\lambda(x) \leq b\}$ sunt compacte, pentru orice $b > 0$.

Demonstrație. Din lema 2.10. există, pentru orice $a > 0$, un compact \mathcal{K}_a in $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ astfel ca $P(Z_n \notin \mathcal{K}_a) \leq e^{-na}$. Lema 2.6. și teorema 2.3. furnizează concluzia, dacă arătam că transformarea Cramer λ a lui π ($:=$ legea lui δ_{X_1}) coincide cu I_μ pe $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ și este egală cu $+\infty$ pe $\mathcal{M}(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$. Ultima afirmație rezultă din faptul că $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ conține anvelopa convexă închisă a suportului lui π . Pentru $\nu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$, conform cu propoziția 2.5., avem

$$\lambda(\nu) = \sup_{f \in C(\mathbb{R})} [\langle f, \nu \rangle - \log \hat{\pi}(f)].$$

Din construcție, pentru $f \in C(\mathbb{R})$, avem

$$\hat{\pi}(f) = \int_{\mathcal{M}_1(\mathbb{R})} \exp(\langle f, \tau \rangle) d\pi(\tau) = \int e^{f(x)} d\mu(x),$$

deci

$$\lambda(\nu) = \sup_{f \in C(\mathbb{R})} \left[\int f(x) d\nu(x) - \log \int e^{f(x)} d\mu(x) \right].$$

Să presupunem că $I_\mu(\nu) < +\infty$. Atunci $\nu \ll \mu$ și fie $g = \frac{d\nu}{d\mu}$. Pentru $f \in C(\mathbb{R})$, din inegalitatea Jensen, obținem

$$\exp \left[\int (f - \log g) \mathbf{1}_{(g>0)} g d\mu \right] \leq \int \exp(f - \log g) \mathbf{1}_{(g>0)} g d\mu,$$

deci

$$\int f g d\mu - \int g \log g d\mu \leq \log \int e^f d\mu$$

sau

$$\int f d\nu - \log \int e^f d\mu \leq \int g \log g d\mu = I_\mu(\nu).$$

Luăm sup in membrul stâng dupa $f \in C(\mathbb{R})$ și obținem $\lambda(\nu) \leq I_\mu(\nu)$. Reciproc, presupunem $\lambda(\nu) < +\infty$ deci, pentru orice $f \in C(\mathbb{R})$ avem

$$\int f d\nu - \log \int e^f d\mu \leq \lambda(\nu) < +\infty. \quad (4.1)$$

Formula (4.1.) rămâne adevărată pentru orice f măsurabilă și marginită (cf. teoremei lui Luzin, restricția unei astfel de funcții la compacti de ν și μ -măsură ≈ 1 este continuă). Aplicăm (4.1.) funcției $f = n1_A$, cu $A \subset \mathbb{R}$, $\mu(A) = 0$ și obținem $n\nu(A) \leq \lambda(\nu)$ pentru orice n , deci $\nu(A) = 0$. Notăm $g = \frac{d\nu}{d\mu}$ și, dacă $\log g$ ar fi mărginită, formula (4.1.) aplicată funcției $\log g$ ar implica

$$\int \log g d\nu - \log \int d\mu \leq \lambda(\nu)$$

i.e. $I_\mu(\nu) \leq \lambda(\nu)$. Dacă $\log g$ nu e mărginită, o aproximăm cu funcții măsurabile mărginite. \square

APLICATII LA MASURI SI PROCESE GAUSIENE

Notațiile și definițiile sunt cele din capitolul 3.

PROPOZITIA 4.2. Fie μ probabilitate gaussiană centrată pe spațiul Banach separabil \mathbf{E} . Fie λ transformata ei Cramer și K covariația ei. Atunci numerele

$$a = \inf \{ \lambda(x) : x \in \mathbf{E}, \|x\| = 1 \}$$

și

$$b = \sup \{ K(t, t) : t \in \mathbf{E}', \|t\| = 1 \}$$

sunt finite și avem

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{r^2} \log \mu \{ x \in \mathbf{E}, \|x\| \geq r \} = -a = -\frac{1}{2b}.$$

Demonstrație. Fie $B = \{ x \in \mathbf{E}, \|x\| \geq 1 \}$. Relația $\lambda(\alpha x) = \alpha^2 \lambda(x)$ pentru $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbf{E}$ implică

$$\Lambda(B) = \inf_{x \in B} \lambda(x) = \inf_{\|y\|=1} \inf_{\alpha > 1} \alpha^2 \lambda(y) = a.$$

$$\Lambda \left(\overset{\circ}{B} \right) = \inf_{\|y\|=1} \inf_{\alpha > 1} \alpha^2 \lambda(y) = a.$$

Cum B este închisă, teorema 3.3. implică

$$\begin{aligned} & \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{r^2} \log \mu \{x \in \mathbf{E}, \|x\| \geq r\} \\ &= \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{r^2} \log P \left(\frac{1}{r} X \in B \right) = -a, \end{aligned}$$

unde $X : (\Omega, P) \rightarrow \mathbf{E}$ este variabilă aleatoare cu legea μ .

Rămân de comparat numerele a și $1/2b$. Pentru $x \in \mathbf{E}$, $t \in \mathbf{E}'$ și $s \geq 0$, avem $\lambda(x) \geq s \langle t, x \rangle - \frac{1}{2} s^2 K(t, t)$. Fie $x \in \mathbf{E}$ cu $\|x\| = 1$ fixat. Conform teoremei Hahn-Banach, există $t_0 \in \mathbf{E}'$ cu $\|t_0\| = 1$ astfel ca $\langle t_0, x \rangle = 1$. Obținem

$$\lambda(x) \geq \sup_{s \geq 0} \left[s - \frac{1}{2} s^2 K(t_0, t_0) \right] = \frac{1}{2K(t_0, t_0)} \geq \frac{1}{2b}$$

și de aici obținem $a \geq \frac{1}{2b}$. Fie acum $t \in \mathbf{E}'$ cu $\|t\| = 1$; avem $t^{-1}[1, +\infty) \subset B$. Fie $X_n : \Omega \rightarrow \mathbf{E}$ variabile aleatoare cu legea μ . Atunci

$$P \left(\overline{t(X_n)} \in [1, +\infty) \right) \leq P \left(\overline{X_n} \in B \right).$$

În această inegalitate aplicăm log, facem $n \rightarrow +\infty$ și, dacă notăm $\lambda_{t(\mu)}$ transformata Cramer a lui $t(\mu)$, obținem

$$-\frac{1}{2K(t, t)} = -\lambda_{t(\mu)}(1) = -\Lambda_{t(\mu)}[1, +\infty) \leq -\Lambda(B) = -a$$

și de aici rezultă $a \leq \frac{1}{2b}$.

Cum K este biliniară și continuă, rezultă că $b < +\infty$ și deci $a > 0$. Calculul lui λ arată că $a < +\infty$ și deci $b > 0$. \square

Vom vedea în cazul proceselor gaussiene situații în care atât λ cât și numerele a, b se pot determina explicit.

PROPOZITIA 4.3. Fie $X_t : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$, $t \in [0, 1]$ proces gaussian centrat cu traiectoriile continue a.s., de covariație $\rho(s, t)$, $s, t \in [0, 1]$. Dacă notăm $b = \sup_{t \in [0, 1]} \rho(t, t)$, atunci

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{r^2} \log P \left\{ \sup_{t \in [0, 1]} |X_t| \geq r \right\} = -\frac{1}{2b}.$$

Demonstrație. Conform propoziției 4.2., este suficient de verificat că

$$\sup \{K(\eta, \eta); \eta \in \mathbf{E}', \|\eta\| = 1\} = b.$$

Fie $\eta \in \mathbf{E}'$ cu $\|\eta\| = 1$. Putem scrie $\eta = \eta^+ - \eta^-$, $\bar{\eta} = \eta^+ + \eta^-$ și $\|\bar{\eta}\| = \|\eta\| = 1$, deci

$$\begin{aligned} K(\eta, \eta) &= \iint_{[0, 1] \times [0, 1]} \rho(s, t) d\eta(s) d\eta(t) \\ &\leq \iint_{[0, 1] \times [0, 1]} |\rho(s, t)| d\bar{\eta}(s) d\bar{\eta}(t). \end{aligned}$$

Funcția ρ este pozitiv definită, deci $\rho(s, t)^2 \leq \rho(s, s)\rho(t, t)$ și deci $\sup_{s, t \in [0, 1]} |\rho(s, t)| = b$, ceea ce arată că $K(\eta, \eta) \leq b$. Pe de altă parte, din compactitate, există $t \in [0, 1]$ astfel ca $\rho(t, t) = b$, ceea ce dă $K(\delta_t, \delta_t) = b$. \square

Remarcă. Dacă procesul gaussian X_t are traiectoriile a.s. în $L^p[0, 1]$, cu $p \geq 1$, propoziția 4.2. arată că

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{r^2} \log P \left\{ \left(\int_0^1 |X_t|^p dt \right)^{1/p} \geq r \right\}$$

există, dar calculul acestei limite, plecând de la ρ , nu este posibilă "explicit" în general. \square

În continuare se va determina explicit transformarea Cramer în cazul mișcării browniene.

PROPOZITIA 4.4. Fie $B_t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $t \in [0, 1]$ mișcare browniană cu $B_0 = 0$ a.s. Fie μ legea traiectoriilor mișcării browniene B_t pe $C_0[0, 1]$, spațiul Banach al funcțiilor continue pe $[0, 1]$ și nule în 0. Atunci transformarea Cramer λ a lui μ este dată, pentru $f \in C_0[0, 1]$, prin

$$\lambda(f) = \frac{1}{2} \int_0^1 f'(t)^2 dt$$

dacă f este absolut continuă cu derivata (Lebesgue) f' , respectiv $\lambda(f) = +\infty$, dacă f nu este absolut continuă.

Demonstrație. Vom aplica propoziția 3.5. spațiului $C_0[0, 1]$ în loc de $C[0, 1]$, ceea ce nu modifică nimic. Avem $\rho(s, t) = s \wedge t$, iar operatorul $R : L^2[0, 1] \rightarrow L^2[0, 1]$ este dat de

$$Rg(t) = \int_0^1 (s \wedge t) g(s) ds = \int_0^t sg(s) ds + t \int_t^1 g(s) ds.$$

Este clar că, dacă f este continua, nulă în 0 și $f = Rg$, atunci f admite derivată continuă $f'(t) = \int_t^1 g(s) ds$ nulă în 1 și admite derivată de ordinul doi $f'' = -g$ de pătrat integrabil. De aici rezultă că R este injectiv, că $R(L^2[0, 1])$ este mulțimea $f \in C_0[0, 1]$ de două ori derivabile, astfel ca $f'' \in L^2[0, 1]$ și $f'(1) = 0$. În fine, pentru $f \in R(L^2[0, 1])$, avem $R^{-1}f = -f''$.

