

Dr. C. U.  
N575097

DORIN BORȘAN

SIMONA TALPOȘ

**FIZICA STRATULUI LIMITĂ  
ȘI POLUAREA AERULUI**

EDITURA UNIVERSITĂȚII DIN BUCUREȘTI

1997





BIBLIOTECA CENTRALĂ  
UNIVERSITARĂ  
București

Cota N 515097  
Inventar C0162697

**DORIN BORȘAN**

**SIMONA TALPOȘ**

# **FIZICA STRATULUI LIMITĂ ȘI POLUAREA AERULUI**

**EDITURA UNIVERSITĂȚII DIN BUCUREȘTI**  
**1997**

BIBLIOTECA CENTRALĂ UNIVERSITĂȚII  
BUCUREȘTI  
COTA *N 515097*

Referenți științifici: Prof. dr. LUCIAN GEORGESCU  
Prof. dr. CONSTANTIN PLĂVIȚU

**B.C.U. București**



C 01626 97

© Editura Universității din București  
Șos. Panduri, 90-92, București - 76235; Telefon: 410.23.84

ISBN - 973 - 575 - 139 - 9

## **Introducere**

*Materialul expus în lucrare reprezintă o sinteză a cursurilor ținute de autori, pe parcursul mai multor ani, la două discipline din domeniul Fizicii Atmosferei ce au cunoscut o dezvoltare puternică în ultimul timp. Aceste două cursuri sunt: Fizica stratului limită al atmosferei și Dispersia poluanților în mediul atmosferic.*

*Scopul lucrării este de a prezenta o viziune modernă asupra fenomenelor fizice fundamentale ce au loc în stratul atmosferic limită, asupra mișcării turbulente a aerului din acest strat și asupra proceselor de dispersie turbulentă a poluanților în atmosferă.*

*În prima parte a lucrării se mediază sistemul de ecuații ce descrie curgerea laminară a aerului în stratul limită al atmosferei (SLA) format din ecuația de mișcare Navier-Stokes, ecuația principiului I al termodinamicii și ecuația de continuitate, obținându-se sistemul de ecuații Reynolds ce descrie mișcarea turbulentă a aerului în SLA. Sunt prezentate, deasemenea, metode semiempirice de închidere de ordinul I a sistemului de ecuații Reynolds, punându-se accent deosebit pe teoria similitudinii Monin-Obukhov. În continuare, lucrarea cuprinde studiul unor tipuri de mișcări turbulente ale aerului în SLA care permit folosirea unor ipoteze ce duc la simplificarea sistemului de ecuații Reynolds.*

*Ultima parte a lucrării se referă la posibilitatea de prognoză a câmpului de concentrație a poluanților în jurul unor surse de poluare de diferite forme și de diferite puteri de emisie. Prognoza poluării aerului se bazează pe studiul dispersiei turbulente a aerosolului în aer.*

*Lucrarea prezintă interes pentru studenții de la Facultățile de fizică ce doresc să se specializeze în Fizica atmosferei sau în Fizica mediului ambiant sau pentru studenții de la alte facultăți ce au preocupări în domenii conexe, cum ar fi dispersia poluanților și protecția mediului.*

# I. STRATUL LIMITĂ ATMOSFERIC

## 1.1. Caracteristicile stratului limită

Mișcarea aerului din stratul atmosferei ce vine în contact direct cu suprafața pământului are un caracter puternic turbulent. Partea stratului planetar inferior al atmosferei în care mișcarea aerului este puternic influențată de interacția cu suprafața pământului se numește *strat limită atmosferic* (SLA). Grosimea acestui strat depinde de valoarea vitezei vântului în atmosfera liberă, de stratificația verticală de temperatură, de dimensiunile și de forma neuniformităților suprafeței pământului și oscilează, în medie, între 1000 și 1500 de metri.

Curgerea unui fluid în regim turbulent sau laminar se verifică cu ajutorul valorilor unor mărimi adimensionale cum sunt: numărul lui Reynolds „Re”, și numărul lui Rayleigh „Ra”. Numărul lui Reynolds caracterizează raportul dintre valoarea forțelor de inerție și a forțelor de vâscozitate. Se exprimă prin relația:

$$Re = \frac{UL}{\nu} \quad (1.1)$$

unde U este valoarea unei viteze caracteristice a mișcării (viteza medie, viteza maximă), L este o lungime (dimensiune) caracteristică a mișcării (distanța pe care modulul vitezei variază cu  $\Delta U \sim U$ ), iar  $\nu$  este vâscozitatea cinematică a fluidului.

Mișcarea fluidului este considerată laminară dacă  $Re < 1000$  și turbulentă dacă  $Re > 10^5$ . Pentru aerul din stratul atmosferic limită se consideră  $U = 15 \text{ms}^{-1}$ ,  $L = 10^3 \text{m}$ , iar  $\nu = 1,5 \cdot 10^{-5} \text{m}^2 \text{s}^{-1}$  și pentru numărul lui Reynolds rezultă valoarea:  $Re \approx 10^9$ , deci mișcarea aerului în acest strat este strict turbulentă.

Stratul limită atmosferic se caracterizează prin:

- O creștere a vitezei aerului (vântului) de la valoarea zero, la suprafața pământului, la valoarea vitezei aerului, existentă în atmosfera liberă;
- O schimbare a direcției vitezei vântului, odată cu creșterea altitudinii, determinată de forța Coriolis.

Existența stratului limită este determinată de interacția dinamică și termică dintre aerul atmosferic în mișcare și suprafața pământului. Grosimea acestui strat și structura sa verticală sunt direct determinate de distribuția verticală a temperaturii aerului în acest strat. Pentru a caracteriza mișcărilor convective ale aerului în acest strat, determinate de

existența unor gradienti verticali de temperatură pozitivi, se folosește numărul lui Rayleigh. Acesta se exprimă prin raportul dintre forțele ascensionale, ce determină convecția, și forțele de vâscozitate care se opun acestor mișcări. Pentru cazul aerului, aflat între două plane horizontale și paralele, ca cele din figura 1.1, numărul lui Rayleigh se exprimă:

$$Ra = \frac{gh^3 \Delta T}{T_0 \nu \theta} \quad (1.2)$$

unde  $\nu$  este coeficientul de vâscozitate, iar  $\theta$  este coeficientul molecular de schimb de căldură (coeficientul de conductibilitate termică).

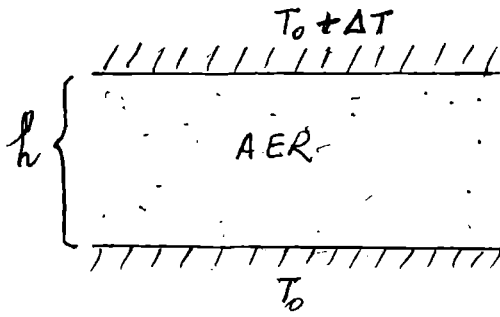


Fig. 1

Partea inferioară a stratului atmosferic limită, ce vine în contact direct cu suprafața pământului, se numește *strat de suprafață*. El se caracterizează prin valori relativ mari ale gradientilor verticali ai mărimilor fizice ce caracterizează stratul. Structura verticală a stratului atmosferic limită este redată în figura 1.2.

Mișcarea turbulentă a aerului în stratul atmosferic limită determină apariția unui transport turbulent al unor mărimi ce caracterizează stratul. Acest transport influențează în mod esențial proprietățile stratului și distribuția verticală a mărimilor ce caracterizează stratul. Rezultă că structura spațială și variația în timp a distribuției mărimilor fizice ce caracterizează stratul sunt direct influențate de forțele ce acționează în strat și de existența și distribuția surselor de căldură.

Studiul proceselor fizice complexe, ce au loc în această parte a atmosferei, constituie obiectul de preocupări al unui domeniu din Fizica atmosferei, ce a primit denumirea de FIZICA STRATULUI LIMITĂ.

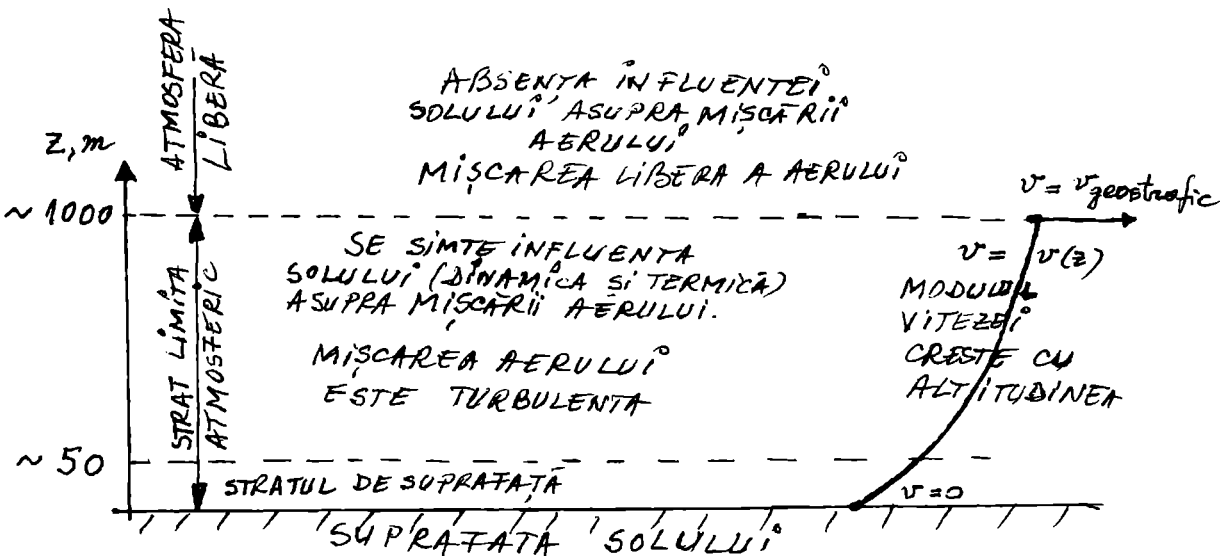


Fig. 1.2.

## 1.2. Tipuri de strat limită

Se disting trei tipuri de strat limită ideal, diferențiate între ele prin rolul pe care îl au forțele convective (sau ascensionale) sau prin semnul fluxului de căldură la suprafața pământului.

### 1) Stratul limită neutru (fig. 1.3)

În acest caz, temperatura la suprafața pământului este egală cu temperatura aerului aflat imediat deasupra, iar fluxul de căldură la suprafață este egal cu zero. Temperatura potențială a aerului este constantă și are aceeași valoare în tot cuprinsul stratului, iar mișcarea turbulentă a aerului este de natură pur dinamică.

În apropierea suprafeței pământului, pe o distanță pe verticală de câțiva zeci de metri, viteza vântului nu-și modifică direcția (forțele de presiune și forța Coriolis sunt neglijabile în raport cu forțele de frecare). Această parte a stratului se numește *strat limită de suprafață* (SLS). Modulul vectorului viteză a vântului crește cu altitudinea după o lege logaritmică. Deasupra stratului de suprafață, forțele Coriolis devin importante și vectorul viteză a vântului își modifică direcția când altitudinea crește. Rotirea totală a vectorului viteză în tot cuprinsul SLA este de cca.  $20^\circ$ . Valoarea vitezei vântului continuă să crească deasupra stratului de suprafață și spre limita superioară a SLA viteza vântului atinge în modul și în direcție viteza vântului geostrofic din atmosfera liberă.

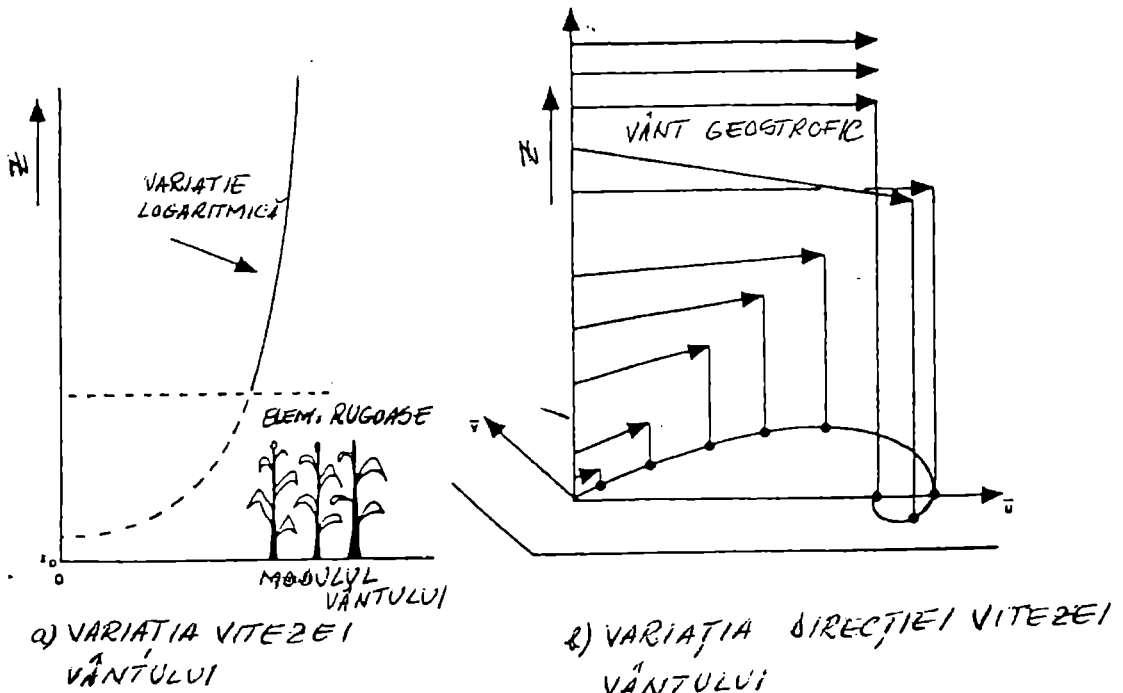


Fig. 1.3.



## 2) Stratul limită instabil (fig. 1.4)

Asemenea strat ia naștere atunci când temperatura suprafeței pământului este mai mare decât temperatura aerului situat imediat deasupra, iar fluxul de căldură, la suprafață, este orientat pe verticală în sus. Aerul din strat participă la o mișcare turbulentă intensă, rezultată din suprapunerea turbulențelor de origine dinamică, respectiv termică. Aerul din strat este puternic amestecat, iar mărimile ce-l caracterizează (viteza vântului, temperatura potențială, densitatea s.a.) tind să aibă valori constante pe verticală cu excepția unei zone din apropierea solului unde turbulența este inhibată.

În stratul limită instabil se disting trei zone pe verticală:

a) Stratul de suprafață, având grosimea de câțiva zeci de metri, caracterizat de un gradient vertical al temperaturii medii mai mare decât gradientul adiabatic uscat și de o forfecare puternică a vitezei vântului.

b) Stratul de amestec, situat deasupra stratului de suprafață, în care viteza vântului și temperatura potențială medie sunt constante. Se întinde până aproape de o inversiune posibilă de temperatură ce se formează, de obicei, la partea superioară a stratului limită.

c) Stratul de antrenare, situat deasupra stratului de amestec, caracterizat prin mișcare turbulentă redusă și o stratificație de temperatură foarte stabilă. Valorile medii ale parametrilor fizici tind rapid către valorile din atmosfera liberă.

Frecvent, în interiorul stratului limită instabil se pot identifica anumite structuri dinamice coerente: termice calde, pene convective, celule hexagonale de dimensiuni medii s.a., ce pot fi studiate separat.

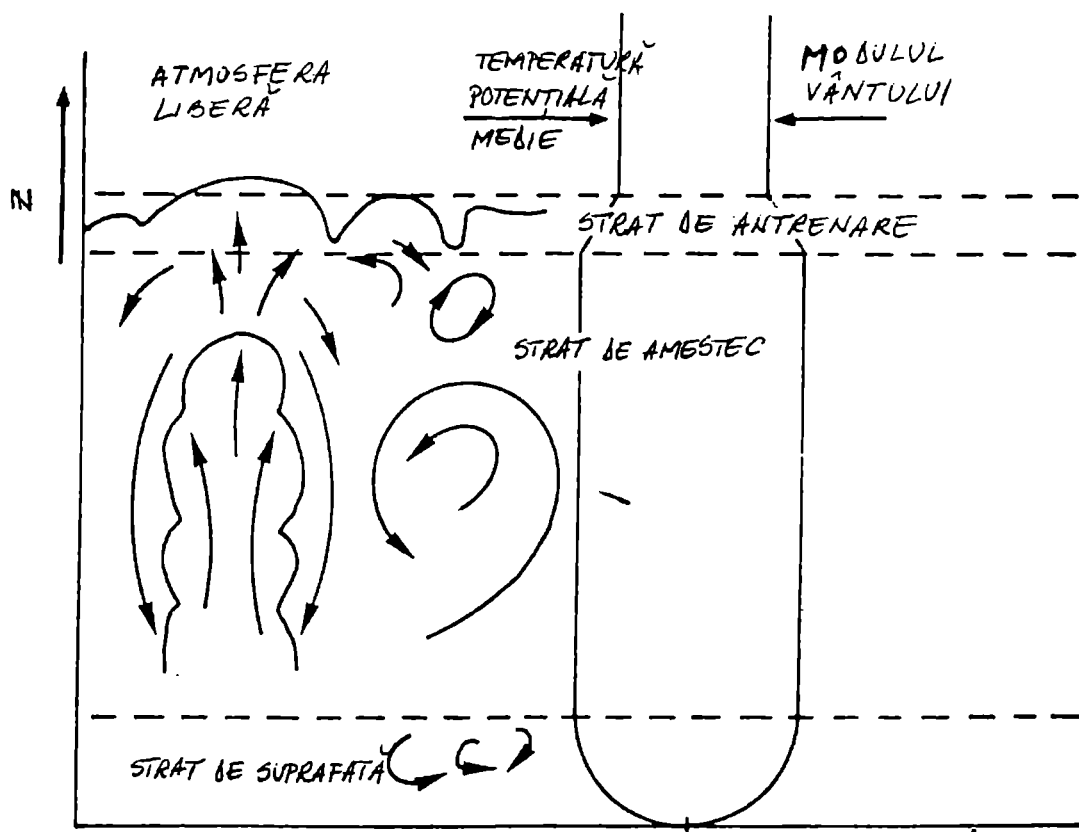


Fig. 1.4.

### 3) Stratul limită stabil (fig. 1.5)

Acest strat se formează când temperatura la suprafața pământului este mai mică decât temperatura aerului situat imediat deasupra, iar fluxul de căldură, la suprafață, este orientat pe verticală în jos. Forțele ascensionale ce iau naștere tind să stingă turbulența de origine dinamică dacă ea există. Amestecarea aerului este neînsemnată. În zona stratului de suprafață există un gradient vertical al temperaturii potențiale medii mai mic decât gradientul adiabatic uscat și se înregistrează o inversiune de temperatură deasupra stratului de suprafață. În acest caz vântul este slab în apropierea suprafeței, dar are un maxim pronunțat în zona vârfului inversiei de temperatură. Poluanții emiși de diferite surse, situate la suprafața pământului, se acumulează în zona de emisie fără a se propaga spre regiuni mai îndepărtate. Limitarea transportului turbulent de către stratificația de temperatură stabilă decuplează între ele diferitele straturi ale mișcării și determină apariția unor zone de curgere laminară sau de tranziție spre curgerea turbulentă.

Stările stratului limită atmosferic, descrise mai sus, sunt cazuri limită, idealizate ce se întâlnesc rar în natură. În atmosfera reală se întâlnesc stări hibride în care efectele dinamice și cele termice se suprapun în proporții variabile sau stări de tranziție de la o stare staționară la alta.

Stările stratului limită atmosferic sunt variabile în timp. Există variații aleatorii ale stării stratului, determinate de fluctuațiile turbulente ale parametrilor fizici și variații periodice, determinate de variația diurnă a bilanțului radiativ la suprafața pământului.

Stratul limită atmosferic a fost intens studiat, în ultimele decenii, din mai multe motive:

-motivul principal este legat de faptul că SLA este mediul natural în care se desfășoară quasi-totalitatea activităților umane. Cunoașterea proprietăților sale și, eventual, previziunea stărilor viitoare spre care evoluează, prezintă un interes practic deosebit pentru activitatea și starea de sănătate a omului;

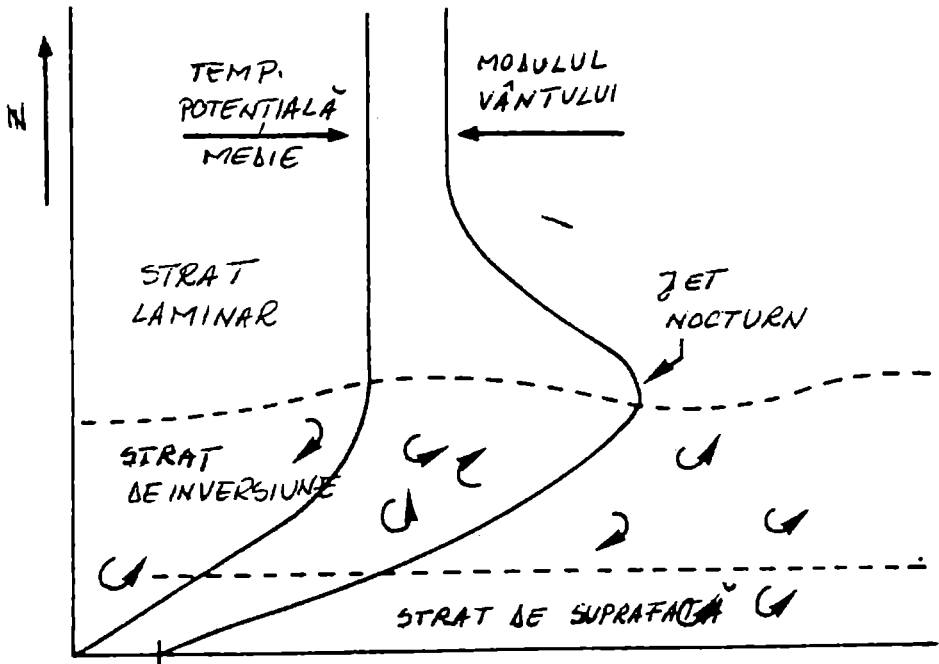


Fig. 1.5.

-al doilea motiv important este legat de modelarea mișcării de ansamblu a aerului, folosită în prevederea vremii. Această modelare trebuie să țină seama de procesele fizice din stratul limită deoarece aceste procese asigură transportul de impuls, de căldură, de umiditate s.a. între atmosfera liberă și suprafața terestră;

-alte motive sunt legate de interesul științific deosebit privind rezolvarea problemei mișcării turbulente a fluidelor. SLA este un loc privilegiat pentru studiul experimental al acestei probleme deoarece condițiile unei mișcări turbulente complexe sunt greu de realizat în laborator dar se realizează în mod natural în SLA.

Tendența de studiu, din punct de vedere teoretic, al SLA este de elaborare de modele numerice pentru mișcarea aerului în acest strat. Prin model sau modelare numerică a mișcării aerului înțelegem o rezolvare numerică sau analitică a ecuațiilor fizice ce descriu mișcarea aerului și principalele procese din atmosferă. Aici trebuie incluse ecuațiile de prognoză și de diagnoză care descriu structura tridimensională a fenomenelor. Aceste ecuații pot fi rezolvate folosind unele ipoteze simplificatoare care decurg din observațiile asupra SLA, făcute la sol.

În toate cazurile este nevoie de date experimentale din SLA pentru stabilirea condițiilor inițiale și la limită, cât și pentru verificarea rezultatelor modelării.

Studiul fizic al SLA, parametrizarea unor proprietăți fizice pentru a fi folosite în modelarea numerică, poluarea aerului și difuzia poluanților în mediul atmosferic constituie obiectul principal al acestui curs.

## II. ECUAȚIILE STATISTICE ALE MECANICII FLUIDELOR

### 2.1. Tratarea statistică a problemei turbulenței

În mișcarea turbulentă a unui fluid, variația spațială și temporală a parametrilor ce descriu curgerea fluidului este neregulată, după cum rezultă din figura 2.1. (pentru temperatură).

Ideea de bază a studiului statistic al turbulenței este “asemănarea” dintre mișcarea haotică a moleculelor unui fluid (mișcare termică) și mișcarea haotică a particulelor turbulente de fluid. Se identifică între ele fluctuațiile statistice cu cele turbulente.

Mișcarea turbulentă este descrisă cu ajutorul valorilor medii ale unor mărimi (viteza vântului, temperatura potențială  $\theta$ , concentrația unui component, etc.) variabile în spațiu și timp. De obicei stațiile fixe fac medierea în timp a mărimilor, iar stațiile mobile fac medierea spațială a mărimilor meteorologice.

Valoarea medie temporală, pe un interval de timp  $\Delta t$ , a unei mărimi variabile ce depinde de timp, și a cărei valoare la un moment dat se exprimă ca sumă dintre valoarea medie  $\bar{f}$  și fluctuația turbulentă  $f'$ :

$$f(t) = \bar{f} + f' \quad (2.1)$$

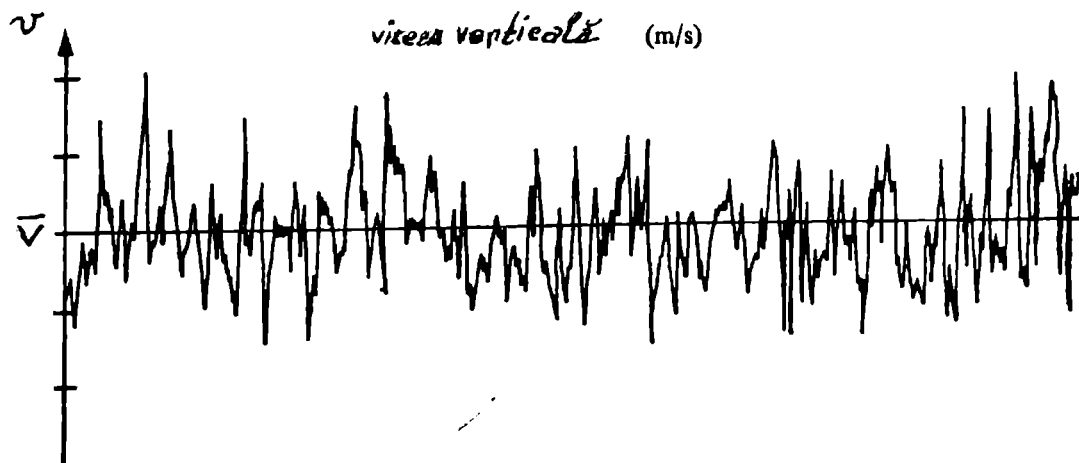


Fig. 2.1.

poate fi calculată cu relația:

$$\bar{f}(t) = \frac{1}{\Delta t} \int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta t}{2}} f(t-t') dt' \quad (2.2)$$

Medierea spațială, pe un domeniu  $\Delta x \Delta y \Delta z$ , a unei mărimi variabile în spațiu, se exprimă, în mod asemănător prin relația:

$$\bar{f}(x, y, z) = \frac{1}{\Delta x \Delta y \Delta z} \int_{-\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}} \int_{-\frac{\Delta y}{2}}^{\frac{\Delta y}{2}} \int_{-\frac{\Delta z}{2}}^{\frac{\Delta z}{2}} f(x-x', y-y', z-z') dx' dy' dz' \quad (2.3)$$

Se admite că într-o curgere turbulentă, mărimile ce descriu curgerea fluidului ( $u_1 = u = v_x$ ,  $u_2 = v = v_y$ ,  $u_3 = w = v_z$ ,  $p$ ,  $\theta$ , s.a.) pot fi considerate ca funcții aleatoare de timp și de spațiu și pot fi descompuse într-o valoare medie și o fluctuație turbulentă, de forma:

$$f(\bar{x}, t) = \bar{f}(\bar{x}, t) + f'(\bar{x}, t) \quad (2.4)$$

Operațiunea de mediere are unele proprietăți comune, exprimate prin axiomele lui Reynolds, indiferent de modul de definire a mediei.

Fie două funcții aleatoare  $f$  și  $g$  dependente de  $\bar{x}$  și  $t$  și fie  $a$  o constantă oarecare, atunci proprietățile operației de mediere sunt:

1. linearitatea

$$\begin{aligned} \overline{f + g} &= \bar{f} + \bar{g} \\ \overline{af} &= a\bar{f} \\ \bar{a} &= a \end{aligned} \quad (2.5)$$

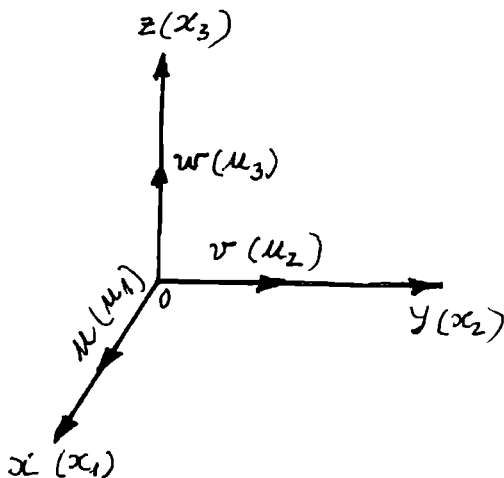


Fig. 2.2.

2. comutativitatea față de operațiile de derivare și integrare

$$\begin{aligned} \overline{\frac{\partial f}{\partial s}} &= \frac{\partial \bar{f}}{\partial s} \\ \overline{\int f ds} &= \int \bar{f} ds \end{aligned} \quad (2.6)$$

unde  $s$  reprezintă  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  sau  $t$  (conform cu sistemul de axe din figura 2.2).

3. idempotența

$$\overline{\bar{f}} = \bar{f} \quad (2.7)$$

cu următoarele cazuri particulare:

$$\begin{aligned}\bar{\bar{f}} &= \bar{f} \\ \overline{f'} &= \overline{f - \bar{f}} = 0 \\ \overline{\bar{f}g} &= \bar{f}\bar{g} \\ \overline{f'f'} &= 0\end{aligned}\tag{2.8}$$

Studiul turbulenței în care se folosesc valorile medii pentru a caracteriza câmpurile mărimilor caracteristice se numește studiu statistic sau teoria discontinuă a vârtejurilor. În această teorie se introduce noțiunea de “mărime a vârtejurilor” definită cu ajutorul coeficientului de “corelație spațială”. Pentru a introduce această noțiune considerăm fluctuațiile unei mărimi  $f$  în două puncte apropiate  $P_1(\bar{x})$  și  $P_2(\bar{x} + \bar{r})$ :  $f'(\bar{x})$  și  $f'(\bar{x} + \bar{r})$ . Mărimea adimensională definită prin:

$$R_f(\bar{x}, \bar{r}) = \frac{\overline{f'(\bar{x})f'(\bar{x} + \bar{r})}}{\left[ \overline{f'^2(\bar{x})} \overline{f'^2(\bar{x} + \bar{r})} \right]^{1/2}}\tag{2.9}$$

se numește coeficient de corelație spațială.  $R_f(\bar{x}, \bar{r})$  depinde de punct și de distanța dintre punctele considerate.

Turbulența se consideră omogenă dacă fluctuațiile turbulente ale mărimii  $f$  nu depind de punct. În acest caz  $R_f$  depinde numai de  $\bar{r}$ , adică:

$$\overline{f'^2(\bar{x})} = \overline{f'^2(\bar{x} + \bar{r})} = \overline{f'^2} \Rightarrow R_f(\bar{r}) = \frac{\overline{f'(\bar{x})f'(\bar{x} + \bar{r})}}{\overline{f'^2}}\tag{2.10}$$

Turbulența se consideră izotropă dacă proprietățile statistice într-un anumit punct nu depind de direcția vectorului  $\bar{r}$ , ci numai de modulul acestuia. Deci:

$$R_f(\bar{x}, \bar{r}) = R_f(\bar{x}, r)\tag{2.11}$$

În studiile teoretice turbulența se presupune omogenă și izotropă, adică:

$$R_f(\bar{x}, \bar{r}) = R_f(r)\tag{2.12}$$

Datorită descreșterii rapide a coeficientului de corelație spațială cu creșterea lui  $r$  se poate defini dimensiunea vârtejurilor de-a lungul unei direcții prin:

$$l_s = \int_0^{\infty} R_f(r) dr\tag{2.13}$$

deoarece integrala este convergentă,  $l_s$  se numește scară de turbulență și reprezintă “dimensiunea medie a vârtejurilor”.



## 2.2. Ecuațiile lui Reynolds

În cazul curgerii laminare a unui fluid, starea fluidului la un moment dat se exprimă cu ajutorul soluțiilor ecuațiilor mecanicii fluidelor dacă se cunosc condițiile inițiale și condițiile la limită.

În cazul curgerii turbulente a fluidelor, starea statistică a curgerii la un moment dat se deduce cu ajutorul ecuațiilor mecanicii fluidelor, scrise pentru valorile medii ale parametrilor meteorologici, cunoscând condițiile inițiale și condițiile la limită.

Sistemul de ecuații ce descrie curgerea unui fluid în SLA este un sistem de ecuații în care se aplică aproximația Boussinesq și conține: ecuația de mișcare Navier-Stokes, principiul I al termodinamicii exprimat cu ajutorul temperaturii potențiale și ecuația de continuitate pentru curgerea unui fluid incompresibil. Sistemul de coordonate în care se lucrează este unul cartezian, cu axa  $x_3=z$ , legat fix de suprafața pământului. Aceste ecuații sunt:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{Du_i}{Dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{g_i}{T_0} (\theta - T_0) - \varepsilon_{ijk} f_j u_k + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} + \frac{\nu}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \\ \frac{D\theta}{Dt} = \frac{\partial \theta}{\partial t} + u_j \frac{\partial \theta}{\partial x_j} = \nu \theta \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_j^2} \\ \frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0 \end{array} \right. \quad (2.14)$$

Pentru un fluid incompresibil  $\rho = \text{const}$  și din ultima relație rezultă:

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 \text{ și } \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0$$

iar ecuațiile de mai sus se scriu:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{g_i}{T_0} (\theta - T_0) - \varepsilon_{ijk} f_j u_k + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\theta u_j) = \nu \theta \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_j^2} \\ \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0 \end{array} \right. \quad (2.15)$$

unde  $\vec{u} = \vec{u}(u_1, u_2, u_3)$ ;  $i, j, k=1, 2, 3$  și s-a folosit:

$$u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j)$$

$$u_j \frac{\partial \theta}{\partial x_j} = u_j \frac{\partial \theta}{\partial x_j} + \theta \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} (\theta u_j)$$

unde s-a adunat o mărime egală cu zero  $\left( \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0, \text{ din ecuația de continuitate} \right)$ ;

-  $\bar{f} = 2\bar{\Omega} (0, 2\Omega \cos\varphi, 2\Omega \sin\varphi)$  este parametrul Coriolis, cu  $\bar{\Omega}$  viteza unghiulară de rotație a Pământului,  $\varphi$ - latitudinea geografică;

-  $T_0$  temperatura de referință;

-  $\frac{g_i}{T_0} (\theta - T_0)$  forța ascensională (forța arhimedică minus forța de greutate) pe unitatea

de masă;

-  $\nu$  vâscozitatea cinematică ;

-  $\nu_\theta$  conductibilitatea termică ;

-  $\epsilon_{ijk}$  este elementul general al unui tensor de permutare (simbolul Levi-Civita),

$\epsilon_{ijk} = 0$  dacă doi dintre indicii  $i, j, k$  sunt identici,

$\epsilon_{ijk} = 1$  dacă  $\{i,j,k\}$  este o permutare pară a lui  $\{1,2,3\}$ ,

$\epsilon_{ijk} = -1$  dacă  $\{i,j,k\}$  este o permutare impară a lui  $\{1,2,3\}$ ;

Un sistem asemănător de ecuații cu (2.15) se poate scrie și pentru valorile medii ale vitezei și temperaturii ce caracterizează mișcarea turbulentă. În acest scop, considerăm că variabilele ce intervin în ecuații se exprimă ca o sumă dintre valoarea medie și fluctuația turbulentă, adică:

$$\begin{aligned} u_i &= \bar{u}_i + u_i' \\ \theta &= \bar{\theta} + \theta' \\ p &= \bar{p} + p' \end{aligned} \quad (2.16)$$

Fluctuațiile densității nu se iau în considerare în mod direct, ci numai prin fluctuațiile temperaturii, deci,  $\rho = \bar{\rho}$ .

Se vor folosi în operațiunile de mediere axiomele lui Reynolds. Medierea ecuației de mișcare (2.15) se scrie:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\bar{u}_i + u_i')}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\bar{u}_i + u_i')(\bar{u}_j + u_j') \right] &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\bar{p} + p')}{\partial x_i} + \frac{g_i}{T_0} (\bar{\theta} + \theta' - T_0) - \\ &\quad - \overline{\epsilon_{ijk} f_j (\bar{u}_k + u_k')} + \nu \frac{\partial^2 (\bar{u}_i + u_i')}{\partial x_k^2} \end{aligned}$$

Expresiile pentru valorile mediate ale termenilor ce intervin în ecuația de mișcare sunt:

$$1. \frac{\partial(\bar{u}_i + u_i')}{\partial t} = \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i'}{\partial t} = \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i'}{\partial t} = \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} = 0$$

$$\begin{aligned} 2. \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\bar{u}_i + u_i')(\bar{u}_j + u_j') \right] &= \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i \bar{u}_j + \bar{u}_i u_j' + u_i' \bar{u}_j + u_i' u_j') = \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i \bar{u}_j) + \frac{\partial}{\partial x_j} u_i' u_j' \\ &= 0 \quad = 0 \end{aligned}$$

$$3. \overline{\frac{\partial(\bar{p} + p')}{\partial x_i}} = \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial p'}{\partial x_i} = \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} = 0$$

$$4. \overline{\frac{g_i}{T_0}(\bar{\theta} + \theta' - T_0)} = \frac{g_i}{T_0}(\bar{\theta} - T_0)$$

$$5. \overline{\varepsilon_{ijk} f_j (\bar{u}_k + u_k')} = \overline{\varepsilon_{ijk} f_j \bar{u}_k} + \overline{\varepsilon_{ijk} f_j u_k'} = \varepsilon_{ijk} f_j \bar{u}_k = 0$$

$$6. v \overline{\frac{\partial^2 (\bar{u}_i + u_i')}{\partial x_k^2}} = \overline{\frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_k^2}} + \overline{\frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_k^2}} = \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_k^2} = 0$$

Rezultă că ecuația de mișcare din SLA, exprimată prin valorile medii, ale parametrilor, ce caracterizează stratul este:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i \bar{u}_j) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{g_i}{T_0} (\bar{\theta} - T_0) - \varepsilon_{ijk} f_j \bar{u}_k + v \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_k^2} - \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_i' u_j'} \quad (2.17)$$

Medierea ecuației (2.15), ce exprimă principiul I al termodinamicii se scrie:

$$\overline{\frac{\partial(\bar{\theta} + \theta')}{\partial t}} + \overline{\frac{\partial}{\partial x_j} [(\bar{\theta} + \theta')(\bar{u}_j + u_j')]} = v_\theta \overline{\frac{\partial^2(\bar{\theta} + \theta')}{\partial x_j^2}} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\theta}'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\theta} \bar{u}_j + \bar{\theta} u_j' + \theta' \bar{u}_j + \theta' u_j') &= v_\theta \left( \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 \bar{\theta}'}{\partial x_j^2} \right) \\ &= 0 \qquad \qquad \qquad = 0 \qquad \qquad \qquad = 0 \end{aligned}$$

și rezultă în final:

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\theta} \bar{u}_j) = v_\theta \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial x_j^2} - \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{\theta' u_j'} \quad (2.18)$$

Ecuația de continuitate (2.15) mediată se scrie:

$$\overline{\frac{\partial(\bar{u}_k + u_k')}{\partial x_k}} = \overline{\frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_k}} + \overline{\frac{\partial u_k'}{\partial x_k}} = \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_k} = 0$$

și în final devine:

$$\frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_k} = 0 \quad (2.19)$$

Aceste ecuații, care descriu mișcarea turbulentă cu ajutorul valorilor medii ale parametrilor aerului din SLA, se numesc ecuațiile lui Reynolds.

