MARIN ŢURLEA

EXISTENŢĂ ŞI ADEVĂR ÎN MATEMATICĂ

EDITURA UNIVERSITĂŢII DIN BUCUREŞTI
– 1996 –

MARIN ȚURLEA

EXISTENȚĂ ȘI ADEVĂR ÎN MATEMATICĂ

I

EDITURA UNIVERSITĂȚII DIN BUCUREȘTI
— 1996 —

Referenţi ştiinţifici :

Prof. dr. ALEXANDRU SURDU, membru al Academiei Române
Prof. dr. ALEXANDRU BOBOC, membru corespondent al Academiei Române
Prof. dr. ILIE PÂRVU, membru corespondent al Academiei Române

ISBN 973-575-092-9

În memoria părinților mei

CUPRINS

CONTENTS

1. PROBLEMA EXISTENȚEI MATEMATICE ÎN CONCEPȚIA MARILOR PROGRAME FUNDAȚIONISTE ALE MATEMATICII

1.1. Existența matematică ca problemă ontologică

Problema existenței entităților matematice transcende domeniului de cercetare specific fundamentelor matematicii. Ea a constituit o temă de reflecție, de același nivel, ca marile probleme clasice ale filosofiei generale semnificative pentru natura gîndirii umane, care i-a preocupat pe marii filosofi ai tuturor timpurilor, începând cu Platon și Aristotel și continuând cu Descartes, Leibniz, Kant și alții.

Tema *«existenței matematice»* s-a constituit în conexiune cu cea *„a statutului adevărurilor matematice“*, a relației dintre acestea și entitățile la care ele se referă. Gradul înalt de *certitudine al adevărurilor matematicii* a sugerat imediat existența unei *discrepanțe izbitoare* între *ele și lumea experienței*, conducând la ideea că nu în această zonă a realității s-ar afla entitățile, obiectele asupra cărora poartă discursul matematic. Beth [1, p. 639] dă un exemplu simplu, dar relevant pentru această discrepanță amintită puțin mai sus, însă suficient de convingător : *„două puncte oarecare determină o linie dreaptă“*, însă noi nu găsim în lumea experienței noastre asemenea puncte și linii în sensul propriu al cuvântului.

Autorul citat afirmă că *platonismul* (în *formă naivă*, deoarece această poziție filosofică a cunoscut evoluții ulterioare acestei faze, așa cum aceasta s-a configurat în opera lui Platon) a reprezentat prima soluție neacceptabilă după unii autori, și deci nesatisfăcătoare, la problema în discuție. *«Platonismul naiv»*, matematic, original, postulează existența punctelor și liniilor, (ca să ne referim la exemplul semnificativ pentru natura cunoașterii geometrice), într-o *«lume transcendentă»* în care a sălășluit și sufletul uman înainte de *«încarnare»* într-o ființă umană. *Cunoașterea geometrică* apare ca o *«reminiscență»*, *„aducere aminte“*, *rememorare* a acestei stări anterioare. Concepția după care cunoașterea matematică, în particular cea geometrică, se bazează pe *„rememorare“* sugerează explicit că entitățile matematice nu sunt niște *„locuitori“* ai realității exterioare fizice, ai *lumii experienței*, ci ai *„lumii a treia“* în terminologia lui K. R. Popper [1, p. 87]. *«Lumea a treia»*, spune Popper, *este descoperirea lui Platon,* și ea este divină, neschimbătoare și adevărată, este o *«lume a formelor»* sau *«a ideilor».* R. Popper [1, p. 88] scrie mai departe: „Platon credea că *lumea a treia a formelor sau a ideilor* ne va oferi explicații ultime (adică *explicații prin esențe)*" (subl. mea, M.Ț.). Într-adevăr, însuși Platon [1] scrie în *Fedon*: „Cred că dacă orice altceva în afara *ideii frumuseții absolute* este frumos, atunci el este frumos *pentru singura rațiune* că el are ceva comun cu ideea frumuseții absolute. *Și acest gen de explicație se aplică oricărui lucru*". Popper a numit acest tip de argumentare o *«teorie a „explicației ultime"»*, adică a unei explicații în care *explicans*-ul nu este susceptibil de o explicație ulterioară, o explicație prin *esențe* sau cuvinte *hipostaziate*, care invocă o lume a unor lucruri, entități nemateriale, care pot fi contemplate, intuite, dar nu atinse, de intelectul uman. *«Formele sau ideile»* — locuitorii *«lumii a treia»* a lui Platon — sunt *concepte,* sau *esențe* ale lucrurilor, constituienții lumii experienței noastre.

În contrast cu concepția platoniciană, concepția aristotelică postulează existența entităților matematice în interiorul lumii experienței, din care pot fi *„distilate"*, cum spune Beth [1, p. 640], prin *abstracție. Certitudinea cunoașterii matematice* s-ar explica, după concepția aristotelică, prin succesele aplicațiilor matematicii în științele naturii, însă și această atitudine filosofică se confruntă cu dificultăți, atunci când considerăm entități mai complexe, pentru care nu dispunem de exemplificări corespunzătoare în *«realitatea»* experienței noastre.

Concepția *constructivistă* sau *conceptualistă,* (reprezentată de Plotin și Cusanus), succede platonismului și aristotelismului, și declară, în spiritul filosofiei idealiste, că *«entitățile matematice»* sunt construcții ale gândirii umane, supoziția fundamentală a acestei poziții este aceasta: *cunoașterea matematică este autocunoașterea gândirii umane* (cf. Beth [1, p. 640]). Este curios că deși Descartes a subliniat în mod constant importanța *autocunoașterii gândirii umane* și relația ei cu *certitudinea* cunoașterii matematice, el nu a adoptat *constructivismul* ci *aristotelismul.*

Dar concepția constructivistă asupra naturii cunoașterii matematice a atins apogeul ei în opera lui Imm. Kant și a exercitat prin *kantianism* o influență considerabilă asupra evoluției filosofiei generale. Este de observat ca aspect esențial reprezentarea conceptelor „în intuiție, plasarea percepțiilor într-o structură matematică și considerarea adevărurilor despre această structură folosind obiecte perceptibile pentru simbolizarea structurii".

„Criza" fundamentelor matematicii (1870—1900) i-a determinat pe matematicieni să revină cu o seriozitate crescândă, în tot acest interval, asupra *«problemei existenței entităților matematice»,* o criză care a afectat atât *analiza* cât și *geometria. «Descoperirea geometriilor neeuclidiene»* a zdruncinat credința în existența unor *fundamente intuitive* ale matematicii. Opera lui Pasch, Hilbert și Poincaré a făcut explicită *distincția* între *«problema fundamentelor geometriilor, euclidiană și ne-euclidiană»,* ca teorii matematice abstracte, (care ține de competența

cercetării fundaționale a matematicii) și *«problema aplicabilității geometriei»* în științele naturii, o problemă care aparține, cum afirmă Beth [1, p. 641], filosofiei științei naturale.

Problema fundamentelor matematicii a atras atenția matematicienilor și filosofilor și în legătură cu un *«al doilea aspect major»* (eveniment, s-ar putea spune) al crizei matematicii : *«descoperirea paradoxurilor»* logicii și teoriei mulțimilor. De fapt, nu era pentru prima dată când matematica „traversa o criză", căci istoria acestei științe mai dispunea în arhiva ei de asemenea evenimente : criza antică a matematicii pitagoreice, provocată de *«descoperirea numerelor iraționale»,* criza legată de *«paradoxele calculului infinitezimal».* Acum, la sfârșitul secolului trecut, matematica a devenit preocupată mai mult ca oricând de propria sa fundare. „Printre temele centrale a căror reconstrucție a fost solicitată de încercările noi de fundare a matematicii s-a aflat și ideea *existenței matematice.* La început ea a figurat ca problemă a *programelor fundaționiste* (logicism, formalism, intuiționism), a tentativelor de redefinire a statutului ontologic al obiectelor matematice și de reconstrucție a unor *criterii* adecvate ale existenței matemaitce. Ulterior, ideea existenței matematice a fost implicată în cercetarea raportului dintre obiectele matematice și sistemele formale. În toată această discuție a problemei existenței matematice un rol fundamental l-au jucat o serie de teoreme matematice (am zice meta-matematice, n.n. M. Ț.) remarcabile (Gödel, Löwenheim-Skolem, Tarski) de care sunt legate unele încercări de *„reducere ontologică",* de tranșare matematică a problematicii filosofice a existenței matematice" (I. Pârvu [1, p. 67]).

Problema existenței matematice a reclamat clarificarea statutului ontologic (teoretic și metodologic) al *infinitului,* temă de reflecție de o tulburătoare incitare a spiritului uman în toate timpurile, cu relevanță directă, profundă și fecundă pentru ontoolgia matematicii.

S-au constituit, aproape în aceeași perioadă, câteva direcții de reconstrucție a *ontologiei matematicii,* care descind din marile tendințe rivale în *filosofia generală,* asupra celebrei „probleme a universalelor", *realism, conceptualism* și *nominalism,* doctrine care vor reapare în filosofia matematicii ca reprezentate de *logicism, intuiționism* și *formalism* (cf. Quine [1, p. 174]).

Realismul ca filosofie a matematicii este în esență o expresie a doctrinei platoniciene despre *universale* sau *entități abstracte,* ca existând independent de gândire (cf. Quine [1]) ; această concepție atribuie obiectelor matematice o existență în sine, complet autonomă, nelocalizabilă în spațiu și timp, independentă de construcțiile noastre, conceptuale și lingvistice. Gândirea matematicianului *le poate desoperi,* însă nu le poate *crea ;* matematica ar fi o *descripție literală* a acestui domeniu de entități. Realismul are în filosofia matematicii o evoluție complexă și tendințe, evoluții recente ale matematicii, analize filosofice și metodologice actuale oferă argumente în favoarea unui idealism, destituit de idealismul platonician — încărcătura lui filosofică originară — în acord cu experienţa matematică, a relaţiilor acestei ştiinţe cu ştiinţele naturii, cu domenii ale experienţei şi cu pregnante valenţe dialectice, pentru care pledează în cartea sa Beth [1], cel puţin spiritul interpretării dominante ar fi acesta. Realismul a fost concepţia filosofică asumată de *logicism,* ca program fundaţionist al matematicii, deşi a încercat o reinterpretare nominalistă (şi chiar o edificare) a unor sisteme logiciste, aşa cum putem remarca în Quine [2].

Conceptualismul declară entităţile matematice ca fiind exclusiv construcţii mentale, creaţii ale minţii umane, în afara căreia existenţa lor fiind de neconceput. Varianta conceptualismului în filosofia matematicii o reprezintă intuiţionismul (Poincaré, Brouwer, Weyl, Heyting şi alţii). Sunt admise entităţi construite individual din ingredienţi specificaţi prealabil. Fără să intrăm acum în detalii privitor la relaţia realism-conceptualism, respectiv logicism-intuiţionism, putem evoca enunţul lui A. Fraenkel că în timp ce logicismul susţine că clasele (entităţi abstracte) sunt *descoperite,* intuiţionismul afirmă că sunt *inventate.* O aserţiune care notează o diferenţă remarcabilă referitor la ontologiile matematicii, pe care le permit cele două concepţii, programe fundaţioniste căci în timp ce logiciştii vor admite reconstrucţia ascensiunii ordinelor infinitului, intuiţioniştii se vor opri, cum remarcă Quine [1], la cel mai coborât ordin al infinitului, accesibil construcţiei intuitiv mentale.

Nominalismul susţine o poziţie specifică : existenţa matematică este redusă la limbaj, la construcţii finite de semne, realizabile în spaţiu şi timp şi neagă existenţa entităţilor abstracte ne-spaţiale şi ne-temporale. Nominalismul este supoziţia filosofică centrală a formalismului, dar unele exegeze asupra acestui program fundaţionist sugerează, ca posibile, interpretări instrumentaliste. (vezi şi M. Ţurlea [1] capitolul *Formalismul).*

In fine, trebuie adăugat că aceste poziţii filosofice nu sunt în *„stare pură“* la nivelul programelor fundaţioniste (logicism, intuiţionism, formalism) şi, mai mult, s-au produs transferuri şi apropieri chiar în plan metodologic prin „împrumuturi“ de concepte, procedee şi metode. Astăzi se conturează tot mai evident că locul *rivalităţii* trebuie să-l ia cel al *cooperării* benefice, orice respingere a metodelor şi rezultatelor din cercetarea (formală) a fundamentelor matematicii fiind nejustificată. Analiza pertinentă a structurii deductive a teoriilor matematice existente contribuie la formarea unei baze necesare pentru o discuţie filosofică adecvată asupra fundamentelor matematicii, în care una dintre problemele esenţiale este despre entităţi matematice, o atitudine preferabilă unora speculative şi apriori.

1.2. Logicismul şi problema existenţei matematice

Spuneam, mai înainte, că la sfîrşitul secolului al XIX-lea matematica s-a confruntat cu o puternică criză fundaţională provocată de elaborarea geometriilor ne-eculidiene şi descoperirea paradoxelor logico-matematice. În acest context istoric *problema fundamentelor matematicii* a apărut ca intim legată celei referitoare la *existența matematică*, o problemă prin excelență filosofică, pentru care apelul la filosofie era inevitabil. O serie de matematicieni și logicieni de notorietate precum Bolzano, Cantor, Frege și Russell, au recurs în perioada imediat anterioară evenimentului apariției paradoxelor, la concepții platoniciene despre existența obiectelor matematice. Vom constata, însă, imediat după descoperirea *celebrelor antinomii* o îndepărtare și chiar o renunțare la platonism.

Logicismul în sens modern a fost reprezentat de G. Frege și a fost caracterizat sintetic cu ajutorul următoarelor două aserțiuni : i) definirea noțiunilor fundamentale și chiar ireductibile ale matematicii pure în termenii logicii pure ; ii) demonstrarea teoremelor matematicii pure și, în primul rînd, a celor acceptate ca postulate ireductibile, plecînd exclusiv de la principiile de bază ale logicii și folosind metode de demonstrație care au caracter pur logic. Scrutarea atentă a acestor două aserțiuni ne relevă imediat că logicismul asumă o *realitate logică fundamentală* (un sort de absolutism, cum se vede, îi este inerent !), la care este reductibilă existența entităților matematice și, pe această cale, legitimată și justificată.

Logicismul, în lumina acestor aserțiuni-cerințe, este în dezacord în problema justificării matematicii și, în ultimă analiză, în problema existenței matematice, cu unele curente din cadrul filosofiei matematicii : critică empirismul pe considerentul că deoarece matematica pură nu conține elemente empirice, justificarea ei nu poate invoca date psihologice ; respinge concepția intuiționistă, deoarece construcția mental-intuitivă a entităților matematice, preconizată de Brouwer, Heyting și alții este irelevantă în virtutea aserțiunilor (i) și (ii) anterior enunțate ; împotriva formalismului hilbertian, logicismul susține că simbolurile matematice posedă o semnificație (reductibilă și traductibilă, este adevărat, în termenii logicii pure) și, mai mult, îi acuză pe formaliști că ignoră o distincție importantă între *use* și *mention*.

Acoperă complet platonismul sensul termenului *realism* ca un curent în filosofia matematicii și primordial ca o *atitudine filosofică fundamentală* față de problema existenței obiectelor matematice ? Înainte de a încerca să formulăm un răspuns să amintim că problema dacă există entități abstracte (și entitățile matematice sînt prototipuri ale unor astfel de obiecte !) este o problemă filosofică foarte veche, terenul confruntării a două concepții opuse și rivale — *realismul* și *nominalismul*. În timp ce nominaliștii neagă existența obiectelor abstracte, este cazul și al entităților matematice, realiștii afirmă că există obiecte abstracte. Quine [, p. 233] propune, întrucât este vorba de *realism sui generis*, pentru evitarea unor conotații indezirabile termenul de *platonism* în locul celui de *realism* : „realismul despre obiectele matematicii este ceea ce eu numesc platonism". Noi credem că deși dominantă în filosofia matematicii este accepția : *platonism* înseamnă *realism matematic*, în unele cazuri trebuie să facem distincție între platonism și realism, platonismul fiind doar o specie a realismului, din nefericire o supoziţie filosofică cu dezagreabile consecinţe în planul reconstrucţiei fundaţionale a matematicii, dar şi cu fecunde posibilităţi de legitimare a unor concepte ca : existenţă, adevăr, intuiţie, demonstrabilitate, obiectivitate etc.

Dacă definim platonismul ca o concepţie în filosofia matematicii care postulează ca obiect de studiu al matematicii un domeniu de *entităţi* specifice *(matematice)* existente independent de gândirea umană, iar enunţurile matematicii vor fi adevărate sau false în funcţie de relaţia lor cu proprietăţile acestor entităţi, la care adăugăm postulatul *existenţei* unui *intelect divin, nenatural,* care asigură înţelegerea obiectelor, realismul aici ar putea fi descris în termenii lui Dummett : „pentru orice enunţ care are un sens definit trebuie să existe ceva în virtutea căruia sau el sau negaţia lui este adevărată". Dacă pentru platonism sunt fundamentale noţiunile ireductibile *„înţelegere"* şi *„puteri mentale supranaturale"* capabile de acest tip de înţelegere, în realism sunt centrale alte noţiuni, cum sunt *referinţa* şi *adevărul,* ceea ce întemeiază o *exigenţă* de *obiectivitate* a matematicii. Avem aici prezentată o diferenţă între *sensul tare* şi *sensul (moderat)* al realismului. Dacă reluăm distincţia, formulată de P. Bernays [1], *platonism restricţionist* (sau *metodologic)* şi *platonism extrem, absolut* (sau *ontologic),* primul limitat la considerarea unei *proiecţii ideale a unui domeniu al gândirii,* cel de al doilea postulând, în sensul realismului conceptual, existenţa independentă a unei *lumi de obiecte ideale,* conţinând toate obiectele şi relaţiile pe care le descrie matematica, atunci un realism plauzibil, ca o tendinţă în filosofia contemporană a matematicii, despre care vorbeşte Beth [1] şi acreditat de activitatea complexă curentă a matematicienilor, ar valorifica, cel puţin, aspectele metodologice ale primei variante de platonism, dar ar respinge platonismul ontologic ca o asumpţie răspunzătoare de apariţia paradoxelor în edificiul matematic. Indiferent de accepţii, rămâne un aspect comun diferitelor specii de realism — postularea unei *existenţe obiective,* independente de noi, pe care matematicianul o cercetează şi o descrie. Este intresant de notat, cum am văzut, că logicieni şi matematicieni de seamă ca Frege, Russell, Bolzano, Cantor, Carnap, Gödel, Church, Quine au adoptat, cel puţin în unele perioade ale creaţiei lor, *filosofia realistă.*

Ce fel de realism a adoptat întemeietorul *logicismului modern?* Conceptul definitoriu pentru platonism este cel de *obiectivitate* care a fost luat în două accepţii : *„a exista independent de spirit* (subiect)" ; *„a fi accesibil mai multor gânditori".* Credem că sensul tare (aici primul) al obiectivităţii este relevant pentru varianta de platonism numită de Bernays *ontologic* şi confruntat cu acest sens al platonismului, Frege nu este un platonician. Ştim că Frege a descris *obiectivitatea* ca desemnând capacitatea *„de a fi accesibil mai multor subiecţi gânditori"* şi o interpretare a operei sale ne relevă prezenţa unor supoziţii platoniciene, în sensul slab, şi deci moderat, al termenului *platonism.* El este un raţionalist ca şi Leibniz şi deci un antipsihologist, susţinând că *obiectivitatea* este independentă de *senzaţie* (sau alte reprezentări psihice), dar este dependentă de *raţiune,* însă, din nefericire, tot ce ştim este că depăşirea subiectivității nu este posibilă cu ajutorul *cadrului transcendental, de tip kantian,* care-l nemulțumește, deoarece ar întemeia, cel mult, *„consensul general uman“*. Nu avem indicații despre *constituirea genetică* a obiectivității fregeene, odată ce el a respins orice rol al psihologiei în investigațiile fundaționale. Și întrucât numai idealismul obiectiv, dar nu și raționalismul, transformă gândirea în factor ontologic, urmează să rămânem la interpretarea realismului freegean ca realism moderat, *dependența obiectivității de gândire* fiind totdeauna luată în sens gnoseologic și nu ontologic.

Ontologia fregeană a matematicii este bogată și totodată complexă (pentru detalii se poate consulta și M. Țurlea [1]) ; preferăm în cele ce urmează expunerea din Beth [1] care minimizează aparatul logic și semantic, reținând numai elementele, cu relevanță pentru mecanismul funcționării supozițiilor platoniciene, care au condus la apariția paradoxurilor, chiar și în sistemul întemeietorului logicismului.

O distincție semnificativă pentru ontologia fregeană a entităților matematice este cea despre *simboluri complete* și *simboluri incomplete.* Această distincție este aprofundată cu ajutorul unei instrumentații semantice specifice : *sens* și *semnificație.* Un simbol complet este un *termen* care nu conține nici o variabilă liberă, de exemplu, *tatăl lui Platon ; rădăcina pătrată a lui $x + 3$* este un simbol incomplet deoarece conține o variabilă. *Obiect* la Frege este ceea ce nu este o *funcție,* ceva denotat de o expresie care nu conține nici o variabilă liberă. *Obiectul* denotat de un simbol complet este numit *semnificația* simbolului Două simboluri complete au aceeași semnificație dacă sunt nume diferite pentru unul și același obiect. (Exemplu : „2 + 2“ și „4“). Nu pot fi intersubstituite totdeauna două simboluri având aceeași semnificație (deno tație). Exemplu : „Luceafărul de dimineață“ și „Luceafărul de seară“, spunem că deși simbolurile au aceeași semnificație, adică desemnează același obiect, au totuși sensuri diferite. În concepția lui Frege o propoziție este un simbol complet care are o semnificație definită și un sens definit. Sensul este identificat de Frege cu ideea sau gândul pe care propoziția îl exprimă, iar semnificația ei poate fi una din valorile : *adevărul* sau *falsul.* Un simbol incomplet nu are o semnificație definită, va desemna un obiect definit numai atunci când vom atribui valori variabilelor pe care le conține. Un simbol incomplet reprezintă o funcție.

O analiză a expresiilor logicii elementare, în lumina conceptelor și distincțiilor introduse, ne arată că acestea sunt funcții, adică propoziții care conțin variabile. Aceste expresii vor avea o semnificație definită numai după atribuirea de valori pentru variabilele individuale și predicative ; semnificațiile vor fi sau *adevărul* sau *falsul.* O funcție propozițională cu o singură variabilă determină o *noțiune* sau o *clasă,* iar o funcție propozițională conținând două variabile definește o *relație.* Conceptul de *funcție* din matematică este reductibil la conceptul de *funcție propozițională.* Utilitatea *distincției* fregeene *sens-semnificație* a fost verificată de o serie de logicieni precum Carnap, Church, Quine în analiza speciei de paradoxuri, numite *semantice.*

Examinarea deducerii principiilor aritmeticii (vezi Beth [1, p. 356—360]) evidențiază superioritatea construcției fregeene față de cele aparţinând lui Peirce, Dedekind şi Peano. În timp ce Frege reuşeşte să demonstreze *„existenţa sistemului de numere naturale"*, entităţi fundamentale, *„materia primă"* a întregului edificiu al matematicii, ceilalţi, Peirce, Dedekind, Peano dau doar o caracterizare a acestui sistem în termenii unui set de postulate. Dar, chiar în perioada de extindere a influenţei lui Frege asupra lui Husserl, Russell, Couturat, ultimul pledând în favoarea logicismului în fundamentele matematicii, Russell a descoperit o antinomie în sistemul construit de logicianul german.

Russell a construit un sistem logic în care nu mai apare paradoxul respectiv, dar a făcut acest lucru diminuând *acurateţea logică* deoarece a fost nevoit să introducă două principii care nu au caracter pur logic : *axioma reductibilităţii* şi *axioma infinitului*. În 1910—1913 Russell şi Whitehead [1] oferă o analiză a fundamentelor matematicii, bazată pe *teoria tipurilor*, cuprinzând nu numai *aritmetica* ci şi *teoria mulţimilor*, întreprindere complexă şi vastă dând seamă de ansamblul matematicii existente la acea perioadă. Rădăcina paradoxului descoperit în sistemul logic al lui G. Frege a constat în procedura fregeană a *substanţializării* noţiunilor descrisă de Beth [1, p. 362] în felul următor : „Cum o noţiune este denotată de un termen care nu conţine variabile libere, urmează că noţiunile sunt obiecte în sensul definit de Frege. Prin urmare, noţiunile sunt tratate de Frege pe *picior de egalitate* cu obiectele de alte feluri ; paradoxul lui Russell apare exact din această *substanţializare* a noţiunilor". Deducţia lui Frege din punctul de vedere al teoriei tipurilor apare astfel : definiţia echinumericităţii. Obiectele implicate sunt de tip zero, atunci noţiunile F, G sunt de tipul unu ; numărul n menţionat în definiţiile (4) şi (5) trebuie să fie o noţiune de tipul doi ; deci orice număr în sens fregean trebuie să fie de tipul doi, cel puţin. Presupunem că numărul 0 este de tipul doi, urmează că numărul 1 este de tipul patru. Astfel chiar sub noţiunea H (1) sunt conţinute obiecte de tipuri diferite, cf. Beth [1].

Platonismul a fost împărtăşit şi de Russell [1] în *(Principles of mathematics)*.

Logicismul (şi, deci, implicit realismul, platonismul) a fost susţinut şi de R. Carnap [1]. Ulterior, Carnap şi-a modificat radical concepţiile. El a susţinut separarea ştiinţei de filosofie, a limbajului de ontologie, susţinând că limbajul este independent de problemele existenţei.

Cu privire la *problema existenţei entităţilor matematice* şi *logice*, Carnap [2] o respinge ca fiind *lipsită de semnificaţie*. După concepţia lui Carnap problemele existenţei sunt relative la un *«cadru fundamental» (framework)* dat dinainte. Numai într-un cadru dat al entităţilor, are sens să întrebăm dacă există o entitate care satisface anumite condiţii ; problema dacă cadrul există este lipsită de sens. De fapt el a formulat binecunoscuta distincţie : «probleme *interne*» şi «probleme *externe*», cu privire la existenţa sau realitatea entităţilor : „Dacă cineva vrea să vorbească în limbajul său despre un gen nou de entităţi, el trebuie să introducă un sistem de noi moduri de vorbire, supuse la noi reguli ; această procedură o vom denumi construcţie a carcasei lingvistice pentru noile entităţi în cauză. Iar acum trebuie să facem o distincţie între două tipuri de chestiuni de existență : în primul rând, chestiuni privitoare la existența anumitor entități de noul gen, *înăuntrul carcasei ;* pe acestea le numim *chestiuni interne ;* în al doilea rând, chestiuni privitoare la existența sau realitatea *sistemului de entități în ansamblu,* numite *chestiuni externe*". (R. Carnap [2, p. 267—268]). Răspunsurile la chestiuni interne sunt posibile prin formularea cu ajutorul noilor forme de expresii și pot fi găsite prin metode logice sau prin metode empirice, în funcție de natura *carcasei,* dacă este logică sau facturală. Chestiunile *externe* sunt în mod curent formulate numai de filosofi.

Lucrarea lui Carnap [2] este o reacție la critica pe care i-a făcut-o Quine cu privire la faptul că el ar fi admis existența entităților abstracte ; după Quine entitățile abstracte nu pot fi designate. Carnap [2, p. 266] scrie : „Empiriștii privesc în general cu suspiciune orice gen de entități abstracte, ca proprietățile, clasele, relațiile, numerele, judecățile etc. De obicei, ei au mult mai multă simpatie față de nominaliști decât față de realiști (în sensul medieval). Pe cât posibil, ei încearcă să evite orice referire la entități abstracte și să se restrângă la ceea ce se numește uneori un limbaj nominalist, adică la un limbaj care nu conține asemenea referiri. Totuși, se pare că în anumite contexte științifice este aproape imposibil să evităm aceste referiri. În cazul matematicii unii empiriști încearcă să găsească o ieșire tratând matematica în ansamblu, ca un simplu calcul, un sistem formal pentru care nu există și nu poate exista nici o interpretare. În consecință, ei consideră că matematicianul nu vorbește despre numere, funcții și clase infinite, ci numai despre simboluri și formule fără sens manipulate conform unor reguli formale date". Și Carnap [2, p. 267] continuă în termenii : „Recent, problema entităților abstracte s-a pus din nou în legătură cu semantica, teoria semnificației și adevărului. Unii semanticieni afirmă că anumite expresii desemnează anumite entități și ei includ printre aceste entități desemnate nu numai lucruri materiale concrete ci și entități abstracte, de exemplu proprietăți — desemnate de predicate — și judecăți — desemnate de propoziții. Alții obiectează cu tărie împotriva acestei proceduri, susținând că ea violează principiile de bază ale empirismului și duce înapoi la o ontologie metafizică de tip platonic".

Ideea de bază a studiului lui Carnap [2] este clarificarea acestei probleme controversate : „Mai întâi vor fi discutate în general natura și implicațiile acceptării unui limbaj care se referă la entități abstracte ; se va arăta că folosirea unui atare limbaj nu implică îmbrățișarea unei ontologii platonice ci este perfect compatibilă cu empirismul și cu gândirea riguros științifică. Opinia lui Carnap este că clarificarea problemei va servi celor care vor să accepte, de exemplu în domeniul activității lor (în matematică, fizică, semantică), entități abstracte și care vor să-și învingă scrupulele nominaliste".

„*Existență*" în concepția lui R. Carnap este ceea ce este decidabil lingvistic ; a fi real înseamnă a fi element al sistemului conceptual lingvistic. Chestiunea realității exterioare nu este o chestiune de ordin teoretic „ci mai curând una de ordin practic — o chestiune de decizie practică privitoare la structura limbajului nostru. Noi trebuie să optăm dacă acceptăm sau nu, dacă folosim sau nu formele de expresie în carcasa respectivă". (Carnap [2, p. 269]). Realitatea existenței unei entități a sistemului este verificată prin investigații empirice, atunci când carcasa lingvistică este factuală și prin metode logice, dacă carcasa lingvistică este logică. Exemplu : „există un număr prim mai mare ca o sută ?". „În acest caz însă, scrie Carnap [2, p. 270], răspunsurile sunt găsite nu printr-o investigație empirică bazată pe observații ci prin analiza logică bazată pe regulile pentru expresiile noi. De aceea, răspunsurile sunt aici analitice, adică logic adevărate".

Carnap face referiri explicite, în acest context, la entități matematice, cum sunt numerele și se întreabă care este natura chestiunii filosofice cu privire la existența sau realitatea numerelor. El scrie (vezi Carnap [2, p. 270—271]) : „Să începem cu chestiunea internă, care, împreună cu răspunsul afirmativ, poate fi formulată în noii termeni, de pildă : «Există numere», sau, mai explicit, «Există un n astfel încât n este număr». Acest enunț decurge din enunțul analitic «cinci este un număr» și ca atare este el însuși analitic. Mai mult, este destul de banal (în opoziție cu un enunț ca «Există un număr prim mai mare ca un milion», care este și el analitic, dar este departe de a fi banal), deoarece nu spune decât că noul sistem nu este vid ; dar aceasta se poate vedea imediat din regula care spune că în locul variabilelor noi putem substitui cuvinte ca «cinci». Ca atare, nici un om care a înțeles întrebarea «Există numere ?» în *sensul intern* nu ar aserta și nici măcar nu ar lua în serios un răspuns negativ. De aceea, este plauzibil să admitem că filosofii care tratează chestiunea existenței numerelor ca o problemă filosofică serioasă și argumentează pe larg pro și contra nu au în vedere chestiunea internă. Într-adevăr dacă i-am întreba : «Nu aveți cumva în vedere chestiunea dacă carcasa numerelor, în cazul când am acceptat-o, este sau nu vidă ?» acești filosofi ar răspunde probabil : «Câtuși de puțin ; avem în vedere o chestiune care *precede* acceptarea noii carcase». Ei ar putea încerca să explice ce înțeleg prin afirmația că există o chestiune *a statutului ontologic al numerelor :* chestiunea dacă numerele au sau nu o anumită caracteristică metafizică numită realitate (dar un gen de realitate ideală, diferită de realitatea materială a lumii lucrurilor) sau au subsistență, sau au statut de «entități independente»". Și Carnap reproșează acestor filosofi că nu și-au formulat chestiunea în limbaj științific uzual și astfel nu i-au conferit un conținut cognitiv clar chestiunii interne și de asemenea și răspunsurilor ei posibile și, în consecință, problema ridicată de ei este o *pseudo-problemă.*

Am citat de mai multe ori din lucrarea lui Carnap pentru a ne forma o opinie mai adecvată asupra tipului de realism pe care l-a adoptat.

Unul dintre cei mai influenți realiști în filosofia matematicii este K. Gödel (vezi K. Gödel [1] [2]). El afirmă textual : „clasele și conceptele pot fi reprezentate ca obiecte reale... existând independent de definițiile și construcțiile noastre". Și K. Gödel [1] continuă: „Mi se pare că admiterea unor asemenea obiecte este aproape la fel de legitimă ca și admiterea corpurilor fizice și există o întemeiere la fel de mare pentru a crede în existența lor. Ele sunt în același sens necesare pentru a obține o teorie satisfăcătoare a matematicii, după cum corpurile fizice sunt necesare pentru a obține o teorie satisfăcătoare a percepțiilor noastre sensibile".

Caracteristicile specifice cunoașterii matematice — *intuiția matematică* și *adevărul matematic* devin explicabile în lumina unei atitudini filosofice realiste care postulează acest gen de obiecte reale — *mulțimi, clase* și/sau *concepte*. Adevărul axiomelor din teoria mulțimilor ni se impune, ne constrânge să admitem existența „unei percepții a obiectelor teoriei mulțimilor", un gen de intuiție matematică care ne trimite la un dat exterior, la un alt gen de existență decât existența fizică. K. Gödel [2, p. 333] scrie: „Nu decurge, totuși, deloc că datele de acest al doilea gen, întrucât nu pot fi asociate cu acțiunea unor anumite lucruri asupra organelor de simț, ar fi ceva pur subiectiv, așa cum a afirmat Kant. Mai degrabă, ele pot reprezenta de asemenea un aspect al realității obiective, dar, în opoziție cu senzațiile, prezența lui în noi se poate datora unui alt gen de relație dintre noi și realitate". Numai existența în sine a obiectelor matematice oferă posibilitatea explicării adecvate, cum am spus, a intuiției și adevărului matematic.

Resurse fructuoase prezintă realismul (și deci și logicismul) cu privire la interpretarea existenței *infinitului* și a *problemei continuului*. Cum observă A. Robinson [1, p. 558] realiștii platonicieni „cred în genere în existența ideală a entităților matematice, inclusiv în existența mulțimilor transfinite de numere ordinale, oricât de mari, în măsura în care ele pot fi introduse cu ajutorul unor axiome adecvate". Deși realiștii acceptă, în principiu, existența acestor entități matematice, putem constata că sunt prudenți, atunci când este vorba de „contemplarea cardinalilor de un tip suficient de inaccesibil", căci nu dispunem de o evidență convingătoare nici pentru respingerea și nici pentru acceptarea unor axiome mai tari decât cea mai generală axiomă a infinitului. Lucrări mai recente despre independență degajă semnificația că teoria mulțimilor se referă la obiecte „reale" ceea ce ar reprezenta un argument în favoarea realismului. Referindu-se la *ipoteza continuului,* Gödel adoptă iarăși realismul: „Pentru că dacă sensurile termenilor primitivi ai teoriei mulțimilor așa cum sunt explicați la paginile 328—329 și în nota 14 sunt acceptate ca fiind consistente, urmează că noțiunile și teoremele teoriei mulțimilor descriu o anumită *realitate bine determinată* în care conjectura lui Cantor trebuie să fie adevărată sau falsă. Deci indecidabilitatea ei din axiomele care sunt admise astăzi poate însemna doar că aceste axiome care sunt admise astăzi poate însemna doar că aceste axiome nu conțin o descriere completă a acestei realități. O asemenea credință nu este deloc himerică, deoarece este posibil să se indice căile prin care decizia unei probleme, care este indecidabilă prin axiomele uzuale, să se poată totuși obține" (K. Gödel [2, p. 323]).

1.3. Formalismul şi entităţile matematice

Formalismul poate fi considerat corespondentul în filosofia matematicii a ceea ce este numit *nominalism* în filosofia generală. Totuşi, trebuie să remarcăm că spre deosebire de platonismul modern care are profunde legături cu cel tradiţional, în cadrul nominalismului contemporan nu sesizăm asemenea aspecte. Tendinţa nominalistă a fost reprezentată de L. Chwistek, S. Lesniewski, Quine, Tarski, Henkin, Nelson Goodman şi s-a constituit ca o reacţie la elementele platoniste din opera lui Frege şi Cantor, responsabile de apariţia antinomiilor. După Beth [1, p. 471] distingem trei elemente în nominalismul contemporan: 1) critica sistemelor RZ pentru baza lor platonistă; 2) încercări de construire a unor sisteme pentru fundamentele logicii şi matematicii, care să fie în acord cu exigenţele formulate în concepţiile nominaliste; 3) reinterpretarea nominalistă a sistemelor RZ.

Interpretarea nominalistă a unui sistem RZ cere ca toate entităţile la care se referă (adică entităţile conţinute de modelul acelui sistem) să fie obiecte concrete. Această condiţie poate fi satisfăcută dacă interpretăm sistemul în sensul că el se referă la entităţi ca cele definite în cadrul lui. Identificăm fiecare entitate ca una din expresiile sistemului, iar apoi le considerăm pe acestea ca obiecte concrete. Mai rămâne de văzut dacă entităţile definibile într-un sistem formează un model.

Cum fiecare număr natural poate fi definit în toate sistemele RZ, elementele mulţimii N a tuturor numerelor naturale sunt reprezentate în modelul nostru nominalist şi chiar N însuşi va fi reprezentată printr-o expresie care defineşte B(N).

În modelul nostru avem numai submulţimi definibile ale lui N din care există numai numărabil de multe. Conform teoremei lui Cantor B(N) trebuie să conţină mai multe elemente decât N însuşi şi modelul nu satisface teorema lui Cantor.

Conform *teoremei de completitudine* Löwenheim-Skolem-Gödel-Henkin orice sistem RZ consistent are un model numărabil. Într-un asemenea model N şi B(N) sunt reprezentate de mulţimi numărabile. Teorema lui Cantor este însă satisfăcută, pentru că relaţia F care stabileşte o corespondenţă biunivocă între elementele lui N şi cele ale lui B(N) nu poate fi definită în sistemul RZ.

Nu decurge că modelul încercat satisface teorema lui Cantor. Ar fi cazul dacă şi numai dacă soluţia problemei — dacă sau nu sistemele RZ conţin o definiţie a relaţiei care stabileşte o corespondenţă biunivocă între elementele lui N şi submulţimii definibile ale lui N — este negativă.

Se poate obiecta că modelul nostru şi modelul Löwenheim-Skolem-Gödel-Henkin sunt modele non-standard. Pentru majoritatea sistemelor RZ existenţa unui model standard este dubioasă; pentru sistemul NF al lui Quine non-existenţa modelelor standard a fost demonstrată de Rosser şi Wang.

Apar probleme când trecem la mulțimea B(B(N)). Conform unui rezultat, stabilit de Tarski, clasa M a tuturor subfamiliilor lui B(N) nu este definibilă într-un sistem RZ. Și cum B(B(N)) este definibilă în orice sistem RZ, nu poate fi identificată cu M. La acest punct modelul nostru nominalist nu mai servește scopului.

Gödel a arătat că în virtutea *teoremei consistenței relative* se poate găsi alt model care să servească scopului nominalismului. Se înlocuiește în construcția modelului anterior *definibil* prin *entități constructibile* și obținem un model în care apar numai astfel de entități, care într-un sens poate fi considerat că constă din obiecte concrete, încheie Beth [1] considerațiile sale despre nominalismul contemporan.

Dar toate sistemele RZ conțin o *axiomă a infinitului*. Interpretarea va depinde de acceptarea existenței a infinit de multe obiecte concrete, o cerință-supoziție care este oare compatibilă cu punctul de vedere nominalist ?

După Beth [1] avem de-a face cu două atitudini : una care se bazează pe o ipoteză cosmologică care afirmă existența a infinit de multe obiecte concrete și care conține o circularitate în justificarea infinitului căci, pe de o parte, logica și matematica ar depinde de științele naturii, iar, pe de altă parte, științele naturii depind în dezvoltarea lor de matematică ; cealaltă atitudine sugerează omiterea axiomei infinitului din toate sistemele RZ și se demonstrează în locul oricărei teoreme X, teorema A→X (prin teorema de deducție).

