P. BALEA · M. JOIȚA · M. STOIAN

PROBLEME DE CALCUL INTEGRAL

EDITURA UNIVERSITĂȚII DIN BUCUREȘTI
1998

P. BALEA M. JOIȚA M. STOIAN

PROBLEME DE CALCUL INTEGRAL

EDITURA UNIVERSITĂȚII DIN BUCUREȘTI
1998

Referenţi ştiinţifici: Conf. dr. ALEXANDRA COLOJOARĂ
Lector dr. GH. POTCOVARU

Şos. Panduri, 90-92, Bucureşti - 76235; Telefon 410.23.84

ISBN - 973 - 575 - 236 - 0

Introducere

Problemele de calcul integral din această culegere, elaborată pe baza programei analitice a cursului de Analiză matemematică pentru facultățile de chimie, reprezintă aplicații la "Cursul scurt de Analiză matematică pentru chimiști" tipărit la Editura Universității București de Conf.dr.Paraschiv Balea.

Culegerea de probleme de calcul integral conține probleme rezolvate, structurate pe următoarele capitole: integrale Riemann, integrale improprii și cu parametri, integrale Euleriene, integrale curbilinii, integrale duble și triple, integrale de suprafață.

La începutul fiecărui capitol sunt prezentate cele mai importante repere teoretice.

Cartea se adresează în special chimiștilor, dar este la fel de utilă tuturor studenților de la facultățile tehnice și economice, ca și celor care vor să-și desăvârșească prregătirea matematică prin rezolvarea de probleme.

În vederea publicării unei noi ediții, autorii mulțumesc anticipat tuturor celor care prin observații și sugestii vor contribui la îmbunătățirea cărții.

Cuprins

Capitolul 1

Integrale Riemann

Teorie

Definiţia 1.1 *Fie $f : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Spunem că f admite primitive pe I dacă există $F : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ astfel încât*

$$F'(x) = f(x), \forall x \in I.$$

Observaţie

Orice altă primitivă F_1 a lui f (adică $F_1' = f$) diferă de F printr-o constantă.

Mulţimea tuturor primitivelor se notează

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C.$$

Definiţia 1.2 *Fie $[a, b] \subset \mathbb{R}$ un interval. $(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se numeşte diviziune a lui $[a, b]$ dacă*

$$(a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b).$$

$$||\Delta|| = \max_{i \in \overline{1,n}}(x_i - x_{i-1})$$

se numeşte norma lui Δ.

Definiţia 1.3 *Fie funcţia* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}, a, b \in \mathbb{R}$, $\Delta = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ *o diviziune a intervalului* $[a,b]$ *şi* $(\xi_i)_{i\in\overline{1,n}}$ *un sistem de puncte intermediare*

$$(x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i \text{ pentru } 1 \leq i \leq n).$$

Numărul real

$$\sigma_\Delta(f,\xi_i) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

se numeşte suma Riemann asociată funcţiei f, *diviziunii* Δ *şi punctelor intermediare* $(\xi_i)_i$.

Definiţia 1.4 *O funcţie* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *este integrabilă dacă există un număr real* I *cu proprietatea că* $\forall\epsilon > 0, \exists\eta_\epsilon > 0$ *astfel încât pentru orice diviziune* $\Delta = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ *a intervalului* $[a,b]$ *cu* $||\Delta|| < \eta_\epsilon$ *şi orice puncte intermediare* $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i, i \in (1 \leq i \leq n)$ *are loc inegalitatea*

$$|\sigma_\Delta(f,\xi_i) - I| < \epsilon.$$

Numărul real I *se numeşte integrala (sau integrala definită) a funcţiei* f *pe intervalul* $[a,b]$ *şi se notează*

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

1.5 Observaţii

1)Dacă există, integrala este unic determinată.

2)Orice funcţie integrabilă este mărginită.

Teorema 1.6 *Formula lui Leibniz-Newton.Fie* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, *o funcţie integrabilă care admite primitive pe* $[a,b]$. *Atunci, pentru orice primitivă* F *a lui* f *are loc egalitatea*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

1.7 Proprietăţi *1)Dacă $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sunt două funcţii integrabile, iar $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, atunci $\lambda f + \mu g$ este integrabilă şi*

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\, dx = \lambda \int_a^b f(x)\, dx + \mu \int_a^b g(x)\, dx.$$

2)Dacă $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ este o funcţie integrabilă pozitivă,

$$f(x) \geq 0, \forall x \in [a,b]$$

atunci

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

3)Dacă $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sunt funcţii integrabile astfel încât

$$f(x) \geq g(x), \forall x \in [a,b]$$

atunci

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx.$$

4)Fie $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ şi $c \in (a,b)$ astfel încât restricţiile lui f la $[a,c]$ şi $[c,b]$ sunt integrabile. Atunci f este integrabilă şi

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Teorema 1.8 *Orice funcţie continuă $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ este integrabilă.*

Teorema 1.9 *Formula de integrare prin părţi. Dacă $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sunt două funcţii derivabile, cu derivate continue, atunci*

$$\int_a^b f(x)g'(x)\, dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)dx.$$

Teorema 1.10 *Formula de schimbare de variabilă.Fie $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ continuă şi*

$$\varphi : [a, b] \longrightarrow J$$

($J \subset \mathbb{R}$) derivabilă, cu derivata continuă pe $[a, b]$. Atunci

$$\int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\, dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\, dx.$$

1.11 *Aplicaţii.*

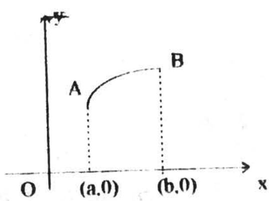
1. *Curbe în coordonate carteziene.*

   (a) *Aria determinată de curba $(AB) y = f(x)$, axa Ox şi paralelele la Oy*

   $x = a, x = b$ este

$$A = \int_a^b f(x) dx.$$

Figura 1



   (b) *Lungimea arcului $(AB) y = f(x)$ este*

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)}\, dx.$$

   (c) *Coordonatele centrului de greutate ale plăcii plane omogene din figura de la punctul 1(a) sunt*

$$x_G = \frac{\int_a^b x f(x) dx}{A}, y_G = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b f^2(x) dx}{A}.$$

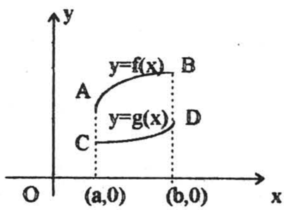
(d) *Volumul şi aria laterală ale corpului de rotaţie obţinut prin rotirea în jurul axei Ox a arcului $(AB)y = f(x)$ sunt:*

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx, A_r = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)}dx.$$

(e) *Aria limitată de curbele $(AB)y = f(x), (CD)y = g(x)$ şi paralelele la Oy, $x = a, x = b$ este:*

$$A_1 = \int_a^b (f(x) - g(x))dx.$$

Figura 2



(f) *Coordonatele centrului de greutate al plăcii plane omogene din figura precedentă sunt:*

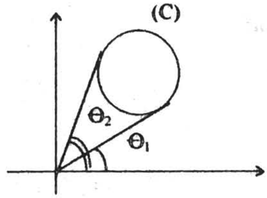
$$x_G = \frac{\int_a^b x(f(x) - g(x))dx}{A_1}, y_G = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b (f^2(x) - g^2(x))dx}{A_1}.$$

2. *Curbe în coordonate polare.*

(a) *Aria limitată de curba $(C)r = r(\theta), \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ este:*

$$A = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} r^2(\theta)\, d\theta.$$

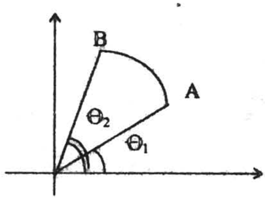
Figura 3



(b) Lungimea curbei $(C) r = r(\theta), \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ este:

$$l = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)}\, d\theta.$$

Figura 4



Pentru alte aplicaţii se folosesc formulele carteziene (cazul (1)) în care se face schimbarea de variabilă $x = r(\theta)\cos\theta, y = r(\theta)\sin\theta$.

3. *Curbe reprezentate parametric.*

   (a) *Aria limitată de curba închisă*

$$C : \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}, \ t \in [t_1, t_2]$$

este

$$A = \int_{t_1}^{t_2} g(t) \cdot f'(t)\, dt.$$

(b) Lungimea curbei

$$C : \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} , \ t \in [t_1, t_2]$$

este

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{f'^2(t) + g'^2(t)}\, dt.$$

Se observă că aceste formule se deduc din cele de la cazul (1) în care se face schimbarea de variabilă $x = f(t), y = g(t)$. În acelaşi mod se pot stabili formule şi pentru celelalte aplicaţii.

1.12 ***Integrale directe.***

1. $$\int \varphi(x)^n \cdot \varphi'(x)\, dx = \frac{\varphi(x)^{n+1}}{n+1} + C$$

2. $$\int \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{\varphi(x)}}\, dx = 2\sqrt{\varphi(x)} + C$$

3. $$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\, dx = ln|\varphi(x)| + C$$

4. $$\int e^{\varphi(x)} \cdot \varphi'(x)\, dx = e^{\varphi(x)} + C$$

5. $$\int a^{\varphi(x)} \cdot \varphi'(x)\, dx = \frac{a^{\varphi(x)}}{ln\, a} + C \ (a > 0, a \neq 1)$$

6. $$\int sin\, \varphi(x) \cdot \varphi'(x)\, dx = -cos\, \varphi(x) + C$$

7. $$\int cos\, \varphi(x) \cdot \varphi'(x)\, dx = sin\, \varphi(x) + C$$

8. $$\int \frac{\varphi'(x)}{cos^2 \varphi(x)}\, dx = tg\, \varphi(x) + C$$

9. $$\int \frac{\varphi'(x)}{sin^2\varphi(x)}\,dx = -ctg\,\varphi(x) + C$$

10. $$\int \frac{\varphi'(x)}{sin\,\varphi(x)}\,dx = ln\left|tg\frac{\varphi(x)}{2}\right| + C$$

11. $$\int \frac{\varphi'(x)}{cos\,\varphi(x)}\,dx = ln\left|tg\left(\frac{\varphi(x)}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$$

12. $$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi^2(x) + a^2}\,dx = \frac{1}{a}arctg\frac{\varphi(x)}{a} + C$$

13. $$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi^2(x) - a^2}\,dx = \frac{1}{2a}ln\left|\frac{\varphi(x) - a}{\varphi(x) + a}\right| + C$$

14. $$\int \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{a^2 - \varphi^2(x)}}\,dx = arcsin\frac{\varphi(x)}{a} + C$$

15. $$\int \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{\varphi^2(x) \pm a^2}}\,dx = ln|\varphi(x) + \sqrt{\varphi^2(x) \pm a^2}| + C$$

1.13 *Integrarea fracţiilor raţionale.Fie $P(x)$ şi $Q(x)$ două polinoame cu coeficienţi reali. Integrarea fracţiilor raţionale $\frac{P(x)}{Q(x)}$, unde gradul lui $P(x)$ este mai mic decât gradul lui $Q(x)$ (dacă nu este aşa, se face împărţirea polinoamelor) se face prin descompunerea într-o sumă de fracţii simple, care, în funcţie de rădăcinile lui $Q(x)$, pot fi de forma:*

1. $$\frac{A}{x - x_0}, (A \in \mathbb{R})$$

   dacă x_0 este o rădăcină reală simplă a lui $Q(x)$.

2. $$\frac{A_1}{x - x_0} + \frac{A_2}{(x - x_0)^2} + \ldots \frac{A_p}{(x - x_0)^p},$$

   pentru rădăcina reală x_0 multiplă de ordinul p a lui $Q(x)$ $(A_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1,p})$.

3. $$\frac{Ax + B}{x^2 + px + q}, A, B \in \mathbb{R}$$

   dacă $x^2 + px + q$ este factor în descompunerea lui $Q(x)$ având rădăcini complexe (conjugate) simple.

4. $$\frac{A_1x+B_1}{x^2+px+q}+\frac{A_2x+B_2}{(x^2+px+q)^2}+\ldots+\frac{A_kx+B_k}{(x^2+px+q)^k},$$

pentru rădăcinile complexe multiple de ordinul k ale lui x^2+px+q ($A_i, B_i \in \mathbb{R}$ pentru $i=\overline{1,k}$).

EXEMPLU.

$$\frac{x^7+21x^3+5}{x(x+1)(x+2)(x-1)^2(x-2)^3(x^2+1)(x^2+4)^2}=$$

$$=\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x+1}+\frac{A_3}{x+2}+\frac{A_4}{x-1}+\frac{A_5}{(x-1)^2}+\frac{A_6}{x-2}+\frac{A_7}{(x-2)^2}+$$

$$+\frac{A_8}{(x-2)^3}+\frac{A_9x+A_{10}}{x^2+1}+\frac{A_{11}x+A_{12}}{x^2+4}+\frac{A_{13}x+A_{14}}{(x^2+4)^2}.$$

1.14 *Pentru raţionalizarea unor integrale se recomandă următoarele schimbări de variabilă care conduc la integrale de funcţii raţionale:*

1. $$\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx\ ,\ x=a\sin t$$

2. $$\int R\left(x,\sqrt{x^2+a^2}\right)dx\ ,\ x=a\,tg\,t$$

3. $$\int R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dx\ ,\ x=\frac{a}{\cos t}$$

4. $$\int R\left(x,\sqrt{x^2+px+q}\right)dx\ ,\ \sqrt{x^2+px+q}=t-x$$

5. $$\int R\left(x,\sqrt{-x^2+px+q}\right)dx\ ,\ \sqrt{-(x-x_1)(x-x_2)}=t(x-x_1)$$

6. *Integralele binoame*

$$\int x^m(ax^n+b)^p\,dx$$

unde $m,n,p\in\mathbb{Q}$ se pot reduce la raţionale în următoarele cazuri:

(a) $p\in Z$

(b) $$p = \frac{p_1}{p_2}, p_1, p_2 \in Z, \frac{m+1}{n} \in Z.$$

Se face schimbarea de variabilă $ax^n + b = t^{p_2}$.

(c) $$p = \frac{p_1}{p_2}, p_1, p_2 \in Z.$$

Se face schimbarea de variabilă $\frac{ax^n+b}{x^n} = t^{p_2}$.

7. *Integralele trigonometrice*

$$\int R(\sin x, \cos x)dx$$

se transformă în integrale raţionale cu schimbările de variabile:

(a) *Dacă* $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ *atunci se face substituţia*

$$tg\, x = t, \text{ deci } \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}.$$

(b) *Dacă* $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ *se face substituţia* $\cos x = t$.

(c) *Dacă* $R(\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ *se face substituţia* $\sin x = t$.

(d) *Dacă nu sunt îndeplinite condiţiile precedente se face substituţia*

$$tg\frac{x}{2} = t, \text{ şi deci } \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Probleme rezolvate.

1.

$$I = \int \frac{x+4}{x^2+2x+5}dx = \int \frac{x+1}{x^2+2x+5}dx + 3\int \frac{dx}{(x+1)^2+2^2} =$$
$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+5) + \frac{3}{2}\,arctg\,\frac{x+1}{2} + C.$$

2.

$$I = \int \cos^2 x dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

3.
$$I=\int\frac{dx}{ae^x+b}=\int\frac{e^{-x}dx}{a+be^{-x}}=-\frac{1}{b}\,ln(a+be^{-x})+C.$$

4. $$I=\int\frac{x\,arctg\,x}{\sqrt{1+x^2}}dx=\int arctg\,x(\sqrt{1+x^2})'dx=$$

$$=arctg\,x\sqrt{1+x^2}-\int\frac{\sqrt{1+x^2}}{1+x^2}dx=arctg\,x\sqrt{1+x^2}-ln|x+\sqrt{1+x^2}|+C.$$

5. $$I=\int\frac{\sqrt{x}+2}{6\sqrt[6]{x^5}(\sqrt[3]{x}+1)}dx$$

$x=t^6$
$$I=\int\frac{t^3+2}{6t^5(t^2+1)}\cdot 6t^5\,dt=\int\left(t-\frac{t}{t^2+1}+\frac{2}{t^2+1}\right)dt$$

$\frac{t^3+1}{t^2+1}=t-\frac{t-2}{t^2+1}$
$$I=\frac{t^2}{2}-\frac{1}{2}ln(t^2+1)+2\,arctg\,t+C.$$

6. $$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}sin^5x\,cos^4x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-cos^2x)^2cos^4x\,sin\,x\,dx=$$

$$=\ -\frac{cos^5x}{5}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{2cos^7x}{7}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{cos^9x}{9}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{5}-\frac{2}{7}+\frac{1}{9}=\frac{8}{315}.$$

7. **Să se calculeze aria cuprinsă între curbele de ecuaţii:**

$$x^2=4y,x^2+y^2-8y=0.$$

$$A=2\int_0^4\left(\frac{x^2}{4}-4+\sqrt{16-x^2}\right)dx=2\left(\frac{x^3}{12}\Big|_0^4-4x\Big|_0^4\right)+2I_1=-\frac{64}{3}+2I_1$$

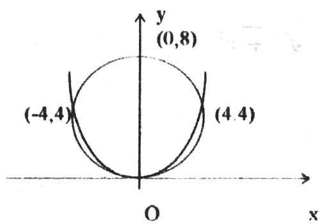
$$I_1=\int_0^4\sqrt{16-x^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}4\cos t\cdot 4\cos t\,dt=16\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+cos^2t}{2}\,dt$$

$x = 4\sin t$

$$I_1 = 8t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 4\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 4\pi$$

$A = 8\pi - \frac{64}{3}$.

Figura 5



8. Fie cicloida

$$C : \begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}, \ t \in [0, 2\pi].$$

Să se calculeze aria limitată de o arcadă cicloidală şi axa Ox şi lungimea unei arcade cicloidală.

$$A = \int_0^{2\pi a} y\,dx = \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t)a(1 - \cos t)dt =$$

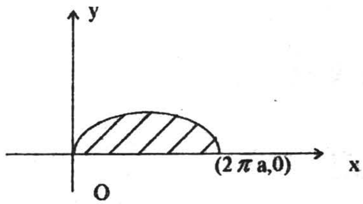
$$= a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \frac{1 + \cos 2t}{2}\right) dt =$$

$$= a^2 \left(\frac{3}{2}t\Big|_0^{2\pi} - 2\sin t\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{4}\sin 2t\Big|_0^{2\pi} \right) = 3\pi a^2.$$

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2\sin^2 t}\,dt = a\int_0^{2\pi} \sqrt{2(1 - \cos t)}dt =$$

$$= 2a \int_0^{2\pi} sin\frac{t}{2}\,dt = 2a(-2\,cos\frac{t}{2})\Big|_0^{2\pi} = -4a(-1-1) = 8a.$$

Figura 6

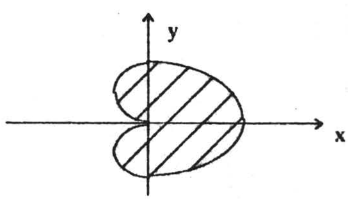


9. Se consideră cardioida

$$(C) r = a(1 + cos\,\theta)\ (a > 0).$$

Să se calculeze aria limitată de cardioidă şi perimetrul cardioidei.

Figura 7



$$A = 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi} a^2(1+cos\,\theta)^2 d\theta = a^2\int_0^{\pi}\left(1 + 2\,cos\,\theta + \frac{1+cos\,2\theta}{2}\right)d\theta =$$

$$a^2\left(\frac{3}{2}\theta\Big|_0^{\pi} + 2sin\theta\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{4}\,sin\,2\theta\Big|_0^{\pi}\right) = \frac{3\pi a^2}{2}$$

$$l = 2\int_0^{\pi} \sqrt{a^2(1+\cos\theta)^2 + a^2\sin^2\theta}\, d\theta = 2a\int_0^{\pi} \sqrt{2(1+\cos\theta)}\, d\theta =$$

$$= 4a\int_0^{\pi} \cos\frac{\theta}{2}\, d\theta = 4a\cdot 2\sin\frac{\theta}{2}\Big|_0^{\pi} = 8a.$$

Probleme propuse.

1. Să se calculeze primitivele:

(a) $\displaystyle\int \frac{x-1}{\sqrt{x^2-6x+5}}dx$

(b) $\displaystyle\int tg^2x\, dx$

(c) $\displaystyle\int \frac{sin^3x}{cos^3x}dx$

(d) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\cos x}$

(e) $\displaystyle\int \frac{dx}{ax^2+b}(a, b \in \mathbb{R})$

(f) $\displaystyle\int \frac{4x\, dx}{(1+x)(1+x^2)^2}$

(g) $\displaystyle\int \frac{xe^x}{\sqrt{1+e^x}}dx$

(h) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}}dx$

(i) $\displaystyle\int \sqrt{x^3+x^4}\, dx$

(j) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{-x^2+5x-6}}$

(k) $\displaystyle\int \frac{1-\sin x}{1+\cos x}\, dx$

(l) $\displaystyle\int sin^3x\cos x\, dx$

(m) $\displaystyle\int \frac{\cos x\, dx}{sin^3x+cos^3x}$

2. Să se calculeze aria limitată de curbele:

(a)

$$C: \begin{cases} y^2 = 4x \\ y = x \end{cases}$$

(b)

$$C: \begin{cases} x^2 = y \\ x^2y + y - 2 = 0 \end{cases}$$

(c)

$$C: \begin{cases} y^2 = 2(x-4) \\ x = 3y \end{cases}$$

3. Să se calculeze coordonatele centrului de greutate al suprafeţelor mărginite de curbele:

(a)

$$C: \begin{cases} y^2 = 4x \\ x^2 = 4y \end{cases}$$

(b)

$$C: \begin{cases} y = \frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}} \\ y = 0 \\ x = 0 \\ x = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

(c)

$$C: \begin{cases} y = 2x - x^2 \\ y = x^2 \end{cases}$$

4. Să se calculeze volumul obţinut prin rotirea în jurul axei Ox a curbelor:

(a) $y = 2x - x^2 (y > 0)$

(b) $y = x\,ln\,x, 1 \leq x \leq e$

5. Se consideră curba

$$r = a\sqrt{\cos 2\theta} \text{ (lemniscata)}$$

(a) Să se calculeze aria limitată de curbă

(b) Să se afle perimetrul curbei.

6. Se consideră curba.

$$C : \begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases} \quad \text{(astroida)}$$

(a) Să se calculeze aria limitată de curbă.

(b) Să se afle perimetrul curbei.

Capitolul 2

Integrale pe interval necompact

Integrale improprii.
Teorie

Definiţia 2.1 *1. Fie $[a,b) \subset \bar{\mathbb{R}}$ (b finit sau nu) şi $f : [a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie integrabilă pe orice interval compact conţinut în $[a,b)$. Pentru $u \in [a,b)$, punem*

$$F(u) = \int_a^u f(x)\,dx.$$

Dacă

$$\lim_{u \to b-0} F(u)$$

există şi este finită, spunem că funcţia f este integrabilă pe $[a,b)$ şi notăm

$$\int_a^{b-0} f(x)\,dx = \lim_{u \to b-0} F(u),$$

iar despre integrala

$$\int_a^{b-0} f(x)\,dx$$

spunem că este convergentă. În caz contrar, spunem că

$$\int_a^{b-0} f(x)\,dx$$

este divergentă

2. *Fie* $(a, b] \subset \bar{\mathbb{R}}$ *(a finit sau nu) şi* $f : (a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *o funcţie integrabilă pe orice interval compact conţinut în* $(a, b]$. *Pentru* $u \in (a, b]$, *punem*

$$F(u) = \int_u^b f(x)\, dx.$$

Dacă

$$\lim_{u \to a+0} F(u)$$

există şi este finită, spunem că funcţia f este integrabilă pe $(a, b]$ *şi notăm*

$$\int_{a+0}^{b} f(x)\, dx = \lim_{u \to a+0} F(u),$$

iar despre integrala

$$\int_{a+0}^{b} f(x)\, dx$$

spunem că este convergentă. În caz contrar, spunem că

$$\int_{a+0}^{b} f(x)\, dx$$

este divergentă.

3. *Fie* $(a, b) \subset \bar{\mathbb{R}}$ *şi* $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ *o funcţie integrabilă pe orice interval compact conţinut în* (a, b). *Dacă pentru* $c \in (a, b)$, *integralele*

$$\int_{a+0}^{c} f(x)\, dx \ \text{şi} \ \int_{c}^{b-0} f(x)\, dx$$

sunt convergente, spunem că funcţia f este integrabilă pe (a, b) *şi notăm*

$$\int_{a+0}^{b-0} f(x)\, dx = \int_{a+0}^{c} f(x)\, dx + \int_{c}^{b-0} f(x)\, dx,$$

iar despre integrala

$$\int_{a+0}^{b-0} f(x)\, dx$$

spunem că este convergentă. În caz contrar, spunem că

$$\int_{a+0}^{b-0} f(x)\,dx$$

este divergentă.

Definiţia 2.2 *Fie $f : [a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie integrabilă pe orice interval compact conţinut în $[a,b)$. Dacă integrala*

$$\int_{a}^{b-0} |f(x)|\,dx$$

este convergentă, spunem că integrala

$$\int_{a}^{b-0} f(x)\,dx$$

este absolut convergentă.

Propoziţia 2.3 *Fie $f, g : [a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ două funcţii integrabile pe orice interval compact conţinut în $[a,b)$. Dacă integralele*

$$\int_{a}^{b-0} f(x)\,dx \ \text{şi} \ \int_{a}^{b-0} g(x)\,dx$$

sunt convergente, atunci şi integralele

$$\int_{a}^{b-0} (f(x)+g(x))\,dx \ \text{şi} \ \int_{a}^{b-0} \alpha f(x)\,dx,\ \alpha \in \mathbb{R}$$

sunt convergente şi

$$\int_{a}^{b-0} (f(x)+g(x))\,dx = \int_{a}^{b-0} f(x)\,dx + \int_{a}^{b-0} g(x)\,dx$$

$$\int_{a}^{b-0} \alpha f(x)\,dx = \alpha \int_{a}^{b-0} f(x)\,dx.$$

CRITERII DE CONVERGENŢĂ

Teorema 2.4 *Fie $f : [a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie integrabilă pe orice interval compact conţinut în $[a,b)$. Integrala*

$$\int_a^{b-0} f(x)\,dx$$

este convergentă dacă şi numai dacă pentru orice $\epsilon > 0$, există $b_\epsilon \in [a,b)$ astfel încât pentru orice $b_1, b_2 \in (b_\epsilon, b), b_1 < b_2$ să avem

$$\left| \int_{b_1}^{b_2} f(x)\,dx \right| < \epsilon.$$

Teorema 2.5 *Fie $f : [a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie integrabilă pe orice interval compact conţinut în $[a,b)$. Dacă integrala*

$$\int_a^{b-0} f(x)\,dx$$

este absolut convergentă, atunci ea este convergentă.

Teorema 2.6 Teorema de comparaţie I.

Fie $f, g : [a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ două funcţii integrabile pe orice interval compact conţinut în $[a,b)$ şi $0 \leq f(x) \leq g(x)$ pentru orice $x \in [a,b)$.

1. *Dacă*

$$\int_a^{b-0} g(x)\,dx$$

este convergentă, atunci şi

$$\int_a^{b-0} f(x)\,dx$$

este convergentă şi

$$\int_a^{b-0} f(x)\,dx \leq \int_a^{b-0} g(x)\,dx.$$

2. *Dacă*

$$\int_a^{b-0} f(x)\,dx$$

este divergentă, atunci şi

$$\int_a^{b-0} g(x)\,dx$$

este divergentă.

Teorema 2.7 Teorema de comparaţie II.

Fie $f, g : [a,b) \longrightarrow \mathbb{R}_+$ două funcţii integrabile pe orice interval compact conţinut în $[a,b)$. Dacă există

$$\lim_{x\to b-0} \frac{f(x)}{g(x)} \in (0,\infty)$$

atunci integralele

$$\int_a^{b-0} f(x)\,dx \text{ şi } \int_a^{b-0} g(x)\,dx$$

au aceeaşi natură.

Teorema 2.8 *Fie $f, g : [a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ două funcţii reale. Dacă funcţia f este continuă pe $[a,b)$, funcţia*

$$F(u) = \int_a^u f(x)\,dx$$

este mărginită pe $[a,b)$, funcţia g este monotonă pe $[a,b)$ şi

$$\lim_{x\to b-0} g(x) = 0,$$

atunci integrala

$$\int_a^{b-0} f(x)g(x)\,dx$$

este convergentă.

Teorema 2.9 *Fie $f, g : [a, b) \longrightarrow I\!R$ două funcţii reale. Dacă funcţia f este continuă pe $[a, b)$, integrala*

$$\int_a^{b-0} f(x)\,dx$$

este convergentă şi funcţia g este monotonă pe $[a, b)$ atunci integrala

$$\int_a^{b-0} f(x)g(x)\,dx$$

este convergentă.

Teorema 2.10 Teorema de integrare prin părţi.

Fie $f, g : [a, b) \longrightarrow I\!R$ două funcţii reale derivabile pe $[a, b)$ cu derivata continuă pe $[a, b)$. Dacă există şi este finită

$$\lim_{x \to b-0} f(x)g(x)$$

şi dacă una din integralele

$$\int_a^{b-0} f'(x)g(x)\,dx\,,\ \int_a^{b-0} f(x)g'(x)\,dx$$

este convergentă atunci şi cealaltă este convergentă şi

$$\int_a^{b-0} f(x)g'(x)\,dx = \lim_{x \to b-0} f(x)g(x) - f(a)g(a) - \int_a^{b-0} f'(x)g(x)\,dx.$$

Teorema 2.11 Teorema de schimbare de variabilă.

Fie $f : [a, b) \longrightarrow I\!R$ o funcţie continuă pe $[a, b)$ şi $\varphi : [\alpha, \beta) \longrightarrow I\!R$ o funcţie strict crescătoare, derivabilă, cu derivata continuă pe $[\alpha, \beta)$ astfel încât $\varphi(\alpha) = a$ şi

$$\lim_{t \to \beta-0} \varphi(t) = b.$$

Dacă una din integralele

$$\int_a^{b-0} f(x)\,dx\,,\ \int_\alpha^{\beta-0} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

este convergentă atunci şi cealaltă este convergentă şi

$$\int_a^{b-0} f(x)\,dx = \int_\alpha^{\beta-0} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

2.12 Observaţie. *Criteriile de convergenţă enunţate mai sus se referă la intervale de forma $[a,b) \subseteq \bar{\mathbb{R}}$. Acestea se transpun fără modificări esenţiale şi la intervale de tipul $(a,b]$.*

2.13 Criteriul integral al lui Cauchy.

Fie $f : [a,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}_+$. Dacă funcţia f este descrescătoare pe $[a,\infty)$, atunci integrala

$$\int_a^\infty f(x)\,dx \text{ şi seria } \sum_{n=p}^{\infty} f(n),$$

unde p este cel mai mic întreg pozitiv mai mare decât a, au aceeaşi natură.

Probleme rezolvate

Să se studieze convergenţa următoarelor integrale şi în caz de convergenţă să se calculeze:

1. $$\int_0^\infty \frac{dx}{x^3+8}$$

Rezolvare

Funcţia

$$f : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{x^3+8}$$

este continuă pe $[0,\infty)$, deci integrabilă pe orice interval compact conţinut în $[0,\infty)$.

Fie $u \in [0,\infty)$ şi

$$F(u) = \int_0^u \frac{dx}{x^3+8}.$$

Din

$$\frac{1}{x^3+8} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2-2x+4},$$

deducem că

$$(A+B)x^2 + (-2A+2B+C)x + 4A + 2C = 1,$$

de unde rezultă că

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -2A+2B+C=0 \\ 4A+2C=1 \end{cases}$$

şi deci

$$\frac{1}{x^3+8} = \frac{1}{12}\frac{1}{x+2} - \frac{1}{12}\frac{x-4}{x^2-2x+4}.$$

Atunci

$$F(u) = \frac{1}{12}\int_0^u \frac{dx}{x+2} - \frac{1}{12}\int_0^u \frac{x-4}{x^2-2x+4}\,dx =$$

$$= \frac{1}{12}ln(x+2)\Big|_0^u - \frac{1}{24}\int_0^u \frac{2x-2}{x^2-2x+4}\,dx + \frac{1}{4}\int_0^u \frac{dx}{(x-1)^2+3} =$$

$$= \frac{1}{12}ln(x+2)\Big|_0^u - \frac{1}{24}ln(x^2-2x+4)\Big|_0^u + \frac{1}{4\sqrt{3}}arctg\frac{x-1}{\sqrt{3}}\Big|_0^u =$$

$$= \frac{1}{12}ln(u+2) - \frac{1}{12}ln\,2 - \frac{1}{24}ln|u^2-2u+4| + \frac{1}{24}ln\,4 + \frac{1}{4\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{6} =$$

$$= \frac{1}{12}ln\frac{(u+2)^2}{u^2-2u+4} + \frac{1}{4\sqrt{3}}arctg\frac{u-1}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{24\sqrt{3}}$$

şi

$$\lim_{u\to\infty} F(u) = 0 + \frac{1}{4\sqrt{3}}\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{24\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}.$$

Deci integrala

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^3+8}$$

este convergentă şi

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^3+8} = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}.$$

2. $$\int_a^\infty \frac{dx}{x^\alpha},\ a>0,\ \alpha\in\mathbb{R}$$

Rezolvare

Funcţia

$$f:[a,\infty)\longrightarrow\mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{x^\alpha}$$

este continuă pe $[a,\infty)$, deci este integrabilă pe orice interval compact conţinut în $[a,\infty)$. Fie $u\in[a,\infty)$ şi

$$F(u)=\int_a^u\frac{dx}{x^\alpha}=\begin{cases} \ln u-\ln a & \alpha=1\\ \frac{1}{1-\alpha}(u^{1-\alpha}-a^{1-\alpha}) & \alpha\neq 1\end{cases}.$$

Deoarece

$$\lim_{u\to\infty}F(u)=\begin{cases}\infty & \alpha\le 1\\ -\frac{1}{1-\alpha}a^{1-\alpha} & \alpha>1\end{cases},$$

integrala

$$\int_a^\infty\frac{dx}{x^\alpha}$$

este convergentă pentru $\alpha>1$,

$$\int_a^\infty\frac{dx}{x^\alpha}=\frac{1}{\alpha-1}a^{1-\alpha}$$

şi divergentă pentru $\alpha\le 1$.

Observaţie. Fie $f:[a,\infty)\longrightarrow\mathbb{R}_+$ o funcţie integrabilă pe orice interval compact conţinut în $[a,\infty)$:

a)Dacă

$$\lim_{x\to\infty}x^\alpha f(x)=l\in(0,\infty)\,pentru\,\alpha>1,$$

atunci integrala

$$\int_a^\infty f(x)\,dx$$

este convergentă.

b)Dacă

$$\lim_{x\to\infty} x^{\alpha} f(x) = l \in (0,\infty)\, pentru\ \alpha < 1,$$

atunci integrala

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx$$

este divergentă.

3. $$\int_a^{b-0} \frac{dx}{(b-x)^{\alpha}},\ \alpha \in \mathbb{R}$$

Rezolvare

Funcţia

$$f : [a,b) \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{(b-x)^{\alpha}}$$

este continuă pe $[a,b)$, deci este integrabilă pe orice interval compact conţinut în $[a,b)$. Fie $u \in [a,b)$. Atunci

$$F(u) = \int_a^u \frac{dx}{(b-x)^{\alpha}} = \begin{cases} ln\,(b-a) - ln\,(b-u) & \alpha = 1 \\ \frac{1}{\alpha-1}\left[(b-u)^{1-\alpha} - (b-a)^{1-\alpha}\right] & \alpha \neq 1 \end{cases}$$

Deoarece

$$\lim_{u\to b-0} F(u) = \begin{cases} \infty & \alpha \geq 1 \\ \frac{1}{1-\alpha}(b-a)^{1-\alpha} & \alpha < 1 \end{cases},$$

integrala

$$\int_a^{b-0} \frac{dx}{(b-x)^{\alpha}}$$

este convergentă pentru $\alpha < 1$,

$$\int_a^{b-0} \frac{dx}{(b-x)^{\alpha}} = \frac{1}{1-\alpha}(b-a)^{1-\alpha}$$

şi divergentă pentru $\alpha \geq 1$.

Observaţie. Fie $f : [a, b) \longrightarrow \mathbb{R}_+, b \in \mathbb{R}$, o funcţie integrabilă pe orice interval compact conţinut în $[a, b)$.

a)Dacă

$$\lim_{x \to b-0} (b-x)^\alpha f(x) = l \in (0, \infty)\, pentru\, \alpha < 1,$$

atunci integrala

$$\int_a^{b-0} f(x)\, dx$$

este convergentă.

b)Dacă

$$\lim_{x \to b-0} (b-x)^\alpha f(x) = l \in (0, \infty)\, pentru\, \alpha \geq 1,$$

atunci integrala

$$\int_a^{b-0} f(x)\, dx$$

este divergentă.

4. $$\int_{a+0}^{b} \frac{dx}{(x-a)^\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}$$

Rezolvare

Funcţia

$$f : (a, b] \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{(x-a)^\alpha}$$

este continuă pe $(a, b]$, deci este integrabilă pe orice interval compact conţinut în $(a, b]$. Fie $u \in (a, b]$. Atunci

$$F(u) = \int_u^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha} = \begin{cases} ln\,(b-a) - ln\,(u-a) & \alpha = 1 \\ \frac{1}{1-\alpha}\left[(b-a)^{1-\alpha} - (u-a)^{1-\alpha}\right] & \alpha \neq 1 \end{cases}.$$

Deoarece

$$\lim_{u \to a+0} F(u) = \begin{cases} \infty & \alpha \geq 1 \\ \frac{1}{1-\alpha}(b-a)^{1-\alpha} & \alpha < 1 \end{cases},$$

integrala

$$\int_{a+0}^{b} \frac{dx}{(x-a)^{\alpha}}$$

este convergentă pentru $\alpha < 1$,

$$\int_{a+0}^{b} \frac{dx}{(x-a)^{\alpha}} = \frac{1}{1-\alpha}(b-a)^{1-\alpha}$$

şi divergentă pentru $\alpha \geq 1$.

Observaţie. Fie $f : (a, b] \longrightarrow I\!R_+, a \in I\!R$, o funcţie integrabilă pe orice interval compact conţinut în $(a, b]$.

a)Dacă

$$\lim_{x \to a+0} (x-a)^{\alpha} f(x) = l \in (0, \infty)\, pentru\, \alpha < 1,$$

atunci integrala

$$\int_{a+0}^{b} f(x)\, dx$$

este convergentă.

b)Dacă

$$\lim_{x \to a+0} (x-a)^{\alpha} f(x) = l \in (0, \infty)\, pentru\, \alpha \geq 1,$$

atunci integrala

$$\int_{a+0}^{b} f(x)\, dx$$

este divergentă.

5. $$\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$$

Rezolvare

Funcţia

$$f : [0, \infty) \longrightarrow I\!R_+, f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}$$

este continuă pe $[0, \infty)$, deci este integrabilă pe orice interval compact conținut în $[0, \infty)$.

Deoarece $0 \leq f(x)$, pentru orice $x \in [0, \infty)$ și

$$\lim_{x \to \infty} x^{\alpha} f(x) = 1 \in (0, \infty), \text{ pentru } \alpha = 1,$$

comform teoremei de comparație II și execițiului 2, rezultă că integrala

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}$$

este divergentă.

$$\int_0^{\infty} \frac{arctg\, x}{(1 + x^2)^{3/2}}\, dx$$

Rezolvare

Funcția

$$f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{arctg\, x}{\sqrt{(1 + x^2)^3}}$$

este continuă pe $[0, \infty)$, deci este integrabilă pe orice interval compact conținut în $[0, \infty)$.

Deoarece $0 \leq f(x)$, pentru orice $x \in [0, \infty)$ și

$$\lim_{x \to \infty} x^{\alpha} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^{\alpha} arctg\, x}{\sqrt{(1 + x^2)^3}} = \frac{\pi}{2} \in (0, \infty), \text{ pentru } \alpha = 3 > 1,$$

comform teoremei de comparație II și execițiului 2, rezultă că integrala

$$\int_0^{\infty} \frac{arctg\, x}{\sqrt{(1 + x^2)^3}}\, dx$$

este convergentă. Din

$$f(x) = arctg\, x \left(\frac{x}{\sqrt{(1 + x^2)}} \right)',$$

$$\lim_{x\to\infty}(arctg\,x)\frac{x}{\sqrt{(1+x^2)}}=\frac{\pi}{2}$$

şi teorema de integrare prin părţi, rezultă că

$$\int_0^\infty \frac{arctg\,x}{(1+x^2)^{3/2}}\,dx=\frac{\pi}{2}-0-\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx=$$

$$=\frac{\pi}{2}-\int_0^\infty\left(-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)'dx=\frac{\pi}{2}-\lim_{x\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{1+x^2}}-1=\frac{\pi}{2}-1$$

7. $$\int_{0+0}^\infty \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$$

Rezolvare

Funcţia

$$f:(0,\infty)\longrightarrow I\!R,\ f(x)=\frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}$$

este continuă pe $(0,\infty)$, deci este integrabilă pe orice interval compact conţinut în $(0,\infty)$.

Deoarece $0\le f(x)$, pentru orice $x\in(0,\infty)$ şi

$$\lim_{x\to0+0}x^\alpha f(x)=\lim_{x\to0+0}\frac{x^\alpha}{(1+x)\sqrt{x}}=1\in(0,\infty),\ \text{pentru}\ \alpha=\frac{1}{2}<1,$$

şi

$$\lim_{x\to\infty}x^\alpha f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^\alpha}{(1+x)\sqrt{x}}=1,\quad \text{pentru}\ \alpha=\frac{3}{2}>1,$$

comform teoremei de comparaţie II şi execiţiilor 2 şi 4 deducem că integrala

$$\int_{0+0}^\infty \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$$

este convergentă.

Din $\sqrt{x}=t$, avem că $x=t^2$. Fie $\varphi:[0,\infty)\longrightarrow I\!R,\varphi(t)=t^2$. Funcţia φ este strict crescătoare, derivabilă, $\varphi'(t)=2t$, cu derivata continuă pe $[0,\infty),\varphi(0)=0$ şi

$$\lim_{t\to\infty}\varphi(t)=\infty.$$

Atunci conform TEOREMEI DE SCHIMBARE DE VARIABILĂ avem că

$$\int_{0+0}^{\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = \int_{0+0}^{\infty} \frac{1}{(1+t^2)t} 2t\,dt = \int_{0+0}^{\infty} \frac{2\,dt}{1+t^2} =$$

$$= 2\,arctg\,t\Big|_0^{\infty} = 2\lim_{t\to\infty} arctg t - 2\,arctg\,0 = \pi$$

8. $$\int_{1+0}^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$$

Rezolvare

Funcţia

$$f:(1,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

este continuă pe $(1,\infty)$, deci este integrabilă pe orice interval compact conţinut în $(1,\infty)$.

Deoarece $0 \leq f(x)$, pentru orice $x \in (1,\infty)$ şi

$$\lim_{x\to 1+0} (x-1)^{\alpha} f(x) = \lim_{x\to 1+0} \frac{(x-1)^{\alpha}}{x\sqrt{(x-1)(x+1)}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ pentru } \alpha = \frac{1}{2} < 1,$$

şi

$$\lim_{x\to\infty} x^{\alpha} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{\alpha}}{x\sqrt{x^2-1}} = 1, \quad \text{pentru } \alpha = 2 > 1,$$

comform teoremei de comparaţie II şi exerciţiilor 2 şi 4 deducem că integrala

$$\int_{1+0}^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$$

este convergentă.

Dacă $\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = t$, atunci $x = \frac{1+t^2}{1-t^2}$. Fie $\varphi : [0,1) \longrightarrow \mathbb{R}, \varphi(t) = \frac{1+t^2}{1-t^2}$. Funcţia φ este strict crescătoare, derivabilă, $\varphi'(t) = \frac{4t}{(1-t^2)^2}$, cu derivata continuă pe $[0,1), \varphi(0) = 1$ şi

$$\lim_{t\to 1} \varphi(t) = \infty.$$

Atunci conform TEOREMEI DE SCHIMBARE DE VARIABILĂ avem că

$$\int_{1+0}^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int_0^{1-0} \frac{1-t^2}{1+t^2}\frac{1-t^2}{2t}\frac{4t}{(1-t^2)^2}\,dt = \int_0^{1-0} \frac{2\,dt}{1+t^2} =$$

$$= 2\,arctg\,t\big|_0^1 = 2\frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{2}.$$

9. $$\int_0^{\infty} x^n e^{-x}\,dx,\ n \in \mathbb{N}$$

Rezolvare

Fie $n \in \mathbb{N}$, funcţia $f : [2n, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = e^{-\frac{x}{2}}$$

şi

$$g : [2n, \infty) \longrightarrow \mathbb{R},\, g(x) = x^n e^{-\frac{x}{2}}.$$

Deoarece funcţia f este continuă pe $[2n, \infty)$, integrala

$$\int_{2n}^{\infty} e^{-\frac{x}{2}}$$

este convergentă.

$$\left(\lim_{u\to\infty} F(u) = \lim_{u\to\infty}\int_{2n}^{u} e^{-\frac{x}{2}}\,dx = \lim_{u\to\infty}\left(-2e^{-\frac{x}{2}}\Big|_{2n}^{u}\right) = 2e^{-n}\right)$$

iar funcţia g este strict descrescătoare pe $[2n, \infty)$ pentru că

$$g'(x) = x^n\left(\frac{n}{x} - \frac{1}{2}\right)e^{-\frac{x}{2}}$$

şi mărginită pe $[2n, \infty)$ pentru că

$$0 \leq g(x) \leq 2^n n^n e^{-n}.$$

Conform teoremei 9 rezultă că integrala

$$\int_{2n}^{\infty} x^n e^{-x}\,dx$$

este convergentă. Dar

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-x}\,dx = \int_0^{2n} x^n e^{-x}\,dx + \int_{2n}^{\infty} x^n e^{-x}\,dx.$$

Deci integrala

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-x}\,dx$$

este convergentă. Avem că

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-x}\,dx = \lim_{u\to\infty}\int_0^u x^n e^{-x}\,dx = \lim_{u\to\infty}\int_0^u x^n(-e^{-x})'\,dx =$$

$$\lim_{u\to\infty}\left[-x^n e^{-x}\Big|_0^u + \int_0^u n x^{n-1} e^{-x}\,dx\right] = \lim_{u\to\infty}\left[-u^n e^{-u} + n\int_0^u x^{n-1} e^{-x}\,dx\right] =$$

$$= n\lim_{u\to\infty}\int_0^u x^{n-1} e^{-x}\,dx.$$

Prin recurenţă se poate calcula

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-x}\,dx = n!\lim_{u\to\infty}\int_0^u x e^{-x}\,dx =$$

$$= n!\lim_{u\to\infty}\left[-xe^{-x}\Big|_0^u + \int_0^u e^{-x}\,dx\right] = n!\lim_{u\to\infty}(-e^{-x})\Big|_0^u = n!.$$

$$\int_0^{1-0} ln\frac{1}{1-x}\,dx$$

Rezolvare

Metoda I.