Scrise la un loc, se obține sistemul de ecuații pentru mărimile medii, ce descriu mișcarea turbulentă a aerului în SLA.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i \bar{u}_j) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{g_i}{T_0} (\bar{\theta} - T_0) - \varepsilon_{ijk} f_j \bar{u}_k + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_k^2} - \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_i' u_j'} \\ \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\theta} \bar{u}_j) = \nu \theta \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial x_j^2} - \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{\theta' u_j'} \\ \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_k} = 0 \end{array} \right. \quad (2.20)$$

Termenii de forma  $\overline{u_i' u_j'}$  se numesc fluxuri turbulente de impuls, iar termenii de forma  $\overline{\theta' u_j'}$  se numesc fluxuri turbulente de căldură sau termeni Reynolds. Ultimii termeni din primele două ecuații se numesc divergența fluxurilor turbulente de impuls, respectiv divergența fluxurilor turbulente de căldură. Termenii lui Reynolds din sistemul de ecuații pentru mărimile medii  $\overline{u_i' u_j'}$  și  $\overline{\theta' u_j'}$  apar în aceste ecuații în urma medierii termenului nelinier de advecție. Pentru a interpreta fizic termenii  $\overline{u_i' u_j'}$  se va scrie teorema impulsului pentru curgerea unui fluid printr-o suprafață dată. Ceilalți termeni se vor interpreta asemănător, considerând transportul de căldură. Fie un element de arie  $dA$  într-o mișcare turbulentă a aerului. Viteza aerului are componentele  $u, v, w$ . Normala la aria  $dA$  este orientată în lungul axei  $Ox$ , iar axele  $Oy$  și  $Oz$  sunt conținute în planul suprafeței  $dA$ . Masa de fluid, ce traversează suprafața de arie  $dA$ , în intervalul de timp  $dt$ , în direcția axei  $Ox$  este  $dm_x = \rho u dA dt$ , iar impulsul corespunzător, ce străbate aria considerată, în același interval de timp, în lungul axelor  $Ox, Oy, Oz$  este:  $dp_x = dA(\rho u) u dt$ ,  $dp_y = dA(\rho u) v dt$ ,  $dp_z = dA(\rho u) w dt$ . Deoarece densitatea aerului se consideră constantă, putem scrie fluxul de impuls mediat prin unitatea de suprafață și în unitatea de timp sub forma:

$$\frac{d\bar{p}_x}{dA dt} = \overline{\rho u^2}; \quad \frac{d\bar{p}_y}{dA dt} = \overline{\rho v^2}; \quad \frac{d\bar{p}_z}{dA dt} = \overline{\rho w^2}$$

Pentru curgerea turbulentă:

$$\begin{aligned} \overline{u^2} &= \overline{(\bar{u} + u')^2} = \overline{\bar{u}^2 + 2\bar{u}u' + u'^2} = \bar{u}^2 + \overline{u'^2} \\ \overline{uv} &= \overline{(\bar{u} + u')(\bar{v} + v')} = \overline{\bar{u}\bar{v} + \bar{u}v' + u'\bar{v} + u'v'} = \bar{u}\bar{v} + \overline{u'v'} \\ \overline{uw} &= \overline{(\bar{u} + u')(\bar{w} + w')} = \overline{\bar{u}\bar{w} + \bar{u}w' + u'\bar{w} + u'w'} = \bar{u}\bar{w} + \overline{u'w'} \end{aligned}$$

și rezultă:

$$\frac{d\bar{p}_x}{dAdt} = \rho \left( \overline{u^2} + \overline{u'^2} \right); \quad \frac{d\bar{p}_y}{dAdt} = \rho \left( \overline{uv} + \overline{u'v'} \right); \quad \frac{d\bar{p}_z}{dAdt} = \rho \left( \overline{uw} + \overline{u'w'} \right)$$

Rezultă că, datorită mișcării turbulente, apar în fluid niște tensiuni de forfecare, egale numeric cu fluxul de impuls prin unitatea de suprafață. Aceste tensiuni se numesc tensiuni Reynolds și se exprimă cu ajutorul unui tensor simetric:

$$\tau_{ij} = -\rho \overline{u_i' u_j'} = \tau_{ji}$$

Termenii  $\tau_{11}$ ,  $\tau_{22}$ ,  $\tau_{33}$  reprezintă tensiuni normale, iar ceilalți reprezintă tensiuni tangențiale sau de forfecare.

Analog, termenii  $\overline{\theta' u_j}$  pot fi interpretați ca un flux de căldură în direcția axei  $Ox_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) datorat fluctuațiilor turbulente ale temperaturii potențiale.

Termenii Reynolds sunt diferiți de zero atât timp cât există în fluid fluctuații turbulente și au valori pozitive.

Sistemul de ecuații (2.20) nu este închis deoarece numărul variabilelor necunoscute ( $\bar{u}_i$ ,  $\bar{\theta}$ ,  $\bar{p}$  și termenii Reynolds) este mai mare decât numărul ecuațiilor din sistem. Una din problemele importante ale studiului curgerii turbulente a fluidelor este problema închiderii sistemului de ecuații Reynolds. Cea mai simplă metodă de închidere pentru acest sistem de ecuații constă în formularea unei ipoteze cu ajutorul căreia termenii Reynolds se exprimă cu ajutorul unei funcții cunoscute care depinde de parametrii principali medii ( $\bar{u}_i$ ,  $i=1, 2, 3$ ,  $\bar{\theta}$  și  $\bar{p}$ ). Metodele bazate pe asemenea ipoteză se numesc "metode de închidere de ordinul I".

### 2.3. Energia cinetică în mișcarea turbulentă

Pentru a ușura efectuarea calculelor, ecuația de mișcare Navier-Stokes, pentru valori momentane și pentru valori medii, se scrie sub forma:

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} + \rho \varepsilon_{ijk} f_j u_k = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \left( 1 - \frac{\theta}{T_0} \right) + \frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k} \quad (2.21)$$

unde  $\Phi$  este energia potențială gravitațională a unității de masă de aer, iar:

$$p_{ik} = p_{ki} = -p \delta_{ik} + \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) = -p \delta_{ik} + M_{ik}$$

este tensorul tensiunilor,

$$\rho \frac{D\bar{u}_i}{Dt} + \rho \varepsilon_{ijk} f_j \bar{u}_k = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \left( 1 - \frac{\bar{\theta}}{T_0} \right) + \frac{\partial (\bar{p}_{ik} + \tau_{ik})}{\partial x_k} \quad (2.22)$$

$$\text{unde: } \bar{p}_{ik} = -\bar{p} \delta_{ik} + \bar{M}_{ik} = -\bar{p} \delta_{ik} + \mu \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_i} \right)$$

a) *Ecuatia de variație a energiei mișcării medii*

Pentru a obține această ecuație multiplicăm ecuația mișcării medii cu  $\bar{u}_i$  și rezultă:

$$\rho \bar{u}_i \frac{D\bar{u}_i}{Dt} + \rho \bar{u}_i \varepsilon_{ijk} f_j \bar{u}_k = -\rho \bar{u}_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \left( 1 - \frac{\bar{\theta}}{T_0} \right) + \bar{u}_i \frac{\partial (\bar{p}_{ik} + \tau_{ik})}{\partial x_k} \quad (2.23)$$

Fie  $\bar{c}_i = (\bar{\mathbf{f}} \times \bar{\mathbf{u}})_i$ , componenta în direcția  $Ox_i$  a accelerației Coriolis, atunci:

$$\bar{u}_i \bar{c}_i = \bar{u}_1 \bar{c}_1 + \bar{u}_2 \bar{c}_2 + \bar{u}_3 \bar{c}_3 = \bar{u}_1 (f_2 \bar{u}_3 - f_3 \bar{u}_2) + \bar{u}_2 (f_3 \bar{u}_1 - f_1 \bar{u}_3) + \bar{u}_3 (f_1 \bar{u}_2 - f_2 \bar{u}_1) = 0$$

deci lucrul mecanic al forței Coriolis este zero (forța Coriolis fiind perpendiculară pe direcția de curgere). Pentru un câmp gravitațional constant  $\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$  și rezultă:

$$\bar{u}_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = \bar{u}_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{D\Phi}{Dt} \quad (2.24)$$

Cu aceste rezultate (2.23) devine:

$$\rho \left( \bar{u}_i \frac{D\bar{u}_i}{Dt} + \frac{D\Phi}{Dt} \right) = \rho \bar{u}_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \left( \frac{\bar{\theta}}{T_0} \right) + \bar{u}_i \frac{\partial (\bar{p}_{ik} + \tau_{ik})}{\partial x_k} \quad (2.25)$$

Dar,  $\bar{u}_i \frac{D\bar{u}_i}{Dt} = \frac{D}{Dt} \left( \frac{\bar{u}_i^2}{2} \right)$ , iar  $\bar{u}_i \frac{\partial (\bar{p}_{ik} + \tau_{ik})}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{p}_{ik} \bar{u}_i + \tau_{ik} \bar{u}_i) - (\bar{p}_{ik} + \tau_{ik}) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k}$ .

Înlocuind în (2.25) se obține:

$$\rho \frac{D}{Dt} \left( \frac{\bar{u}_i^2}{2} + \Phi \right) = \frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{p}_{ik} \bar{u}_i + \tau_{ik} \bar{u}_i) - (\bar{p}_{ik} + \tau_{ik}) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} + \rho \bar{u}_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \left( \frac{\bar{\theta}}{T_0} \right) \quad (2.26)$$

Deoarece energia cinetică medie a unității de masă de fluid este  $e_m = \frac{\bar{u}_i^2}{2}$  ecuația de variație a energiei totale a mișcării turbulente medii este:

$$\rho \frac{D}{Dt} (e_m + \Phi) = \frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{p}_{ik} \bar{u}_i + \tau_{ik} \bar{u}_i) - (\bar{p}_{ik} + \tau_{ik}) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} + \rho \bar{u}_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \left( \frac{\bar{\theta}}{T_0} \right) \quad (2.27)$$

unde termenul  $\frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{p}_{ik} \bar{u}_i + \tau_{ik} \bar{u}_i)$  exprimă variația de energie cinetică medie datorată lucrului mecanic efectuat de forțele de presiune, de forțele de vâscozitate și de turbulență.

Termenul  $(\bar{p}_{ik} + \tau_{ik}) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k}$  exprimă conversia (disiparea) energiei cinetice medii în căldură

și în energie cinetică medie de turbulență. Termenul  $\rho \bar{u}_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \left( \frac{\bar{\theta}}{T_0} \right) = -\rho \frac{g_i \bar{u}_i \bar{\theta}}{T_0}$  exprimă conversia energiei potențiale în energie cinetică.



b) Ecuația de variație a energiei medii de turbulență  $\left( e_T = \frac{\overline{u_i' u_j'}}{2} \right)$

Această ecuație se determină prin scăderea din ecuația de variație a energiei totale a ecuației de variație a energiei totale medii. Ecuația de variație a energiei totale se obține prin înmulțirea cu  $u_i$  a ecuației (2.21) de curgere a fluidului.

$$\rho u_i \frac{Du_i}{Dt} + \rho \varepsilon_{ijk} u_i f_j u_k = -\rho u_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \left( 1 - \frac{\theta}{T_0} \right) + u_i \frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k} \quad (2.28)$$

Dar  $\rho \varepsilon_{ijk} u_i f_j u_k = 0$ , deoarece exprimă lucrul mecanic al forței Coriolis. Scriem mai explicit membrul stâng al ecuației (2.28):

$$\begin{aligned} u_i \frac{Du_i}{Dt} &= u_i \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = u_i \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{u_i^2}{2} \right) + u_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{u_i^2}{2} \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{u_i^2}{2} \right) + u_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{u_i^2}{2} \right) + \frac{u_i^2}{2} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{u_i^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( u_j \frac{u_i^2}{2} \right) = 0 \end{aligned}$$

Folosind acest rezultat, ecuația de variație a energiei cinetice totale (2.28) se scrie:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{u_i^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_k} \left( u_k \frac{u_i^2}{2} \right) = -\rho u_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \left( 1 - \frac{\theta}{T_0} \right) + u_i \frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k} \quad (2.29)$$

Pentru valori medii, termenii ecuației de mai sus se scriu:

$$1. \quad \overline{\frac{\partial u_i^2}{\partial t}} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \overline{u_i^2} + \overline{u_i'^2} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial \overline{u_i^2}}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial \overline{u_i'^2}}{\partial t}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_k} \left( u_k \frac{u_i^2}{2} \right) &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ (\overline{u_k} + u_k') \frac{(\overline{u_i} + u_i')^2}{2} \right] = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ (\overline{u_k} + u_k') \frac{\overline{u_i^2} + 2\overline{u_i} u_i' + u_i'^2}{2} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \overline{u_k} \overline{u_i^2} + 2\overline{u_k} \overline{u_i} u_i' + \overline{u_k} u_i'^2 + u_k' \overline{u_i^2} + 2u_k' u_i' \overline{u_i} + u_k' u_i'^2 \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad &= 0 \qquad \qquad \qquad = 0 \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \overline{u_k} \overline{u_i^2} + \overline{u_k} u_i'^2 + 2u_k' u_i' \overline{u_i} + u_k' u_i'^2 \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \frac{\overline{u_k} (\overline{u_i^2} + \overline{u_i'^2})}{2} \right] + \frac{\partial}{\partial x_k} \left( u_k' u_i' \overline{u_i} + \frac{u_k' u_i'^2}{2} \right) \end{aligned}$$

$$u_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \left(1 - \frac{\theta}{T_0}\right) = (\bar{u}_i + u'_i) \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \left(1 - \frac{\bar{\theta} + \theta'}{T_0}\right) = \left(\bar{u}_i - \bar{u}_i \frac{\bar{\theta} + \theta'}{T_0} + u'_i - u'_i \frac{\bar{\theta} + \theta'}{T_0}\right) \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} =$$

$$3. \left(\bar{u}_i - \bar{u}_i \frac{\bar{\theta} + \theta'}{T_0} + u'_i - \frac{u'_i \bar{\theta}}{T_0} - \frac{u'_i \theta'}{T_0}\right) \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = \bar{u}_i \left(1 - \frac{\theta}{T_0}\right) \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} - \frac{u'_i \theta'}{T_0} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}$$

$$= 0 = 0 = 0$$

$$u_i \frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k} = (\bar{u}_i + u'_i) \frac{\partial (\bar{p}_{ik} + p'_{ik})}{\partial x_k} = \bar{u}_i \frac{\partial \bar{p}_{ik}}{\partial x_k} + \bar{u}_i \frac{\partial p'_{ik}}{\partial x_k} + u'_i \frac{\partial \bar{p}_{ik}}{\partial x_k} + u'_i \frac{\partial p'_{ik}}{\partial x_k} =$$

$$4. = 0 = 0$$

$$= \bar{u}_i \frac{\partial \bar{p}_{ik}}{\partial x_k} + u'_i \frac{\partial p'_{ik}}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{u}_i \bar{p}_{ik}) - \bar{p}_{ik} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k} (u'_i p'_{ik}) - p'_{ik} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k}$$

Înlocuind în ecuația (2.29) se obține ecuația de variație a energiei totale mediate:

$$\frac{\rho}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\bar{u}_i^2 + u_i'^2) + \rho \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \frac{\bar{u}_k (\bar{u}_i^2 + u_i'^2)}{2} \right] + \rho \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \bar{u}_i u'_k u'_i + \frac{u'_k u_i'^2}{2} \right) =$$

$$(2.30)$$

$$= -\rho \bar{u}_i \left(1 - \frac{\bar{\theta}}{T_0}\right) \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + \rho \frac{u'_i \theta'}{T_0} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{u}_i \bar{p}_{ik}) - \bar{p}_{ik} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k} (u'_i p'_{ik}) - p'_{ik} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k}$$

Dacă notăm cu  $\Psi = \frac{1}{2} (\bar{u}_i^2 + u_i'^2)$ , atunci primii doi termeni din (2.30) se scriu:

$$\rho \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \rho \frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{u}_k \Psi) = \rho \frac{D\Psi}{Dt} \quad (2.31)$$

Înlocuind (2.31) și (2.24) în ecuația (2.30), rezultă:

$$\rho \frac{D}{Dt} (\Psi + \Phi) = \rho \bar{u}_i \frac{\bar{\theta}}{T_0} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + \rho \frac{u'_i \theta'}{T_0} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{u}_i \bar{p}_{ik}) - \bar{p}_{ik} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x_k} (u'_i p'_{ik}) - p'_{ik} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} - \rho \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \bar{u}_i u'_k u'_i + \frac{u'_k u_i'^2}{2} \right)$$

Deoarece  $\tau_{ik} = -\overline{\rho u'_i u'_j}$ , rezultă în final:

$$\rho \frac{D}{Dt} (\Psi + \Phi) = \rho \bar{u}_i \frac{\bar{\theta}}{T_0} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + \rho \frac{u'_i \theta'}{T_0} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k} [\bar{u}_i (\bar{p}_{ik} + \tau_{ik})] - \bar{p}_{ik} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} +$$

$$(2.33)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x_k} (u'_i p'_{ik}) - p'_{ik} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} - \rho \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{u'_k u_i'^2}{2} \right)$$

care exprimă ecuația de variație a energiei totale mediate. Ecuația de variație a energiei cinetice de turbulență se determină scăzând din ecuația (2.33) ecuația (2.27), ce exprimă variația energiei totale medii. În urma acestei operații, se obține:

$$\rho \frac{D}{Dt} \left( \frac{\overline{u_i'^2}}{2} \right) = \rho \frac{\overline{u_i' \theta'}}{T_0} \frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial x_i} + \tau_{ik} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \overline{u_i' p'_{ik}} \right) - \overline{p'_{ik} \frac{\partial u_i'}{\partial x_k}} - \rho \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\overline{u_k' u_i'^2}}{2} \right) \quad (2.34)$$

Mărima  $\overline{e_T} = \frac{\overline{u_i'^2}}{2}$  este energia cinetică a unității de masă, datorată fluctuațiilor turbulente și reprezintă o măsură a intensității turbulenței.

Prin analogie cu mișcarea de agitație termică a moleculelor, pentru care se definește viteza pătratică medie, pentru mișcarea turbulentă se definește viteza pătratică medie a turbulenței, care se exprimă:

$$u_T = \left( \frac{2}{3} \overline{e_T} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.35)$$

Semnificația fizică a termenilor din ecuația de variație a energiei cinetice medii a turbulenței este:

1.  $\rho \frac{\overline{u_i' \theta'}}{T_0} \frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial x_i} = P_\theta$  reprezintă producția termică de turbulență,  $P_\theta > 0$  dacă fluxul de căldură turbulent este îndreptat în sus și  $P_\theta < 0$  dacă fluxul de căldură turbulent este îndreptat în jos.
2. Deoarece  $p_{ik} = -\rho \delta_{ik} + M_{ik}$ , rezultă:

$$\overline{p'_{ik} \frac{\partial u_i'}{\partial x_k}} = -\overline{p' \frac{\partial u_i'}{\partial x_i}} + \overline{M'_{ik} \frac{\partial u_i'}{\partial x_k}} = \mu \overline{\left( \frac{\partial u_i'}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k'}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_i'}{\partial x_k}} = \rho \overline{\epsilon}$$

și reprezintă termenul de transformare a energiei cinetice de turbulență în căldură, datorată frecărilor vâscoase. Acest termen este disipativ, deci trebuie să fie pozitiv sau egal cu zero,

fapt ce poate fi demonstrat ușor. Dacă notăm  $s_{ij} = \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j'}{\partial x_i}$ , atunci:

$$s_{ij} s_{ij} = \left( \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j'}{\partial x_i} \right) \left( \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j'}{\partial x_i} \right) = 2 \frac{\partial u_i'}{\partial x_i} \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + \left( \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_j'}{\partial x_i} \right)^2 = 2 \left[ \left( \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \right)^2 + \frac{\partial u_i'}{\partial x_i} \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \right]$$

deoarece indicii la ultimul termen pot fi inversați, rezultă:

$$\rho \overline{\epsilon} = \mu \overline{\left( \frac{\partial u_i'}{\partial x_k} \right)^2 + \frac{\partial u_k'}{\partial x_i} \frac{\partial u_i'}{\partial x_k}} = \frac{\mu}{2} \overline{s_{ik} s_{ik}} \geq 0$$

deci acest termen este întotdeauna disipativ.

3.  $\frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u'_i p'_{ik}})$  exprimă un transport de energie de origine moleculară și se numește termen de presodifuzie.
4.  $\tau_{ik} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k}$  exprimă producția dinamică de turbulență.
5.  $\rho \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\overline{u'_k u_i^2}}{2} \right) = \rho \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u'_k e_T'})$  exprimă transportul turbulent de energie cinetică.

## 2.4. Modelele orizontale omogene

În forma sa generală, problema turbulenței în SLA, prezentată mai sus, este foarte complicată și nu poate fi abordată ca atare. Majoritatea studiilor teoretice se limitează la unele versiuni simplificate ale acestei probleme, ce se obțin pe baza ipotezei “omogenității statistice în plan orizontal”. Conform acestei ipoteze, toți parametrii medii, cu excepția presiunii medii și a gradientilor orizontali ai presiunii medii, se presupun independenți de coordonatele orizontale. Modelele, ce rezultă din limitarea de mai sus, se pot aplica și la situații reale, dacă există un relief al suprafeței plan pe câțiva zeci de km<sup>2</sup>, în absența unor neomogenități sinoptice deosebite (fronturi atmosferice, nebulozități puternic neomogene, s.a.). În acest caz SLA va depinde de coordonatele orizontale numai prin condițiile la limită.

Stratul limită atmosferic, omogen orizontal, se numește *strat limită planetar* (SLP). În acest strat este comod să se folosească sistemul de axe de coordonate cartezian Oxyz, cu axa Oz orientată pe verticală în sus, iar axele Ox, Oy cuprinse în planul orizontal. Pentru componentele vitezei pe cele trei axe vom folosi simbolurile: u, v, w.

Ipoteza omogenității în plan orizontal se exprimă matematic prin:  $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0$  pentru toți parametrii medii, cu excepția presiunii medii-  $\bar{p}$ . Notăm, de asemenea, cu  $f_x, f_y, f_z = 2\Omega \sin \varphi = f$ , componentele accelerației Coriolis.

Pentru exemplificare se prezintă *modelul SLP barotrop*.

În cazul neomogenităților orizontale, ecuația de continuitate  $\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0$

se reduce la  $\frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0$  de unde rezultă  $\bar{w} = \text{const}$ . Deoarece viteza vântului se anulează la sol,  $\bar{w}|_{z=0} = 0$  rezultă că  $\bar{w} = 0$ .

Ecuațiile de mișcare în plan orizontal devin:

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla \bar{p} + \vec{f} \times \vec{k} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \vec{\tau}}{\partial z}, \quad (f = 2\Omega) \quad (2.36)$$

unde viteza orizontală medie este  $\vec{v} = \vec{v}(\bar{u}, \bar{v})$ , iar termenii Reynolds se exprimă prin:

$$\bar{\tau} = \bar{\tau}(\tau_x, \tau_y) = \bar{\tau}(-\rho \overline{u'w'}, -\rho \overline{v'w'}).$$

Ecuția de mișcare în lungul axei Oz, se scrie:

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} - \frac{g}{T_0} (\bar{\theta} - T_0) - \frac{\partial \overline{w'^2}}{\partial z} + f_y \bar{u} - f_x \bar{v} \quad (2.37)$$

Deoarece vântul geostrofic se realizează când, în procesul de curgere a aerului, se echilibrează reciproc forța Coriolis și forțele de presiune, componentele vitezei vântului geostrofic, se exprimă:

$$u_g = -\frac{1}{\rho f} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} \quad \text{și} \quad v_g = \frac{1}{\rho f} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \quad (2.38)$$

Dar  $\frac{\partial u_g}{\partial z} = \frac{\partial v_g}{\partial z} = 0$  și rezultă din (2.38)  $\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \right) = -\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} \right)$ , deci gradientii orizontali

ai presiunii medii nu depind de altitudine. Stratul de aer care îndeplinește aceste condiții este barotrop, de unde rezultă că SLP este barotrop.

Folosind componentele vântului geostrofic și condițiile de omogenitate orizontală, ecuațiile de mișcare pentru valorile medii și respectiv pentru temperatura potențială medie se scriu, plecând de la (2.20), și luând  $i = 1, 2$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\overline{u\bar{u}}) + \frac{\partial}{\partial y} (\overline{u\bar{v}}) + \frac{\partial}{\partial z} (\overline{u\bar{w}}) &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + f\bar{v} + v \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} \right) - \\ &= 0 \quad = 0 \quad = 0 \quad = 0 \quad = 0 \\ -\frac{\partial}{\partial x} (\overline{u'u'}) - \frac{\partial}{\partial y} (\overline{u'v'}) - \frac{\partial}{\partial z} (\overline{u'w'}) & \\ &= 0 \quad = 0 \end{aligned}$$

Înlocuind  $\frac{\partial \bar{p}}{\partial x}$  din (2.38) rezultă:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = f(\bar{v} - v_g) + v \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial z} (\overline{u'w'}) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_x}{\partial z} + v \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} + f(\bar{v} - v_g), \quad \tau_x = -\rho \overline{u'w'}$$

În mod asemănător, rezultă ecuația de mișcare pe axa Oy:

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = -f(\bar{u} - u_g) + v \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial z} (\overline{v'w'}) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_y}{\partial z} + v \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial z^2} - f(\bar{u} - u_g), \quad \tau_y = -\rho \overline{v'w'}$$

Pentru temperatura potențială medie, rezultă:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\overline{\theta\bar{u}}) + \frac{\partial}{\partial y} (\overline{\theta\bar{v}}) + \frac{\partial}{\partial z} (\overline{\theta\bar{w}}) &= v\theta \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial}{\partial x} (\overline{\theta'u'}) - \frac{\partial}{\partial y} (\overline{\theta'v'}) - \frac{\partial}{\partial z} (\overline{\theta'w'}) \Rightarrow \\ &= 0 \quad = 0 \quad = 0 \quad = 0 \quad = 0 \quad = 0 \quad = 0 \\ \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} &= v\theta \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial z} (\overline{\theta'w'}) \end{aligned}$$

Grupând aceste ecuații se obține sistemul de ecuații ce descrie comportarea SLP barotrop:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} &= f(\bar{v} - v_g) + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial z}(\overline{u'w'}) \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} &= -f(\bar{u} - u_g) + \nu \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial z}(\overline{v'w'}) \\ \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} &= \nu_\theta \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial z}(\overline{\theta'w'})\end{aligned}\tag{2.39}$$

la care se adaugă ecuația de continuitate:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0$$

Ecuația pentru energia cinetică de turbulență, se scrie:

$$\frac{\partial \bar{\epsilon}_T}{\partial t} = -\frac{g}{T_0} \overline{\theta'w'} - \overline{u'w'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \overline{v'w'} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left[ \overline{w'(p' + \rho e'_T)} \right] - \epsilon\tag{2.40}$$

unde:

$$\begin{aligned}\epsilon &= \overline{\left(\frac{\partial u'}{\partial z}\right)^2} + \overline{\left(\frac{\partial v'}{\partial z}\right)^2} + \overline{\left(\frac{\partial w'}{\partial z}\right)^2} + \overline{\left(\frac{\partial w'}{\partial z}\right)^2} = \overline{\left(\frac{\partial u'}{\partial z}\right)^2} + \overline{\left(\frac{\partial v'}{\partial z}\right)^2} \\ &= 0 \quad = 0 \text{ (din ecuația de continuitate)}\end{aligned}$$



### III. TEORII SEMIEMPIRICE ALE TURBULENȚEI

#### 3.1. Metode de închidere de ordinul I

Cea mai simplă metodă de închidere a sistemului de ecuații ce descrie mișcarea turbulentă constă în a exprima fluxurile turbulente de formă  $\overline{u'_i u'_j}$  sau  $\overline{\theta' u'_j}$  sub forma unor dependențe funcționale de valorile medii ale parametrilor ce caracterizează stratul de aer. Facând o analogie între transportul molecular al unor mărimi și transportul turbulent, se presupune că există o relație de proporționalitate între fluxurile turbulente și gradientii valorilor medii ai mărimilor ce caracterizează mișcarea turbulentă. Aceste relații de proporționalitate se exprimă cantitativ cu ajutorul unor coeficienți de transport turbulent și sunt de forma:

$$\begin{cases} \overline{u'w'} = -K_u \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \\ \overline{v'w'} = -K_u \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \\ \overline{\theta'w'} = -K_\theta \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \end{cases} \quad (3.1)$$

Coeficientul  $K_u$  se numește coeficient de vâscozitate turbulentă, iar coeficientul  $K_\theta$  se numește coeficient de difuzie turbulentă a căldurii. Ei sunt analogii coeficientului de vâscozitate cinematică  $\nu \left( = \frac{\mu}{\rho} \right)$ , respectiv coeficientului de conductibilitate termică  $\nu_\theta$ , având unitatea de măsură exprimată în  $m^2 s^{-1}$ .

Deși coeficienții de transport turbulent din (3.1) s-au introdus prin analogie cu coeficienții de transport molecular, ei nu reprezintă niște constante de material ci depind de condițiile concrete în care se realizează curgerea turbulentă.

Relațiile (3.1) închid sistemul de ecuații (2.20), ce descriu mișcarea turbulentă, numai într-un anumit grad, deoarece coeficienții  $K_u$  și  $K_\theta$  trebuie determinați din condiții suplimentare. Măsurătorile arată că valorile coeficienților de transport turbulent depind de direcție și  $K_{u,u} \neq K_{u,v}$ . Din lipsa datelor privind anizotropia transportului turbulent se postulează egalitatea dintre coeficienții de transport turbulent pentru componentele  $u$  și  $v$  ale vitezei:  $K_{u,u} = K_{u,v} = K_u$ . Deoarece se presupune că fluxurile turbulente sunt orientate astfel ca să micșoreze valorile gradientilor mărimilor medii, ele au sens opus gradientilor medii. Având în vedere că în relațiile (3.1) s-a luat semnul minus, coeficienții de transport turbulent sunt pozitivi, astfel că:

$$K_u \geq 0, \quad K_\theta \geq 0 \quad (3.2)$$

Pentru simplificare se consideră că acești coeficienți sunt și izotropi. Deoarece  $K_u$  este pozitiv, rezultă că și producția dinamică de turbulență este pozitivă:

$$-\left(\overline{u'w'}\frac{\partial\bar{u}}{\partial z} + \overline{v'w'}\frac{\partial\bar{v}}{\partial z}\right) = K_u \left[ \left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial\bar{v}}{\partial z}\right)^2 \right] \geq 0 \quad (3.3)$$

Dacă se consideră coeficienții  $K_u$  și  $K_\theta$  constanți, atunci se regăsesc ecuațiile curgerii laminare, cu condiția ca  $v$  și  $v_0$  să fie înlocuiți cu  $(v+K_u)$ , respectiv cu  $(v_0+K_\theta)$ . O asemenea presupunere a condus la obținerea unui profil vertical parabolic al vitezei medii. Acest rezultat nu este confirmat de datele experimentale. Deci, coeficienții de transport turbulent trebuie să fie funcții de  $z$ , care să asigure anularea lor în apropierea pereților, acolo unde vitezele medii și fluctuațiile acestora sunt nule. Cea mai simplă modalitate de introducere a funcției  $K(z)$  este aceea de a presupune cunoscută a priori dependența lui  $K$  de  $z$  și de parametrii medii, care reproduce cel mai bine caracteristicile globale ale curgerii turbulente studiate. Acest mod de abordare a problemei nu este un mod general, care să țină seama de influența proprietăților locale ale curgerii asupra valorilor coeficienților de transport turbulent. Vom prezenta în continuare câteva forme pentru coeficienții de transport turbulent, la început numai pentru cazul unidimensional, adică pentru fluxul turbulent de forma  $\overline{u'w'}$ .

În afara coeficienților de transport turbulent de impuls sau de caldură, pot fi introduși și alți coeficienți de transport turbulent pentru fiecare flux turbulent ce intervine în ecuațiile ce descriu curgerea turbulentă. Astfel, se pot introduce coeficienții de transport turbulent pentru energia cinetică de turbulență și pentru transportul turbulent de vapori (sau pentru un anumit component gazos):

$$\overline{e'T'w'} = -K_{eT} \frac{\partial\bar{e}T}{\partial z} \quad \text{și} \quad \overline{q'w'} = -K_q \frac{\partial\bar{q}}{\partial z} \quad (3.4)$$

unde  $\bar{q}$ ,  $q'$  este umiditatea specifică medie, respectiv fluctuațiile acestei mărimi.

Deoarece curgerea turbulentă este un factor de amestec al aerului mult mai eficient decât mișcarea moleculară (cu excepția zonelor în care turbulența este inhibată, în apropierea pereților sau în cazul unei stratificări termice stabile), avem:

$$K_u \gg v \quad \text{și} \quad K_\theta \gg v_\theta \quad (3.5)$$

Valorile tipice pentru curgerea aerului uscat sunt  $v \approx 2 \cdot 10^{-5} \text{m}^2 \text{s}^{-1}$  și  $K_u \approx 5 \text{m}^2 \text{s}^{-1}$ .

În cazul tridimensional, coeficienții de transport turbulent au caracter tensorial și se exprimă prin:

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{u'_i u'_j} = -(K_u)_{ijkl} \left( \frac{\partial\bar{u}_k}{\partial x_l} + \frac{\partial\bar{u}_l}{\partial x_k} \right) + \frac{2}{3} \bar{e}T \delta_{ij} \\ \overline{u'_i \theta'} = -(K_\theta)_{ij} \frac{\partial\bar{\theta}}{\partial x_j} \\ \overline{u'_i c'} = -(K_c)_{ij} \frac{\partial\bar{c}}{\partial x_j} \end{array} \right. \quad (3.6)$$

unde  $c$  este concentrația unui component al aerului.

### 3.2. Lungimea de amestec

Cele mai simple metode prin care se definesc coeficienții de difuzie turbulentă, sau așa-numitele “teorii K”, utilizează noțiunea de *lungime de amestec*. Această noțiune este legată de modul de variație al acestor coeficienți în mișcarea turbulentă.

Presupunem o curgere orizontală a unui fluid în lungul axei Ox în cazul unei stratificări neutre de temperatură. Pentru acest caz de curgere rezultă:  $\bar{u} = \bar{u}(z)$ , iar

$$\bar{v} = \bar{w} = 0 \text{ și } \overline{w'\theta'} = \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} = 0. \text{ Deci vom avea în vedere numai fluxurile de forma: } \overline{u'w'}.$$

#### a) Lungimea de amestec Prandtl

Ideea de bază care stă la definirea acestei lungimi de amestec este analogia între curgerea turbulentă a unui fluid și teoria cinetico-moleculară a gazelor. Se presupune că transportul turbulent vertical al unei mărimi oarecare  $\bar{\alpha}$  se efectuează prin niște “jeturi” aleatoare verticale de lungime  $l'_\alpha$ . Aceste jeturi transportă mărimea  $\bar{\alpha}$  pe distanța  $l'_\alpha$ , de-a lungul căreia rămâne constantă și egală cu valoarea sa de la nivelul de origine a jetului. Mărimea  $l'_\alpha$  este analogă drumului liber mediu al moleculelor de gaz din teoria cinetico-moleculară. La un nivel oarecare z fluctuația mărimii  $\alpha$  este:

$$\alpha'(z) = \bar{\alpha}(z - l'_\alpha) - \bar{\alpha}(z) \quad (3.7)$$

unde primul termen al ecuației (3.7) reprezintă valoarea la nivelul de formare a jetului, iar cel de-al doilea termen- valoarea la nivelul z. Se consideră  $l'_\alpha > 0$  pentru un transport (jet) orientat în sus, deci  $w' > 0$ . Dezvoltăm pe  $\alpha'$  în serie după z. Dacă:

$$|l'_\alpha| \leq 2 \left| \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial z} \left( \frac{\partial^2 \bar{\alpha}}{\partial z^2} \right)^{-1} \right|$$

atunci ne putem limita la primul termen al dezvoltării, rezultând:

$$\alpha'(z) = -l'_\alpha \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial z} \quad (3.8)$$

Folosind (3.8), fluxul turbulent al mărimii  $\bar{\alpha}$  se exprimă prin:

$$\overline{w'\alpha'} = -\overline{w'l'_\alpha} \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial z}. \quad (3.9)$$

Considerând relația de proporționalitate între fluxul turbulent și gradientul mărimii medii, rezultă următoarea expresie pentru coeficientul de transport turbulent al lui  $\bar{\alpha}$ :

$$K_\alpha = \overline{w'l'_\alpha} \quad (3.10)$$

Dacă presupunem că mărimea  $\alpha$  transportată este componenta “u” a vitezei, atunci:

$$K_u = \overline{w'l'_u} \quad (3.11)$$

Dacă presupunem, în plus, că fluctuațiile  $u'$  și  $w'$  sunt de același ordin de mărime, adică

$w' \approx u' \cong -l'_u \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right|$  (conform relației (3.8)), atunci:

$$K_u = \overline{(l'_u)^2} \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right| = l_p^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right| \quad (3.12)$$

unde  $l_p^2$  este de același ordin de mărime cu  $(l'_u)^2$  și se numește lungimea de amestec a lui Prandtl. Ea este echivalentul drumului liber mediu al moleculelor din teoria cinetico-moleculară. În mișcarea turbulentă, lungimea de amestec Prandtl este interpretată ca o scară a turbulenței (în jurul unui punct dat) ce caracterizează extinderea spațială a fluctuațiilor turbulente. Dacă mișcarea turbulentă este considerată ca o suprapunere de vârtejuri de diferite dimensiuni, atunci  $l_p$  este interpretată ca fiind dimensiunea vârtejurilor celor mai eficiente pentru realizarea amestecului turbulent sau a *vârtejurilor energetice*.