1.4. Intuiționismul și entitățile matematice mentale

Cum observă Al. Surdu [1, p. 103] deoarece „Punctul de plecare al neointuiționismului nemijlocit (Brouwer) îl constituie intuiționismul logico-matematic. S-ar părea, din această perspectivă, că problemele ontologice ar constitui cel mai «îndepărtat» compartiment al neointuiționismului". Dar B. von Rootselaar [1, p. 157—158] observă că pentru intuiționism este esențial conceptul de existență, limitat însă numai la *existența obiectelor matematice ;* pentru intuiționiști „existența matematică trebuie să semnifice același lucru cu constructivitatea". Dar „*obiectul matematic*", în sens intuiționist, are un statut ontologic specific. Al. Surdu [1, p. 104] scrie : „Platon îl suspenda *inter mundos,* Aristotel îl considera drept rezultat al intuiției *a posteriori,* Kant al intuiției *a priori,* a spațiului și a timpului. Numai neoplatonicienii moderni consideră că obiectul matematic *există ca atare,* independent, asemenea Ideilor platonice. Neointuiționismul adoptă parțial teoria kantiană, respectiv consideră că obiectul matematic este rezultatul unei intuiții *a priori,* de data aceasta numai a *succesiunii temporale*".

Ontologia brouweriană este mentalist-subiectivă, și deci idealistă, „la început a fost senzația", este dictonul brouwerian, senzația constituind fenomenul inițial al intuiției de bază. A. Surdu califică idealismul subiectiv al lui Brouwer ca fiind mai «senzitiv» decât cel al lui Berkeley, înlocuind postulatul berkeleyan «a fi înseamnă a fi perceput» cu cel brouwerian «a fi înseamnă a fi simţit». De altfel, aşa cum lucrurile în genere sunt inseparabile de subiect, tot aşa „construcţiile matematice nu pot fi despărţite de matematicianul care le creează; ele nu au o existenţă în sine". Comparat cu logicismul, sau mai bine cu platonismul, intuiţionismul afirmă că existenţa matematică nu este o realitate exterioară minţii matematicianului, o *«lume transcendentă»* ci este alcătuită din entităţi matematice, care reprezintă construcţii ale gândirii umane, cum am văzut; în timp ce *logicismul* afirmă despre clase (entităţi abstracte) că sunt *descoperite, intuiţionismul* susţine că sunt *inventate*. Raportat la *formalism* care reduce ontologia matematicii la existenţa simbolurilor, semnelor *«pe hârtie»*, intuiţioniştii, şi chiar însuşi Brouwer, nu au admis ca matematica, această bijuterie a spiritului uman, să fie considerată un *«simplu joc de semne»*, vid de orice semnificaţie. De altfel, «teoria stadiilor succesive» — i) construcţia sistemelor intuitive de entităţi matematice; ii) limbajul ca paralelă sau însoţitor lingvistic(ă) a gândirii matematice; iii) analiza matematică a acestui limbaj, care conduce la descoperirea edificiului verbal stabilit conform principiilor logicii; iv) sisteme abstracte, adică sisteme matematice de ordinul al doilea, identice cu sistemele formale studiate de logica simbolică; v) introducerea limbajului logicii simbolice care acompaniază construcţiile logice; acest stadiu este legat de opera lui Peano şi Russell; vi) analiza matematică a limbajului logicienilor, stadiu iniţiat de Hilbert şi neglijat de Peano şi Russell; vii) pasul abstractizării (Beth [1, p. 411]) — limpezeşte raporturile dintre intuiţionism-logicism, intuiţionism-formalism. Existenţa matematică autentică în sens intuiţionist este relevată de stadiul unu, distinctă şi ireductibilă, pe de o parte la *«realitatea logică»* (versus logicism), iar pe de altă parte, ireductibilă la limbaj (versus formalism). Am adăuga faptul că teoreme fundamentale, cu relevanţă ontologică remarcabilă, şi am numit teoremele gödeliene şi teorema Löwenheim-Skolen, argumentează în favoarea *«identităţii intutivului»*, relevându-i aproape inscrutabilitatea lui cu mijloace şi modalităţi logice şi formale, «intuitiv» ca entităţi şi construcţii intuitive, favorizate de intuiţionism. Astfel, argumentul lui Skolem arată că *noţiunea intuitivă* de mulţime nu este capturată de sistemul formal. Intuiţionismul va susţine, în consecinţă, o concepţie despre *adevăr* diferită de cea proprie semanticilor realiste; semnificaţia unei propoziţii sau a unui predicat este identificată cu o demonstraţie că propoziţia respectivă este constructiv adevărată, semanticile non-realiste la care aparţine intuiţionismul cerând proceduri de verificare. Esenţialul în ontologia intuiţionistă rămâne existenţa entităţilor mentale numite *«semnificaţii»*, subiectul uman (matematicianul) dispunând de o facultate specială a intuirii relațiilor constructive dintre aceste entități. Invocând distincțiile operate de H. Putnam [1, p. 464] asupra *referinței* și *adevărului,* spre deosebire de platonismul extrem care postulează «*puteri mentale nenaturale*» ce facilitează „understanding" sau „grasping" noțiuni ireductibile și neexplicate, intuiționismul nu asumă prezența unor astfel de facultăți, puteri ci doar unele umane, naturale, normale, apropiindu-se, mai curând, de poziția *realistă moderată* care păstrează, totuși, caracterul central al noțiunilor clasice de adevăr și referință, fără postularea puterilor (facultăților) mentale nenaturale. În același timp intuiționismul matematic are în comun cu poziția *verificaționistă* înlocuirea noțiunii clasice de *adevăr* cu noțiunea de *verificare.*

2. STATUTUL ENTITĂŢILOR MATEMATICE ÎN PERSPECTIVA UNOR SISTEME FUNDAŢIONALE ALE MATEMATICII

Dacă programele fundaţioniste se interesează de *natura* entităţilor matematice, sistemele fundaţionale abordează entităţile matematice sub aspect *structural* şi *organizaţional,* distingând între obiecte matematice *fundamentale* şi cele *derivate.* Entitatea matematică centrală în sistemele fundaţionale examinate aici este *mulţimea* şi plecând de la ea se încearcă reconstruirea celorlalte obiecte matematice (număr, funcţie etc.), locul şi relaţiile ei cu acestea în ansamblul edificiului matematicii.

2.1. Sistemul Zermelo ; aspecte ontologice

Sistemul axiomatic al lui Zermelo este apreciat ca o tentativă-remediu la dificultăţile cu care a fost confruntată *teoria naivă a mulţimilor* prin apariţia paradoxurilor Burali-Forti şi Russell. Aceste entităţi matematice — *mulţimile* — preocupase mai înainte pe Dedekind şi Russell. Primul a formulat un număr de principii despre mulţimi, dar maniera *nematematică* a expunerii privind justificarea existenţei unei mulţimi infinite a făcut ca matematicienii să nu fie prea *„sensibilizaţi"* la modalitatea propusă de Dedekind. Russell a elaborat, în contextul situaţiei conceptuale marcate de apariţia antinomiilor, celebra *teorie a tipurilor* interesantă prin semnificaţiile ei logice şi ontologice.

Zermelo a fost în principal interesat în construirea unei teorii axiomatice a mulţimilor utilă şi eficace *«matematicianului care lucrează»* şi care ignoră *«probleme de fundamente».* Cu toate acestea, intenţia principală din Zermelo [1] viza şi aspecte fundaţionale, teoria mulţimilor ocupând în ansamblul concepţiei sale un loc privilegiat privind edificiul matematicii. El formula astfel *rolul fundaţional* al teoriei mulţimilor, capacitatea acesteia în investigarea celorlalte entităţi matematice importante şi chiar fundamentale, precum concepte de *număr, ordine, funcţie.* „Teoria mulţimilor, scria Zermelo [1, p. 200], este acea ramură a matematicii a cărei activitate constă în a investiga în mod matematic conceptele fundamentale de *„număr"*, *„ordine"* și *„funcție"* în simplicitatea lor primitivă și prin aceasta să dezvolte fundamentele logice ale aritmeticii și analizei ; în consecință, teoria mulțimilor constituie o componentă indispensabilă a științei matematice".

Ideea centrală care ghidează construcția axiomatică a mulțimilor în sistemul fundațional al lui Zermelo este inspirată de definiția originală a mulțimii formulată de Cantor („mulțimea este comprehensiunea obiectelor bine distincte ale intuiției sau gândirii noastre într-un tot"). Zermelo face observația că această definiție necesită anumite restricții în folosirea ei și că până acum nu s-a găsit un substitut adecvat al ei. În acest caz este necesar să se formuleze un număr de principii care să garanteze validitatea teoriei mulțimilor. Fundamentele acestei discipline matematice, cu rol fundațional și în concepția lui Zermelo, trebuiau să evite antinomiile și să conserve teoria cantoriană a mulțimilor în ceea ce ea are valabil.

Teoria axiomatică abstractă a mulțimilor a lui Zermelo renunță la o definiție explicită a entității fundamentale — *mulțimea*. Conceptul de mulțime, în acest sistem fundațional, posedă proprietăți stipulate de axiomele care reglementează utilizarea lui. Kneebone [1, p. 288] observă că în expunerea axiomatică a lui Zermelo nu aflăm ce sunt mulțimile, care rămân nespecificate, ci cum sunt manipulate matematic. Ca și teoria russelliană a *limitării volumului*, axiomatizarea zermeliană nu admite ca mulțimi colecțiile foarte largi (mari) ca, de exemplu colecția tuturor lucrurilor, colecția tuturor ordinalelor. Mulțimile sunt tratate în acest sistem ca obiecte care satisfac condiții axiomatice explicit formulate, autorul lui având meritul de a fi abordat teoria mulțimilor în termenii metodei axiomatice.

Zermelo [1, p. 201] afirmă că teoria sa axiomatică a mulțimilor postulează un domeniu B de individuali pe care îi numește obiecte (obiecte abstracte). Enunțul de egalitate „a=b", în care a și b se referă la obiecte aparținând domeniului B, trebuie interpretat în sensul că simbolurile a și b designează același obiect. În concepția sa existența unui obiect este asertată numai dacă aparține domeniului B și, similar, o clasă K de obiecte există numai dacă domeniul B conține cel puțin un individual al acesteia.

Domeniul B este structurat de anumite relații fundamentale : $\in ab$ este o asemenea *relație fundamentală primitivă* și este interpretată „a este un element al lui b" sau, echivalent, „b conține pe a ca un element". Un obiect b care aparține domeniului B este numit *mulțime* numai dacă conține ca element un obiect a. Consecința acestui fapt se formulează că numai unele obiecte ale domeniului B sunt mulțimi, ceea ce ne relevă o anumită *specificitate* a *ontologiei* teoriei axiomatice a lui Zermelo, când este comparată cu alte variante axiomatice, la care ne vom referi mai departe. Dar admiterea obiectelor care nu sunt mulțimi, așa-numitele *elemente primitive* (Urelementen în terminologia lui Zermelo) complică, oarecum, logica subiacentă (underlying logic) a sistemului său axiomatic, căci de exemplu, *identitatea* nu poate fi definită în termenii relației de apartenență „$\in$“ și aceasta este numai una dintre sugestiile referitoare la semnificațiile ontologice și logice pe care le comportă domeniul B de obiecte abstracte postulat de Zermelo. Beth [1, p. 382], Wang, H. [1, p. 371] se referă la unele complicații ale sistemului formal zermelian datorate ontologiei sale subiacente care includea entități care nu sunt mulțimi. Odată ce existența elementelor primitive era admisă, *identitatea* nu mai putea fi definită în termenii lui „$\in$“, urmând să fie luată ca *simbol primitiv,* separat de cel al apartenenței, fapt stipulat de axioma : dacă două mulțimi x și y au aceleași elemente, atunci x = y. Atunci, inevitabil logica implicită a sistemului zermelian a presupus ca axiome și principiile primitive asupra identității. Quine [1, p. 122—123] a arătat că, fără să renunțăm la individuali, putem adopta procedee în redactarea sistemului formal care utilizează numai simbolul apartenenței. El consideră individualii un gen de mulțimi sau clase, iar atunci relația de apartenență „$\in$“ poate fi interpretată „este un membru al“ sau „este egal cu“, după cum al doilea obiect este sau nu o clasă.

Continuăm preliminariile la sistemul fundațional al lui Zermelo formulând câteva precizări care fixează mai exact relevanța ei în planul logic al acestui sistem fundațional. Domeniul B permite definirea submulțimii și a mulțimilor disjuncte, alți „locuitori“ ai lumii ontologice a construcției axiomatice a mulțimilor formulată de Zermelo. Astfel, dacă M și N sunt mulțimi și orice x, $x \in M$ implică $x \in N$, atunci M este o submulțime a lui N. Folosind notația lui Schröder din *Algebra der Logik,* Zermelo scrie acest lucru astfel: $M =\!\!\!\![\!= N$. Acum, M și N sunt mulțimi disjuncte dacă nu posedă nici un element în comun, sau dacă nici un element al lui M nu este un element al lui N.

Conceptul de *definitudine* sau de *proprietate definită* beneficiază de o atenție specială fixând și mai bine relevanța ontologiei zermeliene în planul sistemului formal. „O chestiune sau aserțiune C, scrie Zermelo, este definită dacă validitatea sau nevaliditatea ei poate fi decisă fără arbitrar pe baza relațiilor fundamentale ale domeniului cu ajutorul axiomelor și legilor logicii“, sau „o funcție propozițională“ sau un predicat C(x) în care variabila parcurge individualii clasei K, se zice că sunt definite, dacă sunt definite pentru orice individual x, luat separat, al clasei K.

Axiomele sistemului axiomatic al lui Zermelo redau „comportamentul“ relațiilor fundamentale ale domeniului B. Ele sunt cunoscute : axioma *extensionalității* a cărei formulare mai cunoscută este : orice mulțime este determinată de elementele ei ; axioma *mulțimilor elementare :* există o mulțime vidă sau nulă, notată $\emptyset$ care nu conține nici un element ; dacă *a* este un obiect care aparține domeniului, atunci există mulțimea notată {a} care conține pe *a* ca singurul element ; dacă *a* și *b* sunt două obiecte ale domeniului, atunci există o mulțime {a, b} care conține numai a și b ca elemente și nici un altul distinct de acestea. Este firească remarca următoare : conform *axiomei I*, mulțimile {a} și {a, b} sunt unic determinate ; există o singură mulțime vidă care este considerată submulțimea oricărei mulțimi. Se definește *partea proprie* a unei mulțimi : o submulțime care este diferită atât de mulțimea vidă cât și de mulțimea respectivă. Mulțimile $\emptyset$ și {a} nu au părți. Urmează axioma *separării*, cea mai originală a sistemului zermelian, enunțul ei angajând conceptul de *proprietate definită:* oricând funcția propozițională C(x) este definită pentru toate elementele unei mulțimi M, M posedă o submulțime notată M_C care conține acele elemente x ale lui M pentru care C(x) este adevărată (Zermelo [1, p. 202]). *Axioma separării* oferă un substitut pentru definiția generală a mulțimii, dar în același timp stipulează unele restricții ca : 1) mulțimile nu pot fi definite în mod independent prin invocarea acestei axiome, ci presupun mulțimi date din care vor fi *separate* ca submulțimi. Efectul fundațional este evident : nu mai sunt admise mulțimi de tipul „mulțimea tuturor mulțimilor", „mulțimea tuturor numerelor ordinale" și în acest mod sunt evitate *„paradoxurile ultrafinite"*. *Axioma separării* dă libertate în definirea mulțimilor, totuși, criteriul care definește trebuie să fie definit în termenii conceptului de *„proprietate definită"*, adică, să determinăm pe baza relațiilor fundamentale ale domeniului dacă criteriul are loc pentru fiecare x al mulțimii respective.

Se obține rezultatul că toate criteriile „definibile prin intermediul unui număr finit de cuvinte" cad. Aplicarea riguroasă a axiomei separării cere să controlăm dacă criteriul C(x) este bine definit.

Remarcă. Contextul $M_1 = [= M$ permite definirea submulțimii $M - M_1$, care este *complementara* lui M_1 în raport cu M, și care conține toate elementele lui M care nu aparțin lui M_1. În cazul în care $M_1 = M$ complementara ei este chiar mulțimea *vidă* sau *nulă*. Evident, complementara unei părți M_1 a lui M este o parte a lui M. Se definește *intersecția* a două mulțimi M și N formată din elementele lor comune și se notează [M, N]. Exsită cazurile : a) $M = N$, atunci $[M, N] = M$; b) $N = O$ sau M și N disjuncte și atunci $[M, N] = O$.

Următoarele axiome sunt : *axioma mulțimii putere* (oricărei mulțimi T îi corespunde o altă mulțime UT numită mulțimea putere a lui T, care conține ca elemente toate submulțimile lui T) ; *axioma mulțimii reuniune* (pentru orice mulțime T există o mulțime σT, numită reuniunea lui T, care conține ca elemente exact toate elementele lui T) ; *axioma alegerii :* dacă T este o mulțime ale cărei elemente sunt toate mulțimi diferite de O și sunt mutual disjuncte, reuniunea ei σT include cel puțin o submulțime S_1, care are un singur element în comun cu fiecare element al lui T. Zermelo [1, p. 204] afirmă că este totdeauna posibil să alegem un singur element din fiecare mulțime M, N, R, ..., a lui T și să combinăm elementele m, n, r astfel alese într-o mulțime S_1. Ultima axiomă, cea a *infinitului,* datorată lui Dedekind, garantează existența mulțimilor infinite. În domeniul B există o mulțime Z care satisface condițiile : a) o este un element al mulțimii Z ; b) dacă a este în Z atunci {a} este de asemenea în Z.

2.2. Ontologia sistemului Zermelo-Fraenkel

Fraenkel [1] postulează un *„domeniu fundamental"* de mulțimi ca *domeniu de discurs ;* este un *domeniu de individuali* ai sistemului său axiomatic. Din punct de vedere logic aduce următoarea modificare : admite simbolul „=" ca o constantă primitivă, cu statut analog celui al *predicatului de apartenență* „∈".

Deși Fraenkel [1] a stat în mod esențial la baza cărții scrise de Fraenkel, Bar-Hillel [2] se constată unele modificări. Astfel, acum nu se mai specifică referitor la domeniul variabilelor individuale decât că este o *clasă nevidă bine definită de obiecte,* un așa numit *„univers de discurs"*, neafirmându-se nimic despre cardinalitatea acestei clase, dacă este finită sau infinită. Deoarece simbolul predicatului *apartenență* este singurul specific (primitiv) în teorie, relevanța lui *ontologică* este evidențiată astfel de Fraenkel, Bar-Hillel [2, p. 28] : *„Domeniul* relației de apartenență, adică clasa acelor obiecte care sunt membrii unui obiect va consta din *elemente, contradomeniul* acestei relații, adică clasa acelor obiecte care conțin cel puțin un obiect ca membru va consta din mulțimi. Pentru un timp nimic nu va fi spus despre relația dintre *domeniu* și *contradomeniu".* Autorii conchid asupra ontologiei teoriei axiomatice a mulțimilor pe care o expun că se lasă deschisă chestiunea dacă această *ontologie* admite elemente care nu sunt mulțimi (individuali), sau *„urelemente"* în sensul introdus de Zermelo, sau mulțimi care nu sunt elemente.

Simbolul *egalității* comportă unele precizări având expresă încărcătură ontologică. Este introdus prin definiție. Un prim mod de a defini egalitatea este cel introdus de Leibniz. Conform legii stabilite de Leibniz cf. Tarski [1, p. 130] : „x = y, dacă și numai dacă x are orice proprietate pe care o are și y, și y are orice proprietate pe care o are și x". După Fraenkel și Bar-Hillel acest mod de a introduce egalitatea prin definiție, aparținând tradiției care se reclamă de la Leibniz, se formulează astfel : „două obiecte sunt egale dacă orice obiect (mulțime, clasă) care conține pe unul ca membru, conține și pe celălalt". Al doilea mod este acesta : două obiecte sunt egale dacă conțin aceiași membri și presupune exigența ontologică ca în *universul* de discurs să existe cel mult un individual (nemulțime), ceea ce pare inadecvat pentru sisteme al căror univers de discurs, sub interpretarea intenționată, conțin obiecte diferite care nu sunt mulțimi în sensul obișnuit și, deci, nu conțin membri. Quine [1, p. 122—123] arată că aceasta devine superfluă ; prin considerarea individualilor ca un fel de mulțimi sau clase se introduce egalitatea în acest al doilea sens (mod), fără să se renunțe la individuali în ontologia pe care o admitem. Procedeul este următorul : relația de apartenență „∈" poate fi simultan interpretată alternativ ca „este un membru al" sau „este egal cu", în funcție de natura celui de al doilea obiect al relației, adică, dacă acesta este o clasă sau nu.

Fraenkel va prefera, conform *ontologiei* admise, primul mod de definiție a egalității, considerând că nu este necesar să se lucreze cu individuali, eventual putându-se admite un singur individual. Obiectele vor fi tratate ca mulțimi, cu excepția unui singur obiect care are statutul de „memberless" necesar pentru unele scopuri de natură tehnică. Nu se admit *non-elemente,* toate obiectele sunt elemente. O asemenea ontologie introduce simplitate și eleganță prin simplificările formale pe care le permite. *„Câmpul"* care se definește, în viziunea autorilor Fraenkel și Bar-Hillel, ca reuniunea domeniului și contradomeniului coincide cu *„universul de discurs"* al teoriei.

Axiomele, care constituie ceea ce se numește *„teoria generală a mulțimilor",* se disting prin caracterul lor *„constructiv"* explicitat cum urmează : fiind asumată existența unei mulțimi sau a unor mulțimi, aceste axiome garantează („produc") existența unic determinată a altei (respectiv altor) mulțimi. Construirea în această manieră a acestor mulțimi evită apariția antinomiilor, întrucât acestor mulțimi le este specificată extensiunea prin referință la mulțimi admise prealabil, ceea ce exclude caracterul „ultra-comprehensiv", specific mulțimilor prezente în formulările paradoxurilor. Conform *„naturii constructive"* a axiomelor aparținând „teoriei generale a mulțimilor", mulțimile, a căror reuniune o formăm în virtutea axiomei următoare, nu sunt admise în mod „arbitrar", ci sunt membri ai unei mulțimi, a cărei existență a fost garantată prealabil.

Dacă asumăm existența mai multor mulțimi, în virtutea axiomelor, se construiesc mulțimi din ce în ce *„mai comprehensive",* dar aceste axiome nu învederează o libertate suficientă în formarea de noi mulțimi. Nu putem trece la *„mulțimi mai mult decât numărabile",* un șir de mulțimi numărabile fiind date, adică nu se garantează *existența „continuului".* Instrumentul principal, prin care Cantor a trecut la mulțimi cu cea mai înaltă cardinalitate, a fost *„multiplicarea transfinită"* (exponențierea). Rolul acesta revine în sistemul axiomatic Zermelo-Fraenkel *axiomei mulțimii-putere* : pentru orice mulțime *a* există mulțimea ai cărei membri sunt exact toate submulțimile lui *a*. Mulțimea submulțimilor lui a este numită *„mulțimea-putere"* și se notează *Ca* (unde *C* provine de la Cantor). Rolul acestei axiome atât în *teoria naivă* cât și în cea *„axiomatică"* este să formeze mulțimi suficient de „mari". Dar, după Fraenkel, ea rămâne un instrument limitat și nu asigură *„mulțimi comprehensive"* comparabile cu *mulțimea-putere a lui Cantor,* eficiența ei depinzând de posibilitatea obținerii submulțimilor unei mulțimi date, într-o manieră generală ; existența *submulțimilor proprii* infinite nu este garantată.

Însă examinarea mulțimilor produse prin aplicarea mulțimii-pereche, mulțimii-sumă, mulțimii-putere unor mulțimi asumate relevă faptul că extensiunea mulțimilor obținute este *«mai largă».* Este nevoie de stipularea unor *operații „restrictive",* adică sfera mulțimilor *construite* să nu depăşească pe cea a mulţimilor figurând în asumpţiile axiomelor. În alţi termeni, să se producă prin aplicarea axiomelor numai «submulţimi». În acest scop, în sistemul Z.F. se introduce următoarea axiomă, numită *axioma submulţimilor,* al cărei enunţ este următorul : pentru orice mulţime *a* şi orice predicat monadic *B* care este definit pentru toţi membrii lui a, există mulţimea care conţine exact toţi acei membri *x* ai lui *a* care satisfac predicatul *B*. Această axiomă este cea mai *specifică* sistemului Zermelo-Fraenkel. Conceptul de *„predicat definit“* afectează *„acurateţea“ axiomatică* a acestei axiome. Simpla aplicare a acestui concept nu satisface exigenţele teoriei formal-educative, deoarece, aşa cum afirmă Fraenkel şi Bar-Hillel, nu sunt evitate *„antinomiile semantice“*. Axioma submulţimilor are o *natură specială,* căci, spre deosebire de celelalte axiome, aceasta este o *«schemă-axiomă»* care produce, în funcţie de predicatele introduse, o infinitate de axiome singulare şi de aici caracteristica sistemului lui Zermelo-Fraenkel de a nu fi *finitizabil,* adică de a nu conţine un număr finit de axiome ; sistemele care posedă caracteristici impredicative nu pot fi finitizabile. Spre deosebire de axiomele *mulţimii-pereche, mulţimii-sumă, mulţimii-putere* şi axioma *submulţimilor,* axioma *alegerii,* (dacă t este o mulţime disjunctă care nu conţine mulţimea nulă, produsul cartezian Bt este diferit de mulţimea nulă ; deci, printre submulţimile lui Ut, există cel puţin o submulţime a cărei intersecţie cu fiecare membru al mulţimii t formează o mulţime-unitate ; orice mulţime u a lui Ut se numeşte mulţimea aleasă a lui t), nu mai satisface cerinţa de a fi *„constructivă“*, deoarece mulţimea construită în virtutea aplicării acestei axiome *nu este unic determinată* de datele ei, adică de mulţimea t care apare în asumpţia axiomei. S-a spus că această axiomă comportă un *„caracter existenţial“*. Aşa cum scriu Fraenkel şi Bar-Hillel [2, p. 55] această axiomă nu afirmă posibilitatea construirii unei *„mulţimi alese“*, adică nu oferă o regulă prin care în fiecare membru τ al lui t se poate specifica un anumit membru. Acest rol ar putea fi realizat prin *„axioma submulţimilor“*, care separă submulţimea respectivă a lui Ut, axioma alegerii dovedindu-se superfluă. Axioma alegerii garantează caracterul nevid al produsului cartezian *Bt* în sistemul Z, lucru asigurat, de altfel, şi fără axiomă. În fapt, tot ceea ce ne spune *„axioma alegerii“* este că, fiind satisfăcute asumpţiile prezente în formularea axiomei, printre submulţimile lui Ut vor fi prezente şi submulţimi caracterizate prin faptul că posedă un singur membru în comun cu fiecare membru al lui t.

Axiomele *infinitului* şi *substituţiei* (aceasta din urmă enunţându-se : dacă *domeniul* unei funcţii singular evaluată este o mulţime, *contradomeniul* ei este, de asemenea, o mulţime), extind sistemul prin producerea de *„mulţimi comprehensive“*. Pare normal să se formuleze restricţii în această privinţă. Problemele care au sugerat restricţii privesc *numere inaccesibile, mulţimi extraordinare* şi *ipoteza generalizată a continuului.* În context a fost formulată *axioma fundării* sau *restricţiei :* orice mulţime nevidă S conţine un element t astfel că S şi t nu au în comun nici un element. Adică, nu există mulţimi s $\neq$ o astfel că fiecare element al lui S are un element care este, de asemenea, conținut în S. Deci, orice șir descrescător în sensul anterior precizat va fi totdeauna *„finit“*, sfârșind într-un *constituent primar*, care în sistemul Z este în mod necesar mulțimea vidă. Nici o mulțime S nu se conține ca element, deoarece altfel dacă S ∈ S, atunci {S} contrazice axioma fundării.

Și, o ultimă *observație. Problema (ipoteza) generalizată a continuului* vizează *„limitarea“* sau *„extinderea maximală“* a domeniului teoriei mulțimilor.

2.3. Remarci asupra ontologiei sistemului formal al lui von Neumann

Sistemul Zermelo-Fraenkel *„restituie“ formal* numai o parte din domeniul mulțimilor *„create“ (produse)* în teoria naivă a lui Cantor. Cum se consideră că mulțimile *supra-comprehensive* generează *„antinomii“*, se poate constata că sistemul Zermelo-Fraenkel se relevă ca o construcție axiomatică-formală *„prudentă“* în această privință, aceste entități neavând contrapartea lor axiomatică. Deși limitativ, acest sistem s-a dovedit suficient pentru scopurile legitime ale teoriei mulțimilor. Experiența (practica) matematică a pus în evidență, totuși, caracterul, oarecum, inofensiv al acestor *entități „suspecte“ (mulțimile „ultra-largi“)* ceea ce ne-a relevat separarea, întrucâtva, artificială : *mulțimi admise* și *mulțimi „care nu sunt admise“.*

Ideea originală a lui von Neumann a fost că nu pur și simplu existența *mulțimilor „ultra-largi“* generează antinomiile, ci considerarea lor ca membri ai altor mulțimi. Von Neumann și-a îndreptat atenția asupra *axiomei comprehensiunii* (axioma submulțimilor) și a propus omiterea cerinței, stipulate în formularea axiomei, ca mulțimea corespunzătoare predicatului respectiv să fie o submulțime a unei mulțimi prealabil date. Cu aceasta, von Neumann consideră că în domeniul mulțimilor pot fi admise *mulțimi supra-comprehensive*, cum sunt *clasa universală* notată V, care corespunde predicatului „x = x“ și *complementara* V—S a unei entități date S. Admiterea în ontologie a unor asemenea entități *ultra-largi* presupune formularea unor exigențe care reglementează comportarea lor față de relația fundamentală a *apartenenței :* „∈“. Mai explicit, acestor mulțimi *ultra-largi* le este refuzat statutul „de a fi elemente“. Von Neumann formulează, în context, o axiomă, cum vom vedea, prin care toate obiectele aparținând *domeniului* de entități, care sunt de aceeași *„dimensiune“* cu clasa universală, nu pot fi membri ai altor obiecte și vor fi numite *„clase“*. După cum am văzut, Fraenkel a postulat un *„domeniu“* care include un singur tip de entități — *mulțimile ;* von Neumann introduce în *domeniul* postulat pentru sistemul său *două tipuri* de entități : *mulțimi* și *clase*, o mulțime fiind o clasă, însă există clase care nu sunt mulțimi (în terminologia lui Quine [2] numite *clase ultime*. Este interesant de notat că G. Cantor simțea nevoia *distincției «mulțime-clasă»*. Într-o scrisoare către Dedekind din 1899 ei discută despre *„sisteme inconsistente"* care ar putea fi interpretate ca având semnificația de ceea ce înțelegem azi prin *clase*. Există, deci, o clasă universală, cum este «*clasa tuturor mulțimilor*» sau «clasa tuturor ordinalelor». Deoarece clasa „tuturor mulțimilor" sau clasa „tuturor ordinalelor" sunt *clase ultime*, în sistemul lui von Neumann sunt evitate paradoxele lui Russell și Burali-Forti. Terminologia lui von Neumann consacră termenul specific de *„element"* : obiectele care pot fi membri ai unei mulțimi sau clase se numesc *elemente*. Termenul *element* corespunde termenului *mulțime* din limbajul lui Bernays. Este evident, atunci că toate mulțimile care *„populează"* domeniul sistemului ZF (Zermelo-Fraenkel) sunt elemente. Axioma submulțimilor poate atunci să fie adaptată sistemului în vederea garantării existenței absolute a claselor și înlocuită printr-o axiomă care se conformează unor restricții logico-matematice, relevante pentru specificul ontologiei subiacente sistemului lui von Neumann : cuantificatorii din condiția care definește clasa vor fi restricționați, cum observă Fraenkel și Bar-Hillel [2, p. 98], la variabile pentru elemente.

John von Neumann *„stratifică"* entitățile ontologiei sistemului său, căci admite existența a două domenii : *argumente* (obiecte I) și *funcții* (obiecte II) care nu sunt identice, însă se suprapun, căci exista funcții care devin argumente, adică «obiecte II—I» care aparțin ambelor domenii.

Pentru că aceste remarci sunt consacrate conexiunilor dintre *ontologie* și *structura formală* a sistemului lui von Neumann, vom adăuga în acest context că celebra *„axiomă IV, 2"*, considerată ca fiind, poate, *cel mai puternic principiu din literatura sistemelor axiomatice*, este direct relevantă pentru genul de ontologie descris, și care este *„populată"* cu *entități set-teoretice „supracomprehensive"*. În fapt, această axiomă nu admite ca funcții care definesc *„totalități ultra-largi"* să devină argumente, adică «Obiecte II—I» la nivel formal. Enunțul axiomei IV, 2 este : o funcție *a* nu poate să devină o funcție-argument dacă și numai dacă există o funcție *b* (evident, prezentă în domeniul funcțiilor postulate de teorie) astfel că, pentru orice argument x există un argument y pentru care [a y] $\neq$ A și [b y] $=$ x. Axioma exprimă condiția pentru ca b să producă o corespondență în întregul univers al argumentelor a acelor argumente astfel că [a y] $\neq$ A adică a domeniului *a* dacă, în realitate, *a* este un domeniu.

Existența mulțimilor infinite, a «*mulțimii-reuniune*» și a «*mulțimii-putere*», poate fi derivată din axiomele aparținând grupului V din axiomatizarea lui von Neumann [1], în baza ideii că o mulțime poate fi definită ca un caz special de funcție : un *„obiect-II"* *a* este numit o clasă dacă [a, x] este totdeauna egal cu A sau B ; un *„obiect II—I"* care satisface această condiție este numit o *mulțime*, adică mulțimile sunt acele entități care sunt *nu prea mari* și *clasele* sunt toate totalitățile indiferent de mărimea lor. O clasă poate fi un argument, adică un „obiect II—I" dacă și numai dacă este o mulțime.

În sistemul lui von Neumann sunt admise mulțimi (funcții) care sunt *„prea mari"*, adică acele „obiecte II" care nu sunt obiecte II—I (von Neumann [1, p. 401]. În concepția lui von Neumann ele nu formează obiectul unei prohibiții complete, ci numai au fost „declarate incapabile de a fi argumente“ (adică nu sunt „obiectul I“ și aceasta este o condiție suficientă să evite antinomiile). J. von Neumann continuă : „În același timp, existența acelor mulțimi este necesară pentru anumite moduri de inferență“.

2.4. Supoziții ontologice ale sistemelor lui P. Bernays și K. Gödel

Sistemul lui P. Bernays reprezintă o variantă a sistemului lui von Neumann. Ideea fundamentală subiacentă sistemului lui von Neumann — admiterea existenței *mulțimilor supracomprehensive (clasele)* — însoțită de refuzul statutului de *elemente* pentru ele, este menținută în sistemul lui Bernays. În acest sens, ambele sisteme — von Neumann și Bernays — postulează domenii mai extensive decât cel al sistemului Zermelo-Fraenkel și rețin mai multe caracteristici ale sistemului Z. Consecința este elaborarea unei structuri mai simple și mai adecvate.

În sistemul lui Bernays apar două feluri de entități (obiecte) — *mulțimi* și *clase* — care „stratifică“ domeniul, ceea ce formal va conduce la un *stil „bisortat“* al utilizării variabilelor, logica subiacentă fiind înzestrată cu două relații primitive interpretate ca : *apartenență la o mulțime :* $x \in a$, care se citește „x aparține mulțimii a“ și *apartenența la o clasă :* $x \eta A$, citită „x aparține clasei A“. Deci, simbolurile „$\in$“ și „η“ desemnează apartenența la mulțime, respectiv la clasă, iar literele mici denotează mulțimi și cele mari denotează clase. Fiind date două mulțimi a, b are sens $a \in b$ sau $a \in A$ dar nu $A \in A$, $A \in A$. Clasele nu sunt membri posibili ai unor mulțimi, sau ai altor clase și în consecință formulele de mai sus nu sunt bine formate.

Mulțimile și clasele sunt entități diferite, de aceea nu este permisă nici o analogie cu „obiectele II—I“ din limbajul formal al lui von Neumann. Și, totuși, în sistemul lui Bernays există conceptul de *„reprezentabilitate“* care reproduce, oarecum, *„obiectul II—I“* din axiomatizarea lui von Neuman, concept care se referă la relația dintre clase și mulțimi. Neformal, se spune că o mulțime „reprezintă“ o clasă dacă ambele au aceleași elemente. Definiția formală a reprezentabilității (cf. Bernays [1, p. 63]) este următoarea :

$$Rp(\{x \mid x \in a\}, a)$$

$$Rp(A, a) \ \& \ Rp(A, b) \rightarrow a = b$$

Intuitiv, orice mulțime reprezintă o clasă și o clasă poate fi reprezentată numai de o mulțime. Nu rezultă de aici că orice clasă este reprezentată de o mulțime, căci există și *clase „nereprezentate“*, în special mulțimea V *(clasa universală).* Când o mulțime și o clasă au exact aceiași membri, spunem că clasa este reprezentată de mulțime. O clasă și o mulțime care o reprezintă se comportă în mare măsură ca „obiectul II—I“.

Ontologia sistemului lui Bernays, relevată de cele două realții primitive denotate prin $\in$ și η, argumentele fiind restricționate la mulțimi, *nu conține individuali* și în această privință sunt evidente similitudinele cu sistemele ZF și von Neumann, dar și contraste cu concepția ontologică a lui Zermelo 1908.

Construcția axiomatică a teoriei mulțimilor presupune în mod natural axiomele *egalității* și *extensionalității*, a căror prezență în formularea lui Bernays marchează unele diferențe față de sistemul axiomatic al lui Zermelo, relevându-ne din punct de vedere *ontologic* o anumită particularitate a *„universului de discurs“*: mulțimile sunt tratate ca individuali care, ca și colecțiile concrete, sunt determinate prin elementele lor. Este exclusă, prin axioma extensionalității, existența *Urelementelor* în sensul introdus de Zermelo, adică a individualilor diferiți care nu au elemente, axioma în cauză asumând că toate elementele în sistem sunt mulțimi. Programul lui Bernays anunță încorporarea întregii matematici clasice în sistemul teoriei mulțimilor, sistemul lui reprezentând metodologic o extindere a metodei lui Dedekind de a introduce numerele reale — care au rolul de elemente în analiză, ca mulțimi. Așadar, este asimilată procedura lui Dedekind într-o viziune care consideră că *toate obiectele matematice sunt mulțimi*, iar din punct de vedere formal se obțin unele simplificări dezirabile.

În concepția lui P. Bernays se face *distincția* între *clase* și *mulțimi*. Distincția nu este un artificiu de limbaj, ci evocă o situație logică și ontologică : o mulțime este o colecție, adică un obiect matematic, în timp ce o clasă corespunde extensiunii unui predicat și are, în raport cu mulțimea, statutul de *„obiect ideal“* (concept semnificativ în gândirea lui Hilbert !). Din această perspectivă, se sugerează că universul claselor nu constituie un domeniu fixat de individuali ci este un univers deschis, regulile, formarea claselor fiind considerate ca stabilind un „minimum de procese admise pentru formarea claselor“. Distinct de demeniul fixat al mulțimilor, există un univers deschis al claselor și în consecință vom avea două limbaje corespunzătoare.

În ceea ce privește sistemul axiomatic al mulțimilor construit de Gödel [1] remarcăm ca o *trăsătură caracteristică identificarea oricărei mulțimi* cu *clasa reprezentată* de această mulțime, relație care în sistemul lui Bernays era reținută în conceptul de reprezentabilitate. El va reține numai una din cele două relații primitive fundamentale „$\in$“ *(apartenența la mulțime)* și „η“ (apartenența la clasă), anume pe prima. Similitudinile cu sistemul Zermelo-Fraenkel sunt evidente.

