CONSTANTIN CIOACĂ

PHYSIQUE

EDITURA UNIVERSITĂȚII DIN BUCUREȘTI
1998

CONSTANTIN CIOACĂ

PHYSIQUE

MAISON D'ÉDITION DE L'UNIVERSITÉ DE BUCAREST
1998

Referenţi ştiinţifici: Şef lucr. dr. CARMINA PLOSCEANU
Şef lucr. dr. CORNEL STĂNESCU

Şos. Panduri, 90-92, Bucureşti - 76235; Telefon: 410.23.84

ISBN - 973 - 575 - 231 - x

TABLE DES MATIÈRES

I. Eléments de calcul vectoriel 1
1. Définition du vecteur 1
2. Addition vectorielle 2
3. Différence vectorielle 3
4. Multiplication d'un vecteur par un scalaire 3
5. Division d'un vecteur par un scalaire 4
6. Vecteur unitaire d'un vecteur 4
7. Droite orientée ou axe 4
8. Produit scalaire 5
9. Projection orthogonale d'un vecteur sur un axe 5
10. Repère orthonormé de trois axes 6
11. Représentation analytique d'un vecteur 6
12. Représentation analitique de produit scalaire 7
13. Produit vectoriel 7

II. Éléments de cinématique 9
1. Mouvement d'un corps 9
2. Axes de coordonnées. Coordonnées d'un points. Rayon vecteur d'un point 9
3. Description cinématique du mouvement. Le concept de point matériel 9
4. Vecteur vitesse dans le mouvement curviligne 11
5. Vecteur accélération dans le mouvement curviligne 13
6. Vitesse et accélération en coordonnées polaires 15
7. Courbure et rayon. Le courbure. Accélération tangentielle et normale 19
8. Mouvement rectiligne uniforme d'un point matériel 20
9. Mouvement rectiligne uniformément varié 21
10. Mouvement circulaire uniforme. Vitesse angulaire 22
11. Mouvement circulaire uniforme ....

III. Les lois de Newton 26
1. Loi d'inertie. Référentiel d'inertie (galiléen) 26
2. Principe fondamental de la dynamique 28
3. Troisième loi de Newton 28
4. Validité d'application des lois de Newton 29
5. Equations de Mac Laurin 29
6. Importance des conditions initiales. Le principe des conditions initiales 29
7. Mouvement d'un point matériel soumis à l'action de la pesanteur 30
8. Transformations de Galilée 31
9. Loi de composition des vitesses de Galilée 32
10. Invariance de la deuxième loi de Newton dans une transformation de Galilée. Le principe de relativité de Galilée ... 32

IV. Travail et Energie 34
1. Travail d'un force constante, $\vec{F}$ = constante 34
2. Travail d'une force variable 35
3. Force conservative 37
4. Champ potentiel. Energie potentielle. Théorème de l'énergie potentielle 38
5. Energie cinétique. Théorème de l'énergie cinétique 41
6. Energie mécanique totale. Conservation de l'énergie mécanique totale 42
7. Cas des forces nonconservatives 43

V. Impulsion de la force et quantité de mouvement. Théorème de l'impulsion de la force. Conservation de la quantité de mouvement 45
1. Vecteur impulsion élémentaire de la force 45
2. Vecteur impulsion intégral de la force 45
3. Quantité de mouvement 45
4. Théorème de l'impulsion de la force 45
5. Conservation de la quantité de mouvement 46

VI. Moment cinétique. Théorème du moment cinétique. Moment d'un vecteur par rapport à un point. Conservation du moment cinétique 48
1. Moment d'un vecteur par rapport à un point 48
2. Moment cinétique 48
3. Théorème du moment cinétique 48

VII. Forces centrales. Définition. Exemples. Propriétés fondamentales 50
1. Définition de la force centrale 50
2. Exemples de forces centrales 50
3. Propriétés fondamentales des forces centrales 50

VIII. Mouvement d'un point matériel soumis aux liaisons 54
1. Liaisons. Reactions. Equations différentielles du mouvement 54
2. Mouvement sur un plan incliné 54
3. Pendule mathématique 56

IX. Mouvement oscillatoire du point matériel 58
1. Oscillateur linéaire harmonique 58
2. Oscillateur linéaire harmonique amorti 58
3. Oscillateur linéaire harmonique entretenu. Oscillations forcées avec frottement 63

X. Dinamique du système de points matériels 67
1. Forces intérieures et forces extérieures 67
2. Théorèmes généraux 68
3. Masse réduite. Définition 72

XI. Dinamique du solide rigide 75
1. Définition 75
2. Mouvement de rotation du solide rigide 75
3. Quantité de mouvement du solide rigide en rotation 75
4. Moments cinétique et d'inertie du solide rigide en rotation 76
5. Energie cinétique du solide rigide en rotation 76
6. Equation du mouvement de rotation d'un corps autour d'un axe fixe 77
7. Energie cinétique totale en fonction des moments d'inertie 78
8. Applications 79

XII. Mouvement ondulatoire 84
1. Concept d'onde 84
2. Equation des ondes 84
3. Ondes sphériques 87
4. Onde plane. Onde plane harmonique 90
5. Paquet d'ondes 92
6. Vitesse de phase et de groupe. La relation de Rayleigh 94

XIII. Equations de mouvement de Lagrange 95
1. Point matériel. Système de points matériels 95
2. Degrés de liberté du système. Coordonnées et vitesses généralisées 95
3. Généralisation à un système de N points matériels 96
4. Liaisons. Mouvement lié. Exemples 96
5. Etat d'un point matériel classique 98
6. Espace de configuration 99
7. Equation de Lagrange. Fonction Lagrange 99
8. Pendule mathématique 103
9. Impulsions et forces généralisées 105

XIV. Equations canoniques de Hamilton 108
1. Variables canoniques. L'espace des phases. Fonction de Hamilton 108
2. Equations canoniques de Hamilton 109
3. Pendule mathématique 110
4. Principe classique de causalité 111
5. Contenu physique de la fonction de Hamilton 111
6. Exemples de la fonction de Hamilton 112

I. Eléments de calcul vectoriel.

1. La définition du vecteur.

Considérons le déplacement, en ligne droite, d'un point A à un point B. Ce déplacement est défini par la **direction** suivi, le sens du déplacement et la **distance** parcourue AB (Fig.I.1).

Le déplacement de A vers B peut être représenté par une nouvelle grandeur, le **vecteur** $\overrightarrow{AB}$, d'origine A et extrémité B. On appelle **module du vecteur** $\overrightarrow{AB}$ la longueur AB, grandeur scalaire et essentiellement positive. Ce module s'écrit sous la forme $|\overrightarrow{AB}|$ ou simplement AB. Le vecteur $\vec{a}$ a pour module a. La droite Δ s'appelle **le suport** du vecteur $\overrightarrow{AB}$. Toute droite Δ' parallèle à Δ represénte la direction du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

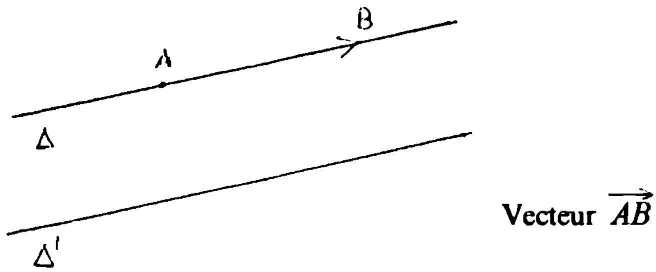


Fig. I.1.

a) Egalité de deux vecteurs. Deux vecteurs sont dits **égaux** ou **équipollents** lorsqu 'ils sont parallèles, de même sens et de même module (Fig.I.2.). On peut écrire : $\vec{a} = \vec{b}$.

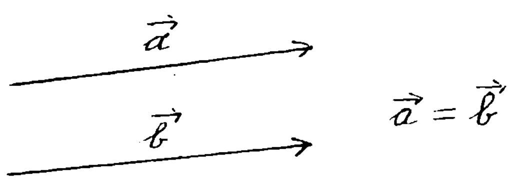


Fig. I.2.

Deux vecteur **égaux** sont dits **identiques** s' ils ont la même origine.

b) Vecteur nul : Tout vecteur de module nul est appelé vecteur nul. La direction du vecteur nul est **nondéterminé**. Le symbole du vecteur nul est $\vec{0}$. Par définition:

$$\overrightarrow{AB} + \vec{0} = \vec{0} + \overrightarrow{AB}$$

c) Vecteurs opposés: Deux vecteurs sont dits opposés s'ils sont parallèles, de même module et de sens opposé (Fig.I.3).

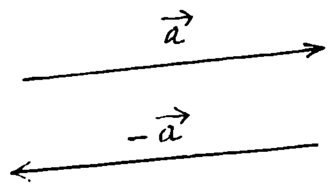


Fig.I.3

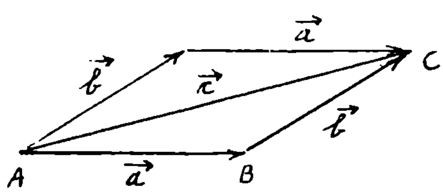
Par définition:

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{0}$$

2. Addition vectorielle.

Définition: Considérons deux déplacements succesifs, dans l'espace, de A vers B, puis de B vers C, représentés successivement par les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$. Le déplacement résultant est défini par le vecteur $\overrightarrow{AC}$. Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est appelé **somme vectorielle ou géométrique** ou même **somme** tout court des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ (Fig. I.4):

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ ($\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$).

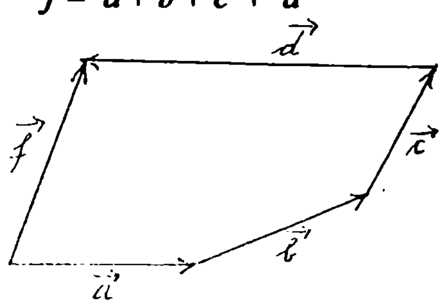


Addition vectorielle de deux vecteurs (Règle du triangle ou parallélogramme)

Fig. I.4

Cette notation s'étend à un nombre quelconque de déplacements successifs (Fig. I.5):

$\vec{f} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$



Addition vectorielle de quatre vecteurs. (Règle du polygone)

Observation: La règle du polygone est valable, même si les vecteurs se trouvent dans l'espace.

Fig. I.5

a) Propriétés de l'addition vectorielle:

a_1) L'addition vectorielle est commutative

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

Le résultat est le même quel que soit l'ordre dans lequel les vecteurs sont ajoutés.

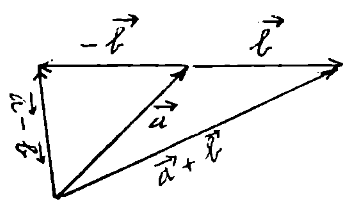
a_2) L'addition vectorielle est associative.

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$$

3. Différence vectorielle.

On obtient la différence vectorielle de deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ en ajoutant au premier vecteur le vecteur opposé du second (Fig.I.6):

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$



La différence vectorielle de deux vecteurs.

Fig. I.6

a) La différence vectorielle est anticommutative (Fig. I.7):

$$\vec{a} - \vec{b} \neq \vec{b} - \vec{a} \;;\quad \vec{a} - \vec{b} = -(\vec{b} - \vec{a})$$

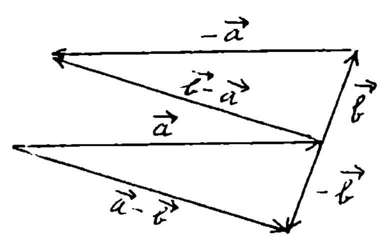


Fig. I.7

4. Multiplication d'un vecteur par un scalaire.

Definition: Le produit d'un vecteurs $\vec{a}$ par un scalaire m est un vecteur $\vec{a}\,'$ parallèle à $\vec{a}$, de même sens si m>0 et de sens opposé si m<0, et module $|\vec{a}\,'| = |m|\,|\vec{a}|$ (Fig. I.8).

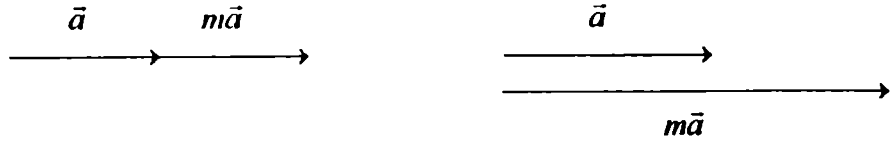


Fig. I.8 (m>0)

Propriétés:

a) Associativité:

$$m_1(m_2\,\vec{a}) = (m_1 m_2)\vec{a} = m_1\, m_2\, \vec{a}$$

b) Double distributivité:

$$(m_1 + m_2)\,\vec{a} = m_1\,\vec{a} + m_2\,\vec{a}$$

$$\mathrm{m}\,(\vec{a}+\vec{b}\,) = \mathrm{m}\vec{a} + \mathrm{m}\vec{b}$$

5. Division d'un vecteur par un scalaire.

Pour diviser le vecteur $\vec{a}$ par le scalaire m', on multiplie $\vec{a}$ par le scalaire $\mathrm{m}=\dfrac{1}{m'}$:

$$\vec{a}\,' = \frac{\vec{a}}{m'} = \frac{1}{m'}\,\vec{a}$$

6. Vecteur unitaire d'un vecteur.

Définition: Soit $\vec{a} = m\vec{b}$ où m>0. Si $\mathrm{m} = |\,\vec{a}\,|$, alors $|\,\vec{b}\,| = 1$.

En effet, $\vec{b} = \dfrac{\vec{a}}{m} = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \Rightarrow |\,\vec{b}\,| = \left|\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\right| = \dfrac{|\vec{a}|}{||\vec{a}||} = \dfrac{|\vec{a}|}{|\vec{a}|} = 1.$

Le vecteur $\vec{b}$ (noté parfois par $\vec{n}$) de module unité et parallèle au vecteur $\vec{a}$ est appelé vecteur unitaire du vecteur $\vec{a}$ (Fig. I.9).

$$\vec{a} = |\,\vec{a}\,|\,\vec{n} \quad\Rightarrow\quad \vec{n} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

Le point d'aplication de $\vec{n}$ est arbitraire (Fig. I.9)

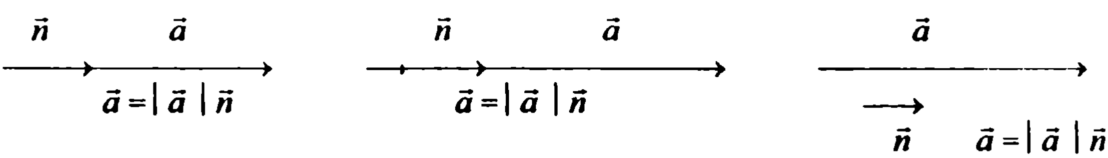


Fig. I.9

7. Droite orientée ou axe.

Definition et notation (Δ, $\vec{n}$). Soit,dans l'espace une droite quelconque Δ et un vecteur unitaire $\vec{n}$ parallèle à la droite Δ. Si on attache à la droite Δ le sens du vecteur unitaire $\vec{n}$, celle-ci devient un axe (Fig. I.10).

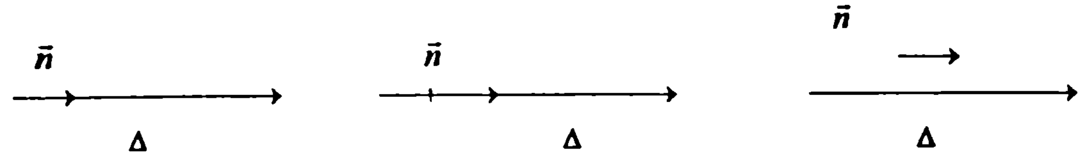


Fig. I.10.

Le vecteur unitaire $\vec{n}$ est un vecteur de base de l'axe Δ.

8. Produit scalaire.

Definition. Le produit scalaire de deux vecteur $\vec{a}$ et $\vec{b}$ faisant entre eux un angle θ, représenté par le symbole $\vec{a} \cdot \vec{b}$, est le scalaire $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\ |\vec{b}| \cos\theta = ab\cos\theta$.

Propriétés:

a) Comutativité: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

b) Associativité par rapport à la multiplication par un scalaire:

$$(m\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (m\vec{b}) = m(\vec{a} \cdot \vec{b}) = m\vec{a} \cdot \vec{b}$$

c) Distributivité par rapport à l'addition vectorielle: $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$

d) Si $\vec{a} \neq \vec{o}$, $\vec{b} \neq \vec{o}$ et $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ $(\vec{a} \perp \vec{b})$ résulte $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$;

Si $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ et $\vec{a} \neq 0$, $\vec{b} \neq 0$ résulte $\vec{a} \perp \vec{b}$ $(\theta = \dfrac{\pi}{2})$;

Cas particulier: Le module d'un vecteur exprimé au moyen du produit scalaire.

$$|\vec{a}| = \sqrt{a^2} = \sqrt{\vec{a}.\vec{a}}$$

9. La projection orthogonale d'un vecteur $\vec{a}$ sur un axe $(\Delta, \vec{n})$. Définition. (Fig. I.11).

$$a_\Delta = AB = A'B' = |\vec{a}| \cos\theta$$
$$\theta = \measuredangle(\vec{a}, \vec{n})$$

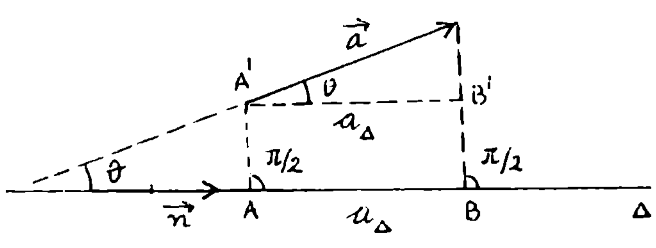


Fig. I.11.

Par définition, la longueur du segment AB notée par a_Δ constitue la projection orthogonale du vecteur $\vec{a}$ sur l'axe Δ : $pr_\Delta \vec{a} = a_\Delta = |\vec{a}| \cos\theta$.

Théorème : La projection orthogonale d'un vecteur $\vec{a}$ sur un axe est égale au produit scalaire de vecteur et le vecteur unitaire $\vec{n}$ de l'axe.

Démonstration (voir la fig. I.11):

En effet, $\vec{a}\cdot\vec{n} = |\vec{a}|\ |\vec{n}|\cos\theta = |\vec{a}|\cdot 1\cdot\cos\theta = |\vec{a}|\cos\theta = \mathrm{pr}_{\Delta}\,\vec{a} = a_{\Delta}$, Q.E.D.

10. Repère orthonormé de trois axes . Définition . **Un systèm de trois axes constitue un repère orthonormé si les vecteur de base des axes sont:**

1° **mutuelement orthogonaux;**

2° **de module égal à un.**

Les vecteurs de base seront notés dans la suite par $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ (Fig. I.12). Selon 1° et 2° les vecteurs de base $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ vérifient les relations:

1°: $\vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{j}\cdot\vec{k} = \vec{k}\cdot\vec{i} = 0$;

2°: $\vec{i}^{\,2} = \vec{j}^{\,2} = \vec{k}^{\,2} = 1$.

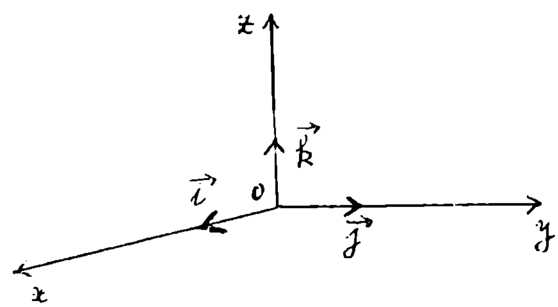


Fig. I.12.

11. Représentation analytique des vecteurs.

a) Composantes scalaires et vectorielles d'un vecteur par rapport à un repère orthonormé Définitions (Fig. I.13)

- Les composantes vecterielles du vecteur $\vec{a}$:

$\overrightarrow{OA} = |\overrightarrow{OA}|\,\vec{i}$; $\overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OB}|\,\vec{j}$; $\overrightarrow{OC} = |\overrightarrow{OC}|\,\vec{k}$

D'après la règle du polygone on a:

$\vec{a} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM'} + \overrightarrow{M'M}$;

Puisque

$\overrightarrow{AM'} = \overrightarrow{OB}$; $\overrightarrow{M'M} = \overrightarrow{OC}$,

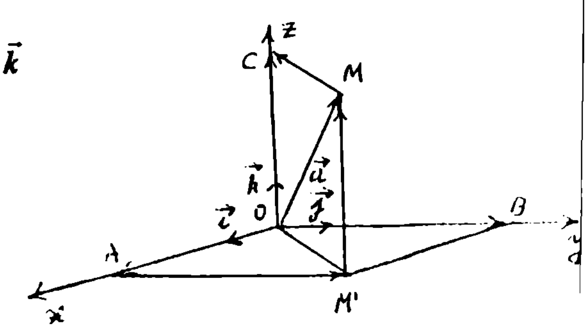


Fig.I.13

on a:

$\vec{a} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = |\overrightarrow{OA}|\,\vec{i} + |\overrightarrow{OB}|\,\vec{j} + |\overrightarrow{OC}|\,\vec{k}$

- Les composantes scalaires du vecteur $\vec{a}$.