Fie $f \in R(L^2[0, 1])$; din $f = -Rf''$, obținem

$$\begin{aligned} \|R^{-1/2}f\|_{L^2[0,1]}^2 &= \|R^{1/2}f''\|_{L^2[0,1]}^2 = \langle Rf'', f'' \rangle_{L^2[0,1]} \\ &= -\langle f, f'' \rangle_{L^2[0,1]} = \|f'\|_{L^2[0,1]}^2, \end{aligned}$$

în care ultima egalitate s-a obținut prin integrare prin părți, deoarece $f(0) = f'(1) = 0$. Conform propoziției 3.5. avem

$$\lambda(f) = \frac{1}{2} \|R^{-1/2}f\|_{L^2[0,1]}^2 = \frac{1}{2} \|f'\|_{L^2[0,1]}^2,$$

pentru $f \in R(L^2[0, 1])$. Acest rezultat trebuie extins la $f \in R^{1/2}(L^2[0, 1])$. Fie deci $f = R^{1/2}g$ cu $g \in L^2[0, 1]$, $f \in C_0[0, 1]$. Cum R este injectiv, și $R^{1/2}$ este injectiv, deci $R^{1/2}(L^2[0, 1])$ este dens în $L^2[0, 1]$. Există un șir $h_n \in L^2[0, 1]$ astfel ca $R^{1/2}h_n =$

g_n converge către g în $L^2[0, 1]$, ceea ce implică convergența lui $f_n = R^{1/2}g_n = Rh_n$ către f în $C_0[0, 1]$. Cum $f_n \in R(L^2[0, 1])$, avem

$$\|g_n\|_{L^2[0,1]} = \|R^{-1/2}f_n\|_{L^2[0,1]} = \|f'_n\|_{L^2[0,1]}$$

și cum g_n converge către g , se obține că f'_n este și mărginit în $L^2[0, 1]$. Putem deci extrage un subsir (notat tot f'_n) convergent slab către $k \in L^2[0, 1]$. În consecință, $f_n(t) = \langle f'_n, 1_{[0,t]} \rangle_{L^2[0,1]}$ converge pentru orice $t \in [0, 1]$ către

$$\bar{k}(t) = \langle k, 1_{[0,t]} \rangle_{L^2[0,1]} = \int_0^t k(s) ds.$$

Cum f_n converge către f în $C_0[0, 1]$, rezultă că $f = \bar{k}$, deci există $k = f' \in L^2[0, 1]$. În plus, cum f'_n converge slab către f' în $L^2[0, 1]$, avem

$$\|f'\|_{L^2[0,1]} \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|f'_n\|_{L^2[0,1]}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \|g_n\|_{L^2[0,1]} = \|g\|_{L^2[0,1]} = \|R^{-1/2}f\|_{L^2[0,1]}$$

adică, ținând cont de propoziția 3.5.

$$\frac{1}{2} \|f'\|_{L^2[0,1]}^2 \leq \lambda(f) \text{ pentru } f \in C_0[0, 1] \cap R^{1/2}(L^2[0, 1]).$$

În plus, am văzut că $f \in C_0[0, 1] \cap R^{1/2}(L^2[0, 1])$ implică existența lui f' și $f' \in L^2[0, 1]$.

Reciproc, fie $f \in C_0[0, 1]$ astfel că f' există și $f' \in L^2[0, 1]$. Aproximăm f' în $L^2[0, 1]$ cu funcții de clasă C^1 și obținem existența unui șir $v_n \in C_0[0, 1]$ astfel că v'_n, v''_n există, $v''_n \in L^2[0, 1]$, $v'_n(1) = 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v'_n = f'$ în $L^2[0, 1]$ și $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = f$ în $C_0[0, 1]$. Semi-continuitatea inferioară a lui λ implică $\lambda(f) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \lambda(v_n)$. Pe de altă parte, întrucât $v_n \in R(L^2[0, 1])$, avem $\lambda(v_n) = \frac{1}{2} \|v'_n\|_{L^2[0,1]}^2$, deci

$$\lambda(f) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \|v'_n\|_{L^2[0,1]}^2 = \frac{1}{2} \|f'\|_{L^2[0,1]}^2.$$

În particular $\lambda < +\infty$, ceea ce implică $f \in R^{1/2}(L^2[0, 1])$.

Am identificat deci $C_0[0, 1] \cap R^{1/2}(L^2[0, 1])$ cu mulțimea $f \in C_0[0, 1]$ astfel că f' există și $\in L^2[0, 1]$, am demonstrat că $\lambda(f) = \frac{1}{2} \|f'\|_{L^2[0,1]}^2$ pentru $f \in C_0[0, 1] \cap R^{1/2}(L^2[0, 1])$, în timp ce $\lambda = +\infty$ în afara acestui subspațiu. \square

Exerciții.

1. Fie repartițiile $\mu_\epsilon(dx) = (2\pi/\epsilon)^{-1/2} \exp(-x^2/2\epsilon) dx$. Arătați că

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \log \mu_\epsilon(A) = - \operatorname{ess\,inf}_{x \in A} x^2/2$$

pentru orice boreliană reală A .

2. Fie procesul Ornstein-Uhlenbeck real definit prin

$$V_t = \alpha e^{-\beta t} \int_0^t e^{\beta s} dB_s, \quad V_0 = 0,$$

sau ca soluția unică a ecuației stocastice Langevin

$$V_t = \alpha B_t - \beta \int_0^t V_s ds.$$

Folosind metoda din propoziția 4.4., arătați că transformarea Cramer a acestui proces este, pentru $f \in C_0[0, 1]$

$$\lambda(f) = \frac{1}{2\alpha^2} \int_0^1 [f'(t) + \beta f(t)]^2 dt$$

dacă f este absolut continuă cu derivata (Lebesgue) f' , respectiv $\lambda(f) = +\infty$, dacă f nu este absolut continuă.

3. Fie λ transformarea Cramer a legii traiectoriilor mișcării browniene și $f \in C_0[0, 1]$ cu $\lambda(f) < +\infty$. Arătați că

$$\begin{aligned} & \lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^2 \log P \left\{ \sup_{[0,1]} |\epsilon B - f| < \delta \right\} \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^2 \log P \left\{ \sup_{[0,1]} |\epsilon B - f| < \delta \right\} = -\lambda(f). \end{aligned}$$

4. În cazul unui proces gaussian X_t (vezi propoziția 3.5.), pentru $f \in R^{1/2}(L^2[0, 1])$, arătați că

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{P \left\{ \sup_{[0,1]} |\epsilon X - f| < \delta \right\}}{P \left\{ \sup_{[0,1]} |\epsilon X| < \delta \right\}} = \exp \left\{ -\epsilon^{-2} \lambda(f) \right\}.$$

5. Arătați că afirmațiile de la 3 și 4 rămân adevărate în cazul unei variabile aleatoare cu valori într-un spațiu Banach (sau a unei probabilități cu valori într-un spațiu Banach). Mai precis, fie λ transformarea Cramer a unei variabile aleatoare $X : \Omega \rightarrow \mathbf{E}$, cu \mathbf{E} spațiu Banach separabil, cu legea gaussiană centrată. Atunci, pentru orice $S(\mathbf{H})$ (vezi notațiile din propoziția 3.2. și teorema 3.3.), avem

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^2 \log P(\|\epsilon X - x\| < \delta) = -\lambda(x)$$

și

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{P(\|\epsilon X - x\| < \delta)}{P(\|\epsilon X\| < \delta)} = \exp\{-\epsilon^{-2}\lambda(x)\}.$$

Indicație. Arătați că, în ipoteza

$\Phi(t) := \{\lambda(x) \leq t\}$ sunt mulțimi compacte pentru orice $t > 0$,

următoarele afirmații sunt echivalente.

1) Pentru orice $A \subset \mathbf{E}$ deschisă avem

$$\liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^2 \log P(\epsilon X \in A) \geq -\Lambda(A).$$

1') Pentru orice $\delta, \gamma > 0, x \in \mathbf{E}$, există $\epsilon_0 > 0$ astfel ca

$$P(\|\epsilon X - x\| < \delta) \geq \exp(-\epsilon^{-2}[\lambda(x) + \gamma]) \text{ pentru } \epsilon \leq \epsilon_0.$$

Similar, următoarele afirmații sunt echivalente.

2) Pentru orice $A \subset \mathbf{E}$ închisă avem

$$\limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^2 \log P(\epsilon X \in A) \leq -\Lambda(A).$$

2') Pentru orice $\delta, \gamma, s > 0$, există $\epsilon_0 > 0$ astfel ca

$$P(\|\epsilon X - \Phi(s)\| \geq \delta) \leq \exp(-\epsilon^{-2}(s - \gamma)) \text{ pentru } \epsilon \leq \epsilon_0.$$

LEMA 4.5. Fie E spațiu Banach separabil, λ transformarea Cramer a unei variabile aleatoare $X : \Omega \rightarrow E$ și $A \subset E$ astfel ca

$$\inf_{x \in \bar{A}} \lambda(x) = \inf_{x \in \bar{A}} \lambda(x),$$

iar valoarea comună este atinsă într-un punct unic $x_0 \in E$. Atunci, pentru orice $\delta > 0$,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{P\{(\epsilon X \in A) \cap (\|x - x_0\| < \delta)\}}{P(\epsilon X \in A)} = 1 \quad (4.2)$$

Demonstrație. Să observăm că

$$\inf \left\{ \lambda(x), x \in \bar{A}, \|x - x_0\| < \delta \right\} > \lambda(x_0).$$

Apoi

$$\begin{aligned} & \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^2 \log P((\epsilon X \in A) \cap (\|x - x_0\| \geq \delta)) \\ & \leq \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^2 \log P\left(\left(\epsilon X \in \bar{A}\right) \cap (\|x - x_0\| \geq \delta)\right) \\ & < -\lambda(x_0). \end{aligned}$$

Aceasta înseamnă că $P((\epsilon X \in A) \cap (\|x - x_0\| \geq \delta))$ converge către 0 mai repede ca numitorul din (4.2.). \square

Exemplu. Fie procesul stocastic X_t^ϵ pe intervalul $[0, 1]$ care satisface ecuația liniară

$$P\left(\frac{d}{dt}\right) X_t^\epsilon \equiv \sum_{k=0}^n \frac{d^k X_t^\epsilon}{dt^k} = \epsilon B_t,$$

împreună cu n condiții la frontieră, liniare, omogene și deterministe, unde B_t este o mișcare browniană. Avem

$$X_t^\epsilon = \epsilon \int_0^1 G(s, t) dB_s,$$

unde $G(s, t)$ este funcția Green a problemei la frontieră asociată operatorului $P(d/dt)$ și condițiilor la frontieră date. Transformarea Cramer asociată traiectoriilor procesului X_t^ϵ este $\lambda(f) = +\infty$ dacă f nu satisface condițiile la frontieră sau dacă derivata $d^{n-1}f_t/dt^{n-1}$ nu este absolut continuă, respectiv

$$\lambda(f) = \frac{1}{2} \int_0^1 \left| P \left(\frac{d}{dt} \right) f \right|^2 dt$$

in caz contrar. Arătați că mulțimea $A = \{f \in L^2[0, 1] : \|f\| > c\}$ satisface ipotezele lemei 4.5. și deduceți că

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^2 \log P \{ \|X^\epsilon\| > c \} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^2 \log P \{ \|X^\epsilon\| \geq c \} \\ &= - \inf \left\{ \frac{1}{2} \left\| P \left(\frac{d}{dt} \right) f \right\|^2 \right\}, \end{aligned}$$

unde inf-ul se ia după toate funcțiile f care satisfac condițiile la frontieră și $\|f\| = c$. In cazul particular in care $P(d/dt)$ este autoadjunct in $L^2[0, 1]$, avem

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^2 \log P \{ \|X^\epsilon\| > c \} = -\frac{c^2}{2} \zeta^2,$$

unde ζ este valoarea proprie cea mai mica in valoare absolută a lui $P(d/dt)$.

Observație. Vom vedea in capitolul următor un alt exemplu de aplicare al lemei 4.5. in cazul difuziilor (soluțiile ecuațiilor stocastice), la evaluarea asimptotică a probabilității ca difuzia să rămâna într-un domeniu și a primului timp de ieșire a difuziei dintr-un domeniu.

LEGEA TARE A NUMERELOR MARI

Pe câmpul de probabilitate (Ω, \mathcal{K}, P) vom considera un șir de variabile aleatoare $\{X_n, n \geq 1\}$ independente și identic repartizate, cu legea μ și cu valori în spațiul Banach separabil E . Să notăm $\bar{X}_n := \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$.