2.5. Remaci asupra ontologiei obiectelor abstracte

Ontologia obiectelor abstracte trimite la mai vechea *problemă a universaliilor* cu o bogată și lungă tradiție, loc al confruntării unor importante poziții filosofice ca *platonismul, nominalismul, conceptua-*

lismul, ca și mai recentelor variante moderne specifice ale acestora, ne referim la *logicism, formalism, constructivism*, acesta din urmă în varianta sa mai radicală ca *intuiționism*. *«Problema în cauză»* poate fi abordată sub forma unui set de subprobleme care sporesc *analiticitatea* abordării întreprinse: există universalii? Universaliile există numai în mintea noastră? Sau există (și) în realitate? Și dacă au o existență independentă, universaliile există în și prin lucruri particulare, sau au o existență separată? După opinia lui W. Stegmüller [1] nici azi nu dispunem de un răspuns satisfăcător la întrebarea dacă dincolo de lucrurile lumii reale trebuie să acceptăm obiecte de un fel total diferit de primele, de exemplu *forme ideale, posibilități nerealizate* și *valori*. Empiriștii sunt adversarii intransigenți ai concepției că există realmente un asemenea sort de entități ca obiectele abstracte, și invocând *«briciul lui Occam»* ei declară entitățile de genul *ideilor platoniciene* ca superflue. Dar renunțarea la obiecte abstracte vine imediat în contradicție cu legitimitatea unui gen de ontologie asumat de o venerabilă știință, am numit matematica, „populată" abundent cu forme ideale, obiecte abstracte ca mulțimi, clase, relații, numere, funcții, categorii, morfisme, transformări naturale etc. Nominaliștii consideră filosofic confuză referirea la obiecte abstracte, metafizice, în timp ce adepții lui Platon iau în serios problema existenței obiectelor abstracte, susținând teza că există o conexiune directă între problema universaliilor și cea a *expresiilor-predicat generale*. Platonismul operează cu o asemenea presupoziție, cel puțin implicit, care conține ideea că predicatele sunt nume a *ceva* (de exemplu predicatul *roșu* nu vizează în mod direct obiecte concrete ci abstracte), în timp ce nominaliștii resping această teză, atribuind predicatelor generale numai un rol *sincategorematic*, construindu-le ca propoziții deschise (x este roșu, aici x fiind variabilă), și care în concepția lor nu au semnificație de sine stătătoare, dar achiziționează semnificații dacă asupra lor se efectuează operații ca înlocuirea variabilei cu numele unui obiect concret individual, de exemplu punând *acoperișul* în locul lui x obținem „acoperișul este roșu". După nominaliști viciul platonismului constă în faptul că atribuie predicatelor o semnificație proprie, le consideră nume a ceva, la limită, nume ale entităților abstracte, făcând confuzie între *a avea semnificație* și *a fi nume a ceva*, adică produc e o asimilare a *semnificației complete* cu *funcția denumirii* în contexte spațio-temporale 4-dimensionale. Restricția ontologică nominalistă cere ca *variabila legată* să parcurgă numai obiecte concrete. Stegmüller [1] spune că de îndată ce variabilele legate parcurg obiecte abstracte de genul *clase, proprietăți, relații, numere, propoziții* etc., depășim frontiera nominalismului și ne aflăm pe teritoriul platonismului, sistemele platoniste fiind mai *«bogate»*, fiind un fel de *„expansiune"* a celor nominaliste care sunt mai *„sărace"*. Pentru detalii ale problemei vezi și lucrarea noastră M. Țurlea [1, p. 152 și următ.]. Vrem doar să conchidem că poziția filosofică care consideră justificată legitimitatea acestui tip de obiecte, este vorba de obiecte abstracte, a fost numită *platonism*; susținătorii acestei concepții pretind nu atât o fidelitate exhaustivă față de doctrina lui Platon cât o valorificare a descoperirii platoniciene a obiectelor abstracte ; distingem *platonism extensional* (extensiunea predicatului fiind relevantă) și *platonism intensional* (intensiunea predicatului este vizată), în legătură cu care Russell a formulat un rezultat ontologic șocant : numărul de obiecte ideale admise de platonismul extensional este mai mic decât numărul obiectelor ideale acceptate de platonismul intensional.

Relevanța ontologică a variabilelor legate l-a determinat pe Quine s-o exprime sintetic în cunoscutul său principiu-slogan : „a fi înseamnă a fi valoare a unei variabile legate".

Studiul lui Russel [1] i-a prileuit lui Quine [1] o reexaminare a problemelor *semnificației* și *referinței* în conexiune cu relevanța lor pentru *ontologie*. Dacă Russell analizează *expresiile care denotează* în termenii *teoriei cuantificării*, Quine va folosi teoria cuantificării pentru formularea (și chiar deciderea) chestiunilor ontologice ale *denotării*. În context Quine explică, analizează celebra sa formulă semantică : *„a fi înseamnă a fi valoare a unei variabile"* (devenit un principiu, de fapt criteriu-slogan al ontologiei quineene) și stăruie asupra aspectului că dacă acest criteriu nu oferă „o bază relevantă pentru a putea să decidem între ontologii *„rivale"*, se dovedește, oricum, fructuos privind identificarea *„angajamentelor ontologice"* ale unei teorii date, ale unui limbaj dat".

Deoarece lucrări importante în problemă ale lui B. Russell au constituit *puncte de referință* în literatura consacrată ontologiei entităților abstracte, facem o succintă trecere în revistă a celor mai semnificative momente-idei ale evoluției gândirii filosofului și logicianului englez asupra subiectului. Dar, deoarece primul gânditor modern care a elaborat o concepție actuală asupra existenței entităților abstracte, și negreșit l-a influențat pe Russell, este Frege (ambii reprezentând *logicismul* ca variantă modernă a *platonismului)* vom enunța câteva aserțiuni și despre ultimul autor care are și prioritate cronologică ; în rest ne mulțumim să trimitem pentru dezvoltări asupra problemei la cartea noastră (M. Țurlea [2, p. 76—91]).

Obiectivitatea, [a exista independent de spirit (subiect), alteori caracterizată ca a fi accesibil mai multor subiecți gânditori], este conceptul-cheie pentru ontologia platoniciană ; primul este *sensul tare* al obiectivității și este propriu platonismului, al doilea este împărtășit de Frege și deci gânditorul german nu este un platonician, cel puțin în sensul tare de platonism ontologic, la care face referire P. Bernays [2] ; dar poate fi un platonician în sensul slab, încât s-a spus că fiind raționalist, ca și Leibniz, a admis un fel de realism moderat. Obiectivitatea fregeană este independentă de senzație, sau orice altă reprezentare psihică (aici este o consecință a anti-psihologismului său), dar dependentă de gândire, rațiune, o depășire a sensibilității, care însă nu se realizează nici măcar cu ajutorul *cadrului transcedental kantian,* ce ar întemeia cel mult *„consensul general uman"* dar nu și obiectivitatea adevărului. Deși pleacă de la distincția kantiană *„obiectiv-real"*, el nu aderă la constructivismul kantian, care în virtutea intervenției constructoare a elementului a priori „edifică“ domeniul *„obiectivului“*, dar mai ales refuză *„excesul ontologic“* relevat de *„domeniul inteligibil transcendent“* marcant în platonism. Ontologia fregeană postulează un *„domeniu obiectiv-nereal“* în care *„localizează“* și *entitățile aritmeticii — numerele —* entități *obiective* dar *nu* și reale, adică *aspațiale* și *atemporale*. Numerele nu sunt atribuite nemijlocit *obiectelor* ci conceptelor, conceptul fiind ceva obiectiv. Ontologia fregeană asumă ca dominantă diviziunea *„obiectivului nereal“* în obiecte și concepte, apreciate drept substitute mai adecvate pentru relatele distincției tradiționale „subiect-predicat“. Astfel în Frege [1] există formulări relevante în acest sens : „...conceptul este pentru mine predicat posibil al unui conținut judicabil singular și obiectul un subiect posibil al acestuia. Obiectul și conceptul (ca și subiectul și predicatul) sunt de același ordin aparținând sferei obiective ca conținut judicabil“. S-a spus că primatul obiectului cedează în favoarea celui al conceptului conducând la *realismul ipostaziant* cu consecințe dezagreabile între care și absența unei ierarhii a obiectelor, a nivelelor de realitate ale *„universului obiectiv nereal“*. Prin scindarea ontologiei lui Frege în funcții și obiecte, după 1890 gânditorul german tratează conceptele și relațiile ca fiind *cazuri speciale* ale funcțiilor, acestea interpretate ca referințe ale expresiilor nesaturate ; expansiunea *ontologică* fregeană produsă prin introducerea funcțiilor a fost însoțită de rezerva gânditorului german față de ierarhia infinită de trepte în domeniu funcțiilor, restricționată la treapta trei. Însuși Frege scrie : „...Noi vom nota aici că funcțiile de nivelul doi pot fi reprezentate într-un anumit sens prin funcția de prima treaptă“. În mod esențial universul fregean ontologic este scindat în *funcții* și *obiecte* (“obiect este tot ce nu este funcție“), două clase de entități mutual-exclusive ; în sfera obiectelor, Frege a introdus numere, valori de adevăr și parcursuri valorice, un aspect ce face ontologia fregeană mai bogată și mai complexă decât cea tradițională, căci în acest univers al obiectelor poate fi admis orice, inclusiv persoane umane.

În construcția logicistă fregeană o entitate direct invocată este *clasa*, alături de *număr*. Dacă conceptele, ca entități ontologice, introduceau o *structură* în lumea lucrurilor, moduri de *„organizare“* sau *„aranjare“* ale aceleiași *„grămezi“*, clasele sunt moduri diferite în care ne este dată o *„grămadă“* ; clasele sunt diferite de (și identice cu) *grămezile* lor, căci, clasele vizând aceeași grămadă sunt *fundamentaliter* identice deși *formaliter* diferite. Fără expunerea detaliilor care mijlocesc în argumente concluzia vom enunța-o numai pe aceasta, și anume Frege a fost nevoit să declare clasele drept entități abstracte, deoarece a identificat numerele cu clasele, altfel s-ar fi confruntat cu dificultăți serioase în *construcția logicistă* a numărului. Dacă *„clasa“* nu este luată ca entitate abstractă, definiția fregeană a numărului ca *„clase de clase“* sau *„clase de concepte“*, făcând din număr o *pluralitate*, eșuează. După cum se știe neclaritatea conceptului de clasă, faptul că axioma claselor nu are o bază intuitiv clară a condus, mai ales prin folosirea fără restricții a conceptului de clasă, la apariția paradoxului, în sistemul fregean, pe care l-a descoperit B. Russell. Frege a schițat o teorie a tipurilor numai pentru *funcții propoziționale*, pe care, însă, n-a extins-o la *clase*; Russell va reține aceste aspecte în *„teoria fără clase"*, unde contestă legitimitatea existenței obiective a claselor, ceea ce în ultimă analiză revine la identificarea unor implicații platoniciene în concepția fregeană. Reproșul care a fost adus concepției lui Frege este că nu a făcut o distincție clară între *obiecte materiale* care posedă realitate și *obiecte ideale* ca numerele, punctele geometrice, valorile de adevăr, extensiunile predicatelor, considerate ca aparținând aceluiași domeniu. *Ontologia fregeană* a fost numită *„al treilea domeniu"*, domeniul *„obiectivului nereal"*, domeniu al *sensului* sau *referinței*, ce are un *statut „sui generis"*, fiind un domeniu intermediar între *„existența realității"* și *„existența adevărului"*, asemănător domeniului valorilor a lui Rikert, de care se îndepărtează, deoarece adaugă *domeniului referinței* și *domeniul cuvântului* și *propoziției*, notează C. Thiel [1], prilej cu care constatăm o confuzie de planuri de organizare: *ontologic*-subiectiv-real; obiectiv-nereal; obiectiv-real; *semantic*-semn; sens; referință. *Imixtiunea ontologică* în doctrina sensului și referinței este nelegitimă în virtutea necoincidenței celor două grupuri — ontologic și semantic, cel mai evident fiind că sfera *obiectivului-nereal* nu coincide cu sfera sensului. Identificarea fregeană a celor două domenii l-a condus pe logicianul german la un fel de *„ontologizarea semanticii"*. Paragraful *Ontologie formală semantică și construcție logistă* (din M. Țurlea [2, p. 91]) îl încheiam astfel: „Eliberarea semanticii de ontologie (de cerința ca *sensul* să aparțină unor „tabele ontologice" de entități) favorizează concepția mai fecundă după care semantica trebuie să rămână un instrument conceptual indispensabil analizelor logico-lingvistice, admirabil ilustrată în Frege [2].

Se știe că B. Russell a fost influențat de gândirea lui Frege și de altfel amândoi au fost considerați fondatori ai logicismului contemporan: Russell [2] a propus o *ontologie dualistă*, centrată pe *„fapte"* și alcătuită din *particulari* și *universali*, o atitudine filosofică împărtășită încă din 1903 (Russell [3]). Remarcăm *prioritatea ontologică acordată „domeniului de fapte"*; în raport cu teoria care îl vizează, domeniul de fapte suscită trei interpretări: după cea *subiectivistă* prin *fapte* se înțeleg *date senzoriale, construcții*, după cea *obiectivistă* faptele sunt considerate obiecte fizice; iar, după cea *kantiană* se concede independență de condițiile logice ale teoriei privind *existența*, dar nu și *structura* logică a domeniului de fapte vizat de teorie. Pe fundalul acestor trei variante interpretative emerge *„modelul interanalist"*, supranumit și fichtean, propus de H. Putnam [1] după care atât *existența* cât și *structura „domeniului de fapte"* sunt determinate de condițiile logice ale teoriei.

Știința are ca ideal construcția de teorii despre domenii de fapte, acestea din urmă „asigurând" *existența* urmează că *„problema adevărului"* este pusă cel puțin implicit; teoriile (entități teoretico-lingvistice) poartă asupra unor *„domenii de referință“* decupate din *„universul“ faptelor,* context în care *„referința“* are pe lângă înțelesul obișnuit și pe cel de *relație de designare* între constructe(le) conceptuale ale teoriei și itemi(i) ai domeniului ; este interesant de menționat că avem recuperat „conceptul de *adevăr*“ cu rol important în analizele filosofice ale teoriilor științifice. Russell [4] respinge soluția *filosofiei criticiste* și propune *realismul* drept veritabilă alternativă, *realismul* versus *transcendetalism.* Acum el va spune despre *judecăților apriori* că exprimă cunoștiințe despre universalii, considerate de filosoful englez că există într-o lume distinctă atât de cea *fizică* cât și de cea *mentală,* dar care interacționează cu *particularii.* Consecința raționamentului russellian este evidentă : admiterea unei *ontologii* a *particularilor* și *universaliilor* (Russell [5, p. 105—124]). În Russell [2, p. 184] scrie : „Lumea nu e compusă doar din *particulari* ci și din lucruri pe care le numesc *fapte :* ele sunt acel tip de lucruri pe care le exprimăm într-o propoziție, iar aceste fapte sunt părți reale“. Să observăm că faptele, ca un sort de „compositum ontologic“, conțin universali, căci Russell spune că în orice propoziție apare cel puțin un termen care reprezintă un *universal,* dar pe această cale el propune o *inferență de la structura limbii la structura lumii.* Această *„inferență“* pare întrucâtva *„obscură“* fiind confruntată cu dificultăți subiacente unor probleme (întrebări) mai specifice ce ar putea volatiliza vaguitatea misterioasei inferențe ; întrebările care subzistă sunt : este posibilă o asemenea inferență în orice limbaj ? Această inferență, în eventualitatea că este posibilă, acoperă întrebări ca : se poate infera de la structura limbajului numai la existența sau și structura referenților acelui limbaj ? B. Russell [1], în virtutea *„principiului paralelismului olgico-gramatical“,* spune că orice cuvânt este un nume pentru un obiect, chiar orice semn este nume a ceva, admite o *ontologie bogată,* calificată meinongiană, dar fregeană după Griffith, D. A. Atunci când un cuvânt este un nume propriu, referința lui este un concept. *„Populația“* universului ontologic russellian este abundentă și diversă, căci gânditorul britanic acceptă referenți pentru clase, pentru descripții definite, pentru constante logice. În viziunea lui Russell, în spatele existenței particularilor se află și se ascund numere, relații, spații cvadrimensionale, zei homerici, entități legitimate ontologic în virtutea aceluiași paralelism logico-gramatical : „dacă ele nu ar fi entități de nici un fel, nu am putea face nici o propoziție despre ele“. (Russell [3, p. 427]).

Ulterior, conflictul deja apărut între paralelismul logico-gramatical și principiul simplicității al lui Occam va fi rezolvat în favoarea acestuia din urmă începând chiar cu Russell [1] când expune celebra sa *„teorie a descripțiilor“ : Teoria descripțiilor* distinge între forma gramaticală și forma logică și anunță o descoperire importantă după L. Wittgenstein și anume că nu există *paralelism* între logică și gramatică ; acum Russell admite inferența de la logică la existență sub presupoziția introducerii unui limbaj canonic, ideal care să posede o *structură izomorfă* celei a lumii. În concepția lui Russell, *„teoria descripțiilor“* este răspunsul sau punctul de vedere cu privire la entitățile admisibile și devine instrumentul prin care expresii ca „regele actual al Franței", „muntele de aur" sunt traduse în *expresii predicative*. Cum observă M. S. Gram [1] entități considerate a fi *particulari* se dovedesc a fi în realitate *proprietăți*, concluzia fiind că există expresii ce par să refere la un gen de entități, dar în fapt ele se referă la un alt gen de entități. Existența nu este un predicat, adică o proprietate a indivizilor, enunțurile de existență nu spun nimic despre obiecte individuale și afirmă (ceva) despre alt gen de entități : atribute, proprietăți, concepte, funcții propoziționale. Teoria descripțiilor devine o *„tehnică-instrument"* de edificarea ontologiei, ceea ce ar *„induce"* ideea despre o conexiune suficient de directă între două teorii : cea a existenței și cea a descripțiilor, o teză ce nu pare să fie acceptată de autori ca P. F. Strawson care susține chiar independența lor.

Russell [6] elaborează (legat și de inferența de la structura limbajului canonic la existența referenților) un program privind eliminarea numelor proprii din acest limbaj în vederea obținerii echivalente a eliminării particularilor din ontologie, program diferit de cel pe care îl va elabora Quine, care va trata orice nume propriu ca o descripție, așa cum se observă în cazul exemplului celebru „Pegas zboară" și care devine : există un și numai un lucru care pegasizează și acel lucru zboară. Procedura quineană evită, cum ușor se constată, angajamentul logic cu privire la lucruri ca Pegas. Russell [7, p. 165] oferă altă analiză : „Acesta este roșu" devine „Roșul e coprezent cu centralitatea", ceea ce înseamnă o instanțiere simultană a celor două proprietăți, procedură care în interpretarea lui Quine presupune angajamentul ontologic față de proprietăți. Unde Quine vede angajamente ontologice (cum ar fi cazul unei expresii ca (Ex) F(x) în privința valorilor parcurse de x, Russell [8] consideră că funcția analizei respective este de a reduce numărul cuvintelorc are au semnificația expresă de a indica obiectul : folosirea cuantificărilor elimină și nu introduce anumite entități în ontologie.

După 1903 (când publică *Principles of Mathematics)* evoluția concepției lui Russell este marcată de efortul de a reinterpreta statutul *„descripțiilor definite"*, al numerelor și claselor. Dacă în 1903 acordă *realitate platonică* claselor, pe care le distingea de funcții propoziționale și numere interpretate ca fiind clase de un anumit tip, în 1908 (Russell [9]) și 19010 (Russell [10]) va asimila clasele cu funcțiile propoziționale, concluzionând că nu este nevoie de *asumpția existenței claselor*. În *Principia Mathematica*, cap. 3, Russell expune *„teoria simbolurilor incomplete"*, instrumentul prin care va încerca să explice și să analizeze clasele. *Simbolurile incomplete* sunt simboluri ce nu au o semnificație izolată și sunt definite numai în contexte determinate ; cu ajutorul simbolurilor incomplete se pot caracteriza descripțiile, care sunt simboluri incomplete, care nu au semnificație luate izolat, dar au în enunțuri. Și *construcțiile logice* sunt considerate ca fiind simboluri incomplete, de altfel în *Mysticism and logic*, 1917, London 1950 (B. Russell

[11]), logicianul englez și-a formulat teza sa despre construcții logice în termenii : Maxima supremă a filosofiei științifice este aceasta : ori de câte ori e posibil construcțiile logice vor fi substituite entităților inferate. Dacă o entitate se dovedește a fi o construcție logică, nu trebuie să se asume existența ei : simbolurile incomplete au semnificație doar în context și nu trebuie să asumăm referenți pentru ele. Dacă în 1912 (Russell [12] consideră că datele senzoriale, obiectele externe, punctele, momentele temporale, particulele sunt entități reale, în 1914 (Russell [13]) influențat de concepțiile lui Whitehead acceptă că ele pot fi reconstituite ca mulțimi de evenimente și deci este superfluă asumpția existenței lor. În ceea ce privește *construcția lumii externe* apelează la procedura *reducerii* descripțiilor la date sensibile (ale unei persoane) și apoi reconstituirea acestui aspect, *privat* în spațiul *public,* pentru a fi intersubiectiv comunicabilă (este vorba de construcția lumii externe).

Dar lucrarea lui Russell [8] are relevanță și pentru logică și teoria mulțimilor ,despre care notează că ele spun ceva și despre realitate. Sub influența lui Wittgenstein [1] Russell cristalizează câteva idei interesante pe care le-am putea enumera într-o anumită sistematizare astfel : a) sistemele logice și matematice au un caracter sintactic ; b) tezele acestor sisteme (ale logicii și matematicii) spun același lucru și nu spun nimic despre realitate ; c) logica și matematica sunt construcții lingvistice, o cale pe care angajându-se Russell va fi condus spre părăsirea *poziției platoniste* cu privire la logică și matematică, din care, consonant cu liniile de gândire fregeană, făcuse o opțiune filosofică credibilă și relevantă pentru demersul reconstrucției logiciste a matematicii ; un domeniu în care a lucrat obținând rezultate, dar înregistrând și eșecuri, ambele productive ulterior pentru conturarea orbitelor și liniilor de forță în sfera cercetărilor fundaționale asupra matematicii și logicii. Dar influența lui Wittgenstein asupra lui Russell va continua marcând ceea ce s-a numit perioada *„atomismului logic“* (1918). Dar ce este *atomismul logic?* Oricum, este o reacție puternică la *monismul absolut* al hegelienilor, al cărei punct central este *asumpția pluralității entităților mutuale și independente.* Russell [8, p. 178] scrie : „Logica pe care eu o apăr este *atomistă,* ea se opune logicii *moniste* a poporului unde mai mult sau mai puțin urmează pe Hegel. Când eu spun că logica mea este atomistă eu înțeleg prin aceasta că eu împărtășesc credința simțului comun că există multe lucruri separate. Eu nu privesc multiplicitatea lumii ca constând pur și simplu în faze și diviziuni nereale ale unei singure realități indivizibile“. Cum se remarcă, teza centrală a atomismului logic este o propoziție ontologică : *Lumea constă în atomi logici. „Atomii logici“,* în sens russellian, ar fi *„lucruri separate“* în pasajul citat din *Logic and knowledge.* Mai riguros vorbind, adoptând concepția *identității* atomii logici = lucruri separate, o variantă mai îmbunătățită a tezei logice ar fi : Lumea constă din lucruri separate : Boguslaw Wolniewicz *(O diferență între atomismul logic al lui Russell și cel al lui Wittgenstein)* afirmă că sunt necesare răspunsuri la două probleme : 1) Care sunt acele lucruri ? 2) În ce constă *separateness* (independența mutuală a lucrurilor, respectiv a atomilor) ? Răspunsul la întrebarea (1) arată diferența fundamentală dintre atomismul logic al lui Wittgenstein și cel al lui Russell, căci în timp ce pentru Russell *atomii* sunt *denotații* ale unor *nume* (în sens logic numite *nume proprii)*, adică obiecte, succeptibile de a fi *numite* și pe care el le-a numit *particulari*, a căror proprietate este *independența mutuală* (sau subsistența), self-subsistența, cum se știe, aparține substanței : „...fiecare particular care există în lume nu depinde logic în nici un mod de orice alt particular... Nu există nici un motiv de ce n-am avea un univers constând într-un particular și nimic altceva. Aceasta este o particularitate a particularilor" (Russell [8, p. 201—204]). Alături de *„mutual-independență"* (self-subsistență) atomii mai posedă *simplicitate,* orice particular este simplu dar nu convers. „Simple... sunt de un număr infinit de sorturi. Există particulari și calități și relații de ordine variate, o întreagă ierarhie de sorturi diferite simple" (Russell [8, p. 270]) ; Wittgenstein nu consideră, ca și Russell, că atomii logici sunt *„obiecte"* (denotații ale numelor proprii) ci *„situații"*, denotații ale propozițiilor elementare. *Teza russelliană ontologică* poate fi formulată : (x este un particular $\rightarrow$ [(x este self-subsistent) $\equiv$ (x este simplu)] ; teza wittgensteiniană : (x este self-subsistent) $\rightarrow$ (x nu este simplu). Unii comentatori ai filosofiei lui Russell o găsesc puțin *„obscură"* și cred că atomismul logic wittgensteinian reprezintă o variantă mai clară și acurată. Independența (și dependența) nu se aplică *obiectelor* (simple) ci *situațiilor (configurațiilor de obiecte)*. Disputa dintre *„atomismul logic"* și *„monismul absolut"* are sens numai dacă există cel puțin două entități, (să le numim x și y), despre care cineva poate spune într-adevăr „x este independent de y". Evident, Russell și Wittgenstein resping teza monismului absolut, diferența dintre varianta wittgensteiniană și cea russelliană a atomismului logic apare atunci când ne întrebăm expres, explicit, ce fel de entități sunt x și y ? Russell răspunde că sunt *obiecte simple,* Wittgenstein că nu sunt nici obiecte și nici simple ci *„situații"*, context în care are sens să aplice noțiunile de *„dependență* și *independență"*, deoarece numai acestea depind reciproc ; negarea independenței mutuale a obiectelor nu antrenează echivalent aserțiunea dependenței lor ; pur și simplu nu are sens așa ceva, nu că negația ar însemna „aceasta este fals". Încât autorul polonez, citat mai sus, apreciază că diferența dintre variantele Russell și Wittgenstein ale atomismului logic poartă nu asupra a *„ceea ce este adevărat"* ci „despre ce are sens", ceea ce revine la punerea *„problemei semnificației"* ca opusă *„chestiunii adevărului"*. *„Teoria tabloului"* este solidară atomismului logic. Vorbind despre vaguitate și claritate, Wittgenstein, inspirat de ideile lui Frege, afirmă în *Investigații filosofice* că idealul trebuie găsit în realitate, iar dacă trebuie găsit în realitate, trebuie găsit în limbaj, *„corelatul unic, tabloul lumii" ; claritatea* și *obscuritatea* nu mai sunt aplicate la concepte, ca în cazul lui Frege, ci la gânduri și propoziții. O propoziție are un sens clar dacă sunt capabil să spun că acea propoziție este adevărată sau falsă. *„Teoria tabloului"* este conexă problemelor semnificației și adevărului. Ajungem la concepția wittgensteiniană despre esența limbajului. Deoarece toate propozițiile elementare sunt absolut precise (în virtutea relevanței atomare ?), așa sunt toate propozițiile. Valoarea de adevăr a unei funcții de adevăr este strict determinată de valorile de adevăr ale argumentelor funcției. Prin urmare, limbajul nu conține vaguitate și/sau indeterminare, evident este vorba de limbajul obișnuit ale cărui propoziții (spune în *Investigații filosofice)* sunt în ordine perfect logică. Chiar dacă o propoziție a limbajului de toate zilele pare indeterminată, ea este în realitate absolut precisă.

Revenind la *filosofia atomismului logic* (1918 a lui Russell să observăm că sub influența lui Wittgenstein operează distincția *„fapte-lucruri; faptele* aparțin *lumii obiective,* despre care putem formula propoziții, asertând sau negând, în timp ce *lucrurile* pot fi doar numite. De altfel în 1948 (Russell [6]) se produce o mutație de accent, deoarece admite ca existente numai faptele : *„orice există numesc fapt"*, de pildă faptele atomare corespund datelor sensibile atomare. Elaborează un program de *eliminare a particularilor,* lucrurile sunt considerate *fascicule de calități* și deja în 1914 afirmase că sunt serii de aspecte care satisfac legile fizicii.

În încheiere să notăm că în 1921 (Russell [13] sub influența lui James și Dewey elaborează *filosofia monismului neutru* cu inconsecvențe (privind *principiul simplității),* prin admiterea existenței a două feluri de entități materiale și mentale ; o senzație, membru într-un lanț de amintiri este considerată *parte a spiritului;* dacă are antecedenți cauzali este parte a *lumii fizice materiale.* Se observă că distincția „materie-spirit" depinde de gruparea materialului senzorial, o idee și în *My philos. Development.*

Așadar, legat de *„obiecte abstracte"* s-a formulat o problematică modernă, căci observă M. Dummett [1] : dacă sau nu există obiecte abstracte ? Ce obiecte există ? Cum le cunoaștem ? Care este criteriul de existență al lor ? Unde este linia de demarcație între obiecte abstracte și obiecte concrete ? Dar aceste chestiuni moderne par în același timp vechi ca și filosofia. Noțiunea de *obiect* a fost introdusă în contexte filosofice de G. Frege. Tradiția *entităților* (obiectelor) le-a clasificat în *particulari* și *universali.* Ne referim la particulari și *„predicăm"* despre ele alte lucruri pe care le numim *universali,* dar nu le putem predica despre alte lucruri. Universalii au caracteristica de a fi predicate ale particularilor, dar și să predicăm despre ele *(universali mai înalți)* alte lucruri. Din punct de vedere lingvistic vom avea corespunzător două moduri de redare, exprimare, a universaliilor ; când un universal este predicat despre alt lucru este introdus printr-o *expresie predicativă,* iar atunci când ne referim la universal predicând ceva despre el, este introdus printr-un *termen.* Termenii îi utilizăm pentru referirea atât la universali ca și la particulari. Rămâne, oricum, un rezultat cert că *studiul predicației* este relevant pentru *înțelegerea naturii esențiale a universalilor.*

Frege consideră greșită această abordare, remarcând diferența radicală dintre rolurile lingvistice ale *predicatului* și *termenului;* cum poate coincide *referentul* unui *termen* cu cel al unui *predicat?* Frege neagă că se poate construi o semantică adecvată pe aceste baze tradiționale. Cât de eficientă este sugestia că un termen *„înțelepciune"* stă pentru același lucru pentru care stă un *predicat*: „x este înțelept“? Pentru uzul acestei sugestii trebuie să oferim o *explicație* a condițiilor de adevăr ale propozițiilor în care a apărut termenul abstract, ca de exemplu: „Înțelepciunea depinde de experință“ sau „Înțelepciunea este legată de bătrânețe“.

Construirea unei propoziții, în care apare termenul abstract, ca echivalență a unei propoziții care conține predicatul corespunzător astfel: „Înțelepciunea nu este legată de bătrânețe“ ca „Nu numai bătrânii sunt înțelepți“. Nu este nimic absurd în această reconstrucție, deoarece acceptarea noțiunii fregeene de *obiect* nu ne obligă să acceptăm necritic orice substantiv abstract ca termen singular autentic. Mai curând, notează M. Dummett [1, p. 472], vom considera majoritatea lor în sensul formării unor variante idiomatice ale propozițiilor care conțin predicatul sau expresia relațională corespunzătoare; însă a proceda așa cu substantivele abstracte înseamnă să negăm statutul unui termen autentic sau nume propriu. Concluzia este că pentru acest motiv nu există un lucru care permite substantive abstracte ca termeni singulari reali, și în același timp atribuindu-le aceeași referință ca cea posedată de predicatul corespunzător. Văzută în această lumină concepția tradițională este simplu incoerentă, consemnează M. Dummett [1, p. 472—473]. Acceptăm noțiunea lui Frege de *obiect* ca un fel de lucru care poate fi referent al unui *nume propriu,* dar atunci să reținem diferența radicală dintre *referinții numelor proprii* și cei ai *expresiilor incomplete.* Poziția care nu crede în existența obiectelor abstracte se numește *nominalism,* împărtășit de Goodman și Quine, care neagă existența obiectelor abstracte. *Nominalismul originar* a negat existența universalilor (ca referință a predicatelor și a substantivelor abstracte). Background-ul fregean al noțiunii de *obiecte* cere distincția radicală dintre obiecte și concepte. „Ce există?“ este *problema fundamentală* a ontologiei, a cărei intenție este *„ce feluri de lucruri există?“*.

Înaintând în demers vorbim din ce în ce mai specializat, specificat, formulând următoarele chestiuni: *„Ce particulari există?“* și *„Există universali, dacă da, ce universali există?“*, de ultima întrebare fiind legat destinul nominalismului. Problema *„ce obiecte există?“* ca și întrebările: „există concepte?“, „există relații?“, „există funcții?“, „există valori de adevăr?“ au prin excelență relevanță pentru perspectiva ontologică fregeană. În ultimă analiză *„problema despre obiecte“* poate fi redusă la problema vizând *„obiecte concrete“* și *„obiecte abstracte“*. Dacă se acceptă semantica fregeană, atunci noțiunea de *obiect* introdusă de gânditorul german este una fundamentală în abordarea chestiunilor de natură ontologică; și aceasta are loc în prezența supoziției că analiza fregeană a limbajului oferă fundamentele pentru o semantică a limbajului natural. Frege are în vedere caracteristici ale limbajului natural care se potrivesc cadrului general oferit de logica predicatelor, o credință și a filosofilor limbajului care activează în cadrul tradiției datorate logicianului german; Quine și Davidson lucrează în paradigma fregeană. În semantica lui Frege noțiunea de *obiect* are rol *dublu*: pe de o parte, *obiectele sunt referenții numelor* *proprii* (propozițiile atomare sunt explicate în termenii *relației de referință* dintre nume proprii și obiectele pentru care ele sunt) ; pe de altă parte, obiectele sunt *ceva* (entități) pentru care predicatele sunt adevărate sau false ; până aici este *primul rol* al noțiunii de obiect. *Al doilea rol* al obiectelor este acela că ele formează *domeniile* cuantificării, sferele variabilelor individuale. „Dacă analiza lui Frege a limbajului este corectă în principiu, noțiunea cuantificării de ordinul întâi va fi un instrument indispensabil pentru analiza multor propoziții ale limbajului, și oriunde cuantificarea de ordinul întâi este implicată, trebuie să fie posibil să specificăm o totalitate adecvată de obiecte ca domeniu al cuantificării". (M. Dummett [1]).

Când lucruri, precum numere, sunt considerate ca obiecte, Frege vizează primul rol al noțiunii de obiect (se referă la expresii care stau pentru acest gen de entități). Frege [1] vrând să stabilească că numerele (cardinale) sunt obiecte își îndrepta atenția asupra *„cuvintelor numerice"* (number-words) folosite ca substantive și asupra *numeralelor,* ce apar în contexte aritmetice, pledând pentru reconstituirea lor ca *nume proprii,* adică drept *termeni singulari ;* odată stabilit că numerele sunt *obiecte,* el admite că ele aparțin domeniului (range) variabilelor individuale. Frege a formulat *„asumpția naturală"*, remarcă Dummett [1], că este posibil să luăm un *singur domeniu maximal, domeniul tuturor obiectelor,* ca fiind în toate contextele domeniul variabilelor individuale, concluzie naturală extrasă din observația că efectul unei restricții a domeniului se poate obține apelând la un predicat satisfăcut de toți și numai membrii acelui domeniu ; desigur predicate adecvate vor stipula restricția sau restricțiile respective. Din teza că *numerele sunt obiecte* se infereazä consecința că orice variabilă individuală poate fi considerată ca parcurgând, între alte lucruri, și numere.

Noțiunea lui Frege de *interpretare* a sistemelor formale, deoarece pretinde numai specificarea constantelor nelogice, dar nu în mod special domeniul variabilelor, contrastează evident cu *noțiunea modernă standard* de *interpretare.* Supoziția lui Frege despre existența „unui singur domeniu atotcuprinzător" (one single all-embracing domain), care servește pentru toate uzurile variabilelor individuale, s-a dovedit răspunzătoare de generarea *paradoxurilor* din teoria mulțimilor, fenomen a cărui *„morală"* este că, cel puțin atunci când noi avem de-a face cu *obiecte abstracte,* nu există un *domeniu ultra-comprehensiv* care include ca o *submulțime orice domeniu* pe care se poate cuantifica legitim. Nu putem interpreta coerent un limbaj, astfel ca orice propoziție a limbajului să aibe o valoare de adevăr determinată, considerând variabile individuale parcurgând orice să corespundă *noțiunii intuitive* de *mulțime,* sau *număr cardinal,* sau de *ordinal.* Folosirea cuantificării, relativă la un domeniu, este un instrument în analiza limbajului, dar nu putem accepta ca acest domeniu să fie *atotcuprinzător* (să includă orice), utilizabil același în toate contextele.

Quine, prin celebrul slogan : *„a fi înseamnă a fi valoarea unei variabile"* exprimă *angajamentul ontologic al unui limbaj.* Determinarea obiectelor asumate de un limbaj, fragment de limbaj, se face prin analizarea limbajului în termenii logicii predicatelor; pot fi teorii multisortate, cu diferite feluri de variabile individuale, iar obiectele angajate de teoria respectivă sunt relevate ca domenii ale diferitelor sorturi de variabile individuale ale limbajului teoriei investigate. Specificăm domenii pentru fiecare sort de variabilă individuală, în intenția expresă de a determina *condițiile de adevăr* pentru propoziții care implică cuantificarea de ordinul întâi de orice fel; *angajamentul ontologic*, în virtutea unei analize corecte, conține toate obiectele din domeniile specificate prin procedura enunțată. Quine consideră că problemele ontologice sunt *problematice* atunci când avem de-a face cu *limbaje formalizate*, angajând referința *„via replacement"* la limbaje neformale, o cale relevantă cel puțin atunci când ne confruntăm cu chestiunea dacă sau nu anumite *entități*, e-g. *propoziții* pot fi *„eliminate"*; analiza corectă ne-ar cere să construim anumite expresii care să stea pentru aceste propoziții. Chestiunea *„eliminării"* este diferită de cea a *„reducerii"* unei clase de obiecte la altă clasă de obiecte, cum este cazul clasic al reducerii clasei perechilor ordonate $\langle x, y\rangle$ la clasa mulțimilor de forma $\{\{x\}, \{x, y\}\}$, procedură care conduce la realizarea unei *„economii" ontologice*. Chestiunile ontologice apar în absența unui fragment de *limbaj neformal*, context în care se pune problema ce formă dezirabilă trebuie să ia analiza; oricum, asumpția că analiza trebuie efectuată în interiorul logicii predicatelor este incontestabilă, dată fiind relevanța unui atare context de abordare pentru întelegerea noțiunii de *obiect*

Teza lui Quine a fost obiectul criticilor și atacurilor, majoritatea *„focalizate"* pe „privilegierea" contextului de analiză a limbajului de tip fregean și legat de dificila problemă a domeniilor variabilelor individuale, toate acestea conjugate privind relevarea *centralității* noțiunii de *obiect*, emergentă semanticii fregeene axată pe cuantificarea de ordinul întâi. Filosofia lui Frege a limbajului (care a inspirat fundamental această tradiție de gândire) „încorporează credința" „că procedeele lingvistice care aparțin limbajului natural constituie mijloace transparente de exprimare a operațiilor de formare a propozițiilor logicii predicatelor, dezidenabile pentru o semantică adecvată a limbajului nostru". (M. Dummett [1, p. 478]). De altfel o credință bazată pe succesul parțial al lui Frege și al celor care au lucrat în tradiția inaugurată de el, la care se adaugă lipsa unui model alternativ de analiză, au întărit autoritatea acestei metode de abordare, dar programul se dovedește ineficace în fața unor probleme ontologice ca: *există propoziții? există evenimente?*

Quine s-a ocupat predominant de *rolul secund* al noțiunii lui Frege de *obiect* relevant pentru explicarea cuantificării de ordinul întâi, despre primul rol afirmând că ne dispensăm de *nume proprii* construind *apparent proper names* ca „descripții definite", pe care le putem analiza în termenii cuantificării, așa cum a procedat Russell. Nu se realizează nici o economie semnificativă pe această cale, notează M. Dummett [1], deoarece chiar dacă un limbaj a fost privit ca neconținând *propoziții atomare*, deci neconținând termeni singulari veritabili, tot va fi necesar, în scopul obținerii semanticii acestui limbaj, să specificăm pentru fiecare predicat când este adevărat despre orice obiect dat, o specificare prin stipularea *„condițiilor de adevăr“* pentru propozițiile atomare. Quine va completa teza de mai sus cu următoarea aserțiune: când nu avem *domenii infinite, cuantificarea* poate fi *eliminată* în favoarea *disjuncției* și *conjuncției finite*. Concepția (și procedura) lui Quine sunt comentate evaluativ de M. Dummett [1, p. 478—479]: „Însă, dacă, după ce în această manieră cuantificatorii au fost eliminați în favoarea combinațiilor finite de propoziții atomare, apoi noi eliminăm propozițiile atomare construind termenii singulari care apar în ele ca descripții definite russelliene, noi am reintrodus cuantificarea: procesul pare astfel pur și simplu *circular* (s. mea M. Ț.) și este greu să vedem cum Quine poate argumenta pe această bază că un asemenea limbaj este liber pe deplin de angajament ontologic“. Quine crede că chestiunea *„ce obiecte există?“* acoperă întrebarea dificilă generală *„Ce există?“*; dar o asemenea *„opinie — asumpție“* se află în vădit contrast cu concepția lui Frege, întrucât operează o *„reducere“*, ca de pildă cuantificarea de ordin mai înalt în favoarea cuantificării pe entități abstracte, precum clasele. Dar o asemenea aserțiune poate fi calificată ca absurdă din punctul de vedere a lui Frege, deoarece pentru logicianul (și matematicianul filosof) german însăși noțiunea de clasă este una de ordinul al doilea. Pentru Frege clasele sunt obiecte și cuantificarea pe clase este una de ordinul întâi; Dar noi nu putem explica *ce este o clasă*, sau defini *relația fundamentală de apartenență* la o clasă fără să apelăm la cuantificare pe *concepte*. Cum se știe în formalizarea lui Frege a teoriei claselor operatorul *„abstracției claselor“* „clasa x-lor astfel că $\varphi(x)$“ este luat ca *primitiv* și cu ajutorul acestui concept (primitiv) sunt definiți termenii pentru clase și relația de membru. Însă în teoria axiomatizată modernă actuală a mulțimilor se consideră drept *primitivă relația de apartenență* și în termenii *relației de membru* este definit operatorul *„abstracției clasei“* prin intermediul unui *operator descripție* sau a unei convenții. Problema importantă este dacă o teorie de ordinul întâi „capturează *noțiunea intuitivă de clasă*“, la care Quine răspunde afirmativ, în timp ce Frege, opinează Dummett, probabil neagă acest lucru, dar cu aceasta intrăm în sfera filosofiei matematicii. Concluzia cu relevanță generală este că *angajamentul ontologic* depinde în principal de *tipurile de cuantificare* folosite în limbajul analizat și, de asemenea, se presupune corectitudinea în principiu a analizei fregeene. Quine stabilește o corelație între diferite sorturi ale cuantificării de ordinul întâi și existența sorturilor corespunzătoare de obiecte. Dacă avem de-a face cu cuantificări de ordin superior, atunci în mod corespunzător vom admite că teoria (limbajul) are angajamente ontologice specificate de existența domeniilor adecvate de entități precum *concepte, relații, funcții.* Frege are dreptate, în defavoarea lui Quine, angajamentul ontologic depinzânâd de expresiile limbajului nostru (inclusiv cele incomplete) considerate ca formând unități logic semnificante și deci având *referință,* care la rândul ei depinde de felurile de cuantificatori și alți operatori de nivel secund sau superior implicați în analiză.