Pentru ca sistemul de ecuații ce descriu mișcarea turbulentă să fie închis trebuie să se precizeze forma lui  $l_p$ .

Un exemplu în care se precizează forma lui  $l_p$  este mișcarea în *stratul de flux constant*. Acest caz se întâlnește la curgerea unui fluid în apropierea unui perete solid sau, în particular, la curgerea aerului în apropierea solului în SLP neutru. În aceste curgeri, în zona din apropierea peretelui sau a suprafeței solului, fluxurile turbulente sunt aproape constante și nu depind de înălțimea față de perete. În stratul de flux constant se presupune că:

$$\overline{w'u'} = -u_*^2 = \text{const} \quad (3.13)$$

unde  $u_*$  este denumită viteză de frecare și este independentă de  $z$  și de  $t$ . Scara de lungime ce apare în această problemă este distanța  $z$  de la perete sau de la suprafața solului în SLP, astfel că  $l_p = kz$ , unde  $k$  este o constantă de proporționalitate, a lui von Karman. Cu aceste

presupuneri rezultă:  $u_*^2 = l_p^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right| \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}$  sau:

$$u_* = l_p \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = kz \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \quad (3.14)$$

După integrare rezultă:

$$\bar{u}(z) - \bar{u}(z_0) = \frac{u_*}{k} \ln \frac{z}{z_0} \quad (3.15)$$

Forma logaritmică a profilului vertical al vitezei medii este bine verificată experimental într-un strat neutru de flux constant.

În cazuri mai complicate este greu de găsit o formă simplă pentru  $l_p$  ( $l_p = kz$ ), deci această teorie simplă nu este aplicabilă. În plus, din (3.12) rezultă că dacă  $\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = 0$  atunci

$K_u = 0$  fapt ce nu este întotdeauna adevărat.

#### b) Lungimea de amestec Taylor

Unul dintre neajunsurile teoriei lui Prandtl este faptul că impulsul particulelor de fluid nu se conservă de-a lungul traiectoriilor datorită fluctuațiilor de presiune. O teorie care înlătură acest neajuns este a lui Taylor care înlocuiește transportul de impuls cu transportul altei mărimi, în particular a rotorului vitezei.

Pentru o curgere bidimensională (într-un plan vertical când  $v \equiv 0$ ,  $u \neq 0$ ,  $w \neq 0$ ) componenta rotorului vitezei perpendiculară pe planul curgerii unui fluid este:

$$\omega_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = \text{rot}_y v \quad (3.16)$$

și se conservă în cazul unui fluid ideal.

Ideea acestei teorii constă în folosirea noțiunii de lungime de amestec pentru  $\omega_y$ , considerând curgerea fluidului ideal în lungul axei Ox. Folosind ecuația de continuitate și condiția de omogenitate statistică a curgerii turbulente în lungul axei Ox vom exprima lungimea de amestec Taylor. Divergența fluxului turbulent este:

$$-\frac{\partial}{\partial z} \overline{(u'w')} = -\overline{\left(u' \frac{\partial w'}{\partial z} + w' \frac{\partial u'}{\partial z}\right)} = -\overline{\left(u' \frac{\partial w'}{\partial z} + w' \frac{\partial u'}{\partial z} - w' \frac{\partial w'}{\partial x} + w' \frac{\partial w'}{\partial x}\right)} = \quad (3.17)$$

$$= -w' \overline{\left(\frac{\partial u'}{\partial z} - \frac{\partial w'}{\partial x}\right)} - \overline{\left(u' \frac{\partial w'}{\partial z} + w' \frac{\partial w'}{\partial x}\right)}$$

Din ecuația de continuitate pentru fluctuații rezultă:

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{\partial w'}{\partial z} = -\frac{\partial u'}{\partial x},$$

astfel că (3.17) devine:

$$-\frac{\partial}{\partial z} \overline{(u'w')} = -w' \overline{\left(\frac{\partial u'}{\partial z} - \frac{\partial w'}{\partial x}\right)} + \overline{\left(u' \frac{\partial u'}{\partial x} + w' \frac{\partial w'}{\partial x}\right)} = -w' \overline{\left(\frac{\partial u'}{\partial z} - \frac{\partial w'}{\partial x}\right)} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \overline{(u'^2 - w'^2)} \quad (3.18)$$

Deoarece s-a presupus omogenitatea statistică în lungul axei Ox rezultă:  $\overline{u'^2} = \overline{w'^2}$ , iar relația (3.18) devine, ținând cont și de (3.16):

$$\frac{\partial}{\partial z} \overline{(u'w')} = \overline{w' \omega_y} \quad (3.19)$$

Făcând ipoteza de conservare a lui  $\omega_y$  de-a lungul jeturilor aleatoare de lungime  $l'_\omega$  rezultă:

$$\omega'_y = -l'_\omega \frac{\partial \overline{\omega_y}}{\partial z} = -l'_\omega \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial z^2} \quad (3.20)$$

Dacă presupunem că fluctuațiile  $\omega'_y$  sunt de același ordin de mărime ca și fluctuațiile  $u'$ , rezultă:

$$-\frac{\partial}{\partial z} \overline{(u'w')} = l_T^2 \left| \frac{\partial \overline{u}}{\partial z} \right| \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial z^2} \quad (3.21)$$

unde  $l_T$  este lungimea de amestec Taylor, care are aceeași semnificație intuitivă ca și lungimea de amestec Prandtl.

Pentru curgerea tridimensională rotorul vitezei nu se conservă, deci teoria nu este aplicabilă și  $l_T$ , în acest caz, trebuie determinat pe cale empirică.

Deși  $l_T = \sqrt{2} l_p$ , cu ajutorul acestei teorii nu se obține profilul logaritmic al vitezei medii într-un strat de fluid de flux constant, și prin urmare, această teorie este mai puțin folosită în studiul mișcării aerului în SLA decât teoria lui Prandtl. Teoria lui Taylor duce la rezultate bune în cazul curgerii fluidelor în canale sau tuburi cu gradient de presiune diferit de zero, dacă se presupune  $l_T = kz$ .

### c) Ipoteza lui von Karman

Utilizarea efectivă a ipotezei lungimii de amestec presupune introducerea unei noi ipoteze asupra formei acesteia, dedusă din considerente dimensionale. Teoria lui von Karman evită necesitatea postulării a priori a unei forme pentru lungimea de amestec.

În teoria lui von Karman se pleacă de la ideea că fluctuațiile vitezei  $\bar{u}$  sunt similare în toate punctele curgerii. Dacă în orice punct  $\bar{x}_0$  se poate defini o lungime  $l(\bar{x}_0)$  și o viteză  $U(\bar{x}_0)$ , atunci în vecinătatea lui  $\bar{x}_0$  raportul  $\frac{\bar{u}'(\bar{x})}{U(\bar{x}_0)}$  va fi o funcție universală de raportul  $\frac{(\bar{x} - \bar{x}_0, \bar{u}(\bar{x}_0), t)}{l(\bar{x}_0)}$ . La o asemenea concluzie se poate ajunge și din considerente

dimensionale. Dacă lungimea de amestec  $l$  este o funcție locală ce caracterizează mișcarea medie, atunci ea nu poate depinde de viteza medie  $\bar{u}$  (invarianța ecuațiilor de mișcare față de translație). Ea nu poate depinde decât de derivatele succesive ale lui  $\bar{u}$ , și într-o primă aproximație, de derivatele de ordinul întâi și doi. Atunci, pentru respectarea omogenității dimensionale a relației rezultă:

$$l = -k \frac{\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}}{\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2}}, \quad (3.20)$$

unde  $k$  este constanta lui von Karman, ce trebuie determinată experimental. Relația de mai sus, asociată cu legătura dintre  $K$  și  $l_p$ , din ipoteza lui Prandtl, este frecvent utilizată în studiul mișcării turbulente. Cu ajutorul ei se obține un profil logaritmic al vitezei într-un strat de flux constant, însă rezultatele nu pot fi generalizate pentru curgerea bidimensională sau pentru cazul unei stratificări neneutre de temperatură.

Teoria lui von Karman este cunoscută și sub numele de teoria similitudinii cinematice locale.

#### d) Teoriile "K diferențiale"

Metodele descrise mai sus, numite și "metode K", definesc coeficienții de transport turbulent cu ajutorul unor relații pur algebrice. Există metode mai complexe, numite "metode K diferențiale", în care este necesar să se rezolve o ecuație diferențială suplimentară, față de sistemul de ecuații ce descrie mișcarea turbulentă, pentru introducerea acestor coeficienți. Vom considera o curgere turbulentă în lungul axei  $Ox$ , o stratificație de temperatură neutră și o omogenitate statistică a turbulenței.

În multe cazuri se pleacă de la o analogie între teoria cinetico-moleculară a gazelor și mișcarea turbulentă. În teoria cinetico-moleculară a gazelor s-a stabilit o relație de dependență între coeficientul cinematic de transport de impuls, exprimat prin coeficientul de vâscozitate dinamică  $\nu$ , drumul liber mediu al moleculelor  $\lambda$  și viteza termică  $v_T$  a moleculelor, de forma:

$$\nu = a\lambda v_T, \quad (3.23)$$

unde  $a$  este o constantă aproximativ egală cu 0,5.

Dacă se folosește analogia între mișcarea turbulentă și teoria cinetico-moleculară a gazelor, atunci coeficienții de transport turbulent de impuls trebuie să se exprime prin relații asemănătoare cu (3.23), de forma:

$$K_u = a l (\bar{e}_T)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.24)$$



unde  $a$  este o constantă ce trebuie precizată. Se observă din (3.24) că rolul drumului liber mediu din teoria cinetico-moleculară a gazelor este luat de lungimea de amestec, iar rolul vitezei termice este luat de viteza pătratică medie în mișcarea turbulentă, exprimată prin:

$$u_T = \left( \frac{2}{3} \bar{e}_T \right)^{\frac{1}{2}}$$

Închiderea completă a sistemului de ecuații ce descrie mișcarea turbulentă necesită încă o ipoteză suplimentară asupra lui  $l$  și asupra lui  $\bar{e}_T$ . Pentru  $\bar{e}_T$  se poate utiliza ecuația de variație a energiei cinetice care, la rândul ei, trebuie închisă. Pentru închiderea sistemului de ecuații se mai folosește o ipoteză. Conform acestei ipoteze, toate caracteristicile interne ale turbulenței sunt în întregime definite de intensitatea turbulenței, care este în relație directă cu  $\bar{e}_T$  și de scara turbulenței, exprimată prin lungimea de amestec. În acest caz, din raționamente de omogenitate dimensională, rezultă:

$$\begin{aligned} \overline{w'e'_T} - \frac{\overline{p'w'}}{\rho_0} &= -K_{eT} \frac{\partial \bar{e}_T}{\partial z} \\ K_{eT} &= \alpha_{eT} K_u = \alpha_{eT} a l (\bar{e}_T)^{\frac{1}{2}} \\ \bar{e}_T &= C_\epsilon \frac{(\bar{e}_T)^{\frac{3}{2}}}{l} \end{aligned} \quad (3.25)$$

unde  $K_{eT}$  este coeficientul de transport turbulent de energie cinetică, iar  $\bar{e}_T$  exprimă disiparea energiei cinetice de turbulență.

Neglijând pe  $v$  în raport cu  $K_{eT}$  și, folosind ipoteza (3.25), ecuația de variație a energiei cinetice medii de turbulență (2.34), în cazul considerat ( $\bar{v} = 0, \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} = 0$ ), devine:

$$\frac{\partial \bar{e}_T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[ \alpha_{eT} a l (\bar{e}_T)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \bar{e}_T}{\partial z} \right] + a l (\bar{e}_T)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)^2 - C_\epsilon \frac{(\bar{e}_T)^{\frac{3}{2}}}{l} \quad (3.26)$$

Această ecuație diferențială, împreună cu o ipoteză asupra lungimii de amestec  $l$ , închide sistemul de ecuații, format din ecuația lui Reynolds pentru componenta  $u$  și ecuația de continuitate. Constantele numerice  $a$ ,  $\alpha_{eT}$ ,  $C_\epsilon$  se determină pe cale experimentală sau prin încercări pentru a obține o cât mai bună concordanță cu datele experimentale.

Teoriile prezentate mai sus sunt cele mai bune teorii semiempirice ale turbulenței, care închid sistemul de ecuații ce descrie curgerea turbulentă a aerului. Avantajul acestor teorii, față de alte teorii mai complexe, este simplitatea lor și faptul că necesită un volum și timp de calcul relativ reduse. Ele au dezavantajul că nu au soluții analitice decât în câteva cazuri simple. În scopuri practice, aceste teorii conduc la rezultate acceptabile pentru profilul vertical al mărimilor medii, însă nu explică mecanismele turbulenței deoarece noțiunea de coeficient de transport nu are semnificație fizică directă în mișcarea turbulentă.

## IV. TEORIA DE SIMILITUDINE ÎN STRATUL DE SUPRAFAȚĂ AL ATMOSFEREI\*

### 4.1. Modelul stratului de flux constant

În vecinătatea suprafeței solului, mișcarea aerului este quasi-staționară și pot fi neglijate efectele forțelor de presiune și a forței Coriolis. Domeniul în care aceste condiții sunt îndeplinite poartă denumirea de *strat de suprafață al atmosferei* (SSA). Grosimea sa este de câțiva zeci de metri. Stratul de suprafață al atmosferei este partea stratului limită al atmosferei cea mai bine studiată și cunoscută deoarece experimenterii au acces direct la această zonă din atmosferă.

Pentru introducerea unor noțiuni, ce vor fi utilizate ulterior, vom considera o curgere turbulentă ideală. Anume, vom analiza un model de curgere orizontal omogenă și staționară a unui fluid incompresibil, în vecinătatea unui perete solid ales în planul Oxy. Considerăm cazul unei stratificări termice neutre, în absența gradientilor medii de presiune și a forței Coriolis. Viteza medie de curgere a fluidului este orientată în lungul axei Ox. În aceste condiții, ecuațiile Reynolds devin:

$$\tau(z) = \rho_0 \nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \rho_0 \overline{u'w'} = \text{const} = \tau_0 \quad (4.1)$$

Adică, suma dintre fluxurile turbulent și molecular de impuls este constantă în lungul direcției perpendiculare pe perete. Din această cauză modelul se numește model de flux constant.  $\tau_0$  reprezintă valoarea fluxului total, turbulent și molecular, de impuls pentru  $z = 0$ :

$$\tau_0(z) = \rho_0 \nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \Big|_{z=0}, \quad \rho_0 \overline{u'w'} \Big|_{z=0} = 0 \quad (4.2)$$

Acest model de curgere reprezintă o aproximație bună pentru curgerea unui fluid incompresibil în vecinătatea unor pereți solizi și pentru un strat de aer, de câțiva zeci de metri grosime la suprafața solului, în condițiile unei stratificații termice neutre, fapt confirmat experimental.

Scriem ecuațiile Reynolds (4.1) sub o altă formă, ținând seama de (3.1):

$$\nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \overline{u'w'} = u_*^2 \quad \text{sau} \quad (\nu + K_u) \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = u_*^2 \quad (4.3)$$

---

\* Vezi Anexa 1

unde  $u_* = \left(\frac{\tau_0}{\rho_0}\right)^{\frac{1}{2}}$  se numește *viteză de frecare*. Ecuația de mai sus nu permite stabilirea profilului vertical al vitezei medii  $\bar{u}(z)$  datorită prezenței fluxului turbulent de impuls și a prezenței lui  $K_u$ .

Un raționament bazat pe o analiză dimensională simplă duce la rezolvarea acestei probleme. Ecuația de mai sus introduce parametri fizici  $z$ ,  $u_*$ ,  $\nu$ . Este mai avantajos să se înlocuiască acești parametri cu  $z$ ,  $z_* = \frac{\nu}{u_*}$ ,  $u_*$ , unde  $z$ , se numește *lungime de frecare*.

Condițiile la limită ale problemei introduc un număr de lungimi ce caracterizează distribuția spațială a iregularităților suprafeței plane a peretelui cum sunt: înălțimea medie  $h_s$  a acestora și distanțele tipice dintre ele  $h_1, h_2, h_3, \dots$ .

Dacă  $h_s \ll z_*$ , atunci aceste lungimi nu intervin în soluțiile problemei, iar peretele se numește *dinamic neted*.

Dacă  $h_s \geq z_*$ , atunci soluțiile problemei depind de aceste lungimi, iar peretele se numește *dinamic rugos*.

În cazul peretelui dinamic neted, variabilele de care poate să depindă  $\bar{u}$  sunt  $z$ ,  $z_*$ ,  $u_*$ , iar analiza dimensională conduce la:

$$\frac{\bar{u}(z)}{u_*} = f_u\left(\frac{z}{z_*}\right) = f_u\left(\frac{zu_*}{\nu}\right) \quad (4.4)$$

unde prin  $f_u$  s-a notat o funcție universală.

În cazul peretelui dinamic rugos, argumentele de care poate să depindă  $\bar{u}$  sunt:  $z$ ,  $z_*$ ,  $u_*$ ,  $h_s$ ,  $h_1$ ,  $h_2, \dots$ , iar analiza dimensională conduce la:

$$\frac{\bar{u}(z)}{u_*} = f_u\left(\frac{z}{z_*}, \frac{z_*}{h_s}, \frac{h_1}{h_s}, \frac{h_2}{h_s}, \dots\right), \quad (4.5)$$

unde  $f_u$  este o funcție universală de mai multe argumente.

În cele două cazuri, forma funcției universale  $f_u$  trebuie determinată experimental sau teoretic prin formularea unei ipoteze asupra fluxului turbulent de impuls  $\overline{u'w'}$  (ipoteza de închidere).

#### a) Cazul peretelui neted

La contactul fluidului cu peretele, condiția de aderență implică  $\overline{u'w'}|_{z=0} = 0$ .

Rezultă că pentru un  $z$  suficient de mic, fluxul molecular  $-\nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}$  este mult mai mare decât fluxul turbulent. Zona din imediata vecinătate a peretelui în care este îndeplinită această condiție se numește *substrat vâscos sau laminar*. Grosimea acestui strat  $\delta_\nu$  este definită din condiția:

$$\left| \overline{u'w'}(z) \right| \leq 0,1 \left| \nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right| \quad \text{pentru } z \leq \delta_\nu \quad (4.6)$$

Dacă în acest strat se neglijează fluxul turbulent față de fluxul molecular, ecuația (4.3) devine:

$$\nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = u_*^2$$

și prin integrare rezultă profilul vertical al vitezei medii în substratul vâscos:

$$\bar{u}(z) = \frac{u_*^2}{\nu} z \quad \text{sau} \quad \frac{\bar{u}(z)}{u_*} = \frac{u_* z}{\nu}$$

de unde:

$$f_u \left( \frac{z}{z_*} \right) = \frac{z}{z_*} = \frac{u_* z}{\nu} \quad (4.7)$$

Grosimea  $\delta_v$  a substratului vâscos nu poate, în mod evident, să depindă decât de  $\nu$  și de  $u_*$ , iar din considerente dimensionale rezultă:

$$\delta_v = \delta_v(u_*, \nu) = \alpha z_*, \quad (4.8)$$

unde  $\alpha$  este o constantă universală ce trebuie determinată experimental pentru fiecare tip de perete.

Pentru o înălțime  $z \geq \delta_l$ , cu  $\delta_l$  definit din condiția:

$$\left| \nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}(\delta_l) \right| \leq \overline{lu'w'}(\delta_l) \quad (4.9)$$

fluxul molecular de impuls este mai mic decât fluxul turbulent. În acest caz, ecuația Reynolds se reduce la forma  $\overline{u'w'} = -u_*^2$ . Această ecuație nu poate fi rezolvată decât dacă se formulează o ipoteză în legătură cu forma fluxului turbulent sau dacă se face un raționament pe baza considerentelor de natură dimensională. Vom folosi, în continuare, un asemenea raționament.

Această ecuație nu depinde de vâscozitatea cinematică, deci nici  $\bar{u}$  nu va depinde de acest parametru decât prin condițiile de la baza stratului, exprimate prin  $\bar{u}(\delta_l)$ . Dacă

$\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}$  nu depinde decât de  $z$  și  $u_*$ , vom avea din analiza dimensională:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = \frac{1}{k} \frac{u_*}{z} \quad (4.10)$$

de unde rezultă, după integrare de la  $\delta_l$  la  $z$ , profilul vertical al vitezei medii:

$$\bar{u}(z) = \bar{u}(\delta_l) + \frac{u_*}{k} \ln \frac{z}{\delta_l} \quad (4.11)$$

Constanta din (4.11) este constanta universală a lui von Karman a cărei valoare trebuie determinată experimental. Mărimea  $\delta_l$  nu poate depinde decât de  $u_*$  și de  $\nu$  și este de forma:

$$\delta_l = \delta_l(u_*, \nu) = \alpha_1 z_*, \quad (4.12)$$

unde  $\alpha_1$  este o constantă universală ce se determină experimental pentru fiecare tip de perete în parte și pentru fiecare curgere. După împărțirea relației (4.11) cu  $u_*$ , aceasta devine:

$$\frac{\bar{u}(z)}{u_*} = \frac{1}{k} \ln \frac{z}{\delta_l} + \frac{\bar{u}(\delta_l)}{u_*},$$

de unde rezultă că  $f_u \left( \frac{z}{z_*} \right) = \frac{1}{k} \ln \frac{z}{\delta_l} + f_u \left( \frac{\delta_l}{z_*} \right)$  sau  $f_u = \frac{1}{k} \left\{ \ln \frac{z}{\delta_l} \exp[kf_u(\alpha_1)] \right\}$ .

Dacă se notează  $\alpha_0 = \frac{\alpha_1}{\exp[kf_u(\alpha_1)]}$  și  $z_0 = \frac{\alpha_0 n}{u_*}$  atunci rezultă în final:

$$\bar{u}(z) = \frac{u_*}{k} \ln \frac{z}{z_0} \quad (4.13)$$

unde  $z_0 = \alpha_0 z_i$  și se numește *lungime de rugozitate*.

Deci, pentru  $z \geq \delta_i$  legea de variație a vitezei medii funcție de  $z$  este logaritmică, iar această parte a fluidului se numește și strat logaritmic. Pentru  $\delta_v < z < \delta_i$ , fluxul molecular și fluxul turbulent de impuls sunt de același ordin de mărime, iar o analiză dimensională, ca cea făcută mai sus, nu mai este valabilă. De regulă, cele două profile se prelungesc până se interectează, aceasta se întâmplă la  $z=10z_i$ .

#### b) Cazul peretelui rugos

Pentru peretele rugos, când  $h_s \geq z_i$  din analiza dimensională, rezultă:

$$\frac{\bar{u}(z)}{u_*} = f_u \left( \frac{z}{z_*}, \frac{z_*}{h_s}, \frac{h_1}{h_s}, \frac{h_2}{h_s}, \dots \right)$$

unde  $\frac{h_1}{h_s}, \frac{h_2}{h_s}, \dots$  sunt parametri adimensionali ce depind numai de geometria suprafeței peretelui. În apropierea suprafeței peretelui nu se poate face un raționament simplu și general deoarece curgerea este influențată de proprietățile suprafeței.

Dacă  $z \gg h_s$ , atunci curgerea nu este influențată de  $v$  și de proprietățile suprafeței, de care va depinde doar prin condițiile la limită. Analiza dimensională impune că:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = \frac{1}{k} \frac{u_*}{z} \quad (4.14)$$

de unde rezultă un profil logaritmic al vitezei medii de forma:

$$\bar{u}(z) = \frac{u_*}{k} \ln \frac{z}{z_0} \quad (4.15)$$

Constanta de integrare  $z_0$ , analoagă unei lungimi se numește *lungime de rugozitate*.

Lungimea de rugozitate  $z_0$  nu poate depinde decât de  $v, u_*, h_s, h_1, h_2, \dots$  sau în mod echivalent de  $z_i, h_s, h_1, h_2, \dots$  și poate fi de forma:

$$z_0 = h_s Z_0 \left( \frac{z_*}{h_s}, \frac{h_1}{h_s}, \frac{h_2}{h_s}, \dots \right) \quad (4.16)$$

Deci, lungimea de rugozitate depinde de regimul de curgere a fluidului prin  $z_i$  și de structura suprafeței peretelui prin  $h_s, h_1, h_2, \dots$

Dacă  $h_s \gg z_i$  (când *peretele se numește complet rugos*), atunci  $z_0$  nu depinde de  $z_i$ , ci numai de caracteristicile geometrice ale suprafeței peretelui. În acest caz, legea logaritmică de variație a vitezei medii se poate prelungi până la  $z=h_s$  cu o mică corecție. Pentru un  $z \geq h_s$ , curgerea trebuie să fie influențată de  $h_s$  dar nu și de  $v$ . Astfel, din analiza dimensională, rezultă:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = \frac{u_*}{kz} \Psi \left( \frac{h_s}{z} \right) \quad (4.17)$$

unde  $\Psi$  este o corecție ce trebuie adusă formulei valabile pentru  $z \gg h_s$ , având proprietatea  $\Psi(0)=1$ . Dacă notăm  $z_d = h_s \Psi'(0)$  și păstrăm primul termen din dezvoltarea în serie a lui  $\Psi$  în funcție de  $\frac{h_s}{z}$ , rezultă:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = \frac{u_*}{k(z - z_d)}$$

de unde prin integrare:

$$\bar{u}(z) = \frac{u_*}{k} \ln \frac{z - z_d}{z_0} \quad (4.18)$$

unde  $z_d$  se numește *înălțime de deplasare*. În cazurile reale, întâlnite la curgerea aerului, înălțimea de deplasare este cuprinsă între 0 și  $h_s$  în funcție de natura și de distribuția elementelor rugoase. Profilul vertical logaritm al vitezei medii este valabil și în cazul mișcării aerului deasupra suprafeței solide a pământului, când suprafața solului se poate considera perete complet rugos. Valorile tipice pentru curgerea aerului uscat sunt:  $u_* = 30 \text{ cm s}^{-1}$ ,  $v = 1,5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$  cu  $h_s > 60 \frac{u_*}{u_*}$ ,  $h_{\text{critic}} \cong 3 \text{ mm}$ ,  $z_0 \approx 10^{-1} \text{ m}$ .

#### 4.2. Stratul de suprafață al atmosferei

Considerăm o curgere turbulentă a aerului orizontal omogenă. Pentru studiile teoretice, lungimea de rugozitate reprezintă altitudinea la care trebuie să deplasăm originea sistemului de axe pentru a putea ține seama de neregularitățile solului. În mod formal, condițiile la limită se scriu:  $\bar{u}(z_0) = \bar{v}(z_0) = 0$ , deoarece  $\bar{u}(0)$  și  $\bar{v}(0)$  nu se pot defini precis. De obicei,  $z_0$  este cu un ordin de mărime mai mic decât înălțimea medie  $h_s$  a neregularităților solului. Din datele experimentale rezultă că la baza stratului limită planetar, deci în stratul de suprafață al atmosferei, mișcarea aerului este quasi-staționară ( $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ ) și pot fi neglijate forța gradientului baric și forța Coriolis. În acest caz ecuațiile lui Reynolds se reduc la:

$$\begin{aligned} -v \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \overline{u'w'} &= -(v + K_u) \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = C_1 = \text{const} \\ -v \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + \overline{v'w'} &= -(v + K_u) \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} = C_2 = \text{const} \\ -v_\theta \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} + \overline{\theta'w'} &= -(v_\theta + K_\theta) \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} = C_3 = \text{const} \end{aligned} \quad (4.19)$$

Ecuațiile de mai sus sunt adevărate într-un strat de fluid de flux constant în care suma dintre fluxurile turbulente și moleculare de impuls și de temperatură potențială este constantă. Stratul de flux constant, astfel definit, se numește *strat limită de suprafață* (SLS) sau *strat Prandtl*.

Primele două ecuații din (4.19) arată că direcția vitezei vântului în acest strat nu se modifică, deoarece raportul  $\frac{\bar{v}(z)}{\bar{u}(z)}$  rămâne constant. Prin integrare în (4.19), avem:

$$\frac{\bar{v}(z)}{\bar{u}(z)} = \frac{\int_{z_0}^z \frac{C_2 dz}{K_u + v}}{\int_{z_0}^z \frac{C_1 dz}{K_u + v}} = \frac{C_2}{C_1} = \text{const} \quad (4.20)$$

Sistemul de axe de coordonate cu care se lucrează în SLS are axa  $Ox$  orientată în direcția și sensul vitezei vântului, iar axa  $Oy$ , perpendiculară pe  $Ox$ , cuprinsă în planul peretelui. Dacă notăm cu  $Q_0$  fluxul cinetic de căldură și dacă definim viteza de frecare  $u_*$  cu ajutorul fluxului de impuls sub forma  $|\bar{\tau}_0(z_0)| = \tau_0 = \rho_0 u_*^2$ , atunci sistemul de ecuații (4.19), față de sistemul de axe considerat, se va scrie:

$$\left. \begin{aligned} \overline{u'w'} - v \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} &= -u_*^2 \\ \overline{\theta'w'} - v\theta \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} &= Q_0 \\ \bar{v} &= 0, \quad \overline{v'w'} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.21)$$

La o distanță suficient de mare de suprafața peretelui, fluxurile moleculare exprimate prin  $v$  și  $v_\theta$ , în (4.31), devin neglijabile în raport cu fluxurile turbulente și sistemul de ecuații (4.21) exprimă faptul că fluxurile turbulente sunt constante.

### 4.3. Teoria similitudinii Monin-Obukhov pentru SLS

Considerăm curgerea aerului în apropierea unui perete plan. Parametrii statistici ce caracterizează curgerea aerului în SLS neneutru, în plus față de coordonatele spațiale și temporale sunt:

-  $\rho_0$ ,  $\beta = \frac{g}{T_0}$ ,  $v$ ,  $v_\theta$  care intră în ecuațiile de bază,

-  $u_*$ ,  $Q_0$  care caracterizează interacția aerului cu suprafața solidă a peretelui, constanți în strat,

-  $z_0$  lungimea de rugozitate ce descrie caracteristicile dinamice ale suprafeței peretelui.

Pentru distanțe  $z \gg z_0$ , curgerea nu este influențată direct de caracteristicile dinamice ale suprafeței, iar în cazul unei mișcări turbulente relativ intense, coeficienții cinetici  $v$  și  $v_\theta$  pot fi neglijați față de coeficienții de transport turbulent. Rezultă că pentru  $z \gg z_0$ , parametrii care descriu mișcarea vor fi:

$$\rho_0, \beta = \frac{g}{T_0}, u_*, Q_0. \quad (4.22)$$

Ipotezele de mai sus se fac în formalismul clasic al SLS, elaborat de către Monin-Obukhov. Cu ajutorul parametrilor (4.22) se poate forma numai câte o singură

combinație, omogenă dimensional, pentru lungime, viteză și temperatură, astfel că rezultă scările fundamentale:

- scara de lungime Monin-Obukhov, numită și lungimea Monin-Obukhov, dată de

$$\text{expresia } L_{MO} \equiv L = -\frac{u_*^3}{k\beta Q_0} \quad (4.23)$$

- scara de viteze sau viteza de frecare  $u_*$ , (4.24)

- scara de temperatură, exprimată prin  $\theta_* = -\frac{Q_0}{u_*}$  (4.25)

Deoarece  $u_*$  este totdeauna pozitiv, mărimile de mai sus au fost definite în așa fel încât să fie pozitive pentru un flux de căldură orientat în jos ( $Q_0 < 0$ ). Pentru o stratificație de temperatură neutră, lungimea Monin-Obukhov este infinită, iar parametrul  $\beta$  va dispărea din lista parametrilor caracteristici. Valorile scărilor fundamentale sunt constante în SLS.

Conform teoremei  $\pi$  (vezi anexa I), toate mărimile ce caracterizează turbulența, ale căror dimensiuni se exprimă cu ajutorul unor combinații între lungime, viteză și temperatură, vor avea o scară caracteristică proprie ce se obține ca o combinație a scărilor fundamentale:  $L$ ,  $u_*$ , și  $\theta_*$ . De exemplu, un coeficient de transport turbulent are scara:

$$K_t = u_* L \quad (4.26)$$

În stratul de suprafață, profilele verticale ale vitezei și temperaturii medii depind de  $z$ , iar parametrii ce intervin vor fi:  $z$ ,  $\rho_0$ ,  $\beta$ ,  $u_*$ ,  $\theta_*$ . Cu acești parametri se pot forma mai multe scări:

- două scări de lungime  $L$  și  $z$ ,

- două scări de viteză  $u_*$  și  $u_f = (\beta Q_0 z)^{\frac{1}{3}}$ ,

- două scări de temperatură  $\theta_*$  și  $\theta_f = \left(\frac{Q_0^2}{\beta z}\right)^{\frac{1}{3}}$ .

Indicele  $f$  se referă la convecția liberă. Dacă  $u_* \neq 0$ , atunci cele două scări nu sunt independente, adică:

$$\frac{u_f}{u_*} \approx \left(-\frac{z}{L}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad \frac{\theta_f}{\theta_*} \approx \left(-\frac{z}{L}\right)^{-\frac{1}{3}}$$

Dacă  $u_* = 0$ , parametrii  $L$ ,  $u_*$ ,  $\theta_*$  nu mai pot fi definiți, iar scările vor fi definite de  $z$ ,  $u_f$ ,  $\theta_f$ . Cazul în care  $u_* = 0$  se numește convecție liberă și se caracterizează printr-o producție dinamică neglijabilă față de producția termică de turbulență.

Condițiile de stabilitate ale stratului limită se pot determina și după valoarea și după semnul lungimii Monin-Obukhov. Totuși, este obișnuit să se folosească în acest scop valorile unor mărimi adimensionale (numere), ce au primit denumirea de indici de stabilitate. Se folosesc indicii:

*Numărul lui Richardson de flux pentru SLS, definit prin*

$$R_f = \frac{\beta Q_0}{u_*^2 \frac{\partial u}{\partial z}} \quad (4.26)$$



Variația lui  $R_f$  cu  $z$  nu este cunoscută deoarece în expresia lui  $R_f$  apare derivata vitezei medii.

Indicele Monin-Obukhov, definit prin relația:

$$\xi = \frac{z}{L} = -\frac{k\beta Q_0 z}{u_*^3}. \quad (4.27)$$

Variația sa cu  $z$  în SLS este cunoscută și este lineară, deoarece  $L = \text{const}$ . Valoarea indicelui Monin-Obukhov exprimă un criteriu fundamental de stabilitate a stratului, din punct de vedere teoretic.

Atât  $R_f$  cât și  $\xi$  sunt pozitivi în regim termic stabil ( $Q_0 < 0$ ), egali cu zero în regim termic neutru ( $Q_0 = 0$ ) și negativi în regim termic instabil ( $Q_0 > 0$ ). Cei doi indici de stabilitate nu sunt independenți deoarece între ei există relația:  $\xi = R_f \left( \frac{kz}{u_*} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)$ . Expresia

din paranteză este așa numita forfecare a vitezei vântului în stratul de suprafață, adimensională deoarece intervin  $u_*$  și  $kz$ .

Indicii lui Richardson și Monin-Obukhov pentru gradienti

Aceste numere se folosesc mai rar, dar sunt utile în absența datelor privind fluxurile turbulente. Se definesc prin relațiile:

$$Ri = \frac{\beta \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z}}{\left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)^2} \quad (4.28)$$

$$\xi' = \frac{z}{L}, \text{ unde } L' = \frac{u_* \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}}{k\beta \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z}} \quad (4.29)$$

ținând seama de definiția coeficienților de transport turbulent, avem:

$$Ri = \frac{K_u}{K_\theta} R_f \text{ și } \xi' = \frac{K_u}{K_\theta} \xi \quad (4.30)$$

Ideea de bază a teoriei similitudinii Monin-Obukhov este că variabilitatea structurii stratului de suprafață se poate explica prin variabilitatea scării fenomenelor fizice. Explicarea matematică a acestei idei este redată mai jos.

Distribuțiile de probabilitate ale variabilelor  $u'$ ,  $v'$ ,  $w'$ ,  $\theta'$ , adimensionale în raport cu  $u_*$  și  $\theta_*$ , în  $n$  puncte  $(x_1, y_1, z_1), \dots, (x_n, y_n, z_n)$  din stratul de suprafață, la  $m$  momente de timp  $t_1, t_2, \dots, t_m$ , nu depinde decât de :

$$\left. \begin{array}{l} \frac{x_2 - x_1}{L}, \dots, \frac{x_n - x_1}{L}, \frac{y_2 - y_1}{L}, \dots, \frac{y_n - y_1}{L}, \frac{z_1}{L}, \dots, \frac{z_n}{L} \\ \frac{(t_2 - t_1)u_*}{L}, \dots, \frac{(t_m - t_1)u_*}{L} \end{array} \right\} \quad (4.31)$$

Dacă  $(x_2 - x_1), \dots, (x_n - x_1)$ ;  $(y_2 - y_1), \dots, (y_n - y_1)$ ;  $z_1, \dots, z_n$ ;  $(t_2 - t_1), \dots, (t_m - t_1)$  nu sunt prea mici (pentru a elimina influența fluctuațiilor moleculare și a lui  $z_0$ ) și nici prea mari (pentru a asigura

condițiile de staționaritate și de omogenitate orizontală), atunci  $\bar{u}$  și  $\bar{\theta}$  vor depinde de  $\frac{z}{L}$

și de  $\frac{z_0}{L}$ , iar  $\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}$  și  $\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z}$  nu depind de  $z_0$ .