TEOREMA 4.6. *Dacă $E(\|X_1\|) < +\infty$, atunci $\bar{X}_n \rightarrow E(\mu)$ a.s. (și în probabilitate).*

Demonstrație. Să presupunem că $\|X_1\| \leq M$ (a.s. sau în probabilitate). Atunci $\int_E e^{s\|x\|} d\mu(x) \leq e^{sM} < +\infty$ pentru orice $s \in \mathbf{R}$ și deci, din teorema 2.11. (și lema 2.10.) există un compact $K \subset E$ și o constantă $c > 0$, cu

$$P(\bar{X}_n \notin K) = \mu_n(K^c) \leq ce^{-n} \text{ pentru orice } n \geq 1,$$

unde μ_n este legea lui \bar{X}_n . Deci $P(\liminf_{n \rightarrow +\infty} \{\bar{X}_n \notin K\}) = 0$ i.e. șirul $\{\bar{X}_n(\omega), n \geq 1\}$ este relativ compact pentru $\omega \in \Omega_1$, cu $P(\Omega_1^c) = 0$. Din legea tare a numerelor mari (cazul real) avem

$$t(\bar{X}_n) \rightarrow t(E(\mu)) \text{ a.s., în probabilitate,}$$

pentru orice $t \in E'$. Cum E este separabil, E' este ω^* -separabil, deci $\bar{X}_n(\omega) \rightarrow E(\mu)$ slab, pentru $\omega \in \Omega_2$, cu $P(\Omega_2^c) = 0$. Aceasta înseamnă că $\bar{X}_n(\omega) \rightarrow E(\mu)$ tare, pentru $\omega \in \Omega_1 \cap \Omega_2$.

Pentru cazul general, notăm $X_n^{(M)} = \chi_{[0, M]}(\|X_n\|) X_n$ și fie $Y_n^{(M)} = X_n - X_n^{(M)}$ pentru $n \geq 1$, $M > 0$. Pentru $\epsilon > 0$ dat, să alegem $M > 0$ cu $E(\|Y_1^{(M)}\|) < \epsilon/4$. Din legea tare pentru șirul $\{\|Y_n^{(M)}\|, n \geq 1\}$, alegem N astfel ca

$$P\left(\sup_{n \geq N} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \|Y_k^{(M)}\| \geq \epsilon/3\right) < \epsilon/2$$

și

$$P\left(\sup_{n \geq N} \frac{1}{n} \|X_n^{(M)} - E(\mu^{(M)})\| \geq \epsilon/3\right) < \epsilon/2,$$

unde $\mu^{(M)}$ este legea lui $X_1^{(M)}$. Observând că $\|E(\mu) - E(\mu^{(M)})\| \leq E(\|Y_1^{(M)}\|)$, obținem

$$\begin{aligned} & P\left(\sup_{n \geq N} \|\bar{X}_n - E(\mu)\| \geq \epsilon\right) \\ & \leq P\left(\sup_{n \geq N} \|\bar{X}_n - X_n^{(M)}\| \geq \epsilon/3\right) \\ & \quad + P\left(\sup_{n \geq N} \|X_n^{(M)} - E(\mu^{(M)})\| \geq \epsilon/3\right) \\ & \leq P\left(\sup_{n \geq N} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \|Y_k^{(M)}\| \geq \epsilon/3\right) + \epsilon/2 = \epsilon. \quad \square \end{aligned}$$

LEGEA LOGARITMULUI ITERAT

Fie $B_t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $t \in [0, 1]$ o mișcare browniană cu $B_0 = 0$ a.s. Fie μ legea traiectoriilor mișcării browniene B_t pe $C_0[0, 1]$, spațiul Banach al funcțiilor continue pe $[0, 1]$ și nule în 0. Reamintim că $tB_{1/t}$, $t \in [1, +\infty)$ este încă mișcare browniană, deci putem considera mișcarea browniană B_t definită pentru $t \in [0, +\infty)$.

Vom prezenta în continuare forma "funcțională" a legii logaritmului iterat pentru mișcarea browniană. Notăm $AC[0, 1]$ spațiul funcțiilor $g \in C[0, 1]$ cu proprietatea că, pentru orice $t \in [0, 1]$, derivata (Lebesgue) g' a lui g există și este de pătrat integrabil pe $[0, t]$, înzestrat cu topologia indusă de $C[0, 1]$.

TEOREMA 4.7. Sirul de procese

$$(2n \log \log n)^{-1/2} B_{nt}, \quad t \in [0, 1], \quad n \geq 2,$$

(cu traiectoriile în $C_0[0, 1]$), este relativ compact în $C_0[0, 1]$ cu μ -probabilitate 1 și mulțimea punctelor sale limită este dată de

$$S = \left\{ AC[0, 1], f(0) = 0, \int_0^1 f'(x)^2 dx \leq 1 \right\}.$$

Aceasta inseamnă că există $\Omega_0 \subset \Omega$ de probabilitate 0 cu proprietățile următoare.

1. Pentru orice $\omega \notin \Omega_0$ și orice șir de numere naturale $n_1 < n_2 < \dots$, există un subșir $n_{k_j} = n_{k_j}(\omega)$ și o funcție $f \in \mathcal{S}$ astfel ca

$$(2n_{k_j} \log \log n_{k_j})^{-1/2} B_{n_{k_j}, t}(\omega) \rightarrow f(t) \text{ uniform in } t \in [0, 1], \text{ și}$$

2. Pentru orice $f \in \mathcal{S}$ și $\omega \notin \Omega_0$, există un șir $n_k = n_k(\omega, f)$ astfel ca

$$(2n_k \log \log n_k)^{-1/2} B_{n_k, t}(\omega) \rightarrow f(t) \text{ uniform in } t \in [0, 1].$$

Observație. Conform propoziției 4.4., mulțimea limită \mathcal{S} coincide cu $\{AC[0, 1], f(0) = 0, 2\lambda(f) \leq 1\}$.

COROLAR 4.8. Dacă $\Phi : C_0[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ este funcțională liniară și continuă, atunci

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \Phi \left((2n \log \log n)^{-1/2} B_n \right) = \sup_{f \in \mathcal{S}} \Phi(f) \quad \mu - \text{a.s.}$$

In particular, pentru $\Phi(f) = f(1)$, obținem legea clasică a logaritmului iterat :

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \pm (2n \log \log n)^{-1/2} B_n = 1 \quad \mu - \text{a.s.}$$

Observație. Folosind un rezultat al lui Skorohod, care afirmă că un șir de variabile aleatoare se poate obține redefinind o mișcare browniană, din teorema 4.7. se poate obține forma "funcțională" a legii Hartman-Wintner-Hincin a logaritmului iterat pentru variabile aleatoare identic repartizate. Mai precis, fie X_1, X_2, \dots independente, identic repartizate pe (Ω, \mathcal{K}, P) , cu media 0 și dispersia 1. Definim $S_0 = 0$ și

$$S_t = \begin{cases} \sum_{k=1}^n X_k & \text{dacă } t \in \mathbb{N}^* \\ (1-t - [t]) S_{[t]} + (t - [t]) S_{[t]+1} & \text{in caz contrar.} \end{cases}$$

Atunci șirul de procese

$$(2n \log \log n)^{-1/2} S_{nt}, \quad t \in [0, 1], \quad n \geq 2,$$

este relativ compact în $C_0[0, 1]$ cu P -probabilitate 1 și mulțimea punctelor sale limită este dată de \mathcal{S} . În particular, procedând ca în corolarul 4.8., obținem

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \pm (2n \log \log n)^{-1/2} \sum_{k=1}^n X_k = 1 \quad P - \text{a.s.}$$

Aplicație. Cu notațiile de mai sus, fie μ_n legea lui $S_{nt}/n^{1/2}$. Arătați că $\mu_n \rightarrow \mu$ slab, unde μ este legea traiectoriilor mișcării browniene. (*Principiul de invariantă al lui Donsker*).

Pentru a face demonstrația teoremei 4.7., vom avea nevoie de

LEMA 4.9. Fie $K \subset C_0[0, 1]$ compact, $g \in C_0[0, 1]$ și $I \subset (1, +\infty)$, $1 \in \bar{I}$. Notăm $g_n(t) = g(nt)/(2 \log \log n)^{1/2}$ pentru $n \geq 2$, $t \in [0, 1]$. Pentru $i > 1$, notăm $i_n = [i^n]$. Dacă

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \|g_{i_n} - K\| = 0 \quad \text{pentru orice } i \in I,$$

atunci șirul $\{g_n, n \geq 2\}$ este relativ compact și orice subșir convergent al său converge către un element din K .

Demonstrație. Intrucât K este compact, există $M > 0$ și $\rho: (0, 1] \rightarrow (0, +\infty)$ nedescrescătoare cu $\lim_{t \searrow 0} \rho(t) = 0$ și

$$\sup_{f \in K} \|f\| \leq M, \quad \sup_{f \in K} |f(t) - f(s)| \leq \rho(t - s), \quad 0 \leq s < t \leq 1.$$

Dat fiind $\epsilon > 0$, să alegem $i \in I$ cu $\rho(1 - 1/i) < \epsilon$ și $(i - 1) \times (M + \epsilon) < \epsilon$. Apoi alegem un număr natural $L \geq 2$ astfel ca $\log \log ix / \log \log x \leq i$ pentru $x \geq L$. În fine, fie $n(i, \epsilon)$ cu $\|g_{i_n} - K\| < \epsilon$ pentru $n \geq n(i, \epsilon)$; notăm $n(\epsilon) = L \vee n(i, \epsilon)$. Pentru $n \geq n(\epsilon)$, să alegem m astfel ca $i^m \leq n \leq i^{m+1}$ și notăm

$N = [i^{m+1}]$; cum $m \geq n(i, \epsilon)$, știm că $\|g_N - K\| < \epsilon$. Deci $\|g_n - K\| < \epsilon + \|g_n - g_N\|$. Observând că

$$\begin{aligned} g_n(t) &= g\left(\frac{n}{N}Nt\right) / (2 \log \log n)^{1/2} \\ &= g_N\left(\frac{n}{N}t\right) (2 \log \log N)^{1/2} / (2 \log \log n)^{1/2}, \end{aligned}$$

obținem

$$\begin{aligned} \|g_n - g_N\| &= \sup_{0 \leq t \leq 1} \left| \frac{(2 \log \log N)^{1/2}}{(2 \log \log n)^{1/2}} g_N\left(\frac{n}{N}t\right) - g_N(t) \right| \\ &\leq \left| \frac{(2 \log \log N)^{1/2}}{(2 \log \log n)^{1/2}} - 1 \right| \|g_N\| + \sup_{0 \leq t \leq 1} \left| g_N\left(\frac{n}{N}t\right) - g_N(t) \right| \\ &\leq \left| \frac{(2 \log \log N)^{1/2}}{(2 \log \log n)^{1/2}} - 1 \right| (M + \epsilon) + 2\epsilon + \rho \left(1 - \frac{n}{N}\right). \end{aligned}$$

Cum $n \leq N \leq \lambda n$, avem

$$1 \leq \frac{(2 \log \log N)^{1/2}}{(2 \log \log n)^{1/2}} \leq \frac{(2 \log \log \lambda n)^{1/2}}{(2 \log \log n)^{1/2}} \leq \lambda,$$

deci

$$\left| \frac{(2 \log \log N)^{1/2}}{(2 \log \log n)^{1/2}} - 1 \right| (M + \epsilon) \leq (\lambda - 1)(M + \epsilon) \leq \epsilon.$$