Funcţia

$$f:[0,1)\longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = ln\frac{1}{1-x}$$

este continuă pe $[0,1)$, deci este integrabilă pe orice interval compact conţinut în $[0,1)$. Fie $u\in[0,1)$ şi

$$F(u) = \int_0^u ln\frac{1}{1-x}\,dx = -\int_0^u (x)'ln(1-x)\,dx =$$

$$= -x\,ln(1-x)\big|_0^u + \int_0^u \frac{-x+1-1}{1-x}\,dx = -u\,ln(1-u) + \int_0^u \left(1+\frac{-1}{1-x}\right)dx =$$

$$= -u\,ln(1-u) + x\big|_0^u + ln(1-x)\big|_0^u = (1-u)ln(1-u)+u.$$

Deoarece

$$\lim_{u\to 1-0} F(u) = \lim_{u\to 1-0}\left[(1-u)ln(1-u)+u\right] = 0+1 = 1,$$

integrala

$$\int_0^{1-0} ln\frac{1}{1-x}\,dx$$

este convergentă şi

$$\int_0^{1-0} ln\frac{1}{1-x}\,dx = 1.$$

Metoda II.

Funcţia

$$f:[0,1)\longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = ln\,\frac{1}{1-x}$$

este continuă pe $[0,1)$ iar funcţia $\varphi : [0,\infty) \longrightarrow [0,1), \varphi(t) = 1-e^{-t}$ este strict crescătoare pe $[0,\infty)$, derivabilă, $\varphi'(t) = e^{-t}$, cu derivata continuă pe $[0,\infty), \varphi(0)=0$ şi

$$\lim_{t\to\infty}\varphi(t) = 1.$$

Deoarece

$$\int_0^{\infty} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int_0^{\infty} ln\frac{1}{1-1+e^{-t}}\cdot e^{-t}dt = \int_0^{\infty} te^{-t}dt = 1$$

(exerciţiul 9), conform TEOREMEI DE SCHIMBARE DE VARIABILĂ rezultă că integrala

$$\int_0^{1-0} ln\frac{1}{1-x}\,dx$$

este convergentă şi

$$\int_0^{1-0} ln\frac{1}{1-x}\,dx = \int_0^{\infty} te^{-t}dt = 1.$$

11. $$\int_0^\infty \frac{1}{(x^2+a^2)^n}\,dx,\ a \in \mathbb{R}^*,\ n \in \mathbb{N}^*$$

Rezolvare

Fie $n \in \mathbb{N}^*$.Funcţia $f_n : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \frac{1}{(x^2+a^2)^n}$$

este continuă pe $[0,\infty)$, deci integrabilă pe orice interval compact conţinut în $[0,\infty)$. Deoarece

$$0 \le f_n(x), \text{ pentru orice } x \in [0,\infty)$$

şi

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^\alpha}{(x^2+a^2)^n} = 1, \text{ pentru } \alpha = 2n > 1$$

conform Teoremei de comparaţie II şi exerciţiului 2 rezultă că integrala

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$$

este convergentă. Fie $u \in [0,\infty)$ şi

$$F_n(u) = \int_0^u \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}.$$

Avem că

$$F_n(u) = \frac{1}{a^2}\int_0^u \frac{a^2+x^2-x^2}{(x^2+a^2)^n}\,dx = \frac{1}{a^2}F_{n-1}(u) - \frac{1}{a^2}\int_0^u \frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^n} =$$

$$= \frac{1}{a^2}F_{n-1}(u) - \frac{1}{a^2(2n-2)}\int_0^u x\left(\frac{-1}{(x^2+a^2)^{n-1}}\right)' dx =$$

$$= \frac{1}{a^2}F_{n-1}(u) + \frac{1}{a^2(2n-2)}\left[x\frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}}\Big|_0^u - F_{n-1}(u)\right] =$$

$$= \frac{2n-3}{a^2(2n-2)}F_{n-1}(u) + \frac{1}{a^2(2n-2)}\frac{u}{(u^2+a^2)^{n-1}},$$

de unde rezultă că

$$I_n = \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \lim_{u\to\infty} F_n(u) = \frac{2n-3}{a^2(2n-2)} I_{n-1},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}, n > 1$.

Pentru $n = 1$, avem că

$$I_1 = \lim_{u\to\infty} \int_0^u \frac{dx}{x^2+a^2} = \lim_{u\to\infty} \frac{1}{|a|} arctg \frac{u}{|a|} = \frac{1}{|a|}\frac{\pi}{2}.$$

Deci

$$I_n = \frac{2n-3}{a^2(2n-2)} I_{n-1} = \frac{2n-3}{a^2(2n-2)}\frac{2n-5}{a^2(2n-4)} I_{n-2} = \ldots =$$

$$= \frac{2n-3}{a^2(2n-2)}\frac{2n-5}{a^2(2n-4)}\cdots\frac{1}{a^2\cdot 2} I_1 = \frac{(2n-3)(2n-5)\ldots 3}{a^{2(n-1)}2^{n-1}(n-1)!}\frac{1}{|a|}\frac{\pi}{2}.$$

12. $$\int_{-a+0}^{a-0} \frac{x^n}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx,\ n \in \mathbb{N},\ a > 0$$

Rezolvare

Fie $n \in \mathbb{N}$.Funcţia $f_n : (-a, a) \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \frac{x^n}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

este continuă pe $(-a, a)$, deci este integrabilă pe orice interval compact conţinut în intervalul $(-a, a)$. Deoarece

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} \frac{(a-x)^\alpha |x^n|}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{a^n}{\sqrt{2a}},\ \text{pentru } \alpha = \frac{1}{2} < 1$$

şi

$$\lim_{\substack{x\to -a\\ x>-a}} \frac{(x+a)^\alpha |x^n|}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{a^n}{\sqrt{2a}},\ \text{pentru } \alpha = \frac{1}{2} < 1$$

din Teorema de comparaţie II şi exerciţiile 3 şi 4 deducem că integrala

$$\int_{-a+0}^{a-0} \frac{x^n}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$$

este absolut convergentă, deci convergentă (Teorema 5).

Fie $\epsilon \in (0,a)$ şi

$$F_n(\epsilon) = \int_{-a+\epsilon}^{a-\epsilon} \frac{x^n dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int_{-a+\epsilon}^{a-\epsilon} x^{n-1}(-\sqrt{a^2-x^2})'\,dx =$$

$$= -x^{n-1}\sqrt{a^2-x^2}\Big|_{-a+\epsilon}^{a-\epsilon} + (n-1)\int_{-a+\epsilon}^{a-\epsilon} x^{n-2}\sqrt{a^2-x^2} =$$

$$= -(a-\epsilon)^{n-1}\sqrt{2a\epsilon-\epsilon^2} + (\epsilon-a)^{n-1}\sqrt{2a\epsilon-\epsilon^2} + a^2(n-1)F_{n-2}(\epsilon) - (n-1)F_n(\epsilon).$$

Prin urmare

$$F_n(\epsilon) = \frac{\sqrt{2a\epsilon-\epsilon^2}}{n}\left[(\epsilon-a)^{n-1} - (a-\epsilon)^{n-1}\right] + a^2\frac{n-1}{n}F_{n-2}(\epsilon)$$

pentru $n \geq 2$, şi deci

$$I_n = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{-a+\epsilon}^{a-\epsilon} \frac{x^n}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \lim_{\epsilon\to 0} F_n(\epsilon) = \frac{a^2(n-1)}{n}I_{n-2},\ n \geq 2.$$

Pentru $n = 1$, avem că

$$I_1 = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{-a+\epsilon}^{a-\epsilon} \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{-a+\epsilon}^{a-\epsilon}(-\sqrt{a^2-x^2})dx =$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0}(-\sqrt{2a\epsilon-\epsilon^2} + \sqrt{2a\epsilon-\epsilon^2}) = 0$$

şi

$$I_0 = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{-a+\epsilon}^{a-\epsilon} \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \lim_{\epsilon\to 0} arcsin\frac{a-\epsilon}{a} - arcsin\frac{\epsilon-a}{a} = \pi.$$

Prin urmare

$$I_{2n} = \frac{a^2(2n-1)}{2n}I_{2n-2} = \frac{a^2(2n-1)}{2n}\frac{a^2(2n-3)}{2n-2}I_{2n-4} = \ldots =$$

$$= \frac{a^2(2n-1)}{2n}\frac{a^2(2n-3)}{2n-2}\dots\frac{a^2\cdot 1}{2}I_0 = \frac{a^{2n}(2n-1)(2n-3)\dots 1}{2^n\cdot n!}\pi$$

şi

$$I_{2n+1} = \frac{a^2\cdot 2n}{2n+1}I_{2n-1} = \frac{a^2 2n}{2n+1}\frac{a^2(2n-2)}{2n-1}I_{2n-3} = \dots =$$

$$\frac{a^2 2n}{2n+1}\cdot\frac{a^2(2n-2)}{2n-1}\dots\frac{a^2\cdot 2}{3}I_1 = 0.$$

13. $$\int_{0+0}^{\frac{\pi}{2}} ln\, sin\, x\, dx$$

Rezolvare

Funcţiile

$$f:\left(0,\frac{\pi}{2}\right]\longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = ln\, sin\, x \text{ şi } g:\left(0,\frac{\pi}{2}\right]\longrightarrow \mathbb{R}, g(x) = x$$

sunt derivabile cu derivata continuă pe $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$.

Avem

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)g(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{ln\, sin\, x}{\frac{1}{x}}\left(=\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{-x^2\cos x}{sin\, x} = 0$$

şi integrala

$$\int_{0+0}^{\frac{\pi}{2}} f'(x)g(x)\,dx = \int_{0+0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{x\cos x}{sin\, x}\,dx$$

este convergentă. Am considerat $h:\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\longrightarrow \mathbb{R}$, continuă,

$$h(x) = \begin{cases}\frac{x\cos x}{\sin x} & x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]\\ 1 & x = 0\end{cases}$$

pentru a rezulta

$$\int_{0+0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{x\cos x}{sin\, x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} h(x)\,dx.$$

Conform teoremei de integrare prin părţi rezultă că şi integrala

$$\int_{0+0}^{\frac{\pi}{2}} f(x)g'(x)\,dx = \int_{0+0}^{\frac{\pi}{2}} ln\, sin\, x\, dx$$

este convergentă. Funcţia

$$\varphi : \left(0, \frac{\pi}{4}\right] \longrightarrow \left(0, \frac{\pi}{2}\right], \varphi(t) = 2t$$

este strict crescătoare, derivabilă şi cu derivata continuă pe $\left(0, \frac{\pi}{4}\right]$,

$$\lim_{t\to 0} \varphi(t) = 0 \text{ şi } \varphi\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Atunci conform Teoremei de Schimbare de Variabilă, avem că:

$$\int_{0+0}^{\frac{\pi}{2}} ln\, sin\, x\, dx = 2\int_{0+0}^{\frac{\pi}{4}} ln\, sin\, 2t\, dt = \int_{0+0}^{\frac{\pi}{4}} ln\,(2\, sin\, t\, cos\, t)\, dt =$$

$$= 2\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} ln\, 2\, dt + 2\int_{0+0}^{\frac{\pi}{4}} ln\, sin\, t\, dt + 2\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} ln\, cos\, t\, dt.$$

Dar

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} ln\, cos\, t\, dt = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} ln\, sin(\frac{\pi}{2} - t)\, dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} ln\, sin\, u\, du$$

dacă facem schimbarea de variabilă $t = \varphi(u)$, unde

$$\varphi : \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \longrightarrow \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right], \varphi(u) = \frac{\pi}{2} - u.$$

Atunci

$$\int_{0+0}^{\frac{\pi}{2}} ln\, sin\, x\, dx = 2\frac{\pi}{4}\, ln\, 2 + 2\int_{0+0}^{\frac{\pi}{4}} ln\, sin\, t\, dt + 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} ln\, sin\, t\, dt =$$

$$= \frac{\pi}{2}\, ln\, 2 + 2\int_{0+0}^{\frac{\pi}{2}} ln\, sin\, t\, dt.$$

Deci

$$\int_{0+0}^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x \, dx = -\frac{\pi}{2} \ln 2.$$

14. **Să se arate că:**

$$\int_{0+0}^{\infty} \frac{\sin x}{x} \, dx$$

este convergentă, dar nu este absolut convergentă.

Rezolvare

Funcţia

$$f : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

este continuă pe $(0, \infty)$ şi

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1.$$

Considerând funcţia

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & x \in (0, 1] \\ 1 & x = 0 \end{cases},$$

avem că

$$\int_{0+0}^{1} f(x) \, dx = \int_{0}^{1} h(x) \, dx.$$

Deci

$$\int_{0+0}^{1} f(x) \, dx$$

este convergentă. Deoarece

funcţia $f_1 : [1, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}, f_1(x) = \sin x$ este continuă pe $[1, \infty)$,

funcţia

$$F(u) = \int_{1}^{u} \sin x \, dx = \cos 1 - \cos u$$

este mărginită pe $[1, \infty)$, $|F(u)| \leq 2$

iar funcţia

$$g : [1, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}, g(x) = \frac{1}{x}$$

este strict descrescătoare pe $[1, \infty)$ şi

$$\lim_{x \to \infty} g(x) = 0,$$

conform teoremei 8 avem că

$$\int_1^\infty f_1(x) g(x)\, dx = \int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx$$

este convergentă. Deci

$$\int_{0+0}^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx$$

este convergentă. Vom arăta că această integrală nu este absolut convergentă. Dar

$$\frac{|\sin x|}{x} \geq \frac{\sin^2 x}{x} = \frac{1}{2x} - \frac{\cos 2x}{2x}$$

pentru orice $x \in [1, \infty)$ şi

$$\int_1^\infty \left(\frac{1}{2x} - \frac{\cos 2x}{2x} \right) dx$$

este divergentă pentru că:

$$\int_1^\infty \frac{1}{2x}\, dx$$

este divergentă conform exerciţiului 2, iar

$$\int_1^\infty \frac{\cos 2x}{2x} dx$$

este convergentă conform teoremei 8 punând $f(x) = \cos 2x$ şi $g(x) = \frac{1}{2x}$. Deci conform teoremei de comparaţie I deducem că

$$\int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x}\, dx$$

este divergentă. Deci

$$\int_{0+0}^{\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,dx$$

este divergentă.

Observaţie. Reciproca teoremei 5 este falsă.

15. **Să se studieze convergenţa integralei**

$$\int_0^{\infty} \sin x^2\,dx$$

Rezolvare

Funcţia

$$f : [0,\infty) \longrightarrow \boldsymbol{R},\ f(x) = \sin x^2$$

este continuă pe $[0,\infty)$ iar funcţia $\varphi : [0,\infty) \longrightarrow \boldsymbol{R}, \varphi(t) = \sqrt{t}$ este strict crescătoare, derivabilă, cu derivata continuă pe $(0,\infty)$ şi $\varphi(0) = 0$,

$$\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = \infty.$$

Integrala

$$\int_0^{\infty} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int_{0+0}^{\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt$$

este convergentă conform teoremei 8 în care luând $f(t) = \sin t$ şi $g(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$ deducem că

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt$$

este convergentă, iar

$$\int_{0+0}^{1} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt = \int_0^1 h(t)dt$$

unde

$$h(t) = \begin{cases} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} & t \in (0,1] \\ 0 & t = 0 \end{cases}.$$

Atunci şi

$$\int_0^\infty \sin x^2\, dx$$

este convergentă conform teoremei de schimbare de variabilă.

16. **Să se precizeze natura seriei:**

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\ln n}\, dx$$

Rezolvare

Fie

$$f : [3,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{\ln x}.$$

Funcţia f este continuă pe $[3,\infty)$, deci integrabilă pe orice interval compact conţinut în $[3,\infty)$, este strict descrescătoare şi

$$f(x) \geq \frac{1}{x} > 0,$$

pentru orice $x \in [3,\infty)$. Atunci conform criteriului integral al lui Cauchy

$$\text{seria } \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\ln n} \text{ şi } \int_3^\infty \frac{1}{\ln x}\, dx$$

au aceeaşi natură. Conform primului criteriu de comparaţie, deoarece

$$\int_3^\infty \frac{1}{x}\, dx$$

este divergentă şi

$$\int_3^\infty \frac{1}{\ln x}\, dx$$

este divergentă. Deci seria este divergentă.

17. Fie $f : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, continuă, $a > 0, b > 0$. Dacă există

$$\lim_{x\to 0+0} f(x) = f(0+0) < \infty \text{ şi } \lim_{x\to\infty} f(x) = f(\infty) < \infty,$$

atunci integrala

$$\int_{0+0}^{\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx$$

este convergentă şi

$$\int_0^{\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx = (f(0+0)-f(\infty))\ln\frac{b}{a}$$

Rezolvare

Fie $t, T \in (0,\infty), t < T$. Atunci

$$\int_t^T \frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx = \int_t^T \frac{f(ax)}{ax}a\,dx - \int_t^T \frac{f(bx)}{bx}b\,dx =$$

$$= \int_{at}^{aT} \frac{f(y)}{y}\,dy - \int_{bt}^{bT} \frac{f(y)}{y}\,dy =$$

$$= \int_{at}^{aT} \frac{f(y)}{y}\,dy + \int_{aT}^{bt} \frac{f(y)}{y}\,dy - \int_{aT}^{bt} \frac{f(y)}{y}\,dy - \int_{bt}^{bT} \frac{f(y)}{y}\,dy =$$

$$= \int_{at}^{bt} \frac{f(y)}{y}\,dy - \int_{aT}^{bT} \frac{f(y)}{y}\,dy.$$

Conform teoremei de medie, există $y_t \in (at, bt)$ şi $y_T \in (aT, bT)$ astfel încât

$$\int_{at}^{bt} \frac{f(y)}{y}\,dy = \int_{at}^{bt} f(y)\,d(\ln y) = f(y_t)(\ln(bt) - \ln(at))$$

şi

$$\int_{aT}^{bT} \frac{f(y)}{y}\,dy = \int_{aT}^{bT} f(y)\,d(\ln y) = f(y_T)(\ln(bT) - \ln(aT)).$$

Deci

$$\int_t^T \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx = f(y_t)\ln\frac{b}{a} - f(y_T)\ln\frac{b}{a}.$$

Deoarece

$$\lim_{t\to 0+0, T\to\infty} \int_t^T \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\, dx = \lim_{t\to 0} f(y_t) ln\frac{b}{a} - \lim_{T\to\infty} f(y_T) ln\frac{b}{a} =$$

$$= f(0+0) ln\frac{b}{a} - f(\infty) ln\frac{b}{a},$$

rezultă că integrala

$$\int_{0+0}^{\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\, dx$$

este convergentă şi

$$\int_{0+0}^{\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\, dx = (f(0+0) - f(\infty)) ln\frac{b}{a}.$$

Aplicaţie

Să se arate că integrala următoare este convergentă şi să se calculeze:

$$\int_{0+0}^{\infty} \frac{arctg\, ax - arctg\, bx}{x}\, dx, a > 0, b > 0.$$

Rezolvare

Funcţia $f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = arctg\, x$ este continuă pe $[0, \infty)$ şi

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Deci integrala

$$\int_{0+0}^{\infty} \frac{arctg\, ax - arctg\, bx}{x}\, dx = \int_{0+0}^{\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\, dx$$

este convergentă şi

$$\int_{0+0}^{\infty} \frac{arctg\, ax - arctg\, bx}{x}\, dx = \left(arctg\, 0 - \frac{\pi}{2}\right) ln\frac{b}{a} = \frac{\pi}{2} ln\frac{b}{a}.$$

18. Dacă funcţia f este continuă pe $[0,\infty)$ şi dacă integrala

$$\int_c^{\infty} \frac{f(x)}{x}\,dx, c > 0$$

este convergentă ,atunci integrala

$$\int_{0+0}^{\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx, a > 0, b > 0$$

este convergentă şi

$$\int_{0+0}^{\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx = f(0)ln\frac{b}{a}.$$

Rezolvare

Fie $t, T \in (0,\infty), t < T$. Ca în exerciţiul precedent avem că

$$\int_t^T \frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx = \int_{at}^{bt} \frac{f(y)}{y}\,dy - \int_{aT}^{bT} \frac{f(y)}{y}\,dy =$$

$$= f(y_t)(ln(bt) - ln(at)) - \int_{aT}^{bT} \frac{f(y)}{y}dy.$$

Deoarece integrala

$$\int_c^{\infty} \frac{f(x)}{x}\,dx$$

este convergentă,

$$\lim_{T\to\infty} \int_{aT}^{bT} \frac{f(y)}{y}\,dy =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \left(\int_c^{bT} \frac{f(y)}{y}\,dy - \int_c^{aT} \frac{f(y)}{y}\,dy \right) = 0.$$

Deci

$$\lim_{t\to 0+0, T\to\infty} \int_t^T \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx = \lim_{t\to 0} f(y_t)ln\frac{b}{a} - \lim_{T\to\infty} \int_{aT}^{bT} \frac{f(y)}{y}dy = f(0)ln\frac{b}{a}.$$

Aplicaţie

Să se arate că integrala următoare este convergentă şi să se calculeze:

$$\int_{0+0}^{\infty} \frac{\sin ax - \sin bx}{x}\, dx, a > 0, b > 0.$$

Rezolvare

Funcţia $f(x) = \sin x$ este continuă pe $[0, \infty)$ şi integrala

$$\int_{c}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$$

este convergentă. Atunci integrala

$$\int_{0+0}^{\infty} \frac{\sin ax - \sin bx}{x}\, dx = \int_{0+0}^{\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\, dx$$

este convergentă şi

$$\int_{0+0}^{\infty} \frac{\sin ax - \sin bx}{x}\, dx = \sin 0 \cdot \ln \frac{b}{a} = 0.$$

Probleme propuse

Să se studieze convergenţa următoarelor integrale şi în caz afirmativ să se calculeze:

1. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x dx}{e^x}$.

2. $\displaystyle\int_0^{2} x\sqrt{\frac{x}{2-x}}dx$

3. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{2x+1}{x^2(x^2+1)}dx$

4. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}}dx$

5. $\displaystyle\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \frac{dx}{x^4\sqrt{1-x^2}}$

6. $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2+x^4}}$

7. $\displaystyle\int_{0}^{\infty} e^{-ax} \cos bx \, dx \ (a > 0)$

8. $\displaystyle\int_{0}^{\infty} e^{-ax} \sin bx \, dx \ (a < 0)$

9. $\displaystyle\int_{2}^{\infty} \frac{x \ln x}{(1-x^2)^2} dx$

10. $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$

Capitolul 3

Integrale cu parametri

3.1 Integrale cu parametri

Teorie

Definiţia 3.1 *Fie $f : I \times J \longrightarrow \mathbb{R}, \alpha : J \longrightarrow I$ şi $\beta : J \longrightarrow I$, unde $I = [a,b] \subseteq \mathbb{R}$, iar J este o mulţime de numere reale. Să presupunem că pentru orice $y \in J$, funţia f este integrabilă pe $[a,b]$. În aceste condiţii are sens să considerăm funcţia*

$$F : J \longrightarrow \mathbb{R}, F(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx$$

numită integrală cu parametrul y.

3.2 Observaţie. *Dacă $\alpha(y) = a$ pentru orice $y \in J$ şi $\beta(y) = b$ pentru orice $y \in J$, atunci*

$$F : J \longrightarrow \mathbb{R}, F(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx.$$

Definiţia 3.3 *Fie $f : I \times J \longrightarrow \mathbb{R}, g : I \longrightarrow \mathbb{R}, I = [a,b] \subset \mathbb{R}$ şi y_0 un punct de acumulare al mulţimii de numere reale J. Spunem că funcţia f tinde uniform în* *punctul y_0 pe mulţimea I către funcţia g dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât pentru orice $y \in J$ cu $|y - y_0| < \delta(\varepsilon)$ să avem*

$$|f(x,y) - g(x)| < \varepsilon, \text{ pentru orice } x \in I.$$

Teorema 3.4 *Fie $f : I \times J \longrightarrow \mathbb{R}, g : I \longrightarrow \mathbb{R}, I = [a,b] \subset \mathbb{R}, y_0$ un punct de acumulare al mulţimii de numere reale J. Să presupunem că funcţia f este integrabilă pe I pentru orice $y \in J$, exceptând eventual $y = y_0$. Dacă*

$$\lim_{y \to y_0} f(x,y) = g(x),$$

uniform în raport cu x, atunci

$$\lim_{y \to y_0} F(y) = \lim_{y \to y_0} \int_a^b f(x,y)\,dx = \int_a^b \lim_{y \to y_0} f(x,y)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx.$$

Teorema 3.5 *Fie $f : I \times J \longrightarrow \mathbb{R}, (I = [a,b], J = [c,d]), \alpha : J \longrightarrow I$ şi $\beta : J \longrightarrow I$. Dacă funcţiile f, α şi β sunt continue, atunci şi funcţia*

$$F : J \longrightarrow \mathbb{R}, F(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx$$

este continuă pe J.

3.6 Observaţie.

Dacă $\alpha(y) = a$ pentru orice $y \in J$, $\beta(y) = b$ pentru orice $y \in J$ şi funcţia f este continuă pe $I \times J$, atunci şi funcţia

$$F : J \longrightarrow \mathbb{R}, F(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$$

este continuă pe J.

Teorema 3.7 *Fie $f : I \times J \longrightarrow \mathbb{R}, (I = [a,b], J = [c,d]), \alpha : J \longrightarrow I$ şi $\beta : J \longrightarrow I$. Dacă funcţiile α şi β sunt derivabile pe J, funcţia f este continuă pe $I \times J$, derivabilă* *în raport cu y şi $\frac{\partial f}{\partial y}$ continuă pe $I \times J$, atunci funcţia*

$$F : J \longrightarrow \mathbb{R}, F(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx$$

este derivabilă pe J şi

$$F'(y_0) = \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)\,dx + \beta'(y_0)f(\beta(y_0),y_0) - \alpha'(y_0)f(\alpha(y_0),y_0)$$

pentru orice $y_0 \in J$.

3.8 Observaţie.

Dacă $\alpha(y) = a$ pentru orice $y \in J$, $\beta(y) = b$ pentru orice $y \in J$ şi funcţia f este continuă pe $I \times J$, derivabilă în raport cu y şi $\frac{\partial f}{\partial y}$ este continuă pe $I \times J$, atunci funcţia

$$F : J \longrightarrow \mathbb{R}, F(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$$

este derivabilă pe J şi

$$F'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx \text{ formula Leibniz .}$$

Teorema 3.9 *Fie $f : I \times J \longrightarrow \mathbb{R}, (I = [a,b], J = [c,d])$. Dacă funcţia f este continuă pe $I \times J$, atunci*

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy.$$

Teorema 3.10 *Fie $f : I \times J_1 \times J_2 \longrightarrow \mathbb{R}, (I = [a,b], J_1 = [c_1,d_1], J_2 = [c_2,d_2])$,*

$$\alpha : J_1 \times J_2 \longrightarrow I \text{ şi } \beta : J_1 \times J_2 \longrightarrow I.$$

Dacă funcţia f este continuă pe $I \times J_1 \times J_2$ şi are derivate parţiale în raport cu y_1 $(y_1 \in J_1)$ şi în raport cu $y_2 (y_2 \in J_2)$ continue pe $I \times J_1 \times J_2$, iar funcţiile α şi β sunt de clasă C^1 pe $J_1 \times J_2$, atunci şi funcţia

$$F : J_1 \times J_2 \longrightarrow \mathbb{R}, F(y_1,y_2) = \int_{\alpha(y_1,y_2)}^{\beta(y_1,y_2)} f(x,y_1,y_2)\,dx$$

este de clasă C^1 pe $J_1 \times J_2$ şi

$$\frac{\partial F}{\partial y_i}(y_1, y_2) = \int_{\alpha(y_1,y_2)}^{\beta(y_1,y_2)} \frac{\partial f}{\partial y_i}(x, y_1, y_2)\, dx + \frac{\partial \beta}{\partial y_i}(y_1, y_2) f(\beta(y_1, y_2), y_1, y_2) -$$
$$- \frac{\partial \alpha}{\partial y_i}(y_1, y_2) f(\alpha(y_1, y_2), y_1, y_2), i = 1, 2.$$

3.11 Observaţie.

Dacă $\alpha(y_1, y_2) = a$ pentru orice $(y_1, y_2) \in J_1 \times J_2$, $\beta(y_1, y_2) = b$ pentru orice

$$(y_1, y_2) \in J_1 \times J_2,$$

funcţia f este continuă pe $I \times J_1 \times J_2$, şi are derivate parţiale în raport cu y_i, $i = 1, 2$ continue pe $I \times J_1 \times J_2$, atunci funcţia

$$F : J_1 \times J_2 \longrightarrow \mathbb{R}, F(y_1, y_2) = \int_a^b f(x, y_1, y_2)\, dx$$

este de clasă C^1 pe $J_1 \times J_2$ şi

$$\frac{\partial F}{\partial y_i}(y_1, y_2) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y_i}(x, y_1, y_2)\, dx, \ i = 1, 2.$$

Probleme rezolvate.

1. **Să se arate că funcţia**

$$F : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}, F(y) = \int_0^y \frac{ln(1 + yx)}{x} dx$$

este derivabilă şi să se calculeze derivata acesteia.

Rezolvare.

Fie $f : [0, \infty) \times [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{ln(1+yx)}{x}, & (x, y) \in (0, \infty) \times [0, \infty) \\ y, & (x, y) \in \{0\} \times [0, \infty) \end{cases}.$$

Deoarece pentru orice $y_0 \in [0, \infty)$,

$$\lim_{(x,y)\to(0,y_0)} f(x,y) = y_0 = f(0,y_0),$$

funcţia f este continuă pe $[0,\infty) \times [0,\infty)$. Deci există

$$F : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}, F(y) = \int_0^y \frac{ln(1+yx)}{x}\,dx.$$

Din faptul că

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{1+yx}, & (x,y) \in (0,\infty) \times (0,\infty) \\ 1, & (x,y) \in \{0\} \times (0,\infty) \end{cases}$$

$$\lim_{y\to 0} \frac{f(x_0,y) - f(x_0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{f(x_0,y)}{y} =$$

$$= \begin{cases} \lim_{y\to 0} \frac{y}{y} = 1, & \text{dacă } x_0 = 0 \\ \lim_{y\to 0} \frac{ln(1+xy)}{xy} = 1, & \text{dacă } x_0 \in (0,\infty) \end{cases}$$

şi

$$\lim_{(x,y)\to(0,y_0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 1 = f(0,y_0)$$

pentru orice $y_0 \in [0,\infty)$, deducem că funcţia este derivabilă în raport cu y pe $[0,\infty)$ şi $\frac{\partial f}{\partial y}$ este continuă pe $[0,\infty) \times [0,\infty)$. Fie $y_0 \in (0,\infty)$. Dacă punem $I = [0,y_0]$, $J = [0,y_0]$, $\alpha : J \longrightarrow I, \alpha(y) = 0$ şi $\beta : J \longrightarrow I, \beta(y) = y$, atunci din teorema 7 deducem că funcţia F este derivabilă pe $[0,y_0]$ şi

$$F'(y) = \int_0^y \frac{1}{1+xy}\,dx + f(y,y) - 0 \cdot f(0,y) = \frac{1}{y}\,ln(1+xy)\Big|_0^y + f(y,y) =$$

$$= \frac{1}{y} ln(1+y^2) + \frac{1}{y} ln(1+y^2) = \frac{2}{y} ln(1+y^2)$$

pentru $y \in (0,y_0)$ şi

$$F'(0) = \int_0^0 dx + f(0,0) = 0.$$

Deoarece $y_0 \in (0, \infty)$ a fost ales arbitrar, funcţia F este derivabilă pe $[0, \infty)$ şi

$$F'(y) = \begin{cases} \frac{2}{y} ln(1 + y^2), & y > 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}.$$

2. **Să se arate că funcţia** $u : I\!R^2 \longrightarrow I\!R$,

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x+ct) + f(x-ct) + \frac{1}{c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(y)\,dy\right],$$

unde f **este o funcţie de clasă** C^2 **pe** $I\!R$**, iar** g **este o funcţie de clasă** C^1 **pe** $I\!R$ **verifică ecuaţia coardei vibrante**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0,$$

în condiţiile iniţiale

$$u(x,0) = f(x), \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x).$$

Rezolvare.

Funcţia

$$\varphi : I\!R^3 \longrightarrow I\!R, \varphi(x,y,t) = g(y)$$

este continuă pe $I\!R^3$, deci există funcţia

$$\Phi(x,t) = \int_{x-ct}^{x+ct} \varphi(x,y,t)\,dy.$$

Deoarece funcţiile $\alpha : I\!R^2 \longrightarrow I\!R, \alpha(x,t) = x - ct$, $\beta : I\!R^2 \longrightarrow I\!R, \beta(x,t) = x + ct$ şi $\varphi(x,y,t) = g(y)$ admit derivate parţiale în raport cu x şi în raport cu t,

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x}(x,t) = 1; \frac{\partial\alpha}{\partial t}(x,t) = -c; \frac{\partial\beta}{\partial x}(x,t) = 1$$

$$\frac{\partial\beta}{\partial t}(x,t) = c; \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y,t) = 0; \frac{\partial\varphi}{\partial t}(x,y,t) = 0$$

şi acestea sunt funcţii continue, conform Teoremei 10 funcţia Φ admite derivate parţiale în raport cu x şi în raport cu t şi

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,t)=\int_{x-ct}^{x+ct}0\,dy+\varphi(x,x+ct,t)-\varphi(x,x-ct,t)=$$

$$=g(x+ct)-g(x-ct),(x,t)\in \mathbb{R}^2$$

şi

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}(x,t)=\int_{x-ct}^{x+ct}0\,dy+c\varphi(x,x+ct,t)+c\varphi(x,x-ct,t)=$$

$$=cg(x+ct)+cg(x-ct),(x,t)\in \mathbb{R}^2.$$

Deci

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)=\frac{1}{2}\left[f'(x+ct)+f'(x-ct)+\frac{1}{c}g(x+ct)-\frac{1}{c}g(x-ct)\right]$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)=\frac{1}{2}\left[f''(x+ct)+f''(x-ct)+\frac{1}{c}g'(x+ct)-\frac{1}{c}g'(x-ct)\right]$$

şi

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)=\frac{1}{2}\left[cf'(x+ct)-cf'(x-ct)+g(x+ct)+g(x-ct)\right]$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)=\frac{1}{2}\left[c^2f''(x+ct)+c^2f''(x-ct)+cg'(x+ct)-cg'(x-ct)\right]$$

de unde rezultă că

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)=$$

$$=\frac{1}{2}\left[f''(x+ct)+f''(x-ct)+\frac{1}{c}g'(x+ct)-\frac{1}{c}g'(x-ct)\right]-$$

$$-\frac{1}{2c^2}\left[c^2f''(x+ct)+c^2f''(x-ct)+cg'(x+ct)-cg'(x-ct)\right]=0$$

şi

$$u(x,0)=\frac{1}{2}\left[f(x)+f(x)+\frac{1}{c}\int_x^x g(y)\,dy\right]=f(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\frac{1}{2}\left[cf'(x)-cf'(x)+g(x)+g(x)\right]=g(x)$$

3. Să se calculeze folosind derivarea în raport cu un parametru, următoarele integrale:

$$a)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{arctg(a\,tg\,x)}{tg\,x}dx, a\in \mathbb{R}$$

$$b)\int_0^1 \frac{ln(1+x)}{1+x^2}dx$$

$$c)\int_0^{\frac{\pi}{2}} ln(a^2 sin^2 x + b^2 cos^2 x)dx, a>0, b>0$$

Rezolvare.

a)Fie

$$f:\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\times \mathbb{R}\longrightarrow \mathbb{R},$$

$$f(x,a)=\begin{cases} \frac{arctg(a\,tg\,x)}{tg\,x}, & (x,a)\in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)\times \mathbb{R} \\ a, & (x,a)\in \{0\}\times \mathbb{R} \\ 0, & (x,a)\in \left\{\frac{\pi}{2}\right\}\times \mathbb{R} \end{cases}.$$

Deoarece

$$\lim_{(x,a)\to(0,a_0)} f(x,a)=\lim_{(x,a)\to(0,a_0)}\frac{arctg(a\,tg\,x)}{tg\,x}=a_0=f(0,a_0)$$

pentru orice $a_0\in \mathbb{R}$ şi

$$\lim_{(x,a)\to(\frac{\pi}{2},a_0)} f(x,a)=\lim_{(x,a)\to(\frac{\pi}{2},a_0)}\frac{arctg(a\,tg\,x)}{tg\,x}=0=f\left(\frac{\pi}{2},a_0\right)$$

pentru orice $a_0\in \mathbb{R}$, funcţia f este continuă pe $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\times \mathbb{R}$. Deci există $F:\mathbb{R}\longrightarrow \mathbb{R}$,

$$F(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x,a)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{arctg(a\,tg\,x)}{tg\,x}dx.$$

Avem că

$$\frac{\partial f}{\partial a}(x,a) = \begin{cases} \frac{1}{1+a^2\,tg^2\,x}, & (x,a) \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)\times \mathbb{R} \\ 1, & (x,a) \in \{0\} \times \mathbb{R} \\ 0, & (x,a) \in \left\{\frac{\pi}{2}\right\} \times \mathbb{R} \end{cases}.$$

Deoarece

$$\lim_{(x,a)\to(0,a_0)} \frac{\partial f}{\partial a}(x,a) = \lim_{(x,a)\to(0,a_0)} \frac{1}{1+a^2\,tg^2\,x} = 1 = \frac{\partial f}{\partial a}(0,a_0),$$

pentru orice $a_0 \in \mathbb{R}$ şi

$$\lim_{(x,a)\to(\frac{\pi}{2},a_0)} \frac{\partial f}{\partial a}(x,a) = \lim_{(x,a)\to(\frac{\pi}{2},a_0)} \frac{1}{1+a^2\,tg^2\,x} = 0 = \frac{\partial f}{\partial a}(\frac{\pi}{2},a_0),$$

pentru orice $a_0 \in \mathbb{R}, a_0 \neq 0$ deducem că funcţia $\frac{\partial f}{\partial a}$ este continuă pe $\left[0,\frac{\pi}{2}\right] \times \mathbb{R}^*$, atunci conform observaţiei 8 funcţia F este derivabilă pe orice interval compact $J \subset (0,\infty)$ sau $J \subset (-\infty,0)$ şi

$$F'(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial f}{\partial a}\ (x,a)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+a^2\,tg^2\,x}dx$$

Prin urmare funcţia F este derivabilă pe $\mathbb{R}^*$ şi

$$F'(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+a^2\,tg^2\,x}dx.$$

Deoarece pentru orice $a \in \mathbb{R}^*$

$$F(-a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{arctg(-a\,tg\,x)}{tg\,x}dx = -F(a)$$

este suficient să considerăm restricţia lui F la $(0,\infty)$. Fie $a \in (0,\infty)$. Atunci

$$F'(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+a^2\,tg^2\,x}dx = \int_0^{\infty} \frac{1}{(1+a^2t^2)(1+t^2)}dt =$$

$$= \frac{1}{1-a^2}\int_0^{\infty} \left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{a^2}{1+a^2t^2}\right)dt =$$

$$= \frac{1}{1-a^2} \lim_{t\to\infty} (arctg\, t - a\, arctg\, at) =$$

$$= \frac{1}{1-a^2} \left(\frac{\pi}{2} - a\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2(1+a)},$$

pentru $a \neq 1$ şi

$$F'(1) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+ tg^2 x} dx = \int_0^{\infty} \frac{1}{(1+t^2)^2} dt =$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{1}{1+t^2} dt + \frac{1}{2}\int_0^{\infty} t\left(\frac{1}{1+t^2}\right) dt =$$

$$= \lim_{t\to\infty} arctg\, t + \frac{1}{2} \lim_{t\to\infty} \frac{t}{1+t^2} - \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{1}{1+t^2} dt =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \lim_{t\to\infty} arctg\, t = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

Deci

$$F'(a) = \frac{\pi}{2(a+1)}.$$

Atunci

$$F(a) = \frac{\pi}{2}\int \frac{da}{1+a} = \frac{\pi}{2} ln(1+a) + C.$$

Conform Teoremei 5 funcţia F este continuă pe $[0,\infty)$. Prin urmare

$$F(0) = \lim_{a\to 0} F(a) = \lim_{a\to 0} \left(\frac{\pi}{2} ln(1+a) + C\right) = C.$$

Dar

$$F(0) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 0 dx = 0.$$

Deci $C = 0$ şi

$$F(a) = \frac{\pi}{2} ln(1+a), a \geq 0.$$

Prin urmare

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{arctg(a\, tg\, x)}{tg\, x} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} ln(1+a), & a \geq 0 \\ -\frac{\pi}{2} ln(1-a), & a < 0 \end{cases}.$$

b)Fie

$$\alpha : [0,1] \longrightarrow [0,1], \alpha(y) = 0, \beta : [0,1] \longrightarrow [0,1], \beta(y) = y$$

şi

$$f : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}, f(x,y) = \frac{ln(1+xy)}{1+x^2}.$$

Funcţia f este continuă pe $[0,1] \times [0,1]$, deci există funcţia

$$F : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}, F(y) = \int_0^y \frac{ln(1+xy)}{1+x^2} dx.$$

Pentru orice $(x,y) \in [0,1] \times [0,1]$,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x}{(1+xy)(1+x^2)}.$$

Deoarece funcţia $\frac{\partial f}{\partial y}$ este continuă pe $[0,1] \times [0,1]$ şi funcţiile α şi β sunt derivabile pe $[0,1]$, conform teoremei 7, rezultă că funcţia F este derivabilă pe $[0,1]$ şi

$$F'(y) = \int_0^y \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx + f(y,y) - 0f(0,0) =$$

$$= \int_0^y \frac{x}{(1+xy)(1+x^2)} dx + \frac{ln(1+y^2)}{1+y^2} =$$

$$= \int_0^y \left(-\frac{y}{1+y^2}\frac{1}{1+xy} + \frac{1}{1+y^2}\frac{x+y}{1+x^2} \right) dx + \frac{ln(1+y^2)}{1+y^2} =$$

$$= -\frac{1}{1+y^2}\int_0^y \frac{y}{1+xy}dx + \frac{1}{2(1+y^2)}\int_0^y \frac{2x}{1+x^2}dx +$$

$$+ \frac{y}{1+y^2}\int_0^y \frac{dx}{1+x^2} + \frac{ln(1+y^2)}{1+y^2} =$$

$$= -\frac{1}{1+y^2} ln(1+xy)\Big|_0^y + \frac{1}{2(1+y^2)} ln(1+x^2)\Big|_0^y + \frac{y}{1+y^2} arctg\, x\Big|_0^y + \frac{ln(1+y^2)}{1+y^2} =$$

$$= -\frac{ln(1+y^2)}{1+y^2} + \frac{ln(1+y^2)}{2(1+y^2)} + \frac{y}{1+y^2} arctg\, y + \frac{ln(1+y^2)}{1+y^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+y^2} ln(1+y^2) + (arctg\, y)\frac{2y}{1+y^2}\right] = \frac{1}{2}\left[(arctg\, y) ln(1+y^2)\right]'$$

pentru orice $y \in [0,1]$. Deci

$$F(y) = \frac{1}{2}(arctg\, y) ln(1+y^2) + C.$$

Deoarece

$$F(0) = \int_0^0 \frac{ln\, 1}{1+x^2} dx = 0$$

şi

$$F(0) = \frac{1}{2}(arctg\, 0) ln\, 1 + C = C$$

rezultă că $C = 0$ şi deci

$$F(y) = \frac{1}{2}(arctg\, y) ln(1+y^2), y \in [0,1].$$

Prin urmare

$$\int_0^1 \frac{ln(1+x)}{1+x^2} dx = F(1) = \frac{1}{2}(arctg\, 1) ln\, 2 = \frac{\pi}{8} ln\, 2.$$

c) Funcţia

$$f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times (0,\infty) \times (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$f(x,a,b) = ln(a^2 sin^2 x + b^2 cos^2 x)$$

este continuă pe $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times (0,\infty) \times (0,\infty)$, deci există funcţia

$$F : (0,\infty) \times (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$F(a,b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ln(a^2 sin^2 x + b^2 cos^2 x) dx.$$

Deoarece funcţia f admite derivate parţiale în raport cu a şi în raport cu b,

$$\frac{\partial f}{\partial a}(x,a,b) = \frac{2a\, sin^2 x}{a^2 sin^2 x + b^2 cos^2 x}$$

şi

$$\frac{\partial f}{\partial b}(x,a,b) = \frac{2b\, cos^2 x}{a^2 sin^2 x + b^2 cos^2 x}$$

şi acestea sunt continue pe $(0,\infty)\times(0,\infty)$, conform Observaţiei 11 rezultă că funcţia F admite derivate parţiale în raport cu a şi în raport cu b pe orice interval compact $J_1\times J_2\subset(0,\infty)\times(0,\infty)$, deci pe $(0,\infty)\times(0,\infty)$. Mai mult, acestea sunt continue şi

$$\frac{\partial F}{\partial a}(a,b)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial f}{\partial a}(x,a,b)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2a\,sin^2x}{a^2sin^2x+b^2cos^2x}dx=$$

$$2a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{tg^2x}{a^2tg^2x+b^2}dx=2a\int_0^{\infty}\frac{t^2}{a^2t^2+b^2}\frac{dt}{1+t^2}=$$

$$=2a\int_0^{\infty}\left(\frac{b^2}{a^2-b^2}\frac{1}{a^2t^2+b^2}-\frac{1}{a^2-b^2}\frac{1}{1+t^2}\right)dt=$$

$$=\frac{2b}{a^2-b^2}\,arctg\frac{at}{b}\bigg|_0^{\infty}-\frac{2a}{a^2-b^2}arctg\,t\bigg|_0^{\infty}=$$

$$=\frac{\pi(a-b)}{(a-b)(a+b)}=\frac{\pi}{a+b}$$

dacă $a\neq b$ şi

$$\frac{\partial F}{\partial a}(a,a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2a\,sin^2x}{a^2}dx=\frac{2}{a}\frac{\pi}{2}\frac{1}{2}=\frac{\pi}{a+a}.$$

şi

$$\frac{\partial F}{\partial b}(a,b)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2b\,cos^2x}{a^2sin^2x+b^2cos^2x}dx=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2b\,sin^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{a^2cos^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+b^2sin^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}dx=$$

$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{2b\,sin^2y}{a^2cos^2y+b^2sin^2y}(-dy)=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2b\,sin^2x}{a^2cos^2x+b^2sin^2x}dx=\frac{\pi}{a+b}.$$

Deci

$$\frac{\partial F}{\partial a}(a,b)=\frac{\pi}{a+b}\ (1)$$

şi

$$\frac{\partial F}{\partial b}(a,b) = \frac{\pi}{a+b} \text{ (2)}.$$

Din relaţia (1) rezultă că

$$F(a,b) = \int \frac{\pi}{a+b} da = \pi\, ln(a+b) + C(b),$$

şi deci

$$\frac{\partial F}{\partial b}(a,b) = \pi \frac{1}{a+b} + C'(b) \text{ (3)}.$$

Din relaţiile (2) şi (3) rezultă că $C'(b) = 0$. Deci $C(b) = C$ şi

$$F(a,b) = \pi\, ln\,(a+b) + C.$$

Deoarece

$$F(1,1) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ln\, 1\, dx = 0$$

şi

$$F(1,1) = \pi\, ln\, 2 + C$$

rezultă că $C = -\pi\, ln\, 2$. Prin urmare

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} ln(a^2 sin^2 x + b^2 cos^2 x) dx = \pi\, ln\,(a+b) - \pi\, ln\, 2 = \pi\, ln\, \frac{a+b}{2}.$$

4. **Utilizând posibilitatea inversării ordinii de integrare în integralele depinzănd de un parametru să se calculeze următoarele integrale:**

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x(x-1)}{ln\, x} dx$

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{ln(x+1)}{1+x^2} dx$

Rezolvare.

a) Deoarece

$$\frac{x(x-1)}{\ln x} = \int_1^2 x^y dy \text{ pentru } x \in (0,1)$$

avem că

$$\int_0^1 \frac{x(x-1)}{\ln x} dx = \int_0^1 \left(\int_1^2 x^y dy \right) dx.$$

Funcţia

$$f : [0,1] \times [1,2] \longrightarrow \mathbb{R}, f(x,y) = x^y$$

este continuă pe $[0,1] \times [1,2]$. Atunci conform teoremei 9 avem că

$$\int_0^1 \frac{x(x-1)}{\ln x} dx = \int_1^2 \left(\int_0^1 x^y dx \right) dy =$$

$$= \int_1^2 \left(\frac{x^{y+1}}{y+1} \Big|_0^1 \right) dy = \int_1^2 \frac{1}{y+1} dy = \ln(1+y)\Big|_1^2 = \ln\frac{3}{2}.$$

b) Deoarece

$$\ln(1+x) = \int_0^1 \frac{x}{1+xy} dy$$

avem că

$$\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{1+x^2} dx = \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x}{(1+xy)(1+x^2)} dy \right) dx.$$

Funcţia

$$f : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}, f(x,y) = \frac{x}{(1+xy)(1+x^2)}$$

este continuă pe $[0,1] \times [0,1]$. Atunci conform teoremei 9 avem că

$$\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{1+x^2} dx = \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x}{(1+xy)(1+x^2)} dx \right) dy =$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\frac{1}{1+y^2} \frac{x+y}{1+x^2} - \frac{1}{1+y^2} \frac{y}{xy+1} \right) dx \right) dy =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{2(1+y^2)} \ln(1+x^2)\Big|_0^1 + \frac{y}{1+y^2} \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 - \frac{1}{1+y^2} \ln(1+xy)\Big|_0^1 \right) dy =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{2(1+y^2)} ln\, 2 + \frac{y}{1+y^2}\frac{\pi}{4} - \frac{1}{1+y^2} ln(1+y) \right) dy =$$

$$= \frac{ln\, 2}{2} arctg\, y \Big|_0^1 + \frac{\pi}{8} ln\,(1+y^2) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{ln(y+1)}{1+y^2} dy =$$

$$= \frac{\pi}{4} ln\, 2 - \int_0^1 \frac{ln(y+1)}{1+y^2} dy.$$

Deci

$$\int_0^1 \frac{ln(x+1)}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{8} ln\, 2.$$

5. **Să se arate că**

$$\left(\int_0^x e^{-t^2} dt \right)^2 + \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}\, dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}$$

pentru orice $x > 0$. Folosind această identitate să se arate că:

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Rezolvare.