Par définition, les projections orthogonales du vecteur $\vec{a}$ sur les trois axes Ox, Oy, Oz sont les segments $|\overrightarrow{OA}|$, $|\overrightarrow{OB}|$, $|\overrightarrow{OC}|$, notés dans la suite par a_x, a_y, a_z:

$$\mathrm{pr}_{ox}\, \vec{a} = |\overrightarrow{OA}| = a_x; \quad \mathrm{pr}_{oy}\, \vec{a} = |\overrightarrow{OB}| = a_y; \quad \mathrm{pr}_{oz}\, \vec{a} = |\overrightarrow{OC}| = a_z$$

Ceux-ci sont appelées les composantes scalaires du vecteur $\vec{a}$.

Représentation analytique du vecteur $\vec{a}$ est:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} \qquad (1)$$

D'une manière abrégée on peut écrie:

$$\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$$

12. Représentation analitiques de produit scalaire de deux vecteurs

Théorème: Soient deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ écrits sous forme analitique dans un repère orthonormé:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} \quad ; \quad \vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$$

Alors:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \qquad (2)$$

Démonstration: Effectuons le produit scalaire $\vec{a} \cdot \vec{b}$:

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) \cdot (b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}) = \\ &= a_x b_x(\vec{i} \cdot \vec{i}) + a_x b_y(\vec{i} \cdot \vec{j}) + a_x b_z(\vec{i} \cdot \vec{k}) + \\ &+ a_y b_x(\vec{j} \cdot \vec{i}) + a_y b_y(\vec{j} \cdot \vec{j}) + a_y b_z(\vec{j} \cdot \vec{k}) + \\ &+ a_z b_x(\vec{k} \cdot \vec{i}) + a_z b_y(\vec{k} \cdot \vec{j}) + a_z b_z(\vec{k} \cdot \vec{k})\end{aligned}$$

Puisque, par hypothèse, le repère est considéré orthonormé on a

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1; \quad \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = \vec{k} \cdot \vec{j} = 0$$

et par conséquent

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \ , \quad \text{Q.E.D.}$$

13. Produit vectoriel. Définition.

Le produit vectoriel des deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ faisant entre eux un angle θ, représenté par le symbole $\vec{a} \times \vec{b}$, est la grandeur vectorielle $\vec{c}$ définie par:

- sa direction, perpendiculaire au plan défini par $\vec{a}$ et $\vec{b}$
- son sens, fixé par la règle des trois doigts de la main droite (Fig. I.14.)
- son module $|\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \sin\theta$
- son point d'application qui se trouve n'importe où dans le plan défini par $\vec{a}$ et $\vec{b}$ (le point d'application est nondétęrminé)

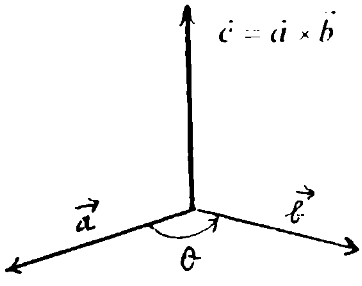


Fig. I.14

Si l'index est dirigé dans le sens de $\vec{a}$ et le majeur, dans le sens de $\vec{b}$, alors le pouce nous montre le sens de $\vec{c}$.

Propriétés:

a) Le produit vectoriel n'est pas commutatif: $\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{b} \times \vec{a}$. Il est "anti-commutatif":

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}.$$

b) Associativité par rapport à la multiplication par un scalaire:

$$m(\vec{a} \times \vec{b}) = (m\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (m\vec{b})$$

c) Distributivité par rapport à l'addition vectorielle:

$$\vec{c} \times (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{c} \times \vec{a} + \vec{c} \times \vec{b}$$

d) Le produit vectoriel des deux vecteurs $\vec{a} \neq \vec{o}$, $\vec{b} \neq \vec{o}$ est nul ($\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = o$) si $\theta = 0$ ou π. Les deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont alors parallèles ou anti-parallèles. En particulier $\vec{a} \times \vec{a} = o$. Donc, pour les vecteur unitaires des axes:

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{o}$$

e) Les produits vectoriels des vecteurs unitaires $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$:

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}\,; \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}\,; \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$$

Représentation analitique d'un produit vectoriel $\vec{a} \times \vec{b}$.

Dans un système d'axes orthonormé à trois dimensions

$$\begin{aligned}
\vec{a} \times \vec{b} &= (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) \times (b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}) = \\
&= a_x b_x(\vec{i} \times \vec{i}) + a_x b_y(\vec{i} \times \vec{j}) + a_x b_z(\vec{i} \times \vec{k}) + \\
&+ a_y b_x(\vec{j} \times \vec{i}) + a_y b_y(\vec{j} \times \vec{j}) + a_y b_z(\vec{j} \times \vec{k}) + \\
&+ a_z b_x(\vec{k} \times \vec{i}) + a_z b_y(\vec{k} \times \vec{j}) + a_z b_z(\vec{k} \times \vec{k}) = \\
&= (a_y b_z - a_z b_y)\vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\vec{k}
\end{aligned} \tag{3}$$

On peut écrire cette équation en faisant intervenir un déterminant:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \tag{4}$$

II. La cinématique.

1. Le mouvement d'un corps.

En mécanique on entend par **mouvement** d'un corps le changement avec le temps de la position spatiale de celui-ci.

La position du corps dont il est question est une **position relative, définie par rapport à** d'autres corps.

Le corps ou le système de corps par rapport auxquels on définit les positions d'autres corps sont désignés sous le nom de **système de référence** ou **référentiel** ou **repères**.

2. Axes de coordonnées. Les coordonnées d'un point. Le rayon vecteur d'un point.

On peut choisir comme **référentiel** un corps solide auquel seraient liés des **axes de coordonnées**, par exemple un **repère orthonormé**. Dans ce référentiel la position de tout point,pourrait être définie par trois nombres que sont les coordonées cartésiennes x,y,z de ce point; ces coordonnées représentent respectivement les distances de ce point aux trois plans YOZ, ZOX et XOY de notre référentiel (Fig.II.1)

Triédre de référence direct.

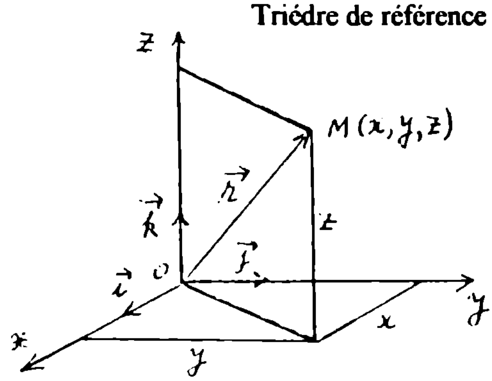


Fig. II.1

Le rayon vecteur $\vec{r}$ du point M(x, y, z) est un segment de droite pointant de l'origine O du triédre de référence vers le point considéré M(x, y, z). Les coordonnées x, y, z sont ls projection du rayon vecteur sur de coordonnées. Aussi ecrira-t-on

'les axes'
$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \qquad (1)$$

où $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sont des vecteurs unitaires orientés le long des axes OX, OY, OZ.

3. Description cinématique du mouvement. Le concept de point matériel.

a) La cinématique est la partie de la mécanique consacrée à la description des mouvements, abstraction faites des causes qui les déterminent.

b) En mécanique classique l'object le plus simple dont on puisse étudier le mouvement est le point matériel. On entend par point matériel (P.M.) un corps macroscopique dont les dimensions sont suffisamment petites pour pouvoir être négligées dans l'étude du mouvement, ce qui revient à admettre que la masse de ce corps se trouverait concentrée en un point.

c) Les équation du mouvement d'un P.M. . La forme scalaire et vectorielle.

Choisissons un système de référance (S.R.) et raportons à ce système le mouvement du point matériel (P.M.). La description de ce mouvement sera complète si on connaît à tout instant t, la position du point par rapport au référentiel choisi. Nous définirons la position dans l'espace du point par ses coordonnées cartésiennes x, y, z, qui sont les projections du rayon vecteur $\vec{r}$ sur les axes de coodonées. Pour que la description du mouvement du point soit complète, il faut déterminer les variations des coordonnées x, y, z en fonction du temps t :

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \tag{2}$$

Ces équations constituent la forme scalaire des equations de mouvement du point matériel.

En notation vectorielle il y a une seule équation de mouvement du P.M.:

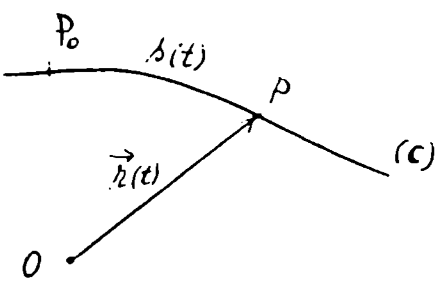
$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} \tag{3}$$

d) Trajectoire: On appelle trajectoire d'un P.M. en mouvement, le lieu géométrique des positions effectivement occupées par le P.M. (particule) quand le temps s'ecoule. Il faut distinguer la trajectoire de la courbe géométrique qui le porte. Au point de vue mathématique l'équation de la trajectoire du P.M. se trouve en éliminant le paramètre temps t dans les équations du mouvement sous forme scalaire. L'on obtient une equation dont la forme générale est:

$$f(x, y, z) = 0 \tag{4}$$

e) Équation horaire du mouvement..

e') Soit P_o une origine fixe sur la courbe (C) qui porte la trajectoire d'un P.M. en mouvement (Fig. II.2)



La courbe (c) porte la trajectoire de point P.

Fig. II.2

La position de la particule P à l'instant t sur sa trajectoire est definie par l'arc

$$\widehat{P_oP} = s \tag{5}$$

s ést appelé coordonée curvilligne de P. Par définition, l'équation horaire du mouvement de la particule est:

$$s = s(t) \tag{5'}$$

Pour établir les lois fondamentales de la mécanique, dont la connaissance permettrait de déterminer par le calcul la forme des équation de mouvement du P.M., on doit introduire deux nouvelles notions, la notion de vitesse et celle d'accélération de celui-ci.

e'') La vitesse moyenne sur trajectoire

Par définition .

$$V_m = \frac{s(t') - s(t)}{t' - t} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

e''') La vitesse instantanée sur trajectoire

Par définition:

$$V = \lim_{\Delta t \to 0} V_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$$

4. Le vecteur vitesse dans le mouvement curviligne

Nous définirons la positions du point mobile sur la trajectoire curviligne par le rayon vecteur $\vec{r}$ le reliant à un point fixe 0 qu'on prend par convention pour origine des coordonnées (Fig. II.3).

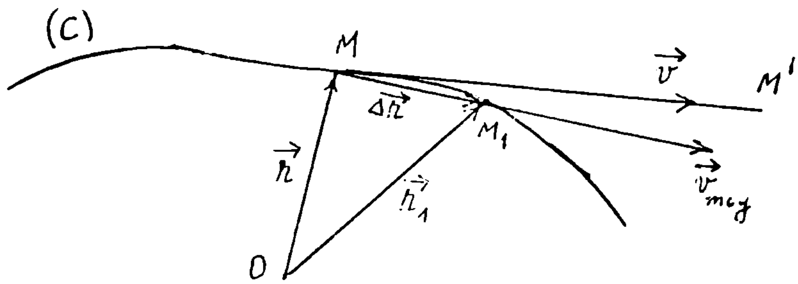


Fig. II.3

a) Vecteur vitesse moyenne:

Posons qu'à l'instant t le point matériel se trouve dans la position M définie par le rayon vecteur $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Au bout d'un court intervale de temps Δt il se trouvera dans la position M_1 définie par le rayon vecteur $\vec{r}_1 = \vec{r}(t + \Delta t)$. Lors de ce déplacement le rayon vecteur prend un accroissemnet déterminé par la différence géométrique $\Delta\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}$. La quantité

$$\vec{V}_{moy} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} \tag{6}$$

est la vitesse moyenne de mouvement pendant l'intervalle de temps Δt, compris entre les instants t et t + Δt . C'est une grandeur vectorielle puisqu'elle s'obtient en divisant le vecteur $\Delta\vec{r}$ par le scalaire Δt . La direction de la vitesse moyenne $\vec{v}_{moy}$ coïncide avec celle de la corde MM_1, donc avec celle de $\Delta\vec{r}$. Le module de $\vec{v}_{moy}$, soit v_{moy}, est grandeur scalaire dont les dimensions sont $[v] = LT^{-1}$

L'unité de vitesse dans le système S.I. est donc exprimée en mètre par seconde ($m.s^{-1}$).

b) Vecteur vitesse:

On appelle vecteur vitesse de la particule à l'instant t la limite du vecteur vitesse moyenne quand Δt→0

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{v}_{moy} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \tag{7}$$

On note cette limite:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \equiv \dot{\vec{r}} \tag{8}$$

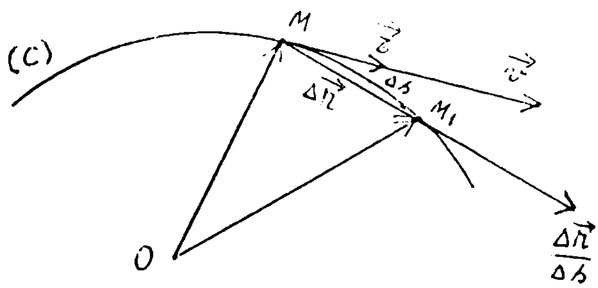
En conclusion, le vecteur vitesse $\vec{v}$ (t) est la dérivée du rayon vecteur par rapport au temps. La derivée $\frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$, limite du vecteur $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ quand $\Delta t \to 0$, c'est-à-dire quand M_1 tend vers M, a la même direction que la limite de la corde $\overrightarrow{MM_1}$. Le vecteur vitesse $\dot{\vec{r}}$ a donc la direction de la tangente MM' à la courbe (C) au point M, dirigé de M vers M_1, dans le sens des t croissants.

c) Module de la vitesse ou vitesse scalairre v. Le vecteur unitaie du vecteurr vitesse.

Supposons la trajctoire (C) du point matériel M. Soit s la coodonée curvilligne de M. On peut écrire:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s}\cdot\frac{\Delta s}{\Delta t}\right) = \left(\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s}\right)\cdot\left(\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}\right) \tag{9}$$

La diection du vecteur $\Delta\vec{r}/\Delta s$ qui coïncide a la direction du vecteur $\Delta\vec{r}$ (les vecteurs $\Delta\vec{r}/\Delta s$ et $\Delta\vec{r}$ sont colinéaires)tend vers celle de la tangente à la trajectoires (C) au point M (orientée dans le sens du mouvement si Δs est positif) quand $\Delta t \to 0$ ou $M_1 \to$M (Fig II.4).



$\Delta s = \overset{\frown}{MM_1}$

$\Delta s \cong |\Delta\vec{r}|$ pour $\Delta t \to 0$

Fig. II. 4

Quand M_1 tend vers M, les longueurs de la cord $MM_1 = |\Delta\vec{r}|$ et de l'arc $\overset{\frown}{MM_1} = \Delta s$ deviennent égales (sont des infiniments petits du même ordre). Donc, le module du vecteur $\Delta\vec{r}/\Delta s$ tend vers l'unité.

$$\left|\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s}\right| = \lim_{\Delta t \to 0}\left|\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s}\right| = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{|\Delta\vec{r}|}{|\Delta s|} = 1 \tag{10}$$

En conclusion, le vecteur $\lim\limits_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s}$ est un vecteur unitaire porté par la tangente en M à la trajectoire orienté dans le sens des s croissants:

$$\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{\tau}\ ; \quad |\vec{\tau}| = 1 \tag{11}$$

Par definition, le module de la vitesse est égal à la derivée de la longueur de l'arc de trajectoire parcouru:

$$v\,(t) = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = \dot{s} \tag{12}$$

Par suite, le vecteur vitesse s'écrit (voir la relation (9))

$$\vec{v}\,(t) = v\,(t)\,\vec{\tau} \qquad , \qquad \vec{v}\,(t) = \frac{ds}{dt}\vec{\tau} \equiv \dot{s}\vec{\tau} \tag{13}$$

d) Composantes du vecteur vitesse en coordonnées cartésiennes.

Soit un repère orthonormé Oxyz. A l'instant t, la particule est située au point M sur (C), de coordonnées x, y, z, fonctions continues et derivables par rapport au temps. Le vecteur vitesse $\vec{v}$ de la particule s'écrit:

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} = \frac{d}{dt}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = \\ &= \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = \\ &= \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} \equiv v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}\end{aligned} \tag{14}$$

Les composantes vectorielles du vecteur vitesse $\vec{v}$ s'ecrivent

$$\vec{v}_x = \dot{x}\vec{i}\ ,\ \vec{v}_y = \dot{y}\vec{j}\ ,\quad \vec{v}_z = \dot{z}\vec{k} \tag{15}$$

Les composantes scalaires du vecteur vitesse $\vec{v}$ sont:

$$v_x = \dot{x} = \frac{dx}{dt},\quad v_y = \dot{y} = \frac{dy}{dt},\quad v_z = \dot{z} = \frac{dz}{dt} \tag{16}$$

Le module de la vitesse est par definition:

$$|\,\vec{v}\,| = v = \sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}} = \sqrt{(\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k})\cdot(\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k})} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \tag{17}$$

5. Le vecteur accélération dans le mouvement curviligne.

a) Vecteur accélération moyenne.

Posont qu'à l'instant t le P.M. dans la position M a la vitese $\vec{v}$. Au bout d'un court intervalle de temps Δt il se trouvera dans la positions M_1 avec la vitesse $\vec{v}_1 = \vec{v}(t + \Delta t)$. Lors de ce déplacement le vecteur vitesse $\vec{v}$ prend un accroissement déterminé par la diference géométique $\Delta\vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}$.

La quantité

$$\vec{a}_{moy} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_1 - \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} \tag{18}$$

est l'accéleration moyenne de mouvement pendant l'intervalle de temps Δt (Fig.II.5). C'est une grandeur vectorielle puisqu'elle s'obtient en divisant le vecteur $\Delta\vec{v}$ par le scalaire Δt. Le vecteur accélération moyenne $\vec{a}_{moy}$ est dirigé vers l'intéieure de la concavité de la courbe (C).
ri

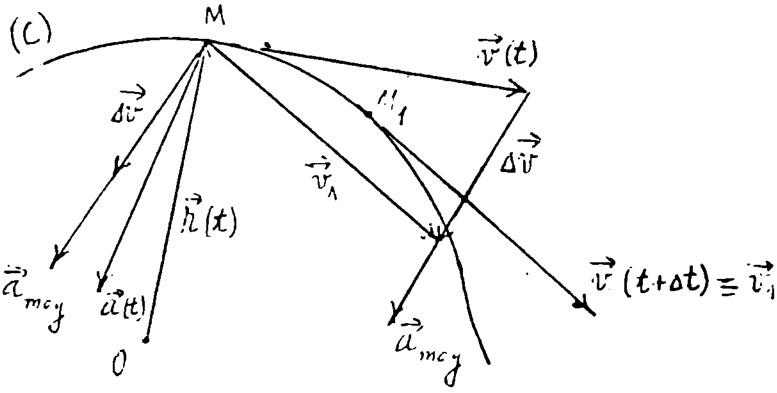


Fig. II.5.

b) Vecteur accélération .

On appelle vecteur accélération du point matériel à l'instant t la limite du vecteur accélération moyenne quand $\Delta t \to 0$ ($M_1 \to M$) .

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{a}_{moy} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \tag{19}$$

On note cette limite

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \equiv \dot{\vec{v}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) \equiv \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \equiv \ddot{\vec{r}} \tag{20}$$

En conclusion, le vecteur accélération $\vec{a}$ (t) est la dérivée première du vecteur vitesse par rapport au temps ou la dérivée seconde du rayon vecteur par rapport au temps.

Le vecteur accélération a presque la même direction que le vecteur accélération moyenne (voir Fig.II.5.).

c) Composantes du vecteur accélération en coordonnées cartesiennes.

Le vecteur de position du P.M. au moment t, s'écrit:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

Par suite,

$$\begin{aligned} \vec{a}(t) &= \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}\left[x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}\right] = \\ &= \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k} = \\ &= \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} \end{aligned} \tag{21}$$

Si on écrit le vecteur vitesse $\vec{v}$ au moment t :

$$\vec{v}(t) = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$$

alors

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k} =$$
$$= \dot{v}_x\vec{i} + \dot{v}_y\vec{j} + \dot{v}_z\vec{k} \equiv a_x\vec{i} + a_y\vec{i} + a_z\vec{k} \qquad (22)$$

Donc, les composantes vectorielles du veecteur accélération sont:

$$\vec{a}_x = \ddot{x}\vec{i} \equiv \dot{v}_x\vec{i}\ , \quad \vec{a}_y = \ddot{y}\vec{j} \equiv \dot{v}_y\vec{j}\ , \quad \vec{a}_z = \ddot{z}\vec{k} \equiv \dot{v}_z\vec{k} \qquad (23)$$

Les composantes scalaires s'écrivent:

$$a_x = \ddot{x} \equiv \dot{v}_x, \quad a_y = \ddot{y} \equiv \dot{v}_y, \quad a_z = \ddot{z} \equiv \dot{v}_z$$

Le module du vecteur accélération est par définition :

$$|\,\vec{a}\,| \equiv a = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}} = \sqrt{(\ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k})\cdot(\ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k})} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2} \qquad (24)$$

Le module de $\vec{a}$ ou $\vec{a}_{moy}$ est une gandeur scalaire dont l'équation au dimention est

$$[a] = LT^{-2}$$

L'unité d'accéléation, dans le système S.I. est donc m/s^2

6. Vitesse et accéléation en coordonnées polaires.

a) Coordonnées polaires d'un point. Dèfinition.