În același timp avem $\rho(1 - n/N) \leq \rho(1 - 1/\lambda) < \epsilon$, deci

$\|g_n - K\| < 5\epsilon$ pentru $n \geq n(\epsilon)$. \square

Demonstrația teoremei 4.7. Fie $i > 1$ și $\delta > 0$ fixate; notăm $i_n = [i^n]$, $\mathcal{S}^\delta = \{g \in C_0[0, 1], \|g - \mathcal{S}\| < \delta\}$, $\xi_n(t) = B_{nt} / (2 \log \log n)^{1/2}$ și alegem $1 < i < \inf_{g \in \mathcal{S}^\delta} 2\lambda(g)$. Din a doua inegalitate a teoremei 4.4. rezultă

$$\mu(\xi_{i_n}(\cdot) \notin \mathcal{S}^\delta) \leq \exp(-\gamma \log \log i_n) \leq \frac{1}{(n-1)^\gamma \log i}$$

pentru n suficient de mare. De aici obținem

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mu(\xi_{i_n}(\cdot) \notin S^\delta) < +\infty, \text{ deci } \mu\left(\limsup_{n \rightarrow +\infty} \xi_{i_n}(\cdot) \notin S^\delta\right) = 1.$$

Aceasta egalitate este adevărată pentru orice $\delta > 0$ deci, pentru orice $i > 1$, există B_i cu $\mu(B_i) = 0$ și

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \|\xi_{i_n}(\cdot, \omega) - S\| = 0 \text{ pentru } \omega \notin B_i.$$

Punem $B = \cup_{n \geq 1} B_{1+1/n}$; avem $\mu(B) = 0$ și pentru orice $\omega \notin B$ aplicăm lema 4.8. cu $I = \{1 + 1/n, n \geq 1\}$ pentru a obține că șirul $\{\xi_n, n \geq 2\}$ este relativ compact și orice subsir convergent al său converge către un element din S .

Pentru reciprocă, să alegem o submulțime numărabilă densă în S , formată din funcții f cu $2\lambda(f) < 1$ (luăm e.g. $f_n(t) = \int_0^t \dot{f}_n(t) dt$; $n \geq 1, t \in [0, 1]$, unde $\dot{f}_n \in L^2[0, 1]$ este densă în $\{f \in L^2[0, 1], \|f\|_{L^2[0,1]} < 1\}$). Este deci suficient de arătat că, pentru orice $f \in S$ cu $2\lambda(f) < 1$, avem

$$\mu\left(\liminf_{n \rightarrow +\infty} \|\xi_n(\cdot) - f\| = 0\right) = 1.$$

Pentru $k \geq 2$, definim

$$f_k(t) = \begin{cases} 0, & \text{pentru } 0 \leq t \leq 1/k \\ f(t) - f(1/k), & \text{pentru } t \geq 1/k \end{cases}$$

și pentru $m \geq 1$

$$\eta_{m,k}(t) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } 0 \leq t \leq 1/k \\ (B_{k^m t} - B_{k^{m-1}}) / (2 \log \log k^m)^{1/2}, & \text{dacă } t \geq 1/k. \end{cases}$$

Să observăm că

$$\|\xi_{k^m} - f\| \leq \sup_{[0,1/k]} \|\xi_{k^m}\| + \sup_{[0,1/k]} \|f\| + \sup_{[1/k,1]} \|\xi_{k^m} - f\|$$

$$\leq 2 \left(\sup_{[0,1/k]} \|\xi_{k^m}\| + \sup_{[0,1/k]} \|f\| \right) + \|\eta_{m,k} - f_k\|.$$

Dacă $C := \{\omega : \xi_{i_n}(\cdot, \omega) \text{ este relativ compact}\}$, pentru $\delta > 0$ și $\omega \in C$, există $k(\omega) \geq 2$ cu

$$\|\xi_{k^m} - f\| \leq \delta + \|\eta_{m,k(\omega)} - f_k\| \text{ pentru } m \geq 1.$$

Cum $\mu(C) = 0$, este suficient de arătat că pentru $k \geq 2$,

$$\mu\left(\liminf_{m \rightarrow +\infty} \|\eta_{m,k} - f_k\| = 0\right) = 1.$$

Insa procesele $\{\eta_{m,k}, m \geq 1\}$ sunt independente in raport cu μ , deci vom arăta că

$$\sum_{m \geq 1} \mu(\|\eta_{m,k} - f_k\| < \epsilon) = +\infty.$$

Din prima inegalitate din teorema 4.4. obținem că există $m(k)$ cu proprietatea

$$\mu\left(\|\eta_{m,k} - \tilde{f}_k\| < \epsilon\right) \geq \exp(-\gamma \log \log k^m) = \frac{1}{(m \log k)^\gamma}$$

pentru $m \geq m(k)$, unde γ este strict subunitar, iar $\tilde{f}_k := f_k(t + 1/k)$ pentru care $\int_0^{1-1/k} \tilde{f}_k'(t)^2 dt \leq 2\lambda(f) < 1$. \square

PERTURBATII ALEATOARE MICI

Fie $b : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ câmp (local) lipschitzian de vectori căruia îi asociem sistemul dinamic

$$\dot{x}_t = b(x_t), \quad (5.1)$$

unde x_t este soluția maximală a lui (5.1.).

Fie σ aplicație (local) lipschitziană de la \mathbb{R}^n în spațiul matricilor (n, n) . Pentru orice funcție continuă $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, orice $\epsilon \geq 0$ și orice $x \in \mathbb{R}^n$, ecuația diferențială

$$\dot{x}_t^\epsilon = b(x_t^\epsilon) + \epsilon \sigma(x_t^\epsilon) f_t \quad (5.2)$$

admite o soluție maximală unică cu $x_0^\epsilon = x$. Dacă (a, b) este intervalul de definiție al acestei soluții maxime, atunci avem $0 < b \leq +\infty$, iar b nu poate fi finit decât dacă $\lim_{t \rightarrow b} \|x_t^\epsilon\| = +\infty$. Vom numi b timpul de explozie al soluției x_t^ϵ .

Să considerăm un proces gaussian $G_t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ cu traiectorii continue, $\epsilon > 0$ și sistemul

$$\begin{cases} \dot{X}_t^\epsilon = b(X_t^\epsilon) + \epsilon \sigma(X_t^\epsilon) G_t \\ X_0^\epsilon = x, \text{ cu } x \in \mathbb{R}^n \text{ dat,} \end{cases} \quad (5.3)$$

unde, pentru orice $\omega \in \Omega$, $X_t^\epsilon(\omega)$ este soluția maximală unică a lui (5.2.) când înlocuim f_t cu $G_t(\omega)$ și punem $X_0^\epsilon(\omega) = x$.

Continuitatea soluțiilor lui (5.2.) (ca funcționale de f) implică măsurabilitatea lui X_t^ϵ în raport cu corpul borelian generat de G_s , $0 \leq s \leq t$. Să observăm că, în general, X_t^ϵ nu este proces gaussian.

Problema pe care o studiem este de a preciza comportamentul traiectoriilor lui X_t^ϵ când $\epsilon \rightarrow 0$, mai precis să evaluăm probabilitatea ca traiectoria lui X_t^ϵ , $t \in [0, 1]$ să aparțină unei mulțimi A de traiectorii "aberrante" din punctul de vedere al sistemului (5.1.). Aceste probabilități vor converge către 0 odată cu ϵ , cu viteze de tipul $\exp(-C(A)\epsilon^2)$, iar problema este de a evalua $C(A)$.

Interpretarea euristică a acestei probleme este următoarea. "Creșterile" $\Delta X_t^\epsilon = X_{t+\Delta t}^\epsilon - X_t^\epsilon$ verifică " $\Delta X_t^\epsilon = b(X_t^\epsilon) \Delta t + \epsilon \sigma(X_t^\epsilon) \Delta Z_t$ ". Cu alte cuvinte, creșterea deterministă $b(X_t^\epsilon) \Delta t$ anticipată de sistemul (5.1.) este perturbată aici de variabila aleatoare $\epsilon \sigma(X_t^\epsilon) \Delta Z_t$ ("zgomotul") a cărei legi condiționate de trecut la timpul t este gaussiană centrată și cu matricea de covariație proporțională cu ϵ^2 .

Remarcă. Dacă $b \equiv 0$, $k = n$, $x = 0$, $\sigma \equiv$ identitatea, atunci $X_t^\epsilon = \epsilon Z_t$, unde $Z_t = \int_0^t G_s ds$ este proces gaussian cu traiectorii continue iar aceasta situație a fost tratată în capitolul anterior.

Vom presupune că timpii de explozie ai soluțiilor lui (5.1.)-(5.3.) sunt infiniți. Aceasta se întâmplă e.g. dacă b și σ sunt cu creștere subliniară i.e. $\|b(y)\| + \|\sigma(y)\| \leq ct \cdot (1 + \|y\|)$ (similar pentru σ). Totodată vom presupune că, pentru orice $x \in \mathbb{R}^n$, matricea $\sigma(x)$ este inversabilă.

Observație. În aceste ipoteze putem justifica afirmația că (5.3.) este "perturbație aleatoare mică" a lui (5.1.). Mai precis, se poate arată că, pentru orice $t \in [0, 1]$ și $\delta > 0$, avem

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} P \left\{ \sup_{0 \leq s \leq t} |X_s^\epsilon - x_s| > \delta \right\} = 0.$$

Vom nota $C[0, 1]$ spațiul funcțiilor continue $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ și, pentru $x \in \mathbb{R}^n$, notăm $C_x[0, 1]$ subspațiul funcțiilor $f \in C[0, 1]$ cu $f(0) = x$, ambele înzestrate cu topologia convergenței uniforme. În particular, observăm că aplicația X^ϵ care asociază lui $\omega \in \Omega$ traiectoria (soluția lui (5.3.)) $t \rightarrow X_t^\epsilon$, $t \in [0, 1]$, este măsurabilă de la Ω la $C_x[0, 1]$. Fie acum $x \in \mathbb{R}^n$ fixat.

Pentru orice $f \in C[0, 1]$, vom nota $F_x(f)$ restricția la $[0, 1]$ a soluției unice maximale g a ecuației diferențiale

$$\dot{g}_t = b(g_t) + \sigma(g_t) f_t \text{ cu } g_0 = x.$$

Din teoria ecuațiilor diferențiale ordinare, obținem că aplicația F_x de la $C[0, 1]$ la $C_x[0, 1]$ este continuă.

TEOREMA 5.1. *În ipotezele precedente, notăm $\lambda : C[0, 1] \rightarrow [0, +\infty]$ transformarea Cramer a legii traiectoriilor procesului G_t în $C[0, 1]$. Definim $\tilde{\lambda}(g) = +\infty$ dacă g nu este de clasă C^1 pe $[0, 1]$ și*

$$\tilde{\lambda}(g) = \lambda(f),$$

cu f dată de $f_t = \sigma(g_t)^{-1} (\dot{g}_t - b(g_t))$, $t \in [0, 1]$, $g_0 = x$. Dacă $\tilde{\Lambda}(A) = \inf_{g \in A} \tilde{\lambda}(g)$ pentru A boreliană în $C_x[0, 1]$, atunci

$$-\tilde{\Lambda}(A) \leq \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^2 \log P(X^\epsilon \in A)$$

$$\leq \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^2 \log P(X^\epsilon \in A) \leq -\tilde{\Lambda}(\bar{A}).$$

Demonstrație. Pentru $g \in C_x[0, 1]$ considerăm mulțimea (posibil vidă) $F_x^{-1}(g)$ a funcțiilor $f \in C[0, 1]$ astfel că g este pe $[0, 1]$ soluția maximală a ecuației diferențiale $\dot{g}_t = b(g_t) + \sigma(g_t) f_t$ cu $g_0 = x$. Atunci avem că $\lambda(g) = \inf \{ \lambda(f) \mid f \in F_x^{-1}(g) \}$ pentru $g \in C_x[0, 1]$ și $\tilde{\Lambda}(A) = \Lambda \circ F_x^{-1}(A)$ pentru $A \subset C_x[0, 1]$.