M. Dummett arată nu numai ce-i desparte pe Frege și Quine ci și ceea ce le este comun: punctul general comun constând în următorul aspect : *angajamentul ontologic* asumat de un limbaj depinde de *structura lui cuantificațională* relevată de *analiza logică*. Frege însuși a recunoscut distincția dintre obiecte *concrete* și obiecte *abstracte,* acestea din urmă putând fi considerate ca unele concrete, în sensul că pot fi considerate ca *referenții numelor proprii,* ca aparținând domeniului cuantificării de ordinul întâi. Dar în *filosofia post-Frege* obiectele abstracte au fost subiect al disputei și controversei. Astfel N. Goodman a elaborat o nouă variantă de *nominalism* conform căruia cuantificarea pe obiecte abstracte nu este inteligibilă și trebuie eliminată, și în aceeași linie de gândire și alții, fără să împărtășească *„puritanismul"* nominalist, s-au pronunțat pentru procedee reducționiste de *eliminarea referinței* la (sau *cuantificării* peste) *obiecte abstracte*. Alți autori au opinat pentru o atitudine tolerantă față de obiecte abstracte cu condiția să fie reconstruite ca *„posits"*. Iar în filosofia matematicii, remarcă Dummett [1], problema existenței obiectelor abstracte apare în forma particularizată și anume dacă obiectele matematice (ca numere naturale, numere reale și mulțimi) trebuie să fie considerate ca obiecte abstracte, care există independent de mintea umană, așa cum asertează *platoniștii* (și *realiști* contemporani), sau sunt creații libere ale minții umane, cum postulează *constructiviștii* (și *intuiționiștii)* sau, dimpotrivă, obiectele matematice, ca tip de obiecte abstracte, sunt dispensabile. A. Church [1] schițează un sistem de semantică, o versiune modificată a *teoriei lui Frege* despre *sens* și *referință,* încercarea lui fiind „o *pledoarie* pentru nevoia de *entități* (obiecte) *abstracte*". Sistemul propus de Church este de factură *platonistă* (poziția filosofică profund legată de *destinul* problemei obiectelor abstracte), care asumă un „areal" ordonat de entități abstracte. A. Church sugerează că *pretenția „extremistă"* a nominaliștilor ca entitățile abstracte să fie *prohibite* se datorează tendinței acestora de a păstra conexiunea dintre *teorie* și *observație*. Church consideră capricioasă, poate bizară chiar, am adăuga, preferința nominaliștilor pentru *„a vedea"* în defavoarea *«înțelegerii»,* ca metodă de observație ; dar așa cum un corp opac poate fi văzut, tot așa și un concept poate fi înțeles sau intuit.

În ceea ce îl privește pe Carnap [1] după ce acceptă *«formularea-Quine»* a *angajamentului ontologic* (al limbajului, fragment de limbaj al unei teorii științifice) *„în termenii valorilor admisibile ale variabilelor"*, el propune cunoscuta distincție dintre două feluri diferite de *chestiuni-existențiale : interne* și *externe*. *Chestiunile interne* despre *„existență"* sunt formulate și soluționate în *cadrul lingvistic* care ne indică tipul de entități admisibile ; răspunsurile necesită investigația empirică și/sau analiza logică (ca exemplu de chestiune internă, Carnap dă propoziția *„există un număr prim mai mare decât o sută"*, la care răspunsul poate fi dat nu prin investigație empirică, ci prin analiză logică).

Chestiunile externe sunt întrebări despre *„existența sau realitatea sistemului de entități ca un întreg"* și care echivalează cu chestionarea acceptabilității *cadrului lingvistic* însuși. Prin natura lor *chestiunile externe* sunt *probleme filosofice,* și după opinia lui Carnap nu sunt *teoretice* ci *practice,* esențialul aici fiind „o chestiune de decizie mai curând decât de asertare". Chestiunile externe privesc (dacă ne referim la numere) *statutul ontologic* al acestor *entități-numerele* ca în exemplul dat chestiuni ca : dacă sau nu numerele au *caracteristică metafizică* numită *realitate*, un fel de realitate ideală, distinctă de cea materială.

Linia de demarcație dintre obiecte concrete și obiecte abstracte, ar fi dacă ele sunt sau nu *accesibile simțurilor*, distincția devenind relativă la facultățile noastre senzitive ; dar este o chestiune *contingentă* dacă ceva afectează sau nu organele noastre de simț, căci conform acestui criteriu undele de lumină vor fi concrete, iar undele de radio sunt abstracte, simțim sau nu presiunea obiectelor etc. Distincția este legată de distincția obiecte care pot fi sau nu obiecte ale *ostensiunii* (gesturi demonstrative). *Clasa obiectelor concrete* nu poate însă să fie simplu identificată cu clasa obiectelor ce pot fi obiectul unei ostensiuni, cel puțin atunci când ostensiunea implică gestul care schițează (pointing gesture). Clasa obiectelor abstracte este totalitatea obiectelor care cad „în interiorul domeniului unei funcții sau expresii funcționale ca „The shape of ξ" și este complementară celei a obiectelor ; deci, se formulează cerința pentru ca un obiect să fei abstract trebuie să existe o expresie funcțională, el nu poate fi referent al unui termen. Există situații care par derutante, de exemplu dacă examinăm statutul ontologic al culorilor, formelor și direcțiilor în lumina *„graniței" de demarcare* între obiecte concrete și obiecte abstracte. Astfel, *culorile* sunt clasificate ca universali în perspectiva concepției tradiționale. Pe de altă parte, nu este necesar ca o culoare să fie o culoare a *ceva*. Rezultatul nostru : *culorile* sunt privite ca *obiecte concrete*, în timp ce *formele* și *direcțiile* sunt abstracte, ar fi în acord cu concepția lui Goodman și Quine, deoarece sensul în care o *formă* sau o *direcție* este să fie *a ceva* (a unui lucru) este înrudit cu concepția *dependenței logice* folosită de Aristotel în caracterizarea *„substanței"*. M. Dummett [1] consideră că până aici am formulat doar condiția *suficientă* dar nu *necesară* pentru existența unui *obiect abstract*. El arată că Frege a dat ca un exemplu tipic de obiect abstract *„centrul masei sistemului solar"*. Însă expresia funcțională *„centrul masei lui ξ"* nu este în mod cert de felul pe care l-am considerat, dar se aseamănă cu „capitala lui ξ" ; „un centru al masei este un punct și există multe moduri în care punctul poate fi referit altfel decât centrul masei a ceva. *Puncte*, pe de altă parte, par candidați eminenți pentru statutul obiectelor abstracte, însă este dificil să găsim o expresie funcțională care este legată de puncte cum „forma lui ξ este legată de forme" (M. Dummett [1, p. 487]). Oricum, privind *numele proprii*, sau alți *termeni singulari*, atunci când ne punem *problema sensului* pe care acestea îl posedă privind tipuri de obiecte, reținem că pentru *a înțelege sensul* unui asemenea *nume* trebuie să dispunem de un *criteriu de identificare* a unui *obiect* ca *referent* al numelui. Ideea este dacă orice *obiect* dat este *referentul* sau *purtătorul* numelui ; complicații apar când *numele* este *complex* și când este imposibil prin simpla inspecție să decidem dacă obiectul stă pentru numele respectiv ; din punctul de vedere al lui Frege nu avem de a face cu o *cerință de efectivitate* și astfel ne regăsim confruntați cu dificultăți în explicarea noțiunii de *existență a unui obiect dat* sau *prezentat*. Prin urmare, să putem spune despre un obiect dacă este sau nu este referentul unui nume și unde *uzul numelui* nu este operant; dacă în cazul obiectelor concrete *uzul unui demonstrativ* putea fi acceptat (referentul, obiect posibil al ostensiunii), *obiectele abstracte* neavând această caracteristică reclamă o altă metodă standard. Cum am văzut obiectele abstracte se află în interiorul domeniului (range) unei expresii funcționale, ceea ce aici ar reveni la *specificarea* unui argument particular pentru funcție. Dacă expresia funcțională este de ordinul întâi aceasta înseamnă identificarea unui obiect ca argument, de exemplu o linie al cărei obiect este direcția, sau un corp material al cărui obiect este *forma*. Obiectul luat ca argument al funcției ar putea fi prezentat și ostensiv, altfel metoda specificării unui asemenea obiect va depinde, notează Dummett [1], de felul sensului posedat de numele pentru acel obiect. Dacă expresia funcțională este de ordin mai înalt (superior) ca în cazul *„numărul lui Φ"*, argumentul *nu* va fi un *obiect*, ci un *concept, relație, funcție*, specificat(e) printr-o expresie lingvistică de un tip logic adecvat. Un rezultat semnificativ este următorul: nu orice obiect abstract — a fortiori — nu orice obiect care este un obiect posibil al *ostensiunii* poate fi considerat ca aparținând domeniului unei expresii funcționale, ceea ce obligă la căutarea unei explicații a sensurilor numelor. Următoarea *diferență în principiu*, ar putea fi ilustrată astfel: o formă nu poate fi obiect al ostensiunii în maniera în care este o culoare, ceea ce ne-a servit, observa Dummett, la clarificarea — *culorile*, obiecte concrete, iar *formele*, obiecte abstracte. Se întâmplă ca multe obiecte materiale să nu fie în practică obiecte posibile ale ostensiunii (fie că sunt prea mari, prea mici, prea aproape, prea departe etc.) motiv pentru care nu ne afectează simțurile. (Exemple: Sistemul solar, Pământul etc.). Deci este o *condiție suficientă* pentru ca *ceva* să fie un *obiect concret*, ca el să ne afecteze simțurile, să fie referit în termenii *impactului senzorial*, dar aceasta nu este și o *condiție necesară* ca în cazul gazului incolor și inodor. M. Dummett [1] propune drept ca o *condiție necesară și suficientă*, pentru ca obiectul să fie *concret*, faptul ca obiectul să fie *„perceptibil* unei *facultăți senzoriale"*, dar a cărui prezență putând fi detectată senzorial și printr-un instrument sau aparat. Un *obiect concret* poate fi *cauza*, și este *subiectul schimbării*, pe fondul participării la *interacțiunii cauzale*, ori un *obiect abstract* nu poate fi *nici cauza, nici subiectul* schimbării. Dummett face următoarea nuanțare: *teza* că un obiect abstract *nu poate fi cauza schimbării* pare *plazibilă*, dar teza că un obiect abstract nu poate fi *subiectul schimbării* este *problematică* căci nu se schimbă forma unui obiecti ?, nu crește numărul oilor pe o pajiște ?, sau nu-și poate schimba poziția centrul lui Jupiter ?

S-a argumentat că un obiect abstract nu poate fi implicat într-o *interacție cauzală* cu alte obiecte, căci orice *interacție cauzală* antrenează o *schimbare internă* în obiectele implicate; însă aceasta nu este totdeauna reprezentarea noastră a interacțiunii cauzale, este chiar cazul atracției gravitaționale. Russell a sugerat o analiză a schimbării în cazul obiectelor abstracte *(valoare de adevăr)* arătând că în cazul enunțurilor care *diferă* intern, aceasta se întâmplă datorită *referinței temporale*. Concluzia analizelor autorului britanic la care ne-am referit substanțial în ultima parte a eseului nostru este că *distincția „obiecte abstracte — obeicte concrete“* nu este clar marcată și că modul în care o trasăm depinde de structura fină a limbajului nostru.

Să mai remarcăm *relevanța semantic-ontologică* a *contextualismului fregean (definiții contextuale)*, pe care nu o dezvoltăm aici, și să amintim că Frege va da o *definiție explicită* a expresiei funcționale în termenii *claselor*, ceea ce i-a permis să realizeze scopul original din programul său în filosofia matematicii, anume să construiască *numerele*, sau *direcțiile* ca *obiecte* care pot fi identificate *altfel* decât ca numere sau direcții, adică ca *clase*, făcând plauzibil faptul că *numele numerelor* și *direcțiilor* pot fi considerate, privite, ca având o *referință*. Se realizează *reducerea obiectelor abstracte* la *clase*, care nu semnifică o *„economie“ ontologică:* există doar un fel de obiecte în loc de multe, se produce o subsumare a claselor sub noțiunea mai generală *domenii de valori* (values-ranges); dar pe această cale ne angajăm în analize mai speciale aparținând filosofiei logicii și matematicii.

3. REALISMUL MATEMATIC ŞI ONTOLOGIA MATEMATICII

3.1. Sensuri şi evoluţii ale realismului în filosofia ştiinţei

Termenul „realism“ este folosit în literatura actuală de filosofia ştiinţei în mai multe accepţii, în funcţii de contexte teoretice. După P. Maddy [1], am putea sistematiza trei sensuri : i) primul, şi am zice cel original, este cel prezent în discuţiile referitoare la problema universalilor, unde are ca parteneri-rivali nominalismul şi conceptualismul ; ii) al doilea sens priveşte angajarea în discuţii asupra existenţei lumii exterioare şi în care rolul realismului contrastează cu cel al fenomenalismului şi, mai în general, cu cel al idealismului ; iii) cel de al treilea sens al termenului este relevant în discuţii şi confruntări ce privesc statutul entităţilor teoretice, având ca oponenţi operaţionalismul şi instrumentalismul.

Forma clasică a realismului, prezentă în lucrările generaţiei de până în anii '50 avea ca problemă centrală, chestiunea existenţei independente a obiectului pe care îl investighează ştiinţa. După Feigl [1] problema realismului după 1950 este cea a traducerii enunţurilor în care apar termenii auxiliari în enunţuri în care aceştia nu mai apar. Exemplul standard al devierii acului magnetic care este fenomen observaţional, în timp ce câmpul magnetic nu este observaţional oferă mai multe posibilităţi de interpretare, dar aici vom menţiona numai poziţii realiste : a) *realismul probabilist,* după care nu se poate infera cu certitudine existenţa independentă a câmpului ; ea poate fi numai inferată probabilistic ; b) *realism ipotetico-deductiv (explicativ) :* orice sistem explicativ satisfăcător trebuie să conţină şi aserţiunea realistă despre existenţa independentă a constructelor ipotetice, în particular, pentru explicarea devierii acului magnetic, este nevoie de aserţiunea existenţei independente a câmpului magnetic ; c) *realismul semantic :* ipotezele existenţiale (şi enunţul : devierea acului magnetic se datorează prezenţei unui câmp magnetic este o ipoteză de acest tip) comportă o încărcătură de semnificaţie ce depăşeşte suportul lor evidenţial, ce rezidă în referinţa factuală a constructelor teoretice angajate în formularea lor. Feigl notează ideea importantă că realismul semantic nu implică *transcen-*

dența metafizică, sau în alți termeni o *concepție semantică a referinței* nu justifică *realismul transcendent*; concepția semantică a referinței sugerează numai ceea ce un *realist empiric* ar putea înțelege prin referință sau prin existență independentă. Se observă că din perspectiva *realismului semantic* este posibilă specificarea distincției dintre *realitate obiectivă* (concept filosofic) și *realitate fizică* a teoriei științifice (concept metodologic), distincție cu fecunde implicații în discuțiile și confruntările epistemologice.

Unii autori, precum Shapere, delimitează *„problema realismului"* de *„cea a entităților teoretice"*. Subminarea crescândă a *distincției teoretic-observațional* face mai puțin adecvat și operațional sensul al treilea al termenului realism. Se constată că majoritatea contribuțiilor la problema realismului sunt axate pe chestiunea *raportului teoriilor științifice* (sau a limbajului) cu *realitatea*. În acest context sunt notabile două aserțiuni din Putnam [1, p. 69], pe care le poate face un realist despre o teorie : i) propozițiile acelei teorii sunt *adevărate* sau *false* și ii) ceea ce le face *adevărate* sau *false* este *ceva extern*, adică nu datele noastre senzoriale, reale sau potențiale, structurile minții noastre, limbajul nostru ; sau, în formularea lui R. Boyd, teoriile acceptate într-o știință matură sunt, în mod tipic, *„aproximativ adevărate"*, că același termen se poate referi la același lucru chiar când apare în teorii diferite. În viziunea lui Putnam [1, p. 73] aceste afirmații sunt parte integrantă a oricărei descrieri științifice a științei și a relațiilor ei cu obiectele reale. Așadar, *realismul științific* consideră semnificativă *relația teoriilor* cu *lumea* și nu cu o realitate — dependentă de teorie și conceptul de adevăr cu care se operează în acest context rămâne unul metafizic și nu devine unul semantic. Cea mai importantă obiecție adusă realismului științific este *teza subdeterminării empirice* a teoriilor (Quine [1]), folosită de el pentru construirea unei *concepții pragmatice* despre știință și chiar *instrumentaliste*, în măsura în care *schema conceptuală* a științei devine un instrument pentru prezicerea experienței viitoare în virtutea experienței trecute. (Quine [1, p. 56]). În lumina tezei subdeterminării empirice știința apare ca un întreg, câmpul total al științei este astfel subdeterminat prin condițiile de frontieră, „nici o experiență particulară nu este legată de un enunț particular din interiorul domeniului, cu excepția legăturii indirecte prin considerații de echilibru care afectează câmpul ca întreg", toate aceste aspecte ale *„concepției globaliste"* pe care o susține Quine. Ori, dacă structura teoriilor științifice este subdeterminată de *evidența experimentală*, atunci una și aceeași evidență experimentală este compatibilă cu teorii științifice incompatibile, ar rezulta că însuși realismul științific este incompatibil cu teza subdeterminării empirice a științei. R. Boyd [1] argumentează în favoarea falsității tezei : „dacă două teorii au exact aceleași consecințe observaționale, atunci orice evidență pentru sau împotriva uneia dintre ele e evidentă cu aceeași forță pentru sau împotriva celeilalte". Încercările de reconstrucție a acestei afirmații nu susțin ideea că cele două teorii sunt egal susținute de evidența experimentală. Evidența experimentală a unei teorii care descrie relații între entități neobservabile sprijină nu numai corectitudinea consecințelor observaționale ci și relațiile cauzale între entitățile neobservabile postulate de teorie pentru explicarea regularităților ce guvernează comportarea fenomenelor observabile; numai astfel realistul poate explica regularitățile observabile, postulând entități neobservabile. Adoptarea realismului științific este cerută în numele unor principii teoretice ale canoanelor iaferenței raționale, potrivit cărora ar oferi cea mai adecvată explicație a caracteristicilor practicii științifice, semnul distinctiv al acestei poziții în filosofia științei constând în faptul că nu face din știință un miracol.

Mai recent, L. Laudan [1] propune o *reconstrucție rațională* a științei dispensându-se de orice concept *a priori* al *raționalității,* respectând numai exigențele unei descrieri teoretice a mersului real al științei; în viziunea lui teoria progresului devine condiția teoretică esențială a posibilității de a reconstrui adecvat conceptul de *raționalitate*. Aprecierea teoriilor după succesul lor în rezolvarea problemelor presupune conceptele de *consistență* și *coerență* care fac apel în ultimă instanță la conceptul de *adevăr*. În L. Laudan [2] găsim ca centrală aserțiunea că succesul unei teorii nu implică și nici nu este implicat de faptul că termenii ei fundamentali *referă*. Un moment semnificativ în evoluția realismului îl reprezintă *realismul convergent* ale cărui teze principale sunt următoarele: (1) teoriile științifice (din științele mature, în mod cert) sunt tipic aproximativ adevărate, iar teoriile mai recente sunt mai apropiate de adevăr decât teoriile mai vechi din domeniul respectiv; (2) termenii teoretici și observaționali din teoriile unei științe mature referă autentic, ceea ce înseamnă că există substanțe în realitate care corespund ontologiilor formulate de cele mai adecvate teorii; când realistul acceptă holismul atunci trebuie să introducă, restricția că numai *termenii centrali* referă, ceea ce însă creează dificultăți care obstrucționează grav teza; (3) teoriile succesive în științele mature conservă relațiile teoretice și referenții teoriilor anterioare, care devin, conform *principiului corespondenței,* cazuri particulare, limită; (4) noile teorii trebuie să explice succesul teoriilor vechi; (5) cea mai adecvată explicație (singura explicație) a succesului teoriilor din științele mature o constituie adevărul tezelor enunțate aici. S-ar părea că această teză metodologică ar fi de natură *metafilosofică,* însă, în fapt, arată Putnam [2], este o ipoteză empirică care poate fi testată prin cercetarea științei, și același autor mai arată că această teorie explică tendința de convergență proprie teoriilor științifice.

Unele deficiențe structurale ale realismului l-au propulsat spre o altă etapă numită de cel care a contribuit la clarificarea lui (Putnam după 1975) *realism intern* sau *internalism.* Putnam după 1975 deși continuă să respingă conceptul de adevăr ca fundamental (cu semnificație centrală în orice formă de realism) și se arată interesat de semantica non-realistă a lui Dummett, se consideră realist (și nu idealist) dar în sensul de adept al realismului intern. Dar realismul metafizic, adoptat și de Putnam în faze anterioare ale evoluției sale teoretice, este centrat pe *relația de referință* dintre termenii limbajului teoriei și lume, și exprimat în tezele că relaţia de referinţă se aplică tuturor teoriilor corecte şi lumea este independentă de orice reprezentare particulară pe care o avem despre ea. (Putnam [2, p. 125]). Ralismul metafizic asumă o teorie a adevărului, neutră epistemologic, adică adevărul nu are o funcţie cauzal explicativă, este ceea ce Putnam numeşte *„indeterminarea referinţei"*, considerată de el mai radicală decât cea (a lui Quine [2]) *„a traducerii"*. Realismul metafizic consideră posibilă fixarea unică a referinţelor termenilor, adică, scrie Putnam [3, p. 33], dacă deci în orice lume posibilă două propoziţii au aceeaşi valoare de adevăr, atunci ele au aceeaşi referinţă. De aici *deviza* cunoscută a *realismului metafizic, „limbajul oglindeşte lumea"*, care formulează lapidar ideea centrală a acestei forme de realism, aceea *a corespondenţei* între *limbaj* şi *lume*. Critica realismului metafizic va viza în mod esenţial această corespondenţă, insutenabilă, nici pe linie de conţinut şi nici ca o corespondenţă de structură, în acest sens din urmă se invocă faptul *cardinalităţii lumii* ce nu este reconstituit ca un invariant în diferitele descrieri echivalente ale lumii, având mai curând rolul unui *artefact teoretic*; şi imposibilitatea unei traduceri unice pentru două limbaje care să conserve referinţa este luată ca un argument în favoarea criticii realismului, deşi realiştii nu o interpretează în acelaşi spirit.

Dar, atunci, cum putem explica corespondenţa dintre schemele conceptuale şi realitate, asemenea corespondenţă fiind atestată de succesul acţiunilor noastre. Aici, justificarea *tezei-nucleu* a realismului capătă în argumentarea lui Putnam un caracter transcendental. Putnam sistematizează trei răspunsuri posibile la problema formulată anterior: 1) poziţia *platonismului extrem* consideră că oamenii posedă puteri mentale *nenaturale* care le permite „înţelegerea" „formelor"; „înţelegerea" rămâne aici ca un concept neanalizabil; 2) poziţia *verificaţionismului* care renunţă la conceptul de *adevăr* în favoarea conceptelor de *demonstraţie* sau de *verificare*; 3) poziţia *realismului moderat* adoptat de Putnam [4], confruntat şi el cu importante dificultăţi.

Între dificultăţile realismului metafizic menţionate de Putnam se distinge incapacitatea acestei poziţii filosofice de a-şi apropia conceptul de *model (aplicaţie intenţionată)*. Şi Putnam [4] discută semnificaţiile paradoxale ale teoremei lui Löwenheim-Skolem din punctul de vedere al relevanţei lor pentru realism. (Enunţul teoremei este următorul: orice teorie formulată într-un limbaj logic de ordinul întâi cu identitate — şi astfel e formulată şi teoria mulţimilor — dacă are un model, atunci are un model cel mult numărabil). Modelele numărabile ale teoriei mulţimilor sunt neintenţionate. Skolem a interpretat conceptul de *„numărabil"* în sensul *relativităţii* acestuia, dar atunci se ajunge la situaţia că nici un sistem formal *nu „capturează"* adecvat conceptul de aplicaţie intenţionată. Rezultă că semnificaţia centrală a teoremei lui Löwenheim-Skolem este următoarea: incapacitatea unei teorii de a-şi determina, adjudeca obiectul până la izomorfism, corespondenţa structurală cea mai relevantă pentru adecvarea realismului. Nici un fel de constrângeri teoretice şi/sau operaţionale nu pot funcţiona aici în sensul determinării referinţei constituienţilor conceptuali din teorie (formalizată) până la obținerea dezirabilului izomorfism, și, mai mult, se poate *„skolemiza“ orice* de la limbajul obiectelor și cel al datelor senzoriale, sau cel *privat* (Wittgenstein) și până la, dacă există, *limbajul creierului.* Ori, această situație, arată indeterminarea referinței, posibilitatea atașării unui constituient conceptual a două semnificații echivalente, iar *referința* devine *ocultă,* deci, aplicațiile intenționate inaccesibile. Platonismul soluționează problema aplicațiilor intenționate postulând o *„capacitate nenaturală a minții umane“* de a accede direct la ele.

Putnam invocă ca argument central și decisiv faptul că realismul susține că o teorie ideală din punct de vedere epistemic ar putea fi falsă. Poziția realismului devine neinteligibilă confruntată cu următoarea construcție : T o teorie ideală și M un model oarecare al ei. Modelul poate fi extins astfel încât să aibe câte un membru corespunzător fiecărui element din S ; putem să înlocuim chiar acel membru cu elementul lui corespunzător din S și obținem atunci un model M′. Fiecare termen care denotă un membru din S în interpretarea intenționată a lui T denotă în M′ exact acel membru din S și deci acest model este standard, intenționat în raport cu restricția la S a fiecărui termen observațional. M satisface, în plus, constrângerile operaționale, teoretice și pare să fie un model intenționat. Teoria T apare ca adevărată în toate modelele intenționate. Dar realistul nu dispune de un criteriu care să-l ajute să distingă interpretarea cunoscută ca intenționată de un model M sau M′ (Putnam [4]).

Raționamentele lui Putnam nu afectează însă realismul intern. Dacă problema realistului este : *există obiecte ?* și conexiunile dintre semne și lucruri externe ne ajută să explicăm natura referinței, pentru realistul intern situația este complet diferită. În concepția realismului intern semnele (unui limbaj) nu corespund intrinsec obiectelor, independent de cine și cum sunt întrebuințate aceste semne ; *corespondența semne-obiecte* este *internă* unei *scheme conceptuale ;* nu există obiecte independent de scheme conceptuale, spune Putnam [5, p. 101]. Lumea este divizată în obiecte numai datorită introducerii unei scheme conceptuale ; semnele și obiectele sunt interne schemei de descriere, o interpretare intenționată își pierde sensul absolut, se relativizează la teorie. Obiecția adusă realismului intern este că teza indeterminării referinței îl face vulnerabil. Pearce și Rantala [1] consideră că raționamentele lui Putnam au mai curând o relevanță metodologică decât ontologică, nu este vizat realismul științific ci valoarea unor analize care utilizează teoria modelelor. Dacă analizele limbajelor pentru care au loc teoremele lui Löwenheim-Skolem și Gödel explicitează semnificații indezirabile pentru realiști urmează că sau realismul metafizic este inconsistent sau trebuie pus în discuție tipul de conceptualizare practicat în limbajele de ordinul întâi cu identitate.

Realismul intern promovat de Putnam păstrează unele teze ale filosofiei lui Quine : subdeterminarea teoriei de experiență, indeterminarea traducerii și a referinței, considerarea indeterminării referinței ca mai fundamentală decât cea a traducerii. Inconsistența realismului metafizic și adoptarea realismului intern nu înseamnă și acceptarea pragmatismului căci *a fi admis prin convenție nu înseamnă a fi arbitrar*. Obiectele nu există independent de schemele conceptuale, divizarea lumii în obiecte se face în funcție de schema introdusă. „Deoarece obiectele și semnele sunt în aceeași măsură interne schemei este posibil să spunem ce și cui corespunde“ (Putnam [3, p. 52]). Este aici supoziția lui Quine despre respingerea *modalităților de re*. (schimbând felul în care ne referim la un obiect alte proprietăți vor apare ca necesare, iar altele ca accidentale). Quine consideră că obiectele nu sunt de *re* asociate unor proprietăți, căci un obiect nu are nici o proprietate în mod esențial, asocierea dintre obiect și proprietate realizându-se numai lingvistic — între numele obiectului și un predicat.

Putnam concepe lumea ca o mulțime de obiecte. Merril [1] afirmă că realiștii consideră entitățile obiective (observabile și neobservabile) din care este formată lumea că au anumite relații și proprietăți independent de faptul că noi le cunoaștem, independent de o reprezentare particulară despre ele. Dacă *teoria cauzală a referinței* (Kripke) nu elimină modalitățile de *re*, atunci această teorie implică realismul metafizic și raționamentele lui Putnam nu se mai susțin.

În a treia accepție de concepție opusă nominalismului și conceptualismului, realismul (ca o alternativă a internalismului) ar fi un realism al universaliilor (de pildă mai multe instanțieri ale unei proprietăți). *Realismul contextualist* (cf. R. H. Schlagel [1]) afirmă existența reală a entităților numai relativ la structuri și contexte fizice particulare, un realism ca cel al lui Merrill [1]. Dacă lumea nu poate fi considerată o mulțime de obiecte nu înseamnă atunci că trebuie hipostaziate structurile universale ; și, în orice caz, nu ar trebui ca acest fapt să aibe consecințe în plan metodologic.

3.2. Realismul matematic și entitățile matematice

Problema dacă există entități abstracte (și entitățile matematice sunt considerate prototipuri ale unor astfel de obiecte) este o problemă filosofică veche, pe terenul căreia s-au confruntat două concepții — nominalismul și realismul. Nominaliștii au răspuns negativ la această problemă, în timp ce realiștii au afirmat că există obiecte abstracte. Quine [2, p. 233] propune, întrucât este vorba de realiști într-un sens special, să folosim termenul *platonism*, pentru a evita conotații indezirabile (epistemologic) asociate cuvântului *realism*. Și M. Dummett [1] propune folosirea termenului platonism în locul celui de realism. El spune textual : realismul despre obiectele matematicii este ceea ce eu numesc *platonism*. Utilizarea termenului platonism nu va fixa unic o semnificație (dar contextual va facilita înțelegerea) în sensul că deși dominantă va fi accepția platonism = realism matematic, în unele cazuri vom distinge platonismul ca fiind, doar o specie a realismului, supoziție filosofică, uneori, cu dezagreabile consecințe în planul fundațional al matematicii.

Termenul platonism (= realism) desemnează în filosofia matematicii o concepţie care afirmă că subiectul specific (obiectul) al matematicii îl constituie un domeniu al entităţilor matematice care există independent de gândirea umană şi că enunţurile matematice sunt adevărate sau false în funcţie de raportul lor cu proprietăţile acestor obiecte.

Ralismul sau *platonismul ontologic* (Bernays [1]) a fost poziţia din filosofia matematicii adoptată de o serie de mari matematicieni şi logicieni ca : G. Cantor, B. Bolzano, G. Frege, B. Russell, A. N. Whithead, K. Gödel, Quine şi alţii, reprezentând punctul de vedere al majorităţii matematicienilor. Esenţa realismului matematic constă în postularea unui domeniu de entităţi nementale, nelingvistice, nespaţiale, atemporale la care mintea umană accede pe calea unei *intuiţii neempirice* şi pe care le descrie formulele matematicii, iar ceea ce ele spun este adevărat sau fals. Activitatea matematicianului este una *„a descoperirii“* şi *„nu a invenţiei“*, comparabilă în această privinţă cu activitatea geografului. El trebuie să descopere entităţi matematice şi relaţiile dintre ele, stabilind pe această cale adevăruri care vor fi încorporate în matematică. O scrutare atentă a acestei caracterizări prin confruntare cu ceea ce fac matematicienii în practica lor, ar evidenţia carenţe intern structurale ale poziţiei realiste astfel descrisă în mod curent, aspect la care ne vom referi în partea consacrată unor remarci întru schiţarea unui punct de vedere în problemă. Dacă la această caracterizare a realismului adăugăm *postulatul existenţei unor puteri mentale nenaturale,* care asigură înţelegerea obiectelor matematice obţinem o descriere a platonismului. P. Bernays [1] distinge două variante de platonism : *platonism restricţionat (metodologic)* şi *platonism extrem* (sau *absolut*). Dacă platonismul restricţionat se limitează la considerarea unei proiecţii ideale a unui domeniu al gândirii, platonismul absolut postulează (în sensul realismului conceptual !) existenţa independentă a unei lumi de obiecte ideale ce ar conţine toate obiectele şi relaţiile din matematică. Platonismul în acest *sens tare* nu mai poate fi susţinut fiind considerat *asumpţia filosofică* răspunzătoare de *apariţia paradoxurilor logico-matematice.* Oricum, indiferent de accepţia în care este luat, ralismul matematic postulează o existenţă independentă de noi, pe care matematicianul o investighează şi o descrie. Esenţa realismului în matematică este formulată de Dummett [2] în termenii următori : „pentru orice enunţ care are un sens definit trebuie să fie ceva în virtutea căruia sau el sau negaţia lui este adevărată“. Se observă că noţiunile de *referinţă* şi *adevăr* sunt *centrale* în *realism,* diferenţa dintre *realismul moderat* (sensul slab) şi *platonismul extrem* (sensul tare) constând în faptul că ultimul operează cu două noţiuni ireductibile *„înţelegerea“* şi *„puteri mentale“* capabile de acest tip de înţelegere. Referinţa şi adevărul întemeiază şi justifică o credinţă filosofică de bază a realismului, *obiectivitatea* matematicii.

Punctul de vedere realist în filosofia matematicii se opune, în problema centrală a entităţilor abstracte (matematice), *nominalismului* care susţine că nu există entităţi abstracte, non-spaţio-temporale, şi *conceptualismului* care admite existenţa entităţilor abstracte, în particular a celor matematice, dar o pune în conexiune cu activitatea noastră mentală, ca şi descendenţilor lui actuali *formalismul* şi *intuiţionismul*. Dar pentru referiri mai explicite este necesar să dăm cel puţin o schiţă sumară a asumpţiilor şi tezelor de bază ale concepţiei realiste în matematică.

Asumpţia filosofică fundamentală a realismului matematic este cea despre *existenţa* obiectelor matematice la fel de legitimă ca propoziţia *că există obiecte fizice*. În acest sens Gödel [1], un platonician marcant în filosofia contemporană a matematicii, scrie : „ Clasele şi conceptele pot fi concepute ca obiecte reale... existând independent de definiţiile şi construcţiile noastre ; mi se pare că concepţia unor astfel de obiecte este tot atât aşa de legitimă ca asumpţia corpurilor fizice şi există tot aşa de mult motive să credem în existenţa lor. Ele sunt în acelaşi sens necesare pentru a obţine o teorie satisfăcătoare a matematicii după cum propoziţia că există corpuri fizice este necesară pentru a obţine o teorie satisfăcătoare a percepţiilor noastre sensibile". Realismul matematic gödelian consideră mulţimile (clasele) şi conceptele entităţi caracterizate prin proprietăţile : nu sunt localizate spaţio-temporal, există independent de gândirea noastră, pot fi înţelese şi descrise de noi.

Realismul matematic este în ochii majorităţii matematicienilor concepţia care face posibilă o explicaţie adecvat relevantă a semnificaţiei intelectuale a matematicii, a cunoaşterii matematice, lămurind că formulele matematice descriu obiecte şi relaţii matematice şi că ce spun ele este adevărat. Dintr-o asemenea perspectivă obţinem, de asemenea, o explicaţie a *intuiţiei matematice* şi a *adevărului matematic*. Intuiţia matematică văzută de Gödel ca o *„percepţie"* a obiectelor (să amintim că şi formalistul Hilbert concepe tot astfel intuiţia, în sens kantian, ca o percepţie, de data aceasta, *„a semnelor pe hârtie")* este analizată în *„stil transcendental"*, cum de fapt este întreaga lui argumentare în favoarea acceptării realismului ; adică, afirmă Gödel, adevărul axiomelor teoriei mulţimilor ne constrânge să admitem existenţa unei „percepţii a obiectelor teoriei mulţimilor", percepţie care nu este altceva decât intuiţia matematică şi care trimite, deci, la un *dat* exterior, un alt gen de realitate, ce trebuie distins de cel al existenţei fizice. Gödel notează : „Nu decurge totuşi de loc că datele de acest al doilea gen, întrucât nu pot fi asociate cu acţiunea unor anumite lucruri asupra organelor de simţ, ar fi ceva pur subiectiv aşa cum a afirmat Kant. Mai degrabă, ele pot reprezenta de asemenea un aspect al realităţii obiective, dar, în opoziţie cu senzaţiile, prezenţa lui în noi se poate datora unui alt gen de realitate". Dar, s-a obiectat că în acest mod transcendental nu se poate argumenta teza existenţei entităţilor matematice. Argumentarea filosofică dată de Gödel explicitează supoziţiile şi structura concepţiei realiste în matematică sugerându-ne plauzibilitatea ei, împărtăşită şi de matematicienii aşa numiţi *„lucrători" (working mathematicians)*, care cred că activitatea lor finalizează în teorii ştiinţifice autentice ce pot fi adevărate sau false despre o realitate matematică constrângătoare şi pe care ei o descoperă. Altfel prin ce miracol s-ar adapta aceste teorii la lumea obiectivă şi experienţă ? şi cum s-ar putea explica caracterul fructuos al conceptelor şi axiomelor matematicii ?

Argumente de natură logico-epistemologică în favoarea realismului matematic face și Quine [2, p. 289] [3, p. 98] și anume este vorba de aserțiunile referitoare la : a) *„angajarea ontologică“* a matematicii clasice față de entitățile abstracte de genul claselor și numerelor, determinată de cuantificarea asupra obiectelor abstracte ; b) rolul matematicii clasice în știință, în cadrul „fizicii teoretice și a altor discursuri sistematice asupra naturii“, pledoarie pentru o ontologie realistă a matematicii.