Având în vedere dificultățile ce apar la măsurarea exactă a valorilor unor funcții de mai multe variabile, teoria de mai sus este folosită numai pentru calculul momentelor într-un singur punct. Vom folosi teoria de mai sus în acest scop.

Momentele într-un punct al SLS, în care există mișcare turbulentă, adimensionale în raport cu  $u_*$  și  $\theta_*$ , nu depind decât de  $\xi = \frac{z}{L}$  (deoarece  $z \gg \frac{v}{u_*}$  și  $z \gg h_s$ ). Pentru valorile medii  $\bar{u}$  și  $\bar{\theta}$  acest lucru nu se aplică, datorită dependenței lor de  $z_0$ , ci numai derivatelor acestora.

Dacă  $M$  este un moment centrat al turbulenței sau o derivată verticală a unei valori medii și  $M_*$  o combinație de  $L$ ,  $u_*$  și  $\theta_*$  (și eventual de  $z_0$ ) de aceeași dimensiune ca și  $M$ , atunci din ipoteza Monin-Obukhov, rezultă:

$$\frac{M(z)}{M_*} = f_M(\xi), \quad \xi = \frac{z}{L} \quad (4.32)$$

unde  $f_M$  este o funcție universală de  $\xi$ .

Derivatele mărimilor medii se vor exprima în mod asemănător:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} &= \frac{u_*}{kL} g_u(\xi) = \frac{u_*}{kz} \varphi_u(\xi) \\ \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} &= \frac{\theta_*}{kL} g_\theta(\xi) = \frac{\theta_*}{kz} \varphi_\theta(\xi) \end{aligned} \right\} \quad (4.33)$$

Formalismul în care intervine funcția  $\varphi$  evită problemele create de valorile nule sau infinite ale lui  $L$  ce apar în formalismul funcției  $g$ . Când  $L$  are valoare finită, diferită de zero, atunci  $\varphi = \xi g$ .

Datorită simetriei turbulenței în raport cu direcția vitezei vântului mediu,  $\overline{u'v'} = \overline{v'w'} = 0$ ,  $\overline{v'\theta'} = 0$  și rezultă sistemul de ecuații pentru fluxuri:

$$\left. \begin{aligned} \overline{u'w'} &= -u_*^2 \\ \overline{\theta'w'} &= Q_0 \\ \overline{u'^2} &= u_*^2 f_{u'^2}(\xi) \\ \overline{\theta'^2} &= \theta_*^2 f_{\theta'^2}(\xi) \\ \overline{u'\theta'} &= u_* \theta_* f_{u'\theta'}(\xi) \end{aligned} \right\} \text{constante în SLS} \quad (4.34)$$

unde  $f$ ,  $g$ ,  $\varphi$  sunt funcții universale de  $\xi$ .

Cunoașterea acestor funcții universale permite determinarea unor mărimi caracteristice turbulenței cum ar fi:

$$\left. \begin{aligned} K_u(\xi) &= \frac{u_*^2}{\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}} = \frac{ku_*L}{g_u(\xi)} = \frac{ku_*z}{\varphi_u(\xi)} \\ K_\theta(\xi) &= -\frac{Q_0}{\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z}} = \frac{ku_*L}{g_\theta(\xi)} = \frac{ku_*z}{\varphi_\theta(\xi)} \\ \alpha_\theta(\xi) &= \frac{K_\theta(\xi)}{K_u(\xi)} = \frac{g_u(\xi)}{g_\theta(\xi)} = \frac{\varphi_u(\xi)}{\varphi_\theta(\xi)} \\ R_f(\xi) &= \frac{1}{g_u(\xi)} \end{aligned} \right\} \quad (4.35)$$

#### 4.4. Proprietăți asimptotice ale profilelor verticale

Funcțiile universale  $g$ ,  $\varphi$ ,  $f$ , introduse în urma unui raționament de similitudine, trebuie determinate pe cale experimentală sau cu ajutorul unui model de turbulență. Folosind, însă, analiza dimensională este posibil ca în unele cazuri, numite asimptotice, numărul parametrilor ce intervin în descrierea mișcării să fie micșorat, iar problema să se simplifice. Ne vom ocupa în continuare de studiul proprietăților asimptotice ale vitezei medii a vântului  $\bar{u}$  și ale temperaturii medii  $\bar{\theta}$ . Cunoașterea funcțiilor universale  $g$  sau  $\varphi$ , ce intervin în relațiile (4.33), permite exprimarea profilului vertical al vitezei medii  $\bar{u}(z)$ , respectiv al temperaturii medii  $\bar{\theta}(z)$ . Integrând în (4.33) de la  $\xi_1 = \frac{z_1}{L}$  la  $\xi_2 = \frac{z_2}{L}$ , rezultă:

$$\int_{z_1}^{z_2} d\bar{u} = \frac{u_*}{k} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{1}{L} g_u(\xi) (L d\xi) \Rightarrow \bar{u}(z_2) - \bar{u}(z_1) = \frac{u_*}{k} \left[ \int g_u(\xi) d\xi \Big|_{\xi=\xi_2} - \int g_u(\xi) d\xi \Big|_{\xi=\xi_1} \right] \quad (4.36)$$

unde  $d\xi = \frac{dz}{L}$ , dar:  $\int g_u(\xi) d\xi \Big|_{\xi=\xi_2} = f_u(\xi_2) = f_u\left(\frac{z_2}{L}\right)$  și

$\int g_u(\xi) d\xi \Big|_{\xi=\xi_1} = f_u(\xi_1) = f_u\left(\frac{z_1}{L}\right)$  astfel că (4.36), devine:

$$\bar{u}(z_2) - \bar{u}(z_1) = \frac{u_*}{k} \left[ f_u\left(\frac{z_2}{L}\right) - f_u\left(\frac{z_1}{L}\right) \right] \quad (4.37)$$

În mod asemănător, rezultă următoarea expresie pentru temperatura medie:

$$\bar{\theta}(z_2) - \bar{\theta}(z_1) = \frac{\theta_*}{k} \left[ f_\theta\left(\frac{z_2}{L}\right) - f_\theta\left(\frac{z_1}{L}\right) \right]$$

Vom considera câteva cazuri.

a) Regimul neutru,  $\xi=0$

În acest caz trebuie ca lungimea Monin-Obukhov să tindă la infinit și singura lungime caracteristică ce rămâne este variabila  $z$ . În acest regim de curgere, parametrii  $\beta = \frac{g}{T_0}$  și  $Q_0$  nu mai intervin în descrierea mișcării, iar  $\frac{z}{u_*} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}$  este o constantă a cărei

valoare, stabilită pe cale experimentală, este egală cu  $\frac{1}{k}$  ( $k$  este constanta lui von Karman,  $k \cong 0,4$ ). Din (4.33), pentru acest regim, rezultă:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = \frac{u_*}{z} \frac{1}{k}$$

sau după integrare:

$$\bar{u}(z_2) - \bar{u}(z_1) = \frac{u_*}{k} \ln \frac{z_2}{z_1} \quad (4.39)$$

adică profil vertical logaritmic pentru viteza medie.

Din condiția  $L \rightarrow \infty$  rezultă  $\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} = 0$ , de unde:

$$\bar{\theta}(z_2) = \bar{\theta}(z_1) = const \quad (4.40)$$

care exprimă condiția regimului termic neutru al stratului.

Legea logaritmică a profilului vertical al vitezei medii, în regim neutru, poate să se scrie și sub forma:

$$\bar{u}(z) = \frac{u_*}{k} \ln \frac{z - z_d}{z_0} \quad (4.41)$$

unde  $z_d$  este lungimea de deplasare, iar  $z_0$  lungimea de rugozitate, care este diferită de zero pentru  $z \geq h_s$ . Lungimea de deplasare este egală cu zero pentru un relief puțin înalt (vegetație pitică) și are valori cuprinse între  $\frac{h_s}{2}$  și  $h_s$  pentru un relief înalt (vegetație înaltă). Pentru un  $z$  suficient de mare, se poate considera formal că  $z_d = 0$ . Pentru suprafețe “netede” ale solului (cazul solului acoperit cu zăpadă sau gheață sau a suprafeței apelor pentru vânt slab) lungimea de rugozitate se exprimă prin relația  $z_0 = \alpha_0 \frac{v}{u_*}$ , unde

$\alpha_0 \cong 0,1$ . Alte suprafețe sunt rugoase, iar  $z_0$  depinde de forma “reliefului” suprafeței. Valorile tipice pentru lungimea de rugozitate sunt date mai jos:

natura învelișului	$z_0$ în m
- zăpadă	$1 \cdot 10^{-5}$
- nisip (deșert)	$3 \cdot 10^{-4}$
- iarbă scurtă	$2 \cdot 10^{-3}$ la $7 \cdot 10^{-3}$
- iarbă înaltă (vânt moderat)	$4 \cdot 10^{-2}$ la $9 \cdot 10^{-2}$
- păduri	0,5 la 1,0
- orașe	1,0

În cazul suprafeței mării problema este mai complicată. Pentru suprafața cu valuri statistic staționare lungimea de rugozitate este determinată de  $v$ ,  $u$ , și  $g$ , iar ca scară pentru elementele ruгоase trebuie să se considere  $h_s \equiv \frac{u_*^2}{g}$ , de unde:

$$z_{0,mare} = \frac{u_*}{g} Z_0 \left( \frac{u_*^2}{g\nu} \right) \quad (4.42)$$

Pentru vânturi slabe ( $u$ , foarte mic) suprafața mării este netedă și  $Z_0(R) = \alpha_1 R^{-1}$ , de unde  $z_0 = \alpha_1 \frac{\nu}{u_*}$ . Pentru vânturi puternice ( $u$ , foarte mare)  $Z_0 \equiv \alpha_2 = \text{const}$ , de unde

$z_0 = \alpha_2 \frac{u_*^2}{g}$ . Cele două constante  $\alpha_1$  și  $\alpha_2$  sunt determinate din date experimentale.

b) *Regimul quasi-neutru*:  $|\xi| \ll 1, z \ll |L|$

Acest regim corespunde situațiilor în care  $\xi \rightarrow 0$  și  $Q_0 \rightarrow 0$  pentru  $z$  și  $u$ , dați (numit și regim de convecție forțată) sau situațiilor în care  $z \rightarrow 0$  (dar  $z \gg \nu/u$ , sau  $h_s$ ) când  $Q_0$  și  $u$ , sunt dați. În aceste cazuri, producția termică de turbulență este slabă și predomină producția dinamică de turbulență. În acest caz, lungimea de amestec Monin-Obukhov măsoară, până la precizia unui factor numeric, grosimea *stratului dinamic* care există totdeauna în apropierea solului, pentru care  $u_* \neq 0$  și în care turbulența este de origine dinamică.

c) *Regim de instabilitate puternică*:  $\xi \ll -1$  sau  $\xi \rightarrow \infty$

Acest regim se realizează pentru valori mici ale vitezei de frecare,  $u_* \rightarrow 0$  și  $Q_0 > 0$  pentru  $\beta$  și  $z$  ficși și se mai numește și *regim de convecție liberă*. Acest regim mai poate fi definit cu ajutorul condițiilor:  $z \gg |L|$  și  $Q_0 > 0$  pentru  $\beta$  și  $u$ , ficși (altitudine mare în regim instabil).

În regimul de convecție liberă,  $u_*$  este foarte mic și originea turbulenței este de natură termică. În acest caz, parametrii caracteristici sunt  $z$ ,  $Q_0$  și  $\beta$ , iar  $u_*$ , datorită inexistenței turbulenței de origine dinamică, nu intervine.

Vom analiza la început profilul vertical al temperaturii medii. În regim de convecție liberă este comod să se lucreze cu parametrii  $z$ ,  $u_f$  și  $\theta_f$ . Din analiza dimensională rezultă gradientul vertical al temperaturii medii:

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \approx \frac{\theta_f}{z} = Q_0^{\frac{2}{3}} \beta \frac{1}{3z} \frac{1}{3} \quad (4.43)$$

astfel că făcând comparație cu (4.33), rezultă  $g_0 \sim \xi^{-4/3}$ . Pentru simplificare se notează

$g_\theta(\xi) = -\frac{k^{\frac{4}{3}} C_\theta}{3} \xi^{-\frac{4}{3}}$ , astfel că, pentru  $\xi \ll -1$ , rezultă:

$$f_\theta(\xi) = k^{\frac{4}{3}} C_\theta \xi^{-\frac{1}{3}} + \text{const} \quad (4.44)$$

sau pentru profilul temperaturii medii:

$$\bar{\theta}(z_2) - \bar{\theta}(z_1) = C_\theta \beta^{-\frac{1}{3}} Q_0^{\frac{2}{3}} \left( z_2^{-\frac{1}{3}} - z_1^{-\frac{1}{3}} \right) \quad (4.45)$$

Pentru profilul vitezei medii se observă că nu se pot forma numere adimensionale cu parametrii  $z$ ,  $Q_0$  și  $\beta$ . Rezultă că toate caracteristicile adimensionale ale turbulenței se reduc la o constantă universală de forma  $\frac{K_\theta(-\infty)}{K_u(-\infty)} = \alpha_\theta(-\infty)$ . Dacă presupunem că aceasta este o constantă finită, se poate scrie:

$$\alpha_\theta(-\infty) = \frac{K_\theta}{K_u} = \frac{g_u}{g_\theta} \quad (4.46)$$

de unde:  $g_u(\xi) = \alpha_\theta(-\infty)g_\theta(\xi)$  sau  $g_u(\xi) = -\frac{k^{\frac{4}{3}} C_\theta \alpha_\theta(-\infty) \xi^{-\frac{4}{3}}}{3}$  care prin integrare dă:

$$f_u(\xi) = const + k^{\frac{4}{3}} C_\theta \alpha_\theta(-\infty) \xi^{-\frac{1}{3}}, \quad (\xi \ll -1)$$

de unde rezultă profilul vertical al vitezei medii:

$$\bar{u}(z_2) - \bar{u}(z_1) = -C_\theta \alpha_\theta(-\infty) u_*^2 (\beta Q_0)^{-\frac{1}{3}} \left( z_2^{-\frac{1}{3}} - z_1^{-\frac{1}{3}} \right) \quad (4.47)$$

unde  $C_\theta$  și  $\alpha_\theta(-\infty)$  sunt constante ce se determină experimental.

Există un regim, foarte instabil, intermediar între convecția forțată (regim quasi-neutru) și convecția liberă în care influența vitezei de frecare asupra convecției nu poate fi neglijată. Este posibil, în acest caz, să se modifice raționamentul de similitudine pentru a prevedea forma explicită a profilelor verticale ale mărimilor medii.

*d) Regim de stabilitate pronunțată,  $\xi \gg 1$*

Acest regim se realizează atunci când  $L \rightarrow 0$  pentru o valoare dată a parametrului  $z$  (și în acest caz  $\xi \rightarrow +\infty$ ). Se întâlnește când lângă perete există o inversiune de temperatură puternică. Se mai realizează și dacă  $z \gg L$  pentru  $Q_0 < 0$  și  $\beta$  și  $u_*$  ficși, ce corespunde unei altitudini relativ mari în regim stabil de curgere. În cazul unei inversiuni puternice de temperatură, stratificația pozitivă de temperatură împiedică formarea turbulenței. Ea limitează schimbul turbulent între diferitele straturi de fluid și turbulența capătă un caracter local. Se poate presupune că în acest caz, mărimile ce caracterizează schimbul turbulent nu mai depind de  $z$ . Singura scară a turbulenței rămâne  $L$  și ecuațiile pentru viteza și temperatura medie se scriu:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = \frac{u_*}{kL} \frac{1}{R_{fcr}}, \quad \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} = \frac{\theta_*}{kL} \frac{1}{\alpha_\theta(+\infty)} \frac{1}{R_{fcr}} \quad (4.48)$$

unde  $\frac{1}{R_{fcr}}$  este o constantă de proporționalitate.  $R_{fcr}$  și constanta  $\alpha_{\theta}(+\infty)$  se determină

experimental. Prin comparație cu (4.33) rezultă că  $g_u = \frac{1}{R_{fcr}}$ , iar  $g_{\theta} = \frac{1}{\alpha_{\theta}(+\infty) R_{fcr}}$ , de

unde:

$$f_u(\xi) = \int g_u d\xi = \int \frac{d\xi}{R_{fcr}} = \frac{\xi}{R_{fcr}} + const, \text{ iar}$$

$$f_{\theta}(\xi) = \int g_{\theta} d\xi = \int \frac{d\xi}{\alpha_{\theta}(+\infty) R_{fcr}} = \frac{\xi}{\alpha_{\theta}(+\infty) R_{fcr}} + const.$$

Profilul vertical al vitezei, respectiv al temperaturii medii va fi:

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}(z_2) - \bar{u}(z_1) &= \frac{u_*}{k} \left[ f_u\left(\frac{z_2}{L}\right) - f_u\left(\frac{z_1}{L}\right) \right] = \frac{u_*}{k R_{fcr}} \frac{1}{L} (z_2 - z_1) \\ \bar{\theta}(z_2) - \bar{\theta}(z_1) &= \frac{\theta_*}{k} \left[ f_{\theta}\left(\frac{z_2}{L}\right) - f_{\theta}\left(\frac{z_1}{L}\right) \right] = \frac{\theta_*}{k L \alpha_{\theta}(+\infty) R_{fcr}} (z_2 - z_1) \end{aligned} \right\} \quad (4.49)$$

#### 4.5. Determinarea experimentală a funcțiilor universale

Pentru a putea folosi teoria similitudinii Monin-Obukhov este nevoie să se stabilească, pe cale experimentală, forma funcțiilor universale sau valorile coeficienților de proporționalitate. În acest scop trebuie să avem la dispoziție măsurători, într-un loc dat din stratul de suprafață al atmosferei, de profile verticale ale valorilor medii și de fluxuri turbulente. Până în prezent nu s-a putut obține o punere de acord, în detaliu, a rezultatelor obținute, datorită dificultăților ce apar în găsirea unor condiții reale cât mai asemănătoare cu cele ale modelului, cum ar fi condițiile de omogenitate orizontală sau de staționaritate. Apar, de asemenea, dificultăți în măsurarea fluxurilor puternic variabile orizontal și vertical sau în cazul turbulenței intermitente. În general, măsurătorile au fost efectuate deasupra suprafeței solului pentru condiții în care  $L = -\frac{u_*^3}{k\beta Q_0}$ .

Primele măsurători au fost făcute fără determinarea experimentală a fluxurilor turbulente și au avut tendința de a regăsi formele asimptotice ale funcțiilor universale. Tranziția dintre regimul convecției forțate și regimul convecției libere s-a stabilit că are loc brusc, pentru o valoare a parametrului  $\xi \cong -0,1$  ce corespunde unei grosimi efective a stratului dinamic cuprinsă în intervalul  $0,01|L|$  și  $0,1|L|$ .

Un exemplu reprezentativ de rezultat experimental este prezentat mai jos ( $k=0,43$ ):

$$f_u(\xi) = \begin{cases} 1,25\xi^{-\frac{1}{3}}, & \text{dacă } \xi \leq -0,16 \\ \log|\xi| + 1,453\xi & \text{dacă } -0,16 < \xi < 0 \\ \log(\xi) + 10\xi & \text{dacă } \xi > 0 \end{cases}$$

și  $f_{\theta}(\xi) = f_u(\xi)$ .

Similitudinea dintre profilele de vânt și de temperatură, exprimate prin  $f_u(\xi) = f_\theta(\xi)$ , a fost propusă datorită incertitudinii asupra comportamentului coeficientului de proporționalitate  $\alpha_0$ . Acesta este aproximativ egal cu unu în regim neutru, mai mare ca unu în regim instabil și mai mic ca unu ( $\approx 0,7$ ) în regim stabil.

Datele eperimentale mai recente se bazează pe măsurători efectuate asupra profilelor verticale ale mărimilor medii cât și pe măsurători efectuate asupra fluxurilor turbulente.

Pentru regimul stabil, caracterizat de  $\xi > 0$ , s-a stabilit pe cale empirică o lege logaritm-lineară pentru profilul vertical al vitezei medii  $\bar{u}$  și a temperaturii medii  $\bar{\theta}$ , de forma:

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}(z_2) - \bar{u}(z_1) &= \frac{u_*}{k} \left( \ln \frac{z_2}{z_1} + \beta_u \frac{z_2 - z_1}{L} \right) \\ \bar{\theta}(z_2) - \bar{\theta}(z_1) &= \frac{\theta_*}{k \alpha_\theta(0)} \left( \ln \frac{z_2}{z_1} + \beta_\theta \frac{z_2 - z_1}{L} \right) \end{aligned} \right\} \quad (4.50)$$

unde  $\beta_u, \beta_\theta$  sunt constante, iar  $\alpha_\theta(0) \approx 1$ .

Pentru regimul instabil,  $\xi < 0$ , s-a stabilit legea Businger-Dyer, de forma:

$$\varphi_u(\xi) = (1 - 4\beta_u \xi)^{-\frac{1}{4}} \text{ si } \varphi_\theta(\xi) = \frac{1}{\alpha_\theta(0)} (1 - 2\beta_\theta \xi)^{-\frac{1}{2}} \quad (4.51)$$

iar profilele corespunzătoare se exprimă:

$$\begin{aligned} \bar{u}(z_2) - \bar{u}(z_1) &= \frac{u_*}{k} \left[ f_u \left( \frac{z_2}{L} \right) - f_u \left( \frac{z_1}{L} \right) \right] \\ \bar{\theta}(z_2) - \bar{\theta}(z_1) &= \frac{\theta_*}{k} \left[ f_\theta \left( \frac{z_2}{L} \right) - f_\theta \left( \frac{z_1}{L} \right) \right] \end{aligned}$$

Cele mai sistematice și mai laborioase cercetări au fost făcute de cercetătorii de la Air Force Cambridge Laboratories, în anul 1968, care au efectuat măsurători în Sud-Vestul statului Kansas. În sinteză, o parte din rezultatele obținute sunt prezentate mai jos.

Pentru cazul unui regim instabil, când  $\xi < 0$ :

$$\left. \begin{aligned} \varphi_u(\xi) &= (1 - 15\xi)^{-\frac{1}{4}} \\ \varphi_\theta(\xi) &= 0,74(1 - 9\xi)^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (4.52)$$

După integrarea acestor relații de la  $z_0$  la  $z$ , rezultă:

$$\frac{\bar{u}(z)}{u_*} = \frac{1}{k} \left[ \ln \frac{z}{z_0} - (\Psi_1(z) - \Psi_1(z_0)) \right] \quad (4.53)$$

cu  $\Psi_1 = \ln \frac{(1+x^2)(1+x)^2}{8} - 2\text{arctg}x$  și  $x = (1 - 15\xi)^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{\varphi_u(\xi)}$ , iar  $\bar{u}(z_0) = 0$ .



Pentru profilul temperaturii medii :

$$\frac{\bar{\theta}(z) - \bar{\theta}(z_0)}{\theta_*} = \frac{0,74}{k} \left[ \ln \frac{z}{z_0} - (\Psi_2(z) - \Psi_2(z_0)) \right] \quad (4.54)$$

cu  $\Psi_2 = \ln \frac{1+y}{2}$  și  $y = (1-9\xi)\frac{1}{2} = \frac{0,74}{\varphi_\theta(\xi)}$ .  $\bar{\theta}(z_0)$  nu reprezintă valoarea temperaturii medii la  $z_0$ , ci valoarea temperaturii extrapolate logaritmice la  $z_0$ , plecând de la baza SLS, când  $z \equiv 2h_s$ .

În cazul unui regim stabil, când  $\xi > 0$ , datele experimentale sunt aproximate prin relațiile empirice:

$$\begin{cases} \varphi_u(\xi) = 1 + 4,7\xi \\ \varphi_\theta(\xi) = 0,74 + 4,7\xi \end{cases} \quad (4.55)$$

care prin integrare de la  $z_0$  la  $z$  conduc la:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\bar{u}(z)}{u_*} &= \frac{1}{k} \left( \ln \frac{z}{z_0} + 4,7 \frac{z-z_0}{L} \right) \\ \frac{\bar{\theta}(z) - \bar{\theta}(z_0)}{\theta_*} &= \frac{1}{k} \left( 0,74 \ln \frac{z}{z_0} + 4,7 \frac{z-z_0}{L} \right) \end{aligned} \right\} \quad (4.56)$$

Există și alte relații empirice cu ajutorul cărora se poate aproxima, mai mult sau mai puțin exact, profilul vitezei medii sau a temperaturii medii.

#### 4.6. Quasi-staționaritatea stratului de suprafață

Principalul factor ce determină structura stratului de suprafață este variația diurnă a fluxului de căldură  $Q_0$ , prezentată schematic în figura 4.1. Stratul limită de suprafață poate fi considerat quasi-staționar numai dacă structura sa la un moment dat este în fază cu variația lui  $Q_0$  sau, altfel spus, numai dacă timpul său de reacție (răspuns) la o variație a fluxului  $Q_0$  este mai mic decât intervalul de timp în care se produce schimbarea lui  $Q_0$ . Timpul de răspuns al turbulenței la modificările fluxului  $Q_0$  poate fi estimat, într-o primă aproximație, prin raportul dintre dimensiunile ce caracterizează extinderea vârtejurilor mari

și viteza lor. Acest raport se exprimă prin  $\frac{z}{u_f}$  în convecția liberă, prin  $\frac{z}{u_*}$  în regim

quasi-neutru și prin  $\frac{L}{u_*}$  în regim quasi-stabil. Valorile tipice ale timpului de răspuns al

turbulenței sunt cuprinse între 10÷30s. Timpul de variație al lui  $Q_0$  este exprimat prin

raportul  $\frac{Q_0}{\partial Q_0 / \partial t}$ , care tinde spre infinit în timpul nopții (între apusul și răsăritul soarelui) și

este de aproximativ 4 ore în timpul zilei. În timpul zilei funcția  $Q_0(t)$  poate fi aproximată cu o porțiune dintr-o sinusoidă, iar ipoteza de quasi-staționaritate a SLS este bine verificată.

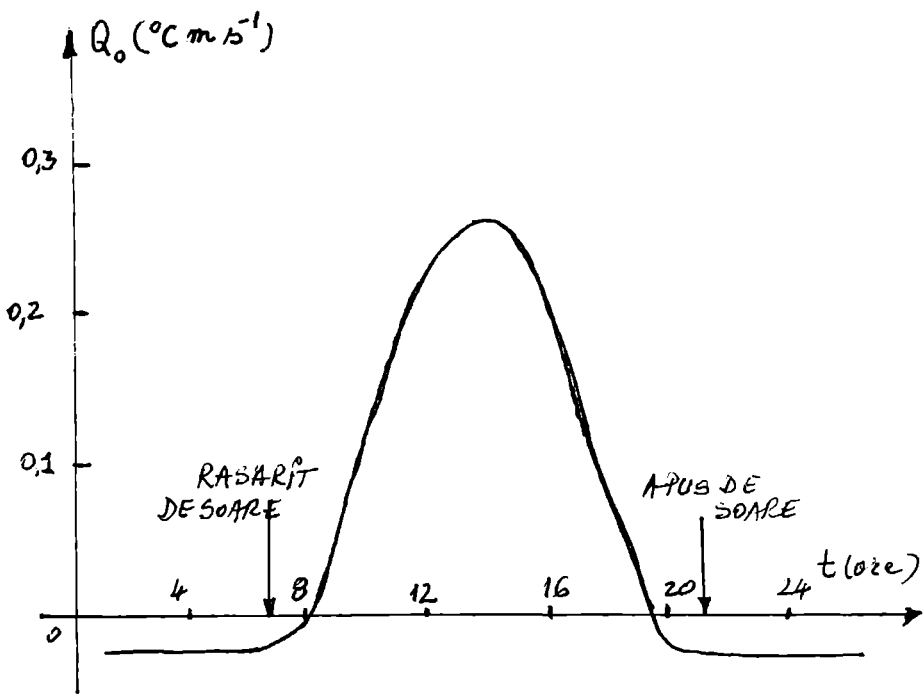


Fig. 4.1.

În apropierea apusului și a răsăritului soarelui, când  $Q_0 \cong 0$ , această ipoteză nu este adevărată deoarece timpul caracteristic pentru variațiile lui  $Q_0$  este foarte mic. În această perioadă a zilei, SLS suferă modificări importante, iar starea sa quasi-neutră ( $Q_0 = 0$ ), obținută din măsurători este puțin probabilă.

#### 4.7. Teoria de similitudine deasupra suprafeței oceanului

În imediata vecinătate a suprafeței lichide a oceanului prezența valurilor perturbă teoria similitudinii. Cum grosimea stratului afectat este destul de mică, și dacă se consideră distanțe suficient de mari față de nivelul mării, se poate admite că prezența valurilor nu afectează direct regimul turbulenței și teoria similitudinii Monin-Obukhov se aplică.

Este convenabil să se folosească un sistem de axe mobil care se mișcă împreună cu curenții de suprafață de viteză  $u_s$  și  $v_s$  și care depind de curenții de adâncime și de vânt. În acest caz, pentru regimul neutru, legea logaritmică ce caracterizează profilul vitezei se scrie:

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}(z) - u_s &\cong \frac{u_*}{k} \ln \frac{z}{z_0} \\ \bar{v}(z) - v_s &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.57)$$

deoarece axa Ox s-a ales în lungul direcției de deviație a vântului față de curenții de suprafață.

Rezultă că direcția vântului mediu nu este, ca în cazul suprafeței solului, constantă în vecinătatea suprafeței lichide a oceanului. Unghiul dintre direcția vântului mediu și axa Ox are aproape  $10^\circ$  la suprafața lichidă și devine egal cu zero la câțiva metri deasupra suprafeței, rămânând constant până la înălțimea la care începe să acționeze forța Coriolis.

Pentru a ține seama de prezența vaporilor de apă deasupra suprafeței oceanului, la ipoteza de omogenitate orizontală și de staționaritate, trebuie admis că SLS este un strat de flux constant pentru umiditatea specifică:

$$\overline{q'w'} = -K_q \frac{\partial \bar{q}}{\partial z} = \text{const} \quad (4.58)$$

unde  $K_q$  este coeficientul de transport turbulent pentru umiditatea specifică. Adunăm în ambii membri ai relației  $-v_q \frac{\partial \bar{q}}{\partial z}$  și obținem ecuația de transport turbulent și molecular a umidității:

$$\overline{q'w'} - v_q \frac{\partial \bar{q}}{\partial z} = -(K_q + v_q) \frac{\partial \bar{q}}{\partial z} = E_0 = \text{const} \quad (4.59)$$

unde  $v_q$  este coeficientul cinematic de difuzie moleculară a vaporilor de apă, iar  $E_0$  este fluxul de umiditate specifică.

Dacă  $z \gg z_0$ , atunci  $\overline{q'w'} = E_0$ . Deci, în cazul stratului de flux constant deasupra suprafeței oceanului la parametri mișcării trebuie adăugat și  $E_0$ . Cu  $E_0$  și  $u_*$ , din raționamente de similitudine, se poate construi o scară caracteristică pentru umiditatea specifică:

$$q_* = -\frac{E_0}{u_*} \text{ sau } q_f = -\frac{E_0}{u_f} \text{ (pentru convecția liberă)} \quad (4.60)$$

Dacă fluxul de umiditate specifică  $E_0$  este suficient de mic pentru a nu afecta forța ascensională, adică:

$$|E_0| \leq \frac{\beta |Q_0|}{0,608g} = \frac{|Q_0|}{0,608T_0} \quad (4.61)$$

atunci singura modificare care trebuie adusă formal teoriei similitudinii în SLS constă în introducerea funcțiilor universale pentru umiditate:

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial z} = \frac{q_*}{kL} g_q(\xi) = \frac{q_*}{kz} \varphi_q(\xi) \quad (4.62)$$

care prin integrare între  $\xi_1$  și  $\xi_2$  duce la profilul umidității:

$$\bar{q}(z_2) - \bar{q}(z_1) = \frac{q_*}{k} \left[ f_q \left( \frac{z_2}{L} \right) - f_q \left( \frac{z_1}{L} \right) \right]$$

unde  $f_\theta(\xi) = \int g_\theta(\xi) d\xi = \int \frac{\Phi_\theta(\xi)}{\xi} d\xi$ , și analog:

$$\left. \begin{aligned} \overline{q'^2} &= q_*^2 f_{q'^2}(\xi), \quad \overline{q'u'} = u_* q_* f_{q'u'}(\xi) \\ \overline{q'\theta'} &= q_* \theta_* f_{q'\theta'}(\xi), \quad \overline{q'w'} = E_0, \quad \overline{q'v'} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.64)$$

Dacă fluxul de umiditate specifică  $E_0$  este comparabil sau mai mare decât  $\frac{|Q_0|}{0,608T_0}$  atunci trebuie luat în considerare efectul umidității specifice asupra forței ascensionale. În acest caz se redefiniște lungimea Monin-Obukhov prin relația:

$$L = -\frac{u_*^3}{k\beta(Q_0 + 0,608T_0E_0)} = -\frac{u_*^3}{k(\beta Q_0 + 0,608gE_0)} \quad (4.65)$$

Există puține date experimentale privind caracteristicile umidității specifice în SLS. Prin consens general se admite că  $K_q = K_\theta$  ceea ce înseamnă, în fapt, existența unei similitudini a profilelor de umiditate, respectiv de temperatură medie ( $\bar{q}(z)$  și  $\bar{\theta}(z)$ ).

Această similitudine se exprimă și prin relațiile de identitate:  $g_q = g_\theta$  de unde  $f_q = f_\theta$ .

Pentru a ține seama de influența umidității specifice asupra stabilității SLS se folosește numărul lui Richardson pentru flux. Se definește ca fiind egal cu raportul dintre producția termică și producția dinamică de turbulență:

$$R_f = -\frac{P_\theta}{P_d} = \frac{\beta \overline{\theta' w'}}{\overline{u' w'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \overline{v' w'} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z}}$$

Dacă aerul conține vapori de apă temperatura potențială se va înlocui cu temperatura potențială virtuală  $\beta \overline{\theta'_v w'}$ . Temperatura potențială virtuală medie este  $\bar{\theta}_v = \bar{\theta}(1 + 0,608\bar{q}) \equiv \bar{\theta} + 0,608T_0\bar{q}$ , iar  $\theta'_v = \theta' + 0,608T_0q'$ . Deci:

$$P_\theta = \beta \overline{\theta'_v w'} = \beta \overline{\theta' w'} + 0,608 \frac{g}{T_0} T_0 \overline{q' w'} \quad (4.66)$$

Dacă ținem seama că fluxurile turbulente sunt proporționale cu gradientii mărimilor medii (4.66) devine:

$$P_\theta = -\beta K_\theta \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} - 0,608 g K_q \frac{\partial \bar{q}}{\partial z} \quad (4.67)$$

și expresia pentru numărul Richardson de flux este:

$$R_f = -\frac{P_\theta}{P_d} = \frac{\beta K_\theta \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} + 0,608 K_q \frac{\partial \bar{q}}{\partial z}}{\overline{u' w'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \overline{v' w'} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z}} \quad (4.68)$$

Semnul numărului lui Richardson definește stabilitatea termică a stratului deoarece schimbarea semnului producției termice de turbulență  $P_\theta$  produce o modificare calitativă importantă în regimul turbulenței. În funcție de semnul lui  $R_f$  avem următoarele cazuri de stabilitate:

$$\left. \begin{array}{l} R_f > 0, \text{ regim stabil} \\ R_f = 0, \text{ regim neutru} \\ R_f < 0, \text{ regim instabil} \end{array} \right\} \quad (4.69)$$

Rezultă că stabilitatea stratului nu depinde numai de semnul gradientului vertical al temperaturii  $\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z}$ , cum este cazul atmosferei uscate, ci depinde și de stratificația de umiditate din strat.

Dacă notăm cu  $E$  fluxul turbulent de umiditate ( $E = \overline{q'w'}$ ), cu  $H_S$  fluxul turbulent de căldură sensibilă ( $H_S = \rho_0 c_p \overline{\theta'w'}$ ), cu  $H_L$  fluxul de căldură latentă ( $H_L = \rho_0 \lambda E$ ) și cu  $Bo$  raportul lui Bowen ( $Bo = \frac{H_S}{H_L}$ ), rezultă, pentru numărul lui Richardson, expresia:

$$R_f = \frac{\overline{\beta \theta' w'}}{\overline{u' w'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \overline{v' w'} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z}} \left( 1 + \frac{0,608 c_p T_0}{\lambda} \frac{1}{Bo} \right) \quad (4.70)$$

unde  $\lambda$  este căldura latentă de evaporare,  $c_p$  este căldura molară izobară a aerului uscat.

Pentru aerul uscat la  $T_0=288K$  ( $15^\circ C$ ) avem  $\frac{0,608 c_p T_0}{\lambda} \frac{1}{Bo} \cong \frac{0,073}{Bo}$ . Pentru a putea

neglija influența umidității asupra stabilității stratului este nevoie ca raportul  $\frac{0,073}{Bo}$  să fie mai mic decât 1. Deasupra suprafeței oceanului sau deasupra suprafețelor cu vegetație bogată această influență nu poate fi neglijată.

## V. TEORIA SIMILITUDINII STRATULUI LIMITĂ PLANETAR AL ATMOSFEREI

În acest capitol se va face o extensie naturală la SLP a teoriei de similitudine folosită cu succes în studiul SLS.

### 5.1. Teoria de similitudine a lui Rossby pentru stratul limită Ekman

Vom considera la început un SLP quasi-staționar în raport cu toți parametrii medii ( $\frac{\partial \bar{x}_i}{\partial t} = 0$ ) pe care îl vom numi *strat limită Ekman* (SLE). În cazul general SLE este o primă aproximație (de ordin zero) a SLA. Este probabil ca unele relații valabile în SLE să fie adevărate și pentru SLA real.

Ecuatiile ce descriu turbulența în SLE neradiativ, uscat și barotrop sunt ecuațiile Reynolds în care se neglijează fluxurile moleculare. Acestea sunt:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z} - f(\bar{v} - v_g) &= 0 \\ \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial z} + f(\bar{u} - u_g) &= 0 \\ \frac{\partial \overline{\theta'w'}}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

Notațiile sunt cunoscute, iar vântul geostrofic ( $u_g, v_g$ ) se consideră că este independent de  $z$  (condiția de barotropie). A treia ecuație din sistemul (5.1) conduce la:

$$\overline{\theta'w'} = \overline{\theta'w'}(z_0) = Q_0 = \text{const} \quad (5.2)$$

La acest rezultat se ajunge simplu datorită ipotezei de omogenitate orizontală a stratului și a ipotezei de quasi-staționaritate. La baza SLE se pot neglija forțele de presiune și forța Coriolis ce intervin în ecuațiile Reynolds.