Funcţia

$$f : [0,\infty) \times [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}, f(x,t) = e^{-t^2}$$

este continuă pe $[0,\infty) \times [0,\infty)$. Deci există funcţia

$$F : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}, F(x) = \int_0^x f(x,t) dt.$$

Funcţia

$$g : [0,\infty) \times [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}, g(x,t) = \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$$

este continuă pe $[0,\infty) \times [0,\infty)$. Deci există funcţia

$$G : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}, G(x) = \int_0^1 g(x,t) dt.$$

Trebuie să arătăm că

$$F(x)^2 + G(x) = \frac{\pi}{4} \text{ pentru orice } x \in [0, \infty).$$

Deoarece funcţia f este continuă pe $[0, \infty) \times [0, \infty)$, admite derivată parţială în raport cu x, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = 0$, continuă pe $[0, \infty) \times [0, \infty)$ şi funcţiile

$$\alpha : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty), \alpha(x) = 0$$

şi

$$\beta : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty), \beta(x) = x$$

sunt derivabile pe $[0, \infty)$, conform teoremei 7, funcţia F este derivabilă pe $[0, \infty)$ şi

$$F'(x) = \int_0^x 0dt + 1 \cdot f(x, x) - 0 \cdot f(0, 0) = e^{-x^2}.$$

Deoarece funcţia g este continuă pe $[0, \infty) \times [0, \infty)$, admite derivată parţială în raport cu x,

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = -2x(1 + t^2)\frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1 + t^2},$$

continuă pe $[0, \infty) \times [0, \infty)$, conform observaţiei 8, funcţia G este derivabilă pe $[0, \infty)$ şi

$$G'(x) = \int_0^1 \left(-2xe^{-x^2(1+t^2)}\right) dt = -2e^{-x^2} \int_0^1 xe^{-(xt)^2} dt =$$

$$= -2e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt = -2F'(x)F(x) = -\left[F(x)^2\right]'.$$

Deci

$$(F(x)^2 + G(x))' = 0 \text{ pentru orice } x \in [0, \infty).$$

Prin urmare

$$F(x)^2 + G(x) = c \text{ pentru orice } x \in [0, \infty).$$

Dar pentru $x = 0$ avem că

$$c = F(0)^2 + G(0) = \left(\int_0^0 e^{-t^2} dt\right)^2 + \int_0^1 \frac{e^{-0(1+t^2)}}{1+t^2} dt =$$

$$0 + arctg\, t|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

Deci

$$F(x)^2 + G(x) = \frac{\pi}{4} \text{ pentru orice } x \in [0, \infty).$$

Deoarece

$$\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \lim_{x\to\infty} \int_0^x e^{-t^2} dt = \lim_{x\to\infty} F(x),$$

avem că

$$\left(\int_0^\infty e^{-t^2} dt\right)^2 + \lim_{x\to\infty} G(x) = \frac{\pi}{4}.$$

Dar deoarece

$$|g(x,t)| = \left|\frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\right| \leq \left|e^{-x^2(1+t^2)}\right| \leq e^{-x^2}$$

pentru orice $t \in [0, \infty)$,

$$\lim_{x\to\infty} g(x,t) = 0$$

uniformă în raport cu t şi conform Teoremei 4,

$$\lim_{x\to\infty} G(x) = \int_0^1 \lim_{x\to\infty} \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt = 0.$$

Prin urmare

$$\left(\int_0^\infty e^{-t^2} dt\right)^2 = \frac{\pi}{4}, \int_0^\infty e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

3.2 Integrale improprii cu parametru

Teorie

Definiţia 3.12 *Fie $f : I \times J \longrightarrow \mathbb{R}$, unde $I = [a, b) \subseteq \bar{\mathbb{R}}$, iar J este o mulţime de numere reale. Să presupunem că pentru orice $y \in J$, funcţia f este integrabilă pe $[a, b)$. În aceste condiţii are sens să considerăm funcţia*

$$F : J \longrightarrow \mathbb{R}, F(y) = \int_a^{b-0} f(x, y)dx$$

numită integrală pe intervalul necompact $[a, b)$ de parametru y.

Definiţia 3.13 *Fie $f : I \times J \longrightarrow \mathbb{R}$, unde $I = [a, b) \subseteq \bar{\mathbb{R}}$, iar $J = [c, d]$ astfel încât pentru orice $y \in J$ funcţia f este integrabilă pe $[a, b)$, adică există*

$$F : [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}, F(y) = \int_a^{b-0} f(x, y)dx.$$

Vom spune că integrala

$$\int_a^{b-0} f(x, y)dx$$

converge pe $[a, b)$, uniform în raport cu $y \in J$, dacă pentru $\forall \epsilon > 0, \exists b_\epsilon \in (a, b)$ astfel încât pentru orice $b' \in (b_\epsilon, b)$ să avem

$$\left| F(y) - \int_a^{b'} f(x, y)dx \right| < \epsilon$$

pentru orice $y \in J$.

Teorema 3.14 *Fie $f : I \times J \longrightarrow \mathbb{R}$, unde $I = [a, b) \subseteq \bar{\mathbb{R}}$, şi $J = [c, d]$ astfel încât pentru orice $b' \in [a, b)$ şi pentru $\forall y \in J$ funcţia f este integrabilă pe $[a, b']$. Integrala*

$$\int_a^{b-0} f(x, y)dx$$

converge pe $[a,b)$, uniform în raport cu $y \in J$, dacă pentru $\forall\epsilon > 0, \exists b_\epsilon \in [a,b)$ astfel încât pentru orice $b_1, b_2 \in (b_\epsilon, b)$, $b_1 < b_2$ să avem

$$\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x,y)dx\right| < \epsilon$$

pentru orice $y \in J$.

Teorema 3.15 *Fie $f : I \times J \longrightarrow \mathbb{R}$, unde $I = [a,b) \subseteq \bar{\mathbb{R}}$, $J = [c,d]$ astfel încât pentru orice $b' \in [a,b)$ şi pentru $\forall y \in J$ funcţia f este integrabilă pe $[a,b']$. Dacă există $\varphi : [a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ astfel încât*

1.

$$|f(x,y)| \leq \varphi(x), \forall x \in I \text{ şi } \forall y \in J$$

2.

$$\int_a^{b-0} \varphi(x)dx \text{ este convergentă}$$

atunci

$$\int_a^{b-0} f(x,y)dx$$

este uniform convergentă pe $[a,b)$ în raport cu $y \in J$.

Teorema 3.16 *Fie $f : I \times J \longrightarrow \mathbb{R}$, unde $I = [a,b) \subseteq \bar{\mathbb{R}}$, $J = [c,d]$ astfel încât f este continuă şi $g : I \times J \longrightarrow \mathbb{R}$ monotonă în raport cu $x \in I$, pentru $\forall y \in J$. Dacă există $M > 0$ astfel încât*

$$\left|\int_a^u f(x,y)dx\right| \leq M$$

pentru $\forall y \in J$ şi pentru $\forall u \in I$ şi

$$\lim_{x \to b-0} g(x,y) = 0,$$

uniform în raport cu $y \in J$, atunci integrala

$$\int_a^{b-0} f(x,y)g(x,y)dx$$

este uniform convergentă pe $[a,b)$ în raport cu $y \in J$.

Teorema 3.17 *Fie $f : I \times J \longrightarrow I\!R$, unde $I = [a,b) \subseteq \bar{I\!R}$, $J = [c,d]$ astfel încât f este continuă şi $g : I \times J \longrightarrow I\!R$ monotonă în raport cu $x \in I$, pentru $\forall y \in J$. Dacă integrala*

$$\int_a^{b-0} f(x,y)dx$$

este uniform convergentă pe $[a,b)$, în raport cu $y \in J$ şi dacă există $M > 0$ astfel încât

$$|g(x,y)| \leq M$$

pentru $\forall x \in I$ şi pentru $\forall y \in J$, atunci integrala

$$\int_a^{b-0} f(x,y)g(x,y)dx$$

este uniform convergentă pe $[a,b)$ în raport cu $y \in J$.

Teorema 3.18 *Fie $f : I \times J \longrightarrow I\!R$, unde $I = [a,b) \subseteq \bar{I\!R}$, $J = [c,d]$.Dacă funcţia f este continuă pe $I \times J$ şi integrala*

$$\int_a^{b-0} f(x,y)dx$$

este uniform convergentă pe $[a,b)$, în raport cu $y \in J$ atunci funcţia

$$F : J \longrightarrow I\!R, F(y) = \int_a^{b-0} f(x,y)dx$$

este continuă pe J.

Teorema 3.19 *Fie $f : I \times J \longrightarrow \mathbb{R}$, unde $I = [a, b) \subseteq \bar{\mathbb{R}}$, $J = [c, d]$. Să presupunem că funcţia f este continuă pe $I \times J$, există $\frac{\partial f}{\partial y}$ continuă pe $I \times J$, integrala*

$$\int_a^{b-0} f(x, y)dx$$

converge pentru orice $y \in J$ şi integrala

$$\int_a^{b-0} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dx$$

este uniform convergentă pe $[a, b)$, în raport cu $y \in J$. În aceste condiţii funcţia

$$F : J \longrightarrow \mathbb{R}, F(y) = \int_a^{b-0} f(x, y)dx$$

este derivabilă pe J cu derivata continuă şi

$$F'(y) = \int_a^{b-0} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dx.$$

Teorema 3.20 *Fie $f : I \times J \longrightarrow \mathbb{R}$, unde $I = [a, b) \subseteq \bar{\mathbb{R}}$, $J = [c, d]$. Dacă funcţia f este continuă pe $I \times J$, şi integrala*

$$\int_a^{b-0} f(x, y)dx$$

este uniform convergentă pe $[a, b)$, în raport cu $y \in J$ atunci integrala

$$\int_a^{b-0} \left(\int_c^d f(x, y)dy\right) dx$$

este convergentă şi

$$\int_a^{b-0} \left(\int_c^d f(x, y)dy\right) dx = \int_c^d \left(\int_a^{b-0} f(x, y)dx\right) dy.$$

Teorema 3.21 *Fie $f : I \times J \longrightarrow \mathbb{R}$, unde $I = [a, b) \subseteq \bar{\mathbb{R}}$, $J = [c, d) \subseteq \bar{\mathbb{R}}$. Fie $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Dacă pentru orice $b' \in I$ şi pentru orice $y \in J$ funcţia f este integrabilă pe $[a, b']$, integrala*

$$\int_a^{b-0} f(x, y)dx$$

este uniform convergentă în raport cu $y \in J$ şi

$$\lim_{y \to d-0} f(x,y) = \varphi(x)$$

uniform în raport cu $x \in I$, atunci

$$\lim_{y \to d-0} \int_a^{b-0} f(x,y)dx = \int_a^{b-0} \lim_{y \to d-0} f(x,y)dx = \int_a^{b-0} \varphi(x)dx.$$

Probleme rezolvate.

1. Să se calculeze următoarele integrale folosind derivarea în raport cu un parametru.

a)

$$\int_{0+0}^{\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-tx} dx, \ t \in [0,\infty)$$

b)

$$\int_{0+0}^{1-0} \frac{\ln(1-a^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}} dx, \ |a| < 1$$

c)

$$\int_{0+0}^{\infty} \frac{1-\cos \alpha x}{x} e^{-x} dx \quad , \ \alpha \in \mathbb{R}$$

Rezolvare.

a) Deoarece

$$\lim_{x \to 0+0} \frac{\sin x}{x} e^{-tx} = 1$$

pentru orice $t \in [0,\infty)$, avem că

$$\int_{0+0}^{\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-tx} dx = \int_0^{\infty} f(x,t)dx$$

unde

$$f : [0,\infty) \times [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$f(x,t) = \begin{cases} 1, & (x,t) \in \{0\} \times [0,\infty) \\ \frac{\sin x}{x} e^{-tx}, & (x,t) \in (0,\infty) \times [0,\infty) \end{cases}.$$

Funcţia f este continuă pe $[0,\infty) \times [0,\infty)$ şi

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x,t) = \begin{cases} 0, & (x,t) \in \{0\} \times (0,\infty) \\ (-\sin x)e^{-tx}, & (x,t) \in (0,\infty) \times (0,\infty) \end{cases}.$$

Este evident faptul că funcţia $\frac{\partial f}{\partial t}$ este continuă pe $[0,\infty) \times [0,\infty)$ şi

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x,t) = \begin{cases} 0, & (x,t) \in \{0\} \times [0,\infty) \\ (-\sin x)e^{-tx}, & (x,t) \in (0,\infty) \times [0,\infty) \end{cases}.$$

Deoarece

$$\left|\frac{\sin x}{x} e^{-tx}\right| \leq \frac{\sin x}{x}$$

pentru orice $t \in [0,\infty)$ şi pentru orice $x \in [0,\infty)$ şi integrala

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$$

este convergentă(exc 14 de la integrale improprii), conform teoremei 15 integrala

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} e^{-tx} dx$$

este uniform convergentă, pe $[0,\infty)$, în raport cu $t \in [0,\infty)$.

Fie $a > 0$. Deoarece

$$\lim_{x\to\infty} e^{-tx} = 0$$

uniform în raport cu $t \in [a,\infty)$.

$$\left(|e^{-tx}| \leq e^{-ax} \text{ pentru orice } t \in [a,\infty) \text{ şi } \lim_{x\to\infty} e^{-ax} = 0\right),$$

pentru orice $t \in [a, \infty)$, funcţia $x \longrightarrow e^{-tx}$ este descrescătoare pe $[0, \infty)$ şi pentru orice $u \in [0, \infty)$ şi $t \in [a, \infty)$

$$\left| \int_0^u (-\sin x) dx \right| = |\cos u - 1| \leq 2,$$

conform teoremei16 integrala

$$\int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dt = \int_0^\infty -e^{-tx} \sin x \, dx$$

este uniform convergentă pe $[0, \infty)$ în raport cu $t \in [a, \infty)$. Atunci din teorema 19

rezultă că funcţia

$$F : [a, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}, F(t) = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} e^{-tx} dx$$

este derivabilă pe $[a, \infty)$ cu derivata continuă şi

$$F'(t) = \int_0^\infty (-\sin x) e^{-tx} dx = \int_0^\infty (\cos x)' e^{-tx} dx =$$

$$= (\cos x) e^{-tx} \Big|_0^\infty + t \int_0^\infty (\cos x) e^{-tx} dx =$$

$$= \lim_{x \to \infty} (\cos x) e^{-tx} - 1 + t \int_0^\infty (\sin x)' e^{-tx} dx =$$

$$= -1 + (t \sin x) e^{-tx} \Big|_0^\infty + t^2 \int_0^\infty (\sin x) e^{-tx} dx =$$

$$= -1 + \lim_{x \to \infty} (t \sin x) e^{-tx} - t^2 F'(t) = -1 - t^2 F'(t).$$

Deci

$$F'(t) = \frac{-1}{1 + t^2},$$

de unde rezultă că

$$F(t) = -\operatorname{arctg} t + c.$$

Pentru a determina constanta c vom utiliza teorema21 .Fie $b > 0$. Avem că

$$\lim_{t \to \infty} \left(\frac{\sin x}{x} e^{-tx} \right) = 0$$

uniform în raport cu $x \in [b, \infty)$

$$\left(\left| \frac{\sin x}{x} \right| e^{-tx} \leq e^{-bt} \text{ pentru orice } x \in [b, \infty) \text{ şi } \lim_{t\to\infty} e^{-bt} = 0 \right)$$

şi deoarece integrala

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} e^{-tx} dx$$

este uniform convergentă în raport cu $t \in [0, \infty)$, conform teoremei 21, avem că

$$\lim_{t\to\infty} \int_b^\infty \frac{\sin x}{x} e^{-tx} dx = \int_b^\infty \lim_{t\to\infty} \left(\frac{\sin x}{x} e^{-tx} \right) dx = 0.$$

De aici şi din faptul că

$$F(t) = \int_0^b \frac{\sin x}{x} e^{-tx} dx + \int_b^\infty \frac{\sin x}{x} e^{-tx} dx \text{ şi}$$

$$\lim_{t\to\infty} \left| \int_0^b \frac{\sin x}{x} e^{-tx} dx \right| \leq \lim_{t\to\infty} \int_b^\infty \left| \frac{\sin x}{x} \right| e^{-tx} dx \leq \lim_{t\to\infty} \frac{-1}{t}(e^{-tb} - 1) = 0$$

deducem că $\lim_{t\to\infty} F(t) = 0$.Dar $\lim_{t\to\infty} F(t) = \lim_{t\to\infty} (-\operatorname{arctg} t + C) = -\frac{\pi}{2} + C$.

Prin urmare, $c = \frac{\pi}{2}$ şi $F(t) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} t$. Deoarece funcţia $F(t) = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} e^{-tx} dx$

este continuă pe $[0, \infty)$, conform teoremei 18 şi $a > 0$ oarecare avem că

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} e^{-tx} dx = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} t, t \in [0, \infty).$$

Observaţie.

Din acest rezultat deducem că $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$.

b)

Deoarece $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1 - a^2x^2)}{x^2\sqrt{1 - x^2}} = -a^2$

pentru orice $a \in (-1,1)$, avem că

$$\int_{0+0}^{1-0} \frac{ln(1-a^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}dx = \int_0^{1-0} f(x,a)dx$$

unde $f : [0,1) \times (-1,1) \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x,a) = \begin{cases} -a^2, & (x,a) \in \{0\} \times (-1,1) \\ \frac{ln(1-a^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}, & (x,a) \in (0,1) \times (-1,1) \end{cases}.$$

Funcţia f este continuă pe $[0,1) \times (-1,1)$ şi

$$\frac{\partial f}{\partial a}(x,a) = \begin{cases} -2a, & (x,a) \in \{0\} \times (-1,1) \\ \frac{-2a}{(1-a^2x^2)\sqrt{1-x^2}}, & (x,a) \in (0,1) \times (-1,1) \end{cases}.$$

Este evident faptul că funcţia $\frac{\partial f}{\partial a}$ este continuă pe $[0,1) \times (-1,1)$.

Fie $\alpha \in (0,1)$ şi $g : [0,1] \times [-\alpha,\alpha] \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$g(x,a) = \begin{cases} -a^2, & (x,a) \in \{0\} \times [-\alpha,\alpha] \\ \frac{ln(1-a^2x^2)}{x^2}, & (x,a) \in (0,1] \times [-\alpha,\alpha] \end{cases}.$$

Deoarece funcţia g este continuă pe compactul $[0,1] \times [-\alpha,\alpha]$,există

$$M = sup\{|g(x,a)|\,|(x,a) \in [0,1] \times [-\alpha,\alpha]\}$$

şi atunci

$$|f(x,a)| \leq M\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

pentru orice $x \in [0,1)$ şi pentru orice $a \in [-\alpha,\alpha]$. De aici şi din faptul că integrala

$$\int_0^{1-0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

este convergentă

$$\left(\int_0^{1-0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = arcsin\, x|_0^1 = \frac{\pi}{2}\right),$$

conform teoremei 15, deducem că integrala

$$\int_0^{1-0} f(x,a)dx$$

este uniform convergentă în raport cu $a \in [-\alpha, \alpha]$. Deoarece

$$\left|\frac{\partial f}{\partial a}(x,a)\right| \leq \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} sup\left\{\left|\frac{-2a}{1-a^2x^2}\right| |(x,a) \in [0,1] \times [-\alpha,\alpha]\right\}$$

pentru orice $x \in [0,1)$ şi pentru orice $a \in [-\alpha, \alpha]$, conform teoremei 15 rezultă că integrala

$$\int_0^{1-0} \frac{\partial f}{\partial a}(x,a)dx$$

este uniform convergentă în raport cu $a \in [-\alpha, \alpha]$. Atunci, din teorema 19 rezultă că funcţia

$$F : [-\alpha, \alpha] \longrightarrow I\!R, F(a) = \int_0^{1-0} f(x,a)dx$$

este derivabilă pe $[-\alpha, \alpha]$, cu derivata continuă şi

$$F'(a) = \int_0^{1-0} \frac{\partial f}{\partial a}(x,a)dx = \int_0^{1-0} \frac{-2a}{(1-a^2x^2)\sqrt{1-x^2}}dx =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-2a}{(1-a^2 sin^2 t) cos\, t} cos\, t\, dt =$$

$$\left(\varphi : \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow [0,1), \varphi(t) = sin\, t, \varphi'(t) = cos\, t\right)$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{-2a}{1 - a^2\frac{u^2}{1+u^2}} \frac{1}{1+u^2}du =$$

$$\left(\varphi : [0,\infty) \longrightarrow \left[0, \frac{\pi}{2}\right), \varphi(u) = arctg\, u, \varphi'(u) = \frac{1}{1+u^2}\right)$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{-2a}{1+(1-a^2)u^2}du = \frac{-2a}{\sqrt{1-a^2}} arctg(\sqrt{1-a^2}u)\Big|_0^{\infty} =$$

$$= \lim_{u\to\infty} \frac{-2a}{\sqrt{1-a^2}} arctg(\sqrt{1-a^2}u) = \frac{-a\pi}{\sqrt{1-a^2}}.$$

Deci, $F(a) = \pi\sqrt{1-a^2} + c$. Deoarece pentru $a = 0$ avem că $F(0) = \pi + c$, dar şi că

$$F(0) = \int_0^{1-0} \frac{\ln 1}{x^2\sqrt{1-x^2}}dx = 0$$

rezultă că $c = -\pi$ şi $F(a) = \pi(\sqrt{1-a^2} - 1)$. Deoarece funcţia F este continuă pe $[-\alpha, \alpha]$ şi $\alpha \in [0, 1)$, oarecare, avem că

$$\int_{0+0}^{1-0} \frac{\ln(1-a^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}dx = \pi(\sqrt{1-a^2} - 1), |a| < 1.$$

c)Deoarece

$$\lim_{x\to 0+0} \frac{1-\cos\alpha x}{x}e^{-x} = 0$$

pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$, avem că

$$\int_{0+0}^{\infty} \frac{1-\cos\alpha x}{x}e^{-x}dx = \int_0^{\infty} f(x,\alpha)dx$$

unde $f : [0,\infty) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x,\alpha) = \begin{cases} 0, & (x,\alpha) \in \{0\} \times \mathbb{R} \\ \frac{1-\cos\alpha x}{x}e^{-x}, & (x,\alpha) \in (0,\infty) \times \mathbb{R} \end{cases}.$$

Funcţia f este continuă pe $[0,\infty) \times \mathbb{R}$. Fie $A > 0$. Atunci

$$|f(x,\alpha)| \le \frac{2}{A}e^{-x}$$

pentru orice $x \in [A, \infty)$ şi pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$. Deoarece integrala

$$\int_A^{\infty} e^{-x}dx$$

este convergentă, integrala

$$\int_A^{\infty} f(x,\alpha)dx$$

este convergentă pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$. Deci integrala

$$\int_0^{\infty} f(x,\alpha)dx = \int_0^A f(x,\alpha)dx + \int_A^{\infty} f(x,\alpha)dx$$

este convergentă. Funcţia f este derivabilă în raport cu α şi

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\alpha)=\begin{cases}0, & (x,\alpha)\in\{0\}\times I\!R\\ (\sin\alpha x)e^{-x}, & (x,\alpha)\in(0,\infty)\times I\!R\end{cases}.$$

Mai mult, $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$ este o funcţie continuă pe $[0,\infty)\times I\!R$. Deoarece

$$\left|\frac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\alpha)\right|\leq e^{-x}$$

pentru orice $x\in[0,\infty)$ şi pentru orice $\alpha\in I\!R$, rezultă că integrala

$$\int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\alpha)dx$$

este uniform convergentă în raport cu α. Atunci din teorema 19 rezultă că funcţia

$$F: I\!R\longrightarrow I\!R, F(\alpha)=\int_0^\infty f(x,\alpha)dx$$

este derivabilă pe $I\!R$ şi

$$F'(\alpha)=\int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\alpha)dx=\int_0^\infty \sin\alpha x e^{-x}dx=$$

$$=\int_0^\infty \sin\alpha x(-e^{-x})'dx=-\sin(\alpha x)e^{-x}\Big|_0^\infty+\alpha\int_0^\infty \cos\alpha x(-e^{-x})'dx=$$

$$=-\alpha\cos(\alpha x)e^{-x}\Big|_0^\infty-\alpha^2\int_0^\infty(\sin\alpha x)e^{-x}dx=-\alpha+\alpha^2F'(\alpha)$$

pentru orice $\alpha\in I\!R$. Deci

$$F'(\alpha)=\frac{-\alpha}{1+\alpha^2},$$

de unde rezultă că

$$F(\alpha)=-\frac{1}{2}ln(1+\alpha^2)+c.$$

Deoarece pentru $\alpha=0$, avem că

$$F(0)=-\frac{1}{2}ln\,1+c \text{ şi } F(0)=\int_0^\infty\frac{1-1}{x}e^{-x}dx$$

rezultă că $c=0$ şi deci

$$F(\alpha)=-\frac{1}{2}ln(1+\alpha^2).$$

2. Utilizând posibilitatea inversării ordinii de integrare să se calculeze:

$$\int_{0+0}^{1-0} \frac{arctg\, x}{x\sqrt{1-x^2}}dx.$$

Rezolvare.

Deoarece

$$\lim_{x \to 0+0} \frac{arctg\, x}{x} = 1$$

avem că

$$\int_{0+0}^{1-0} \frac{arctg\, x}{x\sqrt{1-x^2}}dx = \int_{0}^{1-0} h(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

unde $h : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$h(x) = \begin{cases} \frac{arctg\, x}{x}, & x \in (0,1] \\ 1, & x = 0 \end{cases}.$$

Observăm că

$$h(x) = \int_0^1 \frac{dy}{1+x^2y^2}.$$

Deci

$$\int_{0+0}^{1-0} \frac{arctg\, x}{x\sqrt{1-x^2}}dx = \int_{0}^{1-0} \left(\int_0^1 \frac{dy}{(1+x^2y^2)\sqrt{1-x^2}}\right) dx.$$

Vom arăta că integrala

$$\int_0^{1-0} \frac{dx}{(1+x^2y^2)\sqrt{1-x^2}}$$

este uniform convergentă în raport cu y. Funcţia

$$f : [0,1) \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}, f(x,y) = \frac{1}{(1+x^2y^2)\sqrt{1-x^2}}$$

este continuă pe $[0,1) \times [0,1]$, deci pentru orice $b \in [0,1)$ şi pentru orice $y \in [0,1]$ funcţia f este integrabilă pe $[0,b]$. Deoarece

$$\left|\frac{1}{(1+x^2y^2)\sqrt{1-x^2}}\right| \le \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

pentru orice $x \in [0,1)$ şi pentru orice $y \in [0,1]$ şi integrala

$$\int_0^{1-0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

este convergentă

$$\left(\int_0^{1-0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arcsin\, x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} \right),$$

conform teoremei 15 rezultă că integrala

$$\int_0^{1-0} \frac{dx}{(1+x^2y^2)\sqrt{1-x^2}}$$

este uniform convergentă în raport cu y. Din teorema 20 rezultă că

$$\int_0^{1-0} \left(\int_0^1 \frac{dy}{(1+y^2x^2)\sqrt{1-x^2}} \right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^{1-0} \frac{dx}{(1+y^2x^2)\sqrt{1-x^2}} \right) dy =$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}-0} \frac{1}{(1+y^2 sin^2 t) cos\, t} cos\, t\, dt \right) dy =$$

$$\left(\varphi : \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow [0,1), \varphi(t) = sin\, t, \varphi'(t) = cos\, t \right)$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{(1+y^2 sin^2 t)} \right) dy = \int_0^1 \left(\int_0^\infty \frac{1}{1+y^2\frac{u^2}{1+u^2}} \frac{1}{1+u^2} du \right) dy =$$

$$\left(\varphi : [0,\infty) \longrightarrow \left[0, \frac{\pi}{2}\right), \varphi(u) = arctg\, u, \varphi'(u) = \frac{1}{1+u^2} \right)$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^\infty \frac{1}{1+(1+y^2)u^2} du \right) dy = \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{1+y^2}} arctg \sqrt{1+y^2}\, u \Big|_0^\infty \right) dy =$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} dy = \frac{\pi}{2} ln(y + \sqrt{1+y^2}) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} ln(1+\sqrt{2}).$$

Deci

$$\int_{0+0}^{1-0} \frac{arctg\, x}{(1+y^2x^2)\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{2} ln(1+\sqrt{2})$$

Probleme propuse.

Să se calculeze următoarele integrale folosind derivarea în raport cu un parametru:

1. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos x} \ln \frac{1+\alpha\cos x}{1-\alpha\cos x}\, dx \quad (|\alpha|<1)$$

2. $$\int_0^{\infty} \frac{\ln(1+\alpha^2x^2)}{1+x^2}\, dx$$

3. $$\int_0^{\pi} \ln(1+\alpha\cos x)\, dx \quad (|\alpha|<1)$$

4. $$\int_0^{\infty} \frac{\ln(1+\alpha\cos x)}{\cos x}\, dx \quad (|\alpha|<1)$$

5. $$\int_0^{\pi} \ln(1-2a\cos x+a^2)\, dx$$

6. $$\int_0^{\infty} \frac{e^{-tx}\sin x}{x}\, dx$$

Capitolul 4

Integrale Euleriene

Teorie

1. INTEGRALA LUI EULER DE PRIMA SPEŢĂ

$$B(a,b) = \int_{0+0}^{1-0} x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx,\ a > 0, b > 0$$

PROPRIETĂŢI

(a) $\quad B(a,b) = B(b,a)$ (simetrie)

(b) $\quad B(a,b) = \dfrac{a-1}{a+b-1}B(a-1,b),\quad$ dacă $a > 1$

$$B(a,b) = \frac{b-1}{a+b-1}B(a,b-1),\quad \text{dacă } b > 1$$

$$B(a,n) = \frac{1\cdot 2\cdot 3\dots n}{a(a+1)\dots(a+n-1)},\quad \text{dacă } n \in \mathbb{N}^*$$

(formule de recurenţă)

(c) $\quad B(a,b) = \displaystyle\int_{0+0}^{\infty} y^{a-1}(1+y)^{-a-b}dy$

(d) $\quad B(a,a-1) = \dfrac{\pi}{\sin \pi a},\ 0 < a < 1$

2. INTEGRALA LUI EULER DE DE A DOUA SPEŢĂ

$$\Gamma(a) = \int_{0+0}^{\infty} x^{a-1} e^{-x} dx, \ a > 0$$

PROPRIETĂŢI

(a) Funcţia $\Gamma(a)$ este indefinit derivabilă pe $(0, \infty)$

(b) $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$, (formula de recurenţă)

$\Gamma(n+1) = n!, \ n \in \mathbb{N}$

(c) $B(a,b) = \dfrac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$

(formula de legătură dintre cele două integrale)

Probleme rezolvate.

1. **Să se demonstreze egalitatea**

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin \pi a}$$

dacă $a \in (0,1)$ (formula de completare)

Rezolvare.

Pentru $a \in (0,1)$, avem că

$$B(a, 1-a) = \frac{\pi}{\sin \pi a}.$$

Dar

$$B(a, 1-a) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(1-a)}{\Gamma(a+1-a)} = \frac{\Gamma(a)\Gamma(1-a)}{\Gamma(1)} =$$

$$= \frac{\Gamma(a)\Gamma(1-a)}{0!} = \Gamma(a)\Gamma(1-a).$$

Deci

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{sin\,\pi a}.$$

Observaţie

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{sin\,\frac{\pi}{2}} = \pi,$$

deci

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

2. **Să se demonstreze egalitatea**

$$\Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2a-1}}\Gamma(2a) \text{ (formula Legendre)}$$

Rezolvare.

$$B(a,a) = \int_{0+0}^{1-0} x^{a-1}(1-x)^{a-1} = \int_{0+0}^{1-0}(x-x^2)^{a-1}dx =$$

$$= \int_{0+0}^{1-1}\left[\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-x\right)^2\right]^{a-1}dx =$$

$$\left(\varphi : \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right] \longrightarrow [0,1], \varphi(t) = \frac{1}{2}+t, \varphi'(t) = 1\right)$$

$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{4}-t^2\right]^{a-1}dt = 2\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{4}-t^2\right)^{a-1}dt =$$

$$\left(\varphi : [0,1] \longrightarrow \left[0,\frac{1}{2}\right], \varphi(y) = \frac{1}{2}\sqrt{y}, \varphi'(y) = \frac{1}{4\sqrt{y}}\right)$$

$$= 2\int_0^1 \frac{1}{4^{a-1}}(1-y)^{a-1}\frac{1}{4\sqrt{y}}dy = \frac{1}{2^{2a-1}}\int_0^1 y^{\frac{1}{2}-1}(1-y)^{a-1}dy =$$

$$= \frac{1}{2^{2a-1}}B\left(\frac{1}{2},a\right) = \frac{1}{2^{2a-1}}\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(a)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+a\right)}.$$

Dar

$$B(a,a) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(a)}{\Gamma(2a)}.$$

Deci

$$\frac{1}{2^{2a-1}}\frac{\sqrt{\pi}\Gamma(a)}{\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)} = \frac{\Gamma(a)\Gamma(a)}{\Gamma(2a)}.$$

De aici rezultă că

$$\Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2a-1}}\Gamma(2a).$$

Să se calculeze:

3. $$\int_{0+0}^{1-0} x^{p-1}(1-x^m)^{q-1}dx \ , \ p,q,m>0.$$

Rezolvare. Dacă considerăm

$$\varphi:(0,1)\longrightarrow(0,1), \varphi(t)=t^{\frac{1}{m}},$$

atunci

$$\varphi'(t) = \frac{1}{m}t^{\frac{1}{m}-1}$$

şi

$$\int_{0+0}^{1-0} x^{p-1}(1-x^m)^{q-1}dx = \int_{0+0}^{1-0} t^{\frac{p-1}{m}}(1-t)^{q-1}\frac{1}{m}t^{\frac{1}{m}-1}dt =$$

$$= \frac{1}{m}\int_{0+0}^{1-0} t^{\frac{p}{m}-1}(1-t)^{q-1}dt = \frac{1}{m}B\left(\frac{p}{m},q\right) = \frac{1}{m}\frac{\Gamma\left(\frac{p}{m}\right)\Gamma(q)}{\Gamma\left(\frac{p}{m}+q\right)}.$$

4. $$\int_0^{1-0}\sqrt{\frac{x}{1-x}}dx$$

Rezolvare.

$$\int_0^{1-0}\sqrt{\frac{x}{1-x}}dx = \int_0^{1-0} x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}dx = \int_0^{1-0} x^{\frac{3}{2}-1}(1-x)^{\frac{1}{2}-1}dx =$$

$$= B\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2)} = \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{1!} = \frac{\pi}{2}.$$

5. $$\int_0^1 x\sqrt[3]{1-x^3}dx$$

Rezolvare.

$$\int_0^1 x\sqrt[3]{1-x^3}dx = \int_{0-0}^1 x(1-x^3)^{\frac{1}{3}}dx =$$

$$\left(\varphi : [0,1] \longrightarrow [0,1], \varphi(t) = \sqrt[3]{t}, \varphi'(t) = \frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}\right)$$

$$= \int_{0-0}^1 t^{\frac{1}{3}}(1-t)^{\frac{1}{3}}\frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}dt = \frac{1}{3}\int_{0-0}^1 t^{-\frac{1}{3}}(1-t)^{\frac{1}{3}}dt = \frac{1}{3}\int_{0-0}^1 t^{\frac{2}{3}-1}(1-t)^{\frac{4}{3}-1}dt =$$

$$= \frac{1}{3}\frac{\Gamma(\frac{2}{3})\Gamma(\frac{4}{3})}{\Gamma(2)} = \frac{1}{3}\frac{\frac{1}{3}\Gamma(\frac{2}{3})\Gamma(\frac{1}{3})}{1!} = \frac{1}{9}\frac{\pi}{sin\,\frac{\pi}{3}} = \frac{2\sqrt{3}\pi}{3}.$$

6. $$\int_{a+0}^{a-0} x^{p-1}(a^m - x^m)^{q-1}dx \ , \ p,q,m > 0$$

Rezolvare.

Dacă considerăm funcţia $\varphi : (0,1) \longrightarrow (0,a), \varphi(t) = at$, atunci $\varphi'(t) = a$ şi

$$\int_{a+0}^{a-0} x^{p-1}(a^m - x^m)^{q-1}dx = \int_{0+0}^{1-0} a^{p-1}t^{p-1}(a^m - a^m t^m)^{q-1}dt =$$

$$= a^{p+m}\int_{0+0}^{1-0} t^{p-1}(1-t^m)^{q-1}dt = a^{p+m}\frac{1}{m}\frac{\Gamma(\frac{p}{m})\Gamma(q)}{\Gamma(\frac{p}{m}+q)}.$$

(conform exerciţiului 4)

7. $$\int_0^{4-0} x\sqrt{\frac{x}{4-x}}dx$$

Rezolvare.

$$\int_0^{4-0} x\sqrt{\frac{x}{4-x}}dx = \int_0^{4-0} x^{\frac{3}{2}}(4-x)^{-\frac{1}{2}}dx =$$

$$(\varphi : [0,4) \longrightarrow [0,1), \varphi(t) = 4t)$$

$$= \int_0^1 4^{\frac{3}{2}}t^{\frac{3}{2}}(4-4t)^{-\frac{1}{2}}4dt = 4^2\int_0^{1-0} t^{\frac{5}{2}-1}(1-t)^{\frac{1}{2}-1}dt =$$

$$= 4^2\frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(3)} = \frac{4^2\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2!} = 2^4\cdot\frac{3}{2^3}\cdot\pi = 6\pi.$$

8. $\displaystyle\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}dx, a>0$

Rezolvare.

$$\int_0^a x^2(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}dx = \int_0^1 a^2t^2(a^2-a^2t^2)^{\frac{1}{2}}dt =$$

$$= (\varphi : [0,1] \longrightarrow [0,a], \varphi(t) = at, \varphi'(t) = a)$$

$$= a^4\int_0^1 t^2(1-t^2)^{\frac{1}{2}}dt =$$

$$\left(\varphi : [0,1] \longrightarrow [0,1], \varphi(u) = \sqrt{u}, \varphi'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}}\right)$$

$$= a^4\int_0^1 u(1-u)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{2\sqrt{u}}du = a^4\frac{1}{2}\int_0^1 u^{\frac{1}{2}}(1-u)^{\frac{1}{2}}du = \frac{a^4}{2}\int_0^1 u^{\frac{3}{2}-1}(1-u)^{\frac{3}{2}-1}du =$$

$$\frac{a^4}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(3)} = \frac{a^4}{2}\frac{\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2!} = \frac{a^4}{2^2}\cdot\frac{1}{2^2}\cdot\pi = \frac{a^4\pi}{16}.$$

9. $\displaystyle\int_{0+0}^{\infty} x^{p-1}(1+x^m)^{-p-q}dx\ ,\ p, m > 0, p+q > \frac{p}{m}$

Rezolvare.

Dacă considerăm funcţia $\varphi : (0,\infty) \longrightarrow (0,\infty), \varphi(t) = t^{\frac{1}{m}}$, atunci

$$\varphi'(t) = \frac{1}{m}t^{\frac{1}{m}-1}$$

şi

$$\int_{0+0}^{\infty} x^{p-1}(1+x^m)^{-p-q}dx = \int_{0+0}^{\infty} t^{\frac{p}{m}-\frac{1}{m}}(1+t)^{-p-q}\frac{1}{m}t^{\frac{1}{m}-1}dt =$$

$$= \frac{1}{m}\int_{0+0}^{\infty} t^{\frac{p}{m}-1}(1+t)^{-\frac{p}{m}-(p+q-\frac{p}{m})}dt = \frac{1}{m}B\left(\frac{p}{m}, \frac{m-1}{m}p+q\right).$$

10. $$\int_{0+0}^{\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt[4]{x^3}}$$

Rezolvare.

$$\int_{0+0}^{\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt[4]{x^3}} = \int_{0+0}^{\infty} x^{-\frac{3}{4}}(1+x)^{-1}dx = \int_{0+0}^{\infty} x^{\frac{1}{4}-1}(1+x)^{-\frac{1}{4}-\frac{3}{4}}dx =$$

(conform proprietății 3)

$$= B\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) = B\left(\frac{1}{4}, 1-\frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{sin\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\pi.$$

11. $$\int_{0+0}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}(1+x^2)}$$

Rezolvare.

$$\int_{0+0}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}(1+x^2)} = \int_{0+0}^{\infty} x^{\frac{1}{3}}(1+x^2)^{-1}dx =$$

$$\left(\varphi : (0,\infty) \longrightarrow (0,\infty), \varphi(t) = \sqrt{t}, \varphi'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}\right)$$

$$= \int_{0+0}^{\infty} t^{\frac{1}{6}}(1+t)^{-1}\frac{1}{2\sqrt{t}}dt = \frac{1}{2}\int_{0+0}^{\infty} t^{-\frac{1}{3}}(1+t)^{-1}dt = \frac{1}{2}\int_{0+0}^{\infty} t^{\frac{2}{3}-1}(1+t)^{-\frac{2}{3}-\frac{1}{3}}dt =$$

$$= \frac{1}{2}B\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}\frac{\pi}{sin\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi\sqrt{3}}{3}.$$

12. $$\int_{0+0}^{\frac{\pi}{2}-0} sin^{a-1}\varphi cos^{b-1}\varphi d\varphi, a > 0, b > 0$$

Rezolvare. Dacă considerăm $\varphi : (0,1) \longrightarrow \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \varphi(t) = arcsin\, t$, atunci

$$\varphi'(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

şi

$$\int_{0+0}^{\frac{\pi}{2}-0} sin^{a-1}\varphi cos^{b-1}\varphi d\varphi =$$

$$= \int_{0+0}^{1-0} t^{a-1}(1-t^2)^{\frac{b-1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = \int_{0+0}^{1-0} t^{a-1}(1-t^2)^{\frac{b-2}{2}}dt =$$

$$\left(\varphi : (0,1) \longrightarrow (0,1), \varphi(u) = \sqrt{u}, \varphi'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}}\right)$$

$$= \int_{0+0}^{1-0} u^{\frac{a-1}{2}}(1-u)^{\frac{b-2}{2}}\frac{1}{2\sqrt{u}}du = \frac{1}{2}\int_{0+0}^{1-0} u^{\frac{a}{2}-1}(1-u)^{\frac{b}{2}-1}du =$$

$$= \frac{1}{2}B\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)\Gamma\left(\frac{b}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a+b}{2}\right)}$$

Observaţii

(a)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{2n}\varphi d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^{2n}\varphi d\varphi = \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+1)} =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\frac{2n-1}{2}\frac{2n-3}{2}\ldots\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{n!} = \frac{\pi}{2}\frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 3\cdot 1}{(2n)(2n-2)\ldots 2}, n\in \mathbb{N}^*.$$

(b)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{2n-1}\varphi d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^{2n-1}\varphi d\varphi = \frac{1}{2}\frac{\Gamma(n)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right)} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{(n-1)!\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{2n-1}{2}\frac{2n-3}{2}\ldots\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{2}\frac{(2n-2)(2n-4)\ldots 2}{(2n-1)(2n-3)\ldots 3\ldots 1}, n\in \mathbb{N}^*.$$

13. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}-0} \sqrt[3]{tg^2\varphi}\, d\varphi.$$

Rezolvare.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}-0} \sqrt[3]{tg^2\varphi}\, d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}-0} sin^{\frac{2}{3}}\varphi cos^{-\frac{2}{3}}\varphi d\varphi =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}-0} sin^{\frac{5}{3}-1}\varphi cos^{\frac{1}{3}-1}\varphi d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)}{\Gamma(1)} = \frac{1}{2}\frac{\pi}{sin\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{2}\cdot 2\pi = \pi.$$

14. $$\int_0^{\infty} e^{-x^n}dx, n>0.$$

Rezolvare.

$$\int_0^{\infty} e^{-x^n}dx = \int_{0+0}^{\infty} e^{-t}\frac{1}{n}t^{\frac{1}{n}-1}dt =$$

$$\left(\varphi : (0,\infty) \longrightarrow (0,\infty), \varphi(t) = t^{\frac{1}{n}}, \varphi'(t) = \frac{1}{n}t^{\frac{1}{n}-1}\right)$$

$$= \frac{1}{n}\int_{0+0}^{\infty} t^{\frac{1}{n}-1}e^{-t}dt = \frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right).$$

Observaţie.

$$\int_{0}^{\infty} e^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

15. $$\int_{0+0}^{\infty} x^m e^{-x^n}dx, \ m > -1, n > 0$$

Rezolvare.

$$\int_{0+0}^{\infty} x^m e^{-x^n}dx = \int_{0+0}^{\infty} t^{\frac{m}{n}}e^{-t}\frac{1}{n}t^{\frac{1}{n}-1}dt =$$

$$\left(\varphi : (0,\infty) \longrightarrow (0,\infty), \varphi(t) = t^{\frac{1}{n}}, \varphi'(t) = \frac{1}{n}t^{\frac{1}{n}-1}\right)$$

$$= \frac{1}{n}\int_{0+0}^{\infty} t^{\frac{m+1}{n}-1}e^{-t}dt = \frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right).$$

16. $$\int_{0+0}^{\infty} x^{p-1}ln^2 x dx, \ p < 0.$$

Rezolvare.