A l'instant t, la position de la particule P dont les coordonnées cartésiennes sont x et y peut être aussi déterminée par ces coordonnées polaires r et θ (Fig.II.6).

$x = r\cos\theta$
$y = r\sin\theta$

$OP' \equiv x, \quad OP'' \equiv y$
$|\vec{r}\,| \equiv r \quad \overrightarrow{OP} \equiv \vec{r}$
$\theta = (\widehat{Ox, OP})$

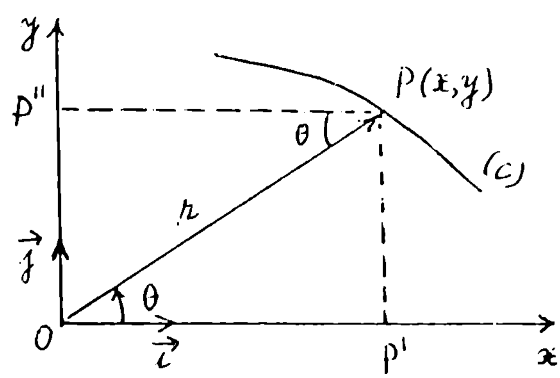


Fig. II.6

r est le module du vecteu de position $\vec{r}$ de point P;
θ est l'angle entre les directions données par l'axe Ox et le support du vecteur $\vec{r}$.

Les domaines de définition de r et θ : $r \in [0,\infty)$ et $\theta \in [0,2\pi]$.
Les relations entre (x,y) et (r,θ) sont : (voir Fig. II.6).

$$x = r\cos\theta; \quad y = r\sin\theta \tag{25}$$

Si le point P se meut en décrivant la courbe (c), les coordonnées polaires (r, θ) et implicitement (x, y) deviennent fonctions de temps t :

$$x(t) = r(t)\cos\theta(t)\,; \quad y(t) = r(t)\sin\theta(t) \tag{26}$$

Les coordonnées polaires (r,θ) sont des coordonnées planes.

b) Le vecteur vitesse en coordonnées polaires planes.

Soit P la position de la particule à l'instant t, $\vec{\tau}$ le vecteur unitaire porté par la direction $\overrightarrow{OP}$ et $\vec{n}$ le vecteur unitaire sur la direction perpendiculaire menée de 0 a $\overrightarrow{OP}$ dans le sens indiqué sur la Fig. II.7.

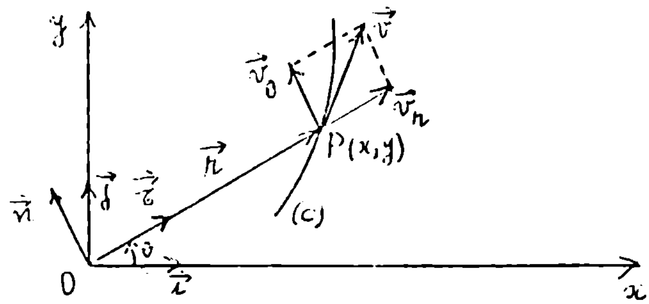


Fig. II.7

Le vecteur de position de P,

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} = r\cos\theta\cdot\vec{i} + r\sin\theta\cdot\vec{j} \quad \text{où } r = r(\theta) \text{ et } \theta = \theta(t) \tag{27}$$

Donc,

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \equiv \dot{\vec{r}} = \frac{d}{dt}(r\cos\theta\cdot\vec{i} + r\sin\theta\cdot\vec{j} = \tag{28}$$

$$= \frac{d}{dt}(r\cos\theta)\,\vec{i} + \frac{d}{dt}(r\sin\theta)\,\vec{j} = (\dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta)\,\vec{i} + (\dot{r}\sin\theta + r\,\dot{\theta}\cos\theta)\,\vec{j} =$$

$$= \dot{r}\,(\cos\theta\cdot\vec{i} + \sin\theta\cdot\vec{j}\,) + r\,\dot{\theta}\,(-\sin\theta\cdot\vec{i} + \cos\theta\cdot\vec{j}\,)$$

(Les vecteurs unitaires $\vec{i}\,,\vec{j}$ sont fixes)
Par la suite, il est facile à montrer que :

$$\cos\theta\cdot\vec{i} + \sin\theta\cdot\vec{j} = \vec{\tau} \tag{29}$$

$$-\sin\theta\cdot\vec{i} + \cos\theta\cdot\vec{j} = \vec{n}$$

En effet :

a) Les vecteurs $\vec{\tau}$ et $\vec{n}$ sont vecteurs unitaires :

$$|\,\vec{\tau}\,| = \sqrt{\vec{\tau}\cdot\vec{\tau}} = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1$$

$$|\,\vec{n}\,| = \sqrt{\vec{n}\cdot\vec{n}} = \sqrt{(-\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2} = 1 \tag{30}$$

b) Les vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{\tau}$ sont mutuellement perpendiculaires :

$$\vec{n}\;\vec{\tau} = -\sin\theta\cdot\cos\theta + \cos\theta\cdot\sin\theta = 0 \tag{31}$$

c) Les vecteurs $\vec{\tau}$ et $\vec{r}$ sont colinéaires :

$$\vec{r} = r\cos\theta\cdot\vec{i} + r\sin\theta\cdot\vec{j} = r\,(\cos\theta\cdot\vec{i} + \sin\theta\cdot\vec{j}\,) = r\,\vec{\tau} \tag{32}$$

Nous pouvons donc écrire le vecteur vitesse de la particule sous la forme :

$$\vec{v} = \dot{r}\,\vec{\tau} + r\dot{\theta}\,\vec{n} \tag{33}$$

Le terme $\vec{v}_r = \dot{r}\,\vec{\tau}$ est un vecteur parallèle à $\vec{r}$. On l'appelle vitesse radiale.
Le terme $\vec{v}_\theta = r\dot{\theta}\,\vec{n}$ est un vecteur perpendiculaire à $\vec{r}$. On l'appelle vitesse transversale où orthoradiale. Les modules de ces deux vecteurs sont appelés composantes de la vitesse en coordonnées polaires :

$$v_r = \dot{r} = \frac{dr}{dt}, \qquad v_\theta = r\dot{\theta} = r\frac{d\theta}{dt}\,. \tag{34}$$

Le module du vecteur vitesse en coordonnées polaires s'ecrit :

$$|\,\vec{v}\,| = \sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}} = \sqrt{(\dot{r}\vec{\tau}+r\dot{\theta}\vec{n})\cdot(\dot{r}\vec{\tau}+r\dot{\theta}\vec{n})} = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2} \tag{35}$$

c) Le vecteur accélération en coordonnées polaires planes.

Pour trouver l'expression de l'accélération en coordonnées polaires planes dérivons le vecteur vitesse en coordonnées polaires par rapport au temps :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \equiv \dot{\vec{v}} = \frac{d}{dt}(\dot{r}\vec{\tau} + r\dot{\theta}\vec{n}) = \ddot{r}\vec{\tau} + \dot{r}\dot{\vec{\tau}} + \dot{r}\dot{\theta}\vec{n} + r\ddot{\theta}\vec{n} + r\dot{\theta}\dot{\vec{n}} \tag{36}$$

Puisque

$$\dot{\vec{\tau}} \equiv \frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d}{dt}(\cos\theta\cdot\vec{i} + \sin\theta\cdot\vec{j}) = -\dot{\theta}\sin\theta\cdot\vec{i} + \dot{\theta}\cos\theta\cdot\vec{j} = \dot{\theta}\,(-\sin\theta\cdot\vec{i} + \cos\theta\cdot\vec{j}) = \dot{\theta}\,\vec{n}$$

$$\dot{\vec{n}} \equiv \frac{d\vec{n}}{dt} = \frac{d}{dt}(-\sin\theta\cdot\vec{i} + \cos\theta\cdot\vec{j}) = -\dot{\theta}\cdot\cos\theta\cdot\vec{i} - \dot{\theta}\cdot\sin\theta\cdot\vec{j} =$$

$$= -\dot{\theta}\,(\cos\theta\cdot\vec{i} + \sin\theta\cdot\vec{j}) = -\dot{\theta}\,\vec{\tau} \tag{37}$$

l'expression de $\vec{a}$ devient.

$$\vec{a} = \vec{\tau}(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) + \vec{n}(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \tag{38}$$

Le terme $\vec{a}_r = (\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2)\,\vec{\tau}$ est un vecteur parallèle à $\vec{r}$. On l'appelle accélération radiale.
Le terme $\vec{a}_\theta = (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\,\vec{n}$ est un vecteur perpendiculaire à $\vec{r}$. On l'appelle accélération transversale ou orthoradiale. Les modules de ces deux vecteurs sont appelés composantes de l'accélération en coordonnés polaires.

$$a_r = \ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2\,, \qquad a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \tag{39}$$

Le module du vecteur accélération en coordonnées polaires :

$$|\,\vec{a}\,| \equiv a = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}} = \sqrt{(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})^2} \tag{40}$$

7. Composantes intrinsèques du vecteur accélération: accélération tangentielle et accélération normale.

Définitions.

a) <u>Plan osculateur</u> : Soit une courbe gauche (C) et trois points P_2 , P, P_1 sur (C). Considerons le plan contenant les points P_2 , P, P_1 . Quand P_2 , $P_1 \rightarrow$ P, le plan considéré a pour limite le plan osculateur en P à la courbe (C). De cette définition resulte que le plan osculateur traverse en general la courbe (C).

b) <u>Trièdre fondamental de référence</u>: Soit une courbe gauche (C) et le point P sur (C). Considérons le plan osculateur en P à la courbe gauche (C). L'intersection de ce plan et du plan normal en P à la tangente PT à (C) définit une droite appelée normale principale PN en P à (C). La droite PB perpendiculaire en P sur le plan qui contient les droites PN et PT est appelée binormale. On oriente la normale principale PN à l'aide d'un vecteur unitaire $\vec{n}$ dirigé dans le sens de la concavité et la tangente PT par le vecteur unitaire $\vec{\tau}$ dirigé dans le sens de mouvement du point P. La direction de la binormale est definit par le vecteur unitaire $\vec{b}$ dirigé de sorte que les vecteurs $\vec{n}$, $\vec{\tau}$, $\vec{b}$, forment un trièdre droit appelé trièdre fondamental de référence (Fig. II.8). Puisque l'origine du trièdre fondamental se trouve dans le point P en résulte que le trièdre fondamental definit un système mobile de coordonnées.Le plan osculateur en P à la courbe gauche(C) contient les vecteurs vitesse et accélération de P.

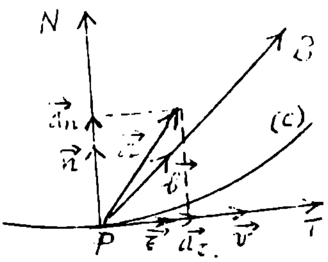


Fig. II.8

c) <u>Remarques sur les composantes des vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{a}$ dans le trièdre fondamental de référence</u>:

c_1) Etant donné que le vecteur vitesse $\vec{v}$ a la même direction que la tangente PT (voir Fig. II.8) on peut tiré la conclusion

$$v_\tau = v \quad , \quad v_n = 0 \quad , \quad v_b = 0 \tag{41}$$

où l'indices τ, n, b désignent les direction des tangente, normale principale et binormale.

c_2) En ce qui concerne les projection de l'accélération sur les axes du trièdre fondamental de référence on peut faire les commentaires suivantes:

Soit deux positions rapprochées du point matériel, P_1 et P_2 sur la courbe (C) et les vecteurs vitesse correspondants $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$. À la limite ($P_1 \rightarrow P_2$) les deux vecteurs $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ se trouvent <u>dans le plan osculateur</u> et par conséqent le vecteur $\Delta\vec{v} = \vec{v_2} - \vec{v_1}$ se trouve lui aussi dans le même plan. On peut tiré, donc, la conclusion que le vecteur accélération $\vec{a}$ ($\vec{a}_m = \Delta\vec{v}/\Delta t \rightarrow \vec{a}$ si $P_1 \rightarrow P_2$) este situé dans le plan osculateur. Puisque celui-ci est défini par la tangente et la normale principale, en résulte que $a_b = 0$ (voir Fig. II.8).

d) Courbure et rayon de courbure. Soit un cercle (C) de centre C et de rayon R, P et P_1 deux points voisins sur la circonférence, PT et P_1T_1 les tangentes en P et P_1. Posons $\Delta\theta = \widehat{PCP_1}$ (Fig.II.9).

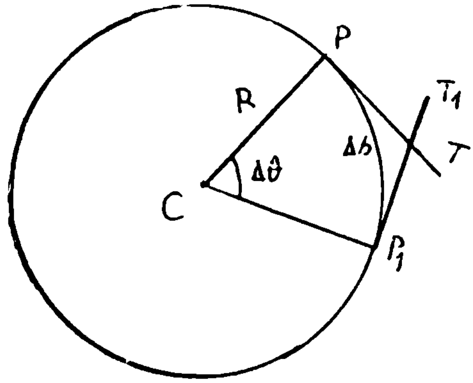


Fig.II.9

$\Delta s \equiv \widehat{PP_1} = R\,\Delta\theta$. La quantité $\frac{1}{R} = \frac{\Delta\theta}{\Delta s}$ est dite courbure du cercle.

Le centre C du cercle est placé sur la normale principale à (C) en P, du côté de la concavité et la distance R de P: PC=R

Considérons maintenant une courbe gauche et conservons les mêmes notations. Par définition, la courbure de la courbe (C) en P est la limite du rapport $\Delta\theta$/arc PP_1 quand P_1 tend vers P (arc $PP_1 = \Delta s$):

$$\frac{1}{\rho} = \lim_{P_1 \to P} \frac{\Delta\theta}{\widehat{PP_1}}; \qquad \rho = \lim_{P_1 \to P} \frac{\Delta s}{\Delta\theta} = \frac{ds}{d\theta}; \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds} \tag{42}$$

ρ est le rayon de coubure de (C) en P. On obtient le centre de courbure en portant sur la normale principale à (C) en P, dans la concavité, la longueur PC = ρ. Remarque: Le rayon de courbure d'une droite est égal à ∞.

e) Accélération tangentielle et accélération normale. Les composantes du vecteur accélération de la particule placée à l'instant t en P sur la courbe gauche (C), suivant les deux directions orthogonales constituées par la normale pincipale PN et la tangente PT sont appelées respectivement accélération normale $\underline{a_n}$ et accélération tangentielle $\underline{a_\tau}$ (Fig.II.8)

On pose:

$$\vec{a}_\tau = a_\tau \vec{\tau} \quad \text{et} \quad \vec{a}_n = a_n \vec{n}$$

Le vecteur vitesse à l'instant t est défini par la relation (13) $\vec{v} = \dot{s}\vec{\tau} \equiv v\vec{\tau}$.

D'après (20), le vecteur accélération $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\vec{\tau})$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + v\frac{d\vec{\tau}}{dt} \equiv \dot{v}\vec{\tau} + v\dot{\vec{\tau}} \tag{43}$$

Pour trouver l'expression de la dérivcé $\frac{d\vec{\tau}}{dt} \equiv \dot{\vec{\tau}}$ on utilise les relation (29):

$$\vec{\tau} = \cos\theta \cdot \vec{i} + \sin\theta \cdot \vec{j}$$
$$\vec{n} = -\sin\theta \cdot \vec{i} + \cos\theta \cdot \vec{j} \tag{44}$$

Dérivons la première relation par rapport au temps:

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} \equiv \dot{\vec{\tau}} = -\dot{\theta}\sin\theta \cdot \vec{i} + \dot{\theta}\cos\theta \cdot \vec{j} = \dot{\theta}\,(-\sin\theta \cdot \vec{i} + \cos\theta \cdot \vec{j}) = \dot{\theta}\,\vec{n} \tag{45}$$

D'autre part:

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{d\theta}{ds} \cdot v \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds} \qquad \text{(voir (42))}$$

Par conséquent:

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \dot{\theta}\vec{n} = \frac{d\theta}{ds}v\vec{n} = \frac{1}{\rho}v\vec{n} \tag{46}$$

Portant (46) en (43) on obtient l'expression du vecteur accélération :

$$\vec{a} = \dot{v}\vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\vec{n} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\vec{n} \quad \Rightarrow a = \sqrt{\dot{v}^2 + v^4/\rho^2} \Rightarrow \rho = \frac{v^2}{\sqrt{a^2 - \dot{v}^2}} \tag{47}$$

Les composantes tangentielle $\vec{a}_\tau$ et normale $\vec{a}_n$ de l'accélération sont:

$$\vec{a}_\tau = \dot{v}\vec{\tau} \equiv \frac{dv}{dt}\vec{\tau}, \quad \vec{a}_n = \frac{v^2}{\rho}\vec{n}; a_\tau = \dot{v}, \quad a_n = {v^2}/{\rho} \tag{48}$$

Ce résultat montre que le vecteur accélération $\vec{a}$ est contenu dans le plan définit par les vecteurs $\vec{\tau}$ et $\vec{n}$ et ce plan est le plan osculateur. Le vecteur $\vec{a}$ n'a pas de composante suivant la binormale à la trajectoire, $\vec{a}_b = 0$.

L'accélération tangentielle ne fait varier que le module de la vitesse, tandis que l'accélération normale ne fait varier que sa direction.

8 Mouvement rectiligne uniforme d'un point matériel.

Definition : Un mouvement d'un P M est rectiligne uniforme si le vecteur vitesse $\vec{v}$ de celui-ci est toujours constant (en direction, sens et module).

$$\vec{v} = \text{constant} = \vec{C} \tag{49}$$

Théorème :

a) Pour qu'un mouvement d'un P.M. soit rectiligne uniforme il faut et il suffit que le vecteur accélération soit constamment nul $(\vec{a} = \vec{0})$.

Démonstration:

Le théorème directe : Par hypothèse le vecteur vitesse $\vec{v}$ du P M est constant, $\vec{v} = \vec{c}$.

Donc:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{c}}{dt} = \vec{0}$$ La condition est donc nécesaire .

Le théorème inverse: Si $\vec{a} = \vec{o}$, on peut ecrire (voir (47)):

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\vec{n} = \vec{0} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = 0, \quad \frac{v^2}{\rho} = o \quad ; \quad \left(ou\ \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{v} = \vec{c}\right) \tag{50}$$

La relation ${v^2}/{\rho} = o$ $(a_n = o)$ implique $\rho = \infty$. Donc la trajectoire du P.M. est rectiligne (le rayon de courbure d'une droite est toujours égal à ∞).

La relation ${dv}/{dt} = \dot{v} = o$ $(a_\tau = 0)$ implique v = constant (la vitesse est de module constant).

En conclusion, la condition est suffisante.

b) Equation du mouvement :

Prenons l'axe OX sur la trajectoire et notons par x = x(t) l'abscisse de la particule. Par conséquent, le vecteur de position du P M s'écrit (II.10) $\vec{r}(t) = x(t)\,\vec{i}$.

Puisque,

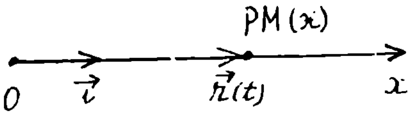


Fig. II.10.

$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}\vec{i} \equiv v_x\vec{i} = \vec{C} \equiv v_o\vec{i}$ (on a noté le vecteur $\vec{C}$ par $v_o\vec{i}$) l'on obtient $\frac{dx}{dt} = v_o \Rightarrow$ dx = $v_0$dt . Intégrons cette relation

$$\Rightarrow \int_0^t dx = v_o \int_0^t dt \Rightarrow x = v_o t$$ = équation du mouvement du P.M. (où $x(t) \equiv x$, $x(0) = 0$).

Quand t varie de 0 à l'infini le point matériel se déplace de 0 à l'infini dans le sens positif ou négatif suivant que v_o est positif ou négatif.

9. Mouvement rectiligne uniformément varié.

a) Définition: C'est un mouvement rectiligne d'accélération tangentielle $\mathbf{a}_\tau = \mathbf{a}_0$ constante $\neq 0$.