Intrucât $P(X^\epsilon \in A) = P\{\epsilon G \in F_x^{-1}(A)\}$, teorema 3.3. arată că, atunci când $\epsilon \rightarrow 0$, \liminf și \limsup ale lui $\epsilon^2 \log P(X^\epsilon \in A)$

sunt in intervalul $\left[-\Lambda \left(\overset{\circ}{C}\right), -\Lambda \left(\bar{C}\right)\right]$, unde $C = F_x^{-1}(A)$. Continuitatea lui F_x implică $\bar{C} \subset F_x^{-1}(\bar{A})$ și $\overset{\circ}{C} \supset F_x^{-1}(\overset{\circ}{A})$, deci

$$\left[-\Lambda \left(\overset{\circ}{C}\right), -\Lambda \left(\bar{C}\right)\right] \subset \left[-\Lambda \left(F_x^{-1}(\overset{\circ}{A})\right), -\Lambda \left(F_x^{-1}(\bar{A})\right)\right].$$

Rămâne să aplicăm teorema 2.11., tinând cont că $\tilde{\lambda}$ este inferior semi-continuă și mulțimile $\left\{\tilde{\lambda}(g) \leq a\right\}$ sunt compacte pentru orice $a \geq 0$ finit (deoarece λ este inferior semi-continuă și F_x este continuă). \square

Observație. Ipotezele in care am lucrat se pot adapta ușor la situația in care procesul gaussian G_t are traiectoriile in L^2 (resp. continue) și inzestrând spațiul traiectoriilor lui X_t^ϵ cu norma $\left(\|\dot{g}\|_{L^2}^2 + \|g\|_{L^2}^2\right)^{1/2}$ (resp. $\|\dot{g}\|_\infty^2 + \|g\|_\infty^2$). \square

Situația tratată până acum se referă la un proces X_t^ϵ ale cărui traiectorii verifică "ecuația stocastică" $dX_t^\epsilon = b(X_t^\epsilon) dt + \epsilon \sigma(X_t^\epsilon) dZ_t$, unde Z_t este proces gaussian cu traiectoriile continue și diferențiabile.

Cazul ecuațiilor stocastice ar corespunde lui $Z_t = B_t$, unde B_t este mișcare browniană. Inșă B_t nu este diferențiabilă, deci nu este posibil să considerăm X_t^ϵ ca funcțională continuă de " ϵB_t ", dar putem considera X_t^ϵ ca funcțională de $F_x(\epsilon B)$, unde B înseamnă traiectoria mișcării browniene in R^n . In general inșă, regularitatea aplicației F_x se reduce in acest caz doar la măsurabilitate, deși rezultatul formal vom vedea că rămâne adevărat i.e. dacă notăm λ funcționala Cramer a mișcării browniene și $\tilde{\lambda}$ "funcționala Cramer" asociată ecuației stocastice $dX_t^\epsilon = b(X_t^\epsilon) dt + \epsilon \sigma(X_t^\epsilon) dB_t$, din propoziția 4.4. și teorema 5.1., avem

$$\tilde{\lambda}(g) = \lambda \left[F_x^{-1}(g) \right] = \frac{1}{2} \left\| \frac{d}{dt} F_x^{-1}(g) \right\|_{L^2}^2,$$

unde relația $f = F_x^{-1}(g)$ înseamnă $g_t = \int_0^t \left[b(g_s) + \sigma(g_s) \dot{f}_s \right] ds$,

adică

$$\tilde{\lambda}(g) = \frac{1}{2} \int_0^1 \|\sigma(g_s)^{-1} [g_s - b(g_s)]\|^2 ds.$$

Să arătăm însă acest lucru riguros ; punctul "tare" va fi în a arăta că, pentru ϵ mic, aplicația F_x "seamănă" cu o aplicație continuă.

Fie $D \subset \mathbb{R}^n$ deschis, σ câmp de matrice (n, n) și o familie de câmpuri de vectori b_ϵ , $\epsilon \geq 0$ ($b_0 =: b$) care satisfac condițiile

$$\begin{aligned} \sigma &\in C^1(D) \\ b_\epsilon &\text{ sunt local lipschitziene pe } D \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} b_\epsilon(x) &= b(x) \text{ uniform pe compactele lui } D. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Notăm prin X_t^ϵ soluția ecuației diferențiale stocastice pe D

$$dX_t^\epsilon = b_\epsilon(X_t^\epsilon) dt + \epsilon \sigma(X_t^\epsilon) dB_t, \quad X_0^\epsilon = x \in D, \quad (5.5)$$

unde B_t este mișcare browniană de dimensiune n . Vom presupune că ecuația (5.5.) are o soluție unică $X_t^\epsilon : \Omega \rightarrow D$, $t \in [0, 1]$ i.e. timpul de explozie al acestei soluții este infinit pe D și traiectoriile soluției sunt în $C_x(D)$, spațiul funcțiilor f continue pe D cu $f(0) = x$. Vom nota $X^\epsilon : \Omega \rightarrow C_x(D)$ variabila aleatoare care asociază lui $\omega \in \Omega$ traiectoria $t \rightarrow X_t^\epsilon(\omega)$.

Observație. Sistemul (5.5.) poate fi considerat și el ca perturbare mică a sistemului dinamic (5.1.) în sensul că, pentru orice $t \in [0, 1]$ și $\delta > 0$, avem

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} P \left\{ \sup_{0 \leq s \leq t} |X_s^\epsilon - x_s| > \delta \right\} = 0;$$

în plus acest model este "invariant" la schimbările de coordonate i.e. dacă $\varphi : D \rightarrow D'$ (D' deschis din \mathbb{R}^n) este difeomorfism, atunci procesul $\varphi(X_t^\epsilon)$ verifică o ecuație de tip (5.5.) cu coeficienți b'_ϵ, σ' care satisfac condițiile (5.4.).

Vom nota $AC(D)$ spațiul funcțiilor $g \in C(D)$ cu proprietatea că, pentru orice $t \in [0, 1]$, derivata (Lebesgue) \dot{g} a lui g există și este de pătrat integrabil pe $[0, t]$, inzestrat cu topologia indusă de $C(D)$. Din teoria ecuațiilor diferențiale ordinare, avem

LEMA 5.2. Fie $x \in D$ și $f \in AC(D)$. Atunci ecuația diferențială

$$\dot{g}_t = b(g_t) + \sigma(g_t) \dot{f}_t \quad (5.6)$$

admite o soluție unică $g \in AC(D)$ cu $g_0 = x$. Notăm această asociere $g = F_x(f)$. Aplicația $F : D \times AC(D) \rightarrow AC(D)$ nu este în general continuă, dar restricția ei la $D \times K_a$ este continuă pentru orice $a \geq 0$, unde $K_a := \left\{ f \in AC(D) \mid \int_0^1 |\dot{f}_t|^2 dt \leq a \right\}$.

În plus, pentru orice compacti $K, L \subset D$ cu $K \subset \overset{\circ}{L}$ și orice $a > 0$, există $t, c > 0$ cu proprietățile

(i) pentru orice $v \in K$, $f \in K_a$, funcția $h = F_v(f)$ are timpul de explozie infinit și $h([0, t]) \subset L$.

(ii) pentru orice $v, w \in K$, $f \in K_a$ și $s \leq t$ avem

$$\sup_{[0, s]} |F_v(f) - F_w(f)| \leq e^{cs} |v - w|.$$

TEOREMA 5.3. Cu notațiile și în ipotezele precedente, să fixăm un compact $K \subset D$ și numerele reale $a > 0$, $t \in (0, 1]$. Atunci, pentru orice $R, \rho > 0$ există $\alpha, r, \epsilon_0 > 0$ cu proprietatea următoare. Pentru orice $x \in K$, $f \in AC(\mathbb{R}^n)$, $g = F_x(f)$ care verifică $\int_0^t |\dot{f}_t|^2 dt \leq a$ și $g([0, t]) \subset K$, relațiile $\epsilon \leq \epsilon_0$ și $|X_0^\epsilon - x| \leq r$ (P -a.s.) implică

$$P \left[\sup_{[0, \epsilon]} |\epsilon B - f| \leq \alpha \text{ și } \sup_{[0, \epsilon]} |X^\epsilon - g| > \rho \right] \quad (5.7)$$

$$\leq \exp(-R\epsilon^{-2}).$$

Observații.

1. Pentru $h \in C(D)$, să notăm

$$\Gamma_{0,t}(h, r) = \left\{ k \in C(D) \mid \sup_{[0,t]} |h - k| \leq r \right\}$$

banda închisă de axă h și rază r . Teorema 5.3. garantează că, pentru ϵ și α mici și dacă neglijăm un eveniment de probabilitate inferioară lui $\exp(-R\epsilon^{-2})$, prezența lui ϵB în banda $A = \Gamma_{0,t}(f, \alpha)$ implică prezența lui X^ϵ în banda de axă $g = F_x(f)$ și rază ρ , cu condiția ca X_0^ϵ să fie suficient de aproape de $g_0 = x$.

2. Teorema 5.3. descrie deci o proprietate de "continuitate" a aplicației măsurabile care lui ϵB îi asociază X^ϵ când $x = X_0^\epsilon$ este fixat.

3. Formal, propoziția 4.4. implică $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^2 \log P(\epsilon B \in A) = -\Lambda(A)$, unde $\Lambda(A) = \inf_{\varphi \in A} \lambda(\varphi)$ și $\lambda(\varphi) = \frac{1}{2} \int_0^t \|\dot{\varphi}_s\|^2 ds$, norma fiind euclidiană. Probabilitatea $P(\epsilon B \in A)$ se comportă deci ca și $\exp(-(\epsilon t.)\epsilon^{-2})$; dar, pentru R suficient de mare, probabilitățile în $\exp(-R\epsilon^{-2})$ sunt neglijabile în raport cu $P(\epsilon B \in A)$. Aceasta ajută la înțelegerea consecinței următoare.

COROLARUL 5.4. *În ipotezele și cu notațiile din teorema 5.3., să fixăm x , f și punem $g = F_x f$. Atunci, pentru orice $\rho > 0$ și $0 \leq t \leq 1$, există $\alpha_0 > 0$ astfel ca relația $\alpha \leq \alpha_0$ să implice*

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} P[X^\epsilon \in \Gamma_{0,t}(g, \rho) \mid \epsilon B \in \Gamma_{0,t}(f, \alpha)] = 1.$$

Mai precis, pentru orice $\rho, R > 0$ și $0 \leq t \leq 1$, există $\alpha_0 > 0$ și $\epsilon_0(\alpha) > 0$ cu proprietatea

$$P[X^\epsilon \in \Gamma_{0,t}(g, \rho) \mid \epsilon B \in \Gamma_{0,t}(f, \alpha)] \geq 1 - \exp\left(-\frac{R}{\epsilon^2}\right)$$

pentru $\alpha \leq \alpha_0$ și $\epsilon \leq \epsilon_0(\alpha)$.