Dacă considerăm funcţia $\varphi : (0,\infty) \longrightarrow (0,\infty), \varphi(t) = e^t$, atunci $\varphi'(t) = e^t$ şi

$$\int_{0+0}^{\infty} x^{p-1}ln^2 x dx = \int_{0+0}^{\infty} e^{(p-1)t}t^2e^t dt = \int_{0+0}^{\infty} t^2e^{pt}dt =$$

$$(\varphi : (0,\infty) \longrightarrow (0,\infty), \varphi(u) = -pu, \varphi'(u) = -p)$$

$$= -\int_{0+0}^{\infty} p^2u^2e^{-u}pdu = -p^3\int_{0+0}^{\infty} u^{3-1}e^{-u}du = -p^3\Gamma(3) = -2p^3.$$

Capitolul 5

Integrale curbilinii

5.1 Integrale curbilinii în raport cu elementul de arc

Teorie

Definiţia 5.1 *Fie $D \in \mathbb{R}^3$ un domeniu (o submulţime deschisă şi conexă a lui $\mathbb{R}^3$). funcţia $F : D \longrightarrow \mathbb{R}$ şi curba rectificabilă*

$$C : \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \quad t \in [a, b] \\ z = h(t) \end{cases}$$

astfel încât $Im(C) \subset D$ (unde $Im(C)$ este imaginea curbei C).

Considerăm

$$\Delta : a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b,$$

o diviziune a intervalului $[a, b]$. Obţinem astfel punctele

$$M_i(f(t_i), g(t_i), h(t_i)) \in Im(C).$$

Fie

$$\Delta s_i = l_{\widehat{M_i M_{i+1}}}, i = \overline{0, n-1}, ||\Delta|| = \max_{i=\overline{0,n-1}} \Delta s_i$$

şi

$$S_\Delta = \sum_{i=0}^{n-1} F(f(\xi_i), g(\xi_i), h(\xi_i))\Delta s_i,$$

unde

$$\xi_i \in (t_i, t_{i+1}), i = \overline{0, n-1}.$$

Dacă există $I \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\forall \Delta \text{ cu } ||\Delta|| \to 0 \text{ şi } \forall \xi_i \in (t_i, t_{i+1}), i = \overline{0, n-1}, \lim_{||\Delta|| \to 0} S_\Delta = I,$$

vom spune că funcţia F este integrabilă în raport cu elementul de arc de-a lungul curbei C, iar numărul I se numeşte integrala curbilinie în raport cu elementul de arc a funcţiei F de-a lungul curbei C şi vom nota

$$I = \int_C F(x,y,z)ds$$

Teorema 5.2 *(***de reducere a unei integrale curbilinii în raport cu elementul de arc la o integrală Riemann)**

Fie $D \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu, funcţia $F : D \longrightarrow \mathbb{R}$ şi curba rectificabilă

$$C : \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \quad t \in [a,b], \\ z = h(t) \end{cases}$$

astfel încât imaginea curbei C să fie inclusă în D. Dacă funcţia F este continuă pe D şi funcţiile f, g, h sunt de clasă C^1 pe $[a,b]$, atunci

$$\int_C F(x,y,z)\,ds = \int_a^b F(f(t), g(t), h(t))\sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2 + h'(t)^2}\,dt.$$

5.3 Proprietăţi ale integralei curbilinii în raport cu elementul de arc

1. *Dacă funcţiile F şi G sunt integrabile în raport cu elementul de arc de-a lungul curbei C atunci oricare ar fi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha F + \beta G$ este integrabilă în raport cu elementul de arc de-a lungul curbei C şi*

$$\int_C (\alpha F + \beta G)(x,y,z)\,ds = \alpha \int_C F(x,y,z)\,ds + \beta \int_C G(x,y,z)\,ds.$$

2. *Dacă perechea de curbe (C_1, C_2) este juxtapozabilă şi F este o funcţie integrabilă în raport cu elementul de arc de-a lungul curbei $C = C_1 \cup C_2$, atunci F este integrabilă în raport cu elementul de arc de-a lungul curbelor C_1 şi C_2 şi*

$$\int_C F(x,y,z)\,ds = \int_{C_1} F(x,y,z)\,ds + \int_{C_2} F(x,y,z)\,ds.$$

5.4 APLICAŢII

1. Dacă C este o curbă rectificabilă, atunci lungimea curbei C este dată de

$$l_C = \int_C ds.$$

2. Masa unui fir material de grosime neglijabilă, care este imaginea curbei C şi are densitatea $\rho(x,y,z)$, unde $(x,y,z) \in Im(C)$ este

$$M = \int_C \rho(x,y,z)\,ds.$$

3. Coordonatele centrului de greutate al unui fir material de lungime neglijabilă care este imaginea curbei C şi are densitatea $\rho(x,y,z)$, pentru $(x,y,z) \in Im(C)$ sunt:

$$x_G = \frac{1}{M}\int_C x\rho(x,y,z)\,ds$$
$$y_G = \frac{1}{M}\int_C y\rho(x,y,z)\,ds$$
$$z_G = \frac{1}{M}\int_C z\rho(x,y,z)\,ds$$

Probleme rezolvate.

Să se calculeze următoarele integrale curbilinii în raport cu elementul de arc:

1. $$\int_C (x^2 + y^2)\,ds$$

unde imaginea curbei C este segmentul de dreaptă cu capătul iniţial în punctul $A(1,1)$ şi capătul final în punctul $B(3,3)$ de pe dreapta $x - y = 0$.

Rezolvare.

O parametrizare a curbei poate fi:

$$C : \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases}, \ t \in [1,3].$$

Funcţiile $f(t) = t, g(t) = t$ sunt derivabile cu derivata continuă pe $[1,3]$; $f'(t) = 1$ şi $g'(t) = 1$. Funcţia $F(x,y) = x^2 + y^2$ este continuă pe $\mathbb{R}^2$, deci putem aplica teorema de reducere a integralei curbilinii în raport cu elementul de arc la o integrală Riemann. Avem

$$\int_C (x^2 + y^2)\, ds = \int_1^3 (t^2 + t^2)\sqrt{1^2 + 1^2}\, dt = \int_1^3 2\sqrt{2}t^2\, dt = 2\sqrt{2}\frac{t^3}{3} =$$

$$= 2\sqrt{2}\frac{26}{3} = \frac{52}{3}\sqrt{2}.$$

2. $$\int_C (x + y)\, ds$$

unde C este curbă simplă închisă, orientată pozitiv, care are drept imagine în plan pătratul cu vârfurile $A_1(0,0)$, $A_2(1,-1)$,$A_3(2,0)$,$A_4(1,1)$ şi ambele capete în A_1.

Rezolvare.

Ecuaţiile laturilor pătratului sunt:

(a) ecuaţia dreptei A_1A_2 : $y = -x$

(b) ecuaţia dreptei A_2A_3 : $y = x - 2$

(c) ecuaţia dreptei A_3A_4 : $y = -x + 2$

(d) ecuaţia dreptei A_4A_1 : $y = x$

Considerăm curbele:

$$C_1 : \begin{cases} x = t \\ y = -t \end{cases}, t \in [0,1].$$

$$C_2 : \begin{cases} x = t \\ y = t - 2 \end{cases}, t \in [1,2].$$

$$C_3 : \begin{cases} x = -t + 2 \\ y = t \end{cases}, \, t \in [0, 1].$$

$$C_4 : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 - t \end{cases}, \, t \in [0, 1].$$

Deoarece curba C este o curbă simplă şi închisă $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$, curbele C_1, C_2, C_3, C_4 sunt rectificabile, perechile de curbe (C_1, C_2), (C_2, C_3), (C_3, C_4), (C_4, C_1) sunt juxtapozabile şi funcţia $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $F(x, y) = x + y$ este continuă pe $\mathbb{R}$, există integrala din enunţ şi din teorema de aditivitate a integralei curbilinii în raport cu elementul de arc, avem:

$$\int_C (x + y)\, ds = \int_{C_1} (x + y)\, ds + \int_{C_2} (x + y)\, ds + \int_{C_3} (x + y)\, ds =$$

$$= \int_{C_4} (x + y)\, ds = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = I.$$

Deoarece funcţia $F(x, y) = x + y$ este continuă pe $\mathbb{R}^2$ şi funcţiile $f_i(t)$ şi $g_i(t)$, $i \in \overline{1, 4}$ sunt derivabile cu derivata continuă în fiecare din cele patru cazuri, pentru calculul celor patru integrale putem aplica teorema de reducere a integralei curbilinii în raport cu elementul de arc la o integrală Riemann. Deci

$$I_1 = \int_0^1 (t - t)\sqrt{1^2 + 1^2}\, dt = 0$$

$$I_2 = \int_1^2 (2t - 2)\sqrt{1^2 + 1^2}\, dt = 2\sqrt{2} \int_1^2 (t - 1)\, dt = \sqrt{2}(t - 1)^2 \Big|_1^2 = \sqrt{2}$$

$$I_3 = \int_0^1 2\sqrt{1^2 + 1^2}\, dt = 2\sqrt{2}t \Big|_0^1 = 2\sqrt{2}$$

$$I_4 = \int_0^1 (2 - 2t)\sqrt{1^2 + 1^2}\, dt = 2\sqrt{2} - \frac{(1 - t)^2}{2} \Big|_0^1 = \sqrt{2}$$

şi

$$I = 0 + \sqrt{2} + 2\sqrt{2} + \sqrt{2} = 4\sqrt{2}.$$

3. $\int_C x\,ds,$

unde imaginea curbei C este arcul AB, $A(0,1), B(1,2)$ din parabola $y = x^2+1$ şi având capatul iniţial în A.

Rezolvare.

O parametrizare a curbei C poate fi

$$C : \begin{cases} x = t \\ y = t^2+1 \end{cases}, \ t \in [0,1].$$

Deoarece funcţia $F(x,y) = x$ este continuă pe $\mathbb{R}^2$ şi funcţiile $f(t) = t$ şi $g(t) = t^2+1$ sunt derivabile, cu derivata continuă pe $[0,1]$, putem aplica teorema de reducere a integralei curbilinii în raport cu elementul de arc la o integrală Riemann. Deci,

$$\int_C x\,ds = \int_0^1 t\sqrt{1^2+(2t)^2}\,dt = \int_0^1 t\sqrt{4t^2+1}dt =$$

$$= \frac{1}{12}(\sqrt{1+4t^2})^3\Big|_0^1 = \frac{1}{12}(5\sqrt{5}-1).$$

4. $\int_C x\sqrt{x^2+y^2}ds,$

unde imaginea curbei C este arcul din primul cadran al cercului:

$a) x^2+y^2 = 2$

$b) x^2+y^2 = 2x$

Rezolvare.

a) O parametrizare a curbei este :

$$C : \begin{cases} x = \sqrt{2}\cos\theta \\ y = \sqrt{2}\sin\theta \end{cases}, \ \theta \in [0, \frac{\pi}{2}].$$

Funcţiile $f(\theta) = \sqrt{2}cos\,\theta$ şi $g(\theta) = \sqrt{2}sin\,\theta$ sunt derivabile cu derivata continuă pe $[0, \frac{\pi}{2}]$. Funcţia $F(x, y) = x\sqrt{x^2 + y^2}$ este continuă pe $\mathbb{R}^2$. Deci putem aplica teorema de reducere a unei integrale curbilinii în raport cu elementul de arc la o integrală Riemann. Avem

$$I = \int_C x\sqrt{x^2 + y^2}\, ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2}cos\theta\sqrt{2}\sqrt{(\sqrt{2}sin\,\theta)^2 + (\sqrt{2}cos\,\theta)^2}\, d\theta =$$

$$= 2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos\,\theta\, d\theta = 2\sqrt{2}sin\,\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\sqrt{2}.$$

b) Deoarece ecuaţia canonică a cercului $x^2 + y^2 = 2x$ este $(x-1)^2 + y^2 = 1$, o parametrizare a curbei C este

$$C : \begin{cases} x = 1 + cos\,\theta \\ y = sin\,\theta \end{cases}, \theta \in [0, \pi].$$

Funcţiile $f(\theta) = 1 + cos\,\theta$ şi $g(\theta) = sin\,\theta$ sunt derivabile cu derivata continuă pe $[0, \pi]$. Funcţia $F(x, y) = x\sqrt{x^2 + y^2}$ este continuă pe $\mathbb{R}^2$. Deci putem aplica teorema de reducere a integralei curbilinii în raport cu elementul de arc la o integrală Riemann. Avem

$$I = \int_C x\sqrt{x^2 + y^2}\, ds = \sqrt{2}\int_0^{\pi} (1 + cos\theta)^{3/2}\sqrt{sin^2\theta + cos^2\theta}\, d\theta =$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{\pi} (1 + cos\theta)^{3/2}\, d\theta = \sqrt{2}\int_0^{\pi} \left(2cos^2\frac{\theta}{2}\right)^{3/2} d\theta =$$

$$= 4\int_0^{\pi} cos^3\frac{\theta}{2}\, d\theta = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^3\theta\, d\theta = 8 \cdot \frac{2}{3} = \frac{16}{3}.$$

5. $$\int_C xy\, ds,$$

unde imaginea curbei C este arcul din primul cadran al elipsei

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a > 0, b > 0.$$

Rezolvare.

Ecuaţiile parametrice ale curbei C sunt:

$$C : \begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = b\sin\theta \end{cases}, \theta \in [0, \frac{\pi}{2}].$$

Funcţiile $f(\theta) = a\cos\theta$ şi $g(\theta) = b\sin\theta$ sunt derivabile cu derivata continuă pe $[0, \frac{\pi}{2}]$. Funcţia $F(x,y) = xy$ este continuă pe $\mathbb{R}^2$. Deci există integrala din enunţ şi se poate reduce la o integrală Riemann. Avem

$$I = \int_C xy\,ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ab\sin\theta\cos\theta\sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}\,d\theta =$$

$$= ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta\,\sqrt{(a^2 - b^2)\sin^2\theta + b^2}d\theta =$$

$$= \frac{ab}{2(a^2 - b^2)}\frac{2}{3}\left[\sqrt{(a^2 - b^2)\sin^2\theta + b^2}\right]^3\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{ab(a^3 - b^3)}{3(a^2 - b^2)} = \frac{ab(a^2 + ab + b^2)}{3(a + b)}.$$

6. $$\int_C x^2y^2z^2\,ds,$$

unde C este curba simplă, închisă şi rectificabilă din spaţiu, care are ca imagine cercul situat la intersecţia sferei $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ cu planul $x + y = 0$, cu ambele capete în $A(0,0,1)$

Rezolvare.

O parametrizare a curbei C poate fi

$$C : \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta \\ y = -\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta \\ z = \sin\theta \end{cases}, \theta \in [\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}].$$

Funcţiile $f(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta$, $g(\theta) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta, h(\theta) = \sin\theta$ sunt derivabile cu derivata continuă pe $[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}]$. Funcţia $F(x,y,z) = x^2y^2z^2$ este continuă pe $\mathbb{R}^3$. Deci există integrala din enunţ şi se poate reduce la o integrală Riemann. Avem

$$I=\int_C x^2y^2z^2\,ds=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}}\frac{1}{4}\sin^4\theta\cos\theta\sqrt{\frac{1}{2}\sin^2\theta+\frac{1}{2}\sin^2\theta+\cos^2\theta}\,d\theta=$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\sin^4\theta\cos^2\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\sin^4\theta-\sin^6\theta]\,d\theta=$$

$$=\frac{3}{4}\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}-\frac{5}{6}\frac{3}{4}\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{8}\frac{1}{12}=\frac{\pi}{32}.$$

Obs. Proiecţia cercului de intersecţie pe planul xOz se obţine eliminând y din

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x+y=0 \end{cases}.$$

Proiecţia este o elipsă de ecuaţie $2x^2+z^2=1$.

7. $$\int_C (x^2+y^2)\ln z\,ds,$$

unde

$$C:\begin{cases} x=e^t\cos t \\ y=e^t\sin t \\ z=e^t \end{cases},\ t\in[0,\pi]\textbf{(elicea conică)}\ .$$

Rezolvare.

Funcţiile $f(t)=e^t\cos t$, $g(t)=e^t\sin t$, $h(t)=e^t$ sunt derivabile cu derivata continuă pe $[0,\pi]$. Funcţia $F(x,y,z)=(x^2+y^2)\ln z$ este continuă pe $\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}_+^*$, care conţine imaginea curbei C. Deci există integrala din enunţ şi se poate reduce la o integrală Riemann. Avem

$$\int_C (x^2+y^2)\ln z\,ds=\int_0^\pi te^{2t}\sqrt{e^{2t}(\cos t-\sin t)^2+e^{2t}(\sin t+\cos t)^2+e^{2t}}\,dt=$$

$$=\int_0^\pi te^{3t}\sqrt{3}\,dt=\frac{1}{\sqrt{3}}te^{3t}\Big|_0^\pi-\frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^\pi e^{3t}\,dt=$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{3}}e^{3\pi}-\frac{1}{3\sqrt{3}}e^{3\pi}+\frac{1}{3\sqrt{3}}=\frac{1}{3\sqrt{3}}(3\pi e^{3\pi}-e^{3\pi}+1).$$

Să se afle lungimea următoarelor curbe:

8. $$C : \begin{cases} x = ae^{-t} \cos t \\ y = ae^{-t} \sin t \\ z = be^{-t} \end{cases}, t \in [0, \infty),$$

unde $a > 0, b > 0$ sunt numere reale date.

Rezolvare.

Funcţiile $f(t) = ae^{-t} \cos t$, $g(t) = ae^{-t} \sin t, h(t) = be^{-t}$ sunt derivabile cu derivata continuă pe $[0, \infty)$. Atunci

$$l_C = \int_C ds = \int_0^{\infty} \sqrt{a^2e^{-2t}(\cos t + \sin t)^2 + a^2e^{-2t}(\cos t - \sin t)^2 + b^2e^{-2t}}dt =$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-t}\sqrt{2a^2 + b^2}dt = \sqrt{2a^2 + b^2}(-e^{-t})\Big|_0^{\infty} = \sqrt{2a^2 + b^2}$$

9. $$C : \begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}, t \in [0, 2\pi],$$

unde $a > 0$ dat. (buclă cicloidă)

Rezolvare.

Deoarece funcţiile $f(t) = a(t - \sin t), g(t) = a(1 - \cos t)$ sunt derivabile şi au derivate continue pe $[0, 2\pi]$,avem

$$l_C = \int_C ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2\sin^2 t}\, dt =$$

$$= 2a \int_0^{2\pi} \left|\sin \frac{t}{2}\right| dt = 4a \int_0^{\pi} |\sin t|\, dt =$$

$$= 4a \int_0^{\pi} \sin t\, dt = 4a(-\cos t)|_0^{\pi} = 8a.$$

10. **Curba C este imaginea cercului de centru (a, b) şi rază R.**

Rezolvare.

Reprezentarea parametrică a curbei C este:

$$C : \begin{cases} x = a + R\cos t \\ y = b + R\sin t \end{cases}, \; t \in [0, 2\pi],$$

Deoarece funcţiile $f(t) = a + R\cos t, g(t) = b + R\sin t$ sunt derivabile şi au derivate continue pe $[0, 2\pi]$,avem

$$l_C = \int_C ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 sin^2 t + R^2 cos^2 t}\, dt = \int_0^{2\pi} R\, dt = 2\pi R.$$

Să se calculeze masa şi coordonatele centrului de greutate ale firelor materiale care au reprezentările parametrice şi densităţile:

11.

$$C : \begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}, \; t \in [0, \frac{\pi}{2}], a > 0 \text{ şi densitatea } \rho(x,y) = 1, (x,y) \in Im(C).$$

Rezolvare.

Deoarece funcţiile $f(t) = a\cos^3 t$ şi $g(t) = a\sin^3 t$ sunt derivabile şi au derivata continuă pe $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ şi $\rho(x,y) = 1$ este continuă pe $\mathbb{R}^2$, integralele curbilinii în raport cu elementul de arc pe care le vom calcula se pot reduce la integrale Riemann. Avem

$$M = \int_C \rho(x,y)\, ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9a^2 cos^4 t\, sin^2 t + 9a^2 cos^2 t\, sin^4 t}\, dt =$$

$$= 3a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos t\, dt = 3a \frac{sin^2 t}{2}\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3a}{2}$$

$$x_G = \frac{1}{M} \int_C x\rho(x,y)\, ds =$$

$$= \frac{2}{3a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos^3 t\,(3a \sin t \cos t\,)dt = \frac{2a}{5}(-\cos^5 t)\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2a}{5}$$

$$y_G = \frac{1}{M}\int_C y\rho(x,y)\,ds =$$

$$= \frac{2}{3a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} a sin^3 t\,(3a\,sin\,t\,cos\,t\,)dt = \frac{2a}{5}(-sin^5 t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2a}{5}.$$

Deci

$$M = \frac{3a}{2} \text{ şi } G\left(\frac{2a}{5}, \frac{2a}{5}\right)$$

12.

$$C : \begin{cases} x = a\,cos\,t \\ y = a\,sin\,t \\ z = t \end{cases}, t \in [0, 3\pi], a > 0,$$

şi densitatea $\rho(x,y,z) = x + y, (x,y,z) \in Im(C)$.

Rezolvare.

Deoarece funcţiile $f(t) = a\,cos\,t$, $g(t) = a\,sin\,t$ şi $h(t) = t$ sunt derivabile şi au derivata continuă pe $[0, 3\pi]$ şi $\rho(x,y,z) = x + y$ este continuă pe $\mathbb{R}^3$, integralele curbilinii în raport cu elementul de arc pe care le vom calcula se pot reduce la integrale Riemann. Avem

$$M = \int_C \rho(x,y,z)\,ds = \int_0^{3\pi} a(cos\,t + sin\,t)\sqrt{a^2+1}\,dt =$$

$$= a\sqrt{a^2+1}(sin\,t - cos\,t)\Big|_0^{3\pi} = 2a\sqrt{a^2+1}$$

$$x_G = \frac{1}{M}\int_C x\rho(x,y,z)\,ds == \frac{1}{2a\sqrt{a^2+1}}\int_0^{3\pi} a^2(cos^2 t\ +\ sin\,t\,cos\,t\,)\sqrt{a^2+1}dt =$$

$$= \frac{a}{2}\int_0^{3\pi}(cos^2 t\ +\ sin\,t\,cos\,t\,)dt = \frac{a}{2}\left(6\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2\,tdt + \frac{sin^2 t}{2}\Big|_0^{3\pi}\right) = \frac{3a\pi}{4};$$

$$y_G = \frac{1}{M}\int_C y\rho(x,y,z)\,ds == \frac{1}{2a\sqrt{a^2+1}}\int_0^{3\pi} a^2(sin^2 t\ +\ sin\,t\,cos\,t\,)\sqrt{a^2+1}dt =$$

$$= \frac{a}{2}\left(6\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2\, tdt + \int_0^{3\pi} sin\, t\, cos\, t\, dt\right) = \frac{3a\pi}{4};$$

$$z_G = \frac{1}{M}\int_C z\rho(x,y,z)\,ds == \frac{1}{2a\sqrt{a^2+1}}\int_0^{3\pi} at(cos\, t\ +\ sin\, t)\sqrt{a^2+1}dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{3\pi} t(sin\, t -\ cos\, t)'dt = \frac{1}{2}t(sin\, t - cos\, t)\Big|_0^{3\pi} - \frac{1}{2}\int_0^{3\pi}(sin\, t - cos\, t)dt =$$

$$= \frac{3\pi}{2} - \frac{1}{2}(-cos\, t - sin\, t)\Big|_0^{3\pi} = \frac{1}{2}(3\pi - 2).$$

Deci

$$M = 2a\sqrt{a^2+1} \text{ şi } G\left(\frac{3a\pi}{4}, \frac{3a\pi}{4}, \frac{1}{2}(3\pi - 2)\right)$$

5.2 Integrale curbilinii în raport cu coordonatele

Teorie

Fie $D \subset \mathbb{R}^3$ domeniu şi

$$C : \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{cases}, \ t \in [a, b]$$

o curbă netedă

$$(f, g, h \in C^1([a, b]), f'(t)^2 + g'(t)^2 + h'(t)^2 \neq 0, \forall t \in [a, b]\ )$$

astfel încât imaginea sa să fie inclusă în D.

Definiţia 5.5 *Spunem că funcţia $P : D \longrightarrow \mathbb{R}$ este integrabilă în raport cu x de-a lungul curbei C dacă există*

$$\int_a^b P(f(t), g(t), h(t))\, f'(t)\, dt$$

şi notăm

$$\int_C P(x, y, z)\, dx = \int_a^b P(f(t), g(t), h(t))\, f'(t)\, dt.$$

Spunem că funcţia vectorială

$$\bar{v} : D \longrightarrow \mathbb{R}, \bar{v}(x, y, z) = P(x, y, z)\bar{i} + Q(x, y, z)\bar{j} + R(x, y, z)\bar{k}$$

este integrabilă în raport cu coordonatele de-a lungul curbei C, dacă funcţia P este integrabilă în raport cu x de-a lungul curbei C, funcţia Q este integrabilă în raport cu y de-a lungul curbei C, funcţia R este integrabilă în raport cu z de-a lungul curbei C. Integrala curbilinie în raport cu coordonatele a funcţiei vectoriale $\bar{v}$ este suma acestor integrale şi se notează:

$$\int_C P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz.$$

Teorema 5.6 Teorema de reducere a integralei curbilinii în raport cu coordonatele la o integrală Riemann.

Fie $D \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu şi

$$C : \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{cases}, \quad t \in [a, b]$$

o curbă netedă astfel încât imaginea sa să fie inclusă în D şi

$$\bar{v} : D \longrightarrow \mathbb{R}, \bar{v}(x, y, z) = P(x, y, z)\bar{i} + Q(x, y, z)\bar{j} + R(x, y, z)\bar{k}$$

o funcţie vectorială continuă pe D. Atunci $\bar{v}$ este integrabilă în raport cu coordonatele de-a lungul curbei C şi

$$\int_C P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz =$$

$$= \int_a^b [P(f(t), g(t), h(t))\, f'(t) + Q(f(t), g(t), h(t))\, g'(t) + R(f(t), g(t), h(t))\, h'(t)]\, dt.$$

5.7 Proprietăţi ale integralei curbilinii în raport cu coordonatele .

1. Fie $D \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu şi

$$C : \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{cases}, \quad t \in [a, b]$$

o curbă netedă astfel încât imaginea sa să fie inclusă în D, funcţiile vectoriale

$$\bar{v}_1 : D \longrightarrow \mathbb{R}, \bar{v}_1(x, y, z) = P_1(x, y, z)\bar{i} + Q_1(x, y, z)\bar{j} + R_1(x, y, z)\bar{k},$$

$$\bar{v}_2 : D \longrightarrow \mathbb{R}, \bar{v}_2(x, y, z) = P_2(x, y, z)\bar{i} + Q_2(x, y, z)\bar{j} + R_2(x, y, z)\bar{k}$$

şi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Dacă funcţiile vectoriale $\bar{v}_1, \bar{v}_2$ sunt integrabile în raport cu coordonatele de-a lungul curbei C, atunci şi funcţia vectorială $\alpha\bar{v}_1 + \beta\bar{v}_2$ este integrabilă în raport cu coordonatele de-a lungul curbei C şi

$$\int_C (\alpha P_1 + \beta P_2)(x,y,z)dx + (\alpha Q_1 + \beta Q_2)(x,y,z)dy + (\alpha R_1 + \beta R_2)(x,y,z)dz =$$

$$\alpha \int_C P_1(x,y,z)dx + Q_1(x,y,z)dy + R_1(x,y,z)dz +$$
$$+\beta \int_C P_2(x,y,z)dx + Q_2(x,y,z)dy + R_2(x,y,z)dz.$$

2. Fie $D \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu şi

$$C_1 : \begin{cases} x = f_1(t) \\ y = g_1(t) \\ z = h_1(t) \end{cases}, \ t \in [a,b]$$

$$C_2 : \begin{cases} x = f_2(t) \\ y = g_2(t) \\ z = h_2(t) \end{cases}, \ t \in [b,c]$$

curbe netede juxtapozabile, astfel încât imaginile lor să fie conţinute în D şi

$$\bar{v} : D \longrightarrow \mathbb{R}, \bar{v}(x,y,z) = P(x,y,z)\bar{i} + Q(x,y,z)\bar{j} + R(x,y,z)\bar{k}.$$

Dacă funcţia vectorială $\bar{v}$ este integrabilă în raport cu coordonatele de-a lungul curbelor C_1 şi C_2, atunci $\bar{v}$ este integrabilă în raport cu coordonatele de-a lungul curbei C, $C = C_1 \cup C_2$ şi

$$\int_C P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$= \int_{C_1} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz +$$
$$+ \int_{C_2} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz.$$

Definiţia 5.8 *Fie $D \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu $P, Q, R : D \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. C_1 şi C_2 curbe netede cu imaginile conţinute în D având aceeaşi extremitate iniţială şi aceeaşi extremitate finală. Dacă*

$$\int_{C_1} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$
$$= \int_{C_2} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

spunem că integrala funcţiei vectoriale

$$\bar{v}(x,y,z) = P(x,y,z)\bar{i} + Q(x,y,z)\bar{j} + R(x,y,z)\bar{k}$$

de-a lungul curbei C_1 nu depinde de drum şi vom nota

$$\int_{C_1} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$
$$= \int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x_1,y_1,z_1)} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

unde (x_0, y_0, z_0) reprezintă capătul iniţial al curbei C_1, iar (x_1, y_1, z_1) reprezintă capătul final al curbei C_1.

Teorema 5.9 *Fie $D \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu, $P, Q, R : D \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, C o curbă netedă cu imaginea conţinută în D. Integrala*

$$\int_C P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

nu depinde de drum dacă şi numai dacă există $F : D \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenţiabilă astfel încât

$$dF = Pdx + Qdy + Rdz$$

(forma diferenţială $\omega : D \to L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$

$$\omega(x,y,z) = P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

este exactă).

5.10 Observaţii

1. *Dacă* $\omega : D \longrightarrow L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$,

$$\omega(x,y,z) = P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

este o formă diferenţială exactă, atunci o primtivă a sa este dată de relaţia

$$F(x',y',z') = \int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x',y',z')} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

unde $(x_0, y_0, z_0) \in D$ *este un punct fix din* D, *iar* (x', y', z') *un punct oarecare din* D.

2. *Dacă* C *este o curbă netedă închisă şi forma diferenţială* $\omega : D \longrightarrow L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$,

$$\omega(x,y,z) = P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

este exactă, atunci

$$\int_C P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = 0.$$

Teorema 5.11 *Fie* $D \subset \mathbb{R}^3$ *un domeniu simplu conex,* $P, Q, R : D \longrightarrow \mathbb{R}$ *continue astfel încât există şi sunt continue derivatele parţiale*

$$\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial P}{\partial z}, \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial R}{\partial y}.$$

Forma diferenţială $\omega : D \longrightarrow L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$,

$$\omega = P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

este exactă dacă şi numai dacă

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}$$

în orice punct din D. *(forma diferenţială* ω *este închisă pe* D*).*

5.12 Aplicaţii.

1. Lucrul mecanic efectuat de forţa $\overrightarrow{F}$ de componente $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ şi $R(x,y,z)$ al cărei punct de aplicaţie descrie curba netedă C este dat de

$$L = \int_C P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz.$$

OBSERVAŢIE.

Fie C o curbă plană netedă

$$C : \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}, \ t \in [a,b]$$

şi $P, Q : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, unde D este un domeniu din $\mathbb{R}^2$ care conţine imaginea curbei C. Integrala curbilinic a funcţiei vectoriale

$$\bar{v}(x,y) = P(x,y)\bar{i} + Q(x,y)\bar{j}$$

în raport cu coordonatele de-a lungul curbei C se notează

$$\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

Toate proprietăţile enunţate mai sus se transpun fără modificări esenţiale, pentru această integrală.

2. Dacă D este un domeniu plan a cărui frontieră este o curbă netedă, $C = \partial D$, atunci

$$Aria(D) = \frac{1}{2}\int_C x\,dy - y\,dx.$$

Probleme rezolvate. **Să se calculeze următoarele integrale curbilinii în raport cu coordonatele**

1. $$\int_C (2a - y)\,dx + x\,dy$$

unde

$$C : \begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

şi $a > 0$.

Rezolvare.

Deoarece funcţiile $f(t) = a(t - \sin t)$ şi $g(t) = a(1 - \cos t)$ sunt de clasă C^1 pe $[0, 2\pi]$ şi funcţiile $P(x, y) = 2a - y$ şi $Q(x, y) = x$ sunt continue pe $\mathbb{R}^2$, se poate aplica teorema de reducere a integralei curbilinii în raport cu coordonatele la o integrală Riemann. Avem

$$I = \int_0^{2\pi} [(2a - a(1 - \cos t))a(1 - \cos t) + a(t - \sin t)a \sin t]\, dt =$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos^2 t + t \sin t - \sin^2 t) dt = a^2 \int_0^{2\pi} t \sin t\, dt =$$

$$= a^2 t(-\cos t)\Big|_0^{2\pi} + a^2 \int_0^{2\pi} \cos t\, dt = -2\pi a^2 + a^2 \sin t\Big|_0^{2\pi} = -2\pi a^2.$$

2. $$\int_C x\,dx + y\,dy + z\,dz$$

unde

$$C : \begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \quad t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \\ z = ct \end{cases}$$

şi $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$.

Rezolvare.

Deoarece funcţiile $f(t) = a \cos t$, $g(t) = b \sin t$ şi $h(t) = ct$ sunt de clasă C^1 pe $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, iar funcţiile $P(x, y, z) = x$, $Q(x, y, z) = y$ şi $R(x, y, z) = z$ sunt continue pe $\mathbb{R}^3$, se poate aplica teorema de reducere a integralei curbilinii în raport cu coordonatele la o integrală Riemann. Deci

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [a\cos t(-a\sin t) + b\sin t(b\cos t) + ctc]\,dt =$$

$$= (b^2 - a^2)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin t\,dt + c^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\,dt =$$

$$= (b^2 - a^2)\frac{\sin^2 t}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{c^2}{2}t^2\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}(b^2 - a^2) + \frac{c^2\pi^2}{8}.$$

3. $$\int_C \frac{dx}{x\sqrt{x+y}}$$

unde

$$C : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = t^2 \end{cases} \quad t \in [1, \infty).$$

Rezolvare.

Deoarece funcţiile $f(t) = 1 - t, g(t) = t^2$ sunt funcţii de clasă C^1 pe $[1, \infty)$, iar funcţiile

$$P(x, y) = \frac{1}{x\sqrt{x+y}} \text{ şi } Q(x, y) = 0$$

sunt continue pe $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ şi $I(C) \subset \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, se poate aplica teorema de reducere a integralei curbilinii în raport cu coordonatele la o integrală Riemann. Deci

$$I = \int_1^{\infty} \frac{1}{(1+t)\sqrt{t^2+t+1}}dt.$$

Dacă punem $\sqrt{t^2+t+1} = t + u$, atunci

$$t = \frac{u^2-1}{1-2u}, dt = \frac{-2u^2+2u-2}{(1-2u)^2}du, \sqrt{t^2+t+1} = \frac{-u^2+u-1}{1-2u}, 1 + t = \frac{u^2-2u}{1-2u}$$

şi $[1, \infty)$ se transformă în $\left[\sqrt{3} - 1, \frac{1}{2}\right)$. Obţinem

$$I = \int_{\sqrt{3}-1}^{\frac{1}{2}} \frac{1-2u}{u^2-2u}\frac{1-2u}{-u^2+u-1}\frac{2(-u^2+u-1)}{(1-2u)^2}du =$$

$$= \int_{\sqrt{3}-1}^{\frac{1}{2}} \frac{2}{u(u-2)} = \int_{\sqrt{3}-1}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{u-2} - \frac{1}{u}\right) du = ln\left|\frac{u-2}{u}\right|\Big|_{\sqrt{3}-1}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} ln\, 3.$$

4. $$\int_C z^2\, dx + x^2\, dy + y^2\, dz,$$

unde C este curba simplă care are drept imagine în spaţiu segmentul AB şi extremitatea iniţială în punctul A, cu A(-1,1,-1) şi B(1,2,1).

Rezolvare.

Ecuaţiile parametrice ale dreptei AB sunt

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z1}{2} = t,$$

de unde

$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = -1 + 2t \end{cases}.$$

O reprezen'are parametrică a curbei C este

$$C : \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = -1 + 2t \end{cases}, \ t \in [0, 1].$$

Deoarece funcţiile $f(t) = -1 + 2t$, $g(t) = 1 + t$ şi $h(t) = -1 + 2t$ sunt de clasă C^1 pe $[0, 1]$ şi funcţiile $P(x, y, z) = z^2$, $Q(x, y, z) = x^2$ şi $R(x, y, z) = y^2$ sunt continue pe $\mathbb{R}^3$, se poate aplica teorema de reducere a integralei curbilinii în raport cu coordonatele la o integrală Riemann. Avem

$$I = \int_0^1 [(-1 + 2t)^2 \cdot 2 + (-1 + 2t)^2 \cdot 1 + (1 + t)^2 \cdot 2]\, dt =$$

$$= \int_0^1 3(-1 + 2t)^2\, dt + 2 \int_0^1 (1 + t)^2\, dt = \frac{3}{2}\, \frac{(-1 + 2t)^3}{3}\Big|_0^1 + 2\frac{(1 + t)^3}{3}\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2}(1 + 1) + \frac{2}{3}(8 - 1) = \frac{17}{3}.$$

5. $$\int_C \frac{y\,dx - x\,dy}{9x^2 + 4y^2 + 4y},$$

unde C este curba simplă, închisă, orientată pozitiv, care are drept imagine în plan elipsa

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

şi ambele extremităţi în $A(2,0)$.

Rezolvare.

Avem

$$C : \begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 3\sin t \,, t \in [0, 2\pi]. \end{cases}$$

Deoarece funcţiile $f(t) = 2\cos t$, $g(t) = 3\sin t$ sunt de clasă C^1 pe $[0, 2\pi]$, iar funcţiile $P(x,y) = \frac{y}{9x^2+4y^2+4y}$, $Q(x,y) = \frac{x}{9x^2+4y^2+4y}$ sunt continue pe

$$\mathbb{R}^2 - \{(x,y)\,|\,9x^2 + 4y^2 + 4y = 0\} \text{ şi } I(C) \subset \mathbb{R}^2 - \{(x,y)\,|\,9x^2 + 4y^2 + 4y = 0\}$$

se poate aplica teorema de reducere a integralei curbilinii în raport cu coordonatele la o integrală Riemann.

Deci

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{36 + 12\cos t}[3\sin t(-2\sin t) - 2\cos t(3\cos t)]dt =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{dt}{3 + \cos t} = -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2 + 2\cos^2\frac{t}{2}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{1 + \cos^2\theta} = -\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{1 + \sin^2\theta} =$$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{1 + \sin^2\theta} = -\int_0^{\infty} \frac{1}{1 + \frac{u^2}{1+u^2}} \frac{1}{1 + u^2} du =$$

$$= -\int_0^{\infty} \frac{du}{1 + 2u^2} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\, arctg\sqrt{2}u \Big|_0^{\infty} = -\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

6. $$\int_C x\,dy - y\,dx,$$

unde C este curba simplă, închisă, orientată pozitiv, care are drept imagine în plan frontiera domeniului mărginit de curbele

$$x^2 + y^2 = 4, y = x\sqrt{3}, x = y\sqrt{3}, x \geq 0$$

şi ambele extremităţi în $O(0,0)$.

Rezolvare.

Pentru $x \geq 0$, cercul $x^2 + y^2 = 4$ intersectează dreapta $x = y\sqrt{3}$ în punctul $A(\sqrt{3}, 1)$, iar dreapta $y = x\sqrt{3}$ în punctul $B(1, \sqrt{3})$. Dreptele $x = y\sqrt{3}$ şi $y = x\sqrt{3}$ se intersectează în punctul $O(0,0)$. Considerăm următoarele curbe: curba C_1 care are drept imagine segmentul OA şi capătul iniţial în O; curba C_2 care are drept imagine arcul AB din cercul $x^2 + y^2 = 4$ şi capătul iniţial în A; curba C_3 care are drept imagine segmentul BO şi capătul iniţial în B.

Pentru aceste curbe putem considera următoarele reprezentări parametrice:

$$C_1 : \begin{cases} x = \sqrt{3}t \\ y = t \end{cases}, \ t \in [0, 1].$$

$$C_2 : \begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}, \ t \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right].$$

$$C_3 : \begin{cases} x = -t \\ y = -\sqrt{3}t \end{cases}, \ t \in [-1, 0].$$

C_1, C_2, C_3 sunt curbe netede. Perechile de curbe (C_1, C_2), (C_2, C_3), (C_3, C_1) sunt juxtapozabile şi $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$.

Funcţiile $P(x, y) = -y$ şi $Q(x, y) = x$ sunt continue pe $\mathbb{R}^2$. Rezultă că integrala din enunţ există şi din teorema de aditivitate a integralei curbilinii în raport cu coordonatele, avem

$$I = \int_{C_1} (x\,dy - y\,dx) + \int_{C_2} (x\,dy - y\,dx) + \int_{C_3} (x\,dy - y\,dx).$$

Pentru fiecare din aceste integrale sunt verificate condiţiile din teorema de reducere a integralei curbilinii în raport cu coordonatele la o integrală Riemann.

Deci

$$I_1 = \int_0^1 (\sqrt{3}t - t\sqrt{3})dt = 0$$

$$I_2 = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} [2\cos t(2\cos t) - 2\sin t(-2\sin t)]dt =$$

$$= 4\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} dt = 4\frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$$

$$I_3 = \int_{-1}^{1} [-t(-\sqrt{3}) + \sqrt{3}t(-1)]dt = 0$$

şi

$$I = 0 + \frac{2\pi}{3} + 0 = \frac{2\pi}{3}.$$

7. $$\int_C y\,dx + 2x\,dy,$$

unde C este curba simplă, închisă, orientată pozitiv, care are drept imagine frontiera domeniului $x^2+y^2-2x<0$ şi $x^2+y^2-2y<0$, şi ambele extremităţi în $O(0,0)$.

Rezolvare.

Cele două cercuri se intersectează în punctele $O(0,0)$ şi $A(1,1)$. Considerăm curbele: C_1 care are drept imagine arcul OA din cercul $x^2+y^2-2y=0$ şi capăt iniţial în O şi C_2 care are drept imagine arcul AO din cercul $x^2+y^2-2x=0$ şi capăt iniţial în A.

O parametrizare pe aceste curbe poate fi dată de

$$C_1 : \begin{cases} x = \cos t \\ y = 1 + \sin t \end{cases}, \ t \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$$

$$C_2 : \begin{cases} x = 1 + \cos t \\ y = \sin t \end{cases}, \ t \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right].$$

Curbele C_1 şi C_2 sunt netede, iar perechile de curbe (C_1, C_2) şi (C_2, C_1) sunt juxtapozabile şi $C = C_1 \cup C_2$.

Funcţiile $P(x,y) = y$ şi $Q(x,y) = 2x$ sunt continue pe $\mathbb{R}^2$. Atunci, din teorema de aditivitate a integralei curbilinii în raport cu coordonatele şi din teorema de reducere a integralei curbilinii în raport cu coordonatele la o integrală Riemann, avem

$$\int_{C_1} y\,dx + 2x\,dy + \int_{C_2} y\,dx + 2x\,dy =$$

$$= \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} [(1 + \sin t)(-\sin t) + 2\cos t(\cos t)]dt +$$

$$+ \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} [\sin t(-\sin t) + 2(1 + \cos t)(\cos t)]dt =$$

$$\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} 2\cos^2 t\,dt - \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \sin^2 t dt - \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \sin t dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2\cos^2 t dt - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^2 t dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2\cos t dt =$$

$$= + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^2 t\,dt + \cos t\Big|_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} + 2\sin t\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} + 1 - 2 = \frac{\pi}{2} - 1.$$

8. $$\int_C x^2 y\,dx + y^2\,dy,$$

unde C este curba simplă, închisă, orientată pozitiv, care are drept imagine în plan semicercul $x^2 + y^2 = 4, (y \geq x)$ reunit cu diametrul care îl determină şi ambele extremităţi în $O(0,0)$.

Rezolvare.

Dreapta $y = x$ intersectează cercul $x^2 + y^2 = 4$ în punctele

$$A(\sqrt{2}, \sqrt{2}) \text{ şi } B(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}).$$

Considerăm următoarele curbe:

-Curba C_1 care are drept imagine segmentul OA şi capătul iniţial în O

-Curba C_2 care are drept imagine arcul AB din cercul $x^2 + y^2 = 4$ şi capătul iniţial în A

-Curba C_3 care are drept imagine segmentul BO şi capătul iniţial în B.