Prenons la trajectoire sur l'axe Ox $\left(v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = v_x ,\ v_y = 0 \right)$:

$$a_\tau = \frac{dv_x}{dt} = a_o \neq 0 \Leftrightarrow dv_x = a_o dt \qquad (51)$$

Remarques : 1) Puisque le mouvement est rectiligne ($\rho = \infty$) l'accélération normale

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = 0\ ,\quad \vec{a}_n = \frac{v^2}{\rho}\vec{n} = \vec{o}$$

2) Le vecteur unitaire $\vec{\tau}$ est dirigé toujours au long de l'axe Ox (Fig. II.11), $\vec{\tau}$ = constant. En resulte que :

$$\vec{\mathbf{a}} \equiv \vec{\mathbf{a}}_\tau = \mathbf{a}_\tau \cdot \vec{\tau} = \mathbf{a}_0 \cdot \vec{\tau} \equiv \vec{\mathbf{a}}_0 = \text{constante} \qquad (52)$$

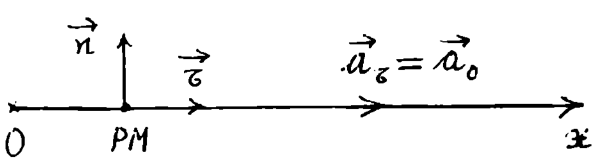


Fig. II.11

b) Equation du nouvement : En integrant par rapport au temps la relation (51) :

$$\int_0^t dv_x = a_o \int_0^t dt \Rightarrow v_x - v_o = a_0 t \qquad \text{où } v_x(t) \equiv v_x,\ v_x(0) \equiv v_o . \qquad (53)$$

on trouve l'equation de la vitesse dans un mouvement rectiligne uniformement varié d'un P.M. :

$$v_x = v_o + a_0 t \Leftrightarrow \frac{dx}{dt} = v_o + a_0 t, dx = v_0 dt + a_0 t \cdot dt \qquad (54)$$

Par une nouvelle intégration, la derniere equation (54) conduit à :

$$\int_0^t dx = v_o \int_0^t dt + a_o \int_0^t t \cdot dt \Rightarrow x - x_o = v_o t + a_o \cdot \frac{t^2}{2} \quad \text{où} \quad x(t) = x,\ x(0) = x_o \qquad (55)$$

L'équation du mouvement rectiligne uniformément varié d'un P.M. s'écrit:

$$x = a_o \frac{t^2}{2} + v_o t + x_o$$

10. Mouvement circulaire uniforme.
Vitesse angulaire.

a) Définition: Le mouvement circulaire uniforme est un mouvement à vitesse scalaire constante ($|\vec{v}|$ = constant) dont la trajectoire est portée par une circonférence (Fig.II.12). En d'autres terms, la vitesse linéaire $\vec{v}$ est constante en grandeur (module) dans le mouvement circulaire uniforme.

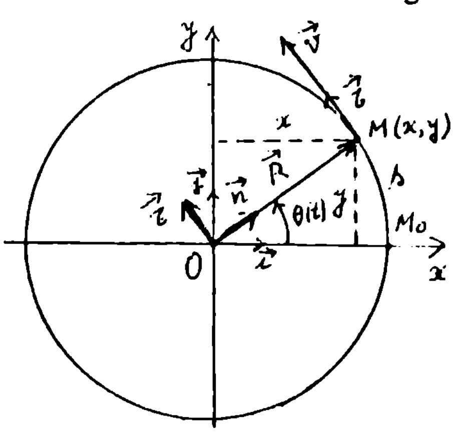


Fig.II.12

Soit O le centre du cercle de rayon R, M_o la position de la particule à l'instant t = 0 et M sa position à l'instant t $\overset{\frown}{M_oM}$ = s. Posons $\theta = (\widehat{OM_o, OM})$; $s = R\theta$. D'où

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(R\theta) = R\frac{d\theta}{dt} = \text{constante} \qquad (57)$$

On appelle vitesse angulaire ω l'expression $\omega = \frac{d\theta}{dt}$, exprimée en radians par seconde. On a ici, ω=constante. Dans le mouvement circulaire uniforme l'angle définissant la position de M est donc une fonction linéaire du temps. En effet:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \omega dt = d\theta \Rightarrow \int_0^t \omega dt = \int_0^t d\theta \Rightarrow \omega t = \theta, \qquad (58)$$

où $\theta(t) = \theta,\ \theta(0) = 0$.

b) Etude du mouvement

b_1) L'expression de la vitesse linéaire

Soit $\vec{n}$ le vecteur unitaire tournant porté par le vecteur de position $\overrightarrow{OM} = \vec{R}(t)$, $\vec{i}$ et $\vec{j}$ les vecteur unitaires sur les axes Ox et Oy.

$$\vec{R}(t) = x\vec{i} + y\vec{j} = R\cos\theta\ \vec{i} + R\sin\theta\ \vec{j} = R\cos\omega t \cdot \vec{i} + R\sin\omega t \cdot \vec{j}$$

$$\vec{n}(t) = \cos\theta\ \vec{i} + \sin\theta\ \vec{j} = \cos\omega t \cdot \vec{i} + \sin\omega t \cdot \vec{j}$$

et

$$\vec{R}(t) = R(\cos\omega t \cdot \vec{i} + \sin\omega t \cdot \vec{j}) = R\ \vec{n}(t) \qquad (59)$$

Vitesse linéaire

$$\vec{v} = \frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{d}{dt}(R\vec{n}(t)) = R\frac{d\vec{n}}{dt} = R\frac{d}{dt}(\cos\omega t\cdot\vec{i} + \sin\omega t\cdot\vec{j}) =$$

$$= R(-\omega\sin\omega t\cdot\vec{i} + \omega\cos\omega t\cdot\vec{j}) = \omega R(-\sin\omega t\cdot\vec{i} + \cos\omega t\cdot\vec{j}) \qquad (59')$$

Suivant les relations (29) le vecteur unitaire $\vec{\tau}$ de $\vec{v}$ a l'expression:

$$\vec{\tau} = -\sin\omega t\cdot\vec{i} + \cos\omega t\cdot\vec{j} \qquad (60)$$

Par suite:

$$\vec{v} = \omega R\,\vec{\tau} \qquad (61)$$

La vitesse linéaire $\vec{v}$ est donc tangente au cercle et dirigée dans le sens des θ croissant.

Le module de la vitesse linéaire $\vec{v}$

$|\vec{v}| = |R\omega\vec{\tau}| = |R|\,|\omega|\,|\vec{\tau}| = R\omega$, $|\vec{\tau}| = 1$; $\qquad v = \omega R$

Remarque: Le module du vecteur vitesse linéaire peut être retrouvé en appliquant la définition du module d'un vecteur:

$$v = \sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}} = \omega R\sqrt{(-\sin\omega t\cdot\vec{i} + \cos\omega t\cdot\vec{j})\cdot(-\sin\omega t\cdot\vec{i} + \cos\omega t\cdot\vec{j})} =$$

$$= \omega R\sqrt{\sin^2\omega t + \cos^2\omega t} = \omega R \qquad (62)$$

b_2) Vecteur rotation à l'instant t

Soit Oz perpendiculaire au plan XOY du cercle. Considérons le vecteur $\vec{\omega}$ porté par Oz et de valeur algébrique (module) ω.

Le sens du vecteur $\vec{\omega}$ est tel que le trièdre $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{PV}$ et $\vec{\omega}$ soit trirectangle et direct, c'est-à-dire de même sens que le trièdre de référence Oxyz (Fig.II.13).

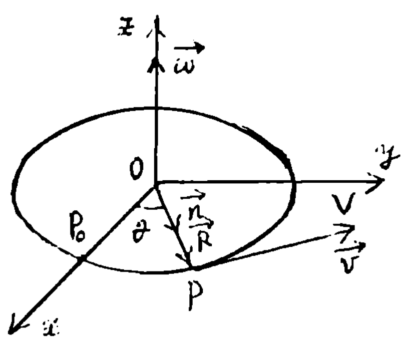


Fig.II.13

Le vecteur $\vec{\omega}$ est appelé vecteur rotation à l'instant t. On peut donc écrire:

$$\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{R} \qquad (63)$$

b_3) Vecteur accélération à l'instant t.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{R}}{dt^2}\ ; \qquad (64)$$

$$\vec{a} = \omega R\frac{d}{dt}(-\sin\omega t\cdot\vec{i} + \cos\omega t\cdot\vec{j}) =$$

$$= \omega R(-\omega\cos\omega t\cdot\vec{i} - \omega\sin\omega t\cdot\vec{j}) =$$

$$= -\omega^2 R(\cos\omega t\cdot\vec{i} + \sin\omega t\cdot\vec{j}) =$$

$$= -\omega^2 R\vec{n}(t) \qquad (65)$$

En conclusion,

$$\vec{a} = -\omega^2 R\vec{n}(t) \qquad (66)$$

Sa direction est celle de $\vec{R}$, et son sens celui de $\vec{n}$. $\vec{a}$ est dirigé de P vers 0. Le vecteur accélération est dirigé vers le centre du cercle. On dit que l'accélération est centripète.

$$\vec{a} = -\omega^2\vec{R},\ \vec{R} = R\vec{n} \qquad (67)$$

Le vecteur accélération a pour module

$$a = \left|-\omega^2\vec{R}\right| = \omega^2 R = \frac{v^2}{R},\ a = \frac{v^2}{R} \qquad (68)$$

Remarque: On peut déterminer le vecteur accéléation en faisant intevenir le vecteur rotation à l'instant t:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{R} \ ; \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{\omega} \times \frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R}) \cdot \qquad (69)$$

$\vec{\omega} \times \vec{v}$ est un vecteur dirigé suivant PO et a pour module:

$$\left|\vec{\omega} \times \vec{v}\right| = \omega v \sin\frac{\pi}{2} = \omega v = \omega(\omega R) = \omega^2 R \qquad (70)$$

On retrouve bien les résultats prècèdents.

11. Mouvement circulairenon uniforme.

a) Définition ; Dans ce mouvement circulaire, la vitesse angulaire ω n'est pas constante:

$$\frac{d\omega}{dt} \neq 0$$

On appelle accélération angulaire du mouvement le scalaire:

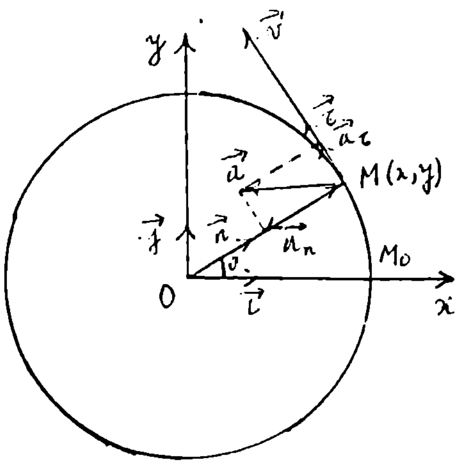


Fig.II.14

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \neq 0 \qquad (71)$$

b) Etude du mouvement

b_1) L'expession de la vitesse linéaire :

Le vecteur de position:

$$\vec{R}(t) = R\vec{n}(t) = x\vec{i} + y\vec{j} = R\cos\theta \cdot \vec{i} + R\sin\theta \cdot \vec{j} =$$
$$= R(\cos\theta \cdot \vec{i} + \sin\theta \cdot \vec{j}) \ ;$$
$$\theta = \omega t \qquad (72)$$

On trouve, comme précédemment, que le vecteur vitesse a une direction perpendiculaire à OM, un module égal à Rω, et est dirigé dans le sens du mouvement:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[R(\cos\omega t \cdot \vec{i} + \sin\omega t \cdot \vec{j})\right] =$$
$$= R\omega(-\sin\omega t \cdot \vec{i} + \cos\omega t \cdot \vec{j}) = R\omega\vec{\tau} \qquad (73)$$

La différence par rapport au mouvement circulaire uniforme conceme le calcul du vecteur accéléation.

b_2) L'expression de l'accélération.

Dérivons l'expression (73) par rapport au temps:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -R\omega^2(\cos\omega t \cdot \vec{i} + \sin\omega t \cdot \vec{j}) + R \cdot \frac{d\omega}{dt} \cdot (-\sin\omega t \cdot \vec{i} + \cos\omega t \cdot \vec{j});$$

$$\vec{a} = (-R\omega^2)\vec{n} + (R\alpha)\vec{\tau} \qquad (74)$$

La composante normale du vecteur accélération est centripète (Fig.II.14):

$$\vec{a}_n = -R\omega^2\vec{n} \quad \text{et de module} \quad a_n = R\omega^2 = \frac{v^2}{R} \qquad (75)$$

La composante tangentielle du vecteur accélération est:

$$\vec{a}_t = R\alpha\vec{\tau} \quad \text{de module} \quad a_t = R\alpha = \frac{dv}{dt} \qquad (76)$$

Le vecteur accélération est déterminé par ses composantes. Il apparaît comme la somme d'un accélération normale $\vec{a}_n$ et d'un accélération tangentielle <u>colinéaire</u> au vecteur vitessee $\vec{a}_t$.

c) <u>Mouvement circulaire uniformément accéléré.</u>

<u>Définition</u>: Le mouvement circulaire uniformément accéléré est défini par:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \text{constante} \tag{77}$$

Dans ce cas, le mouvement circulaire est uniformément accéléré. Par intégration de l'équation de définition, on obtient:

$$\int_{\omega_o}^{\omega} d\omega = \int_{t_o}^{t} \alpha dt = \alpha \int_{t_o}^{t} dt \tag{78}$$

Soit

$$\omega = \omega_o + \alpha(t - t_o) \quad \text{- } \underline{\text{Equation de la vitesse angulaire}} \tag{79}$$

où ω_o est la valeur de ω pour $t = t_o$: $\omega(t_o) \equiv \omega_o$

On a donc:

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_o + \alpha(t - t_o) \Rightarrow d\theta = \omega_o dt + \alpha(t - t_o)dt \tag{80}$$

D'où, en intégrant

$$\int_{\theta_o}^{\theta} d\theta = \int_{t_o}^{t} \omega_o dt + \alpha \int_{t_o}^{t} (t - t_o)dt \tag{81}$$

et

$$\theta = \theta_o + \omega_o(t - t_o) + \frac{1}{2}\alpha(t - t_o)^2 \quad \text{- } \underline{\text{Equation du mouvement}} \tag{82}$$

Cette relation donne la valeur de l'angle θ pour n'importe quelle valeur de t.

III. Les lois de Newton

Ce chapitre est consacré à l'exposé des lois fondamentales de la Dynamique , partie de la mécanique classique qui a pour objet l'étude du mouvement d'un corps (ou point matériel) soumis à l'action des forces.

La force agissant sur un corps sert de mesure des interactions de ce corps avec les objets matériels qui l'entourent (autres corps matériels ou champs de force).

Les lois de la dynamique ont été établies par Newton et portent donc son nom.

Comme tous les principes fondamentaux de la Physique, les lois de la dynamique sont des généralisations de faits expérimentaux.

Ces lois doivent être considérées non comme des propositions isolées et indépendantes, mais comme un système de lois intercorrélées . La vérification expérimentale ne porte pas sur chacune de ces lois, mais sur tout l'ensemble.

1. La loi d'inertie. Référentiel d'inertie (galiléen)

La première loi de Newton n'est autre que la loi d'inertie de Galilée. D'après cette loi, tout point matériel (particule) non soumis à des actions extérieures (isolé) se trouve soit au repos, soit en mouvement rectiligne et uniforme par rapport à un référentiel d'inertie.

Dans les deux cas le vecteur accélération du point matériel est constammen nul, $\vec{a} = \vec{0}$.

Si un particule est très éloignée de tout objet matériel, elle peut être considérée comme isolé, aucune action mécanique ne s'exerce sur elle. Le mouvement d'un tel point matériel (PM) est dit mouvement d'inertie. Au voisinaje de la Terre, il n'existe pas en réalité de particule "isolée". Si initialment le PM isolé est au repos par rapport à un référentiel d'inertie (RI) il continue à être dans cet état indéfiniment. Si par contre il posède une vitesse initiale $\vec{v}_0$, il conserve indéfiniment cette vitesse ($\vec{v}_0$ = constante). Le PM est alors animé d'un mouvement rectiligne et uniforme.

a) Référentiel d'inertie (galiléen). Définition.

La loi de l'inertie pose avec acuité la question du choix d'un système de référence (SR) . Si dans un certain référentiel le mouvement d'un PM est rectiligne et uniforme, dans un référentiel qui se déplace avec accélération par rapport au premier référentiel, sera différent. Il s'ensuit que la loi d'inertie ne peut être vérifiée dans tous les systèmes de référence.

La mécanique classique postule qu'il existe un système de référence dans lequel tous les points matériels isolés ont un mouvement rectiligne et uniforme . Ce système porte le nom de référentiel d'inertie (galiéen) (RI).

Il existe au moins un RI. Tout référentiel qui se meut à une vitesse $\vec{v}$ constante par rapport à un RI est par définition, inertiel.

b) Recherche de référentiels galiléens.

b_1) Référentiel lié à la Terre (terrestre): Ce repère possède une accélération résultant de la rotation de la Terre autour de son axe. Il n'est donc pas galiléen. En effet, par rapport à ce référentiel, les étoiles considérées pratiquement des points isolés, effectuent un mouvement non pas rectiligne, mais circulaire(Fig. III.1).

b_1') Recherchons la valeur de l'accélération centripète d'un PM situé sur l'équator:

$$a = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{24 \cdot 3600} = 0,73 \cdot 10^{-4}\ \text{rad/s} ; \quad R=6,4 \cdot 10^6\ \text{m}$$

$$a = (0,73 \cdot 10^{-4})^2\ (6,4 \cdot 10^6) \cong 3,4 \cdot 10^{-2}\ \text{m}/\text{s}^2$$

Cette accélération n'est pas négligeable. Le principe d'inertie ne s'aplique donc pas dans un repère lié à la Terre. Remarque : En un temps relativement court, de l'ordre de quelques minutes, un référentiel terrestre peut , avec une bonne approximation, être considéré comme galiléen.

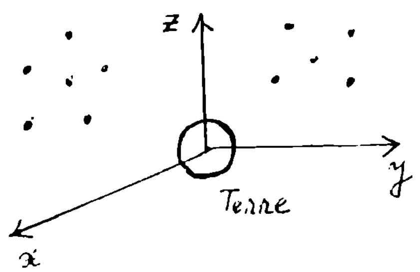


Fig.III.1

Les étoiles, fixes dans un repère galiléen, tournent pour un observateur lié à la Terre. Le repère lié à la Terre n'est pas galiléen.

b_1'') Accélération de la terre dans son mouvement par rapport au Soleil. Supposons que la trajectoire de la Terre dans son mouvement autour du Soleil soit portée par une orbite circulaire, de rayon $R = 1,5 \cdot 10^{11}\ \text{m}$. Son accélération centripète a pour valeur $a = \omega^2 R$ avec

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{365 \cdot 24 \cdot 3600} \cong 2 \cdot 10^{-7}\ \text{rad}/\text{s}$$

$$a = (2 \cdot 10^{-7})^2 (1,5 \cdot 10^{11}) \cong 6 \cdot 10^{-3}\ \text{m}/\text{s}^2$$

Cette accélération est environ 5,7 fois inférieure à celle dû au mouvement de la terre sur elle-même.

b_2) Le système de référence héliocentrique (Repère lié au Soleil) appelé aussi référentiel copernicien on sidéral.

Il a l'origine placée au centre du Soleil et les axes de coordonnées sont des droites joignant ce centre à trois étoiles extrêmmement éloignées et ne se trouvant pas dans un même plan. Supposons que le Soleil soit animé d'un mouvement circulaire uniforme dans son déplacement autour du centre de la Galaxie. La vitesse du Soleil est $v = 3 \cdot 10^5\ \text{m}/\text{s}$ et le rayon de son orbite $R \cong 3 \cdot 10^{20}\ \text{m}$. Son accélération est donc

$$a = v^2 / R = 9 \cdot 10^{10} / 3 \cdot 10^{20} = 3 \cdot 10^{-10}\ \text{m}/\text{s}^2$$

a est très petite. On peut alors considérer un repère lié au Soleil comme un repère non accéléré. Pratiquement, le référentiel copernicien est un système inertiel , tout au moins en ce qui concerne les mouvements à l'échelle de notre système planétaire. Cette proposition est confirmée par des expériences en majorité indirectes. Les principes de la dynamique régissent les mouvement des particules par rapport au "repère sidéral".

c) L'inertie et la masse du corps.

L'inertie : Chaque fois que l'on charche à mettre un corps en mouvement, à modifier le module, la direction ou le sens de la vitesse d'un corps celui-ci oppose une résistance à ces changements. Cette aptitude des corps à s'oposer au changements de leurs états de repos ou de mouvement s'appelle inertie . La grandeur physique caractérisant l'inertie d'un corps s'appelle masse du corps. En mécanique newtonienne la masse m d'un point materiel ne depend pas de la vitesse $\vec{v}$ de celui-ci . En mecanique relativiste $m = m_0 / \sqrt{1 - v^2 / c^2}$.

d) Impulsion ou quantité de mouvement d'un point matériel

Appelons impulsion ou quantité de mouvement d'un PM le vecteur défini comme le produit de la masse du PM par sa vitesse $\vec{p} = m\vec{v}$

2. Principe fondamental de la dynamique, ou deuxième loi de Newton.

Si le PM n'est pas isolé, par rapport au repère sidéral il est indiqué de caractériser l'intensité des interaction du PM avec les corps environnants par la dérivée de l'impulsion par rapport au temps $\frac{d\vec{p}}{dt} \equiv \dot{\vec{p}}$. Une des principales généralisation de la mécanique classique consiste à affirmer que dans un RI la dérivée $\dot{\vec{p}}$ dépend de la position du PM considéré par rapport au corps environnant et parfois de sa vitesse $\vec{v}$. Donc, cette dérivée est fonction du rayon vecteur $\vec{r}$ (vecteur de position), de la vitesse $\vec{v}$ du PM et du temps t. Désignons cette fonction par $\vec{F}(\vec{r},\vec{v},t)$. On écriva alors

$$\frac{d\vec{p}}{dt} \equiv \dot{\vec{p}} = \vec{F}(\vec{r},\vec{v},t) \qquad (1)$$

La fonction des coordonnées, de la vitesse du point matériel et du temps $\vec{F}(\vec{r},\vec{v},t)$ qui détermine la dérivée de son impulsion par rapport au temps porte le nom de force. La force est un vecteur, car elle résulte de la dérivation du vecteur $\vec{p}$ par au scalaire t.