Demonstrația corolarului 5.4. Vom nota simplu $\Gamma_{0,t}(g, \rho) = \Gamma_g$ și $\Gamma_{0,t}(f, \alpha) = \Gamma_f$. Fie $p = P[X^\epsilon \in \Gamma_g \mid \epsilon B \in \Gamma_f]$. Atunci

$$p = 1 - \frac{P[(\epsilon B \in \Gamma_f) \cap (X^\epsilon \notin \Gamma_g)]}{P(\epsilon B \in \Gamma_f)}. \quad (5.8)$$

Fie $a = \frac{1}{2} \int_0^t |\dot{f}_t|^2 dt$. Conform propoziției 4.4., avem

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^2 \log P[\epsilon B \in \Gamma_f] = -\Lambda(\Gamma_f) \geq -a$$

deci, pentru $\epsilon \leq \epsilon_1(\alpha)$

$$P[\epsilon B \in \Gamma_f] \geq \exp\left(-\frac{2a}{\epsilon^2}\right). \quad (5.9)$$

Pentru $R > 0$ dat, să punem $R_1 = R + 2a$. Teorema 5.3. aplicată lui ρ, t , R_1 implică existența unor $\epsilon_0(R_1)$, $\alpha_0(R_1)$ astfel că majorarea (5.7.) se aplică pentru $\epsilon \leq \epsilon_0(R_1)$ și $\alpha \leq \alpha_0(R_1)$. Din formulele (5.8.) și (5.9.) rezultă, pentru $\alpha \leq \alpha_0(R_1)$ și $\epsilon \leq \epsilon_0(R_1) \wedge \epsilon_1$

$$p \geq 1 - \frac{\exp(-R_1/\epsilon^2)}{\exp(-2a/\epsilon^2)} = 1 - \exp\left(-\frac{R}{\epsilon^2}\right). \square$$

Demonstrația teoremei 5.3. Fie $K, L \subset D$ compacte astfel ca $K \subset \overset{\circ}{L}$. Notăm K^r reuniunea bilor închise de centru $v \in K$ și de rază $r > 0$. Fixăm $r_0 > 0$ astfel ca $K^{3r_0} \subset \overset{\circ}{L}$, $a > 0$, $T \in (0, 1]$ și punem $K_a = \left\{ f \in AC(\mathbb{R}^n) \mid \int_0^T |\dot{f}_t|^2 dt \leq a \right\}$.

Din propoziția 5.2., există $s_0 \in (0, T]$ astfel ca, pentru orice $f \in K_a$ și orice $v \in K^{r_0}$, funcția $h = F_v f$ să fie definită pe $[0, s_0]$ și $h([0, s_0]) \subset K^{2r_0}$. În plus, pentru s_0 suficient de mic, există o constantă $c > 0$ astfel ca, pentru $s \leq s_0$, $v, w \in K^{r_0}$, $f \in K_a$ să avem

$$\sup_{[0, s]} (F_v f, F_w f) \leq e^{cs} |v - w|. \quad (5.10)$$

Pentru $\rho \in (0, r_0]$, $v \in K^{r_0}$ și $g = F_v f$, cu notația $\varphi_t = X_t^\epsilon - g_t$ avem, pentru $t \leq s_0$

$$\varphi_t = \int_0^t a_s dB_s + z_t + \int_0^t h_s ds + X_0^\epsilon - v,$$

unde am notat $a_s = \epsilon[\sigma(X_s^\epsilon) - \sigma(g_s)]$, $h_s = b_\epsilon(X_s^\epsilon) - b(g_s)$, $z_t = \int_0^t \sigma(g_s) [\epsilon dB_s - \dot{f}_s ds]$.

Funcția $m_s = \frac{d}{ds} \sigma(X_s^\epsilon) \in L^2[0, s_0]$ și, integrând prin părți, obținem

$$z_t = \sigma(g_t)[\epsilon B_t - f_t] - \sigma(g_0)[\epsilon B_0 - f_0] - \int_0^t m_s(\epsilon B_s - f_s) ds.$$

Pentru $\alpha > 0$, $\rho \in (0, r_0]$, considerăm timpii de ieșire

$$\begin{aligned} \eta &= \inf \{s \in [0, 1] ; |\epsilon B_s - f_s| \geq \alpha\} \\ \theta &= \inf \{s \in [0, 1] ; |X_s^\epsilon - g_s| \geq \rho\}. \end{aligned}$$

Pentru $t \leq \theta \wedge s_0$, X_t^ϵ și g_t rămân în $K^{3r_0} \subset L$ și există deci o constantă care majorează (peste tot) expresiile $|\sigma(g_t)|$, $|\sigma(X_t^\epsilon) - \sigma(g_t)| / |X_t^\epsilon - g_t|$, $|b(X_t^\epsilon) - b(g_t)| / |X_t^\epsilon - g_t|$ și $\int_0^t |m_s|^2 ds$.

Convergența lui b_ϵ către b este uniformă pe compacți deci, pentru orice $\gamma > 0$, există $\epsilon_0(\gamma) > 0$ astfel ca

$$|b_\epsilon(X_t^\epsilon) - b(X_t^\epsilon)| \leq \gamma \text{ pentru } \epsilon \leq \epsilon_0 \text{ și } t \leq \theta \wedge s_0.$$

Punem condițiile

$$\begin{aligned} v \in K^{r_0}, f \in K_a, \epsilon \leq \epsilon_0 = \epsilon_0(\gamma), \rho \leq r_0 \\ |X_0^\epsilon - v| \leq \rho/R \text{ P-a.s.} \end{aligned} \quad (5.11)$$

pentru a obține majorările (cu c constantă adecvată)

$$|a_t| \leq \epsilon c_\rho \text{ pentru } t \leq \theta \wedge s_0$$

$$\int_0^t h_s ds \leq \int_0^t |b_\epsilon(X_s^\epsilon) - b(X_s^\epsilon)| ds$$

$$+ \int_0^t |b_\epsilon(X_s^\epsilon) - b(g_s)| ds \leq (\gamma + c\rho)t \text{ pentru } t \leq \theta \wedge s_0$$

$$|z_t| \leq c^\alpha \text{ pentru } t \leq \theta \wedge s_0 \wedge \eta.$$

Punem $w_t = \int_0^t a_s dB_s = \varphi_t - z_t - \int_0^t h_s ds - X_0^\epsilon + v$ pentru a obține

$$|w_t| \geq |\varphi_t| - |z_t| - \left| \int_0^t h_s ds \right| - \frac{1}{5}\rho.$$

Fie $s \leq s_0$. Cu notația $A := \{\theta \leq s \leq \eta\}$, obținem $|\varphi_\theta| = \rho$ și, ținând cont de majorările precedente, obținem

$$|w_\theta| \geq \rho - c\alpha - \gamma s - cs\rho - \frac{1}{5}\rho.$$

În afară de condițiile (5.11.), să punem și condițiile

$$c\alpha \leq \frac{1}{5}\rho, s \leq s_0, cs \leq \frac{1}{5}, \gamma s_0 = \frac{1}{5}\rho \quad (5.12)$$

pentru a obține că $A \subset \{|w_\theta| \geq \frac{1}{5}\rho\}$. Dacă w_θ^i , $i = 1, \dots, n$ sunt coordonatele lui w_θ , atunci

$$P(A) \leq \sum_{i=1}^n P\left\{|w_\theta^i| \geq \frac{1}{5}\rho\right\}. \quad (5.13)$$

Pentru orice $i = 1, \dots, n$, w_t^i este martingal local al carui proces crescator asociat d_t este majorat de $\int_0^t |a_s|^2 ds$, deci $Z_t := \exp\left(Mw_t^i - \frac{M^2}{2}d_t\right)$ este martingal local pentru orice $M \in \mathbb{R}$. În consecință, $Z_{t \wedge \theta}$ este martingal mărginit pentru $t \in [0, T]$ și $E(Z_{s \wedge \theta}) = E(Z_0) = 1$. Putem scrie deci

$$P\left\{w_{s \wedge \theta}^i \geq \frac{1}{5}\rho\right\} = P\left\{Mw_{s \wedge \theta}^i - \frac{M^2}{2}d_{s \wedge \theta} \geq \frac{M}{5}\rho - \frac{M^2}{2}d_{s \wedge \theta}\right\},$$

iar din (5.12.) obținem

$$d_{s \wedge \theta} \leq \int_0^{s \wedge \theta} |a_s|^2 ds \leq \epsilon^2 sc^2 \rho^2,$$

deci

$$\begin{aligned} P\left\{w_{s \wedge \theta}^i \geq \frac{1}{5}\rho\right\} &\leq P\left\{Z_{s \wedge \theta} \geq \exp\left(\frac{M}{5}\rho - \frac{M^2}{2}\epsilon^2 sc^2 \rho^2\right)\right\} \\ &\leq E(Z_{s \wedge \theta}) \exp\left(-\frac{M}{5}\rho + \frac{M^2}{2}\epsilon^2 sc^2 \rho^2\right). \end{aligned}$$

Alegem acum $M = \rho/5$ ($\epsilon^2 sc^2 \rho^2$) pentru a obține

$$P\left\{w_{s \wedge \theta}^i \geq \frac{1}{5}\rho\right\} \leq \exp\left(-\frac{1}{50\epsilon^2 sc^2}\right).$$

Similar găsim o majorare pentru $P \left\{ \omega_{s,\theta}^i \leq -\frac{1}{\epsilon} \rho \right\}$ deci, împreună cu (5.13.) obținem, in ipotezele (5.11.) și (5.12.)

$$P(A) \leq 2n \exp \left(-\frac{1}{50\epsilon^2 s c^2} \right).$$

Ceea ce am demonstrat până acum se poate enunța astfel. In ipotezele

$$v \in K^{r_0}, f \in K_a, g = F_x f, |X_0^\epsilon - v| \leq \rho/5 \text{ P-a.s.}$$

$$\rho \leq r_0, \epsilon \leq \epsilon_1(\rho) = \epsilon_0 \left(\frac{\rho}{5s_0} \right), \alpha \leq \alpha_0(\rho) = \frac{\rho}{5c} \quad (5.14)$$

$$\alpha \leq \alpha_0(\rho) = \frac{\rho}{5c}, s \leq s_1 = s_0 \wedge \frac{1}{5c},$$

are loc

$$P \left[\sup_{[0,s]} |\epsilon B - f| \leq \alpha \text{ și } \sup_{[0,s]} |X^\epsilon - g| \geq \rho \right] \quad (5.15)$$

$$\leq 2n \exp \left(-\frac{1}{50\epsilon^2 s c^2} \right).$$

Conform proprietății Markov obținem că, dacă

$$f \in K_a, \rho \leq r_0, \epsilon \leq \epsilon_1(\rho), \alpha \leq \alpha_0(\rho), s \leq s_1, t + s \leq T,$$

atunci, pe mulțimea $\{\omega \in \Omega; X_t^\epsilon \in K^{r_0}\}$, are loc P - a.s. inegalitatea

$$P \left[\sup_{[t,t+s]} |\epsilon B - f| \leq \alpha \text{ și } \sup_{[t,t+s]} |X^\epsilon - G^t| \geq \rho | \mathcal{F}_t \right] \quad (5.16)$$

$$\leq 2n \exp \left(-\frac{1}{50\epsilon^2 s c^2} \right),$$

unde \mathcal{F}_t este corpul borelian generat de mișcarea browniană până la momentul t , iar G^t este traiectoria aleatoare definită pe $[t, t+s]$ ca soluția unică a ecuației stocastice $\dot{\psi}_s = b(\psi_s) + \sigma(\psi_s) f_s$, care pornește din X_t^ϵ la timpul t .