Vom alege sistemul de axe rectangular cu axele  $Ox$  și  $Oy$  în planul peretelui, considerat orizontal, iar axa  $Oz$  perpendiculară pe perete. Condițiile la limita inferioară a SLE se exprimă:

$$\left. \begin{aligned} (\bar{u}, \bar{v})|_{z \rightarrow z_0} &\rightarrow (0, 0) \\ \bar{\theta}(z)|_{z \rightarrow z_0} &\rightarrow \bar{\theta}(z_0) \\ (\overline{u'w'}, \overline{v'w'})|_{z \rightarrow z_0} &\rightarrow (-u_*^2, 0) \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

La limita superioară a SLE turbulența dispăre și se realizează condițiile de curgere din atmosfera liberă. Deci, atunci când  $z \rightarrow h$  ( $h$  indică grosimea SLE), rezultă:

$$\left. \begin{aligned} (\bar{u}, \bar{v})|_{z \rightarrow h} &\rightarrow (u_g, v_g) \\ \bar{\theta}(z)|_{z \rightarrow h} &\rightarrow \bar{\theta}(h) \\ (\overline{u'w'}, \overline{v'w'})|_{z \rightarrow h} &\rightarrow (0, 0) \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

Pentru a folosi un raționament de similitudine vom selecta parametrii fizici ce determină structura turbulenței în SLE. Din ecuațiile Reynolds și din condițiile de la limita superioară a SLE rezultă că în partea superioară a stratului este comod să se lucreze cu diferențele  $(\bar{u} - u_g)$ ,  $(\bar{v} - v_g)$  și  $(\bar{\theta} - \bar{\theta}(h))$ . Pentru aceste variabile sistemul de ecuații (5.1) și condițiile la limită (5.4) nu introduc nici o variabilă externă pentru SLE, decât  $u_g$ ,  $v_g$  și  $\bar{\theta}(h)$ . Studiul ecuațiilor dinamice și termice și a ecuației pentru energia cinetică de turbulență arată că se folosesc în mod explicit parametrii  $f$  (factorul Coriolis),  $Q_0$  (fluxul cinematic de caldură) și  $\beta = \frac{g}{T_0}$  (coeficientul de portabilitate). În ceea ce privește scara de viteză, din analiza ecuației energiei cinetice, rezultă că cea mai indicată este  $u_*$ .

Din analiza dimensională rezultă că parametrii ce descriu structura SLE, în partea sa superioară, sunt:

- variabila independentă  $z$
- parametrii interni  $u_*$ ,  $Q_0$  și
- parametrii locali  $f$ ,  $\beta$ .

Lungimea de rugozitate  $z_0$  nu intervine deoarece pentru partea superioară a SLE întotdeauna  $z \gg z_0$ .

Cu ajutorul parametrilor  $u_*$ ,  $Q_0$ ,  $f$  și  $\beta$  se pot forma două scări de lungime cu semnificație fizică (definite până la o constantă multiplicativă):

$$\text{- lungimea Monin-Obukhov } L_{MO} = -\frac{u_*^3}{k\beta Q_0} \quad (5.6)$$

$$\text{- lungimea Ekman } L_E = k \frac{u_*}{|f|} \quad (5.7)$$

Prezența lui  $|f|$  la numitorul lui  $L_E$  indică faptul că teoria nu se aplică în apropierea ecuatorului (la latitudini mai mici de  $20^\circ$ ), unde  $|f|$  este foarte mic. Lungimea Ekman are pentru atmosferă o valoare tipică apropiată de 1km.

Cu ajutorul acestor două scări de lungime, care există în partea superioară a SLE, se pot defini doi parametri adimensionali pentru a caracteriza stabilitatea stratului:

$$\text{- un parametru variabil de stratificație } \xi = \frac{z}{L_{MO}} \text{ și} \quad (5.8)$$

$$\text{- un parametru global de stratificație } \mu_E = \frac{L_E}{L_{MO}} = -\frac{k^2 \beta Q_0}{|f| u_*^2} \quad (5.9)$$

Ipotezele folosite în teoria similitudinii din SLS se generalizează și în partea superioară a SLE. Astfel, folosind combinații adimensionale ale scărilor de lungime  $L_{MO}$  și  $L_E$ , a scării de viteză  $u_*$  și a scării de temperatură  $\theta_* = -\frac{Q_0}{u_*}$ , parametrii caracteristici ai SLE se exprimă cu ajutorul unor funcții universale ce depind de parametrii  $\xi$  și  $\mu_E$ , sau de parametrii  $\frac{z}{L_E} = \frac{\xi}{\mu_E}$  și de  $\mu_E$ .

Cu ajutorul acestor funcții universale gradientii mărimilor medii și fluxurile turbulente în SLE se scriu:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} &= \frac{u_*}{L_E} G_u \left( \frac{z}{L_E}, \mu_E \right) \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} &= \frac{u_*}{L_E} G_v \left( \frac{z}{L_E}, \mu_E \right) \\ \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} &= \frac{u_*}{L_E} G_\theta \left( \frac{z}{L_E}, \mu_E \right) \end{aligned} \right\} \quad (5.10)$$

$$\left. \begin{aligned} \overline{u'w'} &= -u_*^2 F_{u'w'} \left( \frac{z}{L_E}, \mu_E \right) \\ \overline{v'w'} &= -u_*^2 F_{v'w'} \left( \frac{z}{L_E}, \mu_E \right) \end{aligned} \right\} \quad (5.11)$$

$$\overline{\theta'w'} = -u_* \theta_* F_{\theta'w'} \left( \frac{z}{L_E}, \mu_E \right), \text{ dar cum } \overline{\theta'w'} = Q_0 \text{ rezultă } F_{\theta'w'} = 1.$$

Coefficienții de transport turbulent se exprimă:

$$K_u = f L_E^2 F_u \left( \frac{z}{L_E}, \mu_E \right), \dots, \text{ etc,} \quad (5.12)$$

iar  $h$  se exprimă:

$$h = L_E F_h(\mu_E) \quad (5.13)$$

Experiența arată că  $F_h(0)=1$  și  $L_E$  poate fi interpretat ca fiind grosimea SLE în regim neutru. Funcțiile  $F$  și  $G$  sunt funcții universale ce se determină pe cale experimentală sau cu ajutorul unor modele de turbulență.

Integrând relațiile pentru gradientii mărimilor medii după  $\frac{z}{L_E}$  de la  $z$  la  $h$ , cu  $z > h_{SLS}$ , se obțin profilele verticale corespunzătoare:

$$\bar{u}(z) - u_g = \frac{u_*}{L_E} \frac{L_E}{\mu_E} \left[ \int G_u d\xi \Big|_z - \int G_u d\xi \Big|_{z=h} \right] \Rightarrow \bar{u}(z) - u_g = u_* F_u \left( \frac{z}{L_E}, \mu_E \right) \quad (5.14)$$

$$\text{unde } F_u(z) = \int \frac{G_u}{\mu_E} d\xi \Big|_z; \quad F_u(h) = \int \frac{G_u}{\mu_E} d\xi \Big|_{z=h}$$



$$\bar{v}(z) - v_g = u_* F_v \left( \frac{z}{L_E}, \mu_E \right) \quad (5.15)$$

$$\bar{\theta}(z) - \theta(h) = \theta_* F_\theta \left( \frac{z}{L_E}, \mu_E \right) \quad (5.16)$$

Pentru variabilele globale pe întreg ansamblul SLE, cum sunt modulul și direcția vitezei vântului sau temperatura potențială medie, teoria de similitudine prevede:

$$\left. \begin{aligned} U_g(z) &= u_* F_{U_g} \left( \frac{z_0}{L_E}, \mu_E \right) \\ \alpha(z) &= F_\alpha \left( \frac{z_0}{L_E}, \mu_E \right) \\ \bar{\theta}(z) - \bar{\theta}(z_0) &= \theta_* F_{\bar{\theta}} \left( \frac{z_0}{L_E}, \mu_E \right) \end{aligned} \right\} \quad (5.17)$$

unde  $U_g$  este modulul vitezei vântului geostrofic,  $\alpha$  este unghiul dintre direcția vitezei vântului la sol și direcția vântului geostrofic, adică unghiul de rotație totală a direcției vântului în SLE. Relațiile de mai sus permit, dacă se cunoaște forma funcțiilor  $F$ , să se exprime parametrii interni  $u_*$ ,  $\alpha$ ,  $Q_0$  în funcție de parametrii externi  $z_0$ ,  $U_g$ ,  $\bar{\theta}(h) - \bar{\theta}(z_0)$  și de cei locali  $f$  și  $\beta$ .

Cu ajutorul parametrilor externi și locali se pot forma două numere adimensionale ce caracterizează stabilitatea SLE, și anume:

$$\text{- numărul Rossby de suprafață } Ro_0 = \frac{U_g}{|f|z_0} \text{ și} \quad (5.18)$$

$$\text{- parametrul extern de stratificare } S = \frac{\beta[\bar{\theta}(h) - \bar{\theta}(z_0)]}{|f|U_g} \quad (5.19)$$

## 5.2. Legi de rezistență în SLE

Racordarea profilului vertical al vitezei medii sau a temperaturii medii din stratul de suprafață cu cel din partea inferioară a SLE se face ușor dacă se postulează că există o zonă în SLA în care cele două profile verticale și ipotezele care stau la baza obținerii lor sunt simultan valabile. Exemplificăm această idee în cazul profilului vertical al vitezei medii.

Pentru SLS, profilul vitezei medii urmează o lege logaritmic-lineară, de forma:

$$\frac{\bar{u}(z)}{u_*} = \frac{1}{k} \left( \ln \frac{z}{z_0} + \beta_u \frac{z - z_0}{L_{MO}} + \dots \right) = \frac{1}{k} \left( \ln \frac{z}{L_E} - \ln \frac{z_0}{L_E} + \beta_{u1} \mu_E \frac{z}{L_E} - \beta_{u2} \mu_E \frac{z}{L_E} + \dots \right) \quad (5.20)$$

Pentru un punct situat în partea inferioară a SLE, raportul  $\frac{\bar{u}(z) - u_g}{u_*}$  nu depinde de  $z_0$ , adică:

$$\frac{\bar{u}(z) - u_g}{u_*} = F_u \left( \frac{z}{L_E}, \mu_E \right) \quad (5.21)$$

Pentru un punct situat în zona de suprapunere a celor două formalisme, vom scrie:

$$\frac{\bar{u}(z)}{u_*} = \frac{\bar{u}(z) - u_g}{u_*} + \frac{u_g}{u_*} \quad (5.22)$$

Dacă se compară (5.22) cu (5.21) și cu (5.20) rezultă că raportul  $\frac{u_g}{u_*}$  cuprinde termenii

dependenți de  $z_0$  din (5.20), deoarece  $\frac{\bar{u}(z) - u_g}{u_*}$  nu depinde de  $z_0$ , și o funcție ce depinde

de  $\mu_E$  (pe care nu o conține  $\frac{\bar{u}(z) - u_g}{u_*}$ ). În proporție de 99%, termenii în  $z_0$  sunt

exprimați de termenul  $-\frac{1}{k} \ln \frac{z_0}{L_E}$ , deci, se poate scrie:

$$\frac{u_g}{u_*} \equiv -\frac{1}{k} \left[ \ln k \frac{z_0}{L_E} + B(\mu_E) \right] \quad (5.23)$$

și rezultă:

$$\frac{\bar{u}(z)}{u_*} = F_u \left( \frac{z}{L_E}, \mu_E \right) - \frac{1}{k} \left[ \ln k \frac{z_0}{L_E} + B(\mu_E) \right]$$

Un raționament asemănător se poate face și pentru componenta  $\bar{v}$  a vitezei ( $\frac{\bar{v}(z)}{u_*} = 0$  în SLS) și pentru temperatura medie  $\bar{\theta}$ :

$$\frac{\bar{\theta}(z) - \bar{\theta}(z_0)}{\theta_*} = \frac{1}{\alpha_\theta(0)k} \left( \ln \frac{z}{z_0} + \beta_\theta \frac{z - z_0}{L_{MO}} + \dots \right) \text{ în SLS.}$$

Folosind funcțiile universale A, B, C de parametrul  $\mu_E$ , ce trebuie determinate pe cale experimentală, se poate scrie, cu o bună aproximație în  $\frac{z_0}{L_E}$ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{u_g}{u_*} &= -\frac{1}{k} \left[ \ln k \frac{z_0}{L_E} + B(\mu_E) \right] \\ \frac{v_g}{u_*} &= -\frac{A(\mu_E)}{k} \text{sign}(f) \\ \frac{\bar{\theta}(z) - \bar{\theta}(z_0)}{\theta_*} &= \frac{1}{k\alpha_\theta(0)} \left[ \ln k \frac{z_0}{L_E} + C(\mu_E) \right] \end{aligned} \right\} \quad (5.24)$$

Relațiile (5.24) exprimă, așa numitele *legi de rezistență* ale stratului limită Ekman. Aceste relații permit să se facă o racordare a profilelor mărimilor medii din SLS cu profilele corespunzătoare din SLE.

### 5.3. Verificarea experimentală a teoriei similitudinii în SLE

Pentru verificarea teoriei similitudinii trebuie efectuate măsurători în condiții fizice cât mai apropiate de cele folosite în cadrul teoriei, cum sunt: condiții de omogenitate orizontală, condiții de staționaritate, condiția ca stratul să fie baroclin s.a. În asemenea condiții au fost efectuate măsurători de către mai multe grupuri de cercetători. Rezultatele lor indică faptul că scara de lungime Ekman  $L_E$  caracterizează grosimea stratului Ekman, cu o aproximație suficient de bună. Valorile obținute de diferite grupuri de cercetători diferă între ele printr-un ordin de mărime.

Funcțiile universale  $F_v, F_\theta$ , ce descriu profilul vertical al vitezei medii  $(\bar{v}(z) - v_g)$  și profilul vertical al temperaturii medii  $(\bar{\theta}(z) - \bar{\theta}(h))$  nu au putut fi determinate experimental. Au fost stabilite experimental profilele de tipul  $\frac{\bar{u}}{u_*}, \frac{\bar{v}}{u_*}$  și  $\frac{\bar{\theta}(z) - \bar{\theta}(z_0)}{\theta_*}$ , pentru diferite cazuri de stabilitate a stratului Ekman, dar aceste profile nu au un caracter universal deoarece ele depind și de  $\frac{z_0}{L_{MO}}$ .

Pentru funcțiile A, B, C, ce intervin în relațiile (5.24), care sunt mai ușor de determinat decât funcțiile F, deși dispersia datelor experimentale este mare, s-au obținut următoarele dependențe de  $\mu_E$ :

$$\begin{cases} A(\mu_E) = 1,38 & -300 \leq \mu_E \leq -50 \\ A(\mu_E) = 5,14 + 0,142\mu_E + 117 \cdot 10^{-5}\mu_E^2 - 33 \cdot 10^{-7}\mu_E^3 & -50 \leq \mu_E \leq 100 \end{cases}$$

$$\begin{cases} B(\mu_E) = 3,69 & -300 \leq \mu_E \leq -50 \\ B(\mu_E) = 1,01 - 0,105\mu_E - 99 \cdot 10^{-5}\mu_E^2 + 81 \cdot 10^{-8}\mu_E^3 & -50 \leq \mu_E \leq 100 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C(\mu_E) = 7,01 & -300 \leq \mu_E \leq -25 \\ C(\mu_E) = 1,86 - 0,377\mu_E - 539 \cdot 10^{-5}\mu_E^2 + 572 \cdot 10^{-7}\mu_E^3 & -25 \leq \mu_E \leq 100 \end{cases}$$

Principalul impediment la stabilirea acestor funcții este lipsa de staționaritate a SLA real.

Pentru a ține seama de prezența vaporilor de apă în stratul Ekman, la teoria de similitudine din SLE trebuie să mai adăugăm profilul vertical al umidității specifice medii:

$$\frac{\bar{q}(z) - \bar{q}(h)}{q_*} = F_q\left(\frac{z}{L_E}, \mu_E\right) \quad (5.25)$$

$$\frac{\bar{q}(h) - \bar{q}(z_0)}{q_*} = F_{(\bar{q}(h) - \bar{q}(z_0))}\left(\frac{z_0}{L_E}, \mu_E\right) \quad (5.26)$$

Se folosește, de asemenea, și o lege de rezistență de forma:

$$\frac{\bar{q}(z) - \bar{q}(z_0)}{q_*} = \frac{1}{k\alpha_q(0)} \left[ \ln Ro \frac{u_*}{U_g} - D(\mu_E) \right] \quad (5.27)$$

unde  $\alpha_{\theta}(\xi) = \frac{K_{\theta}(\xi)}{K_u(\xi)}$  este o mărime egală cu inversul numărului lui Schmidt din SLS, iar

$D$  este o nouă funcție universală de  $\mu_E$ . Există puține date experimentale privind comportamentul vaporilor de apă în stratul Ekman, de aceea se face ipoteza similitudinii între profilul de temperatură medie și profilul vertical al umidității specifice medii, exprimată matematic prin:

$$K_q = K_{\theta} \quad (\text{deci } \alpha_q = \alpha_{\theta}). \quad (5.28)$$

Rezultă implicit că  $D(\mu_E) = C(\mu_E)$ . Pentru parametrul de stratificare externă, definit de (5.19), trebuie folosită relația:

$$S = \frac{\beta[\bar{\theta}(h) - \bar{\theta}(z_0)] + 0,608[\bar{q}(h) - \bar{q}(z_0)]}{|f|U_g} \quad (5.29)$$

## VI. STRUCTURA STRATULUI LIMITĂ ATMOSFERIC (SLA)

### 6.1. Stratul limită atmosferic

Vom prezenta, în continuare, câteva considerente de ordin calitativ privind structura și proprietățile generale ale SLA.

SLA este definit ca fiind o porțiune din atmosferă, situată în vecinătatea solului, în care se simte puternic influența dinamică și termică a acestuia asupra mișcării aerului. Deasupra SLA se află atmosfera liberă în care câmpurile mărimilor meteorologice sunt determinate de mișcarea aerului la scară mare. SLA este o formațiune micrometeorologică în care curgerea aerului este totdeauna (sau aproape totdeauna) turbulentă. Deasupra stratului limită, turbulența de scară redusă nu se manifestă decât intermitent (în cazul norilor cumulus). Înălțimea  $h$  a SLA se consideră a fi egală cu altitudinea la care fluxurile turbulente verticale medii devin neglijabile. Aceste fluxuri descresc, mai mult sau mai puțin monoton, începând de la suprafața solului. Ipoteza omogenității orizontale și de staționaritate conduce la un rezultat nerealist, conform căruia  $\overline{w'\theta'} = \text{const} = Q_0$  pe toată grosimea SLA. Cel mai adesea, în regim instabil, SLA are la partea superioară o inversiune puternică de temperatură, iar grosimea sa coincide cu altitudinea  $z_i$  la care se află baza acestei inversiuni termice. Înălțimea tipică  $h$  a SLA este de ordinul unui km, de unde rezultă că în SLA este conținută o masă de aer de cca. 10% din masa totală a aerului atmosferic.

Toate studiile teoretice și experimentale sunt făcute numai pentru cazul existenței omogenității orizontale (SLP). Această condiție se consideră îndeplinită dacă parametrii statistici ai aerului variază cu mai puțin de 10% pe o distanță orizontală de ordinul a 10h.

În imediata vecinătate a suprafeței solului, regimul SLP este quasi-staționar și efectul forței Coriolis și a forțelor de presiune este neglijabil de mic. La altitudini mai mari decât lungimea de rugozitate  $z_0$  ( $z \geq 50z_0$ ), regimul turbulent al stratului de flux constant (de grosime  $h_{SLA} \equiv 0,1h$ ) este caracterizat prin parametrii: viteza de frecare  $u_*$ ; fluxul cinematic de căldură  $Q_0$ ; parametrul de portanță  $\beta = \frac{g}{T_0}$ ; lungimea de rugozitate  $z_0$ .

Direcția vântului este constantă  $\bar{u}_H = \bar{u}_H(\bar{u}(z), 0)$ , iar scara de lungime este lungimea

$$\text{Monin-Obukhov: } L = -\frac{u_*^3}{k\beta Q_0}.$$

Pentru  $z \leq 0, |L|$ , turbulența este determinată numai de factorii dinamici, iar viteza și temperatura medie sunt exprimate printr-o lege logaritmică în raport cu altitudinea:

$$\bar{u}(z) \equiv \frac{u_*}{k} \ln \frac{z}{z_0}; \quad \bar{\theta}(z) - \bar{\theta}(z_0) = -\frac{Q_0}{ku_*} \ln \frac{z}{z_0} \quad (6.1)$$

Lungimea de amestec și coeficientul de difuzie turbulentă variază linear cu  $z$ :

$$l_p = kz, \quad K_u = ku_* z \quad (6.2)$$

Pentru  $z > 0, |L|$ , turbulența este determinată atât de factorii dinamici cât și de factorii termici și teoria de similitudine Monin-Obukhov se aplică, astfel că profilul vertical al mărimilor medii se exprimă:

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}(z_2) - \bar{u}(z_1) &= \frac{u_*}{k} \left[ f_u \left( \frac{z_2}{L} \right) - f_u \left( \frac{z_1}{L} \right) \right] \\ \bar{\theta}(z_2) - \bar{\theta}(z_1) &= -\frac{Q_0}{ku_*} \left[ f_\theta \left( \frac{z_2}{L} \right) - f_\theta \left( \frac{z_1}{L} \right) \right] \end{aligned} \right\} \quad (6.3)$$

Se poate folosi, într-o primă aproximație, în regim stabil ( $L > 0$ ), o lege logaritmică conform căreia  $f_u \equiv f_\theta \equiv \ln \frac{z}{L} + 10 \frac{z}{L}$ , iar în regim instabil ( $L < 0$ ), o lege de tipul

convecției libere, de forma  $f_u \equiv f_\theta \equiv 1.2 \left( \frac{z}{L} \right)^{-\frac{1}{3}} + 0,25$ .

Deasupra stratului de suprafață, în zona numită *strat limită de tranziție*, ipoteza de quasi-staționaritate nu este în general valabilă, iar teoria de similitudine nu dă rezultate satisfăcătoare.

Forțele de presiune și forța Coriolis influențează asupra vitezei vântului și asupra regimului de turbulență astfel că viteza vântului suferă o rotație când  $z$  crește, față de direcția vitezei la sol, spre dreapta în emisfera nordică și spre stânga în emisfera sudică. Hodograful vitezei are în această zonă forma unei spirale logaritmice. Din observațiile experimentale rezultă o rotație totală  $|\alpha|$  a vectorului viteză în SLP, de ordinul a  $15-20^0$  și cu atât mai mare cu cât lungimea de rugozitate  $z_0$  este mai mare, iar latitudinea geografică mai mică. În stratul de tranziție, cu excepția unui regim neutru, lungimea de amestec este aproape constantă, în timp ce coeficientul de difuzie turbulentă se micșorează pe măsură ce  $z$  crește, începând cu valoarea sa de la vârful stratului de suprafață.

## 6.2. Spirala Ekman

Considerăm cazul unui SLE neutru și barotrop în care vom urmări rotirea vectorului viteză a vântului când altitudinea crește. Cea mai simplă ipoteză folosită, ce permite închiderea sistemului de ecuații pentru viteza vântului, constă în postularea existenței unui coeficient de difuzie turbulentă  $K_u$  constant.

Considerăm că vântul în atmosferă liberă este geostrofic. În aceste condiții, ecuațiile de mișcare se scriu:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - fv - K_u \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} &= 0 \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + fu - K_u \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial z^2} &= 0 \end{aligned}$$

Componentele vântului geostrofic se exprimă:

$$u_g = -\frac{1}{\rho f} \frac{\partial p}{\partial y}; \quad v_g = -\frac{1}{\rho f} \frac{\partial p}{\partial x}$$

Înlocuim în ecuațiile de mișcare:

$$f(v_g - \bar{v}) - K_u \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} = 0 \quad (6.4)$$

$$f(-u_g + \bar{u}) - K_u \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial z^2} = 0$$

Înmulțim ultima ecuație cu  $i = \sqrt{-1}$  și le adunăm:

$$K_u \frac{\partial^2}{\partial z^2} (\bar{u} + i\bar{v}) - if(\bar{u} + i\bar{v}) + if(u_g + iv_g) = 0$$

Condițiile la limită sunt: când  $z \rightarrow 0$  (la suprafața solului) componentele vitezei vântului sunt egale cu zero, adică  $\bar{u} = \bar{v} = 0$ ; când  $z \rightarrow \infty$  vântul tinde spre vântul geostrofic. Dacă orientăm axa  $Ox$  în lungul componentei  $u_g$ , componenta  $v_g = 0$  și rezultă condițiile:  $\bar{u}|_{z \rightarrow \infty} \rightarrow u_g$ ;  $\bar{v}|_{z \rightarrow \infty} \rightarrow 0$ . Cu aceste condiții la limită, soluția sistemului (6.4) este:

$$\bar{u} + i\bar{v} = u_g \left\{ 1 - \exp \left[ - \left( \frac{f}{2K_u} \right)^{\frac{1}{2}} (1+i)z \right] \right\} \quad (6.5)$$

sau pentru componentele vitezei:

$$\bar{u} = u_g [1 - \exp(-\gamma z) \cos \gamma z]$$

$$\bar{v} = u_g \exp(-\gamma z) \sin \gamma z$$

unde  $\gamma = \left( \frac{f}{2K_u} \right)^{\frac{1}{2}}$ . Unghiul de deviație poate fi exprimat cu ajutorul componentelor  $\bar{u}$  și  $\bar{v}$ , prin relația:

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{\bar{v}}{\bar{u}} = \operatorname{arctg} \frac{\exp(-\gamma z) \sin \gamma z}{1 - \exp(-\gamma z) \cos \gamma z} \quad (6.6)$$

Valoarea vitezei vântului, la o altitudine  $z$  oarecare, va fi:

$$c = \sqrt{u^2 + v^2} = u_g \sqrt{1 - 2 \exp(-\gamma z) \cos \gamma z + \exp(-2\gamma z)} \quad (6.7)$$

Din (6.7) rezultă că viteza vântului crește cu creșterea altitudinii, de la valoarea zero la suprafața solului, la valoarea  $u_g$ , egală cu valoarea vitezei vântului geostrofic, pe care o atinge la o înălțime ce rezultă din condiția:

$$2 \cos \gamma z = \exp(-\gamma z) \quad (6.8)$$

Din (6.8) rezultă valoarea pentru produsul:  $\gamma z = 1,64$ . Din (6.6), pentru  $z=0$ , se obține valoarea:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \alpha = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4} = \alpha_0 \quad (6.9)$$

Rezultă că la suprafața solului, unghiul de deviație al vitezei vântului față de liniile izobare este de  $45^\circ$ . Pe măsură ce altitudinea crește unghiul de deviație se micșorează și devine egal cu zero pentru  $\gamma z = \pi$ . Se ajunge la concluzia că înălțimea la care direcția vântului coincide cu direcția vântului geostrofic este cu mult mai mare decât înălțimea la care modulul vitezei vântului devine egal cu modulul vitezei vântului geostrofic.

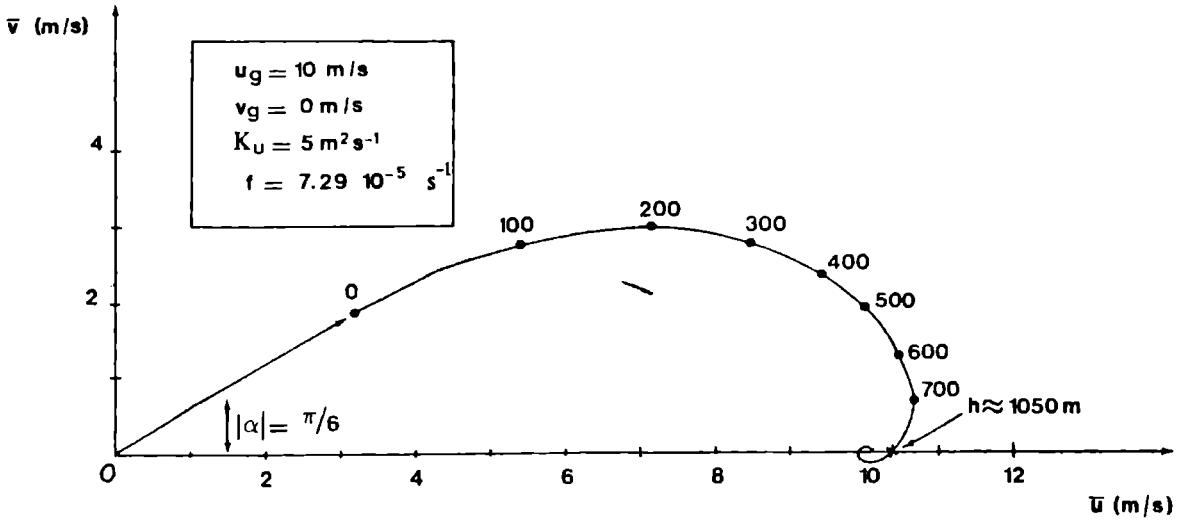


Fig. 6.1.

Reprezentând grafic, într-un sistem de axe de coordonate  $Ou$  și  $Ov$ , vectorul vitezei, pentru diferite altitudini, se obține hodograful vectorului vitezei, care este o spirală logaritmică, numită *spirală lui Ekman* (fig.6.5). Unghiul  $\beta_i = 90^\circ - z_i$ , pentru o altitudine  $z_i$  dată, măsoară unghiul de deviație a vântului față de direcția gradientului de presiune.

Altitudinea la care unghiul de deviație se anulează pentru prima dată,  $z_{\alpha=0} = \frac{\pi}{\gamma}$  este o măsură a grosimii stratului de frecare.

Stratul Ekman are și o importanță sinoptică deoarece fenomenele fizice ce au loc în cuprinsul lui generează mișcări la scară sinoptică. Presupunem că densitatea aerului este constantă într-un strat de grosime  $H$ , iar în SLE de grosime  $h \ll H$  profilul vântului este descris de ecuațiile:

$$\bar{u} = u_g [1 - \exp(-\gamma z) \cos \gamma z]$$

$$\bar{v} = u_g \exp(-\gamma z) \sin \gamma z$$

Orientăm axa  $Ox$  în lungul vitezei vântului geostrofic  $u_g$  care este independentă de altitudine, dar care depinde de  $y$ . Deoarece există frecare în stratul limită, care are o acțiune de întârziere a curgerii, apar mișcări orizontale convergente sau divergente ale aerului. Datorită proprietății de continuitate a fluidului atmosferic, aceste mișcări convergente generează o mișcare de compensare, pe verticală, a aerului: o mișcare ascendentă în zonele ciclonice și o mișcare descendentă în zonele anticiclonice.

Se poate estima viteza verticală a aerului indusă în SLE datorită frecărilor, care afectează atmosfera pe o grosime de ordinul a 2-3h. Din ecuația de continuitate pentru



$\rho = \text{const.}$ , rezultă  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$  și  $\rho \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right) = 0$  sau  $\frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = -\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial y}$ , iar pentru

variația vitezei pe verticală rezultă:  $d\bar{w} = \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} dz$ . Integrând această expresie între 0 și h și

folosind relațiile de mai sus pentru u și v, rezultă:

$$\bar{w}(h) = \int_0^h \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} dz = - \int_0^h \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) dz = - \int_0^h \frac{\partial u_g}{\partial y} \exp(-\gamma z) \sin \gamma z dz$$

deoarece

$$\frac{\partial u_g}{\partial x} = 0 \text{ și } \bar{w}(0) = \bar{w}(z)|_{z=0} = 0.$$

Estimările numerice arată că această viteză verticală este relativ mică, de ordinul a câtorva  $\text{mmh}^{-1}$ . Existența unei viteze verticale, orientată în sus, în stratul Ekman produce o mișcare de compensare în restul atmosferei. Considerăm, pentru exemplificare, o zonă ciclonică. În această zonă are loc, la baza stratului Ekman, o mișcare orizontală centripetă, urmată de o mișcare ascendentă a aerului până deasupra stratului și apoi o mișcare centrifugă orizontală, ca în figura 6.2.

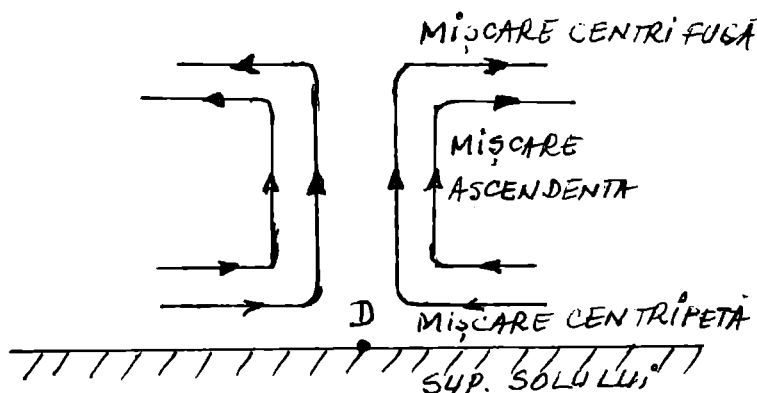


Fig. 6.2.

Mișcarea orizontală centrifugă afectează foarte mult eficacitatea vârtejurilor sinoptice. Pentru a estima acest efect în atmosfera liberă se utilizează ecuația de conservare a rotorului absolut:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\text{rot} \bar{u}_g + f) = -f \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) = f \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \quad (6.10)$$

Integrăm această ecuație de la limita superioară h a SLE până la altitudinea tropopauzei-  $h_{\text{trop}}$ , neglijăm variațiile orizontale ale lui f, iar  $\bar{w}(h_{\text{trop}}) = 0$ . Pentru atmos-

fera barotropă  $\frac{\partial}{\partial z} (\text{rot} \bar{u}_g) = 0$  și rezultă:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\text{rot} \bar{u}_g) = -\frac{f \bar{w}(h)}{h_{\text{trop}} - h}$$

Din această relație rezultă prin integrare că rotorul vântului geostrofic scade în timp, după legea:

$$\text{rot}\vec{u}_g(t) = \text{rot}\vec{u}_g(0)e^{-\frac{t}{t_E}} \quad (6.11)$$

Parametrul  $t_E$  este timpul după care  $\text{rot}\vec{u}_g$  se micșorează de “e” ori. Pentru  $h_{\text{trop}} \approx 10\text{km}$ , timpul  $t_E$  este de aproximativ câteva zile.

Circulația secundară care ia naștere datorită frecării în SLE se numește *pompaj Ekman* și apariția lui determină diminuarea intensității și extinderii vârtejurilor în zonele ciclonice sau anticiclonice.

### 6.3. Variații temporale și spațiale ale SLA

Deși SLA este considerat, pentru simplificare, ca fiind quasi-staționar se pot observa variații temporale puternice în multe situații. Variațiile temporale ale componentelor vitezei medii  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$  și a temperaturii medii  $\bar{\theta}$  sunt determinate de cauze externe, cum sunt variațiile lui  $u_g$  și  $v_g$  și variațiile fluxurilor radiative sau de variațiile în timp ale coeficienților de difuzie turbulentă  $K_u$  și  $K_v$ . În absența unor variații la scară mare, în câmpul de presiune, viteza vântului în SLA se poate modifica numai datorită existenței unor variații în stratificarea verticală de temperatură sau datorită unor variații ale coeficientului turbulent de difuzie  $K_u$ . Vom considera, în continuare, numai acele variații temporale ale SLA care nu sunt cauzate de modificări în condițiile exterioare, adică vom presupune că  $u_g$  și  $v_g$  sunt constante.

Deoarece temperatura la suprafața solului este funcție de timp, datorită variației diurne a fluxului energetic la interfața aer sol, și profilul vertical al temperaturii medii va fi funcție de timp. Fluxurile energetice la limita inferioară a SLA și fluxurile radiative sunt indicate în figura 6.3.

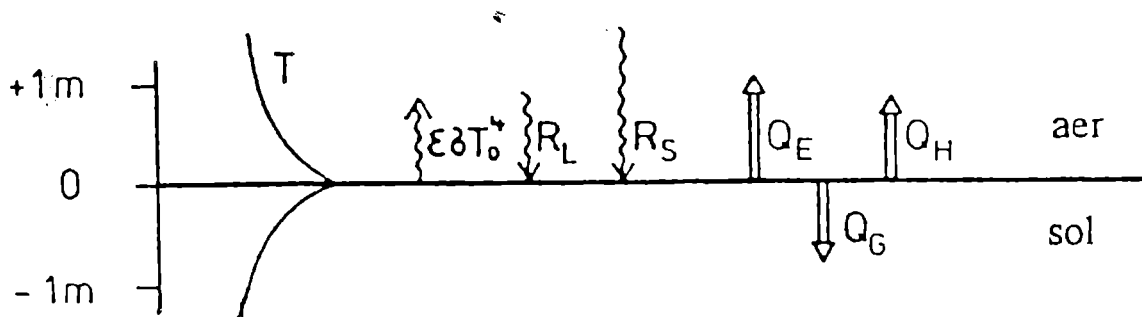


Fig. 6.3.

#### a) Variațiile de temperatură în SLA

Variațiile diurne ale temperaturii solului influențează, datorită difuziei turbulente, asupra profilului vertical al temperaturii medii. Evoluția diurnă tipică a fenomenelor din SLA este redată în figura 6.4. Stratificarea stabilă a temperaturii este erodată, datorită fluxului vertical de căldură ce ia naștere după răsăritul soarelui și se transformă într-o stratificare aproape uniformă, caracteristică unui strat amestecat. După apusul soarelui,

suprafața solului se răcește, în urma emisiei radiației de unde lungi, fapt ce conduce la dezvoltarea unui profil vertical de temperatură stabil lângă suprafața solului (strat de inversie). Un exemplu de evoluție nocturnă a SLA este indicat în figura 6.5.