Ainsi dans un RI la dérivée de l'impulsion d'un PM par rapport au temps est égale à la force qui lui est appliquée.

Cette proposition porte le nom de deuxième loi de Newton L'équation (1) exprimant cette loi est l'équation différentielle du mouvement du P.M.

Dans le cas de mouvement aux vitesse non relativiste on peut négliger la variation de la masse avec la vitesse et écrire la deuxième loi de Newton sous la forme

$$\dot{\vec{p}} \equiv \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\dot{\vec{v}} = \vec{F}(\vec{r},\vec{v},t) \qquad (2)$$

soit

$$m\ddot{\vec{r}} \equiv m\vec{a} = \vec{F}(\vec{r},\vec{v},t) \qquad (3)$$

Dans un SI le produit de la masse d'un PM par l'accélération est égal à la force appliquée.

Dans cette relation le coefficient positif m caractéristique de la particule est appelé masse inerte de la particule.

La mécanique physique a pour object essentiel la détermination de la forme de la fonction $\vec{F}(\vec{r},\vec{v})$ dans chaque cas concret.

3. La troisième loi de Newton.

Considérons un système isolé (fermé) constitué par deux points matériels interagissant entre eux . Soit $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$ les forces qu'exercent l'un sur l'autre les points matériels du système.

L'énoncé de la troisième loi de Newton:

Les forces d'interaction s'exercant entre deux points matériels ont même module, sont de sens opposés et sont dirigées suivant la droite reliant ces points l'un à l'autre. La loi est valable dans un RI

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 \qquad (4)$$

Selon Newton, l'une de ces forces peut être appelée action, et l'autre, réaction.

La troisième loi s'énonce alors comme suit:

A toute action correspond une réaction égale et de sens opposé. L'unité de force dans le Système International (SI). L'unité de force dans SI est appelée le newton (N)

$$1N = 1kg \cdot 1ms^{-2}$$

4. Validité d'application des lois de Newton.

Les lois de Newton sont valable par rapport à des repères privilégiés, appelés repères galiléens (référentiels d'inertie). On se souvient la définition de celui-ci: on appelle repère galiléen un repère qui n'est pas accéléré. Un repère galiléen est représenté par un trièdre direct, orthonormé Oxyz. Le repère sidéral (système d'axes de Copernic) est, à une bonne approximation, un repère galiléen (voir ce même chapitre §a). Les lois de Newton ne sont pas valable dans un repère accéléré.

5. Equations de Mac Laurin

Soit un repère galiléen Oxyz. La projection de la relation fondamentale (3) sur les trois axes de coordonnés fournit les équations de Mac Laurin. Les coordonnées d'un PM à l'instant t sont x,y,z.

$$F_x = ma_x\,,\quad F_y = ma_y\,,\quad F_z = ma_z$$

ou (5)

$$F_x = m\ddot{x} = m\frac{d^2x}{dt^2},\quad F_y = m\ddot{y} = m\frac{d^2y}{dt^2},\quad F_z = m\ddot{z} = m\frac{d^2z}{dt^2}$$

Elles constituent un système de trois équations différentielles du second ordre qui permettent de déterminer x, y, z en fonction du temps connaissant les six conditions initiales (ou deux conditions vectorielles initiales).

6. Importance des conditions initiales. Le principe des conditions initiales.

L'équation vectorielle (3) :

$$m\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \vec{F}(\vec{r},\vec{v},t) \tag{6}$$

qui exprime le mouvement d'un point matériel est une équation différentielle du deuxième ordre. (L'ordre d'une équation différentielle est donné par la dérivée la plus élevée figurant dans l'équation). Sa solution $\vec{r} = \vec{r}(t)$ sous la forme générale :

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t,\vec{C}_1,\vec{C}_2) \tag{7}$$

représente l'équation du mouvement sous forme vectorielle du PM.

Les deux constantes vectorielles $\vec{C}_1$ et $\vec{C}_2$ qui résultent de l'intégration de l'équations (6) sont arbitraires. Par conséquent, l'équation du mouvement (7) n'est pas univoquement déterminée. En d'autres termes à un moment donné $t=t_0$, le vecteur de position $\vec{r}(t_o) = \vec{r}(t_o,\vec{C}_1,\vec{C}_2)$, le vecteur vitesse $\vec{v}(t_o) = \dot{\vec{r}}(t_o,\vec{C}_1,\vec{C}_2)$ et le vecteur accélération ne peuvent être univoquement déterminés. Pour décrire univoquement le mouvement du PM, il faut adjoindre à l'équation du mouvement (7) des données supplémentaires. Le plus souvent ces données sont les valeurs du rayon vecteur $\vec{r}$ et de la vitesse $\vec{v}$ à l'instant t=0. Ces valeurs portent le nom de condition initiales. En effet, si on suppose au moment t=0, $\vec{r}(0) = \vec{r}_0$ et $\vec{v}(0) = \vec{v}_0$, le système de deux équation aux deux inconnues $\vec{C}_1$, $\vec{C}_2$:

$$\vec{r}(0) = \vec{r}_0 = \vec{r}(0,\vec{C}_1,\vec{C}_2) \quad \text{et} \quad \vec{v}(0) = \dot{\vec{r}}(0,\vec{C}_1,\vec{C}_2) = \vec{v}_0 \tag{8}$$

fourni les valeurs de ceux-ci.

Le principe des conditions initiales:

La connaissance des vecteurs de position $\vec{r}(t)$ et vitesse $\vec{v}(t)$ du PM à un moment donné $t = t_0 = 0$, $\vec{r}(0) = \vec{r}_0$, $\vec{v}(0) = \vec{v}_0$, à partir de l'équation différentielle du mouvement $m\vec{a} = \vec{F}$, il est possible de déterminer les valeurs de ces deux vecteurs pour n'importe quel moment du temps t ultérieur.

En conclusion, une seule équation différentielle vectorielle (6) ne suffit donc pas à la détermination univoque du mouvement d'un PM.

Nous allons illustrer ces considérations par l'étude du mouvement libre d'un PM dans le champ de la gravité terrestre.

7 Le mouvement d'un point matériel soumis à l'action de la pesanteur.

Dans le champ de la gravité terrestre tout corps est soumis à une force $\vec{F} = m\vec{g}$ constante (Fig. III.2). Par suite l'équation différentielle du mouvement (6) doit s'écrire :

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = m\vec{g} \rightarrow \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{g} = \vec{C} \qquad (9)$$

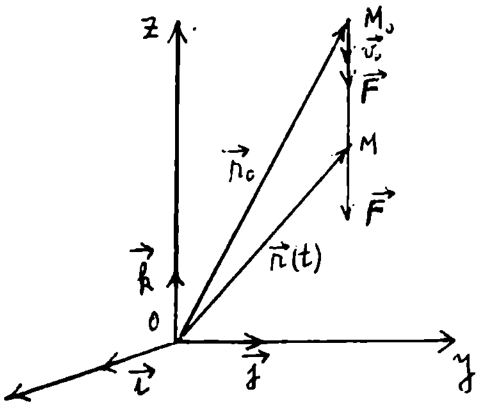


Fig.III.2

Nous négligerons les variations de g avec la latitude et l'altitude, de sorte que l'accélération $\vec{g}$ sera considérée comme constante $\vec{C}$. L'Equation (9) est équivalente a l'équation :

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g} \text{ où } \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad (10)$$

Si on multiple l'équation $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g}$ par dt on obtient :

$$\frac{d\vec{v}}{dt}dt = \vec{g}dt \rightarrow d\vec{v} = \vec{g}dt \qquad (11)$$

Une première intégration de l'équation (11) détermine le vecteur vitesse $\vec{v}$:

$$\int d\vec{v} = \int \vec{g}dt \rightarrow \vec{v}(t) = \vec{g}t + \vec{C}_1 \rightarrow \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{g}t + \vec{C}_1 \qquad (12)$$

où $\vec{C}_1$ est une première constante vectorielle arbitraire d'intégration. Multiplions à nouveau l'équation (12) par dt:

$$\frac{d\vec{r}}{dt}dt = \vec{g}tdt + \vec{C}_1dt \rightarrow d\vec{r} = \vec{g}tdt + \vec{C}_1dt \qquad (13)$$

Par une seconde intégration l'équation (13) fournit l'équation du mouvement du PM, $\vec{r} = \vec{r}(t)$:

$$\int d\vec{r} = \vec{g}\int tdt + \vec{C}_1\int dt \quad \rightarrow \quad \vec{r}(t) = \vec{g}\frac{t^2}{2} + \vec{C}_1t + \vec{C}_2 \qquad (14)$$

$\vec{C}_2$ est la deuxième constante vectorielle arbitraire d'intégration.

Application des conditions initiales pour la détermination des constantes $\vec{C}_1$, $\vec{C}_2$:

La solution (14) de l'équation (9) est générale. En fait, une solution générale est non pas une solution, mais toute une famille de solutions dépendant de deux constantes vectorielles arbitraires $\vec{C}_1$ et $\vec{C}_2$. En attribuant à ces constantes des valeurs concrètes, nous tirons de cette famille une solution particulière bien déterminée.

Les valeurs de $\vec{C}_1$ et $\vec{C}_2$ sont définies par les conditions initiales.

On suppose qu'à l'instant initial t=0, la vitesse initiale du point matériel soit $\vec{v}(0) = \vec{v}_0$ et le rayon vecteur de celui-ci soit $\vec{r}(0) = \vec{r}_0$. On peut déterminer de l'équation (12) la valeur de $\vec{C}_1$. En effet, $\vec{v}(0) = \vec{v}_0 = \vec{C}_1$. De l'équation (14) on tire la valeur de $\vec{C}_2$: $\vec{r}(0) = \vec{r}_0 = \vec{C}_2$. Donc, la constante $\vec{C}_1$ est la vitesse initiale du point mobile et $\vec{C}_2$ est le rayon vecteur caractérisant sa position à l'instant initial.

L'équation du mouvement (14) s'écrit:

$$\vec{r}(t) = \vec{g}\frac{t^2}{2} + \vec{v}_0 t + \vec{r}_0 \qquad (15)$$

L'équation vectorielle du mouvement (15) équivaut à trois équations en coordonnes cartésiennes. En effet, puisque

$$\vec{r}(t) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\,; \quad \vec{g} = o\vec{i} + o\vec{j} - g\vec{k}\,; \qquad (16)$$
$$\vec{v}_0 = o\vec{i} + o\vec{j} - \vec{v}_0\vec{k}\,; \quad \vec{r}_0 = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k}\,;$$

de l'équation (16) on peut écrire par identification

$$x = x_0; \quad y = y_0; \quad z = -g\frac{t^2}{2} - v_0 t + z_0\,; \qquad (17)$$

(17) représentent les équations paramétriques du mouvement du point matériel considère.

8 Transformations de Galilée.

Supposons què le référentiel S soit un système inertiel. Prenons un second référentiel S' animé par rapport au premier, d'un mouvement de translation à une vitesse constante $\vec{v}$. Posons pour simplifier que les axes X', Y', Z' sont respectivement parallèles aux axes X,Y,Z et qu'à l'instant $t = 0$ l'origine O' coïncide avec l'origine O. On posera aussi que la vitesse $\vec{v}$ est parallèle a l'axe X. Dans ces conditions l'axe X' coïncidera toujours avec l'axe X.

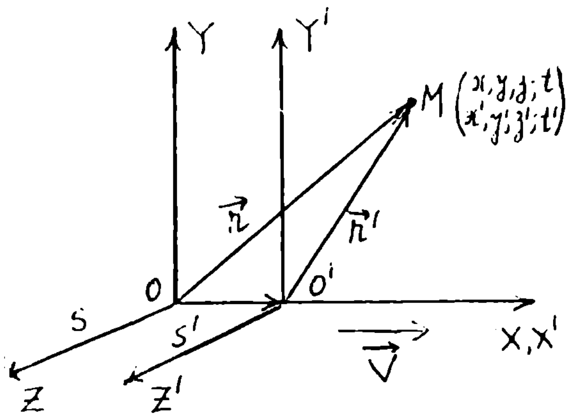


Fig.III.3

Le problème consiste à établir les relations exprimant à une même instant les cordonnées x',y',z' du mobile dans le système S' en fonction de ses cordonnées x,y,z dans la système S. Soit M la position du point mobile a l'instant t (Fig.III.3). On a $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$. Au bout d'un temp t, l'origine du système S' passera de la position O à la position O' avec $\overrightarrow{OO'} = \vec{V}t$. Par suite la relation précédente s'écrira :

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{V}t', \quad t = t' \qquad (18)$$

où $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, $\vec{r}' = \overrightarrow{O'M}$ sont les rayons vecteurs du point mobile respectivement dans les systèmes S et S'. Ecrivons (18) en termes des projections sur les axes de cordonnées. Puisque

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad \vec{r}' = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$$
$$\left(\vec{i} = \vec{i}', \vec{j} = \vec{j}', \vec{k} = \vec{k}'\right), \quad \vec{V} = V\cdot\vec{i} + o\cdot\vec{j} + o\cdot\vec{k}$$

les relations (18) impliquent que $x = x' + Vt', y = y', z = z', t = t'$ (groupe de Galilée) (19)

Ces relations donnent la solution cherchée et portent le nom de transformations de Galilée. Nous avons adjoint au relations de transformation des cordonnées la relation $t = t'$ pour bien souligner qu'en mécanique non relativiste le temps est considéré comme une grandeur absolue qui ne se transforme pas: le temps d'un enveniment est identique pour un observateur place sur S ou sur S'

Les autres relations $x = x'+V\cdot t'$, $y = y'$, $z = z'$ présument le caractère absolu des longueurs: par exemple, la longueur du vecteur $\vec{r}'$ mesurée d'un observateur placé sur S est identique à la longueur du même vecteur mesurée d'un observateur placé sur S'. En effet,

$$|\vec{r}'|_S = \sqrt{(x - Vt)^2 + y^2 + z^2} \quad \text{et} \quad |\vec{r}'|_{S'} = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} \qquad (20)$$

où les cordonnées du point O' en S et S' sont O'_s $(Vt,0,0)$ et $O'_{S'}$ $(0,0,0)$. Si on utilise les transformations de Galilée (19) il s'ensuit $|\vec{r}\,'|_{S'} = \sqrt{(x - v \cdot t)^2 + y^2 + z^2}$ et donc $|\vec{r}\,'|_S = |\vec{r}\,'|_{S'}$.

La Physique relativiste repousse le caractère absolu des longueurs et du temps et remplace la transformation de Galilée par la transformation de Lorentz. Il suffit de noter que la transformation de Galilée est un cas limite de la transformation de Lorentz et s'en déduit en posant que la vitesse V est très petite par rapport à la vitesse de la lumière dans la vide. Dans l'étude des "mouvements lents" ($V^2/c^2 << 1$) on peut utiliser la transformation de Galilée, mais si le mouvement est "rapide", on peut utiliser la transformation de Lorentz.

9 Loi de composition des vitesses de Galilée.

En dérivant $\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{V}t' = \vec{r}\,' + \vec{V}t$ par rapport à t, on a

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}\,'}{dt} + \vec{V} = \frac{d\vec{r}\,'}{dt'} + \vec{V} = \vec{v} + \vec{V} \tag{21}$$

soit

$$\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{V} \tag{22}$$

où $\vec{v}$ est la vitesse du mobile dans le référentiel S et $\vec{v}\,'$ sa vitesse dans la référentiel S'. Cette relation exprime la loi non relativiste de la composition des vitesses (La vitesse n'est pas invariante au groupe de Galilée). Cette relation a été établie en supposant que la vitesse $\vec{V}$ est constante. Néanmois elle est valable si la vitesse $\vec{V}$ n'est pas constante.

10 Invariance de la deuxième loi de Newton dans une transformation de Galilée. Le principe de relativité de Galilée.

Considérons les deux repères galiléen S et S' déduits l'un de l'autre par une transformation de Galilée, de vitesse uniforme $\vec{V}$. Soit une particule M de masse m soumise a l'action de la force $\vec{F}$ relativement au repère S. La relation fondamentale de la Dynamique s'écrit :

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \tag{23}$$

où $\vec{v}$ est la vitesse de M à l'instant t.

Dans la repère S' la vitesse de M au même instant est $\vec{v}\,'$. De l'équation (22) $\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{V}$ on tire, en dérivant par rapport au temps :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{v}\,' + \vec{V}) = \frac{d\vec{v}\,'}{dt} + \frac{d\vec{V}}{dt} \tag{24}$$

Puisque la vitesse $\vec{V}$ est considérée constante, $\vec{V}$ = constante

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = 0 \; ; \tag{25}$$

alors (24) devient :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}\,'}{dt} \tag{26}$$

soit :

$$\vec{a} = \vec{a}\,' \tag{27}$$

$\vec{a}$ étant l'accélération du mobile dans le repère S et $\vec{a}\,'$ l'accélération de ce même mobile dans le repère S'. Ainsi l'accélération du mobile est la même dans les deux repères. On dit que l'accélération est invariante par rapport à la transformation de Galilée. Si multiplions la relation (27) par m qui représente la masse du mobile on obtient $m\vec{a} = m\vec{a}\,'$ ou $\vec{F} = \vec{F}\,'$. Par suite, la force ne change pas lorsqu'on passe d'un repère S a un autre S'. Cela signifie que la force est invariante par rapport à la transformation de Galilée. $\vec{F}' = m\vec{a}'$ exprime la deuxième loi de Newton dans la repère S'. Sa forme est la même que dans la repère S. Les équations qui restent inchangées lorsqu'on passe d'un repère à un autre sont dites équations invariantes. On peut donc dire que les équations de la mécanique de Newton sont invariantes vis-à-vis des transformations de Galilée. Cette proposition exprime le principe de relativité de Galilée.

Remarque : Un point matériel isolé se meut dans le repère S sans accélération puisque, par hypothèse, c'est un repère d'inertie. La relation (27) montre que son mouvement dans la repère S' ne sera pas accéléré non plus. Il en résulte que S' est aussi un repère d'inertie. Donc tout référentiel effectuant un mouvement rectiligne et uniforme par rapport à un référentiel d'inertie est lui-même référentiel d'inertie. S'il existe un seul repère d'inertie, il doit exister un nombre infini de repères d'inertie dont les mouvements relatives sont rectilignes et uniformes.

IV. Travail et Energie.

1. Travail d'une force constante ($\vec{F}$ = constante) en grandeur, direction et sens, pour un déplacement rectiligne.

a) Soit $\vec{F}$ la force constante appliquée à une particule M. Si la particule décrit un segment de droite $\overrightarrow{AB}$ dirigé dans la même direction que la force $\vec{F}$, on définit le travail effectué pas la force $\vec{F}$ comme le produit scalaire de la force par le vecteur déplacement $\overrightarrow{AB}$ (Fig. IV.1) :

$$W = \vec{F}.\overrightarrow{AB} = F.AB \tag{1}$$

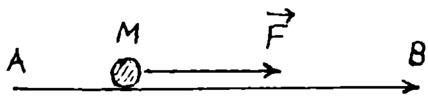


Fig. IV.1

b) Pour une direction du déplacement différente de celle de la force, le travail se définit (Fig.IV.2) :

$$W = \vec{F}.\overrightarrow{AB} = F.AB.\cos\theta \tag{2}$$

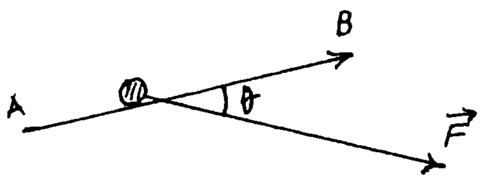
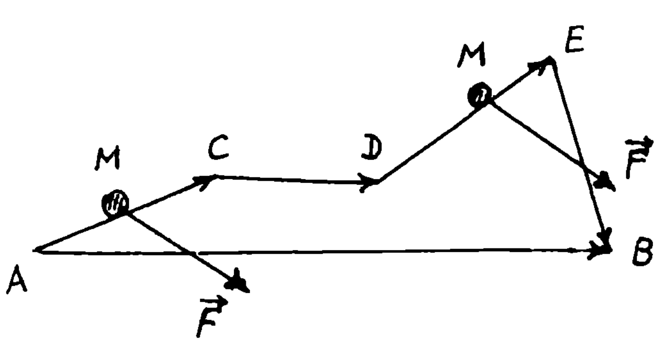


Fig. IV.2

c) Le déplacement de la particule M a lieu suivant une ligne brisée arbitraire ACDEB et la force $\vec{F}$ = constante (Fig.IV.3) :

$$\begin{aligned} W &= \vec{F}\cdot\overrightarrow{AC} + \vec{F}\cdot\overrightarrow{CD} + \vec{F}\cdot\overrightarrow{DE} + \vec{F}\cdot\overrightarrow{EB} = \\ &= \vec{F}\cdot(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EB}) = \vec{F}\cdot\overrightarrow{AB} \end{aligned} \tag{3}$$



$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EB}$$

Fig. IV.3

Quel que soit la ligne brisée qui part du point A et arrive au point B, le parcours résultant $\overrightarrow{AB}$ intervient seul dans l'expression du travail.