O reprezentare parametrică a acestor curbe poate fi:

$$C_1 : \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases}, \; t \in \left[0, \sqrt{2}\right]$$

$$C_2 : \begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}, \; t \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$$

$$C_3 : \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases}, \; t \in \left[-\sqrt{2}, 0\right].$$

Curbele C_1, C_2, C_3 sunt netede, iar perechile de curbe $(C_1, C_2), (C_2, C_3), (C_3, C_1)$ sunt juxtapozabile şi $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$. Funcţiile $P(x,y) = x^2y$, $Q(x,y) = xy^2$ sunt continue pe $\mathbb{R}^2$.

Din teorema de aditivitate a integralei curbilinii în raport cu coordonatele şi teorema de reducere a integralei curbilinii în raport cu coordonatele la o integrală Riemann, avem

$$I = \int_{C_1} x^2y\,dx + y^2\,dy + \int_{C_2} x^2y\,dx + y^2\,dy + \int_{C_3} x^2y\,dx + y^2\,dy =$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}} (t^3+t^2)dt + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} [4\cos^2 t \cdot 2\sin t(-2\sin t) + 4\sin^2 t(2\cos t)]dt + \int_{-\sqrt{2}}^{0} (t^3+t^2)dt =$$

$$= \left(\frac{t^4}{4} + \frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{2}} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (-16\cos^2 t\sin^2 t + 8\cos t\sin^2 t)dt + \left(\frac{t^4}{4} + \frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_{-\sqrt{2}}^{0} =$$

$$= \frac{4}{4} + \frac{2\sqrt{2}}{3} - 4\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \sin^2 2t\, dt + 8\frac{\sin^3 t}{3}\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} - \frac{4}{4} + \frac{2\sqrt{2}}{3} =$$

$$= \frac{4\sqrt{2}}{3} - 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}} \sin^2 t\, dt - \frac{16}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{4\sqrt{2}}{3} - 2\cdot 4\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2} = -2\pi.$$

9. $$\int_C (y-2z)dx + (x-z)dy + (2x-y)dz,$$

unde curba C este o curbă închisă, simplă, orientată pozitiv, care are drept imagine cercul de intersecţie al sferei $x^2+y^2+z^2=a^2$ cu planul $x-y+z=0$ şi extremităţile în $A\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$, $a>0$.

Rezolvare.

Proiecţia cercului pe planul xOy se obţine eliminând pe z între ecuaţiile $x^2+y^2+z^2=a^2$ şi $x-y+z=0$. Proiecţia este o elipsă şi are ecuaţia

$$x^2+y^2+(x-y)^2=a^2$$

sau

$$\left(x-\frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}y}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2}.$$

Punând

$$x-\frac{y}{2} = \frac{a}{\sqrt{2}}\cos t, \quad \frac{\sqrt{3}y}{2} = \frac{a}{\sqrt{2}}\sin t, \; t\in[t_0, t_0+2\pi]$$

obţinem o reprezentare parametrică a curbei C.

$$C: \begin{cases} x = \frac{a}{\sqrt{2}}\cos t + \frac{a}{\sqrt{6}}\sin t \\ y = \frac{2a}{\sqrt{6}}\sin t \\ z = \frac{a}{\sqrt{6}}\sin t - \frac{a}{\sqrt{2}}\cos t \end{cases}, \quad t\in[0,2\pi].$$

Funcțiile

$$f(t) = \frac{a}{\sqrt{2}} cos\, t + \frac{a}{\sqrt{6}} sin\, t\,,\; g(t) = \frac{2a}{\sqrt{6}} sin\, t\,,\; h(t) = \frac{a}{\sqrt{6}} sin\, t - \frac{a}{\sqrt{2}} cos\, t$$

sunt de clasă C^1 pe $[0, 2\pi]$, iar funcțiile

$$P(x,y,z) = y - 2z, Q(x,y,z) = x - z, R(x,y,z) = 2x - y$$

sunt continue pe $\mathbb{R}^3$ ceea ce permite aplicarea teoremei de reducere a integralei curbilinii în raport cu coordonatele la o integrală Riemann. Deci

$$I = \int_0^{2\pi} \left[\frac{2a}{\sqrt{2}} cos\, t \left(-\frac{a}{\sqrt{2}} sin\, t + \frac{a}{\sqrt{6}} cos\, t \right) - \right.$$

$$\left. - \frac{2a}{\sqrt{2}} cos\, t \cdot \frac{2a}{\sqrt{6}} cos\, t + \frac{2a}{\sqrt{2}} cos\, t \left(\frac{a}{\sqrt{6}} cos\, t + \frac{a}{\sqrt{2}} sin\, t \right) \right] =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(-a^2 cos\, t\, sin\, t + \frac{a^2}{\sqrt{3}} cos^2 t - \frac{2a^2}{\sqrt{3}} cos^2 t + \frac{a^2}{\sqrt{3}} cos^2 t + a^2 cos\, t\, sin\, t \right) dt = 0.$$

10. **Să se calculeze lucrul mecanic al forței $\overrightarrow{F}$ de componente $P(x,y) = y^3 - x^2 y$ și $Q(x,y) = x^3 - xy^2$ al cărei punct de aplicație descrie segmentul de dreaptă OA,arcul $\overset{\frown}{AB}$ din cercul de centru $O(0,0)$ și rază 2, segmentul de dreaptă BO, unde $O(0,0), A(2,0), B(\sqrt{2}, \sqrt{2})$.**

Rezolvare.

Notăm cu C curba plană a cărei imagine este $I(C) = [OA] \cup (\overset{\frown}{AB}) \cup [BO]$.

Descompunând curba C în curbele C_1, C_2, C_3 astfel încât

$I(C_1) = [OA]$ cu capătul inţial în O,

$I(C_2) = (\overset{\frown}{AB})$ cu capătul inţial în A şi

$I(C_3) = [BO]$ cu capătul iniţial în B.

Avem

$$C_1 : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases}, \ t \in [0, 2].$$

$$C_2 : \begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}, \ t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right],$$

$$C_3 : \begin{cases} x = -t \\ y = -t \end{cases}, \ t \in \left[-\sqrt{2}, 0\right].$$

Deoarece curbele C_1, C_2, C_3 sunt netede, iar perechile de curbe (C_1, C_2), (C_2, C_3), (C_3, C_1) sunt juxtapozabile, deci $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$ şi funcţiile $P(x,y) = y^3 - x^2y$, $Q(x,y) = x^3 - xy^2$ sunt continue pe $\mathbb{R}^3$, avem că

$$L = \int_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy =$$

$$= \int_{C_1} (y^3 - x^2y)\,dx + (x^3 - xy^2)\,dy + \int_{C_2} (y^3 - x^2y)\,dx + (x^3 - xy^2)\,dy +$$

$$+ \int_{C_3} (y^3 - x^2y)\,dx + (x^3 - xy^2)\,dy =$$

$$= \int_0^2 0dt + \int_0^{\frac{\pi}{4}} [(8sin^3t - 8cos^2tsint)(-2sint) + (8cos^3t - 8sin^2tcost)(2cost)]dt +$$

$$+ \int_{-\sqrt{2}}^0 0dt = 16\int_0^{\frac{\pi}{4}} [sin^2tcos2t + cos^2tcos2t]dt = 16\int_0^{\frac{\pi}{4}} cos2tdt = 16\frac{sin2t}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 8.$$

Constatând în prealabil că expresia de sub semnul integralei este o diferenţială exactă, să se calculeze următoarele integrale curbilinii, în care s-au specificat doar capetele curbei.

11. $$\int_{(1,2)}^{(-3,-2)} \frac{y^2}{(x-y)^2}dx - \frac{x^2}{(x-y)^2}dy,$$

luată pe o curbă a cărei imagine nu intersectează prima bisectoare.

Rezolvare.

Avem

$$P(x,y) = \frac{y^2}{(x-y)^2}, Q(x,y) = \frac{-x^2}{(x-y)^2} \text{ pentru } x \neq y.$$

Mulţimea de definiţie nu formează un domeniul simplu conex. Considerăm $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x - y < 0\} \subset \mathbb{R}^2$ care este un domeniu simplu conex. Deoarece $A(1,2) \in D$ şi $B(-3,-2) \in D$, $P,Q \in C^1(D)$ şi

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{2xy}{(x-y)^3}$$

integrala nu depinde de drum. Considerăm curba C care are drept imagine reuniunea segmentelor de dreaptă $[AC]$ şi $[CB]$, unde

$$A(1,2), C(-3,\quad 2), B(-3,-2), I(C) \subset D.$$

Descompunem curba C în curbele C_1, C_2 care au imaginea segmentul $[AB]$ cu capătul iniţial în A, respectiv segmentul $[CB]$ cu capătul iniţial în C.

$$C_1 : \begin{cases} x = -t \\ y = 2 \end{cases}, \; t \in [-1,3].$$

$$C_2 : \begin{cases} x = -3 \\ y = -t \end{cases}, \; t \in [-2,2].$$

Perechea de curbe (C_1, C_2) este juxtapozabilă, deci $C = C_1 \cup C_2$. Din proprietatea de aditivitate avem:

$$I = \int_{C_1} \frac{y^2}{(x-y)^2}dx - \frac{x^2}{(x-y)^2}dy + \int_{C_2} \frac{y^2}{(x-y)^2}dx - \frac{x^2}{(x-y)^2}dy =$$

$$= \int_{-1}^{3} \left[\frac{-4}{(t+2)^2} - \frac{t^2}{t+2}\cdot 0\right] dt + \int_{-2}^{2} \left[\frac{t^2}{(t-3)^2}\cdot 0 + \frac{9}{(t-3)^2}\right] dt =$$

$$= \left.\frac{4}{t+2}\right|_{-1}^{3} - \left.\frac{9}{t-3}\right|_{-2}^{2} = \frac{4}{5} - 4 + \frac{9}{1} - \frac{9}{5} = 4.$$

12. $$\int_{(-1,3,1)}^{(2,6,3)} \frac{y}{z}dx + \frac{x}{z}dy - \frac{xy}{z^2}dz,$$

luată pe o curbă a cărei imagine nu intersectează planul $z = 0$.

Rezolvare.

Considerăm

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Mulţimea D este un domeniu simplu conex din $\mathbb{R}^3$. Funcţiile

$$P(x, y, z) = \frac{y}{z}, Q(x, y, z) = \frac{x}{y}, R(x, y, z) = \frac{-xy}{z^2}$$

sunt de clasă C^1 pe D. Deoarece

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{z}, \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} = -\frac{x}{z^2}, \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z} = -\frac{y}{z^2}$$

pe D şi $A(-1, 3, 1) \in D$ şi $B(2, 6, 3) \in D$ integrala nu depinde de drumul ales. Considerăm curba C a cărei imagine este reuniunea segmentelor de dreaptă $[AA_1]$, $[A_1A_2]$, $[A_2B]$ unde

$$A(-1, 3, 1), A_1(2, 3, 1), A_2(2, 6, 1), B(2, 6, 3).$$

Descompunem curba C în curbele C_1, C_2, C_3 a căror imagini sunt

segmentul $[AA_1]$ cu capătul iniţial în A,

respectiv segmentul $[A_1A_2]$ cu capătul iniţial în A_1,

respectiv segmentul $[A_2B]$ cu capătul iniţial în A_2.

Avem:

$$C_1 : \begin{cases} x = t \\ y = 3 \\ z = 1 \end{cases}, \ t \in [-1, 2].$$

$$C_2 : \begin{cases} x = 2 \\ y = t \\ z = 1 \end{cases} , \ t \in [3,6] .$$

$$C_3 : \begin{cases} x = 2 \\ y = 6 \\ z = t \end{cases} , \ t \in [1,3] .$$

Perechile de curbe (C_1, C_2), (C_2, C_3) sunt juxtapozabile, deci $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$. Din proprietatea de aditivitate avem:

$$I = \int_{C_1} \frac{y}{z} dx + \frac{x}{z} dy - \frac{xy}{z^2} dz + \int_{C_2} \frac{y}{z} dx + \frac{x}{z} dy - \frac{xy}{z^2} dz + \int_{C_3} \frac{y}{z} dx + \frac{x}{z} dy - \frac{xy}{z^2} dz =$$

$$= \int_{-1}^{2} 3dt + \int_{3}^{6} 2dt - \int_{1}^{3} \frac{12}{t^2} dt = 3t\Big|_{-1}^{2} + 2t\Big|_{3}^{6} - \frac{12}{t}\Big|_{1}^{3} = 9 + 6 + 12\left(\frac{1}{3} - 1\right) = 15 - 8 = 7.$$

Verificând că următoarele forme diferenţiale sunt forme diferenţiale exacte să se determine primitivele lor.

13. $$\omega(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2} dx + \frac{-x}{x^2+y^2} dy, \text{ definită pentru } x < 0.$$

Rezolvare.

Mulţimea $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0\} \subset \mathbb{R}^2$ este un domeniu simplu conex. Funcţiile

$$P(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}, Q(x,y) = \frac{-x}{x^2+y^2}$$

sunt de clasă C^1 pe D. Deoarece

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

forma diferenţială este exactă, deci există $f \in C^2(D)$ astfel încât $df = \omega$ şi

$$f(x', y') = \int_{(-1,0)}^{(x',y')} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

unde integrala este luată pe o curbă rectificabilă cu imaginea în D, capătul iniţial în $A(-1,0)$ şi capătul final în $B(x', y')$. Considerăm curbele C_1, C_2 care au drept imagini segmentele de dreaptă $[AA_1]$ cu capătul iniţial în A, respectiv segmentul $[A_1B]$ cu capătul iniţial în A_1, unde $A_1(x', 0)$. Avem

$$C_1 : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases}, \ t \in [-1, x'].$$

$$C_2 : \begin{cases} x = x' \\ y = t \end{cases}, \ t \in [0, y'].$$

Perechea de curbe (C_1, C_2) este juxtapozabilă. Considerăm $C = C_1 \cup C_2$. Curba C este rectificabilă, are imaginea conţinută în D şi leagă punctele A şi B.

$$f(x', y') = \int_{(-1,0)}^{(x',y')} \frac{y}{x^2+y^2}dx - \frac{x}{x^2+y^2}dy = \int_C \frac{y}{x^2+y^2}dx - \frac{x}{x^2+y^2}dy =$$

$$= \int_{C_1} \frac{y}{x^2+y^2}dx - \frac{x}{x^2+y^2}dy + \int_{C_2} \frac{y}{x^2+y^2}dx - \frac{x}{x^2+y^2}dy =$$

$$= \int_{-1}^{x} 0dt + \int_0^{y'} \frac{-x'}{x'^2+t^2}dt = -arctg\frac{t}{x'}\Big|_0^{y'} = -arctg\frac{y'}{x'}.$$

Deci

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}, f(x,y) = -arctg\frac{y}{x}.$$

14. $$\omega(x,y,z) = y(y+2z)dx + 2x(y+z)dy + 2xydz.$$

Rezolvare.

Deoarece

$$P(x,y,z) = y(y+2z), Q(x,y,z) = 2x(y+z) \text{ şi } R(x,y,z) = 2xy$$

sunt funcţii de clasă C^1 pe $\mathbb{R}^3$ şi

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 2y + 2z, \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} = 2x, \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z} = 2y$$

forma diferenţială ω este o formă diferenţială exactă, deci există funcţia $f \in C^2(\mathbb{R}^3)$ astfel încât $df = \omega$ şi

$$f(x', y', z') = \int_{(0,0,0)}^{(x',y',z')} y(y+2z)dx + 2x(y+z)dy + 2xydz$$

unde integrala curbilinie este luată pe o curbă rectificabilă a cărei imagine este conţinută în $\mathbb{R}^3$ şi leagă punctele $O(0,0,0)$ şi $A(x', y', z')$. Considerăm curbele C_1, C_2, C_3 care au drept imagini segmentele de dreaptă $[OA_1]$ cu capătul iniţial în O,

respectiv $[A_1A_2]$ cu capătul iniţial în A_1,

respectiv $[A_2A]$ cu capătul iniţial în A_2.

Avem

$$C_1 : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}, \ t \in [0, x'].$$

$$C_2 : \begin{cases} x = x' \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}, \ t \in [0, y'].$$

$$C_3 : \begin{cases} x = x' \\ y = y' \\ z = t \end{cases}, \ t \in [0, z'].$$

Perechile de curbe (C_1, C_2), (C_2, C_3) sunt juxtapozabile. Fie $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$. Curba C este rectificabilă, are imaginea conţinută în $\mathbb{R}^3$ şi leagă punctele O şi A.

Atunci

$$f(x',y',z') = \int_C y(y+2z)dx + 2x(y+z)dy + 2xydz =$$

$$= \int_{C_1} y(y+2z)dx + 2x(y+z)dy + 2xydz + \int_{C_2} y(y+2z)dx + 2x(y+z)dy + 2xydz +$$

$$+ \int_{C_3} y(y+2z)dx + 2x(y+z)dy + 2xydz =$$

$$= \int_0^{x'} 0dt + \int_0^{y'} 2x't\,dt + \int_0^{z'} 2x'y'dt = 2x'\frac{t^2}{2}\Big|_0^{y'} + 2x'y't\Big|_0^{z'} = x'y'^2 + 2x'y'z'.$$

Deci

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, f(x,y,z) = xy^2 + 2xyz.$$

Să se afle ariile mărginite de următoarele curbe:

15. $$C : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Rezolvare.

Considerăm parametrizarea

$$C : \begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = b\sin\theta \end{cases}, \ \theta \in [0, 2\pi].$$

$$A = \frac{1}{2}\int_C x\,dy - y\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(ab\cos^2\theta + ab\sin^2\theta)d\theta = \frac{1}{2}abt\Big|_0^{2\pi} = \pi ab.$$

16.

$$C : \begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ x^2 = 6y \\ y \geq 0 \end{cases}.$$

Rezolvare.

Cercul $x^2 + y^2 = 16$ intersectează parabola $x^2 = 6y$ în $A(2\sqrt{3}, 2)$ şi $B(-2\sqrt{3}, 2)$.

Descompunem curba C în curbele simple C_1, C_2 care au ca imagini arcul din cercul $x^2 + y^2 = 16$, cuprins între A şi B cu capătul iniţial în A, respectiv arcul din parabola $6y = x^2$ cuprins între B şi A cu capătul iniţial in B. Avem

$$C_1 : \begin{cases} x = 4\cos t \\ y = 4\sin t \end{cases}, \ t \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right].$$

$$C_2 : \begin{cases} x = t \\ y = \frac{1}{6}t^2 \end{cases}, \ t \in \left[-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}\right].$$

şi $C = C_1 \cup C_2$. Deci

$$A = \frac{1}{2}\int_C xdy - ydx = \frac{1}{2}\int_{C_1} xdy - ydx + \frac{1}{2}\int_{C_2} xdy - ydx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{2\pi}{3}} (16\cos^2 t + 16\sin^2 t)dt + \frac{1}{2}\int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} \left(\frac{1}{3}t^2 - \frac{1}{6}t^2\right) dt =$$

$$= 8\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{6}\frac{t^3}{3}\Big|_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} = 4\pi + \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

17. $x^3 + y^3 - 3axy = 0; x \geq 0, y \geq 0, a > 0.$

Rezolvare.

Pentru a determina o parametrizare pe foliul lui Descartes vom determina punctele de intersecţie ale curbei cu dreptele $y = tx$. Avem

$$\begin{cases} x = \frac{3at}{1+t^3} \\ y = \frac{3at^2}{1+t^3} \end{cases}.$$

Deci

$$C : \begin{cases} x = \frac{3at}{1+t^3} \\ y = \frac{3at^2}{1+t^3} \end{cases}, \ t \in [0, \infty).$$

Atunci

$$A = \frac{1}{2}\int_C xdy - ydx = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \left[\frac{3at}{1+t^3}\frac{3at(2-t^3)}{(1+t^3)^2} - \frac{3at^2}{1+t^3}\frac{3a(1-2t^3)}{(1+t^3)^2}\right] dt =$$

$$\frac{9a^2}{2}\int_0^\infty \frac{2t^2-t^5-t^2+2t^5}{(1+t^3)^3}dt = \frac{9a^2}{2}\int_0^\infty \frac{t^2+t^5}{(1+t^3)^3}dt =$$
$$= \frac{9a^2}{2}\int_0^\infty \frac{t^2}{(1+t^3)^2} = \frac{3a^2}{2}\frac{-1}{1+t^3}\Big|_0^\infty = \frac{3a^2}{2}.$$

Probleme propuse.

Să se calculeze următoarele integrale curbilinii, pentru curbele precizate:

1. $$\int_C y^2\,ds, (C)\begin{cases} x = a(t-\sin t) \\ y = a(1-\cos t)\end{cases}, \ t\in[0,2\pi].$$

2. $$\int_C \left(x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{4}{3}}\right)\,ds, (C)\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t\end{cases}, \ t\in[0,2\pi].$$

3. $$\int_C \frac{dx}{y} - \sqrt{2x}dy, (C)x^2+y^2-2x=0, y\geq 0.$$

4. $$\int_C \frac{ydx}{x^2+y^2}, (C)x^2+\frac{y^2}{4}-1=0.$$

5. $$\int_{AB} \frac{dy}{x+4}, (C)\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-1=0, A(3,0), B(0,2).$$

6. $$\int_C (x^2-2xy)dx+(y^2-2xy)dy, (C)y=x^2, -1\leq x\leq 1.$$

7. $$\int_C \frac{dx}{x(x^2+y^2)}, (C)4x^2+y^2-4=0.$$

8.
$$\int_C (y^2+z^2)dx+(z^2+x^2)dy+(x^2+y^2)dz, (C)\begin{cases} x^2+y^2+z^2-4ax=0 \\ x^2+y^2-2ax=0\end{cases}, a>0$$

(curba lui Viviani).

9. $$\int_C y^2\,dx+z^2\,dy+x^2\,dz, (C)\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ x^2+y^2-ay=0\end{cases}.$$

10. $$\int_C \frac{dx}{(x^2+y^2+4)(x+1)}, (C)y^2=4x, y\geq 0.$$

Capitolul 6

Integrale duble

Teorie

Definiţia 6.1 *Fie $P \subseteq \mathbb{R}$.Dacă P este reuniune finită de dreptunghiuri cu laturile paralele cu axele de coordonate astfel încât oricare două dintre ele nu au puncte interioare comune,*

$$P = \bigcup_{i=1}^{n} D_i,$$

atunci P are arie şi

$$aria(P) = \sum_{i=1}^{n} aria(D_i).$$

Fie $D \subseteq \mathbb{R}^2$ un domeniu compact. Numerele

$$ariaint(D) = sup\{aria(P)/P \subseteq D\}$$

$$ariaext(D) = inf\{aria(P)/P \supseteq D\}$$

se numesc respectiv, aria interioară şi aria exterioară ale lui D. Dacă $ariaint(D) = ariaext(D)$ vom spune că domeniul D are arie şi vom nota această valoare cu $aria(D)$. În continuare vom presupune că toate domeniile au arie.

Definiţia 6.2 *Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu compact şi $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, o funcţie continuă. Fie $\Delta : D_1, D_2, \ldots, D_n$ o descompunere a domeniului D (adică D_i sunt domenii compacte, $\forall i = \overline{1,n}$, oricare două nu au puncte comune şi $D = D_1 \cup D_2 \cup \ldots \cup D_n$).*

$$||\Delta|| = \max_{i=\overline{1,n}}\{sup\{\sqrt{(x-\tilde{x})^2 + (y-\tilde{y})^2}/(x,y),(\tilde{x},\tilde{y}) \in D_i\}\}$$

şi

$$S_\Delta = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i) aria D_i, (\xi_i,\eta_i) \in D_i, i = \overline{1,n}$$

este suma Riemann asociată funcţiei f, domeniului D, descompunerii Δ şi punctelor $(\xi_i,\eta_i) \in D_i, i = \overline{1,n}$.Dacă există $I \in \mathbb{R}$ astfel încât pentru orice descompunere Δ cu $||\Delta|| \longrightarrow 0$ şi $\forall(\xi_i,\eta_i) \in D_i, i = \overline{1,n}$,

$$\lim_{||\Delta|| \longrightarrow 0} S_\Delta = I,$$

vom spune că funcţia f este integrabilă Riemann, iar numărul I se numeşte integrala Riemann a funcţiei f pe domeniul D şi vom nota

$$I = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy.$$

6.3 Proprietăţi ale integralei duble

1. *Proprietatea de omogenitate:*

$$\iint_D \alpha f(x,y)\,dx\,dy = \alpha \iint_D f(x,y)\,dx\,dy, \alpha \in \mathbb{R}$$

2. *Proprietatea de liniaritate*

$$\iint_D (f(x,y) + g(x,y))\,dx\,dy = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy + \iint_D g(x,y)\,dx\,dy$$

3. *Proprietatea de aditivitate a integralei ca funcţie de domeniu.*

Dacă $D = D_1 \cup D_2$, unde D, D_1 şi D_2 sunt domenii compacte iar D_1 şi D_2 nu au puncte interioare comune, atunci

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint_{D_2} f(x,y)\,dx\,dy$$

4. *Dacă $f(x,y) \geq 0, \forall (x,y) \in D$, atunci*

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy \geq 0$$

5. *Proprietatea de monotonie a integralei duble.*

Dacă $f(x,y) \leq g(x,y), \forall (x,y) \in D$, atunci

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy \leq \iint_D g(x,y)\,dx\,dy$$

Teorema 6.4 Teoremă de medie pentru integrala dublă. *Dacă f este continuă pe domeniul compact D, atunci există un punct $(\xi, \eta) \in D$ astfel încât*

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = f(\xi,\eta) aria\, D$$

Definiţia 6.5 *Un domeniu compact din $\mathbb{R}^2$ este simplu în raport cu axa Oy, dacă este definit de inegalităţile*

$$a \leq x \leq b \text{ şi } \varphi(x) \leq y \leq \psi(x),$$

unde φ şi ψ sunt continue pe $[a,b]$ şi

$$\varphi(x) < \psi(x) \text{ pentru } a < x < b.$$

Un domeniu compact din $\mathbb{R}^2$ este simplu în raport cu axa Ox dacă este definit de inegalităţile

$$c \leq y \leq d \text{ şi } \tilde{\varphi}(y) \leq x \leq \tilde{\psi}(y),$$

unde $\tilde{\varphi}$ şi $\tilde{\psi}$ sunt continue pe $[c,d]$ şi

$$\tilde{\varphi}(y) < \tilde{\psi}(y) \text{ pentru } c < x < d.$$

Teorema 6.6 Teorema de descompunere a integralei duble in integrale simple

a)Fie $D \subseteq \mathbb{R}^2$ un domeniu simplu în raport cu Oy,

$$D : \begin{cases} a \leq x \leq b \\ \varphi(x) \leq y \leq \psi(x) \end{cases}$$

şi $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie continuă. Atunci

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

b)Fie $D \subseteq \mathbb{R}^2$ un domeniu simplu în raport cu Ox,

$$D : \begin{cases} c \leq y \leq d \\ \tilde{\varphi}(y) \leq x \leq \tilde{\psi}(y) \end{cases}$$

şi $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie continuă. Atunci

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_{\tilde{\varphi}(y)}^{\tilde{\psi}(y)} f(x,y)\,dx \right) dy$$

6.7 Observaţie

Fie $D \in \mathbb{R}^2$ un domeniu compact.

1. *Dacă orice paralelă la axa Oy taie frontiera lui D în cel mult două puncte atunci D este simplu în raport cu axa Oy.*

2. *Dacă orice paralelă la axa Ox taie frontiera lui D în cel mult două puncte, atunci D este simplu în raport cu axa Ox.*

3. *Dacă D nu este simplu nici în raport cu axa Oy, nici în raport cu axa Ox, atunci prin paralele la axele de coordonate descompunem domeniul D în domenii simple şi apoi aplicăm proprietatea de aditivitate a integralei duble ca funcţie de domeniu.*

Teorema 6.8 Schimbarea de variabile la integrala dublă.

Fie în planul uOv un domeniu compact D', $\Gamma' = FrD'$, reuniune finită de curbe rectificabile şi

$$T : \begin{cases} x = \varphi(u,v) \\ y = \psi(u,v) \end{cases}, \ (u,v) \in D'$$

o transformare de la planul uOy la planul xOy regulată pe D'. Dacă $D = T(D')$ şi $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ este o funcţie continuă, atunci

$$\iint_D f(x,y)\, dx\, dy = \iint_{D'} f(\varphi(u,v), \psi(u,v)) \left| \frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)} \right| du\, dv$$

6.9 Observaţie. *Scopul principal al schimbării de variabilă este acela de a inlocui domeniul de integrare cu un alt domeniu mai simplu. Nu se pot da criterii riguroase pentru a stabili dacă un domeniu este mai simplu decât altul. Nu există nici o metodă generală care să rezolve problema alegerii cât mai judicioase a schimbării de variabile.*

6.10 Schimbari de variabile des utilizate

1. Transformarea de la coordonate polare la coordonate carteziene.

$$T : \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}, \ \rho \geq 0, \theta \in [0, 2\pi]$$

$$\frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)} = \rho$$

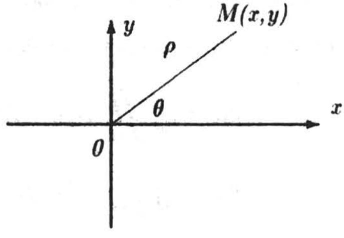


Figura 1

2. Transformarea de la coordonate polare generalizate la coordonate carteziene.

$$T : \begin{cases} x = a\rho\cos\theta \\ y = b\rho\sin\theta \end{cases}, \ \rho \geq 0, \theta \in [0, 2\pi]$$

unde $a > 0, b > 0$,

$$\frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)} = ab\rho$$

Teorema 6.11 Formula lui Riemann-Green.

Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ *un domeniu compact a cărui frontieră* $\Gamma = FrD$ *este o curbă simplă închisă şi rectificabilă şi funcţiile* $P, Q : D \longrightarrow \mathbb{R}$ *continue. Dacă există*

$$\frac{\partial P}{\partial y} \ \text{şi} \ \frac{\partial Q}{\partial x}$$

şi sunt continue pe D, *atunci*

$$\int_\Gamma P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

6.12 Aplicaţii

1. Dacă $D \subset \mathbb{R}^2$ *este un domeniu compact, atunci aria domeniului* D *este dată de*

$$A(D) = \iint_D dx\,dy$$

2. Masa unei plăci plane care ocupă domeniul D *de densitate* $\rho(x,y), (x,y) \in D$, ρ *continuă este dată de*

$$M = \iint_D \rho(x,y)\,dx\,dy$$

3. Coordonatele centrului de greutate ale unei plăci plane care ocupă domeniul D *de densitatea* $\rho(x,y), (x,y) \in D, \rho$ *continuă sunt date de*

$$x_G = \frac{1}{M}\iint_D x\rho(x,y)\,dx\,dy$$

$$y_G = \frac{1}{M}\iint_D y\rho(x,y)\,dx\,dy$$

4. Momentele de inerţie ale unei plăci plane care ocupă domeniul D de densitatea $\rho(x,y),(x,y) \in D, \rho$ continuă sunt date de

$$I_O = \iint_D (x^2 + y^2)\rho(x,y)\,dx\,dy$$

$$I_{Ox} = \iint_D y^2\rho(x,y)\,dx\,dy$$

$$I_{Oy} = \iint_D x^2\rho(x,y)\,dx\,dy$$

Probleme rezolvate.

I. Să se calculeze:

1. $$\iint_D \sqrt{xy}\,dx dy,$$

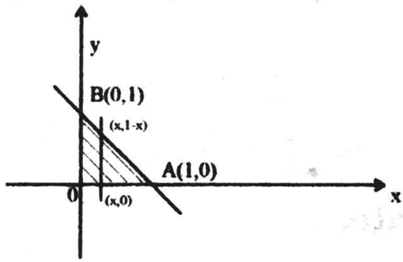
unde D este domeniu mărginit de dreptele $x + y = 1, y = 0, x = 0$

Rezolvare.

Domeniul D este simplu în raport cu axa Oy. Proiecţia domeniului D pe axa Ox este segmentul OA. Atunci domeniul D este definit de inegalităţile

$$D : \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1 - x \end{cases}.$$

Figura 2



Funcţiile $\varphi(x) = 0$ şi $\psi(x) = 1 - x$ sunt continue pe $[0,1]$ şi $\varphi(x) < \psi(x)$ dacă $0 < x < 1$. Deoarece şi funcţia

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}, f(x,y) = \sqrt{xy}$$

este continuă, putem aplica teorema 6.6. Deci

$$\iint_D \sqrt{xy}\, dx\, dy = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \sqrt{xy}\, dy \right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left(x^{\frac{1}{2}} \frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} \right) \Big|_0^{1-x} dx = \frac{2}{3} \int_0^1 x^{\frac{1}{2}} (1-x)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{2}{3} B\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right) =$$

$$= \frac{2}{3} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma(4)} = \frac{2}{3} \frac{\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{3!} = \frac{\pi}{24}$$

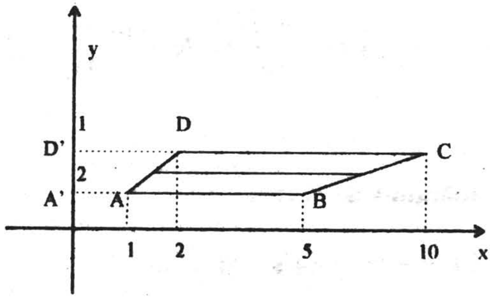
2. $$\iint_D \sqrt{xy - y^2}\, dx\, dy,$$

unde domeniul D este patrulaterul cu vârfurile în punctele

$$A(1,1), B(5,1), C(10,2), D(2,2).$$

Rezolvare.

Figura 3



Domeniul D este simplu în raport cu axa Ox. Proiecţia lui D pe axa Oy este segmentul $A'D'$. Atunci D este definit de inegalităţile

$$D: \begin{cases} 1 \leq y \leq 2 \\ \varphi(y) \leq x \leq \psi(y) \end{cases},$$

unde pentru a determina funcţiile φ şi ψ trebuie să scriem ecuaţiile dreptelor AD, respectiv BC.

$$AD: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} \Rightarrow AD: x - y = 0$$

şi

$$BC: \frac{x-5}{5} = \frac{y-1}{1} \Rightarrow BC: x - 5y = 0.$$

Deci $\varphi(y) = y$ şi $\psi(y) = 5y$. Funcţiile φ şi ψ sunt continue pe $[1,2]$ şi $\varphi(y) < \psi(y)$ pentru $1 < y < 2$. Deoarece şi funcţia

$$f: D \longrightarrow \mathbb{R}, f(x,y) = \sqrt{xy - y^2}$$

este continuă, pentru a calcula integrala putem aplica teorema 6.6. Atunci

$$\iint_D \sqrt{xy - y^2}\, dx\, dy = \int_1^2 \left(\int_y^{5y} \sqrt{xy - y^2} dx \right) dy =$$

$$= \int_1^2 \left(\sqrt{y} \frac{2}{3} \sqrt{(x-y)^3} \Big|_y^{5y} \right) dy = \frac{2}{3} \int_1^2 8y^2 dy = \frac{16}{3} \frac{y^3}{3} \Big|_1^2 = \frac{112}{9}$$

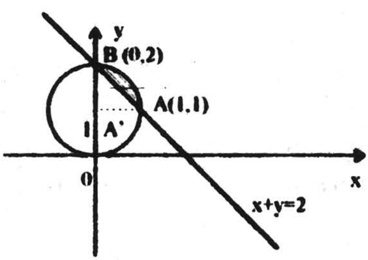
3. $$\iint_D xy\, dx\, dy,$$

unde domeniul D este mărginit de curbele

$$x^2 + y^2 = 2y \text{ şi } x + y = 2 (x > 0)$$

Rezolvare.

Figura 4



Dreapta $x + y = 2$ intersectează cercul $x^2 + y^2 = 2y$ în punctele $A(1,1)$ şi $B(0,2)$. Domeniul D este simplu în raport cu axa Ox. Proiecţia domeniului D pe axa Oy este segmentul $A'B$. Deci domeniul D este definit de inegalităţile

$$D : \begin{cases} 1 \le y \le 2 \\ 2 - y \le x \le \sqrt{2y - y^2} \end{cases}.$$

Funcţiile $\varphi(y) = 2 - y$ şi $\psi(y) = \sqrt{2y - y^2}$ sunt continue pe $[1, 2]$ şi $\varphi(y) < \psi(y)$ pentru $1 < y < 2$. Funcţia

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = xy$$

este continuă şi deci pentru a calcula integrala putem aplica teorema 6.6. Atunci

$$\iint_D xy\, dx\, dy = \int_1^2 \left(\int_{2-y}^{\sqrt{2y-y^2}} xy\, dx \right) dy =$$

$$= \int_1^2 \left(y \frac{1}{2} x^2 \Big|_{2-y}^{\sqrt{2y-y^2}} \right) dy = \frac{1}{2} \int_1^2 [y^2(2-y) - y(2-y)^2] dy =$$

$$= \int_1^2 (-y^3 + 3y^2 - 2y) dy = \left(-\frac{1}{4} y^4 + y^3 - y^2 \right) \Big|_1^2 = -4 + 8 - 4 + \frac{1}{4} - 1 + 1 = \frac{1}{4}$$

4. $$\iint_D \sqrt{xy}\, dx\, dy,$$

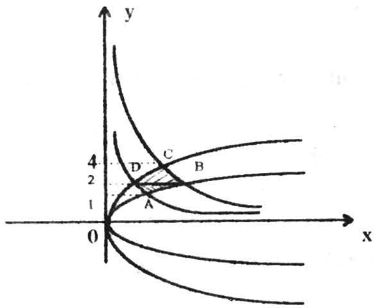
unde domeniul D este mărginit de curbele

$$y^2 = x, y^2 = 8x, xy = 1 \text{ şi } xy = 8$$

Rezolvare.

Parabola $y^2 = x$ intersectează hiperbola $xy = 1$ în punctul $A(1, 1)$ şi hiperbola $xy = 8$ în punctul $B(4, 2)$. Parabola $y^2 = 8x$ intersectează hiperbola $xy = 8$ în punctul $C(2, 4)$ şi hiperbola $xy = 1$ în punctul $D\left(\frac{1}{2}, 2\right)$. Dreapta DB este paralelă cu axa Ox şi împarte domeniul D în două domenii simple în raport cu axa Ox.

Figura 5



Domeniul D_1 este definit de inegalităţile:

$$D_1 : \begin{cases} 1 \le y \le 2 \\ \frac{1}{y} \le x \le y^2 \end{cases}.$$

Domeniul D_2 este definit de inegalităţile:

$$D_2 : \begin{cases} 2 \le y \le 4 \\ \frac{y^2}{8} \le x \le \frac{8}{y} \end{cases}.$$

Deoarece sunt îndeplinite condiţiile din teorema 6.6 şi folosind proprietatea de aditivitate a integralei ca funcţie de domeniu, avem

$$\iint_D \sqrt{xy}\,dx\,dy = \iint_{D_1} \sqrt{xy}\,dx\,dy + \iint_{D_2} \sqrt{xy}\,dx\,dy =$$

$$= \int_1^2 \left(\int_{\frac{1}{y}}^{y^2} \sqrt{xy}dx \right) dy + \int_2^4 \left(\int_{\frac{y^2}{8}}^{\frac{8}{y}} \sqrt{xy}dx \right) dy =$$

$$= \int_1^2 \frac{2}{3}\sqrt{yx^3}\Big|_{\frac{1}{y}}^{y^2} dy + \int_2^4 \frac{2}{3}\sqrt{yx^3}\Big|_{\frac{y^2}{8}}^{\frac{8}{y}} dy =$$

$$= \frac{2}{3}\int_1^2 \left(y^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{y}\right) dy + \frac{2}{3}\int_2^4 \left(\frac{16\sqrt{2}}{y} - \frac{y^{\frac{7}{2}}}{16\sqrt{2}}\right) dy =$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{2}{9}y^{\frac{9}{2}} - \ln y\right)\Big|_1^2 + \frac{2}{3}\left(16\sqrt{2}\ln y - \frac{1}{72\sqrt{2}}y^{\frac{9}{2}}\right)\Big|_2^4 =$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{32\sqrt{2}}{9} - \frac{2}{9} - \ln 2 + 16\sqrt{2}\ln 2 - \frac{32\sqrt{2}}{9} + \frac{2}{9}\right) = \frac{2}{3}(16\sqrt{2} - 1)\ln 2.$$

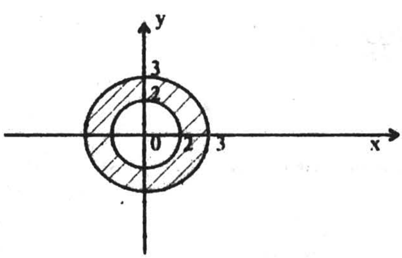
5. $$\iint_D \ln(x^2 + y^2)\, dx\, dy,$$

unde domeniul D este mărginit de curbele

$$x^2 + y^2 = 4 \text{ şi } x^2 + y^2 = 9$$

Rezolvare.

Figura 6



$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}.$$

Prin transformarea (de la cordonate polare la coordonate carteziene)

$$T : \begin{cases} x = \rho cos\,\theta \\ y = \rho sin\,\theta \end{cases}, \rho \geq 0, \theta \in [0, 2\pi]$$

domeniul D este dus pe domeniul D'. Din $4 \leq \rho^2 \leq 9$ rezultă că

$$D' : \begin{cases} 2 \leq \rho \leq 3 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}.$$

Funcţia $f : D \longrightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = ln(x^2 + y^2)$ este continuă pe D. Atunci, utilizând teorema 6.8, avem

$$\iint_D ln(x^2 + y^2)\, dx\, dy = \iint_{D'} ln\, \rho^2 \left| \frac{D(x, y)}{D(\rho, \theta)} \right| d\rho\, d\theta =$$

$$= \int_2^3 \left(\int_0^{2\pi} 2\rho\, ln\, \rho\, d\theta \right) d\rho = \int_2^3 2\rho\, ln\, \rho\, d\rho \int_0^{2\pi} d\theta =$$

$$\int_2^3 (\rho^2)' ln\, \rho\, d\rho \cdot 2\pi = 2\pi \left(\rho^2\, ln\, \rho \Big|_2^3 - \int_2^3 \rho d\rho \right) = 2\pi \left(9 ln\, 3 - 4\, ln\, 2 - \frac{5}{2} \right).$$

6. $$\iint_D (x + y)^2\, dx\, dy,$$

unde domeniul

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 4x\}$$

Rezolvare.

Prin transformarea (de la cordonate polare la coordonate carteziene)

$$T : \begin{cases} x = \rho cos\,\theta \\ y = \rho sin\,\theta \end{cases}, \rho \geq 0, \theta \in [0, 2\pi],$$

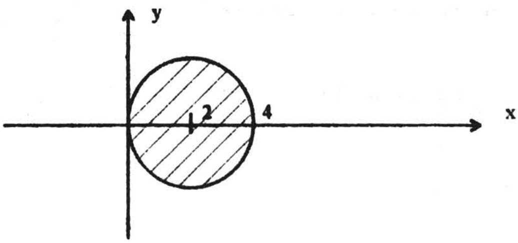
domeniul D este dus pe domeniul D'. Din $\rho^2 \leq 4\rho\, cos\,\theta$ rezultă că

$$\rho \in [0, 4\, cos\,\theta] \text{ şi } cos\,\theta \geq 0.$$

Deci

$$D' : \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq \rho \leq 4\cos\theta \end{cases}.$$

Figura 7



Funcţia $f : D \longrightarrow \mathbb{R}, f(x,y) = (x+y)^2$ este continuă pe D şi utilizând teorema 6.8, avem

$$\iint_D (x+y)^2\,dx\,dy = \iint_{D'} (\rho\cos\theta + \rho\sin\theta)^2 \left|\frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)}\right| d\rho\,d\theta =$$

$$= \iint_{D'} \rho^3(1 + 2\sin\theta\cos\theta)\,d\rho\,d\theta =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{4\cos\theta} \rho^3(1+2\sin\theta\cos\theta)d\rho \right) d\theta =$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + 2\sin\theta\cos\theta) 64\cos^4\theta\,d\theta =$$

$$= 64\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta\,d\theta + 128\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta\cos^5\theta)\,d\theta =$$

$$= 128\frac{\pi}{2}\frac{1}{2}\frac{3}{4} + 0 = 24\pi$$

7. $$\iint_D arctg\frac{y}{x}\,dx\,dy,$$

unde domeniul

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9, x \leq \sqrt{3}y \leq 3x\}$$

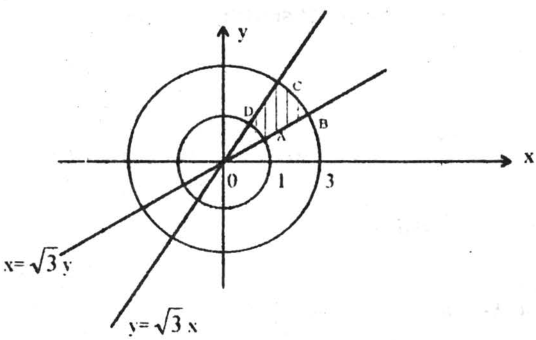
Rezolvare.

Prin transformarea de la cordonate polare la coordonate carteziene,

$$T : \begin{cases} x = \rho cos\,\theta \\ y = \rho sin\,\theta \end{cases}, \rho \geq 0, \theta \in [0, 2\pi],$$

domeniul D este dus pe domeniul D'.

Figura 8



Deoarece

$$\begin{cases} 1 \leq \rho^2 \leq 9 \\ \rho\cos\theta \leq \sqrt{3}\rho\sin\theta \leq 3\rho\cos\theta \end{cases}$$

rezultă că

$$\begin{cases} 1 \le \rho \le 3 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \le tg\,\theta \le \sqrt{3} \end{cases}.$$

Deci

$$D' : \begin{cases} 1 \le \rho \le 3 \\ \frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{\pi}{3} \end{cases}.$$

Deoarece funcţia $f : D \longrightarrow \mathbb{R}, f(x,y) = arctg\frac{y}{x}$ este continuă pe D utilizând teorema 6.8, avem

$$\iint_D arctg\frac{y}{x}\,dx\,dy = \iint_{D'} arctg\left(\frac{\rho\sin\theta}{\rho\cos\theta}\right)\left|\frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)}\right| d\rho\,d\theta =$$

$$= \iint_{D'} \theta\rho\,d\rho\,d\theta = \int_1^3\left(\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \rho\theta\,d\theta\right)d\rho =$$

$$= \int_1^3 \rho\,d\rho\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \theta\,d\theta = 4\frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\iint_D \frac{1}{\sqrt{c^2 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}\,dx\,dy,\ c > 0$$

unde domeniul D este mărginit de elipsa

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ a > 0, b > 0$$

Rezolvare.