Dintre reprezentanții realismului matematic Frege, Russell și Ramsey au o concepție explicită și influența ideilor lor a cunoscut o largă răspândire. Invocăm, câteva fapte semnificative din opera acestor logicieni-matematicieni pentru a ilustra realismul matematic și a reține nuanțele acestei concepții configurată relevant în scrierile lor.

Specificul concepțiilor platoniste rezidă în postularea universaliilor *in anima* și conceptul lor favorizat a fost *obiectivitatea,* gândit că a exista independent de spirit (subiect) când ar fi accesibil mai multor subiecți gânditori. *Platonismul extrem* (sau *ontologic)* și-ar asocia, din perspectiva acestei distincții, sensul tare al *obiectivității* adică *a exista independent de spirit ;* întrucât Frege a descris obiectivitatea ca desemnând capacitatea de „a fi accesibil mai multor subiecți gânditori“, el nu este un platonist în primul sens al termenului, adică nu este un adept al platonismului ontologic, deși opera lui nu este scutită de prezența unor supoziții platoniciene. Frege își precizează poziția sa în termenii : „Înțeleg deci prin *obiectivitate* o independență față de formarea unor imagini lăuntrice pe baza rememorării senzațiilor anterioare, dar nu o independență față de rațiune ; într-adevăr a răspunde la întrebarea ce sunt lucrurile independent de rațiune ar însemna să judecăm fără a judeca, să spălăm un lucru fără să-l udăm. (Frege [1, p. 73]), iar în Frege [2] [3] definește *obiectivitatea* ca desemnând *„ce este accesibil tuturor subiecților care gândesc“*. Este evident că Frege nu acceptă platonismul ontologic, dar admite un gen de *realism moderat.* Obiectivitatea în sensul slab, cu care operează Frege, este independentă de senzație, sau orice altă reprezentare psihică, subiectivă, dar dependentă de rațiune, nivel la care subiectivitatea specifică senzației este depășită în obiectivitatea gândirii ; această depășire se realizează nu cu ajutorul cadrului transcendental de tip kantian, care asigură doar „consensul general uman“ și nu obiectivitatea gândirii. Dar, întrucât conform principiului separării logicului de psihologic, Frege a respins orice rol al psihologiei în investigațiile fundaționale n-a putut să ne explice cum se constituie genetic obiectivitatea, mulțumindu-se să indice doar care este garantul ei, *rațiunea.* Raționalismul fregean nu putea să ajungă la *ontologizarea* gândirii așa cum face *idealismul ontologic.* Explicitarea realismului fregean mai cere încă și alte distincții ca de ex. sensurile subiectivității, operarea cu sensul tare al acesteia, consonant cu principiile sale fundaționale, ignorând subiectivitatea transcendentală favorizată în kantianism, pentru a putea susține că numerele nu sunt entități subiective și, deci, pentru a întemeia *obiectivitatea* aritmeticii : „În cadrul aritmeticii noi nu avem de-a face cu obiecte“ pe care le cunoaștem ca pe ceva străin, exterior, prin intermediul simțurilor, ci cu obiecte date în mod nemijlocit rațiunii, care le poate intui deplin pe acestea ca pe ceva propriu al ei. În pofida faptului de mai sus, ori, mai bine zis tocmai datorită lui, aceste obiecte nu sunt fantasme subiective. Nu există nimic mai obiectiv decât legile aritmeticii" (Frege [1, p. 151]). Frege deși pleacă de la distincția kantiană *„obiectiv-real"* nu va accepta nici constructivismul kantian în care domeniul *obiectivului* se construiește în gândire ca rezultat al intervenției *cadrului transcendental a priori* și nici platonismul excesiv care postulează un *domeniu inteligibil transcendent*. Frege afirmă că axa pământului și centrul de greutate al sistemului solar sunt obiective dar nu sunt reale așa cum real este pământul însuși. Am putea spune, în lumina acestor distincții *„obiectiv-real"*, că nucleul ontologiei fregeene îl constituie *domeniul obiectiv nereal* ai cărui *„locuitori"* sunt și entitățile aritmeticii — numerele, considerate de Frege ca fiind obiective dar nu și reale, adică fiind aspațiale și atemporale. Pentru alte detalii privind ontologia fregeană, vezi M. Țurlea [1, p. 77—91].

În ceea ce privește realismul lui Russell unii interpreți ai operei marelui logician afirmă că s-ar datora influenței lui Frege, iar alții, precum Feibleman [1] relevă o anumită analogie între teoria tipurilor și ierarhia abstractivă din *Republica* lui Platon. Whitehead este răspunzător de introducerea elementelor realiste în calculul propozițional. Quine [4] constată că admiterea lui Φ și ψ sub cuantificatori ar trebui interpretată drept *germenii ontologiei platoniciene a universaliilor"*, căci Φ, ψ în $\Phi(x)$ și $\psi(y)$ referă „un sort de entități, probabil atribute, ca valori" — aspect relevant al *interpretării realiste* a entităților abstracte, atenuată prin versiunea nominalistă a claselor. Totuși, după K. Gödel [1] poziția filosofică dominantă în opera lui Russell rămâne cea realistă. Astfel în Russell [1] [2] sunt asumpții realiste explicite despre analogia dintre logică și zoologie, prima fiind doar un studiu mai abstract. Comparând axiomele logicii și matematicii cu legile naturii, evidența logică cu percepția senzorială, el afirmă că axiomele logicii și matematicii comportă, ca și legile fizicii, o justificare mai curând inductivă, căci fac posibile deducțiile faptelor senzoriale. Gödel [1] remarcă faptul că evoluțiile ulterioare din logică și matematică au confirmat punctul de vedere al filosofiei realiste asupra matematicii. Ideile lui Russell l-au influențat profund pe Gödel, care a devenit cel mai influent realist al matematicii. (Pentru detalii vezi și M. Țurlea [1] [2]).

Contribuțiile lui Ramsey, axate pe eliminarea consecințelor neplăcute produse de *definițiile impredicative* și reconstruirii satisfăcătoare a numerelor reale, au fost criticate pentru supozițiile platoniste subiacente. Ideea lui Ramsey a fost că definițiile impredicative pot fi admise deoarece cercul pe care îl conțin nu este vicios. Plecând de la exemplul că în descripția *cel mai înalt om din această cameră*, noi descriem ceva în termenii totalității care îl cuprinde, el a relevat că descripția respectivă *nu îl creează* ci numai *îl alege* sau *îl distinge*, a sugerat că același lucru se aplică proprietăților, totalitatea lor existând în sine. Ca ființe finite oamenii nu pot denumi fiecare proprietate din infinitatea proprietăților care există înaintea oricărei descrieri sau definiții. Acest mod de gândire a fost interpretat de Carnap ca echivalent unei credințe într-un domeniu platonician al ideilor ce ar exista independent de cunoașterea oamenilor, ființe finite. Carnap a considerat concepția lui Ramsey înrudită cu *„absolutismul conceptual"* iar matematica edificată pe această credință filosofică a numit-o *„matematică teologică"*, produsă de un spirit aidoma celui infinit și care nu stăruie în edificarea sistematică pas cu pas a construcției în chestiune.

3.3. Dificultățile epistemologice ale platonismului (ontologic)

Realismul consideră *teoriile științifice* (factual relevante) ca *„mulțimi de enunțuri"*, obiective, adevărate sau false despre domeniul din lumea fizică pe care îl studiază. În consecință *teoria semantică standard a acestor teorii* (fizice) atribuie termenilor teoretici o semnificație ce referă în lumea fizică.

Implicarea matematicii în teoriile fizice a sugerat ideea că realismul cu privire la teoriile fizice cere realism în filosofia matematicii (cf. H. Putnam [6]). S-ar putea formula cerința ca enunțurile matematice să fie considerate ca enunțuri obiective despre lumea fizică; este vorba, credem, de acele enunțuri matematice formulate în toriile fizice, cum ar fi *legea gravitației universale*.

Eforturile unor autori sunt îndreptate în direcția atacării cerinței implicării inextricabile a matematicii în teoriile fizice prin indicarea unor modalități de reformulare a acestor teorii, în cazul evocat al teoriei newtoniene a gravitației, în care nu se face apel la numere, mulțimi, funcții pentru exprimarea relațiilor dintre mărimile fizice, sau a definițiilor acestora.

Această strategie a fost formulată de H. Field [1] și vizează negarea cerinței de a postula existența entităților matematice. Deși acceptă concepția realistă despre teoriile științifice, acest autor insistă asupra existenței unei diferențe fundamentale dintre teoriile științifice fizice și cele matematice și ca o consecință a acestui fapt i se pare nelegitim orice transfer de argumente, care susțin realismul cu privire la entitățile teoretice ale științei, în favoarea realismului despre entități matematice. În acest context, *punctul-cheie* i se pare a fi demonstrarea faptului că uzul actual al matematicilor în știință nu cere existența obiectelor matematice și în acest sens argumentează că chiar o bună teorie matematică aplicată în științele empirice (factuale) nu produce aserțiuni despre observabil, adică nu este fructuoasă în producerea unor enunțuri autentice relevante despre obiectul de studiu al științei respective. Concluzia acestui autor, consemnează M. Tiles [1], este că rolul teoriilor matematice în cadrul științei ar fi acela de a oferi extensiuni conservative ale teoriilor fizice enunțate nominalist, ceea ce ar face uzul matematicii eliminabil în principiu.

* * *

A devenit o *asumpție quasi-populară* în filosofia matematicii enunțul *„platonismul este defunct"*. Concepția platonistă este una larg controversată, căci în timp ce H. Field o neagă alții încearcă o revigorare (Mark Steiner [1], J. Kim [1]). Dar în principal evoluția discuțiilor despre platonism au fost provocate de P. Benacerraf [1] a cărui idee centrală se referă la incompatibilitatea acestei concepții cu teoriile epistemologice actuale. Schimbările din climatul filosofico-epistemologic petrecute de la apariția lucrării lui P. Benacerraf determină, afirmă P. Maddy [1] o reformulare a provocării epistemologice a platonismului care nu mai poate fi sutenabilă cu argumentele utilizate la vremea când Benacerraf și-a scris studiul.

Versiunea lui Benacerraf, oarecum demodată, a provocării epistemologice la adresa platonismului avea ca premise : i) entitățile matematice sunt cauzal inerte și ii) teoria cauzală a cunoașterii (oarecum mai vagă) care întemeiau concluzia iii) aserțiunea : *platonismul este insutenabil*, larg împărtășită.

Să explicităm ce se înțelege prin prima premisă și a doua premisă. Semnificația primei premise este următoarea : întrucât entitățile matematice, ca orice entități abstracte, nu sunt spațio-temporale urmează că nu pot participa la interacțiuni de tip cauzal. În ceea ce privește premisa a doua — *teoria cauzală a cunoașterii* semnifică faptul că teoria standard a cunoașterii trebuie suplimentată cu exigența formulată în aserțiunea : există o conexiune cauzală între faptul care face adevărată credința și subiectul care are credința (Vezi P. Maddy [2]). Cerința rolului cauzal al entității matematice, abstracte, este revizuită de Benacerraf în termenii următori (cf. W. H. Hart [1]) : „pentru ca X să știe că S este adevărată cere o relație cauzală între X și referenții numerelor, predicatelor și cuantificatorilor lui S".

Platoniștii vor aparține unei categorii sau alteia în funcție de premisa (prima sau a doua) pe care o neagă. De pildă J. Kim a negat premisa că entitățile matematice sunt cauzal inerte și argumente analoage a formulat și P. Maddy prin relevarea unei particularități a credințelor perceptuale și anume nu sunt inferate din alte credințe perceptuale ci din stări ale aparatului nostru senzorial, un sort special de inferențe ; în timp ce M. Steiner va apăra platonismul respingând teoria cauzală a cunoașterii, ca și W. Hart care consideră aserțiunile acestei teorii ca irelevante pentru problema în discuție.

În contextul anterior schițat apare evident că *problema epistemologică* autentică pentru platonism este *teza insutenabilității*, dar în acest caz ar urma că respingerea uneia dintre premise ar echivala cu o soluție a acestei probleme. Ori, faptul că unii autori, precum Hart [1] neagă faptul că problema a fost soluționată, sugerează lui P. Maddy [2] ideea că versiunea lui Benacerraf nu a capturat complet problema reală, însuși Hart sesizând că dificultățile cu care se confruntă epistemologia platonistă nu au fost complet reținute în premisele-argument ale tezei insutenabilității platonismului.

S-ar părea că este atacată aserțiunea eficienței cauzale (revizuirea de către Benacerraf a rolului cauzal al entităților matematice) și în special teoria cauzală a cunoașterii despre care s-a răspândit aprecierea că este falsă. Cei care susțin această opinie despre *teoria cauzală a cunoașterii* par a nu fi curent cu dezvoltările mai recente ale acestei teorii. Dar, independent de destinul final al acestei teorii, rămâne pentru platoniști o problemă epistemologică semnificativă, cea referitoare la caracterul inert cauzal al entităților matematice și care nu a fost suficient *„capturată“* în strategia de apărare a tezei insutenabiiltății platonismului, și în acest caz o dezbatere loială a problemei trebuie să ia în considerare, după P. Maddy [2], a) atât dezvoltările produse în epistemologie de introducerea teoriei cauzale, ca și schimbările datorate eventualei abandonări a acesteia, astfel încât să se poată evalua cât mai adecvat exigențele epistemologiei generale; b) cât și o reexaminare a pozițiilor lui Benacerraf și Hart în vederea evitării dificultăților prezente în versiunea, anterior discutată, a *„provocării epistemologice“* a platonismului.

În scopul conturării cerințelor epistemologiei generale cu care ar urmă să se confrunte platonismul ar trebui analizată evoluția teoriei cauzale a cunoașterii. Mai multe contra-exemple la această teorie implică *cunoașterea inferențială;* de pildă, credința mea că toate lebedele sunt albe este inferată din credințele mele perceptuale despre diferitele lebede particulare, deși este evident că nu toate lebedele cauzează această credință. Exemple de acest gen au sugerat o structură mai nuanțată a teoriei cauzale a cunoașterii care formulează, de data aceasta o clauză pentru cunoașterea inferențială și alta pentru *cunoașterea non-inferențială*. Cunoașterea neinferențială, prezentă în actele perceptuale, presupune obiectul care o cauzează (cf. Grice [1]) în timp ce cunoașterea inferențială este obținută prin întrebuințarea unor tehnici inferențiale, aplicate unor premise adevărate; mediul acestui gen de cunoaștere este cel al inferențelor de la credințe la crdințe. Asemenea aspecte au fost încorporate într-o descendentă a teoriei cauzale a cunoașterii, *teoria credibilității* și care este, în esență, nu atât o teorie a cunoașterii, cât una a justificării. Următoarele două aserțiuni sunt relevante pentru nucleul *„teoriei credibilității“* formulate de Goldman: „Credința lui S că p este justificată dacă: 1) rezultă imediat dintr-un proces demn de crezare sau 2) „rezultă *via* un proces inferențial credibil (demn de crezare) din credințe justificate“. (Un proces inferențial este considerat demn de crezare dacă generează credințe adevărate din credințe adevărate).

Devierile de la teoria originală (cauzală) sunt în principal două: a) procesul demn de crezare (reliabil) nu este obligatoriu să fie cauzal și b) nu se cere ca p să participe la generarea credinței justificate. Pe scurt, *exigența cauzalității* este omisă în noua teorie, întrucât *credibilitatea* nu este identică cu *cauzalitatea,* prima fiind scopul introducerii în mod original a unei conexiuni cauzale adecvate noi.

Dacă asumăm că teoremele matematice sunt justificate prin inferența deductivă (proces inferențial credibil), tot ce mai rămâne este justificarea axiomelor ; un platonist, ținând seama de aserțiunile credibilismului, va oferi următoarele două opțiuni : „1) descrierea unui mecanism credibil (reliable), poate necauzal, (care nu implică în mod necesar entități matematice) care generează imediat credința noastră în axiome, sau 2) descrierea unui proces inferențial (prezumabil nedeductiv) care atunci când este aplicat la diferite credințe produce credința noastră în axiome“ (P. Maddy [2, p. 49]).

Oricare dintre cele trei dezvoltări ale teoriei cauzale a cunoașterii produce în *teoria credibilistă* : (i) eliminarea exigenței cauzale din clauza fundamentală, ii) eliminarea participării obiectului din clauza fundamentală sau iii) adăugarea clauzei inferențiale în condițiile chiar ale admiterii caracterului inert al entităților matematice este suficientă pentru blocarea argumentului care *asertează teza insutenabilității*, în forma originală, de unde rezultă că dificultățile epistemologice ale platonismului nu trebuie căutate în confruntarea acestuia cu cerințele epistemologice inspirate de credibilism. Epistemologia generală poate reține cerințe ce vin și din direcția altor explicații și teorii ale cunoașterii, deși credința autoarei, ale cărei idei le-am urmat în expunerea subiectului, este că numai o *teorie descendentă a teoriei cauzale va actualiza teza insutenabilității platonismului,* cu atât mai mult cu cât în evaluarea consecințelor credibilismului, relevante pentru epistemologia generală, trebuie luate în considerare dificultăți și carențe ale acestei teorii, semnalate de oponenții ei, precum R. Chisholm [1], R. Foley [1].

Să urmărim mai atent problema sursei dificultăților platonismului lărgind puțin cadrul abordării. Să reamintim că în textul lui P. Benacerraf [1, p. 672] la pagina menționată vorbind despre cunoașterea inferențială stipulează în clauza fundamentală ambele cerințe : a cauzalității și a participării obiectului, ca la pagina 674, unde discută despre Gödel, să constate dificultăți în explicitarea tezei cauzalității, dar o menține ferm pe a doua, care sesizează „absența unei explicații a lanțului dintre facultățile noastre cognitive și obiectele cunoscute“, spre deosebire de știința fizicii unde dispunem de o explicație cauzală. Deși această atitudine poate fi sugerată de *platonismul gödelian,* trebuie totuși admis, afirmă și M. Maddy [2, p. 51], există o asumpție implicită că nu toate credințele matematice au sursă inferențială, fapt constatabil din suplimentarea de către Benacerraf a credibilismului cu încă două cerințe : cel puțin unele credințe matematice trebuie să cadă sub incidența clauzei de bază și mecanismul demn de crezare (cauzal), al clauzei fundamentale, presupune obiectele credinței, aserțiuni prezente și în Hart [1] și care după opinia autoarei citate au fost susținute și de teoria cauzală originală a cunoașterii. Acestea generează dificultățile platonismului și sursa lor acreditează că există o veritabilă problemă epistemologică a platonismului.

Prima cerință care stipulează că nu orice credință matematică este inferențială trimite la cerința participării obiectului. Justificarea unei părți semnificative a matematicii prin proceduri inferențiale a lăsat nerezolvată totuși problema justificării axiomelor, care, cândva a fost plasată în competența logicii și nesoluționată în această sferă. Acum nu mai poate aștepta o rezolvare decât pe cale inductivă, modalitate apreciată de mulți autori ca nesatisfăcătoare. Poziția lui Quine și Putnam sugerează o formă mai teoretică a inducției arătând că justificarea credinței în axiomele matematice este asertată de faptul că ele formează partea centrală a științei confirmate.

Dintre obiecțiile la atitudinea lui Benacerraf și Hart menționăm : matematicienii nu apelează la aplicații pentru justificarea aserțiunilor lor și deci poziția adoptată rămâne irelevantă pentru practica matematică ; părți ale matematicii și chiar unele axiome nu sunt folosite în aplicații. Ar decurge de aici „o reformă a matematicii existente“ (cf. P. Maddy [2, p. 51]), consecințe care ar stârni interesul nominaliștilor și platoniștilor, dar matematicienii n-ar apela, evident, la platonism și platoniști în această direcție.

P. Maddy [2, p. 52] consideră că sursa cerințelor adăugate de Benacerraf și Hart, sursa dificultăților cu privire la epistemologia platoniciană, nu este derivată dintr-un principiu epistemologic ce descinde dintr-o teorie cauzală, ci rezidă în asumpția fundamentală despre natura matematicii — *analogia „știință-matematică“* și care are rolul central în platonismul gödelian (Gödel [1] [2]). A devenit o formulare curentă a platonismului aserțiunea că *matematica este știința entităților matematice* așa cum *fizica este știința obiectelor fizice,* ambele aceste științe având structuri similare. Din considerarea matematicii ca *paralelă* (și *nu adjunct teoretic* al științei) la știință decurge că nu toate credințele sunt inferențial justificate și cum mecanismul credibil sau demn de crezare în știința fizică este cel al percepției obișnuite, *cazul paradigmatic* în care obiectul produce credințele, *mutatis mutandis,* în virtutea definiției matematicii ca știință a entităților matematice, ar trebui să presupună (poate chiar cauzal) obiectul credinței, ceea ce ar semnifica ceva asemănător percepției ; avem astfel explicitată a doua credință adițională a credibilismului.

Într-un asemenea context P. Maddy consideră că provocarea epistemologică (de sursă Grice [1] și nu Goldman) a platonismului utilizează un argument în susținerea tezei *insutenabilității* având următoarea structură :

1) entitățile matematice sunt cauzal inerte
2) teoria cauzală a percepției
3) platonismul presupune analogia știință-matematică,
deci,
4) platonismul este insutenabil.

Vechiul argument utiliza ca premise pentru teza insutenabilității platonismului numai *1)* și *epistemologia generală.* Noul argument are unele deficiențe : poziția adoptată de Quine și Putnam respinge premisa (3) ; cât de departe poate merge analogia matematică-știință, căci deși împărtășesc ambele ceva semănător percepției, totuși mecanismul clauzei fundamentale matematice asumă numai atât (perception-like), dar nu este cauzal, cum susține chiar Benacerraf și, în sfârșit, rămâne discutabilă premisa (1).

Cercetările invederează pregnant ideea că sursa fundamentală a dificultăților persistente în epistemologia platonistă nu rezidă în considerații epistemologice generale ci în asumpția fundamentală despre *natura matematicii,* exprimată prin celebra *analogie matematică-știință*, devenită *„pivotul realismului gödelian"*; P. Maddy [2, p. 53] sugerează că s-ar putea păstra esența concepției platoniste, conform căreia matematica are ca subiect de studiu entitățile matematice, în varianta Quine-Putnam, renunțând la asumpția analogiei. Însă această asumpție este indispensabilă platonistului când trebuie să descrie mecanismul clauzei de bază văzând ceva asemănător percepției (perception-like) operantă în matematici. Unele argumente, menționate anterior, pledează împotriva renunțării la asumpția analogiei la care s-ar putea adăuga că poziția adoptată de Quine și Putnam face vulnerabil platonismul, iar necesitățile științei cer postularea entităților matematice ceea ce face, cel puțin, plauzibilă dacă nu adevărată *asumpția gödeliană a analogiei.*

3.4. Realismul și fundamentele matematicii

Realismul este considerat alternativa rivală a *formalismului.* În perspectiva filosofiei realiste a matematicii problemele matematice, inclusiv de genul *ipotezei continuului,* sunt sau adevărate sau false, indiferent de independența lor în raport cu diferite sisteme axiomatice. Realismul ca poziție filosofică este preferat de mulți matematicieni (dacă nu chiar de majoritatea lor). În primul rând, avantajul adoptării realismului este acela că nu mai este necesară *justificarea axiomelor* teoriei mulțimilor (cf. P. Cohen [1,p . 11]) ; ne dispensăm de demonstrarea consistenței axiomelor și nu suntem nevoiți să explicăm de ce aceste axiome sunt fructuoase și demne, în consecință, de o atenție specială. Ori, *poziția formalistă,* remarcă autorul citat, are ca slăbiciune principală faptul că trebuie să explice de ce axiomele teoriei mulțimilor, nereflectând o realitate... permit demonstrarea unor enunțuri aritmetice, indemonstrabile prin mijloace finitare.

În același timp realismul se confruntă cu dificultăți, unele fiind generate de rezultate recente, cum ar fi *rezultatele de independență.* Astfel, o primă dificultate privește neputința de a explica care este sursa șirului infinit de axiome mai înalte (higher axioms), cum sunt *„axiomele mai înalte ale infinitului).* Problema infinitului este privită azi ca o parte a *problemei existenței în matematică,* (vezi A. Robinson [1, p. 558]), a problemei existenței noțiunilor aabstracte în genere. Dacă pentru un nominalist existența unei mulțimi de cinci elemente este la fel de iluzorie ca și existența mulțimii numerelor naturale, la cealaltă extremitate (opusă) se află realiștii platonicieni care, scrie A. Robinson [1, p. 558], „cred în genere în existența ideală a entităților matematice, inclusiv în existența mulțimilor transfinite de numere cardinale, oricât de mari, în măsura în care ele pot fi introduse cu ajutorul unor axiome adecvate". Cu toate că realiştii acceptă, în principiu, existenţa acestor entităţi matematice, se poate constata reticenţa lor atunci când este vorba de „contemplarea cardinalilor de un tip suficient de inaccesibil". Nu dispunem de o evidenţă intuitiv convingătoare absolută nici pentru respingerea sau acceptarea unor axiome mai puternice decât cea mai generală axiomă a infinitului, aşa cum este cazul axiomei cardinalilor măsurabili. Însă dificultăţi mai recente ale realismului vin de la *rezultatele de independenţă* (datorate în principal lui P. Cohen) şi *consistenţă*. În timp ce cred în stabilirea ipotezei continuului şi a altor probleme similare, nu întrevăd posibilitatea analoagă pentru axioma cardinalilor măsurabili. Dar şi în acest context se pare că formaliştii se află într-o situaţie mai puţin favorabilă decât cea a realiştilor, deoarece pentru ei există propoziţii în însăşi teoria numerelor, ca de exemplu *Consis (ZF)*, care se află dincolo de rezolvare, în timp ce optimismul realiştilor este întreţinut de posibilitatea ca *Consis (ZF + Cardinal măsurabil)* să fie redusă la consistenţa unor enunţuri puternice convenabile, considerate ca axiome ale infinitului şi, mai general de posibilitatea deciderii chestiunilor din teoria numerelor prin intermediul unei axiome adecvate a infinitului. În lucrările mai recente asupra independenţei s-a răspândit ideea că o semnificaţie fundamentală a rezultatelor tehnice este credinţa că teoria mulţimilor se referă la *obiecte „reale"* ceea ce ar constitui o profundă motivaţie a realismului matematic.

Punctul de vedere realist facilitează speculaţii interesante şi fertile asupra destinului ipotezei continuului. Se ştie că intuiţionismul brouwerian este extrem de distructiv, promovând o atitudine negativă în raport cu matematica clasică, şi cum spune K. Gödel [2, p. 221], şi în raport cu generalizarea ei naturală — teoria mulţimilor a lui Cantor. Din punct de vedere intuiţionist teoria χ-lor mai mari decât χ_1 este respinsă ca fiind fără sens. Conjectura lui Cantor primeşte sensuri diferite de problema în formularea ei originală, toate conducând fie la răspunsuri unele afirmative, altele negative. Această situaţie creată prin activitatea intuiţioniştilor se explică după analizele lui Gödel ca fiind „un rezultat al unei anumite concepţii filosofice asupra naturii matematicii" şi care „admite obiectele matematice numai în măsura în care ele sunt interpretabile ca fiind propriile noastre construcţii sau, cel puţin, ca fiind date în intuiţia matematică". Şi K. Gödel, „care poate fi considerat cel mai marcant platonician de astăzi" (cf. A. Robinson [1, p. 558]), consideră că dintr-o altă perspectivă filosofică, cea realistă, se argumentează că există o *fundare* satisfăcătoare a teoriei axiomatice a mulţimilor. „Pentru cineva care consideră obiectele matematice existând independent de construcţiile noastre sau de intuirea lor individuală şi care cere numai ca conceptele matematice generale să ne fie suficient de clare pentru a fi capabile să le recunoaştem consistenţa lor şi adevărul axiomelor care se referă la ele, există, cred, o fundare satisfăcătoare a teoriei mulţimilor a lui Cantor în întregul ei sens şi în întreaga sa extensie originală, şi anume axiomatica teoriei mulţimilor interpretată în modalitatea care va fi schiţată mai jos" (K. Gödel [2, p. 321]).

Gödel a arătat că această abordare (am zice filosofic realistă) nu produce şi nu se confruntă cu dificultăţi şi, deci, numai aparent a existat, prin apariţia paradoxurilor, o „condamnare a ei la eşec". Dificultăţile devin aparente în lumina unei anumite interpretări proprii, specifice a realismului în lucrarea lui Gödel [1], legată de înţelegerea conceptului de mulţime. Gödel [2, p. 322] scrie: „În măsura în care mulţimile apar în matematică (cel puţin în matematica de azi, incluzând întreaga teorie a mulţimilor a lui Cantor) ele sunt mulţimi de numere întregi, sau raţionale (adică de perechi de întregi) sau reale (adică de mulţimi de numere raţionale), sau de funcţii de numere reale (adică de mulţimi de perechi de numere reale) etc.". Când matematicienii stabilesc teoreme asupra existenţei mulţimilor, în general, adică asupra tuturor mulţimilor, aceste teoreme pot primi interpretări specifice, în sensul că sunt valabile despre mulţimi de întregi, mulţimi de mulţimi de întregi etc. Altfel spus şi aceste mulţimi, determinate, posedă proprietatea asertată în teoreme generale referitoare la mulţimi în general sau, ceea ce este acelaşi lucru, totalitatea mulţimilor. Particularităţile conceptului de mulţime din interpretarea lui Gödel sunt descrise de el astfel: „Acest concept de mulţime, totuşi, în conformitate cu care o mulţime este ceva care se obţine din întreg (sau alte obiecte bine definite) prin aplicarea iterată a operaţiei *„mulţime de"*, nu ceva obţinut prin divizarea totalităţii tuturor lucrurilor existente în două categorii, nu va duce în general niciodată la contradicţii". Ideile gödeliene sunt aici în deplin acord cu „activitatea naivă şi necritică", cu acest concept de mulţime (descris de el) complet self-consistenţă, a matematicienilor lucrători. Se poate face observaţia, constată Gödel, că „spiritul disciplinelor matematice moderne abstracte (şi el are în vedere în mod expres, teoria categoriilor) transcende acest concept de mulţime", lucru indicat prin self-aplicabilitatea categoriilor, a se vedea pentru acest aspect S. Mac Lane [1]. Opinia lui Gödel este că distingându-se categorii de nivele diferite nu se pierde din conţinutul matematic al teoriei. În interpretarea gödeliană a fundamentelor teoriei mulţimilor, şi în general a matematicii, *paradoxurile* devin irelevante matematic, constituind o problemă serioasă mai curând pentru logică şi epistemologie. Şi Gödel conchide: „Dacă ar exista demonstraţii matematice interesante care nu ar fi posibile în această interpretare, atunci paradoxurile ar deveni o problemă serioasă pentru matematică (K. Gödel [2, nota 12]. Pentru aprofundarea înţelegerii interpretării propuse de Gödel ne mai referim, utilizând propriile lui note la text, la câteva expresii relevante pentru concepţia sa realistă *sui generis*: *aplicarea iterată* a operaţiei *„mulţime de"* include şi *iteraţia transfinită*, adică cu propriile lui cuvinte, totalitatea mulţimilor obţinute prin iteraţie finită este considerată a fi ea însăşi o mulţime şi o bază pentru alte aplicaţii ale operaţiei „mulţime de", ceea ce indică pentru noi, credem, o modalitate de înţelegere a transfinitului, a *„sursei"* axiomelor infinitului *„problemă în impas"* pentru *orientarea filosofică formalistă* asupra naturii matematicii. *„Mulţime de"* este reluată întru noi clarificări în nota 14 la textul gödelian în termenii: „Operaţia mulţimea x-lor (unde variabila „x“ are ca domeniu un anumit gen de obiecte) nu poate fi definită în mod satisfăcător (cel puțin nu în starea actuală a cunoașterii), ci poate fi doar parafrazată prin alte expresii care cuprind din nou conceptul de mulțime, cum ar fi „multitudinea x-lor“, «combinația oricărui număr „x“», „partea totalității x-lor“, unde o „multitudine“ („combinație“, „parte“), este concepută ca ceva *care există în sine, indiferent dacă noi o putem defini, într-un număr finit de cuvinte,* (astfel că mulțimile aleatorii *nu sunt excluse)*. Finalul notei este consonant cu *„liniile de forță“* ale concepției realiste despre matematică. Originalitatea intepretării gödeliene a realismului matematic este însă mai pregnantă în nota 15 a textului, unde ni se pare că se încearcă eliminarea, sau cel puțin diminuarea *cerinței impredicativității,* solidară oricărui gen de platonism în matematică: „Decurge imediat din această explicație a termenului „mulțime“ că *o mulțime a tuturor mulțimilor* sau alte mulțimi de o extensie similară nu pot exista, întrucât orice mulțime obținută în acest fel dă naștere imediat la noi aplicații ale operației „mulțime de“ și, prin urmare, conduce la existența unei mulțimi mai mari“ (sublinierea mea, M Ț.).

După referiri la sisteme axiomatice ale teoriei mulțimilor existente (unele utilizând axiome pentru o folosire nerestrânsă a conceptului de mulțime), suficiente să asigure demonstrații pentru toate teoremele inventate până acum, cu excepția teoremelor asupra existenței numerelor cardinale extrem de mari, evocând progresele în ceea ce privește axiomele infinității și ipoteza continuului (dintre care unele vor fi menționate mai târziu), K. Gödel [2] afirmă: „Astfel, problema continuului a lui Cantor, indiferent ce punct de vedere filosofic se acceptă, în mod neîndoielnic păstrează cel puțin acest sens: a găsi un răspuns și dacă e așa care anume, se poate deriva din axiomele teoriei mulțimilor, așa cum sunt acestea formulate în sistemele citate“. Și Gödel consideră că asumând această interpretare se pot avansa trei variante de răspuns pentru problema lui Cantor: a) conjectura lui Cantor poate fi demonstrabilă, b) conjectura poate fi refutabilă și c) conjectura poate fi indecidabilă.

Dacă *sensul* conjecturii lui Cantor este independent de orice *poziție filosofică,* s-ar părea chiar în spiritul studiului gödelian, că nu tot astfel stau lucrurile când se pune problema *rezolvării* ei și unde concepția filosofică subiacentă cercetării o poate facilita sau crea unele obstacole. Distincția este sugerată, sau întărită, de remarca lui Gödel conform căreia „a treia alternativă reține aspectul că dificultățile problemei cantoriene nu sunt probabil pur matematice. Opinia lui Gödel (asumând rezultatul că ipoteza lui Cantor *nu este refutabilă* pe baza axiomelor teoriei mulțimilor, cu condiția ca aceste axiome să fie consistente) este că stabilirea unei teoreme de indecidabilitate a conjecturii lui Cantor nu va smnifica realmente o rezolvare a problemei. La acest punct platonismul gödelian marcant devine frapant: „Pentru că, dacă sensurile termenilor primitivi ai teoriei mulțimilor așa cum sunt explicați la paginile 328—329 și în nota 14 sunt acceptate ca fiind consistente, urmează că noțiunile și teoremele teoriei mulțimilor descriu *o anumită realitate bine* *determinată* (s.n. M. Ț.) în care conjectura lui Cantor trebuie să fie sau adevărată sau falsă. Deci indecidabilitatea ei din axiomele care sunt admise poate însemna doar că aceste axiome care sunt admise astăzi (poate însemna doar că aceste axiome) nu conțin o descriere completă a acestei realități. O asemenea credință nu este deloc himerică, deoarece este posibil să se indice căile prin care decizia unei probleme, care este indecidabilă din axiomele uzuale, să se poată totuși obține". (K. Gödel [2, p. 323]). Și din nou obținem *„luminări"* asupra sursei axiomelor, îndeosebi ale celor privind infinitul, invederând *virtuțile realismului matematic,* în general. Conceptul-cheie explicativ rămâne, din nou cel al operației *„mulțime de"*, care ne dă seama, pe de o parte, de faptul că axiomele teoriei mulțimilor nu formează un sistem închis în el însuși, (datorită sus-amintitului concept subiacent acestora), iar, pe de altă parte, de locuitorii universului matematic, în speță cel teoretic. Mai explicit, invocând textul gödelian, axiomele devin din acest punct de vedere „propoziții asertând existența numerelor cardinale foarte mari (adică a mulțimilor având aceste numere cardinale"), cea mai simplă dintre aceste axiome ale infinitului asertează chiar existența numerelor inaccesibile — în sensul mai slab sau mai tare — $> \chi_0$. *Semnificația centrală* aici a acestui fapt, a acestei axiome anterior enunțată, este că „totalitatea mulțimilor ce se pot obține prin folosirea procedurilor de formare a mulțimilor exprimate în alte axiome formează din nou o mulțime și prin urmare, o nouă bază pentru alte aplicări a acestor proceduri" (K. Gödel [2, p. 323—324]). Fenomenul în cauză este ilustrat de axiomele infinității formulate de Mahlo, aceste fapte întemeind ideea că actualul sistem de axiome pentru teoria mulțimilor este incomplet vis-à-vis de *realitatea matematică, concept privilegiat,* dacă nu *pivot* în realismul ca o poziție filosofică despre natura matematicii. În viziunea lui Gödel plecând de la alte concepte primitive ale teoriei mulțimilor, cum ar fi cel de „proprietatea mulțimii" obținem extensiuni continue ale axiomelor care se referă la el. Și în mod similar se poate proceda plecând de la conceptul de „proprietatea proprietății mulțimii" etc. Noile axiome, în măsura în care sunt recunoscute și acceptate ca axiome ale teoriei mulțimilor pot avea consecințe relevante pentru ipoteza continuului. Se poate menționa aici câte ceva din progresele fundaționale legate inclusiv de *ipoteza continuului,* de care am amintit (în paginile anterioare), și anume că pe baza unor principii (diferite radical de cele folosite de Mahlo), Dana Scott a demonstrat că unul dintre acestea implică negația propoziției A a lui Gödel (cf. K. Gödel [2, p. 326]). În acest cadru, menționează Gödel în nota 20 a textului său, „demonstrația de consistență pentru ipoteza continuului explicată la pagina 326 nu merge dacă această axiomă este adăugată. Totuși nu s-a clarificat încă faptul că aceste axiome sunt implicate de conceptul general de mulțime, în același sens cum sunt acelea ale lui Mahlo". La rândul lor aceste axiome produc propoziții indecidabile, sporind numărul celor existente.

Ce se poate spera în legătură cu ipoteza continuului ? Gödel scrie : „Cât privește problema continuului există o mică speranță de a o rezolva cu ajutorul acelor axiome ale infinităţii care pot fi formulate pe baza principiilor lui Mahlo", iar în altă parte, el continuă : „Astfel din oricare punct de vedere, dacă se mai ia în consideraţie şi ceea ce a fost spus în secţiunea 2, se poate face conjectura că problema continuului nu poate fi rezolvată pe baza axiomelor formulate până acum, dar pe de altă parte, ea se poate rezolva cu ajutorul unor anumite noi axiome care vor formula sau vor implica ceva asupra definibilităţii mulţimilor" (K. Gödel [2, p. 324, 325—326]).

Gödel menţionează faptul semnificativ că programul lui Hilbert referitor la o soluţie a problemei continuului, în fapt nerealizat, a fost centrat pe o considerare a tuturor definiţiilor posibile. Gödel înţelege conceptul de definibilitate în sensul precizat în nota 21 : „Şi anume definibile (este vorba de mulţimi — M. Ţ.) prin anumite proceduri «în termenii numerelor ordinale» (adică prin ipoteza că pentru orice număr ordinal este dat un simbol care-l denotează)... *Paradoxul lui Richard*, desigur, nu se aplică acestui gen de definibilitate, întrucât totalitatea ordinalelor este cert nenumărabilă". Acest concept de *definibilitate*, „definibil" în teoria axiomatică a mulţimilor facilitează derivarea în această teorie a ipotezei generalizate a continuului din axioma că orice mulţime este definibilă în sensul anterior precizat. Şi Gödel [2, p. 326] adaugă : „Întrucât această axiomă (să o numim „A") se dovedeşte a fi demonstrativ consistentă cu celelalte axiome, sub ipoteza consistenţei acestor alte axiome, acest rezultat (indiferent de poziţia filosofică luată) în raport cu definibilitatea arată consistenţa ipotezei continuului cu axiomele teoriei mulţimilor, cu condiţia ca aceste axiome să fie ele însele consistente". (Pentru detalii a se vedea K. Gödel [3]. Structural demonstraţia se aseamănă cu demonstraţia de consistenţă a geometriei neeuclidiene prin invocarea unui model din cadrul geometriei euclidiene. Mai precis, mulţimile definibile în sensul precizat mai înainte formează un model al teoriei mulţimilor în care propoziţia A, şi deci ipoteza generalizată a continuului, este adevărată.