2. <u>Travail d'une force quelconque (variable)</u>.

a) <u>Le travail élémentaire de la force</u>.

Considérons une particule M qui se déplace sur une courbe C sous l'action d'une force $\vec{F}$ dont le module, la direction et le sens peuvent changer.

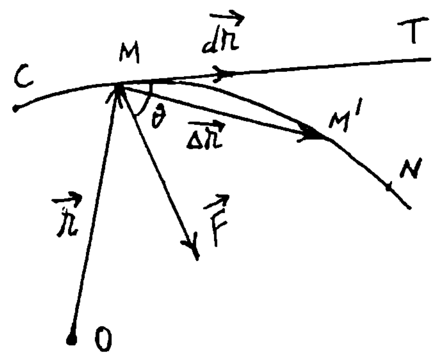


Fig.IV.4

Pendant un temps très court Δt, la particule décrit une portion $\widehat{MM'}$ de trajectoire. Si cette grandeur $\widehat{MM'}$ est suffisamment petite, on peut assimiler l'arc $\widehat{MM'}$ a la corde $\overline{MM'}$ .Le déplacement de la particule pendant le temps Δt est donc rectiligne et s'écrit $\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{\Delta r}$. Quand $M'\to M$, la direction limite de la corde $\overline{MM'}$ est celle de la tangente MT en M à C est $\overrightarrow{\Delta r}$ a pour limite le déplacement infinitésimal $d\vec{r}$ porté par la tangente MP. On peut considérer, sur toute la longueur de ce déplacement élémentaire $d\vec{r}$, la force $\vec{F}$ constante. Par suite, <u>le travail élémentaire de la force $\vec{F}$ pour le déplacement $d\vec{r}$ de la particule est la grandeur scalaire</u>.

$$dW = \vec{F}\cdot d\vec{r} \tag{4}$$

b) <u>Le travail de la force $\vec{F}$ le long de la courbe C</u>.

En général si la particule M parcourt un trajet $\widehat{MN}$ <u>de longueur finie</u> sur la trajectoire curviligne portée par la courbe C, on peut subdiviser en pensée ce trajet en trajets élémentaires infiniment courts, le long desquels la force $\vec{F}$ peut être considérée comme constante et le travail élémentaire correspondant sera donné par (4). En sommant ces différents travaux élémentaires, tout en faisant tendre les longuers des déplacements élémentaires vers zéro, on arrive à la limite que l'on désigne par la symbole:

$$\int_{\widehat{MN}} dW \equiv W_{\widehat{MN}} = \int_{\widehat{MN}} \vec{F}\cdot d\vec{r} \tag{5}$$

et que l'on appelle <u>intégrale curviligne</u> ou <u>la circulation</u> du vecteur $\vec{F}$ le long de la trajectoire $\widehat{MN}$. Par définition, cette intégrale représente <u>le travail de la force $\vec{F}$ le long de l'arc de courbe $\widehat{MN}$</u>.

c) <u>Expression analytique du travail</u>.

c_1) <u>Travail élémentaire</u> : Soit la force $\vec{F}(F_x, F_y, F_z)$, $\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$ et le déplacement élémentaire $d\vec{r}$ (dx,dy,dz), $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$, dans un repère Oxyz. <u>L'expression analytique</u> du $dW = \vec{F}\cdot d\vec{r}$ est :

$$dW = F_x dx + F_y dy + F_z dz \tag{6}$$

c_2) Travail d'une force quelconque :

$$\int_{MN} dW = W_{\widehat{MN}} = \int_{\widehat{MN}} F_x dx + F_y dy + F_z dz \qquad (7)$$

d) L'unité de travail

Dans le système SI, l'unité de travail est le joule (J). Le joule est le travail produit par une force de 1 newton dont le point d'application se déplace de 1 mètre dans la direction de la force.

e) Exemple de travail : Travail effectué par la pesanteur.

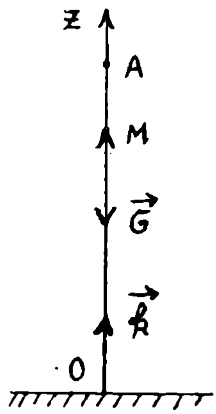


Fig.IV.5

Soit Oz la normale à la surface de la terre, dirigée vers le haut (Fig.IV.5). La force de la pesanteur $\vec{G} = m\vec{g} = -mg \cdot \vec{k}$ qui agit sur la particule M, de masse m est une force constante. Calculons le travail effectué par la force $\vec{G}$ si la particule tombe d'une hauteur de 3 mètres. m=2 Kg et g=9.81 m/s^2. Soit A la position initiale de M ($\overrightarrow{OM} = \vec{r}_M = z_M \vec{k}$). O c'est la position finale. Ecrivons le travail de la force $\vec{G}$:

$$W_{(A \to O)} = \int_{AO} \vec{G} \cdot d\vec{r}_M \ ; \ \vec{r}_M = (r_M) \cdot \vec{k} = z_M \vec{k} \ ; \ d\vec{r}_M = dr_M \vec{k}$$

$$W_{(A \to O)} = -mg \int_{AO} (\vec{k} \cdot \vec{k}) dr_M = -mg \int_{AO} dr_M =$$

$$= -mgr_M \Big|_A^0 = -mg(r_M(0) - r_M(A)) \equiv -mg(z(0) - z(A))$$

Puisque: $r_M(0) = z(0)$ et $r_M(A) = 3m$ le travaila de la force $\vec{G}$ est donc: $W_{(A \to 0)} = (mg) \cdot r_M(A) = 2 \cdot 9{,}81 \cdot 3 = 58{,}86$ J

f) Cas particuliers.

f_1) M se déplace en ligne droite dans la direction de la force $\vec{F}$, constante en grandeur, direction et sens $(\vec{F} = \vec{C})$ (Fig.IV.6).

$$W_{A \to B} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot \int_A^B d\vec{r} = \vec{F} \cdot \vec{r} \Big|_A^B = \vec{F} \cdot (\vec{r}_B - \vec{r}_A) = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB} = |\vec{F}| |\overrightarrow{AB}| \cos 0° = Fl \ .$$

Le travail est alors égal au produit du module de la force F par la distance parcourue l.

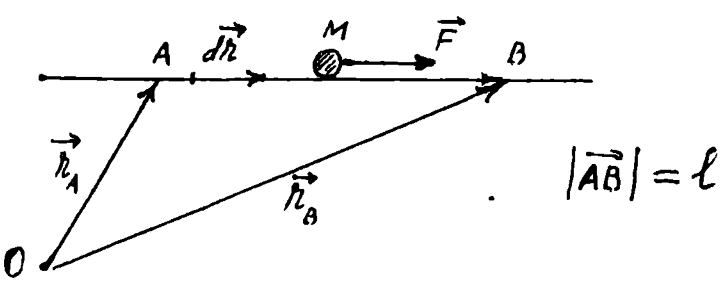


Fig.IV.6

f_2) M se déplace dans un mouvement circulaire sous l'action de la force centripète $\vec{F} = -m\omega^2\vec{r}$ (Fig.IV.7).

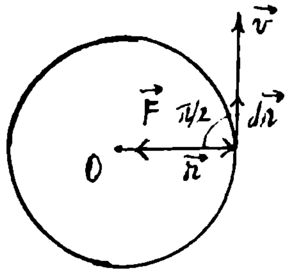


Fig.IV.7

$$W_C = \int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = -m\omega^2\int_C \vec{r}\cdot d\vec{r}\,.$$

Puisque dans un mouvement circulaire on a toujours $\vec{F}\perp\vec{v}$ et donc $\vec{F}\perp d\vec{r}$ il s'ensuit :

$$\vec{F}\cdot d\vec{r} = |\vec{F}||d\vec{r}|\cos\frac{\pi}{2} = 0\,.$$

En conclusion, si la force $\vec{F}$ est perpendiculaire au déplacement élémentaire $d\vec{r}$, le travail élémentaire est nul et par suite $W_C=0$ (le travail sur la courbe C est égal à zéro).

3. Force conservative.

a) Définition : Soient F_x, F_y, F_z les composantes scalaires de la force $\vec{F}$. On dit que la force $\vec{F}$ est conservative s'il existe une fonction U(x,y,z) ne dépendant pas explicitement du temps de manière que les composantes du vecteur force soyent les dérivées parielles de la fonction U par rapport à x,y,z :

$$\text{a)}\ F_x = \frac{\partial U}{\partial x},\quad F_y = \frac{\partial U}{\partial y},\quad F_z = \frac{\partial U}{\partial z}\quad \text{et}\quad \text{b)}\ \frac{\partial U}{\partial t} = 0\,. \tag{1}$$

On dit que la force $\vec{F}$ dérive de la fonction de force U(x,y,z). La condition (1),a) s'écrit sous la forme vectorielle

$$\vec{F} = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}\,. \tag{2}$$

Le vecteur $\vec{F}$ est appelé le gradient de la fonction U. On notera :

$$\vec{F} = \operatorname{grad}U(x,y,z) \tag{3}$$

Remarques :

1) Dans un système où ne se manifeste que des forces qui dérivent d'une fonction de force U(x,y,z) l'énergie totale de celui-ci se conserve (est invariable) (voir la loi de la conservation de l'énergie en mécanique). C'est la raison pour laquelle une telle force s'appelle conservative.

2) La force conservative présuppose que la fonction U ne dépend pas explicitement du temps.

b) Différentielle totale exacte d'une fonction de trois variables f(x,y,z).

Soit la fonction f(x,y,z) dérivable par rapport à x,y,z.

L'expression:

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)dy + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)dz \tag{4}$$

est appelée la différentielle totale exacte de la fonction f(x,y,z).

c) Les propriétés des forces conservatives.

c_1) Le travail effectué par la force conservative $\vec{F}$ entre deux points quelconques A et B ne dépend pas du chemin suivi, mais uniquement des extrémités A et B du parcours.

Démonstration: Si la particule M se déplace de $A(x_A,y_A,z_A)$ à $B(x_B,y_B,z_B)$ le travail effectué par la force conservative $\vec{F}$ au cours d'un déplacement élémentaire $d\vec{r}$ (dx,dy,dz) de M s'écrit:

$$dW = \vec{F}\cdot d\vec{r} = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}\right)\cdot\left(dx\cdot\vec{i} + dy\cdot\vec{j} + dz\cdot\vec{k}\right) = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz = dU$$

Soit :

$$dW = dU \tag{5}$$

Par l'intégration de la relation (5) qui exprime le fait que le travail élémentaire d'une force conservative est égal à la différentielle totale exacte de la fonction de force dont dérive la force, il s'ensuit :

$$W_{\widehat{AB}} \equiv \int_{\widehat{AB}} dW = \int_{\widehat{AB}} dU = U(x,y,z)\Big|_A^B = U(x_B, y_B, z_B) - U(x_A, y_A z_A)$$

En conclusion :

$$W_{\widehat{AB}} = U(x_B, y_B, z_B) - U(x_A, y_A, z_A) \equiv \Delta U \tag{6}$$

ΔU = la variation de la fonction U entre le points B et A.

C'est-à-dire le travail est indépendant du chemin suivi. Il est inutile de connaître le mouvement et la trajectoire de la particule M.

c₂) Le travail de la force dérivant d'une fonction de force est nul le long d'un parcours fermé. (La circulation du vecteur force conservative est nulle le long d'un parcours fermé).

Demonstration : Soit deux parcours différents ARB et AQB. La force $\vec{F}$ est conservative et par suite (voir c_1) (Fig.IV.8).

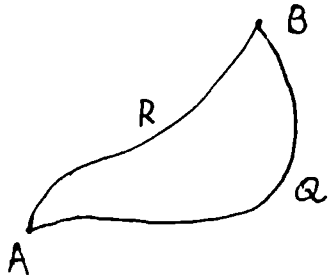


Fig. IV.8

$$W_{\widehat{ARB}} = W_{\widehat{AQB}} \tag{7}$$

ou

$$\int_{\widehat{ARB}} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{\widehat{AQB}} \vec{F}\cdot d\vec{r} \tag{8}$$

La dernière égalité entraîne

$$\int_{\widehat{ARB}} \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\int_{\widehat{BQA}} \vec{F}\cdot d\vec{r} \tag{9}$$

Le long du parcours fermé ARBQA, on a donc :

$$\int_{\widehat{ARB}} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{\widehat{BQA}} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{\widehat{ARBQA}} \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0, \tag{10}$$

relation qui s'exprime conventionnellement :

$$\oint \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0 \tag{11}$$

Le signe $\oint$ signifie que l'intégrale est calculée le long d'un contour fermé. Donc, la circulation du vecteur force dérivant d'une fonction de force est nulle le long d'un parcours fermé.

4. Champ potentiel. Energie potentielle. Théorème de l'énergie potentielle.

a) Définitions :

- Un champ de vecteurs (une certaine région de l'espace où à tout point de cette région est associé un vecteur) qui satisfait une relation de la forme (11) s'appelle champ potentiel .

- Soit x,y,z les coordonnées d'un point matériel qui se trouve dans le champ potentiel de la force $\vec{F}$. Par définition, l'énergie potentielle du point matériel est une fonction scalaire des seules coordonnées x,y,z égale à la fonction de force avec le signe changé:

$$E_P(x,y,z)=-U(x,y,z) \tag{12}$$

Si la fonction E_P dépend également explicitement du temps t, $E_P(x,y,z,t)$ est appellée fonction potentielle.

Si on reporte (12) en (1), (2) et (3) on obtient :

$$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z} \tag{13}$$

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial E_p}{\partial z}\vec{k}\right) \tag{14}$$

$$\vec{F} = -\text{grad} \quad E_p(x,y,z) \tag{15}$$

On dit que la force $\vec{F}$ **dérive de l'énergie potentiel $E_P(x,y,z)$.**

En remplaçant (12) en (5) et (6) on obtient les relations :

(A) $dW = -dE_P$ (16)

(B) $W_{\widehat{AB}} = E_P(x_A,y_A,z_A) - E_P(x_B,y_B,z_B) = -\Delta E_P$ (17)

Donc :

L'énoncé du théorème de l'énergie potentielle (la forme différentielle et intégrale) :

(A) Le travail élémentaire de la force conservative $\vec{F}$ est égal à la différentielle totale de la fonction énergie potentielle avec le signe changé (la forme différentielle).

(B) Le travail effectué par la force conservative $\vec{F}$ pour déplacer la particule de A en B est égal à la variation de l'énergie potentielle de la particule entre les points A et B avec le signe changé (la forme intégrale).

On peut écrire encore la relation (17) sous la forme :

$$E_p(A) - E_p(B) = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} \equiv W_{\widehat{AB}} \tag{18}$$

Si le point B est quelconque de rayon de position $\vec{r}$, la valeur de l'énergie potentielle de la particule dans le point B sera, d'après (18) :

$$E_p(\vec{r}) = E_p(\vec{r}_A) - \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}} \vec{F}\cdot d\vec{r} \tag{19}$$

Dans beaucoup de problèmes, on choisi le point A à l'infini dans l'équation générale (19) et on pose $E_P(r_A \to \infty) \equiv E_P(\infty) = 0$. On obtient alors :

$$E_p(\vec{r}) = -\int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}}^{\infty} \vec{F}\cdot d\vec{r} \tag{20}$$

Donc, l'énergie potentielle au point de vecteur de position $\vec{r}$ est égale au travail effectué par la force conservative $\vec{F}$ qui déplace la particule du point de vecteur de position $\vec{r}$ à l'infini.

b) L'énergie potentielle dans quelques cas simples. Quelques exemples de forces conservatives.

b₁) Energie potentielle d'une particule de masse m dans un champ de pesanteur uniforme ($\vec{G} = m\vec{g} = \vec{C}$ = constante).

Si un point se trouve à une hauteur z tombe jusqu'au niveau zéro (niveau pour lequel z = 0), la force de pesanteur effectuera la travail W = mg·z (voir IV.2,e).

D'après la relation (18) on a :

$$E_P(z) - E_P(0) = W_{z,0} = mg\cdot z \tag{21}$$

Par suite, le point matériel se trouvant à une hauteur z possède une énergie potentielle :

$$E_P(z) = mg\cdot z + E_P(0) \tag{22}$$

Le niveau zéro (z = 0) peut être choisie arbitrairement, par exemple le niveau du sol du laboratoire où se déroule l'expérience.

La constante $E_P(0)$ est égale à l'énergie potentielle au niveau de référence. En la posant nulle ($E_P(0) = 0$), on obtient :

$$E_P(z) = mg\cdot z . \tag{23}$$

La fonction de force correspondante sera :

$$U(z) = -mg\cdot z . \tag{24}$$

En conclusion, la force de pesanteur $\vec{G} = m\vec{g}$ est conservative.

b₂) Energie potentielle de la force d'attraction gravitationnelle de deux points matériels.

Selon la loi de la gravitation universelle de Newton, le module de la force d'attraction gravitationnelle échangée par deux corps ponctuels est proportionnelle au produit de leurs masses M·m et inversement proportionnelle au carré de leur distance de séparation : $F=G\cdot M\cdot m/r^2$ où G est la constante gravitationnelle. Si on note par $K=G\cdot M\cdot m$, la forme vectorielle de la force $\vec{F}$ s'écrit (Fig.IV.9):

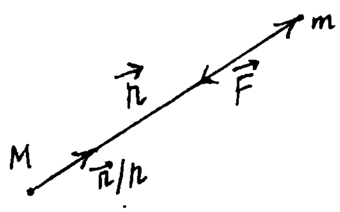


Fig.IV.9

$$\vec{F} = -\frac{K}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} = -\frac{K}{r^3}\vec{r} = -\frac{K}{r^3}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \tag{25}$$

(La force $\vec{F}$ et le rayon vecteur $\vec{r}$ sont des vecteurs opposés).

Puisque les composantes scalaires de la force $\vec{F}$ sont:

$$F_x = -\frac{K}{r^3}x\ ,\ F_y = -\frac{K}{r^3}y,\ F_z = -\frac{K}{r^3}z\ , \tag{26}$$

d'après la relation (16) on peut écrire

$$dE_p = \frac{K}{r^3}(x\,.\,dx + y\,.\,dy + z\,.\,dz) = \frac{K}{r^3}d\left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{2}\right) = \frac{K}{r^3}\cdot d\left(\frac{r^2}{2}\right) = \frac{K}{r^3}r\,.\,dr = \frac{K}{r^2}dr\ .$$

L'énergie potentielle E_P s'obtient par l'intégration :

$$E_p(r) = K\int\frac{dr}{r^2} = -\frac{K}{r} + C\ ,\quad C = \text{constante arbitraire d'intégration.}$$

D'habitude on pose égale à zéro, l'énergie potentielle à l'infini ($E_P(r\to\infty)=0$). Dans ce cas C=0 et en conclusion :

$$E_p(r) = -\frac{K}{r} = -G\frac{mM}{r}. \tag{27}$$

Donc, la force envisagée est conservative.

b₃) Energie potentielle de la force élastique $\vec{F} = -k\vec{r}$ (k>0)

La force $\vec{F}$ et le rayon vecteur $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ sont des vecteurs opposés. Puisque les composantes scalaires de la force $\vec{F}$ s'écrivent :

$$F_x = -kx\ ,\ F_y = -ky\ ,\ F_z = -kz \tag{28}$$

suivant la relation (16) on peut écrire :

$$dW = -\,dE_p = -\,kxdx - kydy - kzdz \tag{29}$$

ou

$$dE_p = k(xdx + ydy + zdz) = \frac{k}{2}d(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{k}{2}dr^2. \tag{30}$$

Par intégration l'on obtient l'expression de E_P :

$$E_p(r) = \int dE_p = \frac{k}{2}\int dr^2 = \frac{k}{2}r^2 + C. \qquad (31)$$

Pour trouver la valeur de la constante arbitraire d'intégration C on impose la condition $E_P(r=0)=0$. En résulte C=0.

En conclusion la force élastique est conservative et :

$$E_p(r) = \frac{k}{2}r^2, \qquad r^2 = x^2 + y^2 + z^2. \qquad (32)$$

5. Energie cinétique. Théorème de l'énergie cinétique.

a) Définition: Soient m la masse de la particule et $\vec{v}$ sa vitesse à l'instant t par rapport à un repère galiléen. On appelle énergie cinétique de la particule à l'instant t la grandeur scalaire:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2. \qquad (33)$$

L'unité d'énergie cinétique en SI est la même que celle du travail c'est à dire le joule (J) :

1 joulle=1 Newton · 1 mètre

b) Théorème de l'énergie cinétique.

Considérons une particule de masse m, de vitesse $\vec{v}$ à l'instant t par rapport à un repère galiléen, et soumise à l'action d'une force arbitraire $\vec{F}$ à cette instant t.