Fie acum $f \in AC(\mathbb{R}^n)$ și $N \in \mathbb{N}^*$. Punem $g = F_x(f)$, $s = T/N$ și presupunem verificate condițiile

$$f \in K_a, g([0, T]) \subset K, \epsilon \leq \epsilon_1(\rho), \alpha \leq \alpha_0(\rho), s \leq s_1. \quad (5.17)$$

Pentru $k = 0, \dots, N-1$, definim evenimentele

$$A_0 = \left\{ \sup_{[0, s]} |X^\epsilon - g| \geq \rho \right\} \text{ și}$$

$$A_k = \left\{ \sup_{[ks, (k+1)s]} |X^\epsilon - G^{ks}| \geq \rho \right\}, k = 1, \dots, N-1.$$

Prin recurență după k , in ipoteza

$$\rho N (e^{cT} - 1) / cT \leq r_0, \quad (5.18)$$

să arătăm că, pentru $k = 1, \dots, N$ avem

$$A_0 \cap \dots \cap A_{k-1} \quad (5.19)$$

$$\subset \left\{ \sup_{[0, ks]} |X^\epsilon - g| \leq \rho (e^{cks} - 1) / (e^{cs} - 1) \right\}$$

Pentru $k = 1$ relația (5.19.) este evidentă. Dacă este adevărată pentru un $k = 1, \dots, N-1$, fie $\omega \in A_0 \cap \dots \cap A_k$; din ipoteza de inducție avem

$$|X_{ks}^\epsilon - g_{ks}| \leq \rho \frac{e^{cks} - 1}{e^{cs} - 1} \leq \rho \frac{e^{cT} - 1}{e^{cT/N} - 1} \leq \rho N \frac{e^{cT} - 1}{cT},$$

deci, in ipoteza (5.18.), avem că $X_{ks}^\epsilon \in K^{r_0}$. Trajectoriile G^{ks} iau valori in D pe $[ks, (k+1)s]$ iar proprietatea (5.10.) implică

$$\sup_{[ks, (k+1)s]} |G^{ks} - g| \leq |X_{ks}^\epsilon - g_{ks}|,$$

deci

$$\sup_{[ks, (k+1)s]} |X^\epsilon - g| \leq \rho + e^{cs} |X_{ks}^\epsilon - g_{ks}|.$$

Obținem in fine

$$\sup_{[0, (k+1)s]} |X^\epsilon - g| \leq \rho e^{cs} (e^{cks} - 1) / (e^{cs} - 1)$$

$$= \rho \left(e^{\alpha(k+1)s} - 1 \right) / (e^{cs} - 1),$$

deci (5.19.) este demonstrată.

Fie $\tau > 0$ arbitrar și presupunem indeplinită condiția

$$\rho N \frac{e^{cT} - 1}{cT} < \tau \wedge \tau_0 \quad (5.20)$$

Atunci (5.19.) implică, pentru $k = N$,

$$A_0 \cap \dots \cap A_{N-1} \subset \left\{ \sup_{[0, T]} |X^\epsilon - g| < \tau \right\},$$

deci

$$\left\{ \sup_{[0, T]} |X^\epsilon - g| \geq \tau \right\} \subset A_0^c \cap \dots \cap A_{N-1}^c = \bigcup_{k=0}^{N-1} F_k, \quad (5.21)$$

unde $F_0 = A_0^c$, $F_k = A_0 \cap \dots \cap A_{k-1} \cap A_k^c$ pentru $k = 1, \dots, N-1$.

Din (5.19.) și (5.20.) avem $F_k \subset \{X_{k_s}^\epsilon \in K^{r_0}\} \cap A_k^c$ și deci $F_k \subset \{X_{k_s}^\epsilon \in K^{r_0}\} \cap \left\{ \sup_{[k_s, (k+1)s]} |X^\epsilon - G^{k_s}| > \rho \right\}$.

Condițiile (5.17.), (5.20.) și

$$|X_0^\epsilon - g_0| \leq \frac{1}{5}\rho \text{ P-a.s.} \quad (5.22)$$

implică $F_0 \subset \left\{ |X_0^\epsilon - g_0| \leq \frac{1}{5}\rho \right\} \cap \left\{ \sup_{[0, s]} |X^\epsilon - g| > \rho \right\}$. Aplicăm acum inegalitățile (5.15.) și (5.16.) pentru a obține, pentru $k = 0, \dots, N-1$,

$$P \left[F_k \cap \left\{ \sup_{[0, T]} |\epsilon B - f| \leq \alpha \right\} \right] \leq 2n \exp \left(-\frac{1}{50\epsilon^2 s c^2} \right). \quad (5.23)$$

Notăm $Q = \left\{ \sup_{[0, T]} |\epsilon B - f| \leq \alpha \text{ și } \sup_{[0, T]} |X^\epsilon - g| \geq \tau \right\}$. Din (5.21)-(5.23) rezultă (pentru că $s = T/N$)

$$P(Q) \leq 2nN \exp \left(-\frac{1}{50\epsilon^2 T c^2} \right)$$

și cum $se^{-s} \leq e^{-s/2}$ pentru orice $s \geq 0$, avem

$$P(Q) \leq 100n\epsilon^2 T c^2 \exp \left(-\frac{N}{100\epsilon^2 T c^2} \right).$$

Fie $R > 0$ arbitrar ; in condițiile (5.17.), (5.20.), (5.22.) și

$$N/100Tc^2, 100nTc^2\epsilon^2 \leq 1 \quad (5.24)$$

obținem $P(Q) \leq \exp(-R/\epsilon^2)$. Pentru a termina demonstrația, să observăm că setul următor de condiții implică (5.17.), (5.20.), (5.22.) și (5.24.).

$$\epsilon \leq \epsilon_2(r, R), \alpha \leq \alpha_1(r, R), f \in K_a, g([0, T]) \subset K$$

$$|X_0^\epsilon - x| \leq 1/5\rho_0(r, R) \text{ P-a.s. ,}$$

unde $\epsilon_2(r, R) = \min[\epsilon_1(\rho_0), 1/\sqrt{100nTc^2}]$, $\alpha_1(r, R) = \alpha_0(\rho_0)$, $\rho_0 = \min[cT(r \wedge r_0)/2N_0(e^{cT} - 1), r_0]$, iar $N_0 = N_0(R)$ este ales $\geq \max(100Tc^2R, T/s_1)$. \square

Definim transformarea Cramer $\lambda : C(D) \rightarrow [0, +\infty]$ a sistemului dinamic (5.5.) prin

$$\lambda(g) = +\infty \text{ pentru } g \in C(D), g \notin AC(D), \quad (5.25)$$

$$\lambda(g) = \frac{1}{2} \int_0^1 \|\sigma(g_t)^{-1} [g_t - b(g_t)]\|^2 dt$$

și funcționala Cramer a sistemului (5.5.) prin

$$\Lambda(A) = \inf_{g \in A} \lambda(g) \text{ pentru orice } A \subset C(D). \quad (5.26)$$

Interpretarea transformării Cramer este aceea că $\lambda(g)$ măsoară distanța dintre g și soluția sistemului (5.1.), ambele plecând din același punct $x \in D$ și utilizând pe spațiul tangent la D în x metrica definită de forma pătratică $\frac{1}{2} \|\sigma(x)^{-1}(\cdot)\|^2$.

PROPOZITIA 5.5. *Cu notațiile de mai sus și în ipotezele (5.4.), transformarea Cramer (5.25.) este inferior semicontinuuă, pentru orice compact $K \subset D$ și $a \geq 0$, mulțimile $\{g \in C(D), g_0 \in K, \lambda(g) \leq a\}$ sunt compacte și, pentru orice $g \in C(D)$, avem*

$$\lambda(g) = \inf \left\{ \tilde{\lambda}(f), f \in AC(\mathbb{R}^n), g = F_x f \right\}, \quad (5.27)$$

unde $\tilde{\lambda}(f) = \frac{1}{2} \int_0^1 |\dot{f}_t|^2 dt$ este transformarea Cramer a mișcării browniene (cf. propoziției 4.4.). În această formulă, inf este atins dacă $\lambda(g)$ este finită.

Demonstrație. Fie borelianul

$$D^* = \left\{ (x, v) \in D \times \mathbb{R}^n \mid \sigma(x)^{-1}(v) \neq \emptyset \right\}$$

și, pentru $(x, v) \in D^*$, notăm

$$K(x, v) = \left\{ w \in \sigma(x)^{-1}(v) \mid |v| = \inf_{u \in \sigma(x)^{-1}(v)} |u| \right\}.$$

Cum $\{(u, v) \mid K(x, v) \cap S \neq \emptyset\}$ este borelian pentru orice închis S din \mathbb{R}^n , există o funcție boreliană $\chi : D^* \rightarrow \mathbb{R}^n$ cu proprietatea $\chi(x, v) \in K(x, v)$ pentru orice $(x, v) \in D^*$.

Fie $g \in C(D)$ cu $\lambda(g)$ finită. Din faptul că

$$\|\sigma^{-1}(x)v\|^2 = \inf \{ |w|^2, w \in \mathbb{R}^n, \sigma(x)w = v \},$$

avem $(g_t, \dot{g}_t - b(g_t)) \in D^*$ și

$$\|\sigma(g_t)^{-1}[\dot{g}_t - b(g_t)]\|^2 = |\chi[g_t, \dot{g}_t - b(g_t)]|^2$$

pentru orice $t \in [0, 1]$. Din (5.25.) avem

$$\lambda(g) = \frac{1}{2} \int_0^1 |\chi[g_t, \dot{g}_t - b(g_t)]|^2 dt < +\infty,$$

deci există $f \in AC(\mathbb{R}^n)$ astfel ca $\lambda(g) = \frac{1}{2} \int_0^1 |\dot{f}_t|^2 dt$ (este suficient de luat $\dot{f}_t = \chi[g_t, \dot{g}_t - b(g_t)]$ pentru aproape toți $t \in$

$[0, 1]$). Am arătat că, dacă $g \in C_x(D)$ cu $\lambda(g)$ finită, atunci există $f \in AC(\mathbb{R}^n)$ astfel ca $\tilde{\lambda}(f) = \lambda(g)$ și $g = F_x f$.

Fie acum $h \in AC(\mathbb{R}^n)$ cu $g = F_x h$; pentru aproape toți $t \in [0, 1]$ avem

$$|\dot{f}_t|^2 = \|\sigma(g_t)^{-1} [\dot{g}_t - b(g_t)]\|^2 = \|\sigma(g_t)^{-1} (\dot{f}_t)\|^2,$$

și $\dot{f}_t = \sigma(g_t) \dot{h}_t$, deci $|\dot{f}_t|^2 \leq |\dot{h}_t|^2$ a.e. Aceasta înseamnă că

$$\lambda(g) = \tilde{\lambda}(f) = \frac{1}{2} \int_0^1 |\dot{f}_t|^2 dt \leq \frac{1}{2} \int_0^1 |\dot{h}_t|^2 dt = \tilde{\lambda}(h)$$

deci (5.27.) este satisfăcută.

Conform propoziției 5.2, dacă $K_a = \{f \in C(\mathbb{R}^n), \tilde{\lambda}(f) \leq a\}$ și dacă K este compact în D , atunci restricția lui F_x la $K \times K_a$ (cu valori în $C(D)$), este continuă. Din (5.25.) rezultă că λ este inferior semicontinuu și că $F_x(K \times K_a)$ este compact. \square

Exercițiu. Folosind teorema 5.5., regăsiți transformarea Cramer a procesului Ornstein-Uhlenbeck (ca difuzie perturbată aleator), și care a fost calculată direct în capitolul precedent.