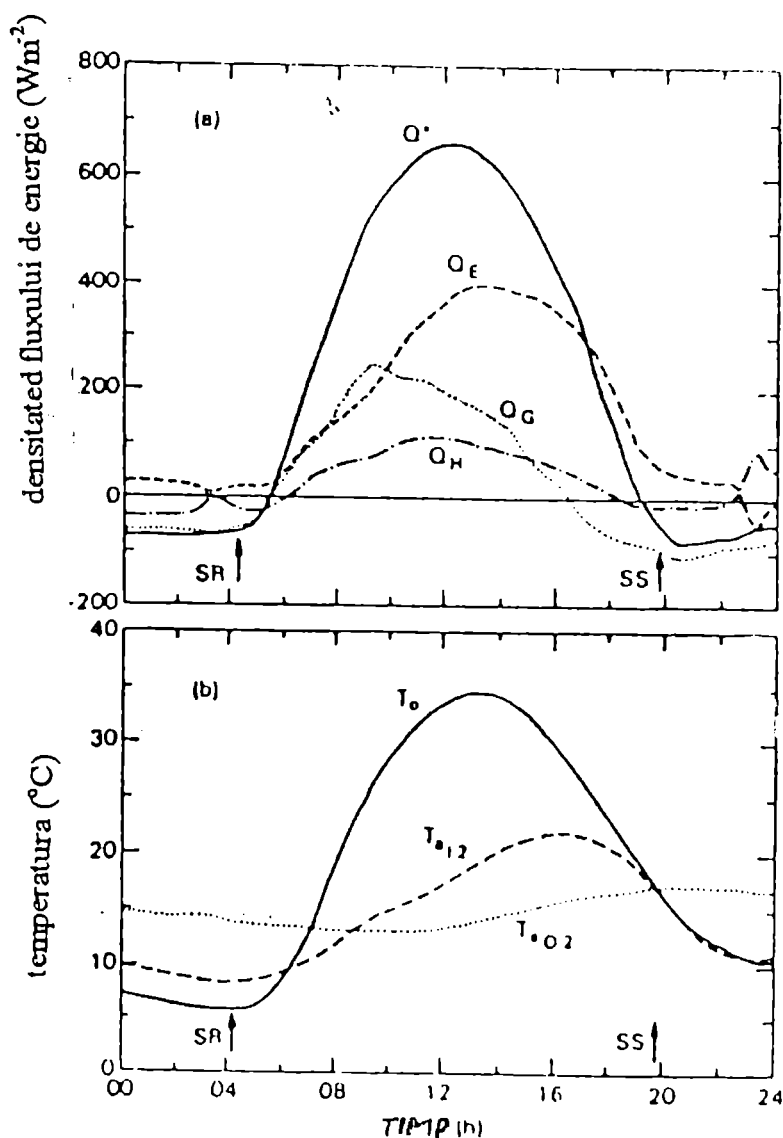


Fig. 6.4.

#### b) Variația vitezei vântului în SLA

Variațiile temporale ale componentelor vitezei medii  $\bar{u}$  și  $\bar{v}$  sunt posibile datorită variațiilor lui  $K_u$  determinate de variațiile diurne ale profilului vertical al temperaturii medii. Coeficientul de difuzie turbulentă  $K_u$  are valori mai mari în timpul zilei decât în timpul nopții deoarece turbulența este influențată și de convecție. În timpul nopții stabilirea unei stratificări de temperatură stabile duce la suprimarea turbulenței. Această comportare a SLA este redată schematic în figura 6.6. Măsurătorile arată că în apropierea solului (cca.8m) viteza vântului crește în timpul zilei. După apusul soarelui, datorită dezvoltării

unei stratificații de temperatură stabile, viteza vântului începe să scadă. În părțile superioare a SLA situația se inversează: se observă viteze mari ale vântului în timpul nopții și viteze mici în timpul zilei. Acest fenomen este determinat de, așa numitul *jet nocturn*.

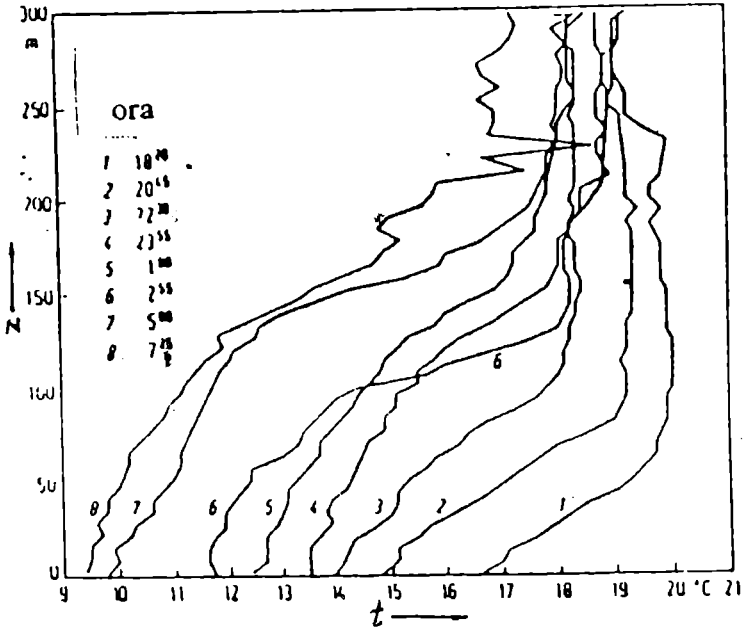


Fig. 6.5

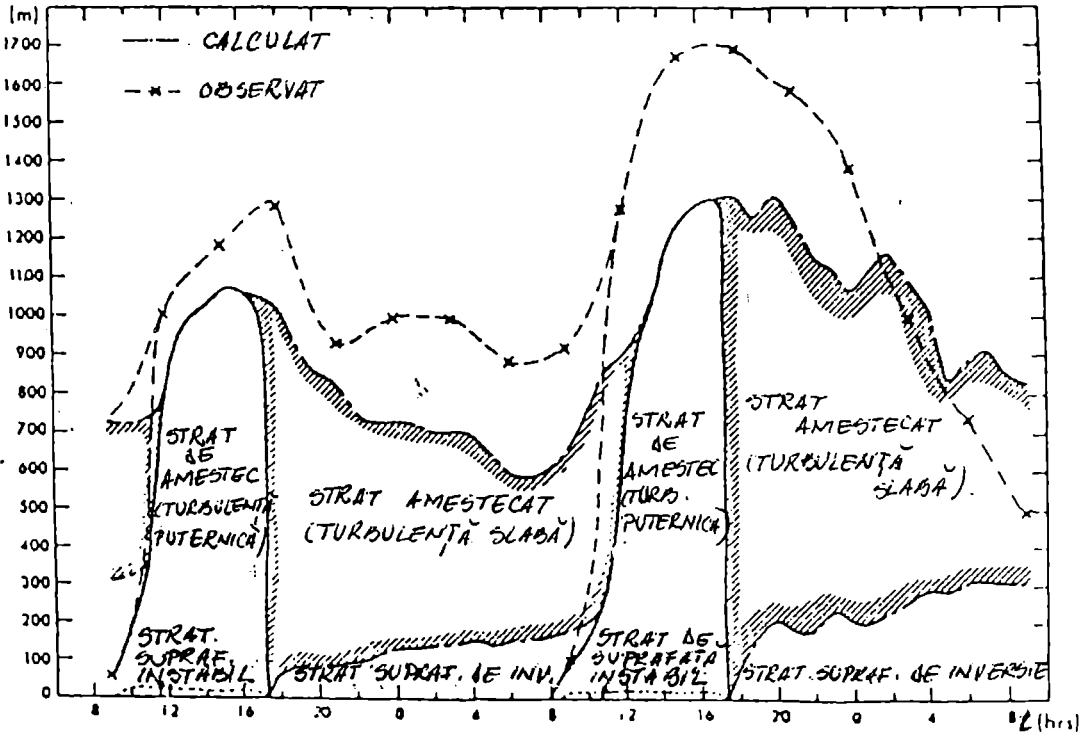


Fig. 6.6

c) *Jetul nocturn (jetul de nivel coborât)*

Un fenomen specific, ce are loc în nopțile senine, este apariția unui maxim în profilul vertical al vitezei vântului, în partea inferioară a SLA (între 100 și 500m). Valoarea vitezei vântului în zona maximului poate depăși cu cca. 50% valoarea vântului geostrofic. Acest fenomen a primit denumirea de *jet nocturn* de nivel coborât. Pe lângă variația modulului vectorului viteză cu înălțimea se observă și o variație a direcției vitezei vântului cu înălțimea.

d) *Variații spațiale ale SLA*

Proprietățile fizice ale suprafeței solului, de sub stratul de aer considerat, au o influență puternică asupra dezvoltării SLA. Dacă proprietățile termice sau rugozitatea suprafeței nu sunt uniforme atunci pot lua naștere mișcări locale ale aerului și SLA corespunzător are unele particularități. De exemplu, dacă mișcarea aerului are loc deasupra unui strat de gheață neuniformă care se continuă cu un strat de apă, în zona de separare a celor două suprafețe apar variații semnificative ale unor mărimi ce caracterizează SLA, după cum rezultă din figura 6.7. În figură este reprezentată variația orizontală a tensiunii de suprafață ( $\rho u^2$ ) și a fluxului de căldură turbulent ( $\rho c_p \overline{w'\theta'}$ ) datorată schimbării rugozității și a proprietăților termice ale suprafeței într-o curgere a aerului deasupra unui strat de gheață, apa cu sloiuri de gheață și apoi deasupra oceanului.

O situație tipică de modificare spațială a SLA se întâlnește atunci când are loc mișcarea aerului dinspre suprafața unui lac spre suprafața uscatului, adică deasupra unor suprafețe cu rugozitate diferită. În zona de separare dintre suprafața cu rugozitatea  $z_{01}$  și suprafața cu rugozitatea  $z_{02}$  profilul vertical al vitezei vântului în SLA este puternic afectat, după cum rezultă

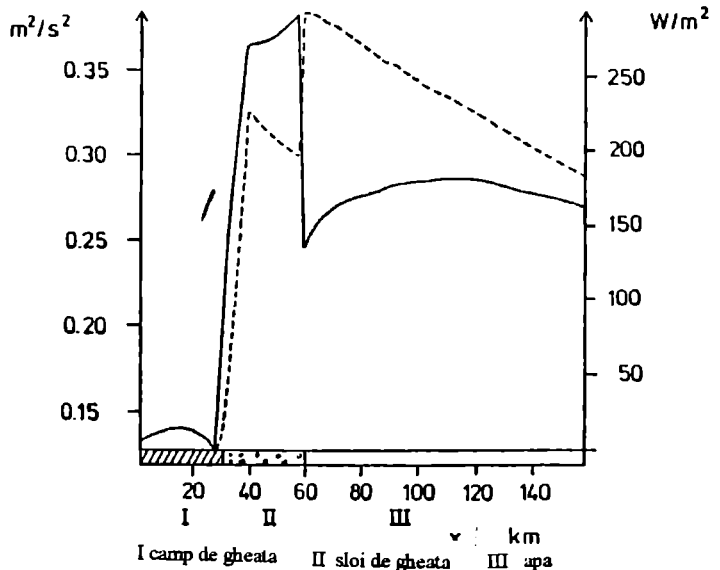


Fig. 6.7

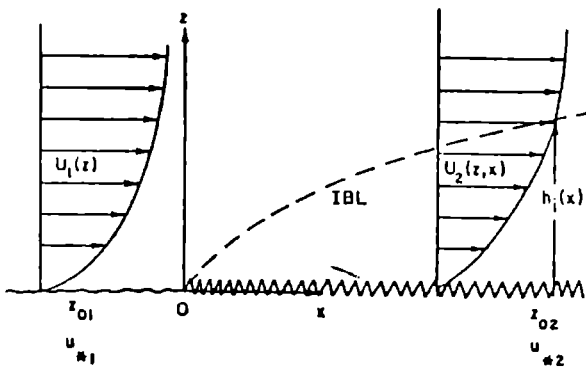


Fig. 6.8

din figura 6.8. Influența acestei zone se propagă în sus până la o înălțime  $h_i$  unde viteza curentului ascendent și viteza curentului descendent devin egale. Stratul delimitat de  $h_i$  este numit *strat limită interior* și este o parte a stratului de suprafață, care este afectat de noile condiții de rugozitate a suprafeței.

## VII. POLUAREA AERULUI

Aerul atmosferic din anumite zone, relativ apropiate de suprafața solului, poate să conțină, în suspensie, diferite substanțe solide sau lichide sau unele substanțe gazoase care să aibă efecte negative asupra activității și sănătății omului, asupra faunei și florei terestre sau marine. Aerul ce conține asemenea substanțe se numește *aer poluat*.

Poluarea aerului este determinată de surse naturale de poluare și, în special în ultimele decenii, de surse de poluare antropice care sunt legate de activitatea industrială a omului și de arderea combustibililor fosili. Sursele naturale care duc la poluarea aerului sunt erupțiile vulcanice, incendiile ce cuprind mari suprafețe de pădure, eroziunea solului, suprafața oceanului ș.a. Poluarea naturală a aerului are efecte puternice pe o arie spațială relativ extinsă și pe o perioadă mare de timp. Frecvența poluării naturale este scăzută și nu produce efecte majore asupra climei, faunei și florei planetei noastre.

Poluarea determinată de activitatea industrială a omului este relativ restrânsă spațial (cca. 40-50km în jurul centrelor industriale). Datorită numărului foarte mare al surselor industriale și datorită distribuției compacte a acestor surse pe zone geografice extinse, ele produc poluarea aerului la scară planetară. Poluarea de origine antropică are efecte negative majore asupra climei planetei, asupra condițiilor de mediu ale omului, asupra faunei și asupra florei.

Cunoașterea profundă a proceselor fizice legate de sursele de poluare, de comportarea și difuzia poluanților în atmosferă, de procesele prin care poluanții părăsesc atmosfera, de timpul de viață al poluanților în atmosferă, va permite adoptarea unor strategii de dezvoltare industrială care să diminueze emisiile de poluanți în atmosferă și efectele acestora asupra organismului uman și asupra mediului înconjurător.

### 7.1. Aerosolul atmosferic

Prin particule de aerosoli se înțelege, în Fizica atmosferei și în Meteorologie, particulele fine, solide sau lichide (mai puțin hidrometeorii) aflate în suspensie (dispersate) în aerul atmosferic. Totalitatea particulelor de aerosoli din atmosferă o vom numi *aerosolul atmosferic*. Acesta are două componente: *componenta solidă* ce conține totalitatea particulelor de aerosoli solizi și *componenta lichidă* ce conține particulele lichide.

Dimensiunile particulelor de aerosoli acoperă un spectru dimensional destul de larg: de la câteva sutimi de microni (clusteri moleculari) la câțiva zeci de microni.

Cea mai mare parte a particulelor de aerosol provin în atmosferă de la suprafața solului (surse naturale sau antropice). O parte dintre ele provin în atmosferă din interiorul pământului prin emisii vulcanice, din spațiul extraterestru (praf cosmic și meteoriți), iar o parte se formează chiar în atmosferă în urma unor reacții chimice dintre unele componente gazoase. Aceste reacții chimice se mai numesc și *proces de conversie gaz-particulă*.

Concentrația particulelor de aerosol variază de la un loc la altul, iar pentru un loc dat variază în timp. Variația în spațiu și în timp a concentrației de aerosol depinde puternic de distanța față de sursă, de viteza de emisie a sursei de aerosoli, de viteza de transport turbulent și convectiv, de eficiența mecanismelor de eliminare a aerosolului din atmosferă și de parametri meteorologici ce influențează asupra distribuției orizontale și verticale a aerosolului. Câteva valori tipice de concentrații de aerosol (în nr. de particule pe  $\text{cm}^3$ ) sunt date mai jos:

- în păduri sau deasupra unor suprafețe agricole,  $n=10^4 \text{ cm}^{-3}$ ,
- deasupra oceanului planetar,  $n=10^3 \text{ cm}^{-3}$ ,
- în atmosfera orașelor,  $n=10^5 \text{ cm}^{-3}$ .

Datele experimentale indică o scădere a concentrației de aerosol pe verticală. Această micșorare a concentrației cu altitudinea este determinată de profilul vertical al densității aerului și de faptul că majoritatea surselor de aerosol se află la suprafața solului. Estimările făcute arată că cca. 80% din masa totală de aerosol este cuprinsă în partea de jos a troposferei, într-un strat de aer cu grosimea mai mică de 1km.

Concentrația particulelor de aerosol descrește pe măsură ce ne depărtăm de uscat, deasupra oceanului planetar, deoarece suprafața uscatului este o sursă de aerosol mai eficientă decât suprafața oceanului. Se consideră că cca. 61% din totalul particulelor de aerosol sunt deversate în atmosferă de către emisfera nordică deoarece acoperirea ei cu uscat este mai mare decât a emisferei sudice. Cea mai mare parte a particulelor de aerosol de origine antropică este deversată în atmosferă de surse industriale, localizate într-o zonă geografică cuprinsă între 30 și 60° LN, în care sunt concentrate cca. 88% din sursele de poluare de origine antropică.

Timpul de viață al particulelor de aerosol în atmosferă depinde de mai mulți factori printre care se numără și viteza de eliminare a aerosolului din aer. Viteza de eliminare determinată de procesele de fuziune a particulelor de aerosol este proporțională cu pătratul concentrației de particule, iar viteza de eliminare datorată proceselor umede este proporțională cu concentrația de particule. Rezultă că viteza de eliminare a aerosolului din atmosferă este mică la concentrații mici a particulelor de aerosol.

Viteza de emisie în atmosferă a diferitelor surse de aerosol este prezentată în tabelul de mai jos.

<b>Surse naturale</b>	<b>viteza în <math>\text{kg an}^{-1}</math></b>
Fărâmițări de sol sau rocă.....	$(1 - 5) 10^{11}$
Incendii.....	$3 \cdot 10^9 - 1,5 \cdot 10^{11}$
Sare marină .....	$3 \cdot 10^{11}$
Eruptii vulcanice .....	$2,5 \cdot 10^9 - 1,5 \cdot 10^{11}$
<b><u>Procese conversie gaz-particulă</u></b>	
- sulfati din $\text{H}_2\text{S}$ .....	$(1,3 - 2) 10^{11}$
- săruri de amoniu din $\text{NH}_3$ .....	$(0,8 - 2,7) 10^{11}$
- nitrați din $\text{NO}_x$ .....	$(0,6 - 4,3) 10^{11}$
<b><u>Hidrocarburi</u></b> .....	$(0,75 - 2) 10^{11}$
<b>Surse antropice</b>	
Particule emise direct .....	$(0,1 - 0,9) 10^{11}$
<b><u>Procese conversie gaz-particulă</u></b>	
-sulfati din $\text{SO}_2$ .....	$(1,3 - 2) 10^{11}$
-nitrați din $\text{NO}_x$ .....	$(0,3 - 0,35) 10^{11}$
<b><u>Hidrocarburi</u></b> .....	$(0,15 - 0,9) 10^{11}$
Total surse terestre .....	$(9,58 - 26,5) 10^{11}$
Surse cosmice .....	$(0,005 - 0,5) 10^{11}$

Timpul de viață caracteristic pentru particulele de aerosol în atmosferă, la diferite altitudini, este redat mai jos:

nivelul în atmosferă	timpul de viață
sub 1,5 km .....	0,5 la 2 zile
Troposfera joasă .....	2 zile la 1 săptămână
Troposfera medie .....	1 - 2 săptămâni
Tropopauza .....	3 - 4 săptămâni
Stratosfera joasă .....	1 - 2 luni
Stratosfera înaltă .....	1 - 2 ani
Mezosfera joasă .....	4 - 20 ani

## 7.2. Distribuția dimensională

În funcție de dimensiunile caracteristice, particulele de aerosol se divid în trei grupe principale:

- particule Aitken, având raza  $r \leq 0,1 \mu\text{m}$ ;
- particule mari, având raza  $0,1 \mu\text{m} < r \leq 1 \mu\text{m}$ ;
- particule gigant, având raza  $r > 1 \mu\text{m}$ .

O parte din particulele Aitken cu proprietăți higroscopice joacă rolul principal în nucleația heterogenă a vaporilor de apă din atmosferă și se numesc nuclee de condensare.

În grupa particulelor Aitken intră și particulele de aerosol încărcate cu sarcină electrică sau ionii din atmosferă. Ionii sunt clasificați după dimensiunile lor astfel:

- ioni mici, având raza  $r \leq 7 \cdot 10^{-3} \mu\text{m}$ ;
- ioni mari, având raza  $7 \cdot 10^{-3} \mu\text{m} < r \leq 2,5 \cdot 10^{-2} \mu\text{m}$ ;
- ioni Langevin, având raza  $2,5 \cdot 10^{-2} \mu\text{m} < r \leq 5,5 \cdot 10^{-2} \mu\text{m}$ ;
- ioni foarte mari, având raza  $r > 5,5 \cdot 10^{-2} \mu\text{m}$ .

Deoarece particulele de aerosol nu au formă sferică vom defini, în mod convențional, raza particulei ca fiind egală cu raza unei particule sferice ce are același volum cu volumul particulei date. Această rază se numește și rază echivalentă. În aplicațiile practice se mai folosește o rază, introdusă în mod convențional, numită rază efectivă. Aceasta este egală cu raza unei particule sferice ce are aceleași proprietăți mecanice (cum ar fi de exemplu viteza de sedimentare) ca și particula de aerosol considerată.

Mărimea principală ce determină conținutul de aerosol din atmosferă este concentrația de particule sau cantitatea de particule de aerosol conținute în unitatea de volum de aer. Concentrația de particule se poate exprima în unități de masă ( $\mu\text{g}/\text{m}^3$ ), în unități de volum (volum de particule/volum de aer) sau în număr de particule în unitatea de volum (nr. particule/volum aer). În unele cazuri se folosește noțiunea de raport de amestec a aerosolului atmosferic ce se exprimă prin raportul dintre masa de aerosol și masa aerului, conținute în același volum de aer poluat.

Deoarece spectrul dimensional al particulelor de aerosol este destul de mare, iar proprietățile fizice ale particulelor depind puternic de dimensiunile lor, un ansamblu de particule de aerosol nu poate fi caracterizat cu ajutorul unei dimensiuni efective. Un ansamblu dat de particule de aerosol poate fi caracterizat cu ajutorul *funcției de distribuție* a particulelor după dimensiuni (numită și densitate de distribuție a particulelor după dimensiuni).



Funcția de distribuție după dimensiuni poate fi stabilită în mai multe moduri. Cel mai simplu mod este de a reprezenta grafic curba de repetare a numărului de particule în funcție de dimensiuni. Pe axa absciselor, într-o asemenea reprezentare grafică, este înscrisă raza (diametrul) particulelor, iar pe axa ordonatelor raportul dintre numărul  $n_r$  de particule, ce au razele cuprinse între  $r$  și  $r+dr$ , și numărul total de particule  $n$  cuprinse într-un volum dat. Graficele ce reprezintă dependența raportului  $\frac{n_r}{n} = n(r)$  de raza  $r$  se numesc curbele

de distribuție numerică a particulelor de aerosol după dimensiuni. Mai exact, din punct de vedere matematic, funcția de distribuție  $n(r)$  se definește astfel: se consideră că numărul de particule din unitatea de volum de aer  $dn_r$ , ce au razele cuprinse în intervalul  $r$  și  $r+dr$ , este proporțional cu  $dr$  și cu numărul total  $n$  de particule din unitatea de volum, factorul de proporționalitate fiind tocmai funcția de distribuție. Matematic se poate scrie relația:

$$dn_r = n(r)ndr \quad (7.1)$$

Din această definiție rezultă și condiția de normare a funcției de distribuție:

$$\int_0^{\infty} \frac{dn_r}{n} = \int_0^{\infty} n(r)dr = 1 \quad (7.2)$$

Funcția  $n(r)$ , definită de (7.1), se numește funcția de distribuție numerică a particulelor după dimensiuni, iar reprezentarea grafică a ei se numește curba diferențială de distribuție a particulelor de aerosol după rază.

Suprafața delimitată de curba de distribuție, axa absciselor și două verticale duse prin punctele  $r_1$  și  $r_2$ , exprimă fracțiunea de particule ce au razele cuprinse între  $r_1$  și  $r_2$ . Această fracțiune se exprimă prin relația:

$$\frac{n_{r_1, r_2}}{n} = \int_{r_1}^{r_2} n(r)dr \quad (7.3)$$

Cea mai răspândită funcție de distribuție, pentru particulele de aerosol din atmosferă, este distribuția lui Junge, de forma:

$$n(r) = cr^{-v}, \quad (7.4)$$

unde  $c$  este o constantă ce depinde de concentrația de particule, iar indicele puterii  $v$  este cuprins între 2 și 5, în funcție de condițiile atmosferice date. Această distribuție descrie suficient de exact distribuția particulelor de aerosoli de dimensiuni mari (b) pentru care Junge a obținut  $v=4$ .

Rezultatele experimentale, privind distribuția aerosolului în aerul poluat din orașe, sunt descrise suficient de exact cu ajutorul distribuției logaritm-normală, obținută pe cale teoretică de către A. N. Kolmogorov:

$$n(r) = \frac{1}{\sigma r \sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{\ln^2 \left( \frac{r}{r_0} \right)}{2\sigma^2} \right], \quad (7.5)$$

unde  $r_0$  este raza geometrică medie, iar  $\sigma$  este abaterea pătratică medie a logaritmului razei particulelor ( $\sigma = \sqrt{(\ln r_0 - \ln r)^2}$ ).

Pentru particulele de aerosol de dimensiuni mici, cum sunt firisoarele de praf sau sporii unor bacterii din aer, se folosesc funcții de distribuție simetrice de tipul funcției Gauss:

$$n(r) = \frac{1}{\beta\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(r\bar{r})^2}{2\beta^2}\right], \quad (7.6)$$

unde  $\bar{r}$  este raza medie a particulelor, iar  $\beta$  este abaterea pătratică medie a razei ( $\beta = \sqrt{(r - \bar{r})^2}$ ) sau dispersia razelor.

### 7.3. Mișcarea browniană a particulelor de aerosol

Particulele de aerosol, de dimensiuni mici, aflate în suspensie în aerul atmosferic participă la o mișcare continuă și dezordonată (aleatoare). Această mișcare aleatoare este rezultatul (efectul) macroscopic al ciocnirilor dezordonate dintre moleculele de aer, ce participă la mișcarea de agitație termică, și particulele de aerosol, aflate în suspensie în aer, și se numește mișcarea browniană a particulelor de aerosol. Un studiu satisfăcător al acestei mișcări se poate face cu ajutorul unui model mecanic simplu în care nu se ține seama de structura particulelor care se ciocnesc și în care se presupune că deplasările succesive ale particulelor de aerosol sunt statistic independente.

O consecință directă a presupunerii că mișcarea browniană este aleatoare este că distanța pătratică medie pe care o parcurg particulele browniene este proporțională cu intervalul de timp în care s-a produs această deplasare. Vom arăta că în mișcarea browniană a particulelor de aerosol această relație de proporționalitate este satisfăcută. Determinarea constantei de proporționalitate se face folosind legea de mișcare (legea a II-a a dinamicii) pentru particulele de aerosol:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\beta\vec{v} + \vec{A}(t) \quad (\text{legea lui Langevin}) \quad (7.6)$$

unde  $\vec{v}$  este vectorul viteză al particulei, iar  $\beta$  caracterizează forța de frecare dintre particula de aerosol și aer. Ultimul termen din membrul drept al ecuației (7.6) descrie fluctuațiile accelerației particulelor de aerosol, caracteristice mișcării browniene.

Deoarece deplasarea particulelor de aerosol se face la numere Reynolds mici, termenul de frecare poate fi considerat cel dat de legea lui Stokes pentru particule sferice, astfel că:

$$\beta = \frac{6\pi r_0 \eta}{m} \quad (7.7)$$

unde  $r_0$  este raza particulei,  $m$  este masa sa și  $\eta$  este vâscozitatea dinamică a aerului.

Înmulțim ecuația (7.6) cu vectorul  $\vec{r}$  și rezultatul îl mediem statistic:

$$\overline{\vec{r} \frac{d\vec{v}}{dt}} = -\beta\overline{\vec{r}\vec{v}} + \overline{\vec{r}\vec{A}(t)}$$

sau altfel scris:

$$\frac{d}{dt}(\overline{\vec{r}\vec{v}}) - \vec{v} \frac{d\vec{r}}{dt} = -\beta\overline{\vec{r}\vec{v}} + \overline{\vec{r}\vec{A}(t)}$$

Dar  $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$  și avem:

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}\vec{v}) - \vec{v}^2 = -\beta\vec{r}\vec{v} + \vec{r}\vec{A}(t)$$

După mediere rezultă:

$$\overline{\frac{d}{dt}(\vec{r}\vec{v}) - \vec{v}^2} = -\beta\overline{\vec{r}\vec{v}} + \overline{\vec{r}\vec{A}(t)} \quad (7.8)$$

Presupunând adevărată legea echipartiției energiei pe gradele de libertate  $\overline{\vec{v}^2} = \overline{v^2} = \frac{3kT}{m}$

și izotropia ciocnirilor, când  $\overline{\vec{r}\vec{A}(t)} = 0$ , rezultă din (7.8):

$$\overline{\frac{d}{dt}(\vec{r}\vec{v})} + \beta\overline{\vec{r}\vec{v}} = \frac{3kT}{m} \quad (7.9)$$

unde  $k$  este constanta lui Boltzmann.

Se integrează ecuația omogenă:

$$\overline{\frac{d}{dt}(\vec{r}\vec{v})} + \beta\overline{\vec{r}\vec{v}} = 0 \quad (7.10)$$

și se obține soluția generală de forma:  $\overline{\vec{r}\vec{v}} = Ce^{-\beta t}$ , iar soluția ecuației neomogene (7.9) este:

$$\overline{\vec{r}\vec{v}} = \frac{3kT}{\beta m} + C \exp(-\beta t) \quad (7.11)$$

unde  $C$  este o constanta arbitrară. Mărima  $\beta^{-1} = \tau_s$  se numește  *timp de relaxare vâscoasă*  și se exprimă prin:

$$\tau_s = \frac{1}{\beta} = \frac{m}{6\pi\eta_0 r} \quad (7.12)$$

Timpul de relaxare vâscoasă este prin definiție egal cu intervalul de timp în care particulele de aerosol ajung de la viteza nulă la viteza limită de cădere în aer. Timpul de relaxare vâscoasă pentru particulele de aerosol în aer este foarte mic. Pentru particulele cu  $r=1\mu\text{m}$ ,  $\rho=1\text{gcm}^{-3}$ , în aer la  $p=1\text{atm}$  și  $t=20^\circ\text{C}$ ,  $\nu=1,5\cdot 10^{-5}\text{m}^2\text{s}^{-1}$  rezultă  $\tau_s=10^{-5}\text{s}$ .

Pentru valori ale timpului mai mari decât  $\tau_s$  ( $t \gg \tau_s$ ) perturbațiile inițiale ale vitezei se reduc la zero astfel că valoarea medie staționară, caracteristică mișcării browniene, a produsului  $\overline{\vec{r}\vec{v}}$  va avea forma:

$$\overline{\vec{r}\vec{v}} = \frac{3kT}{\beta m} \quad (7.13)$$

Dar  $\vec{r}\vec{v} = \vec{r} \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\vec{r}^2}{2} \right)$ , deci:

$$\overline{\frac{d}{dt} \left( \frac{\vec{r}^2}{2} \right)} = \frac{3kT}{\beta m}$$

de unde prin integrare rezultă formula lui Einstein:

$$\overline{\vec{r}^2} = \frac{6kT}{\beta m} t = \frac{kT}{\pi n_a r_0} t \quad (7.14)$$

sau pe componente:

$$\overline{x^2} = \overline{y^2} = \overline{z^2} = \frac{\overline{\vec{r}^2}}{3} = \frac{kT}{3\pi n_a r_0} t = \frac{2kT}{\beta m} t \quad (7.15)$$

Deci, mișcarea particulelor de aerosol este aleatoare, iar deplasările succesive ale particulelor sunt statistic independente.

#### 7.4. Difuzia particulelor de aerosol

Dependența  $\overline{z^2} \approx t$  este caracteristică unui proces de difuzie, astfel încât se poate considera mișcarea unui ansamblu mare de particule ce se comportă aleator, fără a interacționa între ele, ca un proces de difuzie browniană. Vom stabili deplasarea pătratică medie a particulelor de aerosol ce difuzează, folosind ecuațiile difuziei moleculare (clasice).

Din teoria microscopică a difuziei rezultă expresia pentru densitatea curentului de particule de aerosol într-un mediu staționar (legea I-a a lui Fick):

$$\vec{j} = -D\nabla n(\vec{r}, t) \quad (7.16)$$

unde  $D$  este coeficientul de difuzie a particulelor de aerosol în aer,  $n(\vec{r}, t)$  este concentrația de particule. Ecuația de continuitate pentru particulele difuzante este:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{j} \quad (7.17)$$

Folosind ecuațiile (7.16) și (7.17) rezultă ecuația de difuzie pentru  $D$  constant (legea a II-a a lui Fick):

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D\nabla^2 n \quad (7.18)$$

Considerăm că un număr  $N$  de particule identice de aerosol sunt introduse în aer într-un volum infinitesimal de arie unitate la momentul  $t=0$  și la  $z=0$ . Multiplicăm ecuația de difuzie cu  $z^2$  și apoi integrăm după  $z$  (nu se ia în considerare dependența de  $x$  și  $y$ ):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} z^2 \frac{\partial n}{\partial t} dz = D \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 \frac{\partial^2 n}{\partial z^2} dz \Leftrightarrow N \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 dz = D \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 \frac{\partial^2 n}{\partial z^2} dz \Rightarrow N \frac{\partial \overline{z^2}}{\partial t} = 2DN$$

unde s-au folosit condițiile  $n=0$  și  $\frac{\partial n}{\partial z} = 0$  când  $z \rightarrow \pm\infty$ .

După simplificare prin  $N$  și integrare după  $t$ , rezultă deplasarea pătratică medie:

$$\overline{z^2} = 2Dt = \frac{\overline{\vec{r}^2}}{3} \quad (7.19)$$

care are aceeași formă cu cea dedusă pentru mișcarea browniană dacă se consideră un coeficient de difuzie de forma:

$$D = \frac{kT}{\beta m} = \frac{kT}{6\pi\eta_a r_0} \quad (7.20)$$

Pentru particule mici cu,  $r \sim \lambda$  ( $\lambda$ - drumul liber mediu al moleculelor de aer), trebuie aplicată o corecție pentru coeficientul de difuzie browniană, stabilită pe cale experimentală (corecția lui Cunningham):

$$D = \frac{kT \left(1 + \alpha \frac{\lambda}{r}\right)}{6\pi\eta_a r} = \frac{kT \left(1 + \alpha \frac{\lambda}{r}\right)}{\beta m} \quad (7.21)$$

unde  $\left(1 + \alpha \frac{\lambda}{r}\right)$  este corecția de alunecare cu  $\alpha = A + B \exp\left(\frac{Cr}{\lambda}\right)$ , unde A, B și C sunt constante. Dar, drumul liber mediu al moleculelor depinde de temperatură și de presiune  $\left(\lambda = \lambda_0 \left(\frac{p_0}{p}\right) \left(\frac{T}{T_0}\right)\right)$ , de aceea odată cu creșterea razei particulelor coeficientul de difuzie scade rapid. Difuzia browniană a particulelor de aerosol în troposferă este importantă pentru particulele de dimensiuni mici  $r < 1 \mu\text{m}$ . Pentru particulele de dimensiuni mari,  $r > 1 \mu\text{m}$ , difuzia browniană nu este semnificativă pentru procesele de transport.

### 7.5. Mobilitatea și viteza de antrenare

Considerăm că asupra particulelor de aerosol din aer acționează și o forță exterioară  $\vec{F}_{ext}$  (determinată de un câmp de forțe). Ecuația de mișcare a particulelor va fi:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_{ext} - \beta m \vec{v} + m \vec{A} \quad (7.22)$$

Scriem ecuația pentru valorile medii ale mărimilor și considerăm o stare staționară (aceasta presupune că timpul caracteristic în care se produc variațiile vitezei medii  $\bar{v}$  este mai mare decât timpul de relaxare  $\tau_s = \frac{1}{\beta}$ ). Deoarece  $\frac{d\vec{v}}{dt} = 0$  (stare staționară), avem:

$$0 = \vec{F}_{ext} - \beta m \bar{v} + m \bar{A}$$

Deoarece ciocnirile sunt izotrope  $\bar{A} = 0$ , rezultă pentru viteza medie expresia:

$$\bar{v} = \bar{v}_{antrenare} = \frac{\vec{F}_{ext}}{\beta m} \quad (7.23)$$

Această viteză medie, ce caracterizează viteza de ansamblu a particulelor de aerosol, determinată de acțiunea unor forțe exterioare, se numește viteză de antrenare sau de drift.

Viteza de antrenare este proporțională cu forța exterioară care acționează asupra particulelor. Factorul de proporționalitate se numește mobilitatea particulelor de aerosol:

$$\bar{v}_{antrenare} = B \vec{F}_{ext} \quad (7.24)$$

Comparând (7.24) cu (7.23) rezultă că mobilitatea particulelor sferice ce se supun legii Stokes cu corecția de alunecare va fi:

$$B = \frac{1}{\beta m} = \frac{1 + \alpha \frac{\lambda}{r}}{6\pi\eta a r} \quad (7.25)$$

Folosind mobilitatea  $B$  a particulelor de aerosol, coeficientul de difuzie a acestora în aer, dat de relația (7.21), se va exprima prin:

$$D = kTB \quad (7.26)$$

care este cunoscută ca relația lui Einstein.

## 7.6. Sedimentarea și distribuția pe verticală a particulelor de aerosol

Particulele de aerosol, aflate în suspensie în aer, sunt supuse acțiunii câmpului gravitațional al Pământului. Sub acțiunea acestei forțe, a forței arhimedice și a forței de frecare de tip Stokes particulele de aerosol se mișcă spre suprafața pământului având o viteză limită de cădere. Aceasta este egală cu viteza de antrenare. Pentru particulele sferice de rază  $r$  și densitate  $\rho_p$ , avem:

$$|\vec{v}_{antrenare}| = v_{limita} = \frac{2 \left( 1 + \alpha \frac{\lambda}{r} \right) r^2 g (\rho_p - \rho_a)}{9\eta_a} = v_s \quad (7.27)$$

unde  $F_{ext} = m_p g - F_{arhim} = Vg(\rho_p - \rho_a) = \frac{4}{3}\pi r^3 g(\rho_p - \rho_a)$ ,  $\rho_a$ ,  $\eta_a$  sunt densitatea, respectiv vâscozitatea aerului. Viteza, exprimată prin relația (7.27) se numește viteză de sedimentare gravitațională. Ea crește rapid cu altitudinea, în special la altitudini peste 10km, și cu greutatea particulelor (raza și densitatea lor) și are valori însemnate pentru particulele gigant cu  $r > 1\mu m$ . Pentru  $r \leq 1\mu m$ , viteza de sedimentare este mică, iar din calcule rezultă că aceste particule parcurg o distanță de 1km într-un timp de ordinul anilor la o altitudine mai mare de 25km. Pentru particule cu  $r \leq 1\mu m$  viteza de sedimentare este  $v_s = 10^{-4} \div 5 \cdot 10^{-2} \text{cms}^{-1}$ .