Pendant un temps dt, le déplacement élémentaire $d\vec{r}$ de la particule est donné par $d\vec{r} = \vec{v}dt$. Le travail élémentaire dW effectué par $\vec{F}$ dans ce déplacement a pour valeur :

$$dW = \vec{F}\cdot d\vec{r} = \vec{F}\cdot\vec{v}\cdot dt \qquad (34)$$

Supposons que la vitesse $\vec{v}$ de la particule n'est pas constante. D'après la loi fondamentale de la Dynamique :

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt}; \qquad (35)$$

d'où

$$dW = m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v}\cdot dt = \vec{m}\cdot d\vec{v} \quad ; \quad \left(\frac{d\vec{v}}{dt}dt = d\vec{v}\right). \qquad (36)$$

Puisque:

$$d(v^2) = d(\vec{v}\cdot\vec{v}) = d\vec{v}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot d\vec{v} = 2\vec{v}\cdot d\vec{v} \qquad (37)$$

l'on trouve

$$dW = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = dE_c \qquad (38)$$

Donc, l'énoncé du théorème de l'énergie cinétique sous la forme différentielle est :

La différentielle de l'énergie cinétique d'une particule est égale au travail élémentaire de la force arbitraire appliquée à cette particule.

Pour un déplacement d'une position initiale A à une position finale B à partir de (38) l'on trouve:

$$W_{\widehat{AB}} \equiv \int_{\widehat{AB}} dW = \int_{\widehat{AB}} dE_c = E_c\Big|_A^B = E_c(B) - E_c(A) \equiv \Delta E_c$$

ou

$$W_{\widehat{AB}} = \Delta E_C \qquad (39)$$

Donc, l'énoncé du théorème de l'énergie cinétique sous la forme intégrale est :

Le travail effectué par une force arbitraire appliquée à une particule relativement à un repère galiléen est égal à la variation de l'énergie cinétique de la particule.

$W_{\widehat{AB}}$ ne dépend, ni de temps, ni du chemin parcouru par la particule.

Remarques :

1) L'énergie cinétique E_C dépend du système de référence par rapport auquel s'effectue le mouvement. En effet, nous savons que la vitesse de la particule dépend du repère choisi.

2) La valeur de E_C est définie à une constante additive près E_c^0, arbitraire :

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 + E_c^0 \tag{40}$$

En effet,

$$dE_c = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) + dE_c^0 = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$$

puisque $dE_c^0 = 0$.

6. Énergie mécanique totale. Conservation de l'énergie mécanique totale.

a) Définition. La grandeur scalaire $E = E_C + E_P$ est appelée énergie mécanique totale de la particule.

b) Loi de conservation de l'énergie mécanique totale.

b_1) La forme intégrale de la loi.

Nous considérons le cas où les forces qui agissent sur la particule sont conservatives. Soit $\vec{F}$ la résultante de ces forces.

Par rapport à un repère galiléen, nous avons vu que nous pouvons exprimer le travail de $\vec{F}$, lorsque la particule se déplace de A en B, sous la forme :

$$\Delta E_C = W_{\widehat{AB}} \qquad \text{(voir 39)}$$
$$\Delta E_p = -W_{\widehat{AB}} \qquad \text{(voir 17)}$$

Ajoutons membre à membre ces deux relations :

$$\Delta E_C + \Delta E_P = 0 \ ; \tag{41}$$

Soit

$$E_C(B) - E_C(A) + E_P(B) - E_P(A) = 0;$$
$$E_C(B) + E_P(B) = E_C(A) + E_P(A);$$
$$(E_C + E_P)(B) = (E_C + E_P)(A); \tag{41'}$$
$$E(B) = E(A) \tag{42}$$

Donc, quand les forces sont conservatives, l'énergie mécanique totale E de la particule reste constante ou la somme des énergies potentielle et cinétique est une grandeur constante indépendante du temps.

(41') ou (42) représente la forme intégrale de la loi de conservation de l'énergie mécanique totale.

b_2) La forme différentielle de la loi :

Selon les équations (16) et (38) on peut écrire :

$$dW = -dE_P \quad \text{et} \quad dW = dE_C \ ; \tag{43}$$

Donc:

$$-dE_P = dE_C \quad \rightarrow \quad dE_c + dE_p = 0 \tag{44}$$

L'équation (44) peut alors s'écrire sous une forme différentielle :

$$d(E_C + E_P) = 0 \quad \text{ou} \quad dE = 0 \tag{45}$$

Donc, la différentielle de l'énergie mécanique totale d'un point matériel soumis à une force conservative est égale à zéro.

Remarque : Dans le cas des forces conservatives ($\vec{F}$ = -grad $E_P(x,y,z)$) la fonction énergie potentielle $E_P(x,y,z)$ ne dépend pas explicitement du temps.

7. Cas des forces nonconservatives.

Il se présente des cas quand la fonction $E_P(x,y,z,t)$ possédant la propriété $\vec{F}$ = - grad E_P existe, mais dépend du temps. On peut appeler une telle fonction "potentiel généralisé".

a) Mouvement d'une particule chargée à l'intérieur d'un condensateur entre les armatures duquel on a une différence de potentiel V variant périodiquement par rapport au temps, $V(x,y,z,t) = = V_0(x,y,z)\cos\omega t$

Le produit de la charge "e" par V représente l'énergie potentielle de la charge "e" dans le point de coordonnées x, y, z au moment t :

$$E_P(x,y,z) = e\,V = e\,V_0(x,y,z)\cdot\cos\omega t. \tag{46}$$

La fonction $E_P(x,y,z,t)$ se caractérise par le fait que la force électrique exercée sur la particule à chaque instant est :

$$\vec{F} = -\text{grad }E_p = -e\cos\omega t\left(\frac{\partial V_0}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial V_0}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial V_0}{\partial z}\vec{k}\right) \tag{47}$$

ou

$$F_x = -e\cos\omega t\cdot\frac{\partial V_0}{\partial x},\quad F_y = -e\cos\omega t\cdot\frac{\partial V_0}{\partial y},\quad F_y = -e\cos\omega t\cdot\frac{\partial V_0}{\partial z}\;. \tag{48}$$

Donc, la fonction E_P et avec elle la force $\vec{F}$ dépendent explicitement du temps.

Dans ce cas la somme $E_C + E_P$ n'a pas de valeur constante (l'énergie totale ne se conserve plus). En effet,

$$\frac{dE_p}{dt} = \left(\frac{\partial E_p}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial E_p}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial E_p}{\partial z}\dot{z}\right) + \frac{\partial E_p}{\partial t}\;. \tag{49}$$

Formons le produit scalaire de l'équation (47) par la vitesse $\dot{\vec{r}}$:

$$\vec{F}\cdot\dot{\vec{r}} = -\text{grad }E_p\cdot\dot{\vec{r}} = -\left(\frac{\partial E_p}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial E_p}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial E_p}{\partial z}\dot{z}\right) \tag{50}$$

D'autre part,

$$\vec{F}\cdot\dot{\vec{r}} = m\ddot{\vec{r}}\cdot\dot{\vec{r}} = \frac{m}{2}\frac{d}{dt}\left(\dot{\vec{r}}^2\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{m\vec{v}^2}{2}\right) = \frac{dE_c}{dt} \tag{51}$$

Reportant (51) en (50) et en tenant compte de (49) il suit

$$\frac{dE_p}{dt} + \frac{dE_c}{dt} = \frac{\partial E_p}{\partial t} \quad \text{ou} \quad \frac{d}{dt}\left(E_p + E_c\right) = \frac{\partial E_p}{\partial t} \neq 0 \tag{52}$$

De (46) on obtient $\dfrac{\partial E_p}{\partial t} = -eV_0\omega\sin\omega t$.

Par conséquent l'énergie totale $E = E_P + E_C$ ne se conserve plus, puisque la dérivée par rapport au temps de E n'est plus égale à zéro.

b) Le cas des forces dépendant de la vitesse (forces de frottement).

Un exemple nous est fourni par la force de résistance du milieu au mouvement des corps. La force de résistance $\vec{R}$ est toujours dirigée à l'encontre de la vitesse:

$$\vec{R} = -k\cdot\vec{v}\;. \tag{53}$$

L'équation du mouvement de la particule déclenché par la force conservative $\vec{F}$ dans un milieu de résistance $\vec{R}$ sera :

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \vec{R} \qquad \text{où} \quad \vec{F} = -\text{grad}\ E_p \tag{54}$$

En multipliant les deux membres de (54) par $\dot{\vec{r}} \equiv \vec{v}$ on a :

$$m\dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} = -\text{grad}\ E_p \cdot \dot{\vec{r}} + \dot{\vec{r}} \cdot \vec{R} \tag{55}$$

Puisque:

$$m\dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m\dot{\vec{r}}^2}{2}\right) = \frac{dE_c}{dt}; \tag{56}$$

$$-\text{grad}\ E_p \cdot \dot{\vec{r}} = -\left(\frac{\partial E_p}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial E_p}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial E_p}{\partial z}\dot{z}\right) = -\frac{dE_p}{dt}; \tag{57}$$

$$\dot{\vec{r}} \cdot \vec{R} \equiv \vec{v} \cdot \vec{R} = -k\vec{v} \cdot \vec{v} = -kv^2 \tag{58}$$

de (55) on obtient :

$$\frac{d}{dt}\left(E_c + E_p\right) = -kv^2 \tag{59}$$

On voit que, comme dans le cas précédent, la somme $E_c + E_p$ ne reste pas constante; puis comme v^2 est toujours positive, il en résulte que $-k \cdot v^2 < 0$ et, par conséquent, $E_c + E_p$ décroît avec le temps : les forces de frottement sont donc non conservatives (dissipatives).

Remarque : le concept d'énergie mécanique totale n'est valable que si toutes les forces mises en jeu sont conservatives.

√. Impulsion de la force et quantité de mouvement. Théorème de l'impulsion de la force. Conservation de la quantité de mouvement.

1. Vecteur impulsion élémentaire de la force.

Définition. Soit une particule de masse m, soumise pendant le temps dt à l'action d'une force $\vec{F}$. On appelle impulsion élémentaire de la force $\vec{F}$ pendant le temps dt, la grandeur vectorielle :

$$d\vec{H} = \vec{F}\cdot dt \, . \tag{1}$$

L'impulsion de la force est donc un vecteur de même direction et de même sens que $\vec{F}$.

2. Vecteur impulsion intégral de la force (vecteur percussion).

Définition : On appelle vecteur impulsion intégral (percussion), l'impulsion finie de la force d'expression :

$$\vec{H} \equiv \int_{t_1}^{t_2} d\vec{H} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt \tag{2}$$

Unité d'impulsion de la force en S.I. :

<H> = Newton · seconde = N·s

3. Quantité de mouvement.

Définition : Considérons une particule de masse m et de vitesse $\vec{v}$ à l'instant t relativement au repère Oxyz. On appelle quantité de mouvement de la particule à l'instant t dans le repère Oxyz la grandeur vectorielle :

$$\vec{p} = m\vec{v} \, . \tag{3}$$

Unité de quantité de mouvement en S.I. :

<p> = kilogramme·mètre par seconde = $kg\cdot m\cdot s^{-1}$

4. Théorème de l'impulsion de la force.

a) La forme différentielle.

Supposons que la particule soit soumise pendant l'intervalle de temps t_2-t_1=dt à l'action de la force $\vec{F}$. Nous savons qu'à chaque instant pris dans l'intervalle t_2-t_1 on a :

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt} \, ; \tag{4}$$

Si on multiplie l'équation (4) par dt on obtient :

$$\frac{d\vec{p}}{dt}dt = \vec{F}dt \equiv d\vec{p} \, ; \tag{5}$$

En conclusion

$$d\vec{p} = d\vec{H} \, . \tag{6}$$

La différentielle du vecteur quantité de mouvement est égale à l'impulsion élémentaire de la force.

b) La forme intégrale.

Intégrons la relation (6) dans l'intervalle (t_2 - t_1)

$$\int_{t_1}^{t_2} d\vec{p} = \int_{t_1}^{t_2} d\vec{H} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt = \vec{p}(t)\Big|_{t_1}^{t_2} = \vec{p}(t_2) - \vec{p}(t_1) = \Delta\vec{p} \tag{7}$$

où $\vec{F}(t)$ est fonction du temps.

Soit

$$\vec{p}(t_2) - \vec{p}(t_1) = \Delta\vec{p} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)dt = \vec{H}.$$

On trouve que la variation de la quantité de mouvement de la particule est égale à l'impulsion intégrale de la force.

5. Conservation de la quantité de mouvement.

a) Système composé de deux particules.

Soit un système composé de deux particules et supposons que ces particules ne sont soumises qu'à des forces agissant entre elles (isolées). Ces forces sont dites intérieures à la différence des forces agissant sur les particules du système de l'extérieur et, par suite, appelées extérieures. Notons les paramètres associés aux particules respectivement par des indices 1 et 2. La position de la première particule par rapport à un centre O choisi arbitrairement et caractérisée par le rayon vecteur $\vec{r}_1$ et la position de la seconde particule, par le rayon vecteur $\vec{r}_2$. Les équations de mouvement des deux particules seront :

$$m_1\ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_{12}, \quad m_2\ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_{21}; \tag{9}$$

où le vecteur $\vec{F}_{12}$ désigne la force s'exerçant sur la première particule de la part de la seconde et $\vec{F}_{21}$ la force s'exerçant sur la seconde particule de la part de la première. Suivant le principe de l'action et de la réaction ces forces sont égales en grandeur et de sens opposé, de sorte que :

$$\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0; \tag{10}$$

En sommant (9) et en tenant compte de (10) on obtient :

$$m_1\ddot{\vec{r}}_1 + m_2\ddot{\vec{r}}_2 = 0, \tag{11}$$

soit

$$\frac{d}{dt}\left(m_1\dot{\vec{r}}_1 + m_2\dot{\vec{r}}_2\right) = 0. \tag{12}$$

Il en découe que

$$m_1\dot{\vec{r}}_1 + m_2\dot{\vec{r}}_2 = \text{const.}, \tag{13}$$

ou, ce qui revient au même :

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = \text{const} \qquad \text{ou} \quad \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \text{const}. \tag{14}$$

L'égalité (14) exprime la loi de conservation de la quantité de mouvement ayant lieu dans un système de deux particules soumises à l'action de forces intérieures quelconques.

La somme vectorielle des quantités de mouvement des deux particules insolées (soumise à leur seule interaction mutuelle) reste constante.

* Exemple 1 : Cas de l'atome l'hydrogène. Ici, si on suppose cet atome isolé, seule existe l'interaction entre le proton et l'électron placé sur une orbite autour du proton. Alors,

$$\vec{p}_{el} + \vec{p}_{pr} = \text{const.}$$

* Exemple 2 : Supposons que la Terre et la Lune constituent un système isolé. On néglige alors l'interaction du Soleil, des autres planètes et des différentes étoiles. Alors,

$$\vec{p}_{Terre} + \vec{p}_{Lune} = \text{const.}$$

b) Cas d'une particule isolée.

Supposons que, a l'instant t, la particule soit isolée dans l'espace c'est à dire aucune force $\vec{F}$ n'actionne sur elle, $\vec{F} = 0$. D'après la deuxième loi de la Dynamique :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}; \tag{15}$$

il s'ensuit
$$\frac{d\vec{p}}{dt} = 0. \tag{16}$$

D'où
$$\vec{p} = \text{const}. \tag{17}$$

soit
$$\vec{v} = \text{const}.$$

La particule est donc animée d'un mouvement à vitesse constante relativement à un repère galiléen.

Remarque : Le principe de l'inertie est un cas particulier du principe de la conservation de la quantité de mouvement.

VI. Moment cinétique. Théorème du moment cinétique. Moment d'un vecteur par rapport à un point. Conservation du moment cinétique.

1. <u>Moment d'un vecteur par rapport à un point. Définition.</u>

Soit P un point quelconque sur la ligne d'action du vecteur $\vec{a}$. On appelle moment du vecteur $\vec{a}$ par rapport à un point O le produit vectoriel :

$$\vec{M}_0(\vec{a}) = \vec{r} \times \vec{a} \tag{1}$$

où $\vec{r}$ est le vecteur de position de P par rapport à O (Fig.VI.1)

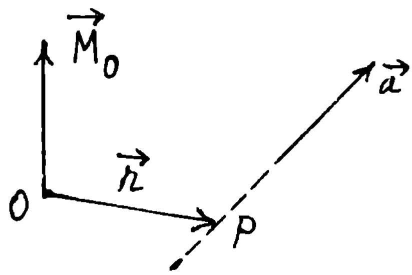


Fig.VI.1.

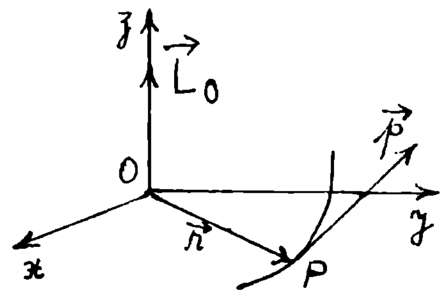


Fig.VI.2.

2. <u>Moment cinétique. Définition.</u>

Soit O un point fixe dans le repère galiléen Oxyz et P la particule de masse m animée de la vitesse $\vec{v}$ à l'instant t par rapport à ce repère. On appelle moment cinétique de la particule P au point O le moment de la quantité de mouvement $\vec{p} = m\vec{v}$ par rapport à O :

$$\vec{L}_0 = \vec{r} \times \vec{p}\,. \tag{2}$$

$\vec{L}_0$ est donc un vecteur perpendiculaire au plan contenant les vecteurs $\vec{r}$ et $\vec{p}$. $\vec{L}_0$ change de grandeur et de direction quand P se déplace sur la courbe C.

Les composantes du moment cinétique $\vec{L}_0$ par rapport aux axes du repère galiléen Oxyz peuvent être déterminées à partir de la relation :

$$\vec{L}_0 = \vec{r} \times \vec{p} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix} = L_x\vec{i} + L_y\vec{j} + L_3\vec{k} \tag{3}$$

où

$$L_x = yp_z - zp_y\,,\quad L_y = zp_x - xp_z\,,\quad L_z = xp_y - yp_x\,. \tag{3'}$$

<u>Unité</u> : Dans le système SI l'unité du moment cinétique s'écrit :

$$\langle L\rangle = \langle r\rangle\langle p\rangle = \langle r\rangle\langle m\rangle\langle v\rangle = kg\cdot m^2\cdot s^{-1} = \text{joules-secondes}.$$

3. <u>Théorème du moment cinétique.</u>

Dérivons l'équation (2) par rapport au temps :

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \equiv \dot{\vec{r}} \times \vec{p} + \vec{r} \times \dot{\vec{p}} \equiv \vec{v} \times (m\vec{v}) + \vec{r} \times \dot{\vec{p}} \equiv m(\vec{v} \times \vec{v}) + \vec{r} \times \dot{\vec{p}}.$$

Puisque $\vec{v} \times \vec{v} = 0$ il suit :

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{r} \times \dot{\vec{p}}.$$

Soit $\vec{F}$ la force qui s'exerce sur la particule P à l'instant t. D'après la deuxième loi de Newton :

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \dot{\vec{p}}$$

d'où

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} \equiv \vec{M}_0(\vec{F}) \tag{4}$$

<u>Théorème</u> : La dérivée par rapport au temps du moment cinétique de la particule P au point O est égale au moment résultant en O de la force $\vec{F}$ appliquée à P.

4. <u>Conservation du moment cinétique</u>.

Si le moment cinétique de la particule P au point O est constant, $\vec{L}_0$ = const.quelque soit le moment du temps t, a lieu la conservation du moment cinétique. En d'autres termes :

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \frac{d(\text{const.})}{dt} = 0. \tag{5}$$

D'après la relation (4), le moment résultant en O de la force $\vec{F}$ est donc nul :

$$\vec{M}_0(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F} = 0 \tag{6}$$

La condition de conservation (6) du moment cinétique est remplie si a) $\vec{F} = 0$ (le point P se meut rectiligne et uniforme; le point P est <u>isolé</u>) ou b) la force $\vec{F}$ est de la forme : $\vec{F} = f(r) \cdot \vec{r}$. $\vec{F}$ passe donc par le point fixe O, l'origine du vecteur de position de P. La force $\vec{F}$ est appelée <u>force centrale</u>. En effet, le moment de cette force par rapport à O est bien nul :

$$\vec{M}_0(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times (f(r)\vec{r}) = f(r)(\vec{r} \times \vec{r}) = 0 \bullet$$

VII. Forces centrales. Définition. Exemples.
Propriétés fondamentales.

1. <u>Définition</u>. On appelle force centrale, la force dont le support passe par un point fixe O pendant le mouvement de la particule (Fig.VII.1). L'expression générale d'une force centrale est :

$$\vec{F}(\vec{r}) = f(r)\cdot\vec{r}\,, \quad \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\,, \quad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = |\vec{r}|$$

où $\vec{r}$ représente le vecteur de position de la particule P dont les coordonnées cartésiennes sont x,y,z. La force centrale est, donc, <u>colinéaire</u> au vecteur de position $\vec{r}$ de la particule.

Si f(r)>0, la force centrale est de <u>répulsion</u>. Si f(r)<0, la force centrale est <u>d'attraction</u>.