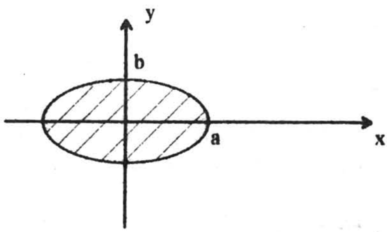
Prin transformarea de la cordonate polare generalizate la coordonate carteziene,

$$T : \begin{cases} x = a\rho\cos\theta \\ y = b\rho\sin\theta \end{cases},\ \rho \ge 0, \theta \in [0, 2\pi],$$

domeniul D este dus pe domeniul D'. Deoarece $\rho^2 = 1$,

$$D' : \begin{cases} 0 \le \rho \le 1 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}.$$

Figura 9



Deoarece funcţia

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}, f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{c^2 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}$$

este continuă pe D, utilizând teorema 6.8, avem

$$\iint_D \frac{1}{\sqrt{c^2 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}} dx\, dy = \iint_{D'} \frac{1}{\sqrt{c^2 - \rho^2}} \left| \frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)} \right| d\rho\, d\theta =$$

$$= ab \iint_{D'} \frac{\rho}{\sqrt{c^2 - \rho^2}} d\rho\, d\theta = ab \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \frac{\rho}{\sqrt{c^2 - \rho^2}} d\rho \right) d\theta =$$

$$= ab\theta\Big|_0^{2\pi} \left(-\sqrt{c^2 - \rho^2} \right)\Big|_0^1 = 2\pi ab(c - \sqrt{c^2 - 1}).$$

II. Să se afle aria următoarelor domenii:

9. $$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 3 \leq 2x + 2y \leq 8, y^2 \leq 2x\}$$

Rezolvare.

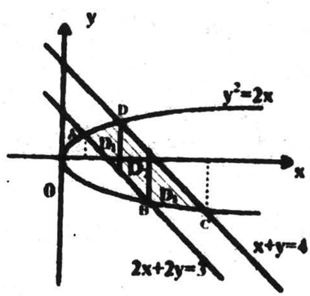
Parabola $y^2 = 2x$ intersectează dreapta $2x + 2y = 3$ în punctele $A\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ şi $B\left(\frac{9}{2}, -3\right)$, iar dreapta $x + y = 4$ în punctele $C(8,-4)$ şi $D(2,2)$. Paralelele duse prin punctele D şi B la axa Oy împart domeniul D în trei domenii simple în raport cu axa Oy. Atunci $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$ şi

$$A = \iint_D dx\,dy = \iint_{D_1} dx\,dy + \iint_{D_2} dx\,dy + \iint_{D_3} dx\,dy.$$

Domeniul D_1 este definit de inegalităţile

$$D_1 : \begin{cases} \frac{1}{2} \le x \le 2 \\ \frac{3-2x}{2} \le y \le \sqrt{2x} \end{cases}.$$

Figura 10



Funcţiile $\varphi_1(x) = \frac{3-2x}{2}$ şi $\psi_1(x) = \sqrt{2x}$ sunt continue pe $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ şi $\varphi_1(x) < \psi_1(x)$ pentru $\frac{1}{2} < x < 2$. Atunci, conform teoremei 6.6,avem

$$\iint_{D_1} dx\,dy = \int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(\int_{\frac{3-2x}{2}}^{\sqrt{2x}} dy\right)dx = \int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(\sqrt{2x} - \frac{3-2x}{2}\right)dx =$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{2x^3}\Big|_{\frac{1}{2}}^{2} - \frac{3}{2}x\Big|_{\frac{1}{2}}^{2} + \frac{x^2}{2}\Big|_{\frac{1}{2}}^{2} = \frac{7}{3} - \frac{9}{4} + \frac{15}{8} = \frac{47}{24}.$$

Domeniul D_2 este definit de inegalităţile

$$D_2 : \begin{cases} 2 \le x \le \frac{9}{2} \\ \frac{3-2x}{2} \le y \le 4 - x \end{cases}.$$

Funcţiile $\varphi_2(x) = \frac{3-2x}{2}$ şi $\psi_2(x) = 4 - x$ sunt continue pe $\left[2, \frac{9}{2}\right]$ şi $\varphi_2(x) < \psi_2(x)$ pentru $2 < x < \frac{9}{2}$. Atunci, conform teoremei 6.6,avem

$$\iint_{D_2} dx\,dy = \int_2^{\frac{9}{2}} \left(\int_{\frac{3-2x}{2}}^{4-x} dy \right) dx = \int_2^{\frac{9}{2}} \frac{5}{2} dx = \frac{5}{2} x \Big|_2^{\frac{9}{2}} = \frac{25}{4}.$$

Domeniul D_3 este definit de inegalităţile

$$D_3 : \begin{cases} \frac{9}{2} \leq x \leq 8 \\ -\sqrt{2x} \leq y \leq 4 - x \end{cases}.$$

Funcţiile $\varphi_3(x) = -\sqrt{2x}$ şi $\psi_3(x) = 4 - x$ sunt continue pe $\left[\frac{9}{2}, 8\right]$ şi $\varphi_3(x) < \psi_3(x)$ pentru $\frac{9}{2} < x < 8$. Din teorema 6.6,rezultă că

$$\iint_{D_3} dx\,dy = \int_{\frac{9}{2}}^{8} \left(\int_{-\sqrt{2x}}^{4-x} dy \right) dx = \int_{\frac{9}{2}}^{8} \left(4 - x + \sqrt{2x} \right) dx =$$

$$= 4x\Big|_{\frac{9}{2}}^{8} - \frac{x^2}{2} x \Big|_{\frac{9}{2}}^{8} + \frac{2}{3}\sqrt{2x^3}\Big|_{\frac{9}{2}}^{8} = 14 - \frac{175}{8} + \frac{64}{3} - 9 = \frac{107}{24}.$$

Deci

$$A = \frac{47}{24} + \frac{25}{4} + \frac{107}{24} = \frac{38}{3}.$$

10. $$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / ax \leq x^2 + y^2 \leq 2ax, y \geq 0\},$$

unde $a > 0$.

Rezolvare.

Prin transformarea

$$T : \begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \sin\theta \end{cases}, \rho \geq 0, \theta \in [0, 2\pi],$$

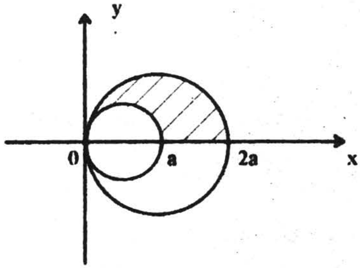
domeniul D este dus pe domeniul D'. Deoarece

$$\begin{cases} a\rho\cos\theta \leq \rho^2 \leq 2a\rho\cos\theta \\ \rho\sin\theta \geq 0 \end{cases},$$

rezultă că

$$\begin{cases} a\cos\theta \le \rho \le 2a\cos\theta \\ \sin\theta \ge 0 \\ \cos\theta \ge 0 \end{cases}.$$

Figura 11



Deci

$$D' : \begin{cases} 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \\ a\cos\theta \le \rho \le 2a\cos\theta \end{cases}.$$

Atunci

$$A = \iint_D dx\,dy = \iint_{D'} \left|\frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)}\right| d\rho\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{a\cos\theta}^{2a\cos\theta} \rho\,d\rho\right) d\theta =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(4a^2\cos^2\theta - a^2\cos^2\theta)\,d\theta = \frac{3a^2}{2}\frac{\pi}{2}\frac{1}{2} = \frac{3a^2\pi}{8}$$

11. Domeniul D este mărginit de curba (lemniscata Bernoulli)

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2), a > 0$$

Rezolvare.

Prin transformarea

$$T: \begin{cases} x = \rho cos\,\theta \\ y = \rho sin\,\theta \end{cases}, \rho \geq 0, \theta \in [0, 2\pi],$$

domeniul

$$D = \{(x,y) \in I\!R^2 / (x^2 + y^2)^2 \leq a^2(x^2 - y^2)\}$$

este dus pe domeniul D'.

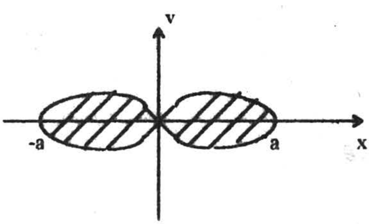
Deoarece

$$\rho^4 \leq \rho^2 a^2 (cos^2\theta - sin^2\theta),$$

rezultă că

$$\begin{cases} \rho^2 \leq a^2 cos\,2\theta \\ cos\,2\theta \geq 0 \end{cases}.$$

Figura 12



Deci

$$D': \begin{cases} \theta \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right] \\ 0 \leq \rho \leq a\sqrt{cos\,2\theta} \end{cases}.$$

Atunci

$$A = \iint_{D.} dx\,dy = \iint_{D'} \left|\frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)}\right| d\rho\,d\theta =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{a\sqrt{\cos 2\theta}} \rho \, d\rho \right) d\theta + \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \left(\int_0^{a\sqrt{\cos 2\theta}} \rho \, d\rho \right) d\theta =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{a^2}{2} \cos\ 2\theta \, d\theta + \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{a^2}{2} \cos\ 2\theta \, d\theta =$$

$$= \frac{a^2}{4} \sin 2\theta \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} + \frac{a^2}{4} \sin 2\theta \Big|_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} = \frac{a^2}{4} \cdot 2 + \frac{a^2}{4} \cdot 2 = a^2.$$

III. Să se calculeze:

12. **a)masa;**

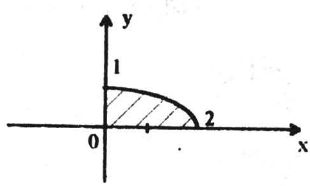
b)coordonatele centrului de greutate;

c)momentele de inerţie în raport cu axele de coordonate

ale unei plăci plane de densitate $\rho(x, y) = x + y$, care ocupă domeniul mărginit de curbele $x^2 + 4y^2 = 4, y = 0, x = 0$

Rezolvare.

Figura 13



Prin transformarea

$$T : \begin{cases} x = 2\rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}, \rho \geq 0, \theta \in [0, 2\pi],$$

domeniul

$$D = \{(x,y) \in I\!R^2 / \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$$

este dus pe domeniul D'. Deoarece

$$\begin{cases} \rho^2 \leq 1 \\ \rho \cos\theta \geq 0 \\ \rho \sin\theta \geq 0 \end{cases},$$

rezultă că

$$D' : \begin{cases} 0 \leq \rho \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}.$$

a)

$$M = \iint_D \rho(x,y)\, dx\, dy = \iint_{D'} (2\rho\cos\theta + \rho\sin\theta) \left| \frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)} \right| d\rho\, d\theta =$$

$$\int_0^1 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\rho^2 (2\cos\theta + \sin\theta) d\theta \right) d\rho$$

$$= \int_0^1 2\rho^2 (+2\sin\theta - \cos\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} d\rho = \frac{2}{3}\rho^3 \Big|_0^1 \cdot 3 = 2$$

b)

$$x_G = \frac{1}{M} \iint_D x\rho(x,y)\, dx\, dy = \frac{1}{2} \iint_{D'} 2\rho\cos\theta(2\rho\cos\theta + \rho\sin\theta) \left| \frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)} \right| d\rho\, d\theta =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\rho^3 (2\cos^2\theta + \cos\theta\sin\theta) d\theta \right) d\rho =$$

$$= \int_0^1 2\rho^3 d\rho \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\cos^2\theta + \cos\theta\sin\theta) d\theta =$$

$$= \frac{1}{2} \left(2\frac{\pi}{2}\frac{1}{2} + \frac{\sin^2\theta}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) = \frac{1}{4}(\pi + 1).$$

$$y_G = \frac{1}{M} \iint_D y\rho(x,y)\, dx\, dy = \frac{1}{2} \iint_{D'} \rho\sin\theta(2\rho\cos\theta + \rho\sin\theta) \left| \frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)} \right| d\rho\, d\theta =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\rho^3(2\cos\theta\sin\theta + sin^2\theta)d\theta\right) d\rho =$$

$$= \int_0^1 \rho^3 d\rho \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\sin\theta\cos\theta + sin^2\theta)d\theta =$$

$$= \frac{1}{4}\left(sin^2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\pi}{2}\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{16}(\pi + 4).$$

c)

$$I_{Ox} = \iint_D y^2\rho(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D'} \rho^2 sin^2\theta(2\rho\cos\theta + \rho\sin\theta)\left|\frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)}\right| d\rho\,d\theta =$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\rho^4(sin^2\theta\cos\theta + sin^3\theta)d\theta\right) d\rho =$$

$$= \int_0^1 2\rho^4 d\rho \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} (sin^2\theta\cos\theta + \sin\theta - cos^2\theta\sin\theta)d\theta =$$

$$= \frac{2}{5}\left(\frac{sin^3\theta}{3} - \cos\theta + \frac{cos^3\theta}{3}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{5}.$$

$$I_{Oy} = \iint_D x^2\rho(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D'} 4\rho^2 cos^2\theta(2\rho\cos\theta + \rho\sin\theta)\left|\frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)}\right| d\rho\,d\theta =$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} 8\rho^4(cos^3\theta + cos^2\theta\sin\theta)d\theta\right) d\rho =$$

$$= \int_0^1 8\rho^4 d\rho \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta - \cos\theta\, sin^2\theta + cos^2\theta\sin\theta)d\theta =$$

$$= \frac{8}{5}\left(\sin\theta - \frac{sin^3\theta}{3} - \frac{cos^3\theta}{3}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{8}{5}.$$

IV. Folosind formula Riemann-Green să se calculeze următoarele integrale curbilinii:

13. $$\int_{\Gamma}(x-y^2)dx + x\,dy$$

unde Γ este frontiera domeniului

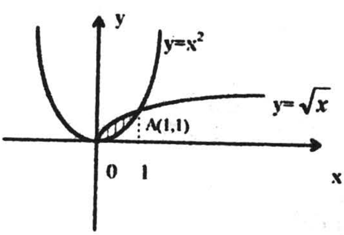
$$D = \{(x,y)/\sqrt{x} \le y \le x^2\}.$$

Rezolvare.

Funcţiile $P : D \longrightarrow \mathbb{R}, P(x,y) = x - y^2$ şi $Q : D \longrightarrow \mathbb{R}, Q(x,y) = x$ sunt de clasă C^1, iar curba Γ este o curbă închisă, simplă şi rectificabilă, deci poate fi aplicată formula Riemann-Green. Domeniul D este simplu în raport cu Oy şi este definit de inegalităţile

$$D' : \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ \sqrt{x} \le y \le x^2 \end{cases}.$$

Figura 14



Avem

$$\int_{\Gamma}(x-y^2)dx + x\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right) dx\,dy = \iint_D (1+2y)\,dx\,dy =$$

$$= \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{x}}^{x^2}(1+2y)dy\right) dx = \int_0^1 (y+y^2)\Big|_{\sqrt{x}}^{x^2} dx = \int_0^1 (x^2+x^4-\sqrt{x}-x)dx =$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{7}{10}.$$

14. $$\int_\Gamma (x-y)dx + dy$$

unde Γ este frontiera domeniului mărginit de curbele

$$x^2 + y^2 = 2x, y = 0, y = x.$$

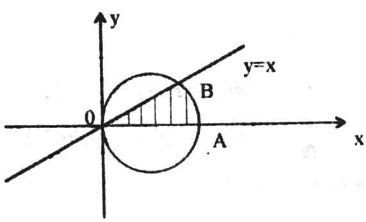
Rezolvare.

Funcţiile $P : D \longrightarrow \mathbb{R}, P(x,y) = x - y$ şi $Q : D \longrightarrow \mathbb{R}, Q(x,y) = 1$ sunt de clasă C^1, iar curba Γ este o curbă închisă, simplă şi rectificabilă, deci poate fi aplicată formula Riemann-Green. Atunci

$$\int_\Gamma (x-y)dx + dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) \right) dx\, dy =$$

$$= \iint_D (0 - (-1))\, dx\, dy = \iint_D dx\, dy.$$

Figura 15



Transformarea

$$T : \begin{cases} x = \rho cos\, \theta \\ y = \rho sin\, \theta \end{cases}, \rho \geq 0, \theta \in [0, 2\pi],$$

transformă domeniul D în domeniul D'. Deoarece

$$\begin{cases} \rho^2 \leq 2\rho\cos\theta \\ 0 \leq \rho\sin\theta \leq \rho\cos\theta \end{cases},$$

rezultă că

$$D' : \begin{cases} 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \\ 0 \leq \rho \leq 2\cos\theta \end{cases}.$$

Atunci

$$\iint_D dx\,dy = \iint_{D'} \left|\frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)}\right| d\rho\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{2\cos\theta} \rho\,d\rho\right) d\theta =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}\rho^2\Big|_0^{2\cos\theta} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\cos^2\theta\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1-\cos 2\theta)\,d\theta =$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\sin 2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}$$

15. $$\int_\Gamma \sqrt{x^2+y^2}dx + y\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})\,dy$$

unde Γ este frontiera domeniului

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}/(x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 1\}$$

Rezolvare.

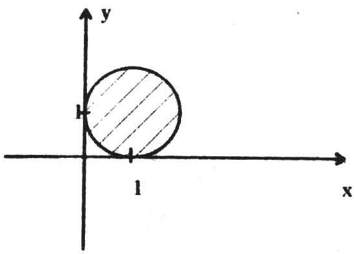
Funcţiile $P : D \longrightarrow \mathbb{R}, P(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ şi $Q : D \longrightarrow \mathbb{R}, Q(x,y) = y\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})$ sunt de clasă C^1 pe D, iar curba Γ este o curbă închisă, simplă şi rectificabilă, deci poate fi aplicată formula Riemann-Green. Atunci

$$\int_\Gamma \sqrt{x^2+y^2}dx + y\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})dy =$$

$$= \iint_D \left(y\frac{1}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) dx\,dy =$$

$$= \iint_D \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) dx\,dy = 0$$

Figura 16



Probleme propuse.

Să se calculeze următoarele integrale duble pe domeniile precizate:

1. $$\iint_D \frac{1}{x^2+y^2}\,dx\,dy$$

   D este domeniul mărginit de dreptele

$$y = 1, y = 2, x = 0, x = y.$$

2. $$\iint_D \frac{x}{x^2+y^2}\,dx\,dy$$

   D este domeniul mărginit de dreptele

$$y = 1, y = 2, x = 0, x = y.$$

3. $$\iint_D \frac{x}{y}\,dx\,dy$$

   D este domeniul mărginit de $(C) x^2 + y^2 - 2y = 0$.

4. $$\iint_D (x^2 + y)\, dx\, dy$$

D este domeniul mărginit de $y = x^2, y^2 = x$.

5. $$\iint_D \frac{x^2}{y^2}\, dx\, dy$$

D este domeniul mărginit de $y = \frac{1}{x}, y = x, x = 2$.

6. $$\iint_D \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}\, dx\, dy$$

$$(D) : \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases} .$$

7. $$\iint_D \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}\, dx\, dy$$

D este domeniul mărginit de dreptele $x = 1, y = 0, x - y = a, 0 < a < 1$.

8. $$\iint_D \sqrt{4x^2 - y^2}\, dx\, dy$$

D este domeniul mărginit de dreptele $y = x, y = 0, x = 1$.

9. $$\iint_D (x + y)xy\, dx\, dy$$

D este domeniul mărginit de dreptele $x + y = -3, x - y = 1, x + y = 3, x - y = -1$.

10. $$\iint_D (x^2 + y^2)\, dx\, dy$$

D este domeniul mărginit de $x^2 = 2y, x + y = 4$.

11. $$\iint_D (x^2 + y^2)\, dx\, dy$$

$$(D) : \begin{cases} y^2 \leq x \\ x \leq 3 \end{cases} .$$

12. $$\iint_D (x^2 + y^2)\, dx\, dy$$

$$(D) : \begin{cases} y^2 \leq 2 \\ 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

13. $$\iint_D (x + y)\, dx\, dy$$

$$(D) : \begin{cases} (x-1)^2 + y^2 \leq 1 \\ y \geq 0 \end{cases}.$$

14. $$\iint_D (x^2 + y^2)\, dx\, dy$$

$$(D) : \begin{cases} (x^2 + y^2) \leq 9x \\ x \leq 0 \end{cases}.$$

Capitolul 7

Integrale triple

Teorie

Definiţia 7.1 *Fie $P \subset \mathbb{R}^3$. Dacă P este reuniune finită de paralelipipede, oricare două dintre ele fără puncte interioare comune,*

$$P = \bigcup_{i=1}^{n} P_i, \text{ atunci } vol(P) = \sum_{i=1}^{n} vol(P_i).$$

Fie $V \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu compact. Numerele

$$vol.int.(V) = sup\{vol(P)/P \subset V\}$$

şi

$$vol.ext.(V) = inf\{vol(P)/P \supset V\}$$

se numesc, respectiv volumul interior şi volumul exterior al domeniului V.
Dacă $vol.int.(V) = vol.ext.(V)$, vom spune că domeniul V are volum şi vom nota această valoare cu $vol(V)$. În continuare vom presupune că toate domeniile au volum.

Definiţia 7.2 *Fie $V \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu compact şi $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie continuă. Fie $\Delta : V_1, V_2, \ldots, V_n$ o descompunere a domeniului V (adică pentru orice $i = \overline{1,n}$, V_i sunt* *domenii compacte, oricare două nu au puncte interioare comune şi* $V = V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_n$*),*

$$||\Delta|| = \max_{i=\overline{1,n}} \{sup\{\sqrt{(x-\tilde{x})^2 + (y-\tilde{y})^2 + (z-\tilde{z})^2} / (x,y,z), (\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) \in V_i\}\}$$

şi

$$S_\Delta = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \mu_i) vol(V_i), (\xi_i, \eta_i, \mu_i) \in V_i, i = \overline{1,n}$$

este suma Riemann asociată funcţiei f*, domeniului* V*, descompunerii* Δ *şi punctele* $(\xi_i, \eta_i, \mu_i) \in V_i, i = \overline{1,n}$. *Dacă există* $I \in \mathbb{R}$ *astfel încât oricare ar fi descompunerea* Δ *cu* $||\Delta|| \longrightarrow 0$ *şi oricare* $(\xi_i, \eta_i, \mu_i) \in V_i, i = \overline{1,n}$

$$I = \lim_{||\Delta|| \to 0} S_\Delta$$

vom spune că funcţia f *este integrabilă Riemann, iar numărul* I *se numeşte integrala Riemann a funcţiei* f *pe domeniul* V *şi vom nota*

$$I = \iiint_V f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz.$$

7.3 Proprietăţi ale integralei triple

1. Proprietatea de omogenitate.

$$\iiint_V \alpha f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \alpha \iiint_V f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz.$$

2. Proprietatea de liniaritate.

$$\iiint_V f(x,y,z) + g(x,y,z)\, dx\, dy\, dz =$$

$$= \iiint_V f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz + \iiint_V g(x,y,z)\, dx\, dy\, dz.$$

3. Proprietatea de aditivitate a integralei ca funcţie de domeniu.

Dacă $V = V_1 \cup V_2$ unde V, V_1 şi V_2 sunt domenii compacte din $\mathbb{R}^3$, iar V_1 şi V_2 nu au puncte interioare comune, atunci

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz =$$

$$\iiint_{V_1} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz + \iiint_{V_2} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

4. *Dacă $f(x,y,z) \geq 0, \forall (x,y,z) \in V$, atunci*

$$I = \iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \geq 0.$$

5. ***Proprietatea de monotonie a integralei triple.***

Dacă $f(x,y,z) \leq g(x,y,z), \forall (x,y,z) \in V$, atunci

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \leq \iiint_V g(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

Teorema 7.4 Teorema de medie pentru integrala triplă. *Dacă f este continuă pe domeniul compact V, atunci există un punct $(\xi, \eta, \mu) \in V$ astfel încât*

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = f(\xi,\eta,\mu) vol(V)$$

Definiţia 7.5 *Un domeniu compact din $\mathbb{R}^3$ este simplu în raport cu axa Oz dacă este definit de*

$$\varphi(x,y) \leq z \leq \psi(x,y), (x,y) \in D,$$

unde D este un domeniu compact din planul xOy, funcţiile φ şi ψ sunt continue şi

$$\varphi(x,y) < \psi(x,y)$$

pentru orice punct (x,y) din interiorul lui D. În mod analog se definesc noţiunile de domeniu simplu în raport cu axa Ox şi domeniu simplu în raport cu axa Oy.

Teorema 7.6 Descompunerea unei integrale triple într-o integrală simplă urmată de una dublă.

Fie $V \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu simplu în raport cu axa Oz.

$$V : \varphi(x,y) \leq z \leq \psi(x,y), (x,y) \in D$$

şi $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie continuă. Atunci

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_D \left(\int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dx\,dy$$

7.7 Observaţie. *Dacă domeniul compact V din $\mathbb{R}^3$ nu este simplu în raport cu nici una din axe, atunci prin plane paralele cu axele de coordonate descompunem volumul V în volume simple şi apoi aplicăm proprietatea de aditivitate a integralei triple ca funcţie de domeniu.*

Teorema 7.8 Schimbarea de variabilă la integrala triplă. *Fie V' un domeniu compact în spaţiul (u,v,w) având frontiera o suprafaţă închisă simplă, netedă pe porţiuni şi fie*

$$T : \begin{cases} x = \varphi(u,v,w) \\ y = \psi(u,v,w) \\ z = \chi(u,v,w) \end{cases}, (u,v,w) \in V'$$

o transformare de la spaţiul (u,v,w) la spaţiul (x,y,z), regulată pe V'.

Dacă $T(V') = V$ şi $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$ este o funcţie continuă, atunci

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz =$$

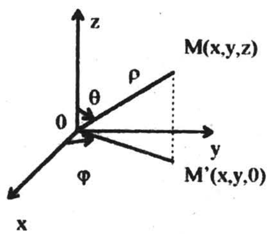
$$= \iiint_{V'} f(\varphi(u,v,w), \psi(u,v,w), \chi(u,v,w)) \left| \frac{D(\varphi,\psi,\chi)}{D(u,v,w)} \right| du\,dv\,dw.$$

7.9 Schimbări de variabile mai des utilizate.

1. Transformarea de la coordonate sferice la coordonate carteziene.

$$T: \begin{cases} x = \rho \sin\theta \cos\varphi \\ y = \rho \sin\theta \sin\varphi \\ z = \rho \cos\theta \end{cases}, \rho \geq 0, \theta \in [0, \pi] \varphi \in [0, 2\pi].$$

Figura 1



$$\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \rho\cos\theta\cos\varphi & -\rho\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = \rho^2 \sin\theta.$$

2. Transformarea de la coordonate sferice generalizate la coordonate carteziene.

$$T: \begin{cases} x = a\rho \sin\theta \cos\varphi \\ y = b\rho \sin\theta \sin\varphi \\ z = c\rho \cos\theta \end{cases}, \rho \geq 0, \theta \in [0, \pi] \varphi \in [0, 2\pi],$$

unde $a, b, c > 0$

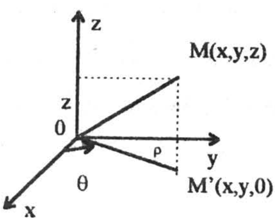
$$\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\theta,\varphi)} = abc\rho^2 \sin\theta.$$

3. Transformarea de la coordonate cilindrice la coordonate carteziene.

$$T : \begin{cases} x = \rho cos\,\theta \\ y = \rho sin\,\theta \quad , \rho \geq 0, \theta \in [0, 2\pi], z \in \mathbb{R} \\ z = z \end{cases}$$

$$\frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \theta, \varphi)} = \rho.$$

Figura 2



Teorema 7.10 Formula lui Gauss-Ostrogradski *Fie $V \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu compact a cărui frontieră $S = FrV$ este o suprafaţă simplă, închisă, netedă pe porţiuni şi funcţiile $P, Q, R : V \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. Dacă există $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$ şi $\frac{\partial R}{\partial z}$ şi sunt continue pe D, atunci*

$$\iint_S P(x, y, z)\, dy\, dz + Q(x, y, z)\, dz\, dx + R(x, y, z)\, dx\, dy =$$

$$= \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial R}{\partial z}(x, y, z) \right) dx\, dy\, dz.$$

7.11 Aplicaţii

1. Dacă $V \subset \mathbb{R}^3$ este un domeniu compact, atunci volumul lui V este dat de:

$$V = \iiint_V dx\, dy\, dz \quad .$$

2. Masa unui corp material care ocupă domeniul V şi are densitatea $\rho(x,y,z)$, $(x,y,z) \in V$ continuă este dată de

$$M = \iiint_V \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

3. Coordonatele centrului de greutate ale unui corp material care ocupă domeniul V, de densitate $\rho(x,y,z), (x,y,z) \in V$, ρ este continuă, sunt date de:

$$x_G = \frac{1}{M}\iiint_V x\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

$$y_G = \frac{1}{M}\iiint_V y\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

$$z_G = \frac{1}{M}\iiint_V z\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

4. Momentele de inerţie ale unui corp material care ocupă domeniul V, de densitate $\rho(x,y,z), (x,y,z) \in V, \rho$ continuă sunt date de:

$$I_O = \iiint_V (x^2+y^2+z^2)\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

$$I_{Ox} = \iiint_V (y^2+z^2)\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

$$I_{Oy} = \iiint_V (x^2+z^2)\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

$$I_{Oz} = \iiint_V (x^2+y^2)\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

$$I_{xOy} = \iiint_V z^2\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

$$I_{xOz} = \iiint_V y^2\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

$$I_{yOz} = \iiint_V x^2\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

Probleme rezolvate.

Să se calculeze următoarele integrale triple:

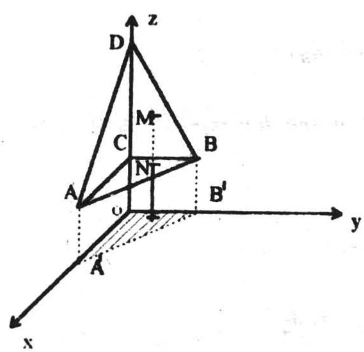
1. $$\iiint_V y\,dx\,dy\,dz,$$

unde

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / 2x + 3y + z \leq 8, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 2\}.$$

Rezolvare.

Figura 3



Domeniul V este tetraedrul $ABCD$, unde

$$A(3,0,2), B(0,2,2), C(0,0,2) \text{ şi } D(0,0,8)$$

şi este simplu în raport cu Oz. Proiecţia domeniului V pe planul xOy este triunghiul $OA'B'$. Orice paralelă dusă prin punctele triunghiului $OA'B'$ intersectează feţele (ABC) şi (ABD) ale tetraedrului $ABCD$. Deci

$$V : \begin{cases} 2 \leq z \leq 8 - 2x - 3y \\ (x,y) \in D \end{cases}$$

unde

$$D = \{(x,y) \in I\!R^2 / x \geq 0, y \geq 0, 2x + 3y \leq 6\}.$$

Deoarece funcţiile $\varphi(x,y) = 2$ şi $\psi(x,y) = 8 - 2x - 3y$ sunt continue pe D, $\varphi(x,y) < \psi(x,y)$ pentru $(x,y) \in Int(D)$ şi funcţia

$$f : V \longrightarrow I\!R, f(x,y,z) = z$$

este continuă, putem aplica teorema 7.6. Deci

$$\iiint_V y\,dx\,dy\,dz = \iint_D \left(\int_2^{8-2x-3y} y\,dz \right) dx\,dy = \iint_D yz|_2^{8-2x-3y}\,dx\,dy =$$

$$= \iint_D (6y - 2xy - 3y^2)\,dx\,dy.$$

Domeniul D este simplu în raport cu axa Oy şi

$$D : \begin{cases} 0 \leq x \leq 3 \\ 0 \leq y \leq \frac{6-2x}{3} \end{cases}$$

Atunci

$$\iint_D (6y - 2xy - 3y^2)\,dx\,dy = \int_0^3 \left(\int_0^{\frac{6-2x}{3}} (6y - 2xy - 3y^2) dy \right) dx =$$

$$= \int_0^3 (3y^2 - xy - y^3)\Big|_0^{\frac{6-2x}{3}}\,dx =$$

$$= \int_0^3 \left[\frac{1}{3}(6-2x)^2 - \frac{1}{3}x(6-2x) + \frac{1}{27}(6-2x)^3 \right] dx =$$

$$= -\frac{1}{18}(6-2x)^3\Big|_0^3 - x^2\Big|_0^3 + \frac{2}{9}x^3\Big|_0^3 - -\frac{1}{216}(6-2x)^4\Big|_0^3 = 6 - 9 + 6 + 6 = 9$$

Deci

$$\iiint_V y\,dx\,dy\,dz = 9.$$

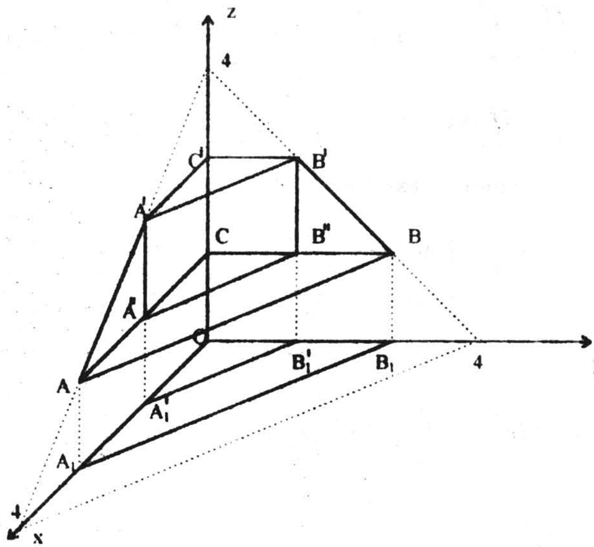
2. $$\iiint_V x\,dx\,dy\,dz$$

unde

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / 1 \leq z \leq 2, x + y + z \leq 4\ , x \geq 0, y \geq 0\}$$

Rezolvare

Figura 4



Domeniul V este trunchiul de piramidă $ABCA'B'C'$, unde

$$A(3,0,1), B(0,3,1), C(0,0,1), A'(2,0,2), B'(0,2,2), C'(0,0,2).$$

Planul paralel cu axa Oz dus prin dreapta $A'B'$ împarte domeniul V în două domenii simple în raport cu Oz, V_1 şi V_2.

$$V_1 : \begin{cases} 1 \leq z \leq 2 \\ (x,y) \in D_1 \end{cases}$$

unde

$$D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 2\}.$$

este proiecţia domeniului V_1 pe planul xOy şi

$$V_2 : \begin{cases} 1 \leq z \leq 4 - x - y \\ (x,y) \in D_2 \end{cases}$$

unde

$$D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0, y \geq 0, 2 \leq x + y \leq 3\}.$$

este proiecţia domeniului V_2 pe planul xOy. Deoarece funcţia

$$f : V \longrightarrow \mathbb{R}, f(x,y,z) = x$$

este continuă, conform proprietăţii de aditivitate a integralei triple ca funcţie de domeniu şi teoremei 7.6 avem că:

$$\iiint_V x\,dx\,dy\,dz = \iiint_{V1} x\,dx\,dy\,dz + \iiint_{V2} x\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \iint_{D_1} \left(\int_1^2 x\,dz \right) dx\,dy + \iint_{D_2} \left(\int_1^{4-x-y} x\,dz \right) dx\,dy =$$

$$= \iint_{D_1} x\,dx\,dy + \iint_{D_2} x(4 - x - y)\,dx\,dy.$$

Domeniul D_1 este simplu în raport cu Oy şi este definit de

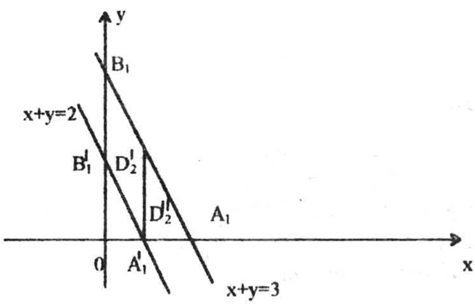
$$D_1 : \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq 2 - x \end{cases}$$

Atunci

$$\iint_{D_1} x\,dx\,dy = \int_0^2 \left(\int_0^{2-x} x\,dy\right) dx = \int_0^2 (xy)\Big|_0^{2-x} dx =$$

$$= \int_0^2 (2x - x^2)dx = x^2\Big|_0^2 - \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = 4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3}.$$

Figura 5



O paralelă dusă prin punctul A_1 la axa Oy împarte domeniul D_2 în două domenii simple în raport cu Oy, D_2' şi D_2'',

$$D_2' : \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ 2 - x \leq y \leq 3 - x \end{cases}$$

$$D_2'' : \begin{cases} 2 \leq x \leq 3 \\ 0 \leq y \leq 3 - x \end{cases}$$

Atunci

$$\iint_{D_2} (4x - x^2 - xy)\,dx\,dy = \iint_{D_2'} (4x - x^2 - xy)\,dx\,dy + \iint_{D_2''} (4x - x^2 - xy)\,dx\,dy =$$

$$= \int_0^2 \left(\int_{2-x}^{3-x} (4x - x^2 - xy)\,dy\right) dx + \int_2^3 \left(\int_0^{3-x} (4x - x^2 - xy)\,dy\right) dx =$$

$$= \int_0^2 \left(4xy - x^2y - x\frac{y^2}{2}\right)\Big|_{2-x}^{3-x} dx + \int_2^3 \left(4xy - x^2y - x\frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^{3-x} dx =$$

$$= \int_0^2 \frac{3}{2}x\, dx + \int_2^3 \left(\frac{15}{2}x - 4x^2 + \frac{1}{2}x^3\right) dx =$$

$$= \frac{3}{4}x^4\Big|_0^2 + \frac{15}{4}x^2\Big|_2^3 - \frac{4}{3}x^3\Big|_2^3 + \frac{1}{8}x^4\Big|_2^3 = 12 + \frac{75}{4} - \frac{76}{3} + \frac{65}{8} = \frac{325}{12}.$$

Deci

$$\iiint_V x\, dx\, dy\, dz = \frac{8}{3} + \frac{325}{12} = \frac{119}{4}.$$

3. $$\iiint_V (x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz$$

unde

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 \le z^2, 0 \le z \le 3\}.$$

Rezolvare

Intersecţia planului $z = 3$ cu conul $x^2 + y^2 = z^2$ este cercul

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ z = 3 \end{cases}$$

iar intersecţia planului $z = 0$ cu conul $x^2 + y^2 = z^2$ este punctul $O(0, 0, 0)$. Domeniul V este simplu în raport cu axa Oz iar proiecţia domeniului V pe planul xOy este domeniul

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \le 9\}.$$

O paralelă la axa Oz dusă prin punctele proiecţiei intersectează suprafaţa conică şi planul $z = 3$. Deci

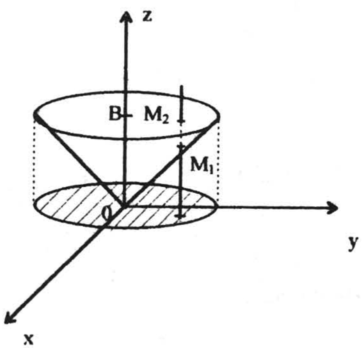
$$V : \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} \le z \le 3 \\ (x, y) \in D \end{cases}$$

Deoarece funcţiile $\varphi(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\psi(x, y) = 3$ sunt continue pe D,

$$\varphi(x, y) < \psi(x, y)$$

pentru $(x, y) \in Int(D)$ şi funcţia $f : V \longrightarrow I\!R, f(x, y, z) = x^2 + y^2$ este continuă putem reduce integrala triplă la o integrală dublă (teorema 7.6).

Figura 6



Deci

$$\iiint_V (x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz = \iint_D \left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{3} (x^2 + y^2)\, dz \right) dx\, dy =$$

$$= \iint_D (x^2 + y^2)(3 - \sqrt{x^2 + y^2})\, dx\, dy.$$

Pentru a calcula integrala dublă vom utiliza transformarea de la coordonate polare la coordonate carteziene,

$$T : \begin{cases} x = \rho cos\, \theta \\ y = \rho sin\, \theta \end{cases}, \rho \geq 0, \theta \in [0, 2\pi]$$

Atunci domeniul D este dus pe domeniul D'.

$$D' : \begin{cases} 0 \leq \rho \leq 3 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}.$$

Deci

$$\iiint_V (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz = \iint_{D'} \rho^2(3-\rho)\left|\frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)}\right| d\rho\,d\theta =$$

$$= \int_0^3 \left(\int_0^{2\pi} (3\rho^3 - \rho^4\,d\theta\right) d\rho = \int_0^3 (3\rho^3-\rho^4)d\rho \int_0^{2\pi} d\theta =$$

$$= \left(3\frac{\rho^4}{4} - \frac{\rho^5}{5}\right)\Bigg|_0^3 2\pi = 3^5\frac{4}{10}2\pi.$$

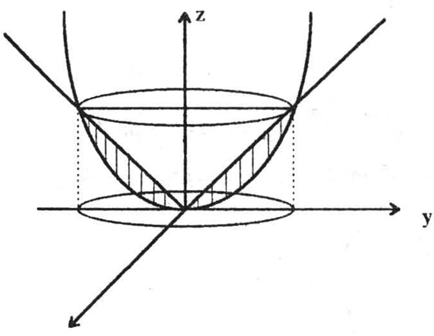
4. $$\iiint_V x^2\,dx\,dy\,dz$$

unde

$$V = \{(x,y,z)\in I\!\!R^3 / z^2 \le \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9} \le 2z\}.$$

Rezolvare

Figura 7



Paraboloidul

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9} = 2z$$

intersectează conul $x^2 + y^2 = z^2$ după elipsa

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{36} = 1$$

situată în planul $z = 2$ şi în punctul $O(0,0,0)$. Proiecţia domeniului V pe planul xOy este domeniul

$$D = \{(x,y) \in I\!R^2 / \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{36} \leq 1\}$$

şi orice paralelă la axa Oz dusă prin punctele lui D intersectează paraboloidul

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 2z$$

şi conul

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = z^2.$$

Deci V este simplu în raport cu Oz şi este definit de

$$V : \begin{cases} \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{18} \leq z \leq \sqrt{\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}} \\ (x,y) \in D \end{cases}$$

Deoarece funcţiile $\varphi(x,y) = \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{18}$ şi $\psi(x,y) = \sqrt{\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}}$ sunt continue pe D, şi funcţia $f : V \longrightarrow I\!R, f(x,y,z) = x^2$ este continuă pe V,conform teoremei 7.6 avem

$$\iiint_V x^2\, dx\, dy\, dz = \iint_D \left(\int_{\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{18}}^{\sqrt{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}}} x^2\, dz \right) dx\, dy =$$

$$= \iint_D x^2 \left(\sqrt{\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}} - \frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{18} \right) dx\, dy.$$

Pentru a calcula integrala dublă vom utiliza transformarea de la coordonate polare generalizate la coordonate carteziene,

$$T : \begin{cases} x = 4\rho cos\, \theta \\ y = 6\rho sin\, \theta \end{cases}, \rho \geq 0, \theta \in [0, 2\pi]$$

Atunci domeniul D este dus pe domeniul D'.

$$D' : \begin{cases} 0 \leq \rho \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases} .$$

Deci

$$\iiint_V x^2\,dx\,dy\,dz = \iint_{D'} 16\rho^2 sin^2\,\theta(2\rho - 2\rho^2)\left|\frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)}\right|\,d\rho\,d\theta =$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} 32\cdot 24\, sin^2\,\theta(\rho^4 - \rho^5)d\theta\right) d\rho = 32\cdot 24\int_0^1 (\rho^4 - \rho^5)d\rho \int_0^{2\pi} sin^2\,\theta\,d\theta =$$

$$= 32\cdot 24\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right)\cdot 4\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2\,\theta\,d\theta = \frac{128}{5}\cdot 4\cdot\frac{\pi}{2}\frac{1}{2} = \frac{128\pi}{5}$$

5. $$\iiint_V z\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,dx\,dy\,dz$$

unde

$$V = \{(x,y,z) \in I\!R^3 / x^2 + y^2 + z^2 \leq 2y\}.$$

Rezolvare

Pentru a calcula această integrală vom utiliza transformarea de la coordonate sferice la coordonate carteziene.

$$T : \begin{cases} x = \rho sin\,\theta\,cos\,\varphi \\ y = \rho sin\,\theta\,sin\,\varphi \\ z = \rho cos\,\theta \end{cases} , \rho \geq 0, \theta \in [0,\ \pi]\varphi \in [0, 2\pi].$$

Prin această transformare domeniul V este dus pe domeniul V'. Deoarece $\rho^2 \leq 2\rho\,sin\,\theta$, domeniul V' este definit de inegalităţile

$$V' : \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq \rho \leq 2\,sin\,\theta \end{cases} .$$

Funcţia $f : V \longrightarrow \mathbb{R}, f(x,y,z) = z\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ este continuă pe V,conform teoremei 7.8 avem că

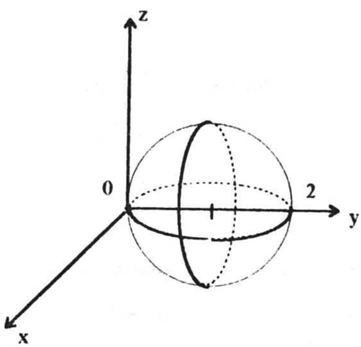
$$\iiint_V z\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz = \iiint_{V'} \rho^2\cos\theta \left|\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\theta,\varphi)}\right| d\rho\,d\theta\,d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi}\left(\int_0^{2\sin\theta} \rho^4\cos\theta\sin\theta\,d\rho\right)d\theta\right)d\varphi =$$

$$\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi}\frac{32}{5}\cos\theta\sin^6\theta\,d\theta\right)d\varphi =$$

$$= \frac{32}{5}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi}\cos\theta\sin^6\theta\,d\theta = \frac{64\pi}{5}\cdot 0 = 0.$$

Figura 8



6. $$\iiint_V (x^2+y^2+xy)\,dx\,dy\,dz$$

unde

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 \le 1 \le x^2+y^2+z^2\}.$$

Rezolvare

Domeniul V este porţiunea dintre sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ şi elipsoidul

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 1.$$

Dacă vom nota

$$V_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 \leq 1\}$$

şi

$$V_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\},$$

atunci $V_2 \cup V = V_1$ şi conform proprietăţii de aditivitate a integralei triple ca funcţie de domeniu, avem că

$$\iiint_{V_1} (x^2 + y^2 + xy)\, dx\, dy\, dz =$$

$$= \iiint_{V_2} (x^2 + y^2 + xy)\, dx\, dy\, dz + \iiint_{V} (x^2 + y^2 + xy)\, dx\, dy\, dz.$$

Deci

$$\iiint_{V} (x^2 + y^2 + xy)\, dx\, dy\, dz =$$

$$= \iiint_{V_1} (x^2 + y^2 + xy)\, dx\, dy\, dz - \iiint_{V_2} (x^2 + y^2 + xy)\, dx\, dy\, dz.$$

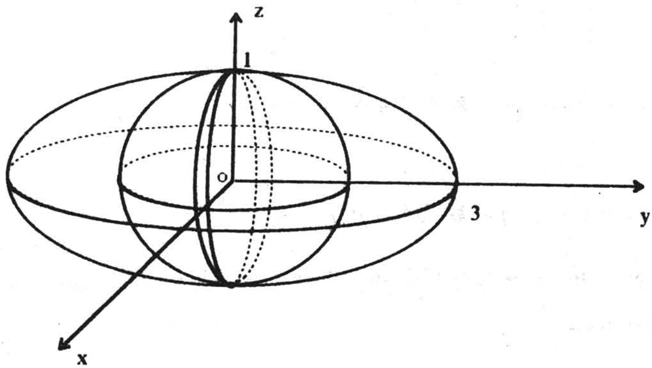
Pentru a calcula

$$\iiint_{V_1} (x^2 + y^2 + xy)\, dx\, dy\, dz$$

vom utiliza transformarea de la coordonate sferice generalizate la coordonate carteziene.

$$T : \begin{cases} x = 2\rho \sin\theta \cos\varphi \\ y = 3\rho \sin\theta \sin\varphi \\ z = \rho \cos\theta \end{cases}, \ \rho \geq 0, \theta \in [0,\pi] \varphi \in [0, 2\pi],$$

Figura 9



Prin această transformare domeniul V_1 este dus pe domeniul V_1'. Deoarece $\rho^2 \leq 1$, V_1' este definit de:

$$V_1' : \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq \rho \leq 1 \end{cases} .$$

şi

$$\iiint_{V_1} (x^2 + y^2 + xy)\, dx\, dy\, dz =$$

$$= \iiint_{V_1'} \rho^2 \sin^2\theta (4 + 5 \sin^2 \varphi + 6 \sin \varphi \cos \varphi) \left| \frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\theta,\varphi)} \right| d\rho\, d\theta\, d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi} \left(\int_0^1 6\rho^4 \sin^3 \theta (4 + 5 \sin^2 \varphi + 6 \sin \varphi \cos \varphi)\, d\rho \right) d\theta \right) d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi} \frac{6}{5} \sin^3 \theta (4 + 5 \sin^2 \varphi + 6 \sin \varphi \cos \varphi)\, d\theta \right) d\varphi =$$

$$= \frac{6}{5}\int_0^{2\pi}(4 + 5\,sin^2\varphi + 6\,sin\,\varphi\,cos\,\varphi)\,d\varphi\cdot\int_0^{\pi}(sin\,\theta - sin\,\theta\,cos^2\theta)\,d\theta =$$

$$= \frac{6}{5}\left(8\pi + 5\cdot 4\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)\left(-cos\,\theta + \frac{cos^3\theta}{3}\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{78\pi}{5}\cdot\frac{4}{3}.$$

Pentru a calcula

$$\iiint_{V_2}(x^2 + y^2 + xy)\,dx\,dy\,dz$$

vom utiliza transformarea de la coordonate sferice la coordonate carteziene.

$$T:\begin{cases} x = \rho sin\,\theta\,cos\,\varphi \\ y = \rho sin\,\theta\,sin\,\varphi \\ z = \rho cos\,\theta \end{cases},\ \rho\geq 0, \theta\in[0,\pi]\varphi\in[0,2\pi],$$

Prin această transformare domeniul V_2 este dus pe domeniul V_2'. Deoarece $\rho^2\leq 1$, V_2' este definit de:

$$V_2':\begin{cases} 0\leq\varphi\leq 2\pi \\ 0\leq\theta\leq\pi \\ 0\leq\rho\leq 1 \end{cases}.$$

şi

$$\iiint_{V_2}(x^2 + y^2 + xy)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \iiint_{V_2'}\rho^2\,sin^2\theta(1 + \ sin\,\varphi\,cos\,\varphi\,)\left|\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\theta,\varphi)}\right|\,d\rho\,d\theta\,d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi}\left(\int_0^1\rho^4\,sin^3\theta(1 + sin\,\varphi\,cos\,\varphi)\,d\rho\right)\,d\theta\right)\,d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi}\frac{1}{5}\,sin^3\theta(1 + sin\,\varphi\,cos\,\varphi)\,d\theta\right)\,d\varphi =$$

$$= \frac{1}{5}\int_0^{2\pi}(1 + sin\,\varphi\,cos\,\varphi)\,d\varphi\cdot\int_0^{\pi}(sin\,\theta - sin\,\theta\,cos^2\theta)\,d\theta = \frac{1}{5}\cdot 2\pi\cdot\frac{4}{3}.$$

Deci

$$\iiint_V(x^2 + y^2 + xy)\,dx\,dy\,dz = \frac{312\pi}{15} - \frac{8\pi}{15} = \frac{304\pi}{15}.$$

7. $$\iiint_V z\left(x^2+y^2\right)dx\,dy\,dz$$

unde

$$V=\{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3/x^2+y^2\le 2y,\, x\ge 0 \text{ şi } 0\le z\le 1\}.$$

Rezolvare

Prin transformarea de la coordonate cilindrice la coordonate carteziene

$$T:\begin{cases} x=\rho cos\,\theta \\ y=\rho sin\,\theta \quad , \rho\ge 0, \theta\in[0,2\pi], z\in\mathbb{R} \\ z=z \end{cases}$$

domeniul V este dus pe domeniul V'.