Fenomenul de sedimentare este factorul hotărâtor în stabilirea valorii limitei superioare a spectrului dimensional al particulelor de aerosol și influențează distribuția verticală a particulelor gigant de aerosol. Din estimările teoretice rezultă că valoarea medie a limitei superioare a spectrului dimensional al particulelor de aerosol deasupra uscatului sau a oceanului planetar este de cca. 20 $\mu m$ . Pentru particulele de dimensiuni mici,  $r < 1\mu m$ , fenomenul de sedimentare nu influențează distribuția verticală a acestora. Distribuția verticală a concentrației particulelor de aerosol se stabilește ușor pentru cazul în care particulele de aerosol participă simultan la un proces de difuzie browniană și la un proces de sedimentare. În acest caz densitatea curentului total de particule  $\vec{j}$  se scrie sub forma unei sume a contribuțiilor celor două fenomene, astfel:

$$\vec{j} = -D\nabla n + n\vec{v}_{antrenare} \quad (7.28)$$

Folosind ecuația de continuitate pentru particulele de aerosol (7.17) se obține legea de variație a concentrației particulelor:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\nabla(-D\nabla n + n\vec{v}_{antrenare}) = D\nabla^2 n - \nabla(-nv_s) \Rightarrow \frac{\partial n}{\partial t} = D\nabla^2 n + v_s \frac{\partial n}{\partial z} \quad (7.29)$$

unde  $v_s = \text{const}$  este viteza limită de sedimentare Stokes, dată de relația (7.27). Această relație permite să se exprime profilul vertical al concentrației de particule într-o atmosferă imobilă. În realitate, aerul se mișcă turbulent și antrenează particulele de aerosol de la suprafața pământului, determinând un flux turbulent de difuzie care tinde să echilibreze efectul de sedimentare.

Dacă se consideră o stare staționară în care fluxul vertical determinat de difuzia turbulentă egalează fluxul de sedimentare a particulelor de aerosol, ecuația densității curentului de particule (7.28) trebuie modificată. În locul coeficientului de difuzie  $D$  trebuie folosit coeficientul de difuzie turbulentă  $D_t$ , iar în locul vitezei limită  $v_s$ , diferența  $(v_s - w)$ , unde  $w$  este viteza verticală medie a aerului. Pentru a ține seama de micșorarea densității aerului cu altitudinea, care produce o micșorare a gradientului vertical al particulelor de aerosol, concentrația de particule se va înlocui cu  $\sigma = \frac{n}{n_a}$ , unde  $n_a = n_a(z)$

este concentrația moleculelor de aer la altitudinea  $z$ . Considerând o stare staționară, când fluxul net de particule este zero la orice altitudine, rezultă distribuția verticală a concentrației:

$$\vec{j} = 0 = -D_t \nabla n - n(v_s - w) \quad (7.30)$$

sau  $\frac{d\sigma}{dz} = -\sigma \frac{v_s - w}{D_t}$ . După integrare avem:

$$\sigma(z) = \sigma(0) \exp\left(-\frac{v_s - w}{D_t} z\right) = \sigma(0) \exp\left(-\frac{z}{z_e}\right) \quad (7.31)$$

unde  $z_e = \frac{D_t}{v_s - w} = \text{const}$ . Folosind expresia pentru  $\sigma$ , rezultă profilul vertical al concentrației de particule:

$$\frac{n(z)}{n(0)} = \frac{n_a(z)}{n_a(z)} \exp\left(-\frac{z}{z_e}\right) \quad (7.32)$$

și considerând aerul un gaz ideal în echilibru hidrostatic, rezultă:

$$\frac{n_a(z)}{n_a(0)} = \frac{T(0)}{T(z)} \exp\left(-\frac{g}{R_a} \int_0^z \frac{dz}{T(z)}\right) \exp\left(-\frac{z}{z_e}\right) \quad (7.33)$$

unde  $T(z)$  este profilul vertical al temperaturii aerului. Din relația (7.31) și (7.32) rezultă o descreștere exponențială a concentrației particulelor de aerosol în troposferă. Modelul prezentat mai sus este cel mai simplu posibil. El nu ține seama de efectul local al surselor de particule, de condițiile meteorologice, de micșorarea sau creșterea concentrației datorită amestecului cu mase de aer diferite, de depunerea uscată sau umedă a aerosolului și de procesele de fuziune a particulelor de aerosol.

## 7.7. Fuziunea browniană a particulelor de aerosol

Particulele de aerosol ce participă la procesul de difuzie browniană au o probabilitate finită de a se ciocni între ele și de a fuziona una cu cealaltă. Probabilitatea sau eficiența de fuziune este o funcție complicată ce depinde de forma lor și de condițiile de

suprafață (rugozitatea, absorbția de vapori, s.a.), de umiditatea relativă a aerului, de prezența vaporilor altor substanțe și de alți factori.

Pentru a studia procesul de fuziune a particulelor de aerosol trebuie definit, la început, coeficientul  $D_{12}$  ce caracterizează difuzia particulelor de rază  $r_2$  față de cele de rază  $r_1$ . Fie  $\Delta\vec{r}_1$  și  $\Delta\vec{r}_2$  deplasările celor două particule în intervalul de timp  $\Delta t$ . Deplasarea pătratică medie relativă a celor două particule se exprimă:

$$|\overline{\Delta\vec{r}_1 - \Delta\vec{r}_2}|^2 = \overline{(\Delta r_1)^2} + \overline{(\Delta r_2)^2} - 2\overline{(\Delta\vec{r}_1 \Delta\vec{r}_2)} = \overline{(\Delta r_1)^2} + \overline{(\Delta r_2)^2} \quad (7.34)$$

dacă deplasările sunt statistic independente. Folosind relația (7.19), putem scrie:

$$\left. \begin{aligned} \overline{|\Delta\vec{r}_1 - \Delta\vec{r}_2|^2} &= 6D_{12}\Delta t \\ \overline{(\Delta r_1)^2} &= 6D_1\Delta t \\ \overline{(\Delta r_2)^2} &= 6D_2\Delta t \end{aligned} \right\} \quad (7.35)$$

Cu ajutorul relațiilor (7.34) și (7.35) se exprimă  $D_{12}$  astfel:

$$D_{12} = D_1 + D_2 \quad (7.36)$$

unde  $D_1$  și  $D_2$  sunt coeficienții de difuzie a particulelor de rază  $r_1$ , respectiv  $r_2$  în aer.

Presupunem că particula de rază  $r_1$  este în repaus, iar particula de rază  $r_2$  difuzează spre prima cu coeficientul de difuzie  $D_{12}$ . Folosim centrul particulei  $r_1$  ca origine a sistemului de coordonate. În acest caz, datorită izotropiei procesului de difuzie, concentrația  $n_2$  a particulelor de rază  $r_2$  va fi funcție numai de  $r$  și de timp, conform figurii 7.1.

Condițiile la limită în momentul ciocnirii vor fi:

$$n_2(r_{12}, t) \Big|_{r_{12}=r_1+r_2} = 0 \quad (7.37)$$

Ecuția de difuzie se va scrie:

$$\frac{\partial n_2}{\partial t} = D_{12} \nabla^2 n_2$$

care în coordonate sferice, ținând seama de izotropia difuziei, devine:

$$\frac{\partial n_2}{\partial t} = D_{12} \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r n_2) \quad (7.38)$$

Condițiile inițiale pentru această ecuație sunt:

$$n_2(r, 0) = n_2(\infty), \quad r > r_{12} \quad (7.39)$$

unde  $n_2(\infty)$  este concentrația de particule  $r_2$  la începutul procesului de difuzie.

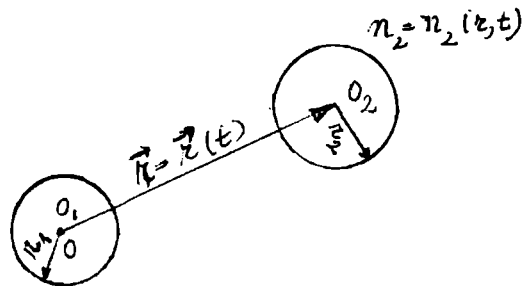


Fig. 7.1.



Soluția ecuației de difuzie (7.38) cu condițiile la limită (7.37) și cu cele inițiale (7.39), se exprimă:

$$n_2(r, t) = n_2(\infty) \left[ 1 - \frac{r_{12}}{r} + \frac{r_{12}}{r} \operatorname{erf} \left( \frac{r - r_{12}}{\sqrt{4D_{12}t}} \right) \right] \quad (7.40)$$

Viteza de scădere a concentrației particulelor de rază  $r_2$  în urma fuziunii cu cele de rază  $r_1$  va fi:

$$\frac{\partial n_2}{\partial t} = -\int \bar{j}_2 d\bar{s} = D_{12} \int_{s_{12}} \frac{\partial n_2}{\partial r} ds = 4\pi r_{12} D_{12} n_2(\infty) \left( 1 + \frac{r_{12}}{\sqrt{\pi D_{12} t}} \right) \quad (7.41)$$

unde integrala se calculează pe suprafața secțiunii geometrice transversale a particulelor ( $s_{12} = 4\pi r_{12}^2$ ).

Viteza de creștere a concentrației particulelor obținute prin fuziune va fi (formula lui Smoluchovschi):

$$\frac{dn(r_{12})}{dt} = -4\pi(D_1 + D_2)(r_1 + r_2)n(r_1)n(r_2)dr_1dr_2 \quad (7.41)$$

Această formulă poate fi generalizată pentru o distribuție discretă de particule, obținute prin fuziune binară:

$$\frac{dn_k}{dt} = \frac{1}{2} \sum_{i+j=k} 4\pi D_{ij} r_{ij} n_i n_j - \sum_i 4\pi D_{ik} r_{ik} n_i n_k \quad (7.42)$$

Această relație este forma discretă a ecuației de fuziune browniană, unde  $n_k$  este concentrația particulelor rezultate prin fuziunea a două particule de raze  $r_i$  și  $r_j$ , respectiv de concentrații  $n_i$  și  $n_j$ . Primul termen exprimă viteza de formare a acestor particule în unitatea de volum, iar al doilea viteza de distrugere prin fuziune cu alte particule de rază  $r_i$ .

Factorul  $\frac{1}{2}$  din primul termen apare pentru a se evita luarea în considerare a termenilor identici când  $i+j=j+i$ .

Smoluchovschi a obținut o soluție aproximativă pentru ecuația de mai sus, pentru cazul unor aerosoli omogeni inițial, pentru care a presupus  $D_{ij}r_{ij} = 4Dr$ , unde  $D$  este

coeficientul de difuzie și  $r$  raza particulelor inițiale. Dacă se introduce  $f_k(\tau) = \frac{n_k}{n_0}$  și

$\tau \equiv 8\pi D r t n_0$ , unde  $n_0$  este concentrația inițială, relația (7.42) devine:

$$\frac{df_k}{d\tau} = \sum_{i+j=k} f_i f_j - 2f_k \sum_i f_i \quad (7.43)$$

și sumând după  $k$ , rezultă:

$$\frac{d}{d\tau} \left( \sum_k f_k \right) = \sum_i \sum_j f_i f_j - 2 \sum_k f_k \sum_i f_i = - \left( \sum_k f_k \right)^2 \quad (7.44)$$

care după integrare conduce la:

$$\sum_k f_k = \frac{1}{1 + \tau} \quad (7.45)$$

Soluția pentru  $f_k$  se obține iterativ. Ecuația pentru  $f_1$  este:

$$\frac{df_1}{d\tau} = -2f_1 \sum_k f_k = -\frac{2f_1}{1+\tau}$$

de unde  $f_1 = (1+\tau)^{-2}$ . Prin iterație, pentru un  $k$  oarecare rezultă:

$$f_k = \frac{\tau^{k-1}}{(\tau+1)^{k+1}} \quad (7.46)$$

soluție ce se verifică experimental.

Timpul după care concentrația totală de particule scade la jumătate se numește timp de înjumătățire, exprimat prin relația:

$$t_{1/2} = \frac{1}{8\pi D r n_0} \quad (7.47)$$

Timpul de înjumătățire scade cu creșterea dimensiunii particulelor, a concentrației și a temperaturii. Folosind  $t_{1/2}$  se poate estima domeniul de dimensiuni ale aerosolului troposferic pentru care fuziunea browniană este importantă. De exemplu, pentru particulele Aitken cu raze apropiate de  $0,01\mu\text{m}$ , cu concentrația tipică  $n_0=10^5\text{cm}^{-3}$ , timpul de înjumătățire la  $t=15^\circ\text{C}$  și presiunea  $p=1000\text{mb}$  este de  $t_{1/2}=2,3 \cdot 10^3\text{s}$ . Valoarea mică a lui  $t_{1/2}$  indică faptul că fuziunea browniană este principalul mecanism de eliminare pentru astfel de particule. Pentru particule de aerosol cu raze în jur de  $1\mu\text{m}$  și concentrația  $n_0=10^3\text{cm}^{-3}$ , timpul de înjumătățire este mai mare de cca. 1000 de ori.

Principala limitare a teoriei Smoluchovski este presupunerea că în starea inițială aerosolul este omogen.

## 7.8. Depuneri umede

Particulele de precipitații sau particulele de nor antrenează, prin diverse mecanisme, o mare parte din poluanții naturali sau antropici din atmosferă și îi transportă la suprafața pământului. Procesele de eliminare a aerosolului din atmosferă în care sunt implicate particulele de nor sau de precipitații se numesc *proces de spălare umedă* sau *proces de depunere umedă*. Procesele de eliminare a aerosolului din atmosferă în care nu sunt implicate particulele de nor sau de precipitații se numesc *proces de spălare uscată* sau *proces de depunere uscată*.

Deoarece cantitatea de apă schimbată între atmosferă și interfața sol-atmosferă, în urma ciclului natural al apei, este foarte mare, procesele de antrenare umedă a poluanților joacă un rol esențial în păstrarea curată a atmosferei. Procesul de depunere umedă la sol a poluanților din atmosferă are la origine două mecanisme: 1) mecanismele de captare a particulelor de aerosol în nori, în timpul de formare a norului și 2) mecanismele de captare a particulelor de aerosol ce au loc sub nori, în câmpul particulelor de precipitații (picături de apă, cristale de gheață sau amestec ale acestora).

1) *Procesele de spălare din nori*. Incluziunea particulelor de aerosoli în particulele de nor și apoi transportarea lor la suprafața solului se face prin mai multe mecanisme: a) constituirea particulelor de aerosol în nucleee de condensare pentru nucleația heterogenă

a vaporilor de apă; b) fuziunea particulelor de aerosol, în principal a particulelor Aitken, cu particulele de nor în urma mișcării browniene; c) fuziunea particulelor de aerosol, în special a particulelor Aitken, datorită existenței în nor a unui gradient al concentrației vaporilor de apă (efectul Facy). Dacă notăm cu  $\epsilon_n$ ,  $\epsilon_b$ ,  $\epsilon_f$  eficiențele acestor procese, atunci eficiența proceselor de spălare în nor va fi:

$$\epsilon = \epsilon_n + \epsilon_b + \epsilon_f \quad (7.43)$$

Estimările numerice arată că:  $\epsilon_n = 0,5$  pentru aerosol continental la concentrații mari,  $\epsilon_n=0,9$  pentru aerosol maritim și troposferic la concentrații relativ mici ( $\sim 300\text{m}^{-3}$ ),  $\epsilon_n=0,8$  pentru aerosol continental la concentrații mici.

Eficiența de colectare a aerosolului în apa din nori prin fuziune browniană poate fi calculată cu ajutorul formulei lui Smoluchovski. Dacă, pentru simplificare, se presupune că particulele de aerosol și respectiv particulele de nor au razele  $r$  și  $r_n$ , concentrațiile  $n$  și  $n_n$  și coeficienții de difuzie  $d$  și  $d_n$ , atunci:

$$\frac{dn}{dt} = -4\pi(d + d_n)(r + r_n)nn_n \quad (7.44)$$

și timpul de înjumătățire devine:

$$t_{1/2} = \frac{1}{8\pi dr_n n_n} \quad (7.45)$$

De exemplu, pentru  $r_n=10\mu\text{m}$ ,  $n_n=200\text{m}^{-3}$  se obține:

$r(\mu\text{m})$	0,01	0,03	0,10
$t_{1/2}(\text{ore})$	0,64	3,8	38

Pentru un nor cu timpul de viață de 1/2 oră și pentru o rază medie a ansamblului de particule  $r=0,03\mu\text{m}$ , rezultă o eficiență de spălare în nor  $\epsilon=0,01$ . Dacă raza medie crește și are valori apropiate de  $0,1\mu\text{m}$  sau mai mari, eficiența de spălare devine neglijabilă.

Datorită efectului Facy moleculele de apă ce difuzează în lungul gradientului de presiune a vaporilor de apă vor exercita o forță de “antrenare” asupra particulelor de aerosol, care se vor mișca cu o viteză, independentă de dimensiunile lor, proporțională cu valoarea gradientului presiunii parțiale a vaporilor de apă. Pentru particulele de aerosol cu raze cuprinse între  $0,03$  și  $0,1\mu\text{m}$  s-a stabilit pe cale experimentală:

$$v\left(\frac{m}{s}\right) = 2 \cdot 10^{-4} \frac{de}{dz}\left(\frac{mb}{cm}\right)$$

Într-un nor în care se formează un număr de particule  $n_n=100\text{cm}^{-3}$ , la o rază  $r_n=10\mu\text{m}$  un număr mai mic decât  $10^{-3}$  din particulele de aerosol neactivate vor fi captate prin fuziune în urma acestui proces. În concluzie, se poate constata că procesul de nucleație heterogenă a vaporilor de apă este cel mai eficient proces de spălare a aerosolului în nor. Celelalte două procese au importanță numai pentru particule cu raze mai mici decât  $0,1\mu\text{m}$ . Combinarea celor trei efecte duce la o dependență a lui  $\epsilon$  de raza particulelor de aerosol. Eficiența maximă de spălare prin condensare se obține pentru  $r \geq 0,2\mu\text{m}$ , iar prin fuziune browniană pentru  $r \leq 0,02\mu\text{m}$ .

2) *Procese de spălare sub nor.* Picăturile de precipitații, în căderea lor, colectează o parte din particulele de aerosol pe care le întâlnesc și le transportă la suprafața solului unde le depun. Există mai multe mecanisme de colectare.

a) Colectarea prin difuzie. Pentru a exprima eficiența de colectare prin difuzie, considerăm că particulele de aerosol, de concentrație  $n_0$ , se află în suspensie în aerul umed saturat ce se mișcă cu viteza  $v$ . Dacă particulele de aerosol participă la o mișcare de difuzie browniană staționară, având un coeficient de difuzie  $D$ , eficiența de colectare a unei picături de precipitație, de formă sferică și rază  $R$ , în cădere cu viteza limită  $U_\infty$ , va fi funcție de numărul lui Reynolds ( $Re = \frac{\rho R U_\infty}{\eta}$ ) și de numărul lui Peclet ( $Pe = \frac{R U_\infty}{D}$ ):

$E_{dif} = \Psi(Re, Pe)$ . O formă semiempirică pentru eficiența de colectare prin difuzie este dată de relația:

$$E_{dif} = 4Pe^{-1} \left( 1 + 0,4 Re^{\frac{1}{6}} Pe^{\frac{1}{3}} \right).$$

Eficiența de colectare  $E_{dif}$  a particulelor de aerosol de către picăturile de ploaie, de dimensiune dată, scade rapid odată cu creșterea dimensiunilor particulelor de aerosol. Colectarea în urma difuziei este eficientă pentru particule de aerosol cu  $r < 0,1 \mu m$ .

b) Colectarea gravitațională. Particulele de precipitații (picături de apă sau cristale de gheață) colectează prin fuziune particulele de aerosol atunci când, în mișcarea de cădere în câmpul gravitațional al pământului, au viteza limită de cădere mai mare decât viteza limită de cădere a particulelor de aerosol. Numărul lui Stokes pentru particulele de

aerosol este  $N_{St} = \frac{m U_\infty}{6\pi a \eta R} = \frac{2\rho_p a^2 U_\infty}{9\eta R}$ , unde  $m$ ,  $\rho_p$ , și  $a$  sunt masa, densitatea, respectiv

raza particulei de aerosol, iar  $U_\infty$  și  $R$  este viteza limită de cădere, respectiv raza particulei de precipitații. Pentru particule de aerosol de dimensiuni date eficiența de colectare gravitațională de către picăturile de ploaie este proporțională cu raportul  $\frac{U_\infty}{R}$ . Pentru

majoritatea particulelor de precipitații de dimensiuni mici, viteza limită de cădere este dată de legea lui Stokes și raportul  $\frac{U_\infty}{R}$  crește linear cu  $R$ . Pentru particulele de dimensiuni relativ mari, având  $R > 40 \mu m$ , viteza limită se abate de la legea lui Stokes, iar raportul  $\frac{U_\infty}{R}$ , funcție de  $R$ , prezintă un maxim. Pentru o curgere staționară, eficiența de colectare

gravitațională, într-o primă aproximație, se consideră proporțională cu numărul lui Stokes, astfel că  $E_{grav} \sim N_{St}$ . În această aproximație rezultă că particulele de aerosol, caracterizate de  $N_{st}=1$ , sunt colectate cu eficiență maximă, iar cele caracterizate de valori mici ale numărului  $N_{st}$  sunt colectate cu eficiență mică sau nu sunt colectate de către particulele de precipitații. Pentru particulele de precipitații, având  $R \approx 75 \mu m$ , trecerea de la o eficiență de colectare mare la o eficiență de colectare mică sau la necolectare are loc brusc, la valori ale razei particulelor de aerosol apropiate de valoarea de  $1 \mu m$ .

c) Termoforeza și difuzioforeza. Termoforeza este numele dat mișcării particulelor de aerosol cauzate de o forță indusă termic, care este generată de încălzirea neuniformă a particulelor de aerosol în cazul existenței unor gradienti termici în aer. Difuzioforeza este

o mișcare a particulelor de aerosol determinată de existența unor gradienti de concentrație a moleculelor de aer. Cele două procese nu sunt cuplate și eficiențele de colectare pe care le determină se adună. Eficiența de colectare scade odată cu creșterea razei particulelor de aerosol și crește odată cu creșterea razei picăturilor de precipitații colectoare.

d) Colectarea turbulentă. Turbulența produce dezordine în curgerea unui fluid și determină un transport eficient de masă. Acest transport turbulent al particulelor de aerosol duce la creșterea probabilității de ciocnire dintre particulele de precipitații și particulele de aerosol. S-a observat că mișcarea turbulentă de intensitate mică sau medie duce la amplificarea procesului de colectare a particulelor de aerosol de către particulele de precipitații.

Eficiența proceselor de spălare în nor sau sub nor a aerului este caracterizată cu ajutorul unui parametru denumit *eficiența de spălare umedă* care exprimă o legătură între concentrația  $c_{apa}$  a aerosolului în apa rezultată din precipitații și concentrația  $c_{nor}$  a aerosolului din nor. Dacă notăm prin  $q$  conținutul de apă lichidă din nor, eficiența de spălare va fi:

$$E = \frac{q c_{apa}}{\rho c_{nor}}$$

Estimările teoretice și măsurătorile de laborator indică o eficiență mare a proceselor de spălare în nor pentru particule insolubile, având raza  $r \leq 0,01 \mu\text{m}$  și pentru particule solubile, având raza  $r > 0,02 \mu\text{m}$ . Particulele insolubile cu raze  $r > 0,01 \mu\text{m}$  pot fuziona cu un nucleu de condensare activat și apoi sunt încorporate în particulele lichide de nor, în procesul de nucleație heterogenă, astfel că procesul de spălare în nor devine eficient și pentru aceste particule. Procesele de spălare în nor au efect predominant în curățirea aerului prin depunere umedă.

## 7.9. Proprietăți optice ale aerosolilor

În condiții normale, proprietățile optice ale aerosolilor sunt determinate aproape exclusiv de particulele mari. Trăsătura neobișnuită a acestor particule este panta dreaptă și abruptă a distribuției dimensionale și deci, se poate aștepta ca studiul proprietăților optice ale aerosolilor în atmosferă să conducă la determinarea funcției de distribuție dimensionale a acestora, cu atât mai mult cu cât aceasta este greu de determinat din măsurători directe pentru particule de raze cuprinse între  $0,08$  și  $0,5 \mu\text{m}$ .

Diferitele fenomene optice determinate de prezența particulelor de aerosol, ca atenuarea, împrăștierea radiației solare și corelarea acestora, nu au fost pe deplin explicate până la introducerea distribuției dimensionale continue a aerosolilor, de forma funcției putere.

În continuare ne vom referi numai la fenomenele care pot furniza informații despre aerosolul atmosferic. Acestea sunt atenuarea și împrăștierea totală a radiației de către particulele de aerosol și dependența lor de lungimea de undă a radiației, precum și dependența împrăștierii de unghiul dintre radiația incidentă și cea împrăștiată. Aceste fenomene depind puternic de forma distribuției dimensionale a particulelor de aerosol, după cum se va vedea în continuare.

Fie o particulă sferică de rază  $r$  și indice de refracție  $m$ . Frația  $K$  a radiației paralele împrăștiată de această particulă este (conform teoriei Mie a împrăștierii):

$$K(\lambda, X, m, \varphi) = \frac{\lambda^2}{4\pi^2} i(X, m, \varphi) \sin \varphi d\varphi d\theta \quad (7.46)$$

unde  $\lambda$  este lungimea de undă a radiației vizibile ( $0,3\mu\text{m} < \lambda < 0,7\mu\text{m}$ );  $X = \frac{2\pi r}{\lambda}$  este factorul de formă;  $\varphi$  este unghiul dintre direcția de propagare a luminii incidente și a celei reflectate;  $\theta$  este unghiul format de radiația incidentă cu normala la suprafață și  $i(X, m, \varphi)$  este funcția de împrăștiere. Astfel, fracția totală de lumină monocromatică împrăștiată în toate direcțiile este:

$$K_T(\lambda, X, m) = \frac{\lambda^2}{4\pi^2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} i(\varphi, X, m) \sin \varphi d\varphi d\theta = \pi r^2 \kappa(X, m) \quad (7.47)$$

unde  $\kappa(X, m) = \frac{2}{X^2} \int_0^\pi i(\varphi, X, m) \sin \varphi d\varphi$  este secțiunea transversală de împrăștiere ce reprezintă fracția de radiație împrăștiată din radiația totală incidentă pe unitatea de suprafață. Ea depinde numai de  $X$  și  $m$  și are valori numerice calculate pentru un domeniu larg de valori ale acestor parametri. Valoarea indicelui de refracție nu este cunoscută cu exactitate, dar s-a observat că depinde de umiditatea relativă a aerului. La umidități relative mari, se utilizează valoarea indicelui de refracție al apei  $m=1,33$ .

Pentru o distribuție dimensională de aerosoli de forma  $\frac{dN}{dr} = C r^{-(1+\beta)}$  cu  $r \in [r_1, r_2]$  și  $\beta > 2$ , fracția totală de lumină monocromatică împrăștiată de toate particulele dintr-un  $\text{cm}^3$  de aer, este:

$$\sigma_A = \int_{r_1}^{r_2} K_T \frac{dN}{dr} dr = C \lambda^{2-\beta} I \left( \text{cm}^{-1} \right) \quad (7.48)$$

unde s-a utilizat relația (7.47) și formula de definiție a factorului de formă  $X$ , iar  $I = \int_{X_1}^{X_2} \kappa X^{1-\beta} dX$ . Pentru  $r_1=0,08\mu\text{m}$  se obține  $X_1 \ll 1$ , iar pentru  $r_2=0,5\mu\text{m}$  se poate considera  $X_2 \rightarrow \infty$ , deoarece particulele mari contribuie foarte puțin la împrăștieria luminii. Deci, limitele de integrare se pot prelungi de la 0 la  $\infty$ , astfel că  $I$  devine independentă de raza particulelor și de lungimea de undă, iar  $\sigma \sim \lambda^{2-\beta}$ .

Comparând această expresie cu formula empirică a lui Angström a dependenței împrăștierii totale a luminii de lungimea de undă  $\sigma \sim \lambda^{-\alpha}$ , se obține:  $\alpha = \beta - 2$ .

Experimental s-a găsit valoarea medie a lui  $\alpha = 1,3$ , deci corespunzător  $\beta = 3,3$ , valoare apropiată de  $\beta = 3$  determinată prin alte metode. Deci, funcția putere a distribuției dimensionale a aerosolilor dă o explicație simplă și satisfăcătoare a legii lui Angström, lege de importanță deosebită în studiul vizibilității în atmosferă. Aceasta indică faptul că vizibilitatea este mai mare în lumină roșie decât în lumină albastră, chiar și în condiții de

ceață sau atmosferă foarte poluată. Calcule exacte arată faptul că și pentru cazul extrem al limitei superioare a dimensiunilor particulelor gigant,  $\alpha=0,2$  și deci, diferit de zero. Astfel că, împrăștierea pe particulele gigant nu este neutră. Cum  $\sigma_A$  este foarte sensibil la variațiile lui  $\alpha$ , determinarea lui experimentală conduce la obținerea funcției de distribuție experimentală cu o precizie destul de mare. Măsurătorile optice sunt cel mai sensibile la variațiile concentrației de aerosoli în domeniul de dimensiuni  $r=0,08\mu\text{m}$  și  $r=0,6\mu\text{m}$ . Astfel, pentru particule cu raza  $r=0,3\mu\text{m}$ ,  $\alpha$  variază între 1,5 și 0,5, la o dublare a concentrației de aerosoli.

Valorile lui  $\alpha$  se pot determina numai din măsurători ale dependenței împrăștierii totale de lungimea de undă. Împrăștierea totală a radiației solare sau extincția acesteia în atmosferă se poate determina fie direct, prin utilizarea luminii soarelui sau a unei surse artificiale, fie indirect prin măsurarea distanței de vizibilitate  $V$  în aer. Legătura dintre  $V$  și împrăștierea totală  $\sigma$  este dată de relația lui Koschmieder:

$$B_z = B_n(1 - e^{-\sigma z})$$

unde  $B_z$  este strălucirea unei ținte negre aflate la distanța  $z$ , iar  $B_n$  este strălucirea la orizont. Limita contrastului detectabil de către ochi este în jur de 0,02, adică:

$$\frac{B_n - B_z}{B_n} \cong 0,02, \text{ de unde rezultă distanța maximă la care se poate observa o ținta neagră,}$$

adică distanța de vizibilitate în aer, de forma:

$$V = \frac{3,9}{\sigma} \quad (V \text{ in km dacă } \sigma \text{ este in km}^{-1}).$$

Măsurătorile efectuate au condus la următoarele rezultate pentru aerosolul continental.  $\alpha$  variază între 1,5 și 0,5, cu tendința de a avea valori mai mici pentru vizibilități mai mari de 40km și mai mici de 1km. Faptul că  $\alpha$  nu variază puternic pentru un domeniu larg de concentrații de aerosol ce determină vizibilități între 1 și 40km confirmă faptul că funcția putere de distribuție dimensională cu  $\beta=2,5\div 3,5$  este corectă pentru o varietate mare de condiții meteorologice. Nu s-a observat nici o corelație între valoarea acestui parametru și condițiile meteorologice, cu excepția unui salt în valoarea lui  $\alpha$  la saturație, explicat prin condensarea apei pe particulele de aerosol și deci creșterea rapidă a dimensiunilor acestora. Pentru atmosfera curată datele nu sunt concludente și deci, funcția putere de distribuție dimensională cu  $\beta=3$  este corectă pentru aerosolul în concentrații relativ mari, adică în apropierea solului și în zonele poluate.

## VIII. PROGNOZA POLUĂRII AERULUI

Studiile privind posibilitățile de prognoză a poluării aerului se bazează pe rezultatele teoretice și experimentale obținute din analiza legităților de răspândire a impurităților în atmosferă provenite de la diferite surse. Aceste studii s-au dezvoltat în două direcții. Una constă în studiul teoretic al difuziei poluanților în atmosferă, având ca bază rezolvarea ecuațiilor difuziei turbulente. A doua direcție se bazează, în principal, pe o analiză empirico-statistică a procesului de propagare a poluanților în atmosferă.

### 8.1. Ecuațiile de prognoză

Sub formă generală, problema prognozei poluării aerului, poate fi definită, din punct de vedere matematic, ca obținerea soluțiilor ecuației de difuzie turbulentă pentru condiții inițiale și la limită date.

Ecuația de difuzie turbulentă se prezintă ca o ecuație cu valori medii dedusă din ecuația de continuitate pentru un component minor al atmosferei.

Fie  $q$  concentrația unui traser în atmosferă. Variația temporală locală a mărimii  $\rho q$  într-un volum oarecare  $V$  mărginit de suprafața  $\Sigma$  (fig.8.1) este egală cu divergența fluxului de particule prin suprafață plus termenii de sursă și de disipare din volumul  $V$ , adică:

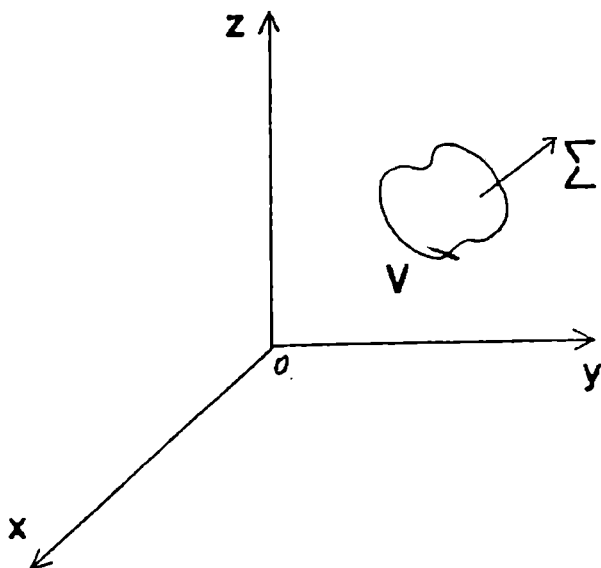


Fig. 8.1.

$$\frac{\partial \rho q}{\partial t} = -\text{div} \bar{J} + S + P \quad (8.1)$$

unde:  $\bar{J} = \rho q \bar{v} + \rho q \bar{v}_s$  cu  $\bar{v} = (u, v, w)$  și  $\bar{v}_s$  viteza de cădere limită în câmpul gravitațional. Se va considera un sistem de coordonate cu axa Oz orientată vertical în sus, iar Ox și Oy perpendiculare și orientate arbitrar în planul suprafeței terestre.

Pentru curgerea turbulentă, viteza fluidului și concentrația traserului se scriu ca sumă dintre viteza  $\bar{v}$  și



concentrația  $\bar{q}$  și fluctuațiile turbulente  $\bar{v}'$  și respectiv,  $q'$ . Ecuația de difuzie turbulentă se obține prin medierea ecuației (8.1), considerând aerul incompresibil ( $\text{div}\bar{v} = 0$ ):

$$\frac{\partial \rho \bar{q}}{\partial t} + \bar{v} \text{grad} \rho \bar{q} = -\text{div}(\bar{q}'\bar{v}') - \text{div}(\rho \bar{q} \bar{v}_s) + S + P \quad (8.2)$$

Fluxul turbulent  $\bar{q}'\bar{v}'$  se poate scrie cu ajutorul coeficienților de difuzie turbulentă astfel:

$$\overline{q'u'} = -k_x \frac{\partial \bar{q}}{\partial x}, \quad \overline{q'v'} = -k_y \frac{\partial \bar{q}}{\partial y}, \quad \overline{q'w'} = -k_z \frac{\partial \bar{q}}{\partial z} \quad (8.3)$$

Cu ajutorul acestor relații și ținând cont că viteza de cădere are numai componentă verticală orientată în jos, se obține:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \rho \bar{q}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \rho \bar{q}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \rho \bar{q}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \rho \bar{q}}{\partial z} = \\ & = \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho k_x \frac{\partial \bar{q}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \rho k_y \frac{\partial \bar{q}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \rho k_z \frac{\partial \bar{q}}{\partial z} \right) + v_s \frac{\partial \rho \bar{q}}{\partial z} + \rho \bar{q} \frac{\partial v_s}{\partial z} + S + P \end{aligned} \quad (8.4)$$

Ecuația (8.4) este ecuația de difuzie a oricărui component minor în atmosferă în forma sa generală. Prin alegerea unui sistem de axe de coordonate cu axa Ox orientată de-a lungul vitezei medii ( $\bar{v} = 0$ ) ecuația se poate simplifica. În absența perturbațiilor ciclonice puternice, probabilitatea de a avea componentă verticală a vântului e neglijabilă, cu excepția componentei orografice. Cu aceste simplificări, ecuația (8.4) devine:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \rho \bar{q}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \rho \bar{q}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho k_x \frac{\partial \bar{q}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \rho k_y \frac{\partial \bar{q}}{\partial y} \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left( \rho k_z \frac{\partial \bar{q}}{\partial z} \right) + v_s \frac{\partial \rho \bar{q}}{\partial z} + \rho \bar{q} \frac{\partial v_s}{\partial z} + S + P \end{aligned} \quad (8.5)$$

unde membrul stâng reprezintă variația temporală locală a concentrației de aerosoli plus termenii de advecție, iar cantitățile din paranteze, din membrul drept al ecuației, reprezintă fluxurile determinate de difuzia turbulentă.

Această ecuație dă o bună reprezentare a efectelor medii de amestec turbulent în condiții de validitate ce trebuie precizate. În atmosferă, distribuția poluanților sau a componentelor minori depinde, în principal, de intensitatea turbulenței, de sursă, de diferitele procese de eliminare (spălare, sedimentare, reacții chimice, dezintegrări radioactive) și de advecția medie.