Un alt argument, în favoarea *nerezolvabilităţii* problemei continuului în cadrul axiomelor actuale ale teoriei mulţimilor, constă în referinţa la date necunoscute lui Cantor „care par a indica faptul că conjectura lui Cantor se va dovedi greşită pe când pe de altă parte, o respingere a ei este demonstrabil imposibilă pe baza axiomelor admise astăzi (K. Gödel [2, p. 326]).

În fine, trebuie menţionate, spune Gödel [2, p. 327], consecinţe implauzibile ale ipotezei continuului : a) există submulţimi ale unei linii drepte de puterea continuului care sunt acoperite (de o mulţime numărabilă de puncte) de orice mulţime densă de intervale ; b) există submulţimi infinit dimensionale ale spaţiului Hilbert care nu conţin o submulţime non numărabilă finit-dimensională (în sensul lui Menger-Urysohn ; c) există, în fine, un şir infinit A^1 de descompuneri ale oricărei mulţimi M de puterea continuului în mulţimi mutual exclusive de mulţimea continuului. A^i_{xi} astfel încât în orice fel este aleasă o mulţime A^i_{xi} pentru orice i, $\prod_{i=0}^{\infty} (M - M_{x_i}^{i})$ este numărabil ; a) și c) sunt foarte implauzibile, chiar dacă puterea continuului este înlocuită prin „χ_1".

Lui Gödel i se pare suspectă situația că deși există numeroase propoziții care implică negația ipotezei continuului, nu există, încă, o propoziție care să implice ipoteza continuului. Credința lui Gödel era atunci că există suficiente motive ca să se poată presupune că „rolul ipotezei continuului în teoria mulțimilor va fi acela de a conduce la descoperirea unor noi axiome care vor face posibilă respingerea conjecturii lui Cantor" (K. Gödel [2, p. 327]).

Prin demonstrația *indecidabilității* problemei continuului din axiomele acceptate ale teoriei mulțimilor astăzi se știe că Paul Cohen [2] a rezolvat în sens negativ problema dacă ipoteza continuului a lui Cantor este demonstrabilă din axiomele lui von Neumann-Bernays ale teoriei mulțimilor (inclusiv axioma alegerii) ; chestiunea adevărului ei și-a pierdut sensul ca și problema adevărului postulatului al V-lea al lui Euclid. Dar, aceste două situații diferă atât matematic cât și epistemologic, conchide Gödel. *Matematic,* ipoteza continuului (fiind vorba de asertarea lui) produce o extensie fructuoasă fiind sterilă pentru teoria numerelor, în timp ce referitor la postulatul al V-lea se constată că atât el cât și negația lui sunt extensii în sens slab. *Epistemologic,* problema își pierde sensul în urma unei demonstrații a indecidabilității, numai atunci când avem a face cu un sistem de axiome ipotetico-deductiv (ceea ce înseamnă că sensurile termenilor primitivi sunt lăsate nedeterminate). Deoarece în geometrie sensurile adoptate se referă mai curând la intenția fizică, decizia, afirmă Gödel, cade în afara matematicii. Situația este diferită în ceea ce privește *„teoria mulțimilor transfinite"* unde este evident că întrucât obiectele ei nu aparțin lumii fizice, conexiunea lor cu experiența fiind indirectă și săracă vom constata un rol mai puțin important al conceptelor acestei teorii în domeniul teoriilor fizice.

Revenim la *analiza filosofică* a ipotezei continuului în scopul stabilirii relevanței concepției realiste privind *solubilitatea* acestei probleme. Reamintim că N desemnează mulțimea tuturor întregilor pozitivi : 1, 2, 3, ... Continuul — mulțimea tuturor numerelor reale sau mulțimea tuturor punctelor de pe dreaptă (linie), este deci o mulțime notată C și ai cărei membri sunt toate submulțimile lui N, adică mulțimi de întregi pozitivi. Se pune întrebarea care este puterea (numărul cardinal) al acestei mulțimi C. Presupunerea că puterea acestei mulțimi este al doilea alef, adică χ_1 este *ipoteza continuului.* Într-o celebră conferință a lui Hilbert, ocazie în care el a formulat o listă de probleme matematice nerezolvate, problema continuului figura pe primul loc.

Pentru rezolvarea acestei probleme este necesar ca mai întâi să determinăm care sunt submulțimile lui N și cum pot fi obținute *constructiv* sau nu. Pe scurt, modul standard de obținere a acestor submulțimi a fost prin *comprehensiune,* în virtutea unor condiții enunțate reglementate prin cunoscuta concepție a lui Skolem [1] semnificând uzul unei formule bine definite a calculului funcțional de ordinul întâi cu o variabilă liberă, construită din enunțuri atomare de apartenență. Această concepție comportă un pregnant *caracter impredicativ,* motiv pentru care este criticată de diferite orientări filosofice — antropologismul, finitismul, intuiționismul, predicativismul. Trebuie adăugat că în timp ce teorema lui Cantor afirmă că mulțimea tuturor submulțimilor unei mulțimi S are o putere mai mare decât S însăși, celebra teoremă a lui Löwenheim-Skolem enunță că pot fi obținute numai numărabil de multe submulțimi, ori, continuul nu este numărabil.

Dificultăți generate de *„impredicativitate"* ar putea fi depășite dacă se adoptă o *concepție platonistă* în sensul acceptării *preexistenței* conceptelor matematice, ceea ce ar semnifica faptul că matematicianul *„descoperă"* nu inventează *obiectele matematice.* O submulțime a lui S determinată prin intermediul totalității tuturor submulțimilor lui S poate fi complet descrisă deși nu poate fi construită ; este relația dintre submulțime și totalitate care în prezența unor condiții adecvate va constitui o determinație unică a submulțimii... „În consecință, scrie Fraenkel [1, p. 8] caracterul *nepredicativ* al definiției nu va evita, din punctul de vedere al platonistului, ca submulțimea respectivă de a fi admisă împreună cu submulțimi construite într-un mod predicativ". Sunt importante în acest context două aspecte : i) a decide dacă *ipoteza continuului* a lui Cantor este *adevărată* sau nu și ii) a stabili *independența ipotezei* în raport cu axiomele matematicii clasice, ceea ce revine la a arăta că ipoteza continuului și negația ei sunt compatibile cu matematica clasică. În acest caz s-a creat în matematică o situație analoagă celei apărute după *demonstrarea independenței axiomei paralelelor* care a dus la *„bifurcarea geometriei"* în *euclidiană* și *neeuclidiană ;* demonstrația independenței ipotezei continuului ar conduce, consideră A. Fraenkel [1], la două feluri de matematică : *cantoriană* și *necantoriană.* Azi știm că Gödel a stabilit numai consistența ipotezei continuului, iar P. Cohen a demonstrat independența acesteia.

Gödel adoptă filosofic *realismul platonic* în sensul că conceptele și axiomele matematicii, în particular ale teoriei mulțimilor *„descriu o realitate bine determinată".* În această realitate conjectura lui Cantor trebuei să fie sau *adevărată* sau *falsă,* și *indecidabilitatea* ei din axiomele cunoscute astăzi înseamnă că aceste axiome nu conțin o descriere completă a acestei realități". Gödel face presupunerea că pot exista „alte axiome necunoscute până acum pe care o înțelegere mai profundă a conceptelor subiacente logicii și matematicii ne va oferi posibilitatea să le recunoaștem ca implicate de aceste concepte" (Gödel [2]).

A. Fraenkel [1, p. 9] observă caracterul natural al *problemei continuului,* deoarece depinde de capacitatea noastră de a defini submulțimile unei mulțimi date, în cazul de față, N. Ori, este firesc ca *specificarea* puterii (cardinalului) totalității obiectelor (submulțimilor) să fie precedată de cunoașterea faptului *ce sunt aceste obiecte.* La data scrierii acestui articol Fraenkel era îndreptățit să mai remarce că nu se cunoaște în ce direcție ar trebui căutate axiomele „ascunse" și nici dacă ele se referă la o realitate matematică încă necunoscute nouă. Din prezentarea lui Fraenkel modelul rezolvării era *problema submulțimilor,* iar soluțiile au fost căutate de P. Bernays [1] și R. McNaughton [1] adoptând platonismul într-o formă *mai radicală* prin extinderea la mulțimi infinite (în acest caz la mulțimea N a tuturor întregilor) a procedurii quasicombinatoriale, încorporată în *conceptualism* permițându-i celui de al doilea autor să justifice *teoria simplă a tipurilor* și *teoria mulțimilor a lui Zermelo.*

Există unele obiecții la această încercare de obținere a submulțimilor necesare soluționării problemei continuului : descrierea mulțimilor nu oferă indicații relevante pentru soluționare, nu se discriminează suficient de clar între mulțimi definibile *constructiv* (de pildă cu ajutorul principiului comprehensiunii) și mulțimi definibile printr-un *principiu existențial,* cum ar fi axioma alegerii ; și, în fine, sunt asumate scheme conceptuale (prin natura lor epistemologice) pentru a rezolva scopuri logico-matematice ce țin de *principiul comprehensiunii* și *problema continuului,* ceea ce semnifică, încheie Fraenkel, așezarea chestiunilor logice (și matematice) pe fundamente epistemologice și care în mod esențial am adăuga noi, țin de platonism (supoziție ontologică).

În viziunea lui Gödel indecidabilitatea ipotezei continuului s-ar reduce la faptul că axiomele (actual uzuale) ale teoriei mulțimilor nu descriu complet realitatea matematică, adică un sistem incomplet nu poate descrie complet lumea actuală sau posibilă. Și, chiar mai mult, un sistem fiind chiar complet, nu decurge din acest fapt că descrie complet lumea actuală. *Alternativa pozitivistă* este inaplicabilă în acest caz (un sistem de axiome descrie lumea actuală — o realitate sau o intuiție intersubiectivă — sau nimic), deoarece, afirmă Körner [1], mai există și posibilitatea să descrie o „lume posibilă bine determinată", combinarea celor trei posibilități urmând accentuarea primului sau ultimului cuvânt din expresia *„o realitate bine determinată".*

3.5. Remarci «fundaționiste» despre adevărul matematic

Peisajul filosofiei contemporane a matematicii este în continuare dominat de dihotomia platonism-constructivism. Cu privire la *problema adevărului matematic* un autor contemporan important consemnează : „Pentru platonist semnificația unui enunț matematic este explicată în termenii condițiilor lui de adevăr, pentru fiecare enunț matematic există ceva în realitatea matematică în virtutea căruia este fie adevărat, fie fals. Un exemplu de explicație a semnificației în termenii adevărului și falsului este explicația prin tabla de adevăr a conectivelor propoziționale. Pentru constructivist forma generală a unei explicații a semnificației (enunțului matematic M. Ț.). Trebuie să fie în termenii condițiilor sub care noi ne considerăm ca justificați în asertarea unui enunț, adică circumstanțele în care noi suntem în posesia unei demonstrații" (M. Dummett [2, p. 492]).

Comentariul acestui pasaj trimite la considerații asupra concepției platoniste asupra esenței matematicii, *realității matematice* și, conex, asupra *adevărului matematic*. Esențial pentru platonism este că matematica *„descoperă“* adevărurile (matematice) despre structurile matematice (entități + relații), obiecte abstracte ipostaziate într-un așa numit univers matematic, distinct și autonom în raport (nu numai) cu mintea matematicianului, ci și cu universul fizic, poate, o sferă transcendentă acestuia. Dimpotrivă, concepția constructivistă asupra naturii matematicii și a adevărului matematic accentuează ca relevantă (pentru această știință) activitățile de *construcție, invenție* și *creație*, esențiale sunt inferențele și regulile acestora. Platoniștii formulează obiecții cu privire la concepția constructivistă după care esența (și adevărul) enunțului matematic este determinat(ă) în calitatea acestuia de a se legitima ca o concluzie a unei demonstrații. Postulând un *univers matematic*, problema acestei existențe, realități (matematice) antrenează o anumită explicație a *adevărului matematic*, văzută numai în termenii *teoriei corespondenței*, care *mutatis mutandis* în context matematic este apreciată ca o *corespondență* dintre propozițiile matematicii și structurile matematice, aceste *entități „locuitori“* și relații între cele ale universului matematic, la care se referă termenii din propoziții, și propozițiile. Conform platonismului termenii și propozițiile matematice au semnificații care transcend asumpțiile, regulile și metodele de demonstrație acceptate.

Adevărurile necesare ale matematicii și-ar datora, după platonism, caracterul lor unei *necesități obiective* (transcendente) ce s-ar impune gândirii noastre ca un principiu necesar.

Logicismul, ca variantă modernă a platonismului în filosofia matematicii, a avut ca obiectiv-deziderat reducerea matematicii la logică. Reprezentanții logicismului modern (Frege, Russell) și-au propus să derive matematica (mai întâi, aritmetica) din logică fără să apeleze la supoziții extra-logice și în acest mod au sperat să dovedească caracterul *analitic* al propozițiilor matematice, o idee opusă concepției kantiene despre natura sintetic-apriori a adevărurilor (argumentelor) matematice ; cum se știe I. Kant a contestat caracterul analitic al propozițiilor matematice și are în vedere enunțurile aritmeticii, iar în lumina acestei idei opera logicistă poate fi calificată ca un demers irelevant. Benacerraf și Putnam [2] scriu referitor la această întreprindere intelectuală grandioasă a logiciștilor : „astfel chestiunea devine cea a deciderii dacă demonstrarea că pe baza unei mulțimi de definiții plauzibile aritmetica poate fi derivată din teoria mulțimilor stabilește că negațiile unor propoziții aritmetice (adevărate) sunt autocontradictorii. Se stabilește că dacă aceste definiții sunt analize corecte ale semnificațiilor termenilor aritmeticii, și dacă axiomele teoriei mulțimilor sunt ele însele analitice în sensul relevant și dacă ar fi derivabile în logica de ordinul întâi din propoziții analitice *via* definiții, care reprezintă analize corecte, constituite «urmând din legea non-contradicției», atunci logiciștii au arătat că propozițiile aritmeticii urmează (decurg) din legea non-contradicției. Însă acestea sunt mari *dacă* sunt autentici (very big if's). Probabil cel mai mare dintre acestea este cel referitor la analiticitatea axiomelor teoriei mulțimilor“.

Dar teza logicistă că în matematică avem de-a face cu adevăruri analitice nu poate fi susţinută ; în primul rând, în procesul derivării matematicii din logică, cunoscuta *axiomă fregeeană a comprehensiunii* a produs «paradoxul lui Russell» ; în al doilea rând Russell şi Whitehead au folosit, în *Principia Mathematica, axioma infinitului,* care deşi formulată în *vocabularul logicii pure*, nu are, totuşi, caracter analitic şi într-o situaţie asemănătoare este axioma reducerii şi cea a alegerii. La acestea adăugăm că reconstrucţia *adevărului analitic* este o sarcină mai dificilă decât cea a *adevărului logic,* remarcă Quine [5].

Concepţia că *matematica este analitică* comportă două aspecte : i) un prim aspect este asociat logicismului, ii) cel de al al doilea este legat de convenţionalism, acesta din urmă considerând că enunţurile matematice sunt adevărate prin *„decret", convenţie,* conform căreia noi specificăm semnificaţiile cuvintelor, termenilor care apar în matematică, şi, în concluzie, matematica este *fără conţinut factual,* sau chiar *vidă,* o concepţie atractivă pentru pozitiviştii logici. Concepţia care consideră că enunţurile sunt adevărate în *virtutea semnificaţiei cuvintelor* ce sunt conţinute în ele este vagă şi, în ultimă analiză, reductibilă la doctrina analitică despre enunţurile matematice, şi chiar la convenţionalism. Aici ni se pare mai interesantă concepţia că *„matematica este analitică"*. Nu este cazul aici să evocăm întregul cadru istorico-conceptual al analiticităţii, dar vom spune, totuşi, că acest concept deşi este intim asociat filosofiei kantiene, premerge filosofului german, Leibniz însuşi vorbind despre *adevărurile raţionale* ca fiind propoziţiile adevărate în *toate lumile posibile ;* ideea leibniziană de *„lumi posibile"*, a primit în secolul nostru o *rafinare,* chiar tehnic formală, prin contribuţiile lui L. Wittgenstein *(„stări posibile ale lucrurilor")* şi R. Carnap *(„descrierea de stare")*. Hintikka [1] subliniază că noţiunea kantiană de analiticitate este diferită de cea a gânditorilor moderni care identifică adevărul analitic cu cel conceptual (obţinerea lui din concepte ce îl compun), adică prin analiză conceptuală ; ori pentru Kant adevărurile analitice formau numai o submulţime a celor conceptuale, în care includea şi pe cele sintetice. În lista lui Hintikka [1] avem : I Adevărurile analitice sunt adevăruri numai în virtutea semnificaţiilor termenilor pe care îi conţin, ceea ce ar corespunde considerării (definirii) adevărului analitic ca adevăr conceptual ; I (a) Adevărul analitic se bazează numai pe definiţiile termenilor ; I (b) Adevărurile analitice cuprind definiţii şi consecinţele lor logice ; I (c) Adevărurile analitice sunt acelea care pot fi demonstrate numai cu mijloacele logicii generale şi definiţiilor. (Frege). Primele definiţii acoperă accepţia kantiană a analiticităţii, ultima este cea care aparţine lui Frege. Quine, situându-se pe poziţia unui *empirism consecvent*, va încerca să dezvăluie ceea ce am numi *temeiul metafizic* al analiticităţii. În lucrarea noastră (Ţurlea [3]) am schiţat acest aspect atunci când am încercat să relevăm conexiunile dintre „analitic" şi teoria lingvistică a adevărului logic.

Aşadar, concepţia că *„matematica este analitică"* este în egală măsură asociată *logicismului* şi *convenţionalismului*. Dar se impune observaţia (presupusă fiind definiţia *„analitică"* că adevărurile logice sunt automat analitice) şi anume că „dacă teza că matematica este analitică spune mai mult decât teza logicistă, definiţiile trebuie să fie luate ca explicând un concept au mai mult o semnificaţie epistemologică, în mod uzual adevăr în virtutea semnificaţiilor, sau adevăr prin convenţie (The Encyclopedia... p. 199). Conexiunea cu logicismul, în ciuda importanţei acordate de pozitiviştii logici, devine mai puţin semnificativă (ibidem). În lumina acestei observaţii asupra analiticităţii obţinem interpretări ca : a afirma că axiomele teoriei mulţimilor sunt analitice înseamnă a spune că sunt *„postulate de semnificaţie"*, în sensul lui R. Carnap [1], sau că axiomele teoriei numerelor sunt în acelaşi sens „postulate de semnificaţie".

Considerarea propoziţiilor matematicii ca *adevărate prin convenţie* este posibilă şi importantă, poate chiar relevantă, numai în cazul *reconstrucţiilor raţionale* ale acestei ştiinţe, ceea ce ar însemna construirea unui *sistem formal* şi identificarea lui cu matematica. Conform poziţiei convenţionaliste uzuale se apelează la reguli care specifică un set de propoziţii adevărate prin convenţie şi chiar reguli semantice pentru un sistem formal interpretat ; din aceste propoziţii (adevărate prin convenţie) pot fi deduse anumite enunţuri, adevărate, premisele având statutul de convenţii care regizează folosirea expresiilor în interiorul sistemului formal. Apelul la regulile semantice poate fi ilustrat în cazul în care vrem să controlăm adevărul unui enunţ produs prin substituirea într-o teoremă a calculului clasic al propoziţiilor, şi anume *„tabelele de adevăr"* pot fi privite ca reguli semantice care ne specifică semnificaţiile conectivelor, în virtutea cărora teoremele logicii clasice a propoziţiilor devin adevărate. Dificultatea apare aşa cum a arătat Quine [5] (şi chiar Frege) că trecerea de la enunţuri generale — considerate convenţii explicite — la *„adevărul prin convenţie"* al enunţurilor specifice (care sunt obţinute ca substitution instance a unor teoreme) antrenează inferenţe. Inferenţele vor asuma proprietăţile *generalităţii* (de exemplu, proprietăţile cuantificatorilor universali) şi ale *condiţionalului*, deoarece regulile vor fi de forma condiţionalelor, — de exemplu, ele pot să spună că dacă un enunţ satisface anumite condiţii atunci este *adevărat prin convenţie*. În exemplul pe care l-am dat e nevoie nu numai de legile non-contradicţiei şi terţului exclus ci şi de aplicarea tabelelor de adevăr, care deja presupune că fiecare enunţ are una, şi numai una, din cele două valori de adevăr" *. Quine a făcut explicit faptul că încercarea de a considera regulile (conform cărora procedează inferenţa) ca valide prin convenţie conduce la un *regres infinit*. Pe cazul regulei *modus ponens* lucrurile se derulează astfel (apud The Encyclopedia, p. 199) din p şi $p \supset q$ inferăm q ; o tratăm ca o convenţie :

* Dacă A şi C sunt adevărate şi C este rezultatul substituirii lui A pentru p şi B pentru q în „$p \supset q$", atunci B este adevărat.

Se presupune că pentru unii A′ şi B′ am demonstrat că A′ şi C′ sunt adevărate prin convenţie, situaţie în care

C′ este rezultatul substituirii A′ pentru p şi B′ pentru „q" în „$p \supset q$"

Atunci avem

A′ este adevărat ;

A′ ⊃ B′ este adevărat.

Invocând (x) și *modus ponens*, B′ este adevărat. Dar pentru a reprezenta această inferență ca procedând conform convenției, este necesară o nouă aplicație a lui *modus ponens* și așa mai departe.

Și cu toate acestea, această formă de convenționalism se aplică în anumite părți ale matematicii, în special la axiomele existențiale, justificate nu prin apel la evidența directă ; aici criteriile pragmatice au jucat rolul important în selectarea axiomelor.

Procedura are mai mult o asemănare cu ceea ce este numit o *teorie ipotetică* în știință, și în acest context reamintim că Whitehead și Russell au subliniat că axiomele se legitimează prin consecințele lor, deoarece unele propoziții deduse din axiome sunt decidabile prin mijloace matematice mai elementare și evidente. Și nu este evident că dacă în urma conflictului (consecințelor) cu *matematica intuitivă*, înlocuind un sistem de axiome cu altul semnificația *„mulțimii“* a fost schimbată și axiomele originale pot fi interpretate conform semnificației anterioare ca să rămână adevărate. În cazul teoriei mulțimilor se poate spune că funcționează, lucrează pe asumpția că valoarea de adevăr a enunțurilor este determinată în multe cazuri unde nu este determinată prin axiome și anume prin convenții. Și în op. cit., p. 200 se conclude : „Quine, în fapt, argumentează acum, aparent chiar în cazul logicii elementare, că nu există o bază fermă pentru a distinge între a face astfel de principii adevărate prin convenție și adoptarea lor ca ipoteze“ („Carnap și adevărul logic“). Aceasta este mai mult o extindere a convenționalismului la întregul științei ca o respingere a lui în aplicarea la matematică“.

Convenționalismul care declară unele enunțuri ca „adevărate prin convenție“ are în mod corespunzător o concepție despre *natura adevărului matematic*, numită *formalism*. (De la Euclid încoace matematicienii au constatat că demonstrația teoremelor importante nu se poate efectua numai prin apel la definiții ; mai mult, odată cu fenomenul proliferării sistemelor axiomatice, a devenit evident că modul tradițional de gândire nu mai este operant, că doi matematicieni folosind un set de definiții acceptate, dar axiome și/sau postulate diferite nu întrebuințează în același sens conceptele matematice).

O versiune de *formalism* numită *„if-thenism“* îi este atribuită lui B. Russell, cel care a contribuit, probabil, cel mai mult la reconstrucția matematicii în cadrul sistemelor formale. Ideea *„if-thenismului“* este următoarea : dacă facem anumite asumpții (supoziții), atunci anumite consecințe decurg logic. Altfel spus, în matematică învățăm că dacă suntem de acord, acceptăm anumite ipoteze, adoptăm o convenție, atunci decurg anumite enunțuri adevărate. Însă această concepție consideră ca irelevant faptul că matematica are un *subject-matter distinct*, sau cel puțin îl ignoră, pentru că o anumită versiune de formalism evită cu totul această chestiune a subiectului spcific al matematicii, este vorba de concepția lui H. B. Curry [1] care consideră matematica drept *„știința* *sistemelor formale"*. Un sistem formal poate fi interpretat ca un corp de enunțuri structurat deductiv ; un astfel de sistem are la bază un set de convenții care privesc : obiectele teoriei, adică termenii, combinarea termenilor pentru formarea propozițiilor elementare și selectarea propozițiilor elementare adevărate. Structurile deductive care structurează enunțurile unei teorii matematice sunt obiectele autentice ale unui studiu matematic, sau chiar metamatematic, dacă avem în vedere că în perioadele mai recente teoriile matematice sunt obiecte ale studiului metamatematic, fapt care sugerează distincția matematic-metamatematic fecundă în studiile fundaționale. Dacă „if-thenismul" extinde mai mult domeniul matematicii, Curry îl restrânge prea mult.

O doctrină care a fost numită de asemenea, *formalism,* a fost cea a lui D. Hilbert. El a luat ca adevăruri primitive *(core-ul* programului său) nu numai adevăruri ale logicii ci și pe cele ale aritmeticii finite (recursive) sau constructive. Ideea lui Hilbert a fost să demonstreze că axiomele aritmeticii obișnuite, adică non-finite, sunt consistente folosind și apelând numai la principii care constituie *nucleul* (core-ul). Anul 1931, s-a dovedit nefast pentru destinul programului hilbertian, deoarece teorema lui K. Gödel [4] a pus în evidență un fapt fundamental și semnificativ pentru sistemele formale și anume că orice sistem formal restricționat la *„nucleul"* hilbertian, însă suficient de expresiv și puternic deductiv ca să exprime axiomele aritmeticii, conține în el propoziții indecidabile, adică propoziții care nu pot fi demonstrate ca teoreme și nici negațiile lor. Gödel a mai arătat că consistența unui sistem formal nu poate fi demonstrată apelând exclusiv la proceduri finitare. Relevanța fenomenului *incompletitudinii* stabilită prin celebra teoremă a lui K. Gödel (1931) a depășit aria studiilor tehnic fundaționale prin consecințe epistemologice remarcabile, între care cea mai importantă este „separarea" a două noțiuni fundamentale : *„adevăr* și *demonstrabilitate"* ; mulțimea propozițiilor adevărate nu coincide cu mulțimea propozițiilor demonstrabile (demonstrate), cea din urmă tinzând *„asimptotic"* s-o acopere pe prima.

Distincția dintre *analitic* și *sintetic* exacerbată în neopozitivism (sau empirismul logic), a fost profund legată de convenționalism, de modurile de elaborare a poziției convenționaliste privind definiția termenilor folosiți în enunțuri și tratarea adevărului anumitor enunțuri ca stabilite prin convenție, a căror plauzibilitate se bazează pe asumpția că adevărul sau falsul oricărui enunț depinde de doi factori *modul material* și *modul formal* (lingvistic). În anii '50 Quine a atacat asumpția pe care a considerat-o *„rădăcina comună"* a ceea ce el a numit *„două dogme ale empirismului"*, care au constituit sortul de empirism ce a condus la primul fel de convenționalism ; cele două dogme sunt : i) credința într-o distincție netă *„analitic-sintetic"* și ii) *reducționismul,* credința că fiecare enunț semnificativ este reductibil la un complex construit prin operații logice din termeni care referă experiența imediată ; prima dogmă este mai pronunțat epistemologică, a doua mai pregnant metodologică, cu relevanță pentru programul lansat de empiriștii logici privind „unitatea ştiinţei". Prima dogmă a analiticităţii s-a dovedit pentru Quine profund obscură, metafizică, în întemeierea acestui concept apelându-se la concepte, mai vagi şi mai neclare decât el, de genul : *semnificaţie, sinonimie, necesitate, reguli semantice,* ele însele aflate într-o acută nevoie de *„clarificare"*, concluzia fiind cea a unei insatisfacţii produsă de *primul fel de convenţionalism* (ce vizează definiţiile termenilor), consecinţă a acestui tip de empirism (logic). Dar Quine s-a arătat nesatisfăcut şi de cel de *al doilea fel de convenţionalism,* care se referă la adevărul anumitor enunţuri.

Quine a vrut să păstreze spiritul convenţionalismului şi a încercat să-i dea o altă *turnură*. El a spus că nici un enunţ nu este pur analitic, imun la revizuire sub impactul experienţei, iar orice enunţ care este sintetic poate fi păstrat împotriva falsificării, dacă este supus la reajustări adecvate. Adevărurile nu se confruntă cu experienţa, în mod izolat, unul după altul, ci ca un întreg. Experienţa nu poate singură să determine o unică atribuire de valori „adevărat" sau „fals" propoziţiilor limbajului, deoarece fiecare enunţ depinde în mod important de celelalte, ştiinţa prezentându-se ca un întreg în faţa *„tribunalului"* experienţei. Cu Quine avem o nouă versiune a convenţionalismului, una *holistă, „varietate extremă"* ; acum nici legile logicii nu sunt imune la revizuire. Sistemul nostru de credinţe, în sensul de enunţuri pe care susţinem ca adevărate, necesită reajustări sub impactul experienţei în vederea păstrării adevărului oricărui enunţ invididual ales. Consecinţele ajustării au loc pentru alte enunţuri şi coerenţa ne cere să includem chiar principii (logice) care *„guvernează" distribuirea adevărului.* În setul cunoştinţelor revizuibile, nimic nu este imun la revizuire. Totuşi, în final, Quine, remarcă J. E. Tiles, afirmă că formele valide ale logicii de ordinul întâi sunt imune la revizuire.

Dar atacul asupra celebrei distincţii *analitic-sintetic,* care devenise *absolută* prin aportul empiriştilor logici la ceea ce s-a numit *dizolvarea sinteticului a priori,* a condus mai târziu prin contribuţiile lui Hintikka din logica cuantificării la concluzia *Kant justificat* sau reabilitarea *sinteticului a priori,* considerat de filosoful german ca cea mai adecvată explicaţie filosofică a naturii adevărului matematic.

În ceea ce priveşte *intuiţionismul,* teoria imaginilor (stărilor) mentale ar putea juca rolul, *mutatis mutandis,* al teoriei corespondenţei din platonism şi logicism ; altfel spus, stările şi imaginile mentale, centrale în teoria intuiţionistă a înţelegerii, comportă o relevanţă despre construcţiile mentale matematice — obiectele ontologiei intuiţioniste a matematicii. Am avea pe această cale o *„reproducere"* a relaţiei *existenţă* şi *adevăr* din *„teoria corespondenţei adevărului"*, în context intuiţionist, unde construcţiile mentale matematice, autenticele obiecte matematice intuiţioniste reprezintă *existenţa matematică,* iar *stările, imaginile mentale* ar corespunde *adevărului,* sau mai curând concordanţa acestor imagini mentale cu construcţiile matematice mentale (interne) ar constitui adevărul matematic în sens intuiţionist, cu rol central în teoria filosofică intuiţionistă a înţelegerii matematice.

3.6. Remarci generale

Conform asumpției esențiale a *realismului matematic* obiectele unei teorii sunt concepute ca elementele unei totalități, încât autorizează raționamente de genul : „pentru fiecare proprietate exprimabilă prin folosirea noțiunilor teoriei respective (din analiză, teoria mulțimilor) este un fapt obiectiv determinat dacă există sau nu există un element al totalității care posedă această proprietate ; similar, decurge din acest punct de vedere, că sau toate elementele unei mulțimi posedă o proprietate dată, sau există un element care nu o posedă". (P. Bernays [1], Bernays observă că acest mod de gândire este prezent în axiomatica hilbertiană a geometriei și că diferențele *stilistice* dintre Euclid și Hilbert sunt datorate asumpțiilor filosofice subiacente prezente în lucrările celor doi matematicieni ; căci, în timp ce Euclid vorbește de figuri care să fie construite, pentru Hilbert sistemul de puncte, linii, drepte și plane există dat de la început. Acest mod de gândire, fiind înrudit cu filosofia lui Platon, a fost numit *platonism matematic*. I se atribuie platonismului matematic o anumită fructuozitate conceptual teoretică, căci inspiră *modele* produse de imaginația abstractă a matematicienilor, modele ce extrapolează *experiența* și *intuiția*, structural intern simple și logic riguroase.

Aritmetica se bazează, din această perspectivă platonistă, pe *asumpția totalității întregilor* și care justifică *tertium non datur* pentru aceste entități matematice — întregii, adică, dacă P este un predicat al întregilor, atunci sau P este adevărat pentru fiecare număr, sau există cel puțin o excepție, disjuncție derivată în context din principiul logic al *terțului exclus*. Această varietate de platonism se dovedește insuficientă atunci când este vorba de noțiuni cum sunt mulțimea numerelor, șirul numerelor, funcție, noțiuni cu caracter quasi-combinatorial în analiză. O mulțime de întregi apare ca fiind rezultatul a infinit de multe acte care decid (individual !) pentru fiecare număr dacă trebuie inclus sau exclus din această mulțime ; la acest proces se adaugă ideea totalității acestor mulțimi. Analog, vor fi considerate șiruri de numere reale și mulțimi de numere reale.

Asumând punctul de vedere platonist obținem o explicație plauzibilă a *definițiilor constructive*, a unor axiome cum este axioma alegerii și a *definițiilor impredicative* ale lui Poincaré ; astfel, definițiile constructive apar ca moduri de alegere (to pick out) a unui *obiect ce preexistă* construcției, axioma alegerii devine o aplicație a conceptelor quasi-combinatoriale, iar *definițiile impredicative* vor depinde de *asumpția existenței totalității numerelor întregi*, căci o definiție impredicativă a numărului real apelează la ipoteza că toate numerele reale au o anumită proprietate P, sau că există un număr real cu proprietatea P (însă un număr real fiind reprezentat printr-o fracție zecimală, este un fel special de șir de întregi).

Concepția platonistă depășește orizontul analizei matematice și, autorizând iterarea folosirii conceptului quasi-combinatorial de *funcție* şi *metodele colecţionării,* asigură o extensiune a domeniului entităţilor matematice relevant pentru teoriile mulţimilor, algebrei moderne şi topologiei.

Realismul conceptual sau *platonismul absolut* (dar nu *platonismul restricţioniat* sau numit *metodologic!)* este afectat de apariţia antinomiilor logico-matematice. Paradoxurile logico-matematice au invalidat asumpţiile platonismului absolut, mai precis au evidenţiat imposibilitatea combinării ideii *totalităţii tuturor obiectelor matematice* cu conceptele generale de *mulţime* şi *funcţie,* deoarece *„totalitatea însăşi“*, arată P. Bernays [1], constituie un domeniu de elemente pentru mulţimi şi de argumente pentru funcţii.

Fundamentele analizei pot fi revigorate prin eliminarea acestui platonism extrem, fapt ce s-ar putea realiza prin : i) înlocuirea conceptelor (quasi-combinatoriale !) de *mulţime, funcţie* de concepte constructive corespunzătoare ; ii) renunţarea la ideea totalităţii întregilor. Definiţia unui şir infinit sau a unei fracţii zecimale printr-o lege aritmetică permite considerarea continuului ca o mulţime de elemente definite în această manieră, procedură conexă *aritmetizării analizei,* deşi trebuie recunoscut că analiza „rezistă“ reducerii la noţiunea de întreg şi concepte logice. În perspectiva definirii oricărui număr real printr-o lege aritmetică *asumpţia totalităţii numerelor reale* devine dispensabilă.

În ceea ce priveşte renunţarea la ideea totalităţii numerelor întregi, contribuţiile majore revin lui Kronecker, Brouwer şi intuiţioniştilor. Dacă examinăm lucrările lui Kronecker şi Brouwer, metodele lor nu fac apel la supoziţia existenţei unei serii de numere naturale ca un obiect ideal determinat, căci ei vorbesc mai curând de serii de numere în sensul unui proces care nu se încheie niciodată, ce depăşeşte orice limită pe care o atinge. Atunci ce semnificaţie mai are aforismul atribuit lui Kronecker : „Dumnezeu a făcut întregii, restul este lucrarea omului“ ?

Metodele intuiţioniste ar părea atunci ca mai adecvate pentru teoria numerelor, iar cele ale platonismului pentru *teoria geometrică a continuului.* Adecvarea metodologică la obiect ar sugera, prin complementaritatea acestor metode intuiţioniste şi platoniste, o atenuare a dezacordului exponenţilor celor *două mari curente fundaţioniste.* Mai precis, un matematician neutru din punct de vedere filosofic poate apela la un gen sau altul de metode, în funcţie de obiectul investigaţiei sale, dacă ţine de aria aritmeticii sau cea a geometriei, şi va admite că restricţionarea metodologică produce claritate şi eficienţă. Îi va pare mai natural ca în teoria numerelor să folosească conceptul intuitiv de *număr,* dispensându-se de concepte mai generale ca cele de *propoziţie, funcţie* sau *corespondenţă arbitrară,* definibile mai riguros prin apel la metoda axiomatică, şi pe această cale va ajunge la axioma inducţiei complete sau axiomele infinitului ale lui Dedekind şi Russell, dar cu aceasta sistemul se complică. În schimb, metodele intuiţioniste par mai artificiale în abordarea ideii geometrice a continuului, care *„rezistă“ aritmetizării.* Din această cauză se vor prefera metodele platonismului, deoarece intuiţionismul, deşi operează cu noţiunea restricţionată de *funcţie,* nu poate stabili teoreme simple ca *teorema maximului unei funcții continue* și *teorema lui Role,* pe care, eventual, le înlocuiește cu teoreme mult mai complicate.

Dualitatea aritmeticii și *geometriei* nu este străină de opoziția dintre *intuiționism* și *platonism.* Dacă putem spune că ideea de *număr* este mai evidentă decât ideea de *spațiu,* atunci trebuie să admitem că asumpția platonismului are un caracter *transcendent,* care nu este prezent în intuiționism. Urmează de aici că supozițiile platoniste trebuie utilizate metodologic cu prudență, deoarece s-ar putea ca principiul din care au fost derivate să faciliteze, dincolo de aplicațiile restricționate, *contradicțiile,* a fost chiar cazul *principiului totalității* care a expus platonismul *antinomiei lui Russell,* de unde și formularea necesității restricției. Dar care sunt cele mai uzuale asumpții platoniste utilizate pentru *fundarea matematicii?* Sunt diferite variante ale principiului totalității, ale principiului analogiei sau ale permanenței legilor iar garanția aplicațiilor lor rezidă, după P. Bernays [1], în consistența consecințelor deduse din aceste asumpții fundamentale. *Problema consistenței* a fost obiectul major al *teoriei hilbertiene a demonstrației,* în care reducția și deducția simbolică conferă acestei chestiuni un caracter aritmetic quasi-elementar, în sensul imposibilități deducerii (în interiorul teoriei a cărei consistență era vizată) a două formule mutual-contradictorii A și $\bar{A}$.

Opoziția metodologică dintre platonism și intuiționism derivă din cea *ontologic-gnoseologică,* căci dacă *platonismul extrem* este evident *idealism obiectiv* (deoarece *ontologizează, ipostaziază* entitățile matematice ca independente de orice subiect cunoscător), *intuiționismul* își asumă explicit un gen special de *mentalism* și *subiectivism,* fiind o variantă de *idealism subiectiv,* derivat din *kantianism,* din care împrumută *transcendentalismul, sui generis,* și refuză *realismul* subiacent. Caracteristicile marcante ale intuiționismului în problema fundării matematicii sunt : apelul la intuiția pură (a timpului, fără cea a spațiului !) și supoziția brouweriană *„a subiectului care gândește“,* polul opus (în ceea ce privește această ultimă asumpție) al platonismului care detașează, la limită, matematica de orice subiect care gândește.

Intuiționismul, după ce admite ca și *platonismul,* că enunțurile matematice au o *semnificație,* diferența în acest plan, derivând din opoziția celor două ontologii asociate acestor *„concepții-curente“,* constând în faptul că primul curent consideră că matematica este despre *entități (matematice) mentale,* în timp ce al doilea postulează un *domeniu al entităților transcendente,* se distinge și se opune *platonismului* din punct de vedere metodologic, afirmând că *demarcația se datorează metodelor de demonstrație.* Dacă platonismul afirmă că *semnificația* unui enunț matematic poate fi explicată *în termenii condițiilor de adevăr,* al tabelelor valorilor de adevăr a conectorilor propoziționali, admis fiind că pentru fiecare enunț matematic există o realitate matematică (obiecte, proprietăți, relații), în virtutea căreia este sau adevărat sau fals, intuiționismul respinge ideea că există *ceva* pentru fiecare enunț care îl face adevărat sau fals ; (trebuie, deci, separată aici *chestiunea* caracterului sau *sensului definit* al unui enunț de cea a *adevărului* sau *falsului,* enunțurile logice constituind un exemplu relevant, căci nu există nimic în virtutea căruia sunt adevărate, sau false ; vezi de ex. A sau non A). Pentru intuiționism forma fundamentală a unei explicații a semnificației unui enunț rezidă în enunțarea criteriului care justifică aserțiunea acelui enunț, iar în matematică aceasta revine la a poseda o demonstrație a enunțului respectiv. Dar aceasta seamănă destul de convingător cu *criteriul empirist al semnificației,* după care *semnificația unui enunț* constă în *metoda lui de verificare* (empirică sau logică) exigență nejustificată de *platonism* prin *transcendența* entităților matematice, postulate. Ni se pare că indistincția *adevăr-demonstrabilitate* este infirmată de teorema gödeliană de incompletitudine care sprijină în acest context platonismul.