Deoarece

$$\begin{cases} \rho^2\le 2\rho sin\,\theta \\ \rho cos\,\theta \ge 0 \\ 0\le z\le 1 \end{cases}$$

rezultă că

$$V':\begin{cases} 0\le z\le 1 \\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2} \\ 0\le\rho\le 2\,sin\,\theta \end{cases}.$$

Funcţia $f: V\longrightarrow\mathbb{R}, f(x,y,z)=z\left(x^2+y^2\right)$ este continuă pe V şi conform teoremei 7.8, avem că

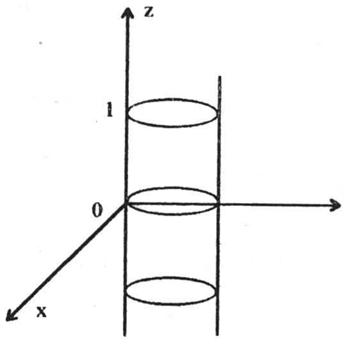
$$\iiint_V z\left(x^2+y^2\right)dx\,dy\,dz=$$

$$=\iiint_{V'} z\rho^2\left|\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\theta,z)}\right|d\rho\,d\theta\,dz=$$

$$=\int_0^1\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{2\,sin\,\theta} z\rho^3\,d\rho\right)d\theta\right)dz=$$

$$= \int_0^1 z\,dz \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4sin^4\theta\,d\theta = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1\,3}{2\,4} = \frac{3\pi}{8}.$$

Figura 10



8. $$\iiint_V \sqrt{x^2+4y^2}\,dx\,dy\,dz$$

unde

$$V = \{(x,y,z)\in I\!R^3 / z^2 \leq x^2+4y^2 \leq 4\}.$$

Rezolvare

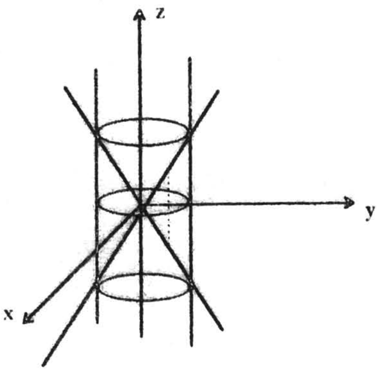
Domeniul V este porţiunea dintre suprafaţa conică $z^2 = x^2+4y^2$ şi suprafaţa cilindrică $x^2+4y^2 = 4$. Proiecţia domeniului V pe planul xOy este domeniul

$$D = \{(x,y)\in I\!R^2 / x^2+4y^2 \leq 4\}.$$

Domeniul V este simplu în raport cu axa Oz şi este definit de

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+4y^2} \leq z \leq \sqrt{x^2+4y^2} \\ (x,y) \in D \end{cases}$$

Figura 11



Deoarece funcţiile $\varphi(x,y) = -\sqrt{x^2+4y^2}$ şi $\psi(x,y) = \sqrt{x^2+4y^2}$ sunt continue pe D, şi funcţia $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+4y^2}$ este continuă, conform teoremei 7.6 avem că

$$\iiint_V \sqrt{x^2+4y^2}\,dx\,dy\,dz = \iint_D \left(\int_{-\sqrt{x^2+4y^2}}^{\sqrt{x^2+4y^2}} \sqrt{x^2+4y^2}\,dz\right) dx\,dy =$$

$$= \iint_D 2(x^2+4y^2)\,dx\,dy.$$

Pentru a calcula integrala dublă vom utiliza transformarea de la coordonate polare generalizate la coordonate carteziene,

$$T: \begin{cases} x = 2\rho cos\,\theta \\ y = \rho sin\,\theta \end{cases}, \rho \geq 0, \theta \in [0, 2\pi]$$

Deoarece $4\rho^2 \leq 4$, domeniul D este dus prin transformarea T în domeniul D' definit de

$$D': \begin{cases} 0 \leq \rho \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}.$$

Deci

$$\iiint_V \sqrt{x^2 + 4y^2}\, dx\, dy\, dz = \iint_{D'} 2 \cdot 4\rho^2 \left| \frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)} \right| d\rho\, d\theta =$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} 8\rho^2 \cdot 2\rho\, d\theta \right) d\rho = \int_0^1 16\rho^3 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta = 4 \cdot 2\pi = 8\pi.$$

9. $$\iiint_V xyz\, dx\, dy\, dz$$

unde

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / 9 \leq x^2 + y^2 \leq z^2, 0 \leq z \leq 5\}.$$

Rezolvare

Conul $x^2 + y^2 = z^2$ intersectează cilindrul $x^2 + y^2 = 9$ după curba

$$\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ z = 3 \end{cases}$$

Domeniul V este porţiunea dintre cilindrul $x^2 + y^2 = 9$, conul $x^2 + y^2 = z^2$ şi planul $z = 5$. Proiecţia domeniului V pe planul xOy este domeniul

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 9 \leq x^2 + y^2 \leq 25\}.$$

Orice paralelă la axa Oz prin punctele lui D intersecteează frontiera domeniului V pe suprafaţa $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ şi $z = 5$. Deci V este simplu în raport cu axa Oz şi este definit de

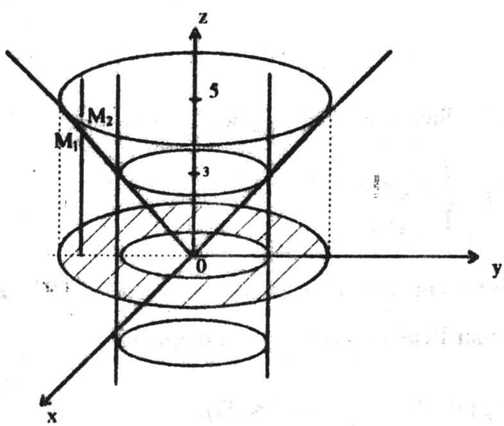
$$V : \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 5 \\ (x,y) \in D \end{cases}$$

Deoarece funcţiile $\varphi(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ şi $\psi(x,y) = 5$ sunt continue pe D, şi $\varphi(x,y) < \psi(x,y)$ dacă $(x,y) \in Int(D)$ şi funcţia $f : V \longrightarrow \mathbb{R}, f(x,y,z) = xyz$ este continuă, putem aplica teorema 7.6.Deci

$$\iiint_V xyz\,dx\,dy\,dz = \iint_D \left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{5} xyz\,dz \right) dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{2} \iint_D xy(25 - x^2 - y^2)\,dx\,dy.$$

Figura 12



Pentru a calcula integrala dublă vom utiliza transformarea de la coordonate polare la coordonate carteziene

$$T : \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}, \rho \geq 0, \theta \in [0, 2\pi].$$

Deoarece $9 \leq \rho^2 \leq 25$, domeniul D va fi dus prin transformarea T în domeniul D' definit de

$$D' : \begin{cases} 3 \leq \rho \leq 5 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

Deci

$$\iiint_V xyz\, dx\, dy\, dz = \frac{1}{2}\iint_{D'} \rho^2 \sin\theta\cos\theta(25 - \rho^2)\left|\frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)}\right| d\rho\, d\theta =$$

$$= \frac{1}{2}\int_3^5 \left(\int_0^{2\pi} \rho^3 \sin\theta\cos\theta(25 - \rho^2)\, d\theta\right) d\rho =$$

$$= \frac{1}{2}\int_3^5 \rho^3(25 - \rho^2) d\rho \int_0^{2\pi} \sin\theta\cos\theta\, d\theta = 0.$$

Să se calculeze volumul corpurilor materiale care ocupă volumul V:

10. **Domeniul V este mărginit de suprafeţele**

$$x^2 + y^2 = 4z, x^2 + y^2 = 4x \text{ şi } z = 0.$$

Rezolvare

Domeniul V este simplu în raport cu Oz. Proiecţia domeniului V pe planul xOy este domeniul

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 4x\}.$$

Astfel domeniul V este definit de

$$V : \begin{cases} 0 \leq z \leq \frac{x^2+y^2}{4} \\ (x,y) \in D \end{cases}.$$

Conform teoremei 7.6 avem că

$$\iiint_V dx\,dy\,dz = \iint_D \left(\int_0^{\frac{x^2+y^2}{4}} dz \right) dx\,dy = \iint_D \frac{x^2+y^2}{4}\,dx\,dy.$$

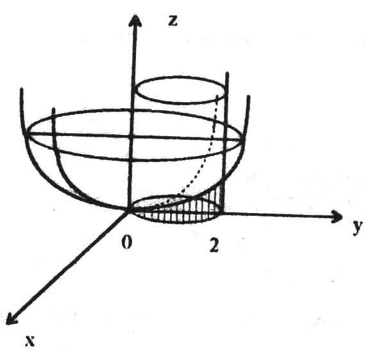
Deoarece

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 4x\},$$

vom utiliza transformarea de la coordonate polare la coordonate carteziene

$$T : \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}, \rho \geq 0, \theta \in [0, 2\pi].$$

Figura 13



Din $\rho^2 \leq 4\rho\cos\theta$, rezultă că

$$D' : \begin{cases} -\pi \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq \rho \leq 4\cos\theta \end{cases}$$

Deci

$$V = \iint_{D'} \frac{\rho^2}{4} \left| \frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)} \right| d\rho \, d\theta =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_0^{4\cos\theta} \frac{\rho^3}{4} \, d\rho \right) d\theta =$$

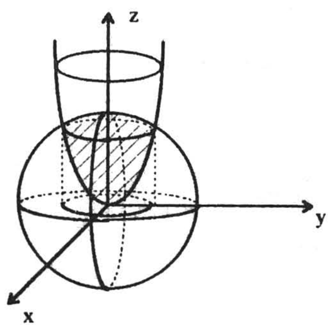
$$= \int_{-\pi}^{\pi} 16 \cos^4 \theta \, d\theta = 32 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = 6\pi.$$

11. **Domeniul V este mărginit de suprafeţele**

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4 \text{ şi } x^2 + y^2 = 3z.$$

Rezolvare

Figura 14



Domeniul V este simplu în raport cu axa Oz. Paraboloidul $x^2 + y^2 = 3z$ intersectează sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ după curba

$$\Gamma : \begin{cases} z = 1 \\ x^2 + y^2 = 3 \end{cases} .$$

Proiecţia volumului V pe planul xOy este domeniul

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 3\}.$$

Deci

$$V : \begin{cases} \frac{x^2+y^2}{3} \leq z \leq \sqrt{4-x^2-y^2} \\ (x,y) \in D \end{cases}.$$

Conform teoremei 7.6, avem că

$$\iiint_V dx\,dy\,dz = \iint_D \left(\int_{\frac{x^2+y^2}{3}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dz \right) dx\,dy =$$

$$= \iint_D \sqrt{4-x^2-y^2} - \frac{x^2+y^2}{3}\,dx\,dy.$$

Deoarece

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 3\},$$

vom utiliza transformarea de la coordonate polare la coordonate carteziene

$$T : \begin{cases} x = \rho cos\,\theta \\ y = \rho sin\,\theta \end{cases}, \rho \geq 0, \theta \in [0, 2\pi].$$

Deoarece $\rho^2 \leq 3$,rezultă că

$$D' : \begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \rho \leq \sqrt{3} \end{cases}$$

Deci

$$V = \iint_{D'} \left(\sqrt{4-\rho^2} - \frac{\rho^2}{3} \right) \rho\,d\rho\,d\theta =$$

$$= \int_0^{\sqrt{3}} \left(\int_0^{2\pi} \left(\rho\sqrt{4-\rho^2} - \frac{\rho^3}{3} \right) d\theta \right) d\rho =$$

$$= \int_0^{\sqrt{3}} \left(\rho\sqrt{4-\rho^2} - \frac{\rho^3}{3} \right) \cdot 2\pi\,d\rho =$$

$$= 2\pi \left(-\frac{1}{3}\sqrt{(4-\rho^2)^3} - \frac{\rho^4}{12} \right) \Big|_0^{\sqrt{3}} = 2\pi \left(\frac{7}{3} - \frac{3}{4} \right) = \frac{17\pi}{6}.$$

12. **Să se calculeze: a)masa**

b)coordonatele centrului de greutate

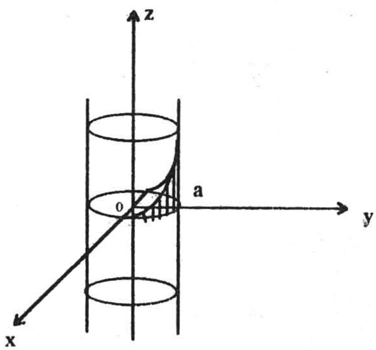
c)momentul de inerţie în raport cu axa Oz

ale unui corp material de densitate $dens(x,y,z) = z$ **care ocupă domeniul**

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 \leq a^2 \text{ şi } 0 \leq z \leq y, a > 0\}.$$

Rezolvare

Figura 15



Utilizând transformarea de la coordonate cilindrice la coordonate carteziene

$$T : \begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \sin\theta \quad , \rho \geq 0, \theta \in [0, 2\pi], z \in \mathbb{R} \\ z = z \end{cases}$$

domeniul V este dus pe domeniul V'.

Deoarece

$$\begin{cases} \rho^2 \leq a^2 \\ 0 \leq z \leq \rho sin\,\theta \end{cases}$$

rezultă că

$$V' : \begin{cases} 0 \leq \rho \leq a \\ 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq z \leq \rho sin\,\theta \end{cases} .$$

Deoarece $dens(x, y, z) = z$ este o funcţie continuă, avem:

a)

$$M = \iiint_V z\,dx\,dy\,dz = \iiint_{V'} z \left| \frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \theta, z)} \right| d\rho\,d\theta\,dz =$$

$$= \int_0^a \left(\int_0^\pi \left(\int_0^{\rho\,sin\,\theta} z\rho\,dz \right) d\theta \right) d\rho =$$

$$= \int_0^a \left(\int_0^\pi \frac{1}{2}\rho^3\,sin^2\,\theta\,d\theta \right) d\rho = \int_0^a \frac{1}{2}\rho^3 d\rho \int_0^\pi sin^2\,\theta\,d\theta =$$

$$= \frac{1}{8}\rho^4 \Big|_0^a \cdot 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2\,\theta\,d\theta = \frac{1}{8}a^4 \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi a^4}{16}$$

b)

$$x_G = \frac{1}{M} \iiint_V xz\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \frac{16}{\pi a^4} \iiint_{V'} (\rho\,cos\,\theta) z \left| \frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \theta, z)} \right| d\rho\,d\theta\,dz =$$

$$= \frac{16}{\pi a^4} \int_0^a \left(\int_0^\pi \left(\int_0^{\rho\,sin\,\theta} z(\rho^2\,cos\,\theta)\,dz \right) d\theta \right) d\rho =$$

$$= \frac{16}{\pi a^4} \int_0^a \left(\int_0^\pi \frac{1}{2}\rho^4\,sin^2\,\theta\,cos\,\theta\,d\theta \right) d\rho =$$

$$= \frac{16}{\pi a^4} \int_0^a \frac{1}{2}\rho^4 d\rho \int_0^\pi cos\,\theta\,sin^2\,\theta\,d\theta =$$

$$= \frac{8}{\pi a^4} \frac{\rho^5}{5}\Big|_0^a \cdot \frac{sin^3\,\theta}{3}\Big|_0^\pi = 0$$

$$y_G = \frac{1}{M}\iiint_V yz\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \frac{16}{\pi a^4}\iiint_{V'}(\rho\sin\theta)z\left|\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\theta,z)}\right| d\rho\,d\theta\,dz =$$

$$= \frac{16}{\pi a^4}\int_0^a\left(\int_0^\pi\left(\int_0^{\rho\sin\theta} z(\rho^2\sin\theta)\,dz\right)d\theta\right)d\rho =$$

$$= \frac{16}{\pi a^4}\int_0^a\left(\int_0^\pi \frac{1}{2}\rho^4\sin^3\theta\,d\theta\right)d\rho =$$

$$= \frac{16}{\pi a^4}\int_0^a \frac{1}{2}\rho^4 d\rho\int_0^\pi \sin\theta(1-\cos^2\theta)\,d\theta =$$

$$= \frac{8}{\pi a^4}\,\frac{\rho^5}{5}\Big|_0^a\cdot\left(-\cos\theta+\frac{\cos^3\theta}{3}\right)\Big|_0^\pi = \frac{8a}{5\pi}\left(2-\frac{2}{3}\right) = \frac{32a}{15\pi}$$

$$z_G = \frac{1}{M}\iiint_V z^2\,dx\,dy\,dz = \frac{16}{\pi a^4}\iiint_{V'} z^2\left|\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\theta,z)}\right| d\rho\,d\theta\,dz =$$

$$= \frac{16}{\pi a^4}\int_0^a\left(\int_0^\pi\left(\int_0^{\rho\sin\theta} z^2\rho\,dz\right)d\theta\right)d\rho =$$

$$= \frac{16}{\pi a^4}\int_0^a\left(\int_0^\pi \frac{1}{3}\rho^4\sin^3\theta\,d\theta\right)d\rho =$$

$$= \frac{16}{\pi a^4}\int_0^a \frac{1}{3}\rho^4 d\rho\int_0^\pi \sin^3\theta\,d\theta = \frac{16a}{15\pi}\frac{4}{3} = \frac{64}{45\pi}.$$

Deci

$$G\left(0,\frac{32a}{15\pi},\frac{64a}{45\pi}\right).$$

c)

$$I_{Oz} = \iiint_V (x^2+y^2)z\,dx\,dy\,dz = \iiint_{V'} \rho^2 z\left|\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\theta,z)}\right| d\rho\,d\theta\,dz =$$

$$= \int_0^a\left(\int_0^\pi\left(\int_0^{\rho\sin\theta} z\rho^3\,dz\right)d\theta\right)d\rho = \int_0^a\left(\int_0^\pi \frac{1}{2}\rho^4\sin^2\theta\,d\theta\right)d\rho =$$

$$= \int_0^a \frac{1}{2}\rho^4 d\rho\int_0^\pi \sin^2\theta\,d\theta = \frac{a^5}{10}\cdot 2\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{a^5\pi}{20}.$$

Folosind formula Gauss-Ostrogradski să se calculeze următoarele integrale:

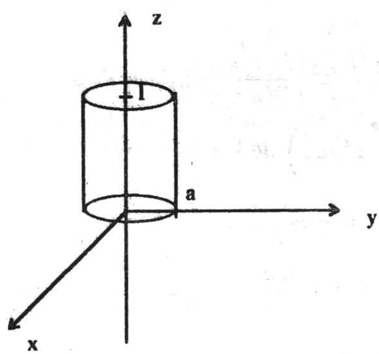
13. $$\iint_S x^3\,dy\,dz + x^2y\,dz\,dx + x^2z\,dx\,dy,$$

unde $S = Fr\,V$,

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2+y^2 \leq a^2 \text{ şi } 0 \leq z \leq 1, a > 0\}.$$

Rezolvare

Figura 16



Deoarece S este o suprafaţă închisă, simplă, netedă pe porţiuni şi funcţiile

$$P, Q, R : V \longrightarrow \mathbb{R}, P(x,y,z) = x^3, Q(x,y,z) = x^2y, R(x,y,z) = x^2z$$

sunt de clasă C^1 pe V, putem aplica formula lui Gauss-Ostrogradski. Deci

$$\iint_S x^3\,dy\,dz + x^2y\,dz\,dx + x^2z\,dx\,dy =$$

$$= \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial R}{\partial z}(x,y,z)\right) dx\,dy\,dz =$$

$$= \iiint_V (3x^2 + x^2 + x^2)\, dx\, dy\, dz = 5 \iiint_V x^2\, dx\, dy\, dz.$$

Pentru a calcula integrala triplă vom utiliza transformarea de la coordonate cilindrice la coordonate carteziene,

$$T : \begin{cases} x = \rho cos\, \theta \\ y = \rho sin\, \theta \\ z = z \end{cases}, \rho \geq 0, \theta \in [0, 2\pi], z \in \mathbb{R}$$

care duce domeniul V pe domeniul V'

$$V' : \begin{cases} 0 \leq \rho \leq a \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq z \leq 1 \end{cases}.$$

Deci

$$\iint_S x^3\, dy\, dz + x^2 y\, dz\, dx + x^2 z\, dx\, dy =$$

$$= 5 \iiint_{V'} \rho^2 cos^2\, \theta \left| \frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \theta, z)} \right| d\rho\, d\theta\, dz =$$

$$= 5 \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^a \rho^3 cos^2\, \theta\, d\rho \right) d\theta \right) dz =$$

$$= 5 \int_0^1 dz \int_0^{2\pi} cos^2\, \theta\, d\theta \int_0^a \rho^3 d\rho = 5 \cdot 4 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a^4}{4} = \frac{5a^4}{4}.$$

14. $$\iint_S x^3 y^2\, dy\, dz + x^2 y^3\, dz\, dx + 3z\, dx\, dy,$$

unde $S = Fr\, V$,

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 \leq z \leq 6 - x^2 - y^2\}.$$

Rezolvare

Deoarece S este o suprafaţă închisă, simplă, netedă pe porţiuni şi funcţiile

$$P, Q, R : V \longrightarrow \mathbb{R}, P(x, y, z) = x^3 y^2, Q(x, y, z) = x^2 y^3, R(x, y, z) = 3z$$

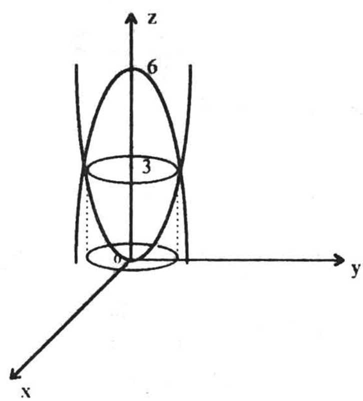
sunt de clasă C^1 pe V, putem aplica formula lui Gauss-Ostrogradski. Deci

$$\iint_S x^3y^2\,dy\,dz + x^2y^3\,dz\,dx + 3z\,dx\,dy =$$

$$= \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial R}{\partial z}(x,y,z)\right) dx\,dy\,dz =$$

$$= \iiint_V (3x^2y^2 + 3x^2y^2 + 3)\,dx\,dy\,dz.$$

Figura 17



Cei doi paraboloizi se intersectează după curba

$$\Gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 = 3 \\ z = 3 \end{cases}.$$

Proiecţia domeniului V pe planul xOy este domeniul

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 3\}.$$

Domeniul V este simplu în raport cu axa Oz şi este definit de

$$V : \begin{cases} x^2 + y^2 \le z \le 6 - x^2 - y^2 \\ (x,y) \in D \end{cases} .$$

Deci

$$\iint_S x^3y^2\, dy\, dz + x^2y^3\, dz\, dx + 3z\, dx\, dy =$$

$$= \iint_D \left(\int_{x^2+y^2}^{6-x^2-y^2} (6x^2y^2 + 3) dz \right) dx\, dy = 6 \iint_D (2x^2y^2 + 1)(3 - x^2 - y^2)\, dx\, dy.$$

Pentru a calcula integrala dublă utilizăm transformarea de la coordonate polare la coordonate carteziene,

$$T : \begin{cases} x = \rho cos\,\theta \\ y = \rho sin\,\theta \end{cases} , \rho \ge 0, \theta \in [0, 2\pi]$$

Prin această transformare domeniul D este dus pe domeniul D',

$$D' : \begin{cases} 0 \le \rho \le \sqrt{3} \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases} .$$

Deci

$$\iint_S x^3y^2\, dy\, dz + x^2y^3\, dz\, dx + 3z\, dx\, dy =$$

$$= 6 \iint_{D'} (2\rho^4 cos^2\,\theta\, sin^2\,\theta + 1)(3 - \rho^2) \left| \frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)} \right| d\rho\, d\theta =$$

$$= 6 \int_0^{\sqrt{3}} \left(\int_0^{2\pi} \left(2\rho^4 cos^2\,\theta\, sin^2\,\theta + 1\right)(3\rho - \rho^3)\, d\theta \right) d\rho =$$

$$= 6 \int_0^{\sqrt{3}} (3\rho - \rho^3) \left[2\rho^4 \int_0^{2\pi} (sin^2\,\theta - sin^4\,\theta) d\theta + 2\pi \right] d\rho =$$

$$= 6 \int_0^{\sqrt{3}} (3\rho - \rho^3) \left[8\rho^4 \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \right) + 2\pi \right] d\rho =$$

$$= 3\pi \int_0^{\sqrt{3}} (3\rho^5 - \rho^7 + 12\rho - 4\rho^3)\, d\rho =$$

$$= 3\pi\left(\frac{3}{6}\rho^6 - \frac{1}{8}\rho^8 + \frac{12}{2}\rho^2 - \frac{4}{4}\rho^4\right)\Big|_0^{\sqrt{3}} =$$

$$= 3\pi\left(\frac{1}{2}\cdot 27 - \frac{81}{8} + 18 - 9\right) = 3\pi\frac{25}{2} = \frac{75\pi}{2}.$$

Probleme propuse.

Să se calculeze următoarele integrale triple pe fiecare din volumele precizate:

1. $$\iiint_V x\,dx\,dy\,dz,$$

$$V_1 : \begin{cases} 2x + 3y - 6z \le 6 \\ x \ge 0\ , y \geq 0, z \geq 0 \end{cases}$$

$$V_2 : \begin{cases} 6x + 3y - 2z \le 6 \\ 0 \le z \le 1\ , x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

$$V_3 : \begin{cases} 6x + 3y - 2z \le 6 \\ -1 \le z \le 1\ , x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

2. $$\iiint_V (x^2 + y^2)\,dx\,dy\,dz,$$

$$V_1 : \begin{cases} 4 \le x^2 + y^2 \le 9 \\ -5 \le z \le 7\ , x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

$$V_2 : \begin{cases} x^2 + y^2 \le z^2 \\ 1 \le z \le 2\ , x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

3. $$\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2}\,dx\,dy\,dz,$$

$$V_1 : \begin{cases} x^2 + y^2 \leq z^2 \\ 0 \leq z \leq 1 \end{cases}$$

$$V_2 : \begin{cases} 4 \leq x^2 + y^2 \leq z^2 \\ 0 \leq z \leq 3 \end{cases}$$

4. $$\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dx\, dy\, dz,$$

$$V_1 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$$

$$V_2 : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \leq 9 \\ z \geq 0 \end{cases}$$

$$V_3 : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \leq 9 \\ z \leq 0 \end{cases}$$

Capitolul 8

Integrale de suprafaţă

8.1 În raport cu elementul de suprafaţă.

Teorie.

Fie $D \in \mathbb{R}^2$ un domeniu compact din $\mathbb{R}^2$ care are arie şi suprafaţa S dată parametric

$$S : \begin{cases} x = f(u,v) \\ y = g(u,v) \\ z = h(u,v) \end{cases} .$$

$f, g, h \in C^1(D)$ sau vectorial

$$S : \bar{r} = \bar{r}(u,v) = f(u,v)\bar{i} + g(u,v)\bar{j} + h(u,v)\bar{k}; (u,v) \in D.$$

Suprafaţa S se numeşte simplă dacă din

$$(u_1, v_1) \neq (u_2, v_2)$$

rezultă că

$$\bar{r}(u_1, v_1) \neq \bar{r}(u_2, v_2).$$

Suprafaţa S se numeşte netedă dacă $||\bar{r}_u \times \bar{r}_v|| > 0$ pentru orice $(u,v) \in D$, unde

$$\bar{r}_u(u,v) = \frac{\partial f}{\partial u}(u,v)\bar{i} + \frac{\partial g}{\partial u}(u,v)\bar{j} + \frac{\partial h}{\partial u}(u,v)\bar{k}$$

şi

$$\bar{r}_v(u,v) = \frac{\partial f}{\partial v}(u,v)\bar{i} + \frac{\partial g}{\partial v}(u,v)\bar{j} + \frac{\partial h}{\partial v}(u,v)\bar{k}.$$

Fie $(u_0, v_0) \in D$.

Aria paralelogramului curbiliniu $ABCD$ de pe suprafaţa S se aproximează cu aria paralelogramului construit pe vectorii $du\,\bar{r}_u$ şi $dv\,\bar{r}_v$,

$$aria(ABCD) \approx ||\bar{r}_u \times \bar{r}_v||du\,dv.$$

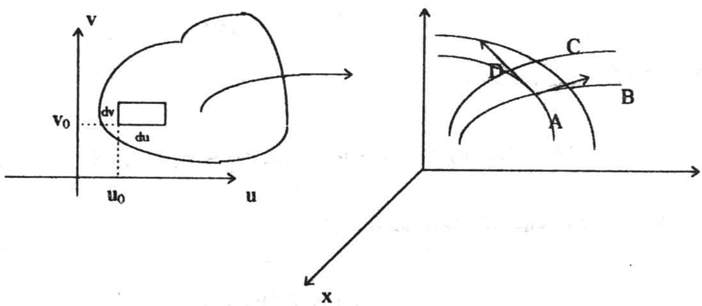
Definiţia 8.1 *Prin aria suprafeţei S înţelegem numărul*

$$\iint_D \|\bar{r}_u \times \bar{r}_v\|\, du\, dv.$$

Notăm

$$aria(S) = \iint_D \|\bar{r}_u \times \bar{r}_v\|\, du\, dv.$$

Figura 1



Teorema 8.2 *Aria unei suprafeţe simple, netede nu depinde de parametrizarea aleasă.*

Definiţia 8.3 *Forma diferenţială*

$$d\sigma = \|\bar{r}_u \times \bar{r}_v\| du\, dv$$

se numeşte elementul de arie al suprafeţei S.

8.4 Observaţii.

a) Dacă notăm cu

$$E = \bar{r}_u \cdot \bar{r}_u = \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial u}\right)^2$$

$$F = \bar{r}_u \cdot \bar{r}_v = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial g}{\partial u} \cdot \frac{\partial g}{\partial v} + \frac{\partial h}{\partial u} \cdot \frac{\partial h}{\partial v}$$

$$G = \bar{r}_v \cdot \bar{r}_v = \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial v}\right)^2$$

$$A = \frac{D(g,h)}{D(u,v)}; B = \frac{D(h,f)}{D(u,v)}; C = \frac{D(f,g)}{D(u,v)};$$

avem că

$$||\bar{r}_u \times \bar{r}_v|| = \sqrt{EG - F^2} = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Deci

$$d\sigma = \sqrt{EG - F^2}du\,dv = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}du\,dv.$$

b) Dacă suprafaţa S este definită de ecuaţia

$$z = f(x,y), f \in C^1(D), D \subseteq I\!R^2$$

punând

$$S : \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = f(u,v), \ \ (u,v) \in D \end{cases}$$

avem că

$$E = 1 + p^2; F = pq; G = 1 + q^2; A = -p; B = -q; C = 1,$$

unde

$$p = \frac{\partial f}{\partial x}, q = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Deci

$$d\sigma = \sqrt{p^2 + q^2 + 1}dx\,dy.$$

Definiţia 8.5 *Fie $D \in \mathbb{R}^2$, domeniu compact cu arie, S o suprafaţă simplă, netedă dată parametric*

$$S : \begin{cases} x = f(u,v) \\ y = g(u,v) \\ z = h(u,v), \quad f,g,h \in C^1(D), \end{cases}$$

$G \subseteq \mathbb{R}^3$ un domeniu,

$$\{(f(u,v), g(u,v), h(u,v)) | (u,v) \in D\} \subseteq G$$

şi $F : G \longrightarrow \mathbb{R}$.

Fie $\Delta = (D_1, D_2, \ldots, D_n)$ o diviziune a domeniului D,

$$||\Delta|| = \max_{i=1,n}\{aria(D_i)\}.$$

Fiecărui domeniu compact D_i îi corespunde porţiunea S_i din suprafaţa S. Alegem în fiecare D_i câte un punct (u_i, v_i) oarecare. Notăm cu

$$\begin{cases} \xi_i = f(u_i, v_i) \\ \eta_i = g(u_i, v_i) \\ \zeta_i = h(u_i, v_i) \end{cases}$$

şi

$$\Sigma_\Delta(F, \xi_i, \eta_i, \zeta_i) = \sum_{i=1}^{n} F(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) aria(S_i).$$

Spunem că funcţia F este integrabilă pe suprafaţa S dacă există $I \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta(\epsilon) > 0 \text{ astfel încât } \forall \Delta \text{ diviziune cu } ||\Delta|| < \delta(\epsilon) \text{ şi}$$

$$\forall (u_i, v_i) \in D_i, i = 1,n, \text{ să avem } |I - \Sigma_\Delta(F, \xi_i, \eta_i, \zeta_i)| < \epsilon.$$

Vom nota

$$I = \iint_S F(x,y,z)\, d\sigma.$$

Teorema 8.6 *(de reducere a unei integrale de suprafaţă în raport cu elementul de suprafaţă la o integrală dublă.)*

Dacă $D \subseteq \mathbb{R}^2$, domeniu compact cu arie, S o suprafaţă simplă, netedă,

$$S: \begin{cases} x = f(u,v) \\ y = g(u,v) \\ z = h(u,v), \quad f,g,h \in C^1(D), \end{cases}$$

$G \subseteq \mathbb{R}^3$ un domeniu, astfel încât

$$\{(f(u,v), g(u,v), h(u,v)) | (u,v) \in D\} \subseteq G$$

şi $F : G \longrightarrow \mathbb{R}$ continuă, atunci F este integrabilă pe suprafaţa S şi

$$\iint_S F(x,y,z)\, d\sigma = \iint_D F(f(u,v), g(u,v), h(u,v)) ||\bar{r}_u \times \bar{r}_v||\, du\, dv.$$

8.7 Proprietăţi ale integralei de suprafaţă în raport cu elementul de suprafaţă.

a) Dacă funcţiile F şi G sunt integrabile pe suprafaţa S şi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, atunci funcţia $\alpha F + \beta G$ este integrabilă pe suprafaţa S şi

$$\iint_S (\alpha F + \beta G)(x,y,z)\, d\sigma = \alpha \iint_S F(x,y,z)\, d\sigma + \beta \iint_S G(x,y,z)\, d\sigma.$$

b) Dacă suprafeţele S_1 şi S_2 sunt juxtapozabile şi F o funcţie integrabilă pe suprafaţa $S = S_1 \cup S_2$, atunci funcţia F este integrabilă pe suprafeţele S_1 şi S_2 şi mai mult

$$\iint_S F(x,y,z)\, d\sigma = \iint_{S_1} F(x,y,z)\, d\sigma + \iint_{S_2} F(x,y,z)\, d\sigma.$$

8.8 Aplicatii *Fie S o suprafaţă materială şi $\rho(x,y,z)$ densitatea suprafeţei în punctul (x,y,z).*

a)Masa suprafeţei este dată de egalitatea

$$M = \iint_S \rho(x,y,z)\, d\sigma.$$

b)Coordonatele centrului de greutate sunt date de egalităţile:

$$x_G = \frac{1}{M}\iint_S x\rho(x,y,z)\,d\sigma$$

$$y_G = \frac{1}{M}\iint_S y\rho(x,y,z)\,d\sigma$$

$$z_G = \frac{1}{M}\iint_S z\rho(x,y,z)\,d\sigma.$$

c)Momentele de inerţie sunt date de egalităţile

$$I_O = \iint_S (x^2+y^2+z^2)\rho(x,y,z)\,d\sigma$$

$$I_{Ox} = \iint_S (y^2+z^2)\rho(x,y,z)\,d\sigma$$

$$I_{Oy} = \iint_S (x^2+z^2)\rho(x,y,z)\,d\sigma$$

$$I_{Oz} = \iint_S (x^2+y^2)\rho(x,y,z)\,d\sigma$$

$$I_{xOy} = \iint_S z^2\rho(x,y,z)\,d\sigma$$

$$I_{xOz} = \iint_S y^2\rho(x,y,z)\,d\sigma$$

$$I_{yOz} = \iint_S x^2\rho(x,y,z)\,d\sigma.$$

Probleme rezolvate.

Să se calculeze

1. $$\iint_S (x-3z)\,d\sigma, S = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 | x+2y+3z=6, x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0\}$$

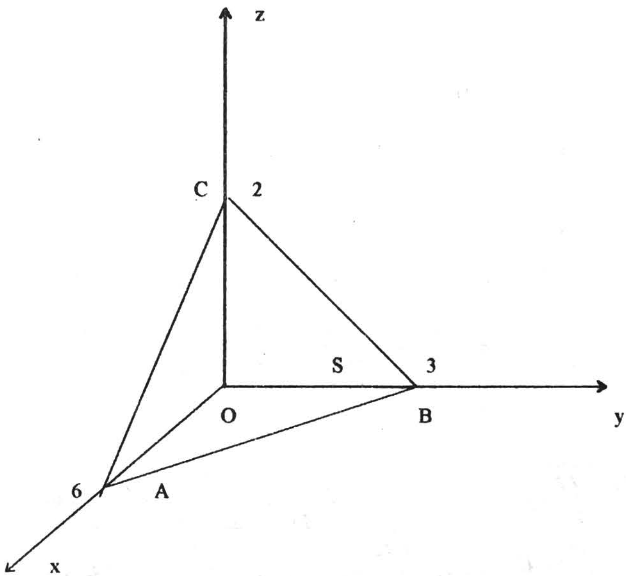
Rezolvare.

Suprafaţa S cstc porţiunca din planul $x+2y+3z=6$ situată în cadranul I. Atunci

$$S : z = 2 - \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y, (x,y)\in D$$

unde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x + 2y \leq 6, x \geq 0, y \geq 0\}$ este proiecția suprafeței S pe planul xOy.

Figura 2



Avem că

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{3}; q = \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2}{3},$$

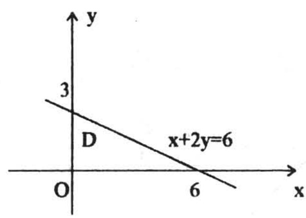
şi deci

$$d\sigma = \sqrt{p^2 + q^2 + 1}\,dx\,dy = \frac{\sqrt{14}}{3}dx\,dy.$$

Deoarece funcţia $F : I\!R^3 \longrightarrow I\!R, F(x,y,z) = x - 3z$ este continuă pe $I\!R^3$ şi suprafaţa S este simplă şi netedă, din teorema de reducere a unei integrale de suprafaţă în raport cu elementul de suprafaţa la o integrală dublă avem că

$$\iint_S (x - 3z)\,d\sigma = \iint_D \left[x - 3(2 - \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y)\right] \frac{\sqrt{14}}{3}\,dx\,dy =$$

Figura 3



$$= \frac{2\sqrt{14}}{3} \iint_D (y - 3)\,dx\,dy = \frac{2\sqrt{14}}{3} \int_0^3 \left(\int_0^{6-2y} (y-3)dx\right) dy =$$

$$= \frac{2\sqrt{14}}{3} \int_0^3 (y-3)x\Big|_0^{6-2y} dy = -\frac{4\sqrt{14}}{3} \int_0^3 (y-3)^2 dy =$$

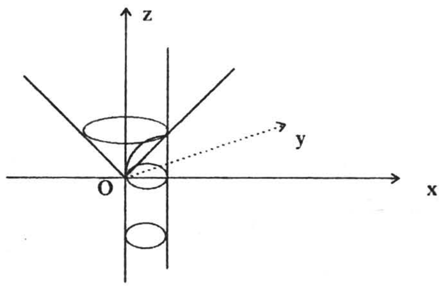
$$= -\frac{4\sqrt{14}}{3}\,\frac{(y-3)^3}{3}\Big|_0^3 = 12\sqrt{14}.$$

2. $$\iint_S (xy + yz + zx)\,d\sigma, S = \{(x,y,z) \in I\!R^3 |\, z = \sqrt{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 \le 2x\}$$

Rezolvare.

Suprafaţa S este porţiunea din conul $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ situată în interiorul cilindrului $x^2 + y^2 \le 2x$.

Figura 4



Atunci $S : z = \sqrt{x^2 + y^2}, (x, y) \in D$, unde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 \leq 2x\}$ este proiecția suprafeței S pe planul xOy. Avem că

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; q = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

și deci

$$d\sigma = \sqrt{p^2 + q^2 + 1}\, dx\, dy = \sqrt{2}\, dx\, dy.$$

Deoarece funcția $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $F(x, y, z) = xy + yz + zx$ este continuă și suprafața S este netedă și simplă, din teorema de reducere la o integrală dublă a integralei de suprafață în raport cu elementul de suprafață, avem

$$\iint_S (xy + yz + zx)\, d\sigma = \iint_D [xy + (x + y)\sqrt{x^2 + y^2}]\sqrt{2}\, dx\, dy$$

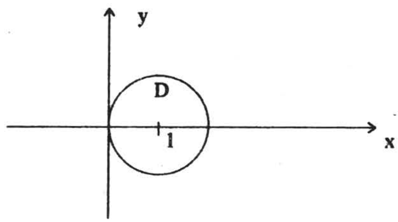
Pentru a calcula integrala dublă vom trece de la coordonatele carteziene la coordonatele polare.