COROLAR 5.6. *În ipotezele și cu notațiile de mai sus, pentru orice $A \subset C_x(D)$ avem*

$$\begin{aligned} -\tilde{\Lambda}(\overset{\circ}{A}) &\leq \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^2 \log P(X^\epsilon \in A) \\ &\leq \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^2 \log P(X^\epsilon \in A) \leq -\tilde{\Lambda}(\bar{A}). \end{aligned}$$

Demonstrație. Fie $g \in \overset{\circ}{A}$ cu $\lambda(g)$ finită. Din propoziția 5.5., există $f \in AC(D)$ astfel ca $\tilde{\lambda}(f) = \lambda(g)$ și $g = F_x f$. Apoi există $t \in [0, 1]$ și $\rho > 0$ astfel ca

$$\left\{ h \in C_x(D) \mid \sup_{[0,t]} |h - g| \leq \rho \right\} \subset \overset{\circ}{A}.$$

Fie $R > 0$ astfel ca $R > \lambda(g) = \tilde{\lambda}(f)$. Conform teoremei 5.3. există $\alpha, \epsilon_0 > 0$ cu proprietatea următoare. Relatia $\epsilon \leq \epsilon_0$ implică

$$P \left[\sup_{[0, t]} |\epsilon B - f| \leq \alpha \text{ și } \sup_{[0, t]} |X^\epsilon - g| > \rho \right] \leq \exp(-R\epsilon^{-2}),$$

ceea ce dă

$$\begin{aligned} P(X^\epsilon \in A) &\geq P \left[\sup_{[0, t]} |X^\epsilon - g| \leq \rho \right] \\ &\geq P \left[\sup_{[0, t]} |\epsilon B - f| \leq \alpha \right] - \exp(-R\epsilon^{-2}). \end{aligned}$$

Din propozitia 3.9. avem

$$\begin{aligned} &\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^2 \log P \left(\sup_{[0, t]} |\epsilon B - f| \leq \alpha \right) \\ &= -\inf \left\{ \tilde{\lambda}(\varphi) \mid \sup_{[0, t]} |\varphi - f| \leq \alpha \right\} \geq -\tilde{\lambda}(f) \end{aligned}$$

și $-\tilde{\lambda}(f) > -R$, ceea ce implică

$$\liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^2 \log P(X^\epsilon \in A) \geq -\tilde{\lambda}(f) = -\lambda(g).$$

Luam sup după $g \in \overset{\circ}{A}$ și obținem prima inegalitate din corolar.

Fie acum $a < \Lambda(\bar{A})$ și punem $K_a = \{g \in C_x(D) \mid \lambda(g) \leq a\}$, $L_a = \{f \in AC(\mathbb{R}^n) \mid \tilde{\lambda}(f) \leq a\}$; avem $K_a = F_x(L_a)$. Din $K_a \cap \bar{A} = \emptyset$, pentru orice $g \in K_a$ există o vecinătate deschisă V_g a lui g în $C_x(D)$ astfel ca $V_g \cap A = \emptyset$. Există $\rho_g > 0$, $t_g \in [0, 1]$ astfel ca

$$G^g = \left\{ h \in C_x(D) \mid \sup_{[0, t_g]} |h - g| \leq \rho_g \right\} \subset V_g.$$

Fie $f_g \in L_a$ astfel ca $g = F_x(f_g)$. Din teorema 5.3., pentru $R > a$, există $\alpha_g, \epsilon_g > 0$ cu proprietatea următoare. Dacă

$$D^g = \left\{ f \in AC(\mathbb{R}^n) \mid \sup_{[0, t_g]} |f - f_g| < \alpha_g \right\},$$

atunci

$$P[(\epsilon B \in D^g) \cap (X^\epsilon \notin G^g)] \leq \exp(-R\epsilon^{-2}),$$

ceea ce implică

$$P[(\epsilon B \in D^g) \cap (X^\epsilon \notin V^g)] \leq \exp(-R\epsilon^{-2}).$$

Din acoperirea deschisă $(D^g)_{g \in K_a}$ a lui L_a extragem o acoperire finită D_1^g, \dots, D_k^g și punem $D_* = \cup_{i=1}^k D_i^g$. Obținem că

$$(\epsilon B \in D_*) \cap (X^\epsilon \in A) = \cup_i \{(\epsilon B \in D_i^g) \cap (X^\epsilon \in A)\},$$

care este inclus în evenimentul $\cup_i \{(\epsilon B \in D_i^g) \cap (X^\epsilon \notin V_{g_i})\}$. Deci, dacă alegem $\epsilon \leq \min\{\epsilon_{g_1}, \dots, \epsilon_{g_k}\}$, avem

$$P[(\epsilon B \in D_*) \cap (X^\epsilon \in A)] \leq k \exp(-R\epsilon^{-2}),$$

ceea ce implică

$$\begin{aligned} P(X^\epsilon \in A) &\leq P[(\epsilon B \in D_*) \cap (X^\epsilon \in A)] + P(\epsilon B \in D_*^c) \\ &\leq k \exp(-R\epsilon^{-2}) + P(\epsilon B \in D_*^c). \end{aligned}$$

Propoziția 4.4. implică

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^2 \log P(\epsilon B \in D_*^c) = -\tilde{\Lambda}(D_*^c)$$

(deoarece D_* este deschis), deci

$$\begin{aligned} \bar{l}(A) &= \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^2 \log P(X^\epsilon \in A) \\ &\leq (-R) \vee \left(-\tilde{\Lambda}(D_*^c)\right). \end{aligned}$$

Cum $R > a$ și $D_*^c \cap L_a = \emptyset$, membrul al doilea este majorat de $-a$. Relația $\bar{l}(A) \leq -a$ pentru orice $a < \Lambda(\bar{A})$, a finit, implică $\bar{l}(A) \leq -\Lambda(A)$. \square

Observație. Transformarea Cramer $\tilde{\lambda}$ (deci și funcționala Cramer $\tilde{\Lambda}$) în cazul perturbațiilor cu procese gaussiene și al ecuațiilor stocastice sunt *uniforme* în raport cu $x \in \mathbf{R}^n$, când $\epsilon \rightarrow 0$.

APLICATII

Să considerăm X_t^ϵ soluția ecuației diferențiale stocastice

$$dX_t^\epsilon = b(X_t^\epsilon) dt + \epsilon dB_t, \text{ pe } \mathbf{R}^n, \text{ cu } X_t^\epsilon = x_0$$

Dacă D este domeniu în \mathbf{R}^n cu $x_0 \in D$, notăm ∂D frontiera lui D ,

$$\tau^\epsilon = \inf \{t : X_t^\epsilon \notin D\}$$

prima ieșire a lui X_t^ϵ din D și

$$H_D(t) = \{f \in C(\mathbf{R}^n) : f_0 = x_0, f_t \in D \cup \partial D\},$$

$$\bar{H}_D(t) = \{f \in C(\mathbf{R}^n) : f_0 = x_0, f_s \notin D \text{ pentru un } 0 \leq s \leq t\}.$$

PROPOZITIA 5.7. *Daca frontiera lui D coincide cu frontiera lui \bar{D} , atunci*

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^2 \log P \{X_t^\epsilon \in D\} = - \inf_{f \in H_D(t)} \lambda(f) \quad (5.28)$$

și

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^2 \log P \{\tau^\epsilon \leq t\} = - \inf_{f \in \bar{H}_D(t)} \lambda(f). \quad (5.29)$$

Demonstrație. Relația (5.29.) va rezulta din lema 4.5. ; să verificăm ipotezele acesteia. Presupunem că $\inf_{f \in \bar{H}_D(t)} \lambda(f)$

$= \lambda(f_0)$, cu $f_0 = x_0$. Funcția f_t atinge frontiera ∂D într-un $t_0 \neq 0$, iar inf-ul de mai sus este finit pentru că există funcții netede arbitrare care pleacă din x_0 și părăsesc D în $[0, 1]$; rezultă că f_t este absolut continuă.

Pentru $\epsilon > 0$ dat, există $x^\epsilon \in \mathbb{R}^n \setminus D$ într-o ϵ -vecinătate a lui f_{t_0} ; punem

$$f_t^\epsilon = f_t + \frac{t}{t_0} (x^\epsilon - f_{t_0}), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Observăm că f_t^ϵ aparține interiorului lui $\bar{H}_D(t)$. Să arătăm că $\lambda(f^\epsilon) \rightarrow \lambda(f)$ când $\epsilon \rightarrow 0$. Avem

$$\begin{aligned} \lambda(f^\epsilon) - \lambda(f) &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\left| \dot{f}_t^\epsilon - b(f_t^\epsilon) \right|^2 - \left| \dot{f}_t - b(f_t) \right|^2 \right] dt \\ &= \int_0^1 \left\langle \dot{f}_t^\epsilon - b(f_t^\epsilon) - \dot{f}_t + b(f_t), \dot{f}_t - b(f_t) \right\rangle_{L^2[0,1]} dt \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^1 \left| \dot{f}_t^\epsilon - b(f_t^\epsilon) - \dot{f}_t + b(f_t) \right|^2 dt. \end{aligned}$$

Apoi

$$\dot{f}_t^\epsilon - b(f_t^\epsilon) - \dot{f}_t + b(f_t) = \frac{1}{t_0} (x^\epsilon - f_{t_0}) + b(f_t) \dot{f}_t^\epsilon - b(f_t^\epsilon)$$

care converge către 0 uniform în $t \in [0, 1]$ când $\epsilon \rightarrow 0$. \square

Observații.

1. Calculul expresiilor (5.28.)-(5.29.) se reduce la probleme variaționale. Într-adevăr, să observăm că noi ne-am restrâns la spațiul $C[0, 1]$, dar toate argumentele și calculele din capitolul 5 rămân adevărate în spațiul $C[0, t]$, $t > 0$. Să notăm λ_t transformarea Cramer asociată traiectoriilor X^ϵ pe intervalul $[0, t]$ (deci $\lambda \equiv \lambda_1$). Pentru calculul extremelor avem la dispoziție ecuația Euler, iar inf-ul se poate găsi prin ecuația Hamilton-Jacobi. Punem

$$V(t, x, y) = \inf_{f_0=x, f_t=y} \lambda_t(f).$$

Atunci

$$\inf_{f \in H_D(t)} \lambda_t(f) = \inf_{y \in DU \cap D} V(t, x, y)$$

și

$$\inf_{f \in \bar{H}_D(t)} \lambda_t(f) = \inf_{0 \leq s \leq t, y \notin D} V(s, x, y).$$

Ecuatia Hamilton-Jacobi pentru $V(t, x, y)$ are forma

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{1}{2} |\nabla_y V(t, x, y)|^2 + \langle b(y), \nabla_y V(t, x, y) \rangle,$$

la care adaugăm condițiile $V(0, x, x) = 0$ și $V(t, x, y) \geq 0$.

2. Să notăm că funcțiile $u^\epsilon(t, x) = P\{X_t^\epsilon \in D\}$ și $v^\epsilon(t, x) = P\{\tau^\epsilon \leq t\}$ sunt soluțiile problemelor

$$\frac{\partial u^\epsilon}{\partial t} = \frac{\epsilon^2}{2} \Delta u^\epsilon + \langle b(x), \nabla_x u^\epsilon \rangle, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0$$

$u^\epsilon(0, x) = 1$ pentru $x \in D$, $u^\epsilon(0, x) = 0$ pentru $x \notin D$,

respectiv

$$\frac{\partial v^\epsilon}{\partial t} = \frac{\epsilon^2}{2} \Delta v^\epsilon + \langle b(x), \nabla_x v^\epsilon \rangle, \quad x \in D, \quad t > 0$$

$v^\epsilon(0, x) = 0$ pentru $x \in D$, $v^\epsilon(t, x)|_{x \in \partial D} = 1$.

(remarcați că parametrul ϵ apare la derivatele de cel mai mare ordin). Propoziția 5.7. furnizează informații, atunci când $\epsilon \rightarrow 0$, asupra comportamentului soluțiilor problemelor de mai sus.



**VERIFICAT
2007**

**VERIFICAT
2017**

Tiparul s-a efectuat sub c-da nr. 151/1994
la Tipografia Editurii Universității București

ISBN 973-575-007-4

Lei 704