Ajungem aici la *problema tablourilor* pe care ni le oferă cele două curente despre lumea matematicii (adică despre obiectul și specificul activității matematice).

Platonismul ne oferă tabloul unui domeniu al obiectelor (proprietăților și relațiilor) matematice care satisfac câteva condiții-axiome ; aceste entități sunt ne-mentale, ne-lingvistice, ne-spațiale, ne-temporale ; le „percepe" o *intuiție ne-empirică,* eventual o *facultate mentală supranaturală,* sunt descrise de formulele matematicii, ceea ce acestea din urmă spun, putând fi, în virtutea existenței acestor entități, adevărat sau fals.

Ceea ce face matematicianul este, așadar, *să descopere* și *să descrie* o *realitate matematică* care există.

În contrast, *intuiționismul* nu are în vedere o realitate matematică pre-existentă matematicianului, pentru acest curent expresia favorită este o *matematică care construiește indefinit* (the picture of our constructing mathematics as we go along).

Pentru cineva care recunoaște caracterul obiectiv al matematicii ca știință, *obiectivitatea adevărului* și *demonstrației,* supoziția unei *realități matematice* care precede activitatea matematicianului într-un anumit stadiu al dezvoltării acestei științe *ar legitima* acest *caracter obiectiv* și i-ar conferi prin caracterul ei constrângător o autentică semnificație intelectuală și, poate, practică. Vom explicita ceva mai târziu această aserțiune spre a preveni și unele interpretări inadecvate la care expune, luată, oarecum, literal. Ori, se știe că *intuiționiștii nu acceptă obiectivitatea adevărului,* căci un Heyting [1, p. 4] afirmă că noi nu putem fi niciodată siguri că un sistem matematic formal exprimă corect gândurile noastre matematice, dar crede în obiectivitatea demonstrațiilor, (dar și aici exclude posibilitatea delimitării în avans a domeniului tuturor demonstrațiilor posibile intuiționiste valide). Multe consecințe practic matematice și altele indezirabile meta-matematic și filosofic diminuează plauzibilitatea intuiționismului matematic.

Formalsmul nu este nici el o alternativă mai adecvată la realism, deşi este împărtăşit de matematiceni iluştri ca P. Cohen şi A. Robinson. *Ontologic,* formalismul doar comută problema de la un sort de obiecte matematice — *numerele,* la alt sort de obiecte matematice — *demonstrațiile formale.*

Din punct de vedere *filosofic, formalismul* nu este unitar, deoarece foloseşte asumpţii *nominaliste, instrumentaliste* și *idealist transcendentale kantiene.*

Dar, înainte de a discuta unele semnificaţii şi implicaţii ale formalismului, să notăm unele observații despre *ontologia nominalistă.* Nominalismul este o concepție filosofică specifică evului mediu, dificilă și profundă, care n-a fost niciodată populară, accesibilă majorității filosofilor. S-a răspândit opinia că *ontologia nominalistă* ar fi *irelevantă* sau cel puţin *inadecvată* pentru matematică şi ştiinţă teoretică. Un sistem este nominalist dacă satisface principiul nominalismului. Explicaţia acestui principiu „(y)(z)(x)(Axy Axz) y=z" necesită noţiunea *relație de generare* și noţiunea de *„atom"* relativ la această relație. Evaluarea unui sistem ca nominalist mai presupune cunoaşterea semnului identității.

Relevanța ontologică a *principiului nominalismului* este că nu există *„distincție de entități"* fără *„distincție de conținut".* Noţiunile *adevăr* și *demonstrabilitate* sunt primare în contextul caracterizării principiului nominalismului. Principiul poate să fie sau demonstrabil, sau adevărat însă nu demonstrabil, şi cere să nu avem de-a face cu propoziţii indecidabile (adevărate, dar nu demonstrabile). Ar urma că în acord cu fructuozitatea tehnicii logice să spunem că principiul este demonstrabil, a fi nominalist însemnând că principiul este demonstrabil în sistem. Demonstrabilitatea cere calculul individualilor (vezi Goodman [1]). Este cerut un principiu al compunerii referitor la relaţia care duce la o relaţie care generează. Dispunem de relaţiile :

$$(x)(\sim \text{Atom } x \supset (E_y)y\, PP_{po}\, x)$$

$$(x)(\sim \text{Atom } x \cdot \sim x = \Lambda) \supset (E_y)y\, E_{po} x)$$

dintre care prima are loc pentru formularea lui Goodman a calculului individualilor, caz în care atomii sunt entități care nu au părţi, iar cea de a doua are loc în cazul teoriilor mulţimilor în care atomii figurează ca *individuali* sau *urelemente* și Λ este clasa nulă.

Goodman observă că nominalistul admite numai ceea ce este construit din individuali de bază selectați și neagă că toate clasele pot fi constituite din ei. Mai departe, Goodman [1, p. 156] afirmă că pentru mine nominalismul constă în mod specific în refuzul de a recunoaşte clasele", nominalistul poate admite orice ca individual, orice poate fi construit ca o clasă poate fi construită ca un individual. Sau, pe scurt, nominalismul poate construi orice lucru ca individual, dar refuză să construiască orice ca clasă. În prezența unor restricții severe un sistem poate folosi „E“ și să vorbească despre clase, teoria claselor trebuind să nu violeze principiul. Se pune chestiunea dacă o teorie matematic interesantă (cum ar fi aritmetica întregilor pozitivi care este formulată în termenii postulatelor lui Peano) poate fi reformulată în limbaj nominalist. R. M. Martin [1] oferă o schiță a unei astfel de posibilități, rezultatul fiind un sistem foarte puternic pentru aritmetică suficient și pentru teoria numerelor raționale și chiar pentru o teorie constructivistă a numerelor reale și complexe. Sistemul deși este infinitist satisface cerințele nominalismului. Nominalismul și nonfinitismul sunt cel mult *incongruente* dar nu *incompatibile* (Goodman [1, p. 166]), unele sisteme cu ontologii infinite sunt nominaliste, cu condiția să satisfacă criteriile cruciale. Se pot formula sisteme înrudite pentru aritmetică (care să satisfacă cerințele lui Goodman folosind numărul 1 și un dual singular și așa mai departe, sau altă posibilitate ar fi adăugarea la clase a relațiilor diadiace între individuali admiși ca valori pentru variabile, dar nu de tip mai înalt. O altă posibilitate este cea a admiterii *infinitezimalilor* ca atomi ai sistemului în acord cu *analiza non-standard*. Și se mai poate încă cu ajutorul teoriei de ordinul al treilea. Asemenea teorii ale claselor sau mulțimilor neuzuale sunt sever limitate în a oferi *fundamente set-teoretice* pentru matematică. Un realism moderat a fost dezvoltat astfel încât să conțină o adaptare adecvată a teoriei Zermelo-Skolem-Fraenkel a mulțimilor. La o examinare mai atentă concepția pare să devină un nominalism autentic în sensul lui Goodman. Elementele sistemului sunt o formulare *„a calculului individualilor“* cu un individual nul ; relația de generare PP_{po}, atomii sunt entități unitate (aceia care sunt nenuli și nu au părți proprii ; se admite operația adunarea unității și (x_1... x...) este suma tuturor entităților unitate ; se introduc definițiile familiare pentru *identitatea mereologică*, pentru *individualul nul* și pentru *individualul unitate ;* propoziții care exprimă : proprietatea fundamentală a lui P, principii care guvernează însumarea unității, stipulează existența unei unități și un principiu de compunere.

Se introduce un primitiv nou dar nu o ontologie nouă : „x inst y“ x este un caz (instanțiere) a lui y, și sunt date principiile care îi conferă un sens special (principii care leagă relațiile PP și Inst, *principiul incluziunii, principiul purității, principiul extensionalității* cu privire la *egalitatea „instanțială“, principiul restricționat al abstracției* cu privire la contexte care nu conțin „Inst“.

Se adaugă axiomelor logico-matematice, unele postulate de semnificație (principii empirice) necesare în guvernarea predicatelor nelogice sau nume luate ca primitive. Se schițează semantica teoriei.

Concepția de aici este autentic finitistă, căci cardinailtatea entităților teoriei este cardinalitatea individualilor admiși. *Cardinalitatea* este enunțată arată R. M. Martin [1] *în termenii identității mereologice* și *nu ai egalității instanțiale*. În termenii egalității instanțiale pot fi generate colecțiile transfinite, ceea ce ar restitui o porțiune suficient de vastă a teoriei cardinalilor și ordinalilor transfiniți. Această concepție nu admite clase ca valori pentru variabile, ci mai curând, redate ca individuali, și din această perspectivă clasele nu sunt necesare în matematică, ci numai principii care produc, demonstrează că acelea referitoare la diferite feluri de numere, funcții, spații topologice. Din acest punct de vedere sunt importante *legile* și nu *entitățile*. Filosofic, natura acestor entități interesează. Se observă că nu importă ce individuli sunt aleși (obiecte concrete cum preconizează *reismul,* obiecte fizice în acord cu *fizicalismul,* evenimente cum sugerează *„filosofia procesului“* sau *qualia* în acord cu *fenomenalismul* lui Goodman), căci axiomele adiționale sau postulatele de semnificație le vor stipula ca și predicatele adiționale necesare. În ciuda unor dificultăți și restricții nominalismul nu poate fi acuzat că *„blochează“* cercetarea matematică, așa încât nu mai adaugă la cele naturale ceea ce contrastează puternic cu intuiționismul.

Devine discutabilă delimitarea : *realismul este asimilat în logicism, varianta modernă a conceptualismului* este *intuiționismul* iar *nominalismul* este reprezentat de *formalism* ceea ce implică relațiile dintre filosofia generală și filosofia matematică.

Realismul care nu se identifică total cu *platonismul,* dar promovează *sui generis* doctrina platoniciană, conform căreia entitățile abstracte au o existență independentă de gândire, pe care le putem descoperi dar nu crea, cum cred conceptualiștii ; are la bază, observă Beth [1], procedura *substanțializării* noțiunilor, însă, deoarece o noțiune este desemnată printr-un termen care nu conține variabile libere, urmează de aici că noțiunile sunt considerate obiecte, sau cum problema apare la un logicist ca Frege, noțiunile sunt un sort de obiect, *„pe picior de egalitate“* cu alte genuri de obiecte. Substanțializarea noțiunilor semnifică consecvent unei concepții platoniste că *clasele* sunt *substanțializate,* considerate, deci, *obiecte* sau unități, despre care putem spune că se conțin sau nu în clase date. Procedura substanțializării este răspunzătoare în mod esențial de apariția paradoxului lui Russell.

Platonismul operează o inferență nepermisă de la *expresii-predicat generale* la *esențe generale.* Tehnic vorbind, întrebuințarea predicatelor este neutră filosofic. Numai introducând interpretarea platonistă a predicatelor ca nume pentru ceva vom fi conduși să credem în *esențe platoniciene.* Neprocedând astfel, nominalistul nu este obligat să creadă în astfel de entități. Nominalismul neagă existența universaliilor și acceptă numai variabile individuale, variabile care referă spațio-temporal, sau eventual numai temporal, obiecte concrete. Deoarece platoniștii cred în existența universaliilor ei admit folosirea variabilelor pentru clase, proprietăți sau relații, clasele, relațiile, numerele fiind considerate obiecte abstracte.

O asemenea apreciere se bazează pe supraevaluarea aparatului sintactic al unei teorii, ori, așa cum aifrmă Hao Wang, există teorii, în special sisteme de teoria mulţimilor în care nu este formulată distincţia dintre variabile individuale şi variabile pentru clase, şi care nu sunt considerate nominaliste. Wang propune criteriul *diferenţa dintre totalităţi infinitiste şi finite* pentru distingerea teoriilor platoniste de cele nominaliste, *nominalismul* fiind considerat un *finitism strict*. Formularea dată de Goodman *nominalismului* îl consideră echivalent cu *hiperextensionalismul* care afirmă că entităţile constând din aceiaşi indivizi sunt identice. Într-un sistem nominalistic, dar nu platonistic, entităţile formate din aceiaşi atomi sunt aceleaşi şi următorul *criteriu-principiu* va fi satisfăcut : $(x)(Axy \equiv Axz) \supset y = z$, dacă x şi y sunt identici ei au aceiaşi atomi. *Nominalismul lui Goodman*, distinct de *nominalismul constructivist* al lui Quine, pleacă de la vag *general* la mai *specific*, şi nu de la categoric la ipotetic, nu asumă linia de demarcaţie dintre *abstract* şi *concret*, dar păstrează constant *refuzul de a recunoaşte clase*. Goodman în lucrări mai recente [2] şi [3] nu exclude entităţile abstracte de orice fel, ci numai cere ca să fie construite şi tratate ca individuali. Nominalistul poate construi orice ca individuali, nominalismul descrie lumea ca fiind compusă din individuali, dar refuză să construiască orice ca o clasă, încât esenţa nominalismului pare a fi relevată de o *distincţie de entităţi* şi *nu de conţinut*.

Referitor la *generarea entităţilor*, restricţia extensionalistă apare ca un caz special al celei nominaliste, care este mai absolută, încât în problema entităţilor nominalismul este tratat ca un hiperextensionalism. În Goodman [2] avem de-a face cu un *sistem fenomenalist realist*, în care unităţile neconcrete numite *qualia* constituie baza şi le alege ca individuali, adică valori ale variabilelor sistemului ; când o culoare apare într-un loc particular şi într-un anumit timp în câmpul vizual, atunci aceasta constituie un *concretum*, având trei qualia : culoare, loc şi punct în timp. A optat pentru un sistem realist, şi nu *particularistic* în sensul lui Carnap [2], deoarece la acestea calităţile trebuie construite din elemente concrete şi nu eristă încă o problemă satisfăcătoare pentru *problema abstracţiei*, aşa cum observă Stegmüller. Din punctul de vedere al sistemelor logico-matematice formale Goodman face remarca următoare, şi anume că nu a susţinut niciodată că nominalismul este suficient pentru a face adaptabil un sistem, ci numai că platonismul este suficient să-l facă inacceptabil.

În ceea ce priveşte conceptualismul, acesta susţine că există universali, dar că sunt construiţi de gândire. Repreznt anţii conceptualismului sunt Poincaré, Brouwer, Weyl. După Quine aceşti autori acceptă folosirea variabilelor legate ca să refere entităţi abstracte, însă cu condiţia ca acestea să fie inventate în mod individual din ingredienţi anterior specificaţi. Fraenkel afirmă că *„firul roşu“* al opoziţiei dintre *rea-*

lism și *conceptualism* rezidă în aserțiunea logiciștilor că clasele sunt descoperite și cea a intuiționiștilor care le consideră că sunt inventate.

Logiciştii ca reprezentanţi ai realismului justifică şi păstrează puterile crescătoare ale infinitului, în timp ce, observă Quine, intuiționiștii, (care reprezintă conceptualismul), sunt constrânşi să se mulţumească cu ordinul cel mai de jos al infinitului, abandonând chiar unele legi clasice ale numerelor reale. În controversa asupra *infinitului,* dezacordul dintre logicişti şi intuiţionişti este pregnant, căci *conceptualiştii (intuiționiștii) tolerează* numai *aritmetica elementară* oprindu-se în faţa teoriei infinităţilor mai înalte ca și a unei părţi a teoriei numerelor reale. Există, însă, o asemănare, afirmă Quine, între conceptualişti şi platonişti și anume că și unii și alţii asumă universali, clase ca valori ale variabilelor legate, singura deosebire constând în aceea că platoniștii propun restricţii ontologice menite să evite paradoxurile, în timp în teoria conceptualistă universul claselor este drastic limitat în termenii unei *„metafore a creației progresive"* ; însă această metaforă nu oferă în sine o explicaţie a manierei în care se face cuantificarea conceptualistă peste clase. Recunoaşterea că universul conceptualiştilor este mai sărac în *principiul-metaforă* care îl limitează are mai curând o funcţie și valoare intuitivă.

Relevanţa nominalismului pentru o construcţie a matematicii este marcată de aspecte ca : acceptarea logicii funcţiilor de adevăr, a cuantificării și identităţii, a predicatelor pe care le aplică, particularilor, a algebrei claselor şi relaţiilor, a unor faze rudimentare ale aritmeticii reconstruite după Quine ca simple variante notaţionale ale logicii cuantificării și identităţii.

Variabilele legate pentru clase, relaţii, numere sunt acceptate când apar în cuantificatori existenţiali sau universali în interiorul clauzelor subordonate şi sunt respinse în contextele în care nu pot fi explicate prin parafrază.

Cuantificarea peste numere este admisă dacă se dispune de un procedeu care permite identificarea numerelor, prin corelaţii arbitrare, cu diferiţi particulari, din universul recunoscut, de pildă indivizii lumii fizice. Dar, pe această cale nu avem asigurată multiplicitatea infinită de numere cu care operează aritmetica clasică, căci, în numele principiului lor filosofic, nominaliștii au respins universul infinit al universaliilor ca pe *„o lume de vis"* ; ei admit infinitatea universului lor dacă este obiectiv atestată, să spunem de fizicieni.

Așadar, *platoniştii* (realiştii) admit o *ierarhie cantoriană a infinităților,* conceptualiştii admit un grad de infinitate, iar în ce îi priveşte pe nominalişti, aspectul cel mai important al concepţiei lor este *bunăvoința* sau *nebunăvoința* de a recunoaşte un *univers* infinit al entităţilor matematice. Nominaliștii se complac într-un fel de *agnosticism* în ceea ce privește infinitatea entităților, sau se acomodează indirect (prin expediente) matematicii promovate de infiniști. Restricția ontologică nominalistă stipulează cuantificarea peste indivizi concreți. Nominaliștii resping *universul transcendent* și se satisfac cu un univers imanent, partea transcendentă va fi redusă la *ficțiuni* sub controlul definițiilor. Dacă construcția nominalistă a matematicii *„nu capturează"* întreaga matematică clasică, atunci fragmentele recalcitrante vor fi declarate neesențiale și irelevante.

Este acum clar care este atitudinea *formalismului* (varianta modernă a nominalismului) în problema existenței entităților matematice.

Realismul a făcut obiectul unor vehemente obiecții și critici directe. S. F. Barker [1] sistematizează câteva obiecții expuse și în M. Țurlea [1], și anume : i) *realismul* este o *filosofie prea metafizică,* obiecție care nu este decisivă, căci este formulată din perspectivă empiristă, despre care un platonician ar afirma că nu constituie o concepție plauzibilă despre matematică ; ii) este invocată teorema de incompletitudine, a cărei consecință (într-o anumită interpretare) semnifică contestarea unui domeniu real, independent de mintea noastră ca subiect al activității matematice. Dar, după o remarcă a lui Gödel însășii teorema nu pune în discuție existența entităților matematice ci numai *puterea de expresie* și *puterea deductivă* a sistemelor formale, *morala* fiind că nu se poate alcătui o listă de axiome care să ofere o descriere completă a universului obiectelor matematice ; iii) a treia obiecție se referă la definiția logicistă a numerelor cu mulțimi particulare, invocându-se și alte modalități de definiție a acestor entități (esența lor este *progresia recursivă,* sau *modalismul lui Putnam).* Acest argument al lui Benacerraf pare cel mai convingător, căci Quine observă că definiția Russell-Whitehead a *numerelor* ca *mulțimi de mulțimi* ar fi nu o *explicație* adecvată, ci o *eliminare* a unei discuții despre o entitate *(numărul)* în favoarea unei discuții despre o altă entitate mai simplă *(mulțimea).* În fața acestei obiecții, realistul s-ar putea replia, afirmând că pentru el nu numerele sunt obiecte matematice fundamentale, și va adera la opinia că *teoria mulțimilor* este partea fundamentală a matematicii, propunând reducția *teoriei numerelor* la *teoria mulțimilor.* Oricum, rămâne esențial faptul din raționamentul lui Benacerraff pentru sistemul de numere : mai relevantă este *structura* decât *obiectele,* ceea ce atacă direct și convingător o supoziție platoniciană, sugerând *„erodările"* și din direcția „progreselor structurale" ale teoriei mulțimii ; iv) ultima obiecție vine dinspre teoria mulțimilor, care posedă mai multe forme alternative ceea ce ar putea indica dificultăți în *determinarea ipoteticului domeniu al entităților numite mulțimi.* Argumentul apelează la *teoria semnificației,* oarecum interpretată empirist.

Realismul supraviețuiește criticilor și obiecțiilor prin idealul de *obiectivitate* al matematicii ; realiștii cred în *adevărul obiectiv* al teoremelor matematice, remarcă A. Robinson [1, p. 558], pentru că cred în existența obiectivă a entităților matematice ; această aserțiune trebuie luată în sens *metodologic* și nu ontologic.

Revigorarea realismului a fost constatată în formularea *realismului pluralistic* ca o *bază comună* (dincolo de divergențe) pentru *nominalism, platonism, convenționalism, formalism.* Respinge împreună cu *formalismul* existența unui sistem unic de teoria mulțimilor ca fiind adecvat pentru întreaga realitate ; și respinge împreună cu *platonismul* și *nominalismul* teoria mulțimilor ca un sistem formal fără interpretare. Are ceva în comun și cu *cantorianismul clasic,* căci dacă realitatea nu este construcția mea și dacă mulțimile sunt sau reale sau cu bază în realitate, atunci nu va fi necesar ca toate mulțimile să fie constructibile. Agreiază cu *constructivismul* în aserțiunea că enunțurile despre mulțimi trebuie să fie înrudite cu construcțiuni pentru edificarea clasificărilor, enunțuri confirmabile despre sisteme fizice.

Specific *realismului pluralistic* rămâne interpretarea directă a conceptelor din teoria mulțimilor în termenii naturii fizice și ai acțiunii umane ; acceptarea argumentelor empirice pentru și contra teoriei mulțimilor, pretenția sa, cantorianismul și constructivismul să fie validate în diferite regiuni și diferite circumstanțe (Cf. L. Apostel [1]).

4. REALISMUL MATEMATIC AL LUI KANT

4.1. Kant despre cunoaşterea filosofică şi cunoaşterea matematică

Kant a spus despre *„cunoaşterea matematică“* că este o *„cunoaştere din/prin construirea conceptelor“*, iar filosofia este *„analiză a conceptelor“*. Aceste aserţiuni centrale în concepţia kantiană, cu vizâ directă la natura matematicii şi a filosofiei, motivează suficient şi convingător insistenţele lui Kant [1] [2] asupra *metodei de cunoaştere* prin *raţiunea pură*. Raţiunea este în viziunea filosofică kantiană „puterea/facultatea de cunoaştere“ prin concepte, adică ceea ce poate fi *„scos“* din concepte, acestea fiind „o regulă de determinare sub un caz unic“, încât se poate spune că *„puterea conceptelor“* este *„puterea regulilor“*, sau, în formulare echivalentă, ceea ce este posibil să fie determinat sub o regulă anumită. Raţiunea pură este cea care ne dă principiile cunoaşterii *a priori*, aceasta din urmă semnificând *„cunoaşterea din concepte“*, fără nici un apel la experienţă. Dar, în ultimă analiză, puterea (capacitatea) de a cunoaşte *a priori* este puterea/capacitatea de a judeca, urmează, atunci, că, cunoaşterea din concepte este cunoaşterea cu ajutorul judecăţii. Prin urmare *cunoaşterea* din *raţiune pură* înseamnă *judecată*.

Filosofia şi *matematica* sunt două tipuri de cunoaştere raţională (cunoaştere din/prin concepte) cu diferenţă că prima (filosofia) *„analizează“* (conceptele), iar matematica *„construieşte“* conceptele. Cunoaşterea filosofică — cunoaştere raţională — procedează prin *judecată*, adică prin *analiză*, un sort de *„desfacere“* a conceptului, în care fiind dat un *„general“* „scoatem“ un particular. Să reţinem că în demersul cunoaşterii filosofice *„analiza“* este elementul central şi *„scoaterea“* (prin analiză) este o operaţie intelectuală subtilă dar şi complexă fiind replica inversă a „travaliului“ *sintezei* care nu numai că a premers-o, dar procedând la o „unificare“ a unor particulari sub o regulă generală a *„prezidat“* constituirea generică a conceptului (şi, deci, conceptelor). Putem gândi judecata ca o analiză a conceptului, ca o *clarificare* (unde am auzit noi acest cuvânt ? a, da, la Wittgenstein !) a naturii acestuia, o reprezentare a raporturilor, momentelor, care, iniţial, nu erau gândite în mod explicit. Sinteza, generatoarea conceptului, unificatoare a particularilor sub „jurisdicția“ regulei generale, angajată în propriul ei demers făuritor de concept(e), ea este responsabilă de *„saltul“*, sau „încheierea logică“ care desăvârșește conceptul și tot ea ne dă seamă de *„multitplul infinit al experienței“*, numai că ne recomandă prudență; căci, tot ceea ce ea (sinteza) a făcut este să ne permită să *„manipulăm“* multiplul infinit al experienței, dar nu să-l *„stăpânim“*, este prețul plătit pentru oficiul ei de *„încheiere logică“*, (*„salt“* de la particular la general). Suntem avertizați în spirit kantian să luăm *„afacerea“* cu rezerve, deoarece conceptul nu s-a născut, aici, în demersul sintezei (unificatoare) prin parcurgerea reală a *totalității* acestor multiplicități în care abundă experiența. Și cum *experiența* este mai vastă decât *logicul, conceptul*, tot este permis numai dacă ne asumăm și riscul *„extrapolării„* efectuate, o lecție, pe care credem, Kant *„a învățat-o“* de la autorul *„Principiilor matematice ale filosofiei naturale“*, l-am numit pe Isaac Newton. Altfel *filosofia naturală* care la englezi înseamnă *știință naturală, fizica,* am fi mai așteptat mult timp actul ei de naștere ca *știință teoretică (matematizată) a naturii.* Conceptul este reprezentat de un cuvânt, dar nici conceptul și nici cuvântul nu prind conținutul obiectului desemnat prin denumirea ce o are; funcția conceptului/cuvântului este referențială și nu predicativă. *„Cuvântul-concept“* denumește numai o totalizare de utilizări, în care s-a apelat la el, pentru a desemna o totalitate de fapte de experiență, totalitatea logică inerentă conceptului având valoarea unui instrument pentru denumirea acestei totalizări. Geneza conceptului rezidă în totalizarea momentelor sale și ea (geneza) trebuie înțeleasă în mod *logic,* și nu psihologic (temporal), și anume este vorba de anterioritatea, din punct de vedere logic, a *„eterogenității diversului momentului“* (relevante pentru experiență) față de *„omogenitatea unitară a conceptului“* care le totalizează, unifică și le denumește.

Teoria kantiană asupra cunoașterii (filosofice) în care sunt angajate concept-cuvânt, experiența și altele au avut impact postum, vizibil în concepțiile filosofului englez B. Russell, ale lui Wittgenstein și ale membrilor *„Cercului de la Wiena“*, *aceștia* toți, susținând că propozițiile filosofiei sunt lipsite de semnificație, deoarece nu se supun unei exigențe formalizatoare a semnificației. Numai că perspectiva de abordare fiind accentuat lingvistică, *analiza* — termenul cheie în explicația demersului cunoașterii filosofice — nu mai este atât una predominant, logică, cât devine una mai curând lingvistică, „scoaterea“ la lumina gândirii nu atât a ceva deja ce există definit în concept, cât o analiză a modului în care au fost create propriile noastre cuvinte, a experiențelor care le-au precedat și făcut posibile. Îndemnul lui Wittgenstein la a determina conceptual cât mai precis elementele limbajului nostru, ca o exigență necesară și dezirabilă comunicării, ne restituie în fapt concepția kantiană despre *natura* și *scopul* filosofiei.

Cunoașterea matematică are particularități specifice, fiind, cum am mai spus „o cunoaștere din construirea conceptelor“; spre deosebire de filosofie care *analizează,* matematica construiește. În cazul matematicii nu mai avem de a face cu *ceva* deja dat asupra căruia demersul nostru încearcă să-l clarifice, expliciteze, deci să-l analizeze. Kant spune că a construi un concept înseamnă „a prezenta a priori intuiția care îi corespunde". Exegeții lui Kant consideră că această aserțiune „condensează", ascunde secretul întregii concepții kantiene despre *natura entităților (obiectelor) matematice,* despre posibilitatea *fundării* matematicii.

Demersul kantian în această problemă comportă două aspecte: ce înseamnă a construi un concept și ce înseamnă „a prezenta a priori o intuiție". La prima chestiune, Kant răspunde, textual: a construi un concept înseamnă a prezenta a priori intuiția care îi corespunde. Comentând, pe scurt, înseamnă că în construirea unui concept apelăm la o *intuiție,* care fiind angajată în orizont conceptual, trebuie să fie *ne-empirică,* și deci în terminologia consacrată, această intuiție este un „singular", dar nivelul de conceptualitate la care operează obligă pentru ca să aibă funcție constructoare, să posede o valabilitate generală, adică să se aplice tuturor intuițiilor posibile ale conceptului. Referitor la chestiunea ce înseamnă a prezenta a priori o intuiție, în opera lui Kant, răspunsul este dat invocând *construcția unui triunghi,* exemplul devenit deja clasic și care poate fi descris în termenii kantieni astfel: când eu *construiesc* un triunghi, prezint obiectul corespunzător conceptului (de triunghi) și fac aceasta în două moduri: fie prin simpla *„imaginație"* în *intuiția pură,* atunci când îl construiesc doar mental; fie în *intuiție empirică,* dacă îl construiesc pe tablă, sau pe hârtie.

Să remarcăm prezența unor concepte-cheie: *imaginație, intuiție pură, intuiție empirică.* Mediul relevant al imaginației este intuiția pură, imaginația prezentând obiectul corespunzător conceptului (în cazul nostru conceptul de triunghi) prin apel (cu ajutorul) intuiției pure, ceea ce înseamnă ne-participarea experienței, deoarece obiectul în cauză nu există în cadrul ei. Totuși, imaginația „se hrănește" din „materialul experienței" *via* intuiții empirice pe care imaginația le aduce cu ajutorul *schemelor transcendentale* sub *categorii* formând *conceptele,* grație unui proces complex de analize și sinteze succesive cuprinzând aprehensiunea, reproducerea recognitio, proces descris „in extenso" de Kant în prima ediție a *Criticii rațiunii pure,* dar la care a renunțat în edițiile ulterioare, motivând că în demersul său îi sunt suficiente *sensibilitatea* și *intelectul.*

Am amintit că în relația dintre imaginație și experiență prima folosește materialul celei de a doua; acest lucru trebuie să-l înțelegem nu în sensul că imaginația ar lua *obiectul* din experiență (gata făcut, existent) ci în sensul că folosește *datele* acesteia. Ar urma, în ipoteza absurdă, că neavând contact cu experiența noi nu am putea gândi sau crea nici un obiect matematic? Contextul kantian oferă următoarea soluție: *obiectele matematice nu pre-există nici în noi și nici în afara noastră, ci sunt create de noi în intuiția pură, adică independent de experiență;* prin urmare modul în care creem figurile geometrice (care sunt un sort fundamental al obiectelor matematice) nu depinde de ceea ce realmente noi am observat în sfera experienței. Un atare raport, sau mai bine spus, o asemenea explicație a raportului matematicii cu experiența obstrucționează *„invazia" psihologismului* în matematică, și, mai mult, în sfera investigațiilor fundaționale ; în ciuda delimitărilor lui Kant de psihologism, a insistențelor sale asupra acestui aspect, Frege încă mai reproșa kantianismului prezența unor reziduri psihologiste în concepția kantiană despre matematică, în special despre geometrie.

Așadar, *„intuiția pură"* și nu *experiența,* este sursa relevantă a cunoașterii geometrice. Geometria este întemeiată pe ideea de spațiu, ca formă a priori a intuiției externe. Sub infulența fizicii lui Newton va prelua ideea de *spațiu* din această teorie și va ajunge la concluzia că *spațiul nu* este un *concept empiric,* adică extras din experiențele externe. În *Estetica transcedentală* face o expunere a conceptului de spațiu, unde insistă asupra acestui aspect și conchide că reprezentarea de spațiu trebuie pusă ca fundament, tocmai „pentru că anumite senzații să fie o raportare la ceva în afara mea, pentru ca eu să-mi pot reprezenta lucrurile exterioare unele altora sau ca unele, deci nu numai ca fiind diferite, ci ca fiind în locuri diferite".

„Spațiul" transcedental (kantian) își are sursa în *teoria newtoniană a spațiului absolut.* Pentru Kant acest spațiu *sui generis* al fizicii lui Newton este de fapt spațiul geometric. Dar evoluția științei din perioada postkantiană a contestat și chiar a infirmat valabilitatea *apriorismului spațial.* Atacurile decisive ale concepției kantiene despre *spațiu* și în ultimă instanță despre *spațiul geometric* au venit dinspre *teoria relativității* și *geometriile neeuclidiene,* în special *geometria fizică* a lui Riemann. Teoria relativității (care a folosit și a asimilat geometria lui Riemann) a reliefat o proprietate remarcabilă a spațiului, *relativitatea. Spațiul geometric,* respectiv *spațiul sui generis* cu care opera fizică newtoniană, depinde, conform teoriei einsteiniene a relativității, de conținutul lui material, de structura sau starea materiei. Așadar, nu există un spațiu absolut, ci un spațiu relativ la conținutul și structura materiei ; este ideea dependenței spațiului de materie. Critica concepției kantiene despre spațiu trebuie să ia în seamă faptul că la data când filosoful german formula cunoscutele sale principii din *Estetica transcendentală* actualele teorii moderne din fizică și matematică încă nu erau elaborate, iar realizarea științifică paradigmatică în domeniu, continua să fie *fizica newtoniană* din care el s-a inspirat. Este de văzut în ce măsură *«semnificația transcedentală» a spațiului* a fost afectată de consecințele teoriilor științifice moderne, dacă este să luăm în considerație distincția *transcedental-fizic,* precum și faptul că teoriile lui Riemann și Einstein se referă la semnificații, aspecte fizice și geometrice, iar *«filosoficul»,* în ciuda vulnerabilității generate de dependența de «științific» (după unii autori) are, totuși, o *autonomie* care-l poate face imun. Einstein spunea că prin teoria relativității „spațiul și timpul au fost despuiate nu de realitatea lor, ci de absolutul lor cauzal pe care Newton a trebuit să-l atribuie acestora pentru a face posibilă exprimarea legilor cunoscute atunci". Teoria relativității relativizează *absolutul* newtonian de care Kant avusese

nevoie, deoarece corespundea exigenţelor de abstractizare şi non-empiricitate necesare întemeierii *«Esteticii transcedentale»*. Relativizarea spaţiului loveşte în *absolut* ca un *caracter al realităţii* şi nu în realitatea efectivă. *Materia*, în terminologie kantiană *„fenomenul"*, influenţează, determină structura spaţiului ceea ce nu înseamnă că fenomenele nu depind de spaţiu. Kantianismul, spre deosebire de alte filosofii, a insistat remarcabil asupra *subiectivităţii transcendentale*, spaţiul formă a subiectivităţii transcedentale este *«condiţia posibilităţii fenomenelor ca materie»*, modalitatea de a fi a obiectelor în intuiţia externă (spaţiul). Structura spaţiului în care există obiectele se dilată sau se contractă în funcţie de conţinutul său, un conţinut pentru noi întrucât şi în măsura în care este conţinut al spaţiului.

Spaţiul transcendental kantian este un „spaţiu sui generis" extras prin asimilare filosofică din cel euclidian-newtonian. Epistemologia geometriei depinde de maniera în care concepem ontologia spaţiului. Este vorba de înţelegerea transcendentală a ontologiei spaţiului care şi-a pus pecetea asupra concepţiei kantiene despre cunoaşterea matematică. Întemeierea cunoaşterii matematice, în special a celei geometrice pleacă de la spaţiul transcendental, considerat intuiţie. În exemplul ultra-cunoscut al triunghiului, trebuie să ieşim din sfera conceptului pentru a-l determina, ceea ce face ca judecăţile geometrice să fie sintetice. Există două moduri de-a determina conceptul în cauză : după condiţiile *intuiţiei empirice*, sau după cele ale *intuiţiei pure*. În mod corespunzător avem în primul caz de-a face cu o judecată empirică, dar atunci proprietăţile triunghiului nu vor avea universalitate, cum se întâmplă atunci când procedăm la măsura unghiurilor triunghiului ; în cel de al doilea caz determinarea se face prin construcţie, şi anume construcţie geometrică ; orice proprietate a unei figuri geometrice se introduce printr-o construcţie din intuiţia pură sau din sinteza acestor proprietăţi. Proprietăţile folosite de sinteză sunt determinaţii precise ale conceptelor, constituite independent de experienţă.

În construcţia aritmetică, deoarece entităţile aritmetice (numerele) nu posedă caracteristici proprii care să fie expuse, nu putem prezenta *a priori* o intuiţie care să corespundă conceptului.

4.2. Internalism versus Externalism

H. Putnam [1, p. 100] discută despre două mari perspective filosofice, ambele având şi componenta ontologică şi pe cea epistemologică. Prima perspectivă este cea oferită de *realismul metafizic*, potrivit căreia lumea „constă într-o totalitate fixată de obiecte independente de mintea (şi gândirea) umană. Există în mod exact (o singură) descriere adevărată şi completă a «modului în care există această lume» ; adevărul angajează un fel de relaţie de corespondenţă între cuvinte şi semne ale gândirii şi lucruri şi mulţimi de lucruri externe. Eu voi numi această perspectivă, perspectiva *externalită*, deoarece punctul ei de vedere favorit este un punct de vedere al Ochiului lui Dumnezeu".

A doua perspectivă, mai recentă, dar cu reprezentanți și clasici ai filosofiei universale, confundată cu puncte de vedere diferite de ea, este *perspectiva internalistă,* numită astfel, deoarece chestiunea *din ce obiecte constă lumea* se pune în *interiorul* unei *teorii* sau *descrieri.* Filosofii care aparțin acestei orientări, dacă nu toți, oricum, cei mai mulți, susțin că există mai multe teorii și nu o singură teorie adevărată care ne furnizează o descriere adecvată a lumii. *„Adevăr“* în concepția internalistă, nu semnifică ceea ce acreditează *„teoria adevărului corespondență“,* inaelienabilul gnoseologic al perspectivei internaliste. În perspectiva internalistă, scrie H. Putnam [1], *„adevăr“* este un fel de acceptabilitate rațională (idealizată) — un fel de coerență ideală al credințelor noastre, între ele, dar, și cu experiențele noastre așa cum sunt ele însele reprezentate în sistemul nostru de credințe. Prin urmare adevărul nu (se) constituie (ca) o corespondență cu stările de lucruri (states of affairs) independente de gândire sau de discurs. Nu există un punct de vedere al *„Ochiului lui Dumnezeu“,* ci există diferite punte de vedere ale oamenilor, sau ale altor minți, eventual ale extratereștrilor, dacă aceștia există, care au interese și scopuri ce condiționează reflectarea lumii în imaginea construită despre aceasta. Perspecttiva internalistă a fost asociată cu „teoria adevărului coerență“, „nonrealism“, „verificaționism“, „pluralism“ etc., termenii găsiți nepotriviți de către Putnam datorită aplicațiilor lor istorice și filosofice.