Condițiile la limită impuse acestei ecuații sunt, în forma cea mai generală:

$$\begin{aligned} & \left( \rho v_s \bar{q} + \rho k_z \frac{\partial \bar{q}}{\partial z} \right)_{z=0} = \\ & = -S_0 \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - H) (1 + \varepsilon \cos \omega t) + \rho v_d \bar{q} \Big|_{z=0} \end{aligned} \quad (8.6)$$

unde  $v_d$  este viteza de depunere pe sol,  $S_0$  este valoarea sursei la sol și  $1 + \varepsilon \cos \omega t$  este un factor ce ține cont de variația temporală a sursei la nivelul solului, iar  $\delta$  funcția lui Dirac. Membrul stâng al ecuației de mai sus reprezintă fluxul de particule la sol compus din fluxul de sedimentare plus cel de difuzie turbulentă. Viteza de depunere la sol depinde de viteza de sedimentare a particulelor și de caracteristicile fizice ale acestora și ale solului.

La limita superioară, condiția la limită se ia de forma:

$$\bar{q}|_{z \rightarrow \infty} = 0 \quad (8.4)$$

sau

$$\left( v_s \bar{q} + k_z \frac{\partial \bar{q}}{\partial z} \right) \Big|_{z \rightarrow \infty} = 0$$

Prima condiție se poate folosi pentru cazul în care sursa este distribuită la sol. Ce-a de a doua condiție, flux de particule nul, este echivalentă cu existența unei inversiuni termice ce joacă rolul unei bariere de particule.

Dacă sursa de emisie prezintă discontinuități sau integrarea ecuației se face pe un domeniu mărginit, atunci condițiile la limită de mai sus pe direcție verticală trebuie completate cu condițiile la limita în direcție orizontală, și anume:

$$\bar{q} \rightarrow 0, \text{ cand } y \rightarrow \pm\infty$$

$$\bar{q} = 0, \text{ cand } x < 0$$

$$\bar{q} \rightarrow 0, \text{ cand } x \rightarrow \infty$$

Cea de-a doua condiție este valabilă pentru o sursă punctiformă plasată în originea sistemului de axe, cu axa Ox orientată în direcția vitezei vântului. Rezolvarea ecuației dependente de timp necesită cunoașterea condițiilor inițiale.

Pierderile de particule de aerosol sunt determinate de spălarea de către precipitații, de dezintegrarea radioactivă și de reacțiile chimice de conversie a aerosolului. În general, această mărime se parametrizează astfel:

$$P = -\alpha \bar{q} \quad (8.5)$$

unde  $\alpha$  este un parametru, considerat în general constant, ce depinde de mecanismele de eliminare caracteristice fiecărui tip de aerosol.

În funcție de situația particulară pentru care se aplică această ecuație, ea mai poate fi simplificată.

## 8.2. Particularitățile turbulenței în stratul limită

Prognoza poluării aerului presupune prevederea unei anumite concentrații a unui poluant într-un strat de aer în care se desfășoară, în principal, activitatea omului. De aici rezultă un interes deosebit pentru un strat de aer, având grosimea cuprinsă între 50 și 100m, numit strat limită de suprafață (SLS). Acest strat se caracterizează printr-o variație puternică a vitezei aerului, a temperaturii și a intensității turbulenței cu altitudinea. Pe lângă SLS amintit de grosime  $h$ , se remarcă stratul limită având grosimea  $H_0 \approx 1\text{km}$ , în care se observă clar influența suprafeței solului asupra distribuției parametrilor meteorologici.

Din studiile experimentale rezultă că în SLS, până la altitudinea  $z=h$ , coeficientul de difuzie turbulentă este proporțional cu altitudinea  $\left( k_z \equiv k_1 \frac{z}{z_1} \right)$ . În acest strat se consideră constante tensiunea de frecare  $\tau = \rho k_z \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}$  și fluxul de căldură

$Q_0 = -\rho c_p k_z \frac{\partial \bar{T}}{\partial z}$ , de unde rezultă, folosind dependența lui  $k_z$  de  $z$ , că  $\bar{u}$  și  $\bar{T}$  sunt funcții logaritmice de altitudinea  $z$ .

În general, pentru prognoza concentrației de poluanți, se presupune că există următoarele dependențe:

$$\left. \begin{aligned} \bar{u} &= \bar{u}_1 \frac{\ln \frac{z}{z_0}}{\ln \frac{z_1}{z_0}} \\ k_z &= \nu + k_1 \frac{z}{z_1} \quad \text{pentru } z \leq h \\ k_z &= \nu + k_1 \frac{h}{z_1} \quad \text{pentru } z > h \end{aligned} \right\} \quad (8.7)$$

unde  $z_0$  este lungimea de rugozitate a solului, iar  $z_1$  este o altitudine de referință. Din sistemul de ecuații (8.7) și presupunând un profil logaritm pentru viteza  $\bar{u}$  a vântului și pentru temperatura aerului, se obține pentru  $k_1$  expresia:

$$k_1 = \frac{k^2 \bar{u}_1}{\ln \frac{z_1}{z_0}} L J \left( \frac{z_1}{L} \right) \quad (8.8)$$

unde  $L$  este lungimea Monin-Obukhov,  $k$  este constanta von Karman, iar  $J \left( \frac{z_1}{L} \right)$  este o

funcție ce se determină experimental.

Condițiile meteorologice influențează puternic propagarea poluanților în atmosferă. Un mod de apreciere a condițiilor meteorologice este analiza formei penei de fum produs de o torță punctiformă. Forma penei de fum permite aprecierea stabilității termice a stratului de suprafață. Cazurile tipice sunt indicate în figura 8.2, pentru diferite stratificări de temperatură:

1. pană de formă ondulatorie, neuniformă pentru o stratificație instabilă de temperatură, convecție puternică;

2. pană de fum de formă conică în cazul unei convecții slabe sau a unei izotermii;

3. pană de fum subțire, liniară pentru un strat stabil în care există o inversie de temperatură;

4. pană cu bază aproape orizontală și cu partea de sus ridicată, dacă sursa se află la nivelul superior al inveriei termice din strat;

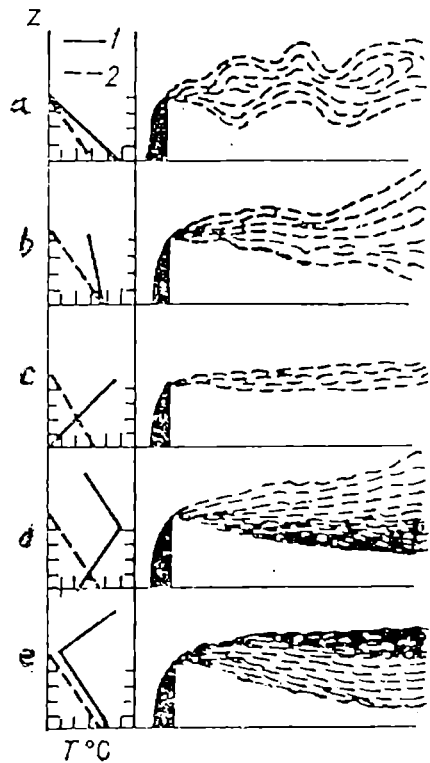


Fig. 8.2. 1. Profilul vertical al temperaturii; 2. Adiabata uscată.

5. până cu partea superioară aproape orizontală aflată sub stratul de inversie termică ce se propagă în stratul de suprafață, fenomen denumit fumigație.

Când se apreciază forma penei de fum trebuie să se țină seama și de viteza vântului.

### 8.3. Integrarea ecuației de prognoză

Problema alegerii valorilor coeficienților de difuzie turbulentă și rezolvarea ecuației de difuzie în diferite condiții la limită a reprezentat subiectul a numeroase studii. Cel mai simplu caz este cel al difuziei Fick care presupune  $k_x=k_y=k_z=k=const$ , adică o turbulență izotropă și staționară. Soluția ecuației de difuzie pentru suspensii ușoare ( $v_s=0$ ) și o sursă punctiformă cu emisie continuă, situată la nivelul solului cu condițiile la limită:

$$\begin{aligned} \bar{q} &\rightarrow 0, \text{ cand } x, y, z \rightarrow \infty \\ k_z \frac{\partial \bar{q}}{\partial z} &\rightarrow 0, \text{ cand } z \rightarrow 0, x > 0 \\ \bar{q} &\rightarrow \infty, \text{ cand } x, y, z \rightarrow 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \int \int \bar{u} \bar{q}(x, y, z) dx dy dz &= S \end{aligned}$$

unde S este cantitatea totală de aerosol emisă în unitatea de timp, este:

$$\bar{q}(x, y, z) = \frac{S}{4\pi x (k_x k_y)^{\frac{1}{2}}} \exp \left[ -\frac{\bar{u}}{4x} \left( \frac{y^2}{k_y} + \frac{z^2}{k_z} \right) \right]$$

Condițiile la limită impuse ecuației de difuzie presupun că aerosolul nici nu se pierde (depune la sol) nici nu se crează. Se observă o scădere a concentrației cu distanța x, iar pentru un x dat distribuția concentrației este una Gaussiană în direcțiile y și z.

Presupunerea unei difuzii de tip Fick nu se aplică în apropierea solului unde coeficienții de difuzie turbulentă variază cu înălțimea. Utilizarea noțiunii de coeficient de difuzie permite determinarea analitică a concentrației unui aerosol dacă se cunoaște dependența de înălțime a lui k și a vitezei. Astfel de soluții analitice s-au obținut pentru cazul unor surse continue și liniare.

Cu ajutorul soluțiilor analitice pentru o sursă liniară, cu k dependent de z, se poate determina soluția analitică pentru o sursă punctiformă. Pentru a simplifica obținerea soluției se presupune că:

$$k_y = k_0 \bar{u} \tag{8.9}$$

Soluția ecuației de prognoză (8.4) pentru o sursă punctiformă  $\bar{q}(x, y, z)$  se exprimă cu ajutorul soluției pentru o sursă liniară  $\bar{q}'(x, z)$  cu ajutorul relației:

$$\bar{q}(x, y, z) = \frac{\bar{q}'(x, z)}{\sqrt{2\pi k_0 x}} \exp \left( -\frac{y^2}{4k_0 x} \right) \tag{8.10}$$

Soluția  $\bar{q}(x,z)$  satisface ecuația de prognoză:

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{q}'}{\partial x} - \bar{w} \frac{\partial \bar{q}'}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left( k_z \frac{\partial \bar{q}'}{\partial z} \right) - \alpha \bar{q}' \quad (8.11)$$

cu condițiile inițiale:

$$\bar{u} \bar{q}' = S \delta(z - H) \quad \text{pentru } x=0 \quad (8.12)$$

Dacă  $\bar{u}$  și  $k_z$  se exprimă sub forma unor funcții putere de  $z$ , se poate obține soluția analitică a ecuației (8.11).

a) *Cazul suspensiilor ușoare.* Dacă masa totală a suspensiilor rămâne constantă și ele sunt ușoare, atunci:  $\alpha = v_s = 0$ . Considerând:

$$\bar{u} = \bar{u}_1 z^n \quad \text{și} \quad k_z = k_1 z \quad (8.13)$$

și ținând seama de (8.10), concentrația de suspensii la sol, când  $z=0$ , se obține de forma:

$$\bar{q}(x,y,0) = \frac{S}{2(1+n)k_1 \sqrt{\pi k_0 x^3}} \exp \left[ -\frac{\bar{u}_1 H^{(1+n)}}{(1+n)^2 k_1 x} - \frac{y^2}{4k_0 x} \right] \quad (8.14)$$

O particularitate a distribuției concentrației particulelor de aerosol ușor  $\bar{q}$  în lungul axei Ox (când  $y=0$ ) o constituie faptul că ea prezintă o valoare maximă  $q_m$  la o distanță  $x_m$  de sursă. Mărimile  $q_m$  și  $x_m$  se obțin din condițiile:  $\frac{\partial \bar{q}}{\partial x} = \frac{\partial \bar{q}}{\partial y} = 0$ . Din (8.14) rezultă:

$$q_m = \frac{0,116(1+n)^2 S}{\frac{1,5}{\bar{u}_1 H^{1+n}}} \sqrt{\frac{k_1}{k_0 \bar{u}_1}} \quad (8.15)$$

$$x_m = \frac{2}{3} \frac{\bar{u}_1 H^{1+n}}{k_1 (1+n)^2} \quad (8.16)$$

$q_m$  depinde de  $S$ ,  $H$ ,  $k_1$ ,  $\bar{u}_1$  și de  $k_0$ , iar  $x_m$  de  $\frac{k_1}{\bar{u}_1}$  și de  $H$ .

În cazul unei surse liniare de lungime infinită, din (8.14) și (8.10) rezultă:

$$q'_m = \frac{(1+n)S}{e \bar{u}_1 H^{1+n}} \quad (8.17)$$

$$x'_m = \frac{\bar{u}_1 H^{1+n}}{k_1 (1+n)^2} \quad (8.18)$$

Comparând (8.18) cu (8.16) rezultă că distanța  $x_m$  în cazul unei surse punctiforme este egală cu  $2/3$  din  $x'_m$  pentru o sursă liniară.

Variația concentrației de particule de aerosol în lungul axei Ox depinde puternic de altitudinea  $z$  la care se determină. La suprafața solului se observă un maxim al concentrației  $q_m$  la distanța  $x_m$  de sursă. Odată cu creșterea altitudinii maximul concentrației se deplasează spre sursă. La nivelul la care are loc deversarea poluantului în

aer  $z=H$ , concentrația scade monoton cu creșterea distanței  $x$ . La altitudini mai mari se constată din nou un maxim al concentrației la o distanță oarecare.

În felul acesta, dacă se cunosc: valoarea probabilă a vitezei vântului, condițiile de stabilitate verticală a aerului și puterea de emisie a sursei, atunci se poate da o prognoză a distribuției concentrației de poluanți.

În cazul general, când  $\bar{u}$  și  $k_z$  se consideră de forma (8.7), soluția ecuației de transport (8.11) se obține prin integrare numerică. În acest caz nu este necesar ca funcția  $\bar{q}$  să fie determinată pentru toate valorile posibile ale argumentelor dacă se folosesc unele relații stabilite prin teoria similitudinii. Astfel, pentru suspensiile ușoare rezultă că:

$$\bar{q}' = \frac{S}{\bar{u}_1} \Phi_1 \left( \frac{k_1 x}{\bar{u}_1}, H, z \right) \quad (8.19)$$

Pentru o sursă de poluare punctiformă, aflată la altitudinea  $H$ , dependența concentrației de distanța față de sursă se exprimă:

$$\bar{q} = \frac{S}{\bar{u}_1} \sqrt{\frac{k_1}{k_0 \bar{u}_0}} \Phi_2 \left( \frac{k_1 x}{\bar{u}_1}, H, z \right) \quad (8.20)$$

unde  $\Phi_1$  și  $\Phi_2$  sunt funcții universale stabilite empiric.

Reprezentarea grafică a concentrației la sol, dată de expresia (8.20), este prezentată în fig. 8.3, pentru  $\bar{u}_1 = 4 \frac{m}{s}$ ,  $k_1 = 0,2 \frac{m^2}{s}$ .

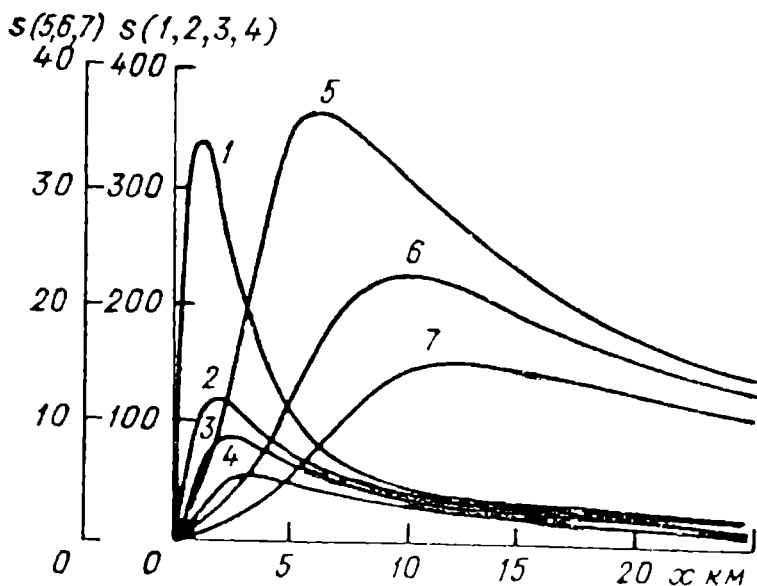


Fig. 8.3.

Din expresia distribuției concentrației de particule ca funcție de  $x$  și  $y$ , pentru  $z=0$ , dată de (8.14), rezultă că valoarea maximă a concentrației se atinge pentru  $y=0$ , adică în lungul axei  $Ox$ . În direcție perpendiculară pe axa  $Ox$ , adică în lungul axei  $Oy$ , concentrația

Se observă o asimetrie în forma curbelor de transport față de  $x_m$ , corespunzător lui  $q_m$ . Creșterea concentrației cu distanța este mult mai mare pentru  $x < x_m$  decât scăderea concentrației pentru  $x > x_m$ . Pentru  $H$  mic este caracteristică o creștere rapidă a lui  $\bar{q}$  până la  $q_m$  pe domeniul  $x < x_m$  și o scădere, relativ puternică a lui  $\bar{q}$ , pentru valori mari ale lui  $x$ . Odată cu creșterea altitudinii sursei-  $H$ , scade valoarea concentrației maxime și crește asimetria curbei de distribuție.

scade simetric după o lege exponențială, iar odată cu creșterea lui  $x$  această scădere se diminuează.

Cea mai mare parte a particulelor de poluant, emise în atmosferă, este concentrată într-o zonă relativ îngustă de forma unei pene de poluant având drept axă dreapta  $y=0$ .

Din calcule rezultă:

$$\left. \begin{aligned} q_m &= c_1 \frac{S}{\bar{u}_1} \sqrt{\frac{k_1}{\bar{u}_1 k_0}} \frac{1}{H^{\beta_1}} \\ x_m &= c_2 \frac{\bar{u}_1}{k_1} H^{1+\beta_2} \end{aligned} \right\} \quad (8.21)$$

unde  $c$  și  $\beta$  sunt constante. Pentru a determina concentrația la sol pentru alte valori ale lui  $x$ , diferite de  $x_m$ , se pot folosi relații de forma:

$$\frac{\bar{q}}{q_m} = f\left(\frac{x}{x_m}\right) = \left(\frac{x_m}{x}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left[-\frac{3}{2}\left(1 - \frac{x_m}{x}\right)\right] \quad (8.22)$$

*b) Cazul suspensiilor grele.* Particularitățile de propagare a suspensiilor grele sunt determinate de valoarea vitezei de sedimentare care, la rândul său, depinde de densitatea și de dimensiunea particulelor.

Proгноza câmpului de concentrație a suspensiilor grele, în stratul de aer adiacent, provenite de la surse de înălțimi relativ reduse, se poate face utilizând soluțiile analitice ale ecuației de prognoză în ipoteza că viteza vântului pe verticală se modifică după o lege exponențială, iar coeficientul de difuzie turbulentă crește linear cu altitudinea.

Concentrația la sol a suspensiilor grele provenite de la o sursă punctiformă aflată la înălțimea  $H$  se exprimă prin relația:

$$\bar{q} = \frac{MH^{\omega(1+n)} u_1^{\omega}}{2(1+n)^{1+2\omega} \Gamma(1+\omega)(k_1 x)^{1+\omega} \sqrt{\pi k_0 x}} e^{-\frac{u_1 H^{1+n}}{(1+n)^2 k_1 x} - \frac{y^2}{4k_0 x}}, \quad (8.23)$$

unde  $\omega = \frac{v_s}{k_1(1+n)}$ .

Distribuția în lungul axei  $Oy$  este aceeași ca și în cazul suspensiilor ușoare.

În distribuția la sol a concentrației pe direcția vântului (în lungul axei  $Ox$ ) apare un maxim  $q_m$ , la distanța  $x_m$  de sursă. Din (8.23), rezultă:

$$\begin{aligned} q_m &= \frac{0,063(1+n)^2 M}{u_1 H^{1,5(1+n)}} \sqrt{\frac{k_1}{\omega_1 k_0}} \frac{(1,5+\omega)^{1,5+\omega}}{\Gamma(1+\omega) e^{\omega}} \\ x_m &= \frac{u_1 H^{1+n}}{(1+n)^2 (1,5+\omega) k_1} \end{aligned} \quad (8.24)$$

Pentru suspensiile grele, ca și pentru cele ușoare, valoarea lui  $x_m$  nu depinde de  $k_0$ . Odată cu creșterea înălțimii  $H$  a sursei de poluant, valoarea lui  $q_m$  scade, iar valoarea lui  $x_m$  crește. Valoarea concentrației maxime  $q_m$  a suspensiilor grele este mai mare decât în cazul suspensiilor ușoare, iar valoarea lui  $x_m$  este mai mică. Diferența dintre valorile lui  $q_m$  și  $x_m$  corespunzătoare suspensiilor ușoare, respectiv grele crește odată cu creșterea vitezei de sedimentare  $v_s$  a suspensiilor grele.

Din analiza dependenței lui  $\bar{q}$  de  $v_s$  rezultă câteva particularități ale procesului de dispersie a suspensiilor grele. Se constată că dependența concentrației suspensiilor grele de viteza de cădere este diferită pentru distanțe  $x$  mici și respectiv distanțe  $x$  mari. Pentru valori mici ale lui  $x$ , concentrația  $\bar{q}$  crește odată cu creșterea lui  $v_s$ , iar pentru valori relativ mari ale lui  $x$ , concentrația scade când  $v_s$  crește, scăderea fiind mai mare cu cât  $x$  este mai mare. Pentru valori intermediare ale lui  $x$  se obține un maxim al concentrației  $\bar{q}$ , pentru o valoare a vitezei de sedimentare  $v_s = v_{sm}$ . Dacă înălțimea  $H$  a sursei crește, aceste particularități ale concentrației se păstrează. Distanța la care dependența concentrației  $\bar{q}$  de viteza  $v_s$  are valoare maximă crește, iar valoarea  $v_{sm}$  corespunzătoare maximului crește și ea.

Din considerente teoretice rezultă că între concentrațiile la sol ale suspensiilor grele  $\bar{q}_v$  și respectiv ușoare  $\bar{q}$  și între concentrațiile maxime ale acestor suspensii la distanța  $x$  de sursă, situată la înălțimea  $H$ , există relațiile:

$$\bar{q}_v = \bar{q} X \left( \frac{v_s}{k_1}, \frac{k_1 x}{u_1}, H \right), \quad q_{vm} = q_m X_m \left( \frac{v_s}{k_1}, H \right) \quad (8.25)$$

Valorile funcțiilor  $X$  și  $X_m$  se obțin pe cale empirică. Diferența între concentrațiile suspensiilor ușoare și respectiv grele este condiționată de parametrul adimensional  $\frac{v_s}{k_1}$ .

Pentru o valoare dată a vitezei limită  $v_s$ , influența procesului de sedimentare asupra concentrației este diferit și depinde de intensitatea turbulenței aerului. În cazul unei turbulențe intense, cum este cazul unei convecții puternice, influența vitezei de sedimentare asupra concentrației se face simțită numai la valori mari ale lui  $x$ . În acest caz, pentru valori mici ale lui  $v_s$  (mai mici de  $3 \text{ cm s}^{-1}$ ) funcția  $X=1$ . Din calcule numerice și din soluțiile analitice rezultă că valoarea concentrației maxime este mai mare și distanța maximului față de sursă este mai mică pentru suspensiile grele decât pentru cele ușoare.



## ANEXA I

Unitatea de măsură  $[A]$  a unei mărimi fizice  $A$  este o mărime fizică de aceeași natură cu mărimea  $A$ , aleasă în mod convențional drept unitate de măsură pentru  $A$ .

Sistemul de unități de măsură este ansamblul tuturor unităților de măsură folosite la un moment dat în fizică. El este compus din unități fundamentale, ce se definesc convențional, și unități derivate, ce se exprimă în funcție de unitățile fundamentale. În S.I., unitățile fundamentale sunt  $m, kg, s, K, A, Cd (L, M, T, \theta)$ .

Formula dimensională sau simplu dimensiunea unei mărimi fizice  $B$  se numește relația ce stabilește o dependență între unitatea de măsură  $[B]$  a acestei mărimi și unitățile fundamentale  $[A_1], [A_2], \dots, [A_k]$  ale sistemului de unități folosit. Formulele dimensionale au expresia generală:

$$[B] = [A_1]^{n_1} [A_2]^{n_2} \dots [A_k]^{n_k}$$

unde  $k$  este numărul unităților fundamentale ale sistemului, iar  $n_1, n_2, \dots, n_k$  sunt numere raționale. Exemplu:

$$[v]_{SI} = \frac{[s]}{[t]} = LT^{-1}$$

•

### Axiomele teoriei analizei dimensionale

a) Valoarea numerică "a" a unei mărimi fizice  $A$  se exprimă prin raportul:

$$a = \frac{A}{[A]} \Rightarrow A = a[A]$$

unde  $A$  este valoarea măsurată, egală cu produsul dintre valoarea numerică și unitatea de măsură.

b) Valoarea numerică depinde de unitatea de măsură folosită: dacă unitatea de măsură crește de  $q$  ori, valoarea numerică scade de  $q$  ori.

c) Descrierea matematică a unui proces fizic, care stabilește o dependență funcțională între valorile numerice ale unor mărimi fizice nu depinde de alegerea sistemului de unități de măsură pentru aceste mărimi. Prin urmare, toți termenii unei ecuații matematice, ce descrie un fenomen fizic, trebuie să aibă aceeași dimensiune. Ei pot fi transformați într-o formă adimensională prin împărțirea ambilor termeni ai ecuației cu o mărime constantă de aceeași dimensiune cu cea a termenilor din ecuație.

*Teorema  $\pi$ .* Orice relație dintre “ $n$ ” mărimi fizice, pentru măsurarea cărora s-a folosit un număr “ $k$ ” de unități fundamentale, se pot exprima cu ajutorul unui număr de  $(n-k)$  combinații adimensionale  $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-k}$  ale celor “ $n$ ” mărimi. De exemplu, considerăm că dependența funcțională dintre valorile numerice  $a_1, a_2, \dots, a_n$  ale mărimilor dimensionale  $A_1, A_2, \dots, A_n$  într-un fenomen fizic dat este de forma:  $a_n = f(a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$ . Se consideră că unitățile de măsură pentru primele “ $k$ ” mărimi sunt definite independent unele de altele, și sunt considerate unități fundamentale, iar unitățile de măsură pentru celelalte  $(n-k)$  mărimi fizice sunt unități derivate, care se exprimă prin relațiile:

$$[A_{k+1}] = [A_1]^{m_1} [A_2]^{m_2} \dots [A_k]^{m_k} = \prod_{i=1}^k [A_i]^{m_i}$$

$$[A_n] = [A_1]^{p_1} [A_2]^{p_2} \dots [A_k]^{p_k} = \prod_{i=1}^k [A_i]^{p_i}$$

Atunci, măbind unitățile fundamentale  $[A_1], [A_2], \dots, [A_k]$  de  $a_1, a_2, \dots, a_k$  ori, respectiv, relația  $a_n = f(a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$  se scrie în forma adimensională cu ajutorul expresiei:

$$\pi_{n-k} = f(1, 1, \dots, 1, \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-k-1})$$

sau

$$\pi_{n-k} = F(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-k-1})$$

unde:

$$\pi_1 = \frac{a_{k+1}}{\prod_{i=1}^k a_i^{m_i}} = \frac{A_{k+1}}{\prod_{i=1}^k A_i^{m_i}}, \dots, \pi_{n-k} = \frac{a_n}{\prod_{i=1}^k a_i^{p_i}} = \frac{A_n}{\prod_{i=1}^k A_i^{p_i}}$$

sunt combinații adimensionale ale mărimilor fizice  $A_1, A_2, \dots, A_n$ .

Consecințe ale “teoremei  $\pi$ ”: a) dacă  $n-k=0$ , înseamnă că ecuația  $a_n = f(a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$  nu poate fi adusă într-o formă adimensională; b) dacă  $n-k=1$ , atunci  $\pi_{n-k} = \text{const}$ .

Două procese fizice sunt similare dacă se supun aceluiași legi fizice și toate mărimile  $\xi_i'$  ce caracterizează unul dintre procese pot fi obținute prin înmulțirea unor parametri  $\xi_i''$  (analogi cu primii), ce caracterizează al doilea proces, cu niște numere constante  $c_i$ , numite constante de similitudine, astfel că:  $\xi_i' = c_i \xi_i''$ .

Criteriile de similitudine sunt combinații adimensionale, care se folosesc în descrierea matematică adimensională a procesului considerat, formate cu ajutorul teoremei  $\pi$ . Pentru a găsi aceste criterii este nevoie, inițial, de stabilit exact toate mărimile dimensionale ce caracterizează procesul fizic concret de studiat, iar apoi se aplică “teorema  $\pi$ ” dependenței funcționale  $F(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0$ .

*Prima teoremă de similitudine.* Pentru două procese similare toate criteriile de similitudine sunt două câte două egale între ele, adică:

$$\pi_1' = \pi_1'', \pi_2' = \pi_2'', \text{ s.a.m.d.}$$

*A doua teoremă de similitudine.* Criteriile de similitudine sunt legate între ele prin ecuația de similitudine, care reprezintă soluția adimensională a problemei date.

*A treia teoremă de similitudine.* Pentru ca două procese să fie similare este necesar și suficient ca ele să fie calitativ identice, iar criteriile lor de similitudine să fie două câte două egale între ele. Două procese se numesc calitativ identice dacă descrierea matematică a unui proces diferă de descrierea matematică a celui de-al doilea numai prin valorile numerice ale mărimilor fizice dimensionale ce intervin în aceste descrieri.

Exemplu. Considerăm curgerea turbulentă a unui fluid în SLA. Mărimile ce intervin în descrierea acestui proces sunt: 1) gradientul vertical a vitezei medii orizontale,

de dimensiune:  $\left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\right] = \frac{LT^{-1}}{L} = T^{-1}$ ; 2) viteza de frecare, de dimensiune  $[u_*]=LT^{-1}$ ; 3)

altitudinea  $z$ , față de perete  $[z]=L$ ; 4) parametrul Coriolis,  $[f]=T^{-1}$ ; 5) coeficientul de

portabilitate,  $[\beta] = \frac{g}{T_0} = \frac{LT^{-2}}{\theta} = LT^{-2}\theta^{-1}$  (unde  $\theta$  este unitatea fundamentală pentru

temperatură); 6) fluxul cinematic de căldură  $[Q_0] = [\overline{w'\theta'}] = LT^{-1}\theta$ . Considerăm că

unitățile lui  $u_*$ ,  $f$  și  $Q_0$  sunt unități fundamentale. Atunci sunt posibile un număr de  $(6-3)=3$  combinații adimensionale între parametrii, de forma:

$$\frac{\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}}{f} = \frac{T^{-1}}{T^{-1}} = \text{adimensional}$$

$$\frac{\frac{z}{u_*}}{f} = \frac{\frac{L}{LT^{-1}}}{T^{-1}} = \frac{L}{L} = \text{adimensional}$$

$$\frac{\frac{\beta}{fu_*^2}}{Q_0} = \frac{\frac{LT^{-2}\theta^{-1}}{T^{-1}L^2T^{-2}}}{LT^{-1}\theta} = \frac{LT^{-2}\theta^{-1}\theta}{LT^{-2}} = \text{adimensional}$$

Deci se poate scrie relația adimensională:

$$F\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}, \frac{z}{u_*}, \frac{\beta}{fu_*}\right) = 0$$

sau

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = fF_u\left(\frac{z}{u_*}, \frac{\beta Q_0}{fu_*}\right)$$

care se mai poate scrie:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = \frac{u_*}{kL_E} \Phi_u\left(\frac{z}{L_E}, \frac{L_E}{L_{MO}}\right)$$

unde  $k$  este o constanta numerică,  $L_E = k \frac{u_*}{f}$ ,  $L_{MO} = -\frac{u_*^3}{k\beta Q_0}$ , iar  $F$ ,  $F_u$ ,  $\Phi_u$  sunt funcții ce trebuie determinate pe cale experimentală sau teoretică. Analiza dimensională sugerează o dependență funcțională între parametri fără să stabilească forma concretă a ei, și introduce niște funcții ce trebuie determinate experimental sau teoretic.

Pentru cazul favorabil când rangul "matricii dimensionale" este  $r=n-1$  ( $n$ - numărul variabilelor) funcția numerică de determinat se reduce la o constantă numerică multiplicativă.

Dacă în exemplul nostru putem renunța la parametrii  $f$ ,  $\beta$ ,  $Q_0$ , numărul parametrilor devine  $n=3$  și  $r=3-1=2$ . Pentru acest caz relația căutată este de forma  $F \left[ \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} / \frac{u_*}{z} \right] = 0$  și,

fără a pierde din generalizare, se poate scrie:  $\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = \frac{u_*}{kz}$ , unde  $k$  este o constantă ce se determină experimental.

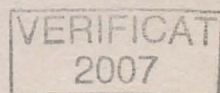
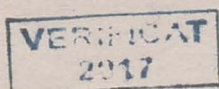
## BIBLIOGRAFIE

1. Berlyand, M.E., 1985, *Prediction and Regulation of Air Pollution*, Leningrad, Hydrometeo Press.
2. Deardorff, J.W., 1972, *Numerical Investigation of Neutral and Unstable Planetary Boundary Layer*, JAS, 29, p. 91-115.
3. De Moor, G., 1972, *Traitement Numérique de l'Évolution Statistique d'une Couche Limite Atmosphérique*, La Meteorologie, v. 24, p. 1-41.
4. De Moor, G., 1983, *Les Théories de la Turbulence dans la Couche Limite Atmosphérique*, E.N.M., Toulouse.
5. Etling, D., 1990, *Temporal and Spatial Variations in the ABL*, ICTP, Trieste.
6. Holton, J.R., 1979, *An Introduction to Dynamic Meteorology*, Academic Press, New York.
7. Junge, C.E., 1963, *Air Chemistry and Radioactivity*, Academic Press, New York.
8. Monin, A. S., A. M. Obukhov, 1954, *The Main Features of Turbulent Mixing in the Surface Atmospheric Layer*, Trudy Inst. Geophys. Acad. Sci., USSR, 24.
9. Monin, A.S., A.M. Yaglom, 1971, *Statistical Fluid Mechanics: Mechanics of Turbulence* vol. 1, The MIT Press, Cambridge.
10. Monin, A.S., 1973, *Boundary Layers in Planetary Atmosphere*, Dynamical Meteorology, D. Reidel, p. 419-468.
11. Pruppacher, H.R., 1978, *Microphysics of Clouds and Precipitation*, D. Reidel P.C.
12. Seinfeld, J.H., 1986, *Atmospheric Chemistry and Physics of Air Pollution*, Wiley, New York.
13. Stull, R.B., 1991, *An Introduction to Boundary Layer Meteorology*, Kluwer, Dordrecht, The Netherlands.
14. Twomey, S., 1977, *Atmospheric Aerosols*, Elsevier S.P.C.
15. \*\*\*, 1979, *The Atmospheric Boundary Layer*, WMO Report, nr. 523.



## CUPRINS

I. Stratul limită atmosferic .....	4
1.1. Caracteristicile stratului limită .....	4
1.2. Tipuri de strat limită .....	6
II. Ecuațiile statistice ale mecanicii fluidelor .....	10
2.1. Tratarea statistică a problemei turbulenței .....	10
2.2. Ecuațiile lui Reynolds .....	13
2.3. Energia cinetică în mișcarea turbulentă .....	17
2.4. Modele orizontal omogene .....	22
III. Teorii semiempirice ale turbulenței .....	25
3.1. Metode de închidere de ordinul I .....	25
3.2. Lungimea de amestec .....	27
IV. Teoria de similitudine în stratul de suprafață al atmosferei .....	32
4.1. Modelul stratului de flux constant .....	32
4.2. Stratul de suprafață al atmosferei .....	36
4.3. Teoria similitudinii Monin- Obukhov pentru SLS .....	37
4.4. Proprietăți asimptotice ale profilelor verticale .....	41
4.5. Determinarea experimentală a funcțiilor universale .....	45
4.6. Quasi-staționaritatea stratului de suprafață .....	47
4.7. Teoria de similitudine deasupra suprafeței oceanului .....	48
V. Teoria de similitudine a Stratului Limită Planetar al atmosferei .....	52
5.1. Teoria de similitudine a lui Rossby pentru stratul limită Ekman .....	52
5.2. Legi de rezistență în SLE .....	55
5.3. Verificarea experimentală a teoriei similitudinii în SLE .....	57
VI. Structura Stratului Limită Atmosferic (SLA) .....	59
6.1. Stratul limită atmosferic .....	59
6.2. Spirala Ekman .....	60
6.3. Variații temporale și spațiale în SLA .....	64
VII. Poluarea aerului .....	68
7.1. Aerosolul atmosferic .....	68
7.2. Distribuția dimensională .....	70
7.3. Mișcarea browniană a particulelor de aerosol .....	72
7.4. Difuzia particulelor de aerosol .....	74
7.5. Mobilitatea și viteza de antrenare .....	75
7.6. Sedimentarea și distribuția verticală a particulelor de aerosol .....	76
7.7. Fuziunea browniană a particulelor de aerosol .....	77
7.8. Depuneri umede .....	80
7.9. Proprietăți optice ale aerosolilor .....	83
VIII. Prognoza poluării aerului .....	86
8.1. Ecuațiile de prognoză .....	86
8.2. Particularitățile turbulenței în stratul limită .....	88
8.3. Integrarea ecuației de prognoză .....	90
Anexa I .....	95







✓

### DATA RESTITUIRII

<del>13 APR. 2002</del>	9. IUN. 2007	
<del>11 IUL. 2002</del>	←	
12 NOV. 2002	4 MAR. 2004	
13 APR. 2003	—	
23 APR. 2003	20 FEB. 2012	
4 DEC. 2003	—	
10 IUN. 2004		
10 IUN. 2004		
14 NOV. 2005		
2 NOV. 2005		
12 DEC. 2005		
3 MAR. 2007		

BIBLIOTECA CENTRALA  
UNIVERSITARA „CAROL I”



DE SPIRITU ET ANIMA



ISBN: 973 - 575 - 086 - 4

Lei 2700