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

$$D \longrightarrow D' = \left\{(r,\theta)\,|\,r \in [0, 2\cos\theta], \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right\}$$

$$dx\,dy = \frac{D(x,y)}{D(r,\theta)}\,dr\,d\theta = r\,dr\,d\theta.$$

Figura 5



Deci

$$\iint_S (xy + yz + zx)\,d\sigma =$$

$$= \sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2\cos\theta} [r^2\cos\theta\sin\theta + r^2(\cos\theta + \sin\theta)]r\,dr\right)\,d\theta =$$

$$= \sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta\sin\theta + \cos\theta + \sin\theta)\left.\frac{r^4}{4}\right|_0^{2\cos\theta} d\theta =$$

$$= 4\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^5\theta\sin\theta + \cos^5\theta + \sin\theta\cos^4\theta\right)d\theta =$$

$$= 8\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5\theta d\theta = 8\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \sin^2\theta\right)^2\cos\theta\,d\theta =$$

$$= 8\sqrt{2}\left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right) = \frac{16\sqrt{2}}{15}.$$

3. $$\iint_S (x + y + z)d\sigma, S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,|\,x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z \geq 0\}$$

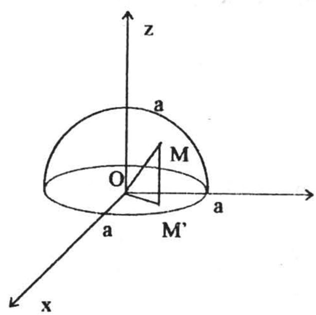
Rezolvare.

Suprafaţa S este porţiunea din sfera de centru $O(0,0,0)$ şi rază a,

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

situată în semispaţiul $z \geq 0$.

Figura 6



Pe S putem considera următoarea parametrizare:

$$S: \begin{cases} x = a\,cos\,u\,sin\,v \\ y = a\,sin\,u\,sin\,v \\ z = a\,cos\,v, \quad u \in [0, 2\pi], v \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]. \end{cases}$$

Atunci

$$A = \frac{D(y,z)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} a\,cos\,u\,sin\,v & a\,sin\,u\,cos\,v \\ 0 & -a\,sin\,v \end{vmatrix} = -a^2\,cos\,u\,sin^2\,v$$

$$B = \frac{D(z,x)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} 0 & -a\,sin\,v \\ -a\,sin\,u\,sin\,v & a\,cos\,u\,cos\,v \end{vmatrix} = -a^2\,sin\,u\,sin^2\,v$$

$$C = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} -a\,sin\,u\,sin\,v & a\,cos\,u\,cos\,v \\ a\,cos\,u\,sin\,v & a\,sin\,u\,cos\,v \end{vmatrix} = -a^2\,sin\,v\,cos\,v,$$

şi deci

$$d\sigma = \sqrt{A^2+B^2+C^2}du\,dv = a^2\,sin\,v\,du\,dv.$$

Deoarece funcţia $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $F(x,y,z) = x+y+z$ este continuă şi suprafaţa S este netedă şi simplă, din teorema de reducere la o integrală dublă a integralei de suprafaţă în raport cu elementul de suprafaţă, avem

$$\iint_S (x+y+z)\,d\sigma =$$

$$\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a\,cos\,u\,sin\,v + a\,sin\,u\,sin\,v + a\,cos\,v)a^2\,sin\,v\,dv\right)du =$$

$$= a^3\int_0^{2\pi}\left(cos\,u\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2} + sin\,u\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)du =$$

$$= a^3\left(\frac{\pi}{4}\cdot 0 + \frac{\pi}{4}\cdot 0 + \frac{1}{2}\cdot 2\pi\right) = \pi a^3.$$

Să se calculeze aria următoarelor suprafeţe:

4. $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2+z^2 = a^2,\}$,

unde $a \in \mathbb{R}_+^*$.

Rezolvare.

Suprafaţa S este sfera cu centrul în $O(0,0,0)$ şi rază a.

Pe S putem considera parametrizarea:

$$S : \begin{cases} x = a\,cos\,u\,sin\,v \\ y = a\,sin\,u\,sin\,v \\ z = a\,cos\,v, \quad u \in [0,2\pi], v \in [0,\pi]. \end{cases}$$

Atunci

$$A = \frac{D(y,z)}{D(u,v)} = -a^2 \cos u \sin^2 v$$

$$B = \frac{D(z,x)}{D(u,v)} = -a^2 \sin u \sin^2 v$$

$$C = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = -a^2 \sin v \cos v,$$

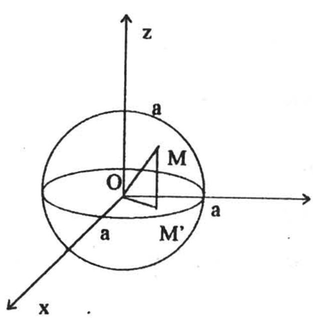
şi deci

$$d\sigma = a^2 \sin v \, du \, dv.$$

$$aria(S) = \iint_S d\sigma = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi} a^2 \sin v \, dv \right) du =$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} du \cdot \int_0^{\pi} \sin v \, dv = 4\pi a^2.$$

Figura 7

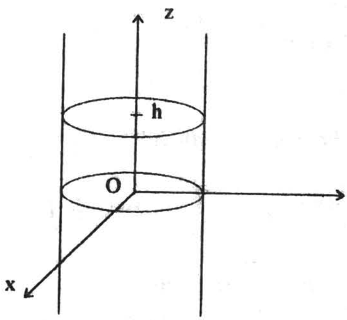


5. $$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = a^2, 0 \le z \le h\},$$

unde $a \in \mathbb{R}_+^*, h \in \mathbb{R}_+^*.$

Rezolvare.

Figura 8



Suprafaţa S este porţiunea din suprafaţa cilindrică $x^2 + y^2 = a^2$ situată între planele $z = 0$ şi $z = h$.

Pe suprafaţa S putem considera parametrizarea:

$$S : \begin{cases} x = a\cos u \\ y = a\sin u \\ z = v \ , u \in [0, 2\pi], v \in [0, h]. \end{cases}$$

Atunci

$$A = \frac{D(y,z)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} a\cos u & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = a\cos u$$

$$B = \frac{D(z,x)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -a\sin u & 0 \end{vmatrix} = a\sin u$$

$$C = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} a\cos u & 0 \\ -a\sin u & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

şi deci

$$d\sigma = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} du\, dv = a\, du\, dv.$$

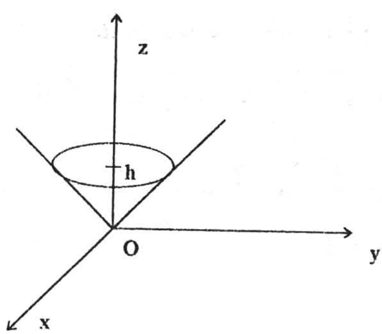
$$aria(S) = \iint_S d\sigma = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^h a\, dv \right) du = 2\pi h\, a.$$

6. $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z = \sqrt{x^2+y^2}, 0 \le z \le h\}$,

unde $h \in \mathbb{R}_+^*$.

Rezolvare.

Figura 9



Suprafaţa S este porţiunea din suprafaţa conică $z = \sqrt{x^2+y^2}$ situată între planele $z = 0$ şi $z = h$.

Pe suprafaţa S putem considera parametrizarea:

$$S:\begin{cases} x = v\cos u \\ y = v\sin u \\ z = v\ ,u \in [0,2\pi], v\in[0,h]. \end{cases}$$

Atunci

$$A = \frac{D(y,z)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} v\cos u & \sin u \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = v\cos u$$

$$B = \frac{D(z,x)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -v\sin u & \cos u \end{vmatrix} = v\sin u$$

$$C = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} -v\sin u & \cos u \\ v\cos u & \sin u \end{vmatrix} = -v,$$

şi deci

$$d\sigma = \sqrt{A^2+B^2+C^2}du\,dv = \sqrt{2}v\,du\,dv.$$

$$aria(S) = \iint_S d\sigma = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^h \sqrt{2}v\,dv\right)du = \sqrt{2}\pi h^2.$$

7. $$S = \{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3 \mid z = \frac{x^2}{2a}+\frac{y^2}{2b}, \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le c^2\},$$

unde $a,b,c\in \mathbb{R}_+^*$.

Rezolvare.

Suprafaţa S este porţiunea din paraboloidul $z = \frac{x^2}{2a}+\frac{y^2}{2b}$ situată în interiorul cilindrului $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le c^2$. Atunci

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{a}; q = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{b}$$

şi

$$d\sigma = \sqrt{p^2+q^2+1}dx\,dy = \sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+1}\,dx\,dy.$$

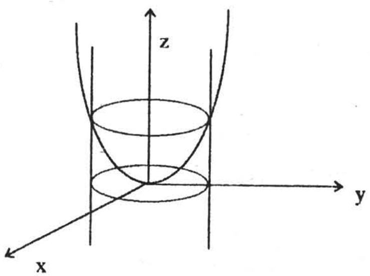
Proiecţia suprafeţei pe planul xOy este domeniul

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le c^2\}.$$

Prin urmare

$$aria(S) = \iint_S d\sigma = \iint_D \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1}\, dx\, dy.$$

Figura 10



Trecând de la coordonate carteziene la coordonate polare generalizate

$$\begin{cases} x = acr\cos\theta \\ y = bcr\sin\theta \end{cases}$$

$$dxdy = abc^2 r\, dr\, d\theta$$

$$D \longrightarrow D' = \{(r,\theta) \mid r \in [0,1], \theta \in [0,2\pi]\}$$

Deci

$$aria(S) = \iint_S d\sigma = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \sqrt{c^2r^2+1}\, abc^2 r\, d\theta \right) dr =$$

$$= 2\pi ab \frac{1}{3}\sqrt{(c^2r^2+1)^3}\Big|_0^1 = \frac{2\pi}{3} ab(\sqrt{(c^2+1)^3} - 1).$$

8. **Să se calculeze:**

a)masa

b)coordonatele centrului de grreutate

c)momentul de inerţie în raport cu planul xOy

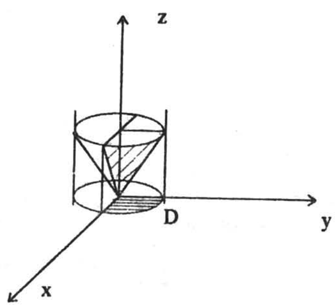
pentru suprafaţa materială

$$S = \{(x, y, z) \in I\!R^3 \,|\, 2z = \sqrt{x^2 + y^2}, 0 \le z \le 1, x \ge 0, y \ge 0\},$$

cu densitatea $\rho(x, y, z) = x$.

Rezolvare.

Figura 11



Suprafaţa S este o porţiune din suprafaţa conică $z = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2}$ situată între planele $z = 0, z = 1, x = 0, y = 0$. Proiecţia suprafeţei S pe planul xOy este domeniul

$$D = \{(x, y) \in I\!R^2 \,|\, x^2 + y^2 \le 4, x \ge 0, y \ge 0\},$$

iar elementul de suprafață

$$d\sigma = \sqrt{p^2+q^2+1}\,dx\,dy = \sqrt{\frac{x^2}{4(x^2+y^2)} + \frac{y^2}{4(x^2+y^2)} + 1}\,dx\,dy = \frac{\sqrt{5}}{2}dx\,dy.$$

Prin trecerea de la coordonate carteziene la coordonate polare

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

domeniul

$$D \longrightarrow D' = \left\{(r,\theta)\,|\,r\in[0,2], \theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right\}.$$

a)

$$M = \iint_S \rho(x,y,z)\,d\sigma = \iint_S x\,d\sigma = \iint_D x\frac{\sqrt{5}}{2}\,dx\,dy =$$
$$= \frac{\sqrt{5}}{2}\int_0^2\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} r\cos\theta\cdot r\,d\theta\right)dr = \frac{\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{8}{3} = \frac{4\sqrt{5}}{3}.$$

b)

$$x_G = \frac{1}{M}\iint_S x\rho(x,y,z)\,d\sigma = \frac{1}{M}\iint_S x^2\,d\sigma.$$

Dar

$$\iint_S x^2\,d\sigma = \iint_D x^2\frac{\sqrt{5}}{2}\,dx\,dy = \frac{\sqrt{5}}{2}\int_0^2\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2\cos^2\theta\cdot r\,d\theta\right)dr =$$
$$= \frac{\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{16}{4}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}\pi.$$

Deci

$$x_G = \frac{3}{4\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}\pi = \frac{3}{8}\pi.$$

$$y_G = \frac{1}{M}\iint_S y\rho(x,y,z)\,d\sigma = \frac{1}{M}\iint_S xy\,d\sigma.$$

Dar

$$\iint_S xy\,d\sigma = \iint_D xy\frac{\sqrt{5}}{2}\,dx\,dy = \frac{\sqrt{5}}{2}\int_0^2\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2\cos\theta\sin\theta\cdot r\,d\theta\right)dr =$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{16}{4}\cdot\frac{1}{2} = \sqrt{5}.$$

Deci

$$y_G = \frac{3}{4\sqrt{5}}\cdot\sqrt{5} = \frac{3}{4}.$$

$$z_G = \frac{1}{M}\iint_S z\rho(x,y,z)\,d\sigma = \frac{1}{M}\iint_S xz\,d\sigma.$$

Dar

$$\iint_S xz\,d\sigma = \iint_D x\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}\frac{\sqrt{5}}{2}\,dx\,dy = \frac{\sqrt{5}}{4}\int_0^2\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} r\cos\theta\cdot r\cdot r\,d\theta\right)dr =$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{4}\cdot\frac{16}{4}\cdot 1 = \sqrt{5}.$$

Deci

$$z_G = \frac{3}{4\sqrt{5}}\cdot\sqrt{5} = \frac{3}{4}.$$

c)

$$I_{xOy} = \iint_S z^2\rho(x,y,z)\,d\sigma = \iint_S z^2 x\,d\sigma = \iint_D x\frac{x^2+y^2}{4}\frac{\sqrt{5}}{2}\,dx\,dy =$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{8}\int_0^2\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} r\cos\theta\cdot r^2\cdot r\,d\theta\right)dr = \frac{\sqrt{5}}{8}\cdot\frac{32}{5} = \frac{4\sqrt{5}}{5}.$$

8.2 Integrale de suprafaţă în raport cu coordonatele

Teorie

Definiţia 8.9 *Fie S o suprafaţă netedă simplă dată parametric prin*

$$S : \begin{cases} x = f(u,v) \\ y = g(u,v) \\ z = h(u,v) \end{cases}$$

$f, g, h \in C^1(D), D \subseteq \mathbb{R}^2$ *domeniu compact cu arie sau vectorial*

$$S : \bar{r} = \bar{r}(u,v) = f(u,v)\bar{i} + g(u,v)\bar{j} + h(u,v)\bar{k}; (u,v) \in D.$$

Fie $M'(u,v) \in D$ şi $M(x,y,z)$ punctul corespunzător de pe suprafaţa S. În punctul M există doi versori normali la suprafaţa S, anume $\pm\bar{n}_M = \frac{\bar{r}_u \times \bar{r}_v}{\|\bar{r}_u \times \bar{r}_v\|}$. Suprafaţa S se numeşte suprafaţă orientabilă sau suprafaţă cu două feţe dacă aplicaţia $S \longrightarrow V_3$ care asociază fiecărui punct M de pe suprafaţa S unul din vectorii $\pm\bar{n}_M$ este continuă.

8.10 Observaţie.

1. *Dacă S este o suprafaţă orientabilă, atunci aplicaţia $S \longrightarrow \{-1, 1\}$ care asociază oricărui punct de pe suprafaţa S valoarea 1 sau -1 este continuă. Deoarece S este o mulţime conexă a lui $\mathbb{R}^3$, această aplicaţie este constantă, adică oricărui punct M de pe suprafaţa S îi asociem vectorul $\bar{n}_M$ sau oricărui punct M de pe suprafaţa S îi asociem vectorul $-\bar{n}_M$.*

2. *Dacă S este o suprafaţă orientabilă şi normala într-un punct la suprafaţă face un unghi ascuţit cu axa Oz spunem că S este orientată pozitiv.*

Dacă normala într-un punct la suprafaţa S face un unghi obtuz cu axa Oz spunem că S este orientată negativ.

3. *Orice suprafaţă netedă simplă este orientabilă.*

Definiţia 8.11 *Fie S o suprafaţă netedă simplă definită parametric prin*

$$S : \begin{cases} x = f(u,v) \\ y = g(u,v) \\ z = h(u,v) \end{cases}$$

$f, g, h \in C^1(D), D \subseteq \mathbb{R}^2$ domeniu compact cu arie, $G \subseteq \mathbb{R}^3$ domeniu astfel încât

$$\{(f(u,v), g(u,v), h(u,v)) \,|\, (u,v) \in D\} \subseteq G$$

şi funcţiile continue $P, Q, R : G \longrightarrow \mathbb{R}$. Să presupunem că pe suprafaţa S am ales orientarea dată de

$$\bar{n} = \frac{\bar{r}_u \times \bar{r}_v}{||\bar{r}_u \times \bar{r}_v||}.$$

Integrala funcţiei vectoriale

$$\bar{V}(x,y,z) = P(x,y,z)\bar{i} + Q(x,y,z)\bar{j} + R(x,y,z)\bar{k}$$

pe suprafaţa S sau integrala de suprafaţă în raport cu coordonatele, pe care o notăm cu

$$\iint_S P(x,y,z)\,dy\,dz + Q(x,y,z)\,dz\,dx + R(x,y,z)\,dx\,dy$$

se defineşte prin egalitatea

$$\iint_S P(x,y,z)\,dy\,dz + Q(x,y,z)\,dz\,dx + R(x,y,z)\,dx\,dy = \iint_S (\bar{V} \cdot \bar{n})\,d\sigma.$$

8.12 *CALCULUL INTEGRALEI DE SUPRAFAŢĂ ÎN RAPORT CU COORDONATELE.*

Fie S o suprafață simplă netedă definită parametric prin

$$S : \begin{cases} x = f(u,v) \\ y = g(u,v) \\ z = h(u,v) \end{cases}$$

$f, g, h \in C^1(D), D \subseteq \mathbb{R}^2$ domeniu compact cu arie, $G \subseteq \mathbb{R}^3$ domeniu astfel încât

$$\{(f(u,v), g(u,v), h(u,v)) \mid (u,v) \in D\} \subseteq G$$

şi funcţiile continue $P, Q, R : G \longrightarrow \mathbb{R}$.

Dacă pe suprafaţa S alegem orientarea dată de

$$\bar{n} = \frac{\bar{r}_u \times \bar{r}_v}{||\bar{r}_u \times \bar{r}_v||} = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}(A\bar{i} + B\bar{j} + C\bar{k}),$$

atunci

$$\iint_S P(x,y,z)\,dy\,dz + Q(x,y,z)\,dz\,dx + R(x,y,z)\,dx\,dy =$$
$$= \iint_D [P(f(u,v), g(u,v), h(u,v))A + Q(f(u,v), g(u,v), h(u,v))B +$$
$$+ R(f(u,v), g(u,v), h(u,v))C]\,du\,dv.$$

Dacă pe S alegem orientarea dată de

$$\bar{n} = -\frac{\bar{r}_u \times \bar{r}_v}{||\bar{r}_u \times \bar{r}_v||}$$

atunci

$$\iint_S P(x,y,z)\,dy\,dz + Q(x,y,z)\,dz\,dx + R(x,y,z)\,dx\,dy =$$
$$= -\iint_D [P(f(u,v), g(u,v), h(u,v))A + Q(f(u,v), g(u,v), h(u,v))B +$$
$$+ R(f(u,v), g(u,v), h(u,v))C]\,du\,dv.$$

unde

$$A = \frac{D(g,h)}{D(u,v)}, B = \frac{D(h,f)}{D(u,v)}, C = \frac{D(f,g)}{D(u,v)}.$$

În cazul în care suprafaţa S este definită de ecuaţia

$$z = f(x,y), f \in C^1(D), D \subseteq \mathbb{R}^2$$

domeniu compact cu arie, dacă pe S alegem orientarea pozitivă

$$\left(\bar{n} = \frac{1}{p^2+q^2+1}(-p\bar{i} - q\bar{j} + \bar{k})\right)$$

$$\iint_S P(x,y,z)\,dy\,dz + Q(x,y,z)\,dz\,dx + R(x,y,z)\,dx\,dy =$$

$$= \iint_D [P(x,y,f(x,y))(-p) + Q(x,y,f(x,y))(-q) + R(x,y,f(x,y))]\,dx\,dy,$$

iar dacă pe S alegem orientarea negativă

$$\iint_S P(x,y,z)\,dy\,dz + Q(x,y,z)\,dz\,dx + R(x,y,z)\,dx\,dy =$$

$$= \iint_D [P(x,y,f(x,y))p + Q(x,y,f(x,y))q - R(x,y,f(x,y))]\,dx\,dy,$$

unde

$$p = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y), q = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y).$$

8.13 Aplicaţii *Fie*

$$\bar{V}(x,y,z) = P(x,y,z)\bar{i} + Q(x,y,z)\bar{j} + R(x,y,z)\bar{k}$$

un câmp vectorial continuu pe deschisul $G \subseteq \mathbb{R}^3$, S o suprafaţă simplă netedă, definită prin

$$S : \begin{cases} x = f(u,v) \\ y = g(u,v) \\ z = h(u,v) \end{cases}$$

$f,g,h \in C^1(D), D \subseteq \mathbb{R}^2$ domeniu compact cu arie, astfel încât

$$\{(f(u,v), g(u,v), h(u,v)) \,|\, (u,v) \in D\} \subseteq G.$$

Pe S alegem orientarea dată de

$$\bar{n} = \frac{\bar{r}_u \times \bar{r}_v}{||\bar{r}_u \times \bar{r}_v||}.$$

Se numeşte fluxul câmpului $\bar{V}$ prin S, integrala de suprafaţă

$$\Phi_S(\bar{V}) = \iint_S (\bar{V} \cdot \bar{n})\, d\sigma =$$

$$= \iint_S P(x,y,z)\, dy\, dz\ + Q(x,y,z)\, dz\, dx\ + R(x,y,z)\, dx\, dy.$$

Probleme rezolvate.

Să se calculeze următoarele integrale de suprafaţă în raport cu coordonatele.

1. $$\iint_S x\, dy\, dz\ + y\, dz\, dx\ + z\, dx\, dy$$

pe faţa exterioară a suprafeţei sferice $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, a \in \mathbb{R}_+^*$.

Rezolvare.

Pe suprafaţa S putem considera parametrizarea

$$S : \begin{cases} x = a\cos u \sin v \\ y = a \sin u \sin v \\ z = a\cos v \quad u \in [0, 2\pi], v \in [0, \pi] \end{cases}.$$

Suprafaţa S este netedă, simplă şi versorul normalei la suprafaţa S în punctul M este dat de

$$\bar{n}_M = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}(A\bar{i} + B\bar{j} + C\bar{k}),$$

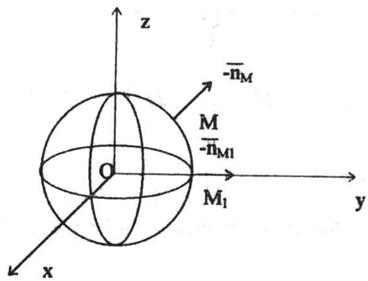
unde

$$A = \frac{D(y,z)}{D(u,v)} = -a^2 \cos u \sin^2 v$$

$$B = \frac{D(z,x)}{D(u,v)} = -a^2 \sin u \sin^2 v$$

$$C = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = -a^2 \cos v \sin v.$$

Figura 1



În punctul $M_1(0,a,0)$, avem că $\bar{n}_{M_1} = -\bar{j}$. Deci pentru a calcula integrala pe faţa exterioară a suprafeţei S, vom considera pe S orientarea dată de-$\bar{n}_M$.

Deoarece funcţiile $P, Q, R : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$P(x,y,z) = x, Q(x,y,z) = y, R(x,y,z) = z$$

sunt continue avem că

$$\iint_S x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy =$$

$$= -\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi} (-a^3 \cos^2 u \sin^3 v - a^3 \sin^2 u \sin^3 v - a^3 \cos^2 v \sin v) dv \right) du =$$

$$= a^3 \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi} \sin v\, dv \right) du = 4\pi a^3.$$

2. $$\iint_S \frac{dy\,dz}{ax} + \frac{dz\,dx}{by} + \frac{dz\,dy}{cz}$$

pe faţa exterioară a elipsoidului

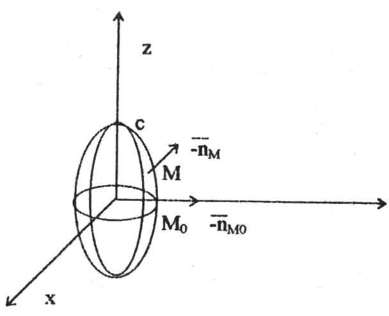
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\ a,b,c\in \mathbb{R}_+^*.$$

Rezolvare.

Pe suprafaţa S considerăm parametrizarea

$$S:\begin{cases} x = a\cos u\sin v \\ y = b\sin u\sin v \\ z = c\cos v \quad u\in[0,2\pi], v\in[0,\pi] \end{cases}.$$

Figura 2



Suprafaţa S este netedă, simplă şi versorul normalei în punctul M la suprafaţa S este

$$\bar{n}_M=\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}(A\bar{i}+B\bar{j}+C\bar{k}),$$

unde

$$A=\frac{D(y,z)}{D(u,v)}=-bc\cos u\sin^2 v$$

$$B = \frac{D(z,x)}{D(u,v)} = -ac\, sin\, u\, sin^2 v$$

$$C = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = -ab\, cos\, v\, sin\, v.$$

În punctul $M_0(0,b,0)$, avem că $\bar{n}_{M_0} = -\bar{j}$. Pentru a calcula integrala pe faţa exterioară a elipsoidului, pe S vom lua orientarea dată de $-\bar{n}_M$.

Deoarece funcţiile $P, Q, R : \mathbb{R}^{*3} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$P(x,y,z) = \frac{1}{xa}, Q(x,y,z) = \frac{1}{yb}, R(x,y,z) = \frac{1}{zc}$$

sunt continue pe $\mathbb{R}^{*3}$ avem că

$$\iint_S \frac{dy\,dz}{ax} + \frac{dz\,dx}{by} + \frac{dz\,dy}{cz} =$$

$$= -\iint_D \left(\frac{-bc\, cos\, u\, sin^2 v}{a^2\, cos\, u\, sin\, v} + \frac{-ac\, sin\, u\, sin^2 v}{b^2\, sin\, u\, sin\, v} + \frac{-ab\, cos\, v\, sin\, v}{c^2\, cos\, v} \right) du\, dv =$$

$$= \left(\frac{bc}{a^2} + \frac{ac}{b^2} + \frac{ab}{c^2} \right) \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi} sin\, v\, dv \right) du = \frac{b^3c^3 + a^3c^3 + a^3b^3}{a^2b^2c^2} 4\pi.$$

3. $$\iint_S x\, dy\, dz + y\, dz\, dx + z\, dx\, dy$$

pe faţa exterioară a suprafeţei

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 = a^2, -b \le z \le b\}, a, b \in \mathbb{R}_+^*.$$

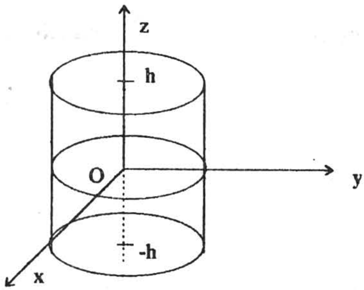
Rezolvare.

Suprafaţa S cstc suprafaţa cilindrică situată întrc planclc $z = 2b$ şi $z = b$.

Pe suprafaţa S considerăm parametrizarea

$$S : \begin{cases} x = a\, cos\, u \\ y = a\, sin\, u \\ z = v \quad u \in [0, 2\pi], v \in [-b, b] \end{cases}.$$

Figura 3



Suprafaţa S este o suprafaţă simplă, netedă şi

$$\bar{n}_M = \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}(A\bar{i}+B\bar{j}+C\bar{k}),$$

unde

$$A = \frac{D(y,z)}{D(u,v)} = a\cos u$$
$$B = \frac{D(z,x)}{D(u,v)} = a\sin u$$
$$C = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = 0.$$

În punctul $M_1(0,a,0)$, $\bar{n}_{M_1} = \bar{j}$. Deci pe suprafaţa S considerăm orientarea dată de $\bar{n}_M$.

Deoarece funcţiile $P, Q, R : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$P(x,y,z) = x, Q(x,y,z) = y, R(x,y,z) = z$$

sunt continue avem că

$$\iint_S x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy =$$

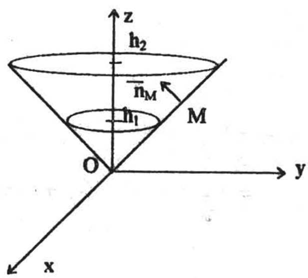
$$= \iint_D \left(a^2 \cos^2 u + a^2 \sin^2 u + v \cdot 0\right) du\, dv = \int_0^{2\pi} \left(\int_{-b}^{b} a^2\, dv\right) du = 4\pi\, b.$$

4. $$\iint_S (y - z)\, dy\, dz + (z - x)\, dz\, dx + (x - y)\, dx\, dy$$

pe faţa interioară a suprafeţei conice $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ situată între planele $z = h_1, z = h_2, 0 < h_1 < h_2$.

Rezolvare.

Figura 4



Suprafaţa S este o suprafaţă netedă, simplă, şi versorul normalei în punctul M este

$$\bar{n}_M = \frac{1}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}}(-p\bar{i} - q\bar{j} + \bar{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\bar{i} - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\bar{j} + \bar{k}\right)$$

unde

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; q = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Pentru a calcula integrala pe faţa interioară a suprafeţei conice S vom considera orientarea dată de $\bar{n}_M$. Deoarece funcţiile $P, Q, R : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$P(x,y,z) = y - z, Q(x,y,z) = z - x, R(x,y,z) = x - y$$

sunt continue avem că

$$\iint_S (y - z)\, dy\, dz\ + (z - x)\, dz\, dx\ + (x - y)\, dx\, dy =$$

$$= \iint_D \left[(y - \sqrt{x^2 + y^2}) \left(\frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) + \right.$$

$$\left. + (\sqrt{x^2 + y^2} - x) \left(\frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) + (x - y) \right] dx\, dy =$$

$$= \iint_D (2x - 2y)\, dx\, dy,$$

unde

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, {h_1}^2 \leq x^2 + y^2 \leq {h_2}^2\}.$$

Pentru a calcula integrala dublă vom trece de la coordonate carteziene la coordoonate polare.

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = a \sin\theta \end{cases}.$$

$$D \longrightarrow D', D' = \{(r,\theta) \,|\, r \in [h_1, h_2], \theta \in [0, 2\pi]\}.$$

Atunci

$$\iint_D (2x - 2y)\, dx\, dy = 2 \int_{h_1}^{h_2} \left(\int_0^{2\pi} (r\cos\theta - r\sin\theta)\, d\theta \right) dr =$$

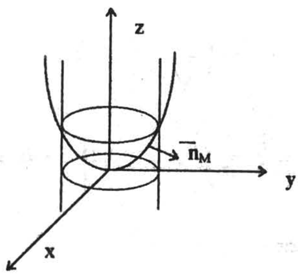
$$= 2 \int_{h_1}^{h_2} r^2\, dr \int_0^{2\pi} (\cos\theta - \sin\theta)\, d\theta = 0.$$

5. $$\iint_S xz\,dy\,dz + yz\;dz\,dx + (x^2+y^2)\,dx\,dy$$

pe fața exterioară a porțiunii din paraboloidul $z = x^2 + y^2$ situată în interiorul cilindrului $x^2 + y^2 = 1$.

Rezolvare.

Figura 5



Suprafața S este netedă, simplă, și versorul normalei în punctul M la suprafață este dat de

$$\bar{n}_M = \frac{1}{\sqrt{p^2+q^2+1}}(-p\bar{i} - q\bar{j} + \bar{k}) = \frac{1}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}\left(-2x\bar{i} - 2y\bar{j} + \bar{k}\right).$$

Pentru a calcula integrala pe fața exterioară a suprafeței S vom considera parametrizarea dată de $-\bar{n}_M$. Atunci

$$\iint_S xz\,dy\,dz + yz\,dz\,dx + (x^2+y^2)\,dx\,dy =$$

$$= -\iint_D \left[x(x^2+y^2)(-2x) + y(x^2+y^2)(-2y) + (x^2+y^2)\right]\,dx\,dy =$$

$$= \iint_D \left[2(x^2+y^2)^2 - (x^2+y^2)\right]\, dx\, dy.$$

unde

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\}.$$

Trecând de la coordonate carteziene la coordoonate polare avem că

$$\iint_S xz\, dy\, dz + yz\, dz\, dx + (x^2+y^2)\, dx\, dy =$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} (2r^2 - r)r\, d\theta\right) dr = 2\pi \int_0^1 (2r^3 - r^2)\, dr = \frac{\pi}{3}.$$

6. $$\iint_S x\, dy\, dz + y\, dz\, dx + \sqrt{x^2+y^2}\, dx\, dy$$

pe faţa exterioară a suprafeţei din paraboloidul $\frac{1}{4} - z = x^2 + y^2$ situată între conurile $z = \sqrt{x^2+y^2}$ şi $z = 2\sqrt{x^2+y^2}$.

Rezolvare.

Suprafaţa S este netedă, simplă, şi versorul normalei în punctul M este dat de

$$\bar{n}_M = \frac{1}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}\left(2x\bar{i} + 2y\bar{j} + \bar{k}\right).$$

Pentru a calcula integrala pe faţa exterioară a suprafeţei S considerăm orientarea dată de $\bar{n}_M$. Deoarece funcţiile $P, Q, R : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$P(x,y,z) = x, Q(x,y,z) = y, R(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2}$$

sunt continue

$$\iint_S x\, dy\, dz + y\, dz\, dx + \sqrt{x^2+y^2}\, dx\, dy =$$

$$= \iint_D \left(x \cdot 2x + y \cdot 2y + \sqrt{x^2+y^2}\right) dx\, dy =$$

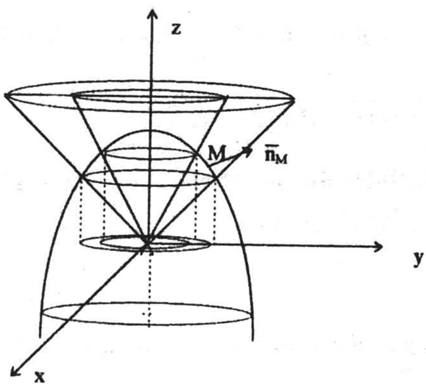
$$= \iint_D [2(x^2 + y^2) + \sqrt{x^2 + y^2}]\, dx\, dy,$$

unde

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \left(\frac{-1 + \sqrt{2}}{2}\right)^2 \leq x^2 + y^2 \leq (-2 + \sqrt{5})^2\}$$

este proiecţia suprafeţei S pe planul xOy.

Figura 6



Pentru a calcula integrala dublă trecem de la coordonate carteziene la coordoonate polare. Atunci

$$\iint_S x\, dy\, dz\ + y\, dz\, dx\ + \sqrt{x^2 + y^2}\, dx\, dy = \int_{\frac{-1+\sqrt{2}}{2}}^{-2+\sqrt{5}} (2r^2 + r) r\, dr \int_0^{2\pi} d\theta =$$

$$= \frac{1}{2} r^4 + \frac{1}{3} r^3 \Big|_{\frac{-1+\sqrt{2}}{2}}^{-2+\sqrt{5}} \cdot \theta \Big|_0^{2\pi} =$$

$$= \pi \left[(-2 + \sqrt{5})^4 - \left(\frac{-1 + \sqrt{2}}{2}\right)^4 \right] + \frac{2\pi}{3} \left[(-2 + \sqrt{5})^3 - \left(\frac{-1 + \sqrt{2}}{2}\right)^3 \right].$$

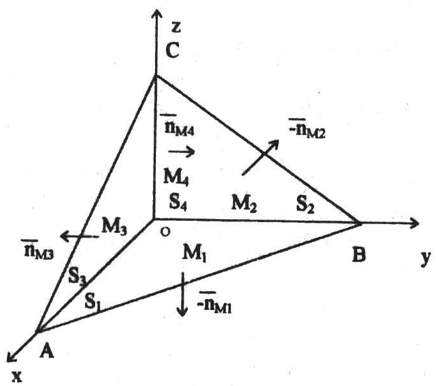
7. $$\iint_S x^2\,dy\,dz + y^2\,dz\,dx + z^2\,dx\,dy$$

pe faţa exterioară a tetraedrului cu vârfurile în punctele

$$O(0,0,0), A(1,0,0), B(0,1,0), C(0,0,1)$$

Rezolvare.

Figura 7



$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$, unde

S_1 este porţiunea din planul determinat de punctele O, A, B şi mărginită de dreptele OA, OB, AB;

S_2 este porţiunea din planul (OBC) mărginită de dreptele OB, OC şi BC;

S_3 este porţiunea din planul (OAC) mărginită de dreptele OA, OC şi AC;

S_4 este porţiunea din planul (ABC) mărginită de dreptele AB, AC şi BC.

Deci

$$S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | z = 0; x \geq 0; y \geq 0; x + y \leq 1\}$$

$$S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x = 0; y \geq 0; z \geq 0; y + z \leq 1\}$$

$$S_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | y = 0; x \geq 0; z \geq 0; x + z \leq 1\}$$

$$S_4 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | z = 1 - x - y; 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1; 0 \leq z \leq 1\}.$$

Suprafeţele S_1, S_2, S_3, S_4 fiind simple, netede, iar funcţiile $P, Q, R : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$P(x,y,z) = x^2, Q(x,y,z) = y^2, R(x,y,z) = z^2$$

fiind continue pe $\mathbb{R}^3$, avem că

$$\iint_S x^2\, dy\, dz + y^2\, dz\, dx + z^2\, dx\, dy =$$

$$= \iint_{S_1} x^2\, dy\, dz + y^2\, dz\, dx + z^2\, dx\, dy +$$

$$+ \iint_{S_2} x^2\, dy\, dz + y^2\, dz\, dx + z^2\, dx\, dy +$$

$$+ \iint_{S_3} x^2\, dy\, dz + y^2\, dz\, dx + z^2\, dx\, dy +$$

$$+ \iint_{S_4} x^2\, dy\, dz + y^2\, dz\, dx + z^2\, dx\, dy.$$

Suprafaţa S_1 este definită de

$$z = 0, (x,y) \in D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\, x + y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\},$$

iar vectorul normal la S_1 în punctul M_1,

$$\bar{n}_{M_1} = -p\bar{i} - q\bar{j} + \bar{k}.$$

Pentru a calcula integrala pe faţa exterioară a tetraedrului $OABC$ vom considera pe S_1 orientarea dată de $-\bar{n}_{M_1}$. Atunci

$$\iint_{S_1} x^2\,dy\,dz + y^2\,dz\,dx + z^2\,dx\,dy = -\iint_D (-0\cdot x^2 - 0\cdot y^2 + 0\cdot 1)\,dx\,dy.$$

Pe suprafaţa S_2 considerăm parametrizarea

$$S_2 : \begin{cases} x = 0 \\ y = u \\ z = v \ (u,v) \in D = \{(u,v) \in I\!R^2 \mid u+v \le 1, u \ge 0, v \ge 0\} \end{cases}.$$

Avem că

$$A = \frac{D(y,z)}{D(u,v)} = 1; B = \frac{D(z,x)}{D(u,v)} = 0; C = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = 0,$$

şi $\bar{n}_{M_2} = \bar{i}$. Deci, pe suprafaţa S_2 considerăm orientarea dată de $-\bar{n}_{M_2}$. Atunci

$$\iint_{S_2} x^2\,dy\,dz + y^2\,dz\,dx + z^2\,dx\,dy =$$

$$= -\iint_D (0\cdot 1 + u^2\cdot 0 + v^2\cdot 0)\,du\,dv = 0.$$

Pe suprafaţa S_3 considerăm parametrizarea

$$S_2 : \begin{cases} x = u \\ y = 0 \\ z = v \ (u,v) \in D = \{(u,v) \in I\!R^2 \mid u+v \le 1, u \ge 0, v \ge 0\} \end{cases}.$$

Avem că

$$A = \frac{D(y,z)}{D(u,v)} = 0; B = \frac{D(z,x)}{D(u,v)} = -1; C = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = 0,$$

şi $\bar{n}_{M_3} = -\bar{j}$. Pe suprafaţa S_3 considerăm orientarea dată de $\bar{n}_{M_3}$. Deci

$$\iint_{S_3} x^2\,dy\,dz + y^2\,dz\,dx + z^2\,dx\,dy =$$

$$= \iint_D (u^2 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) + v^2 \cdot 0)\, du\, dv = 0.$$

Suprafaţa S_4 este definită de

$$z = 1 - x - y, (x, y) \in D = \{(x, y) \in I\!R^2 \,|\, x + y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\},$$

iar vectorul normal la S_4 în punctul M_4,

$$\bar{n}_{M_4} = \frac{1}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}}(-p\bar{i} - q\bar{j} + \bar{k}) = \frac{1}{\sqrt{3}}\bar{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\bar{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\bar{k}.$$

Pentru a calcula integrala pe faţa exterioară a tetraedrului $OABC$, pe suprafaţa S_4 considerăm orientarea dată de $\bar{n}_{M_4}$. Atunci

$$\iint_{S_4} x^2\, dy\, dz + y^2\, dz\, dx + z^2\, dx\, dy = \iint_D [-x^2(-1) - y^2(-1) + (1 - x - y)^2]\, dx\, dy =$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (2x^2 + 2y^2 + 2xy - 2x - 2y + 1) dy \right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left(2x^2(1 - x) + \frac{2}{3}(1 - x)^3 + x(1 - x)^2 - 2x(1 - x) - (1 - x)^2 + (1 - x) \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(-\frac{5}{3}x^3 + 3x^2 - 2x + \frac{2}{3} \right) dx = -\frac{5}{12} + 1 - 1 + \frac{2}{3} = \frac{1}{4}.$$

Deci

$$\iint_S x^2\, dy\, dz + y^2\, dz\, dx + z^2\, dx\, dy = 0 + 0 + 0 + \frac{1}{4}.$$

8. **Să se calculeze fluxul câmpului vectorial**

$$\bar{v} = 2xz\bar{i} + 2yz\bar{j} - (x^2 + y^2)\bar{k}$$

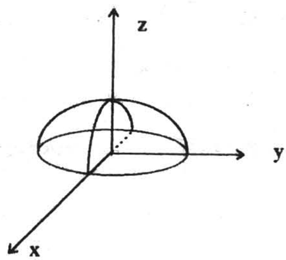
prin suprafaţa

$$S = \{(x, y, z) \in I\!R^3 \,|\, x^2 + y^2 + 2z^2 = 1, z > 0\}$$

după normala exterioară.

Rezolvare.

Figura 8



Pe suprafaţa S putem considera parametrizarea

$$S : \begin{cases} x = a\cos u \sin v \\ y = a \sin u \sin v \\ z = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos v \quad u \in [0, 2\pi], v \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}.$$

Versorul normalei în punctul M este dat de

$$\bar{n}_M = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}(A\bar{i} + B\bar{j} + C\bar{k})$$

unde

$$A = \frac{D(y,z)}{D(u,v)} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos u \sin^2 v; B = \frac{D(z,x)}{D(u,v)} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin u \sin^2 v;$$

$$C = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = -\cos v \sin v.$$

Deoarece câmpul vectorial $\bar{v}$ este continuu şi suprafaţa S este netedă şi simplă

$$\Phi_S(\bar{v}) = \iint_S 2xz\, dy\, dz + 2yz\, dz\, dx - (x^2 + y^2)\, dx\, dy =$$

$$= -\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-2\frac{1}{(\sqrt{2})^2}\cos^2 u \sin^3 v \cos v - \right.\right.$$

$$\left.\left.-2\frac{1}{(\sqrt{2})^2}\sin^2 u \sin^3 v \cos v + \cos v \sin^3 v\right) dv\right) du =$$

$$= -\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\sin^3 v \cos v + \cos v \sin^3 v)\, dv\right) du = 0$$

Probleme propuse.

Să se calculeze următoarele integrale de suprafaţă pe suprafeţele considerate:

1. $$\iint_S (x+y+z)\, d\sigma, (S) x^2+y^2+z^2=a^2, z \geq 0$$

2. $$\iint_S (xy+yz+zx)\, d\sigma, (S) z=\sqrt{x^2+y^2} \text{ decupată de } (C) x^2+y^2=2ax$$

3. $$\iint_S x^3\, dy\, dz + y^3\, dz\, dx + z^3\, dx\, dy, (S) x^2+y^2+z^2=1$$

4. $$\iint_S x^2\, dy\, dz + y^2\, dz\, dx + z^2\, dx\, dy,$$

S fiind faţa pozitivă a tetraedrului cu vârfurile

$$O(0,0,0), A(2,0,0), B(0,2,0), C(0,0,2).$$

Să se calculeze ariile următoarelor suprafeţe:

5. $$(S) x^2+y^2+z^2=a^2$$

situată în interiorul cilindrului $(C) x^2+y^2=ax$.

6. $$(S) 2az=x^2+y^2$$

decupată de cilindrul $(C)(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$.

BIBLIOGRAFIE

1. Aramă L.,Morozan T.-Culegere de probleme de calcul diferenţial şi integral, Editura Tehnică,Bucureşti,1978

2. Balea P.-Curs scurt de Analiză matematică pentru chimişti, Editura Universităţii Bucureşti,1997

3. Boboc N. , Colojoară I.- Elemente de analiză matematică, Editura didactică şi pedagogică,Bucureşti,1979

4. Colojoară I.-Elemente de analiză matematică, Litografia Universităţii Bucureşti,1978

5. Bucur Gh.,Cîmpu E. , Găină S.- Culegere de probleme de calcul diferenţial şi integral,II,III, Editura Tehnică,Bucureşti,1966

6. Demidovici D.P.-Culegere de probleme şi exerciţii de analiză matematică, Editura Tehnică,Bucureşti,1956

7. Donciu N.,Flondor D.-Algebră şi Analiză matematică- culegere de probleme,I,II, Editura didactică şi pedagogică,Bucureşti,1965

8. Ciorănescu N.,Roşculeţ M.- Culegere de probleme de Algebră şi Analiză matematică, Editura Tehnică,Bucureşti,1969

9. Ghiunter N.M., Cuzmin R.O.- Culegere de probleme de matematici superioare, Editura Tehnică ,Bucureşti,1953

10. Roşculeţ M.-Analiză matematică, Editura didactică şi pedagogică ,Bucureşti,1979

11. Roşculeţ M.,Balea P.,Potcovaru Gh şi alţii- Matematici superioare,I,II, Lito I.P.B,1979,1980

12. Stănăşilă O.-Analiză matematică, Editura didactică şi pedagogică ,Bucureşti,1987

13. Sireţchi Gh.- Exerciţii rezolvate de analiză matematică, Litografia Universităţii Bucureşti,1977

14. Balea P., Joiţa M., Stoian M. - Culegere de probleme de calcul diferenţial, Editura Universităţii Bucureşti, 1997

Tiparul s-a executat sub c-da nr. 437/1998,
la Tipografia Editurii Universității din București

ISBN 973 – 575 – 236 – 0

Lei 14500