„Internaliștii“, (pragmatiștii, în primul rând) resping ipoteza demonului lui Descartes și varianta modernă, că noi toți suntem *„Brains in a Vat“,* declarând-o drept o simplă construcție lingvistică și nu o lume posibilă ; este vorba, mai curând, de o *lume paralelă,* remarcă Putnam, care asumă de la început punctul de vedere al *„Ochiului lui Dumnezeu“* despre *„adevăr“,* acesta ca independent de observatori ; ori *„lumea“* presupune o interacțiune cu *observatorul,* iar *„adevărul“* este *relațional. „Externaliștii* dimpotrivă, susțin că *„lumea“* există în sine, independentă de observator (să ne amintim că această idee figurează ca un *postulat filosofic* al fizicii clasice newtoniene !), iar *„adevărul“* nu este relațional ci constă în corespondența cu lumea așa cum este în sine. Relația de „corespondență“ fundează *adevărul* și *referința,* ceea ce în interpretarea lui Putnam creează dificultăți pentru filosoful externalist, dacă admitem că el este „un Brain in Vat“. Privitor la dificultățile realismului se pot vedea referirile lui H. Putnam [1] la *„teoria magică a referinței“* și la *teoriile cauzale ale referinței* și ne mărginim la enunțarea *tezei internalismului,* l-am numi Kantian. Concis, Putnam [1, p. 101] afirmă că în concepția internalistă semnele nu corespund în mod intrisec obiectelor. independent de cum aceste semne sunt întrebuințate și de cine. Un semn care este actual întrebuințat într-un mod particular de o comunitate particulară de utilizatori poate corespunde obiectelor particulare în interiorul schemei conceptuale a acelor utilizatori. Pentru că „obiectele“ nu există în mod independent de scheme conceptuale. Noi reducem lumea la obiecte când introducem o schemă sau alta de descriere. Deoarece obiectele și

semnele sunt asemănătoare în schema de descriere, este posibil să spunem ce se aseamănă".

Problema discutată de H. Putnam [1] este : *cum să fie un realist intern și un idealist transcendental?* Preliminariile derulate ne par necesare în abordarea realismului matematic kantian, știut fiind că filosofia lui Kant a fost calificată de toți exegeții operei sale ca *„idealism transcendental"*. Cum se știe, Kant a apărat *„idealismul transcendental"* versus *„realismul transcendental"*. Idealismul transcendental este concepția care susține că obiectele empirice sunt simple aparențe, în timp ce realismul transcendental consideră aceste obiecte (empirice) ca „lucruri în sine".

Carl J. Posy [1] propune două interpretări rivale ale idealismului transcedental kantian : una *ontologică* care eșuează când lecturăm pe Kant, dar și pe un anti-realist ca Brouwer, autorul unei filosofii contemporane a matematicii axată pe teme constructiviste explicit kantiene ; cea de a doua interpretare face apel la „noțiuni populare" din *filosofia limbajului* care lucrează valabil în ceea ce îl privește pe Kant (dar poate și pentru Brouwer). Autorul citat consideră productivă această a doua interpretare, relevanța noțiunilor lingvistice aplicate în lectura kantianismului fiind remarcabilă : obținem un Kant *intuiționist*, cu privire la *știința empirică,* și un Kant *realist,* sau cel puțin un apărător al logicii clasice când raportăm concepția kantiană la matematică.

Concepția lui Kant despre lumea empirică, atunci când se referă la vârsta universului, și adoptă realismul, ascunde o contradicție internă (a se vedea capitolul „Antinomia"). Într-adevăr, realismul transcendental susține că sau lumea are un început finit în timp, sau se întinde infinit în trecut. Kant demonstrează că nici una dintre acestea nu este adevărată, și în această manieră reduce realismul transcedental *ad absurdum.* (Argumentarea kantiană : un trecut infinit — al universului — este imposibil, deoarece este imposibil să măsurăm o așa întindere infinită ; dar și un început — finit — al universului este exclus, deoarece evenimentul creației *ex nihilo* nu poate avea o cauză observabilă). C. J. Posy remarca faptul că discuția kantiană despre măsurabilitate distorsionează proprietățile șirurilor (series) discret ordonate. Iar B. Russell a afirmat că Imm. Kant nu a fost în stare să exprime suficient de clar *infinitatea unei clase* (în cazul discuției kantiene clasa duratelor trecute) și că mutația fundamentală kantiană a fost subminată de descoperirea numerelor infinite (Cf. C. J. Posy [1]).

Se constată un fapt remarcabil care angajează *problema consistenței :* în idealismul transcedental nu avem disjuncția trecutul finit vs. trecutul infinit, în timp ce realismul transcendental nu este liber de această disjuncție. Dar, mai mult, după ce Kant afirmă că lumea, universul idealismului transcedental nu este nici finit(ă) nici infinit(ă), puțin mai încolo, comentează C. J. Posy [1], același Kant susține că „lumea idealismului transcendental se extinde infinit în trecut". C. J. Posy crede că aici este posibil ca Imm. Kant să distingă între *infinitul actual* și cel *potențial,* deși distincția nu apare numită ca atare, în plus, realismul despre obiectele fizice este compatibil cu negarea infinității actuale.

În cele ce urmează (până la propriul nostru comentariu) expunem ideile formulate de C. J. Posy [1]. Observăm mai întâi, că filosoful german are de a face cu un șir discret linear ordonat, șir de durate temporale, egale, cum sunt zilele, care curg înapoi dintr-un punct fixat, elementele sunt ordonate de o relație care satisface axiomele unei ordini lineare. Adoptă un limbaj formal simplu de ordinul întâi (L_T) având un singur simbol binar nelogic „B" care desemnează ordonarea discretă a duratelor; B(x, y) este citit intervalul x a început la un moment distinct anterior începutului lui y.

Începutul finit este simbolizat:

$$1) \ \exists x \ \forall y \neq x \ B(x, y)$$

Trecutul finit:

$$2) \ \forall x \ \exists y \neq x \ B(y, x)$$

Formulele 1) și 2) sunt considerate ca reprezentări simbolice ale alternativelor lui Kant, ce nu ascund iregularități ordinale și sunt consistente cu ordinea lineară a timpului; (2) este expresia infinitului, dar existența numerelor infinite este apreciată ca irelevantă pentru această pereche de formule, notează C. J. Posy [1]. Apare o problemă logică care se disolvă: dacă asociem realismul transcendental cu logica clasică și idealismul transcendental cu logica formulată pentru intuiționism, deoarece rezultatul disjungerii între 1) și 2) reprezintă un adevăr logic clasic și nu unul intuiționist.

Idealismul transcendental este filosofic interesant numai dacă găsim o modalitate de a-l lega de intuiționism, și acesta are importanță în disputa realism transcedental — idealism transcedental cnâd o legăm de logica discursului empiric. O aplicație ar fi pe cazul *problemei consistenței* (care a fost amintită: negația kantiană a infinității lumii și aserțiunea lumii și aserțiunea că lumea nu se întinde infinit în trecut) acestor două aserțiuni menționate între parantezele de mai sus. Punctele demersului ar fi: asumpția că irealismul transcedental leagă existența fizică cu experiența, intervenția facultății de rațiune (faculty of reason) ca elementul-cheie în formarea teoriei, în genere, elementul care guvernează activitatea inferențială și care realizează ceea ce am numi *„extrapolarea"* de la date științifice (relevante empiric parțial) la generalizări științifice, caz frecvent în sfera descoperirilor cosmologice. Cu această tendință spre *completitudine,* un sort de „încheire logică" în formarea teoriilor noastre, facultatea rațiunii contribuie remarcabil și decisiv la formarea *tabloului nostru despre univers,* unde desigur, își ia ca aliat experiența, observația, dar observațiile și experiențele cer o altă facultate, *„faculty of intuition"* (facultatea intuiției). Einstein a precizat lapidar natura fizicii (am zice că ce el a spus este vaalbil și pentru fizica în sens larg, ca știință naturală, relevantă factual, empiric) spunând că Rațiunea + Experiența = Fizica. Facultatea rațiunii postulează, în viziunea kantiană, infinitatea ca un ideal regulativ.

C. J. Posy [1] consideră că prima interpretare a *ideailsmului transcedental,* aceea ca *idealism ontologic,* îl convertește într-un sort de *constructivism fizic,* numit *fenomenalism,* care consideră *obiectele materiale* ca fiind integral *construcții umane.* Caracterul standard al acestei interpretări rezidă în conexiunea ei cu *„teoria adevărului corespondență“* și în păstrarea semnificațiilor tabelelor de adevăr ale conectivelor logice. Conform acestei interpretări *obiectele fizice* sunt descrise ca fiind construite (sintetizate) din materialul intuiției, iar *obiectele matematice* sunt gândite ca analog ronstruite, dar dintr-un „material mult mai rarefiat“. Pentru aprofundarea acestui aspect se poate consulta Ch. Parsons [1], unde găsim o idee importantă care legitimează consistența interpretării, lecturii propuse, și anume acordul ei cu ceea ce a înțeles Kant prin intuiții (empirice și matematice) și anume cailtatea lor de a se aplica obiectelor lor „in a *de re* relation“.

Relația dintre obiecte matematice și obiecte materiale ne apare acum în termenii că primele pot fi considerate ca „versiuni reificate ale principiilor care guvernează construcția obiectelor empirice“. Matematicianul ca și omul de știință, construiește obiectele sale, o concepție care are acoperire în multe texte din Brouwer [1, p .480] : „...există complexe iterative de senzații ale căror elemente sunt permutabile în puncte ale timpului. Unele dintre ele sunt complet înstrăinate de subiect. Ele sunt numite *lucruri.* De exemplu individuali, i.e. corpuri umane, ...sunt lucruri. ...Matematica intră în existență când *twoity* (doimea, doi în unul), creată de mișcarea timpului este destituită de orice calitate a subiectului și când forma vidă care rămâne a substratului comun al *doimilor,* ca intuiție de bază a matematicii este lăsată să creeze desfășurând nelimitat noile entități matematice“.

Constructivismul ontologic, temă kantiană prin excelență, nu poate servi ca o bază filosofică pentru fundarea credințelor logice ale lui Brouwer, deși *invalidează bivalența.*

Carl J. Posy [1, p. 120] sistematizează următoarele trei motive ale eșecului constructivismului ontologic, de fapt ale idealismului ontologic : „Mai întâi, această interpretare face imposibil să înțelegem raționamentul *realismului* în antinomie. Dacă evenimentele și obiectele fizice sunt (pentru realist) lucruri în ele însele independente de gândire, de ce ar trebui măsurabilitatea sau nemăsurabilitatea lor să afecteze în vreun mod adevărul judecăților despre mărimea lor ? În al doilea rând, dacă obiectele sunt construite din materialul senzației, ce speranță există pentru obiecte vagi (faint), prea îndepărtate sau prea mici să fie percepute ? Kant în mod clar susține că lucrurile de acest fel (stele îndepărtate, particule minuscule) majoritatea sunt în mod definit obiecte fizice, și există. În final, această lectură (interpretare) estompează orice diferență apreciabilă dintre Kant și Berkeley. Cei doi vor împărtăși aceeași teorie a adevărului și aceeași concepție fenomenalistă despre obiectele empirice. Aceasta este rău (din cauza fenomenalismului ca doctrină indezirabilă despre obiectele materiale) și chiar foarte rău deoarece Kant se separă explicit de Berkeley în diferite ocazii“.

Rezultă din această argumentare că baza filosofică necesară generării logicii intuiționiste, iar pentru Kant în domeniul științei empirice, trebuie căutată în altă parte. O tentativă aparține lui M. Dummett, care va valorifica unele sugestii ale lui Heyting; dacă argumentul său filosofic este consistent va invalida bivalența și va genera logica intuiționistă, este ceea ce este numit *teoria asertabilității semnificației*.

4.3. Actualitatea lui Kant în filosofia matematicii

Aproape că este un adevăr comun să spui că toate programele fundaționiste din filosofia contemporană a matematicii (logicismul, formalismul, intuiționismul) sunt îndatorate lui Kant. „Un filosof de talia lui Kant are o operă complexă și, poate, controversată nu numai datorită originilor ei nobile în cultura greacă antică (filosofică și matematică) și cea modernă, ci și prin rezonanța și impactul ei postum. Acest impact îl găsim la originea unor mari programe fundaționiste ale matematicii divergente și rivale: logicismul fregean, formalismul hilbertian și intuiționismul brouwerian. Kantianismul a provocat și reflecții ce au condus la concepții opuse apriorismului al căror reprezentant important a fost J. S. Mill. Este îndeobște acceptat, de la grecii vechi încoace, că matematica a fost considerată aproape unanim o *știință a priori,* deci o disciplină științifică ale cărei propoziții se pot stabili fără apel la experiență, fără a invoca informații asupra unor obiecte particulare. J. S. Mill a susținut, împotriva acestei tradiții care l-a inclus și pe Kant, că aritmetica este fundată pe inducții pornind de la fapte referitoare la anumite grupe de lucruri" (M. Țurlea [1]).

Logicismul care începe în sens actual cu Frege (continuator al lui Leibniz în această linie de gândire) s-a constituit, în intenția sa centrală dar și ca structură a demersului, în forma unor reflecții prilejuite de critica filosofiei matematicii a lui Kant. Frege își va *focaliza* analiza asupra naturii adevărurilor aritmetice, despre care a susținut că sunt *analitice,* prin care el a înțeles că de fapt adevărurile aritmetice sunt adevăruri logice (stabilite numai prin apel la legile logicii și definiții). Supozițiile ontologice care oferă cadrul demersului fregean par a fi de sorginte palatoniciană. Dar întrucât distingem nuanțe care îl îndepărtează de platonismul extrem sau ontologic, cum îl caracterizează P. Bernays (On platonism), lucru evident când definește *obiectivitatea* ca fiind „capacitatea de a fi accesibil mai multor subiecți gânditori" ne întrebăm, firesc, de care filosofi ai marii tradiții se apropie gânditorul de la Iena în abordările sale. Este de presupus Kant, având în vedere locul conceptului de *obiectivitate* în cadrul filosofiei kantiene. Frege nu a acceptat sensul obiectivității de *„existență independentă de spirit"*, prezent în platonismul ontologic. *Obiectivitatea în sens fregean* semnifică faptul că se constituie independent de senzațe, sau orice altă reprezentare psihică, subiectivă (este aici evident, *antipsihologismul* său, el considerând psihologismul ca irelevant în cercetările fundaționale). Dar Frege, în virtutea raționalismului său, va susține că nu obiectivitatea este dependentă de *rațiune,* prilej cu care subiectivitatea senzației, generată de *sensibilitate*, este depășită prin (și în) *obiectivitatea gândirii* (raționale). În acest context, ne-am putea întreba, dacă această *depășire* se realizează și cu ajutorul *„cadrului transcendental“* de tip kantian. Răspunsul este negativ, deoarece Frege considera acest cadrul transcendental insuficient în săvârșirea depășirii menționate anterior. Cadrul transcedental kantian întemeiază cel mult *„consensul general uman“*, dar nu *obiectivitatea adevărului* (de altfel cum observă Kneale, W. și M. [1]). Frege a contestat intuiției orice vocație de fundare. Valorificând studii în problemă, dar și enunțând și propriile mele opinii scriam într-un studiu omagial cu ocazia împlinirii a 200 de ani de la apariția *Criticii rațiunii pure* : Raționalismul fregean nu este specific unui idealist obiectiv (îl vizăm pe Platon) și nici unui neokantian (aveam în vedere idealismul transcedental al lui Kant, relevant prin cadrul său transcendental în problema obieectivității), pentru care obiectivitatea se limitează la intersubiectivitate, consens uman. Deși pleacă de la distincția kantiană, *«obiectiv-real»*, Frege, întemeietorul logicismului modern, nu aderă la constructivismul kantian, pentru care domeniul *«obiectivului»* se construiește în gândire prin intervenția constructoare a elementului *a priori*, dar nici nu admite excesul platonismului relevat de *«domeniul inteligibil transcendent»*. Ontologia realistă fregeană recunoaște și reconstruiește domeniul obiectivului, dar autorul ei nu va echivala obiectivul cu realul, căci elementul ei central îl va constitui *«domeniul obiectiv-nereal»* în care sunt localizate și entitățile aritmeticii — numerale, considerate obiective dar nu și reale, adică aspațiale și atemporale“ (M. Țurlea [1, p. 89]).

Din literatura filosofiei matematicii actuale știm că K. Gödel [1] este cel care a formulat explicit realismul platonic sau ontologic și în care se fac referiri exprese la Kant. Poziția realismului platonic la care a aderat Gödel a fost caracterizată de el în termenii următori : conceptele și axiomele matematicii, în speță ale teoriei mulțimilor, *„descriu o realitate bine determinată“*. El scrie textual : „Pentru cineva care consideră obiectele matematice existând independent de construcțiile noastre sau de intuirea lor individuală și care cere numai ca conceptele matematice generale să ne fie suficient de clare pentru a fi capabili să le recunoaștem consistența lor și adevărul axiomelor care se referă la ele, există, cred, o fundare satisfăcătoare a teoriei mulțimilor a lui Cantor în întregul ei sens și în întreaga ei extensie originală, și anume axiomatica teoriei mulțimilor interpretată în modalitatea care va fi schițată mai jos. Poate părea, la început că paradoxurile teoriei mulțimilor vor condamna la eșec o asemenea abordare, dar o examinare mai atentă arată că ele nu produc deloc dificultăți“.

«Realitatea matematică» (clasele și conceptele ca obiecte reale, existente independent de definițiile și construcțiile umane) este, deci, un domeniu de entități nespațiale, nementale, atemporale, nelingvistice, pe care le cunoaște și le descopră mintea umană, în calitate de subiect al unei *intuiții ne-empirice*. Postulatul acestei realități (existențe) matematice își învederează virtuși remarcabile în explicarea *naturii cunoașterii matematice*, în primul rând ne dă seamă de *intuiția mate-*

matică și *adevărul matematic*. Argumentarea gödeliană are caracter transcendental, căci adevărul axiomelor teoriei mulțimilor care ni se impune, ne constrânge să admitem existența unei percepții a obiectelor teoriei mulțimilor, ceea ce în limbaj echivalent se numește *intuiție*, care la rândul ei ca să fie explicată reclamă „presupoziția admiterii unui dat exterior, matematic, altul decât cel fizic". Și descrierea acestui dat matematic este făcută, iarăși, prin referire explicită la Kant : „Nu decurge, totuși, deloc, scrie Gödel [2], că datele de acest al doilea gen, întrucât nu pot fi asociate cu acțiunea unor anumite lucruri asupra organelor noastre de simț, ar fi ceva pur subiectiv, așa cum a afirmat Kant. Mai degrabă ele pot reprezenta de asemenea un aspect al realității obiective, dar, în opoziție cu senzațiile, prezența lui în noi se poate datora unui alt gen de relație dintre noi și realitate".

S-a făcut observația că Gödel are o concepție complexă asupra cunoașterii matematice, și în primul rând despre intuiție. Gödel este interesat nu numai de *Estetica transcedentală*, care, cum se știe, asuma „diversul imediat al intuiției matematice", ci și de *Analitica transcedentală* din care preia ideea despre „constituirea obiectelor fizice din diversul experiențe senzoriale și intuiției prin sinteza înțelegerii — baza aplicabilității categoriilor". Dar îl separă pe Kant ceea ce se numește *„sinteza matematică intelectuală"* care unifică diversurile matematice imediat date și diversurile constituite de sinteza matematică. În încheierea acestui aspect deși Gödel procedează la o expunere metafizică a conceptului ontologic de *realitate matematică* și a sugerat chiar posibilitatea unei *deducții transcendentale* a *postulatului continuului*, dată fiind dependența acestei deducții de logica clasică a fost valorificată insuficient.

Dar, revenind la logiciști, ceea ce îi separă de Kant este soluția dată la problema naturii propozițiilor matematice, soluția logicistă fiind consonantă cu obiectivul programului de reducere a matematicii la logică. Contrar concepției kantiene, logiciștii au susținut ideea caracterului *sintetic a priori* al enunțurilor matematice, în speță al celor aritmetice. Benacerraf și Putnam [1] consemnează două accepții ale termenului *analitic* în cuprinsul filosofiei kantiene : a) urmând (sau care urmează) din legea non-contradicției ; b) adevăr logic de forma *„toți A sunt B"*, caz în care conceptul predicatului este implicat de cel al subiectului. Quine [1] observă unele defecte ale conceptului kantian de analitic : „Kant a conceput enunțul analitic ca un enunț care nu atribuie subiectului lui ceva în plus față de ceea ce a fost deja conceptual conținut în subiect. Această formulare are două defecte : se limitează la enunțurile de forma subiect-predicat și apelează la noțiunea de conținere, care rămâne la nivel metaforic. Dar intenția lui Kant evidentă mai mult din utilizarea noțiunii analiticității decât din definiția ei poate fi reformulată astfel : un enunț este analitic atunci când el este adevărat în virtutea sensurilor și independent de fapte". Dar noțiunea *analiticității* devine neclară prin prezența termenului obscur de *sens*. În cele ce urmează nu ne interesăm de destinul programului logicist, ci doar facem remarca referitoare la conexiunea dintre acest program și analiticitatea, și ca cel mai mare și dificil *„dacă"*, acela al analiticității axiomelor teoriei mulțimilor, și avem în vedere statutul neanalitic al axiomei infinitului și al axiomei alegerii. Să menționăm mai curând că în istoria postkantiană a analiticului, un moment care a fost mult comentat îl reprezintă teza *„dizolvării sinteticului a priori“* kantian. Dar cercetări mai recente în logica cuantificării, întreprinse de Hintikka, reabilitează noțiunea kantiană *a sinteticului a priori*. Să reamintim că pentru Kant esența metodei matematice era folosirea construcțiilor, adică introducerea reprezentanților individuali distincți de conceptele generale, ceea ce făcea argumentele matematice sintetice. Or, în accepție kantiană analiticul poate fi formulat astfel : „un pas argumentativ este analitic dacă el nu introduce noi individuali în discuție“. Reabilitarea *sinteticului a priorii kantian* este descrisă de Hintikka [1] în termenii următori : „Putema acum să-l justificăm pe Kant. Ceea ce înțelegea el când considera că argumentele matematice sunt normal sintetice era perfect just. Prin argumente matematice el înțelegea în primul rând modurile de raționare care sunt astăzi tratate în teoria cuantificării. Dar tocmai s-a văzut că multe moduri de raționare cuantificaționale sunt inevitabil sintetice într-un sens natural al cuvântului. Acest sens este de altminteri, strâns legat de intuițiile lui Kant, deoarece s-a arătat în prima mea expunere că grupul III al sensurilor analiticității poate fi considerat ca o foarte bună reconstrucție a noțiunii kantiene a analiticității așa cum a utilizat-o Kant în filosofia matematicii“.

Hilbert, *întemeietorul formalismului* a fost influențat de *Estetica transcendentală* dar și de *Dialectica transcendentală ;* din prima ia intuiția ca *„percepție a semnelor pe hârtie“*, din a doua se inspiră privind *abordarea infinitului,* totalitățile infinite actuale fiind *corespondentul ideilor rațiunii.* Rolul *«infinitului»* în lucrările lui Hilbert este comparat cu cel al unei *«idei»* a rațiunii. În filosofia kantiană infinitul transcende experiența și o completează. Teoria *infinitului actual* diferă de matematica constructivă, însă nu trebuie respinsă ci considerată „cea mai admirabilă înflorire a spiritului matematic... Din paradisul lui Cantor nu trebuie să ne alunge nimeni“. (Hilbert [1]). Influența concepțiilor kantiene asupra lui Hilbert, trebuie urmărită nu numai în legătură cu intuiția, dar și cu abordarea *naturii infinitului matematic.* „Ea este prezentă într-un sens mai complex încât s-a spus că tentativa lui Kant de a oferi o demonstrație a consistenței unei științe deterministe, folosind teza *«omul este liber»*, poate fi considerată o anticipare a programului lui Hilbert despre consistența matematicii, care, după cum se știe, admite numai propoziții cu caracter finitist, ci și propoziții despre totalități infinite (noțiuni ideale). Desigur complexitatea filosofică a programului hilbertian nu este acoperită de kantianism, căci după cum se știe, s-a afirmat că Hilbert a susținut o poziție nominalistă în fundamentele matematicii“ (M. Țurlea [1]).

În *problema naturii matematicii,* Hilbert folosește o terminologie apropiată de cea kantiană. Conținutul matematicii ne este dat în reprezentare ca obiecte extralogice concrete, care există intuitiv „ca trăire efectivă nemijlocită înainte de gândire“. Conținutul real al matematicii constă în elemente intuitive, concrete. „Dar atitudinea filosofică fundamentală care structurează programul formalist al lui Hilbert este de o complexitate deosebită, căci ea reprezintă o expresie manifestă a nominalismului, tincturată de un kantianism specific care ne pare relevant de o filosofie instrumentalistă a științei, întrucât propozițiile ideale, fiind fără semnificație ontologică pentru matematică, facilitează numai raționamentele despre mulțimi finite“ (M. Țurlea [1]).

Brouwer a susținut ca și Kant că adevărurile matematice (teoremele matematice) sunt *adevăruri sintetice a priori*. Între cele două intuiții — cea a *spațiului* și cea a *timpului*, Brouwer a acceptat-o pe ultima și a făcut asta plecând de la fenomenul geometriilor neeuclidiene, care, cum se știe, au infirmat *apriorismul spațial kantian*. El a considerat că aritmetica, și prin intermediul ei, întreaga matematică poate fi deviată din intuiția timpului. Cum notează K. R. Popper [1]: „Nu avem nevoie de ea (intuiția pură a spațiului), spune Brouwer, întrucât noi putem aritmetiza geometria; putem lua ca fundament teoria aritmeticii a lui Kant și doctrina sa că aritmetica este întemeiată pe intuiția pură a timpului“. Brouwer l-a considerat pe Kant ca unul dintre precursorii remarcabili ai intuiționismului, de la care a preluat *„intuiția timpului“*. Dar și aceasta a avut un destin asemănător celui al *intuiției spațiului*, care în lumina teoriei relativității a lui Einstein a fost supusă unor corecții; ideea kantiană a unui *timp unic* nu mai poate fi susținută, ca și cea a *simultaneității absolute*. Și chiar dacă luăm în considerare consecințele epistemologice ale geometriei neeuclidiene și ale relativizării einsteiniene, care, poate, ar fi modificat oarecum concepția epistemologică a lui Brouwer, oricum nu se poate contesta prezența unui *fond kantian de gândire* în filosofia brouweriană a matematicii. Caracterul invariabil al intuiției de tip kantian a inspirat doctrina brouweriană despre intuiție ca sursă infailibilă a cunoașterii, un element puternic corectat de progresul cunoașterii (geometriile neeuclidiene au pus în discuție legimitatea intuiției euclidiene kantiene). Și intuiția set teoretică a suferit modificări datorită teoremei lui Löwenheim-Skolem. De asemenea, teoremele de incompletitudine (Gödel, Church, Rosser) au avut un impact deosebit în înțelegerea conceptului de *„realitate matematică“* sau de *„intuiție intersubiectivă“*; repercursiunile asupra concepției lui Kant și asupra rolului ei în filosofia matematicii actuale devin evidente atunci când procedăm la analiza implicațiilor ontologice și gnoseologice ale acestor importante rezultate logice, metalogice și metamatematice.

EXISTENCE AND TRUTH IN MATHEMATICS

Summary

The conceptual thematic unity of this part is given by it „own core" — *existence and truth.* The problem of mathematical existence is centrally relevant to the ontology of mathematics and therefore it is an essential theme in the philosophy of mathematics today.

Among the most significant aspects of the investigated theme (subject) we can mention : *the nature* of mathematical entities, *the status* of mathematical entities both these problems being examined in connection with the ontology of abstract objects ; the connection between the theme of mathematical existence and that of thruth ; the foundational crisis of mathematics and the paradoxes, the connection between mathematical objects and the formal systems as they are shown by theorems, which are relevant to the ontology of mathematics, the problem of the infinity. The above mentioned problems are attacked turning into account the controversy between the great foundationist programmes of mathematics : logicism, formalism and intuitionism in connection with their ancestors from general philosophy : realism, nominalism, conceptualism. Dealing with this problem is the „scenario" (script) of the foundational research to which the author subscribes „mixing" researches belonging to the philosophy of mathematics and sometimes even general philosophy.

Briefly speaking this research combines what the author called in his previons books *„fundationist approaches"* with *„foundational approaches"*, the former being by far more philosophical, but they are accompanied by metatheoretical and methodological researches ; while the latter are philosophically neutral and they have a strong logical and mathematical character.

The foundationist programmes deal with the problem of *the nature* of mathematical objects, while foundational sistems speak about *the status* of mathematical entities. their way of *„manipulating"*.

The foundational systems of mathematics analysed in the book are „the famous" axiomatic systems of the set theory and cover the area of what author calls *foundational approaches.* The foundational systems deal with the study of the structural and organizational aspects which are significant to distinguish fundamental objects from derived ones.

In the foundational systems which have been studied Z. ZF. von Neumann. Bernays, Gödel, the set is the foundamental mathematical objects. Its connection with other mathematical objects such as number, function a.s.o. are also studied.

The prospect (outlook) of the philosophy of mathematics is more striking in examining philosophical conception about mathematical existence and mathematical truth shared by the great foundationist programmes — logicism, formalism, intuitionsim. This point of view is also present in dealing with mathematical realism as platonism, of epistemological difficulties of this trend, of this relations with foundations of mathematics. The author makes some remarks favouring the *„pluralistic realism"*, the data of mathematical practice and the results of metamathematics and also using conclusions drawn after examining the difficulties met by the great programmes — logicism, formalism, intuitionism.

An opportunity favouring the philosophy of mathematics is offered by the author's remarks on the ontology of abstract objects. The author takes as a premise the fact the problem of mathematical existence transceds the one of the foundations of mathematics and that it has been a subject (theme) of thinking as great as the most important classical problems of the famous philosophers of all times: Platon, Aristotel, Descartes, Leibniz, Kant.

The ontology of abstract objects (mathematical objects are a sort of abstract objects too together with the logical ones and other theoretical constructs) sends us to the old *„problem of universals"* having a long tradition in philosophy. This problem was a reason of putting face to face great philosophical ideas, philosophical positions: realism (platonism), nominalism, conceptualism which echoed in the present day philosophy of mathematics, in logicism, formalism, intuitionism.

BIBLIOGRAFIE

EXISTENȚĂ ȘI ADEVĂR ÎN MATEMATICĂ

1. *Problema existenței matematice în marile programe fundaționiste ale matematicii*

BENACERRAF, P. and PUTNAM, H. [1] *Philosophy of Mathematics*, Prentice-Hall, Inc. 1964.

BERNAYS, P. [1] *On platonism* in Benacerraf, P. and Putnam, H. [1].

BETH, E. W. [1] *The Foundations of Mathematics* North-Holland Publishing Company, Amsterdam 1965.

CARNAP, R. [1] *On the logicist Foundations of Mathematics* in Benacerraf, P. and Putnam, H. [1].
[2] *Emipirsm, semantică, ontologie* în Semnificație și necesitate, Editura Dacia, Cluj 1972.

DUMMETT, M. [1]

GÖDEL, K. [1] *Russell's mathematical Logic* in Benacerraf, P. and Putnam, H. [1].
[2] *Ce este problema conținutului a lui Cantor?* în Epistemologie, Orientări contemporane. Edtiura Politică, București 1974.

PÂRVU, I. [1] *Existență și realitate în știință și filosofie*, Editura Politică, București 1977.

PLATON [1] *Fedon*

POPER, K. R. [1] *Epistemologie fără subiect cunoscător* în Epistemologie. Orientări contemporane, Editura Politică, București 1974.

PUTNAM, H. [1] *Models and Reality* in The journal of Simbolic Logic, nr. 3 1980.

QUINE, W. V. [1]
[2]

ROBINSON, A. [1] *Formalism '64* în *Logică și filosofie*, Editura Politică, București 1966.

van ROOTSELAAR, B. [1] *Intuitives über den Intuitionismus* (apud Surdu, A. [1]).

RUSSELL, B. [1] *Principles of Mathematics* (trad. în O. Becker: Fundamentele matematicii, Edtiura Științifică, București 1968.

SURDU, A. [1] *Neointuiționismul*, Editura Academiei, București 1977.

ȚURLEA, M. [1] *Filosofia și fundamentele matematicii*, Editura Academiei, București 1982.

WHITEHEAD, A. N. și RUSSELL, B. [1] *Principia Mathematica* (second edition) Cambridge University Press 1968.

2. *Statutul entităților matematice în perspectiva unor sisteme fundaționale ale matematicii*

BERNAYS, P. [1] *Axiomatic Set Theory,* North-Holland Publishing Co. Amsterdam 1958.
[2] *On Platonism* in Benacerraf, P. and Putnam, H. (eds): *Philosophy of Mathematics*, Prentice Hall, 1964.

BETH, E. W. [1] *The Foundations of Mathematics*, North-Holland Publishing Co. Amsterdam, 1965.

FRAENKEL, A. [1] *Abstract Set Theory,* Amsterdam, 1953.

FRAENKEL, A. and BAR-HILLEL, Y, [2] *Foundation of Set Theory,* North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1958.

FREGE, G. [1]

GRAM, M. S. [1]

KNEEBONE, G. T. [1] *Mathematical Logic and the Foundations of Mathematics,* D. van Nostrand Company Limited, London, Toronto, New-York, Princeton, New Jersey 1963.

von NEUMANN, J. [1] *An axiomatization of Set Theory,* in van Heijenoort, J. (ed): *From Frege to Gödel,* Harvard University Pres, Cambridge, Mass. 1967.

PUTNAM, H. [1]

QUINE, W. V. [1] *Mathematical Logic,* revised edition, Cambridge Mass. 1951.
[2] *Set Theory and its Logic,* revised edition, Harvard University Press, Cambridge, Mass. 1971.

RUSSELL, B. [1]

STEGMÜLLER, W. [1]

TARSKI, A. [1] *Introduction à la logique,* Paris, Gauthier-Villars Louvain, E. Nauwelaerts, 1969.

THIEL, C. [1]

ZERMELO, E. [1] *Investigations in the Foundations of Set Theory* in van Heijenoort, J. (ed): *From Frege to Gödel,* Harvard University Press, Cambridge, Mass. 1967.

3. *Realismul matematic și ontologia matematicii*

APOSTEL, L. [1]

BARKER, S. F. [1] *Realism as Philosophy of Mathematics* in Foundations of Mathematics, SySmposium Papers commemorating the sixtieth Birthday of K. Gödel, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, 1969.

BENACERRAF, P. [1] *Mathematical Truth* in Journal of Philosophy 70 (1973).

BERNAYS, P. [1] *On Platonism* in Benacerraf, P. and Putnam, H. (eds) [1].

BOYD, R. N. [1] *Realism, Undermination and a causal Theory of Evidence* in „Noûs" 1973, nr. 1.

CHISHOLM, R. [1] *Theory of Knowledge* 2 nd ed. Prentice Hall, 1977.

COHEN, P. [1] *Comments on The Foundation of Set Theory* in Axiomatic Set Theory American Hathematical Society, Providence, Rhode Island 1971.

CURRY, H. B. [1] *Outlines a formalist Philosophy of Mathematics,* North Holland Publ. Co. Amsterdam, London, 1970.

DUMMETT, M. [1]
[2] *Wittgenstein's Philosophy of Mathematics* in Benacerraf, P. and Putnam, H„ [1].
FEIBLEMAN, J. [1] *Assumptions of Whitehead's and Russell's Principia Mathematica* in International Logic Review 8 (1973).
FEIGL, H. [1] *Logical Reconstruction, Realism and pure Semantics* in Phii. of Science 1950, nr. 2.
FIELD, H. [1] *Science without Numbers*, Princeton 1980.
FOLEY, R. [1] *Rationality and Reliability*, forthcoming (apud Maddy, P. [2]).
FRAENKEL, A. [1] *Epistemology and Logic* in Kazemeir Vuysjie (ed) Logic and Language D. Reidel Dordrecht-Holland, 1962.
FREGE, G. [1] *Fundamentele aritmeticii* în Scrieri logico-filosofice, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1977.
[2] *Sens şi semnificaţie* în
[3] *Funcţie şi concept* în
GOODMAN, N. [1]
[2]
[3]
GÖDEL, K. [1] *Russell's mathematical Logic* in Benacerraf, P. and Putnam, H. (eds) [1]
[2] *Ce este problema continuului a lui Cantor?* în Epistemologie. Orientări contemporane, Editura Politică, Bucureşti, 1974.
[3] *The Consistency of the continuum Hypothesis*, Princeton University Press, Princeton, N.Y. 1940.
[4] *On undecidable Propositions of formal mathematical Systems* in The Undecidable edited by Davis, M. Ryven Press 1964.
GRICE, P. [1] *A causal Theory of Perception* in R. Schwartz (ed) Perceiving, Sensing and Knowing, California 1965.
HART, W. H. [1] *Review of Steiner's mathematical Knowledge*, Journal of Philosophy 74 (1959).
HEYTING, A.]1[
HINTIKKA, J. [1] *Influenţă, informaţie şi adevăr* în Epistemologie. Orientări contemporane, Editura Politică, Bucureşti, 1974.
KIM, J. [1] *The Role of Perception in a priori Knowledge*, Philosophical Studies 40 (1981) apud Maddy, P. [2].
KÖRNER, S. [1] *On the Relevance of post-gödelian Mathematics* in Lakatos, I. (ed) Philosophy of Mathematics, North Holland Publ. Co. Amsterdam, 1972.
LAUDAN, L. [1] *Progress and its Problems*, Univ. of California Press, 1977.
[2] *A Confutation of convergent Realism* in Philosophy of Science 1980.
Mac LANE, S. [1]
MADDY, P. [1] *Sets and Numbers* in „Noûs" 1981.
[2] *Mathematical Epistemology, what is Question?*
Mc NAUGHTON [1]
MERRIL, G. H. [1] *The model-theoretical Argument against Realism* in Philosophy of Science 1980.
PEARCE, D., RANTALA, V. [1] *Realism and formal Semantics* în „Synthese", 1982.
PUTHAM, H. [1] *Mathematics, Matter and Method*, Cambridge Univ. Press 1975.
[2] *Meanining and the moral Science*, London 1978.

[3] *Reason, Truth and History*, Cambridge Univ. Press 1981.
[4] *Models and Reality* in the Journal of Symbolic Logic, nr. 3/1980.
[5] *How to be an internal Realist and a transcedental Idealist.*
[6] *Philosophy of Logic* in [1].
QUINE, W. [1] *Două dogme ale empirismului* în Epistemologie. Orientări contemporane, Editura Politică, București, 1974.
[2] *Word and Object*, The M.I.T. Press 19.
[3] *Ontological Relativity & other Essays*, Columbia Univ. Press, New York and London, 1969.
[4] *Whitehead and modern Logic* in Selected Logic Papers, New York, Random House, 1966.
[5] *Truth by Convention* in Benacerraf, P. and Putnam, H. (eds). [1].
ROBINSON, A. [1] *Formalism '64* în Logică și Filosofie, Editura Politică, București 1966.
SCHLAGEL, R. H. [1] *Contextualistic Realism* in Philosophy and Phenomenilogical Research, 1981.
STEINER, M. [1] *Mathematical Knowledge*, Cornell 1975 (apud Maddy, P. [2]).
ȚURLEA, M. [1] *Filosofia și fundamentele matematicii*, Editura Academiei, București 1982.
[2] *Filosofia matematicii*, Editura Universității din București, 1995.
[3] *Natura adevărului matematic* în Curs de Teoria cunoașterii, CMUB, 1975.
The Encyclopedia

4. *Realismul matematic al lui Kant*

BROUWER, E. L. J. [1] *Consciousness, Philosophy and Mathematics 1948* in Collected Works 1980.
GÖDEL, K. [1] *Ce este problema continuului a lui Cantor?* în Epistemologie. Orientări contemporane, Editura Politică, București 1974.
[2] *Russell's mathematical Logic*, in Benacerraf, P. and Putnam, H. (eds) [1].
HILBERT, D. [1] *On the Infinite* in van Heijenoort, J. [1]: From Frege to Gödel, Harvard University Press, Cambridge Massachusetts 1970.
HINTIKKA, J. [1] *Inferență, informație și adevăr* în Epistemologie. Orientări contemporane, Editura Politică, București 1974.
KANT, IMM. [1] *Critica rațiunii pure*, Editura Științifică, București 1969.
KNEALE, W. și M. [1] *Dezvoltarea logicii*, Editura Dacia, Cluj-Napoca 1975.
PARSONS, CH. [1] *Mathematical Intuition*, Proceedings af Aristotelian Society, vol. 80, 1974.
POPPER, K. R. [1] *Epistemology without a Knowing Subject* in Logic, Methodology and Philosophy of Science III, North-Holland Publ. Co. Amsterdam 1968.
POSY, C. J. [1] *Kant's mathematical Realism* in
PUTNAM, H. [1] *How to be an internal Realist and a transcendental Idealist* (at the same time).
ȚURLEA, M. [1] *Aspecte kantiene în programele fundaționiste ale matematicii* în Kant. 200 ani de la apariția Criticii rațiunii pure. Editura Academiei 1982.

De acelaşi autor :

– **Filosofia şi fundamentele matematicii,**
Editura Academiei, Bucureşti, 1982.

– **Filosofia matematicii,**
Editura Universităţii Bucureşti, 1995.

– **L. Wittgenstein, antifilosof al matematicii ?,**
Editura Universităţii Bucureşti, 1996.

ISBN 973-575-092-9

Lei 3400