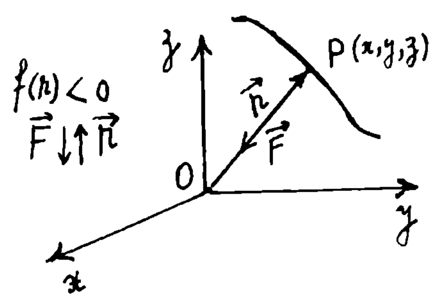


Fig.VII.1,a)

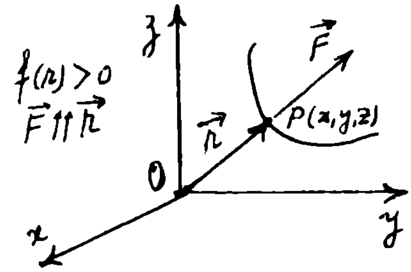


Fig.VII.1,b)

2. <u>Exemples de forces centrales</u>.

a) <u>Force d'attraction gravitationnelle</u>.

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\gamma\frac{mM}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r} = f(r)\vec{r} \qquad \text{où} \quad f(r) = -\gamma\frac{mM}{r^3} \tag{1}$$

b) <u>Force coulombienne</u>.

$$\vec{F}(\vec{r}) = \pm\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Qq}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r} = f(r)\vec{r} \qquad \text{où} \quad f(r) = \pm\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r^3} \tag{2}$$

c) <u>Force élastique</u>.

$$\vec{F}(\vec{r}) = -k\vec{r} \qquad \text{où} \quad f(r) = -k = \text{constant} \tag{3}$$

3. <u>Propriétés fondamentales des forces centrales</u>.

a) <u>Le moment cinétique d'une particule soumise à l'action d'une force centrale se conserve</u>.

<u>Démonstration</u> : Appliquons le théorème du moment cinétique :

$$\vec{M}_0(\vec{F}) = \frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{r}\times\vec{F} = \vec{r}\times(f(r)\vec{r}) = f(r)(\vec{r}\times\vec{r}) = 0\,.$$

Par suite, le moment cinétique de la particule P au point O est constant :

$$\vec{L}_0 = \text{constant}\,. \tag{4}$$

On dit que $\vec{L}_0$ est une <u>constante de mouvement</u> de P.

b) <u>La trajectoire de la particule soumise à l'action d'une force centrale est une courbe plane</u>.

b_1) <u>La première démonstration</u> : Le vecteur de position $\vec{r} \equiv \overrightarrow{OP}$ de la particule est constamment perpendiculaire à la direction fixe de $\vec{L}_0$ (Fig.VII.2). En conclusion, <u>le mouvement</u> de la particule s'effectue dans le plan <u>perpendiculaire</u> en O à la direction de $\vec{L}_0$ =constant.

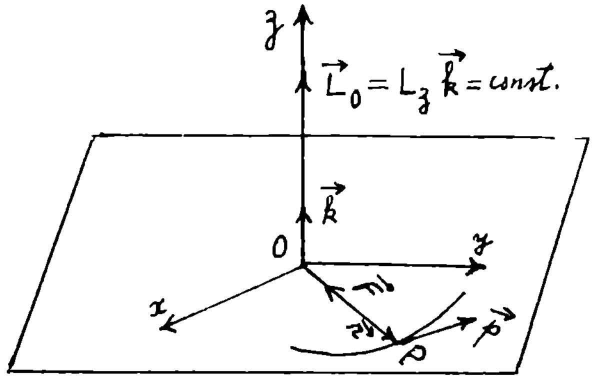


Fig.VII.2

b₂) La deuxième démonstration.

D'après (4) $\vec{L}_0 = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{C}$, $\vec{C}$ = vecteur constant. Multiplions cette relation scalairement par le vecteur de position $\vec{r}$:

$$\vec{r}\cdot(\vec{r}\times\vec{p}) = \vec{r}\cdot\vec{c} \quad (5)$$

Puisque les vecteurs $\vec{r}$ est $\vec{L}_0 = \vec{r} \times \vec{p}$ sont mutuellement perpendiculaires (Fig.VII.2) le produit scalaire :

$$\vec{r}\cdot\vec{L}_0 \equiv \vec{r}\cdot(\vec{r}\times\vec{p}) = |\vec{r}|\cdot|\vec{L}_0|\cdot\cos\frac{\pi}{2} = 0\,.$$

En utilisant les expressions analytiques de $\vec{r}$ et $\vec{C}$:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad \vec{C} = A\vec{i} + B\vec{j} + D\vec{k}$$

où A,B,D sont constantes, la relation (5) devient :

$$\vec{r}\cdot\vec{c} = Ax + By + Dz = 0\,. \quad (7)$$

(7) représente l'équation d'un plan qui passe par le point O (le terme libre est nul). En conclusion, la trajectoire du point P est une courbe plane.

c) Les aires balayées par le rayon vecteur $\vec{r}$ d'une particule P soumise à l'action d'une force centrale sont proportionnelles au temps mis pour les parcourir (loi des aires).

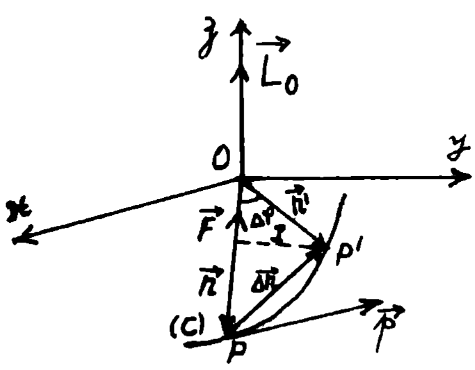


Fig.VI.3

Démonstration : Pendant le temps $\Delta t = t' - t$, P parcourt l'arc $\widehat{PP'} = \Delta s$ sur la trajectoire (C). Le rayon vecteur $\vec{r}$ balaye une aire ΔA égale à celle du triangle OPP' (Fig.VII.3) :

$$\Delta A = \frac{1}{2}|\vec{r}|\cdot l = \frac{1}{2}|\vec{r}|\;|\vec{r}\,'|\sin\Delta\varphi$$

On peut, donc, considérer l'aire ΔA égale au module du produit vectoriel : $\Delta\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{r}\times\vec{r}\,'$.

Puisque $\vec{r}\,' = \vec{r} + \Delta\vec{r}$ il suit :

$$\Delta\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{r}\times(\vec{r}+\Delta\vec{r}) = \frac{1}{2}\vec{r}\times\vec{r} + \frac{1}{2}\vec{r}\times\Delta\vec{r} = \frac{1}{2}\vec{r}\times\Delta\vec{r} \;;\quad (\vec{r}\times\vec{r} = \vec{0})\,.$$

D'autres part : $\vec{v}_m = \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ (la vitesse moyenne) qui pour $\Delta t \to 0$ devient : $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$ (la vitesse instantanée).

Alors, pour $\Delta t \to 0$ on a : $d\vec{A} = \dfrac{1}{2}(\vec{r} \times \vec{v})dt$ qui en module s'écrit : $\left|d\vec{A}\right| \equiv dA = \dfrac{1}{2}\left|\vec{r} \times \vec{v}\right|dt$.

Or, nous savons que : $\vec{L}_0 = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{C}$ (constant) ce qui implique :

$$\left|\vec{L}_0\right| \equiv L_0 = \left|\vec{r} \times m\vec{v}\right| = m\left|\vec{r} \times \vec{v}\right| = C \quad \text{(constante).}$$

Par suite, l'aire balayée par unité de temps s'écrit :

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2m}L_0 = C \quad \text{(constante)} \qquad \text{ou } dA = C\,dt.$$

Intégrons la dernière relation :

$$\int dA = C\int dt \Rightarrow A = Ct + C', \quad C' = \text{constante d'intégration.}$$

$$A(t) = \frac{L_0}{2m}t + C' \tag{8}$$

Loi des aires : Les aires balayées par le rayon vecteur $\vec{r}$ sont proportionnelles au temps mis pour les parcourir.

On dit que le mouvement de P a lieu selon la loi des aires.

Remarque : On appelle vitesse aréolaire à l'instant t, la dérivée par rapport au temps de l'aire balayée par le rayon vecteur $\vec{r}$ de la particule : $\dfrac{dA}{dt} \equiv \dot{A}$

Nous venons de voir que : $\dfrac{dA}{dt} \equiv \dot{A} = \dfrac{L_0}{2m} = C$ (constante).

La vitesse aréolaire d'une particule soumise à une force centrale est donc constante (deuxième loi de Kepler).

d) Une force centrale qui ne dépend pas explicitement du temps est conservative et donc l'énergie mécanique totale de la particule se conserve.

Démonstration : Montrons l'existence d'une fonction $E_p(\vec{r})$ de manière que la force centrale s'écrire : $F(\vec{r}) = -\text{grad}\ E_p(\vec{r}) = f(r)\vec{r}$.

Il en résulte de ceci que :

$$-\frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial E_p}{\partial z}\vec{k} = f(r)\ (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$$

ou

$$-\frac{\partial E_p}{\partial x} = f(r)x, \qquad -\frac{\partial E_p}{\partial y} = f(r)y, \qquad -\frac{\partial E_p}{\partial z} = f(r)z. \tag{9}$$

Additionnons les équations (9) multipliées par dx, dy, dz :

$$-dE_p \equiv -\left(\frac{\partial E_p}{\partial x}dx + \frac{\partial E_p}{\partial y}dy + \frac{\partial E_p}{\partial z}dz\right) = \tag{10}$$

$$= f(r)\ (xdx + ydy + zdz) = \frac{f(r)}{2}d(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{f(r)}{2}d(r^2).$$

Par l'intégration l'équation (10) fournit l'expression de l'énergie potentielle E_P :

$$E_p(r) = -\frac{1}{2}\int f(r)d(r^2) + C. \tag{11}$$

Remarque : Pour une force centrale l'énergie potentielle E_P est une fonction de $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, le module du vecteur de position de la particule.

Exemples de forces centrales qui remplissent la condition d) :

1) La force d'attraction gravitationnelle (voir IV, (27),(32)).

$$\vec{F} = -\frac{k}{r^3}\vec{r}, \qquad f(r) = -\frac{k}{r^3}, \qquad E_p(r) = -\frac{k}{r}$$

2) La force élastique :

$$\vec{F} = -k\vec{r}, \qquad f(r) = -k, \qquad E_p(r) = \frac{kr^2}{2}$$

VIII. Le mouvement d'un point matériel soumis aux liaisons.

a) Liaisons. Réactions. Equations différentielles du mouvement.

Il est possible que le point matériel sur lequel agit la force résultante $\vec{R}$ soit soumis aux liaisons.

Un point matériel qui est obligé à rester pendant son mouvement sur une surface qui occupe une position fixe dans l'espace (par exemple une surface sphérique d'équation $x^2+y^2+z^2-r^2=0$, r-le rayon de la sphère) est soumis à une liaison. L'équation de la surface :

$$f(x,y,z)=0 \qquad (1)$$

est appelée *l'équation de la liaison*.

Dans le cas où sur un point matériel soumis à une liaison agit une *force extérieure* $\vec{R}$ alors la force $\vec{\Re}$ avec laquelle la liaison réagit sur le point matériel c'est la *force de liaison* où *la réaction*.

La réaction $\vec{\Re}$ peut être décomposée en deux composantes (Fig.VIII.1) :

$$\vec{\Re} = \vec{N} + \vec{T} \qquad (2)$$

où $\vec{N}$ c'est la composante normale et $\vec{T}$, la composante tangentielle où la force de frottement ($\vec{F}_f$); le module de $F_f \equiv T$ est égal à $F_f = \mu \cdot N$, μ = le coefficient du frottement.

La liaison pour laquelle $\vec{T}=0$ est appelée *idéale*. Dans ce cas la réaction $\vec{\Re}=\vec{N}$ est *normale* à la liaison.

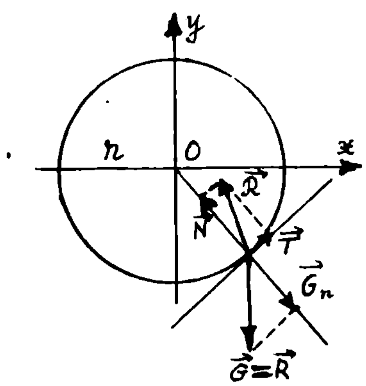


Fig. VIII.1

Dans la figure VIII.1 est présenté un point matériel assujetti à rester pendant son mouvement sur une cercle de rayon r est d'équation $x^2+y^2-r^2=0$ (équation de la liaison). La force extérieure $\vec{R}$ qui agit sur le point matériel est la pesanteur $\vec{G}=m\vec{g}$ où m est la masse du point matériel. $\vec{\Re}$ est la réaction de la liaison.

La deuxième loi de la dynamique pour un point matériel soumis aux liaisons s'écrit vectoriel : $m\vec{a}=\vec{R}+\vec{\Re}$ (3)

ou scalairement :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = R_x + \Re_x, \qquad (4)$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = R_y + \Re_y .$$

Les équations (4) représentent *les équations différentielles du mouvement* du point matériel soumis aux liaisons.

Par la suite nous présenterons deux exemples du mouvements aux liaisons.

b) Le mouvement d'un point matériel sur un plan incliné.

Considérons un point matériel qui se meut avec frottement sur un plan incliné sous l'action de la force appliquée (extérieure) $\vec{G}$, la pesanteur du point matériel. Sur le point actionne également la réaction $\vec{\mathfrak{R}}$ de la liaison (le plan incliné). (Fig. VIII.2). $\vec{\mathfrak{R}} = \vec{N} + \vec{T}$, $T = F_f = \mu N$.

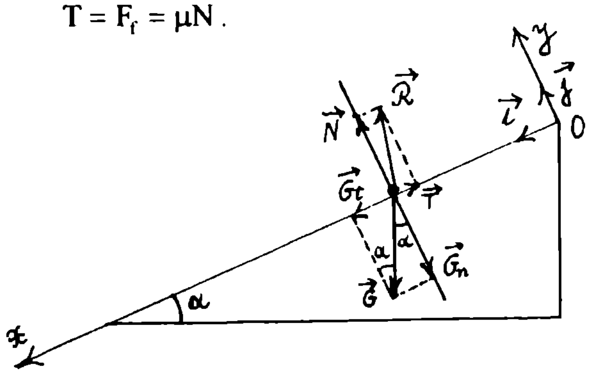


Fig. VIII.2

Si considérons un système de coordonnées xOy de manière que l'axe Ox coïncide avec le plan incliné et on note par α l'angle de celui-ci, *l'équation de la liaison sera y=0* et l'équation du mouvement sous forme vectorielle s'écrit :

$$m\vec{a} = \vec{G} + \vec{\mathfrak{R}} = \vec{G} + \vec{N} + \vec{T} . \qquad (5)$$

Puisque,

$$\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2}\cdot\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\cdot\vec{j} \ , \ \vec{G} = \vec{G}_t\cdot\vec{i} + \vec{G}_n\cdot\vec{j} = mg\cdot\sin\alpha\cdot\vec{i} - mg\cdot\cos\alpha\cdot\vec{j} \ ;$$

$$\vec{N} = N\cdot\vec{j} \ , \ \vec{T} = -\mu\cdot N\cdot\vec{i}$$

les équations du mouvement s'écrivent scalairement :

$$\begin{aligned} m\cdot\frac{d^2x}{dt^2} &= mg\cdot\sin\alpha - \mu\cdot N \ , \\ m\cdot\frac{d^2x}{dt^2} &= -mg\cdot\cos\alpha + N \ . \end{aligned} \qquad (6)$$

En utilisant l'équation de la liaison y=0, de la deuxième relation (6), on obtient :

$$0 = -mg\cdot\cos\alpha + N \rightarrow N = mg\cdot\cos\alpha \ .$$

De la première équation (6) on obtient par intégration *la loi de la vitesse* du point matériel. En effet,

$$m\cdot\frac{d^2x}{dt^2} \equiv m\cdot\frac{dv_x}{dt} = mg\cdot\sin\alpha - \mu\cdot mg\cdot\cos\alpha \ ,$$

$$\frac{dv_x}{dt}\cdot dt \equiv dv_x = (g\cdot\sin\alpha - \mu\cdot g\cdot\cos\alpha)\cdot dt \ ,$$

$$\int_0^t dv_x \equiv v_x\Big|_0^t = g\cdot(\sin\alpha - \mu\cdot\cos\alpha)\cdot\int_0^t dt = g\cdot(\sin\alpha - \mu\cdot\cos\alpha)\cdot t \ ,$$

$$v_x(t) - v_x(0) = g\cdot(\sin\alpha - \mu\cdot\cos\alpha)\cdot t \ .$$

Donc,

$$v_x(t) = v_0 + g\cdot(\sin\alpha - \mu\cdot\cos\alpha)\cdot t \ . \qquad (7)$$

où $v_o \equiv v_x(0)$ représente la vitesse initiale t=0 du mouvement.

La loi du mouvement s'obtient par une nouvelle opération d'intégration de l'équation (7). En effet,

$$v_x(t) \equiv \frac{dx}{dt} = v_0 + g\cdot(\sin\alpha - \mu\cdot\cos\alpha)\cdot t \, ;$$

$$\frac{dx}{dt}dt = dx = v_0 dt + g(\sin\alpha - \mu\cdot\cos\alpha)\, t dt$$

$$\int_0^t dx \equiv v_0 \cdot \int_0^t dt + g\cdot(\sin\alpha - \mu\cdot\cos\alpha)\cdot\int_0^t t\cdot dt\,;$$

$$x\big|_0^t = v_0\cdot t\big|_0^t + g\cdot(\sin\alpha-\mu\cdot\cos\alpha)\cdot\left.\frac{t^2}{2}\right|_0^t .$$

Donc,

$$x(t) = x(0) + v_0\cdot t + g\cdot(\sin\alpha-\mu\cdot\cos\alpha)\cdot\frac{t^2}{2}\,; \tag{8}$$

où $x(0)\equiv x_o$ représente la valeur de l'abscisse x au moment t=0 du point matériel.

c) Le pendule mathématique.

Analysons le mouvement d'un point matériel de masse m obligé à se mouvoir sur une cercle de rayon r situé en plan vertical (le pendule mathématique).
Les forces qui agissent sur le point matériel sont : la force appliquée (extérieure) $\vec{G} = m\vec{g}$ (force de pesanteur) et la réaction $\vec{\mathfrak{R}}$ de la liaison (Fig. VIII.3), $\vec{\mathfrak{R}} = \vec{N}$, $\vec{T}=0$ et le travail mécanique élémentaire de celle-ci est nul :

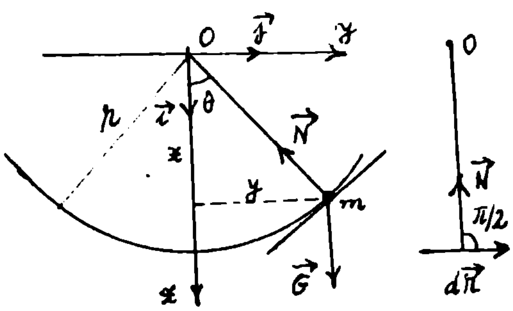


Fig. VIII.3

$$dW_{\vec{N}} = \vec{N}\cdot d\vec{r} = |\vec{N}|\cdot|d\vec{r}|\cdot\cos\frac{\pi}{2} = 0$$

On utilise souvent dans ce cas le théorème de l'énergie cinétique sous la forme différentielle:

$dE_C=dW$ où $dW=dW_{\vec{G}}+dW_{\vec{N}}=dW_{\vec{G}}$,

$dE_C=dW_{\vec{G}}=\vec{G}\cdot d\vec{r}=G_x\cdot dx+G_y\cdot dy+G_z\cdot dz$.

Puisque $G_x=mg$, $G_y=G_z=0$ alors :

$$dE_C=mg\cdot dx\,. \tag{9}$$

Ecrivons l'énergie cinétique E_C du point matériel en coordonnées polaires r, θ (r=constante). On utilise :

$$x = r\cdot\cos\theta\ ,\ y = r\cdot\sin\theta\ ,\ \dot{x} = -r\cdot\dot{\theta}\cdot\sin\theta\ ,\ \dot{y} = r\cdot\dot{\theta}\cdot\cos\theta,\ dx = -r\cdot\sin\theta\cdot d\theta \tag{9'}$$

Alors, l'énergie cinétique s'écrit :

$$E_c = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}\cdot(\dot{x}^2+\dot{y}^2) = \frac{m}{2}r^2\dot{\theta}^2\,. \tag{10}$$

La différentielle de (10) est :

$$dE_c = \frac{m}{2}\cdot r^2\cdot d\dot{\theta}^2 = m\cdot r^2\cdot\dot{\theta}\cdot d\dot{\theta}\,. \tag{11}$$

Puisque dx=-r·sinθ·dθ, de (9) et (11) on obtient :

$$m\cdot r^2\cdot\dot{\theta}\cdot d\dot{\theta} = -mg\cdot r\cdot\sin\theta\cdot d\theta \longrightarrow r\cdot\dot{\theta}\cdot d\dot{\theta} = -g\cdot\sin\theta\cdot d\theta\,. \tag{12}$$

En tenant compte en (12) du fait que :

$$d\dot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{dt}dt \equiv \frac{d^2\theta}{dt^2}dt \qquad \text{et} \qquad d\theta = \frac{d\theta}{dt}dt \equiv \dot{\theta}\cdot dt \tag{13}$$

l'on obtient l'équation différentielle de mouvement du pendule mathématique :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{r} \cdot \sin\theta = 0 \,. \tag{14}$$

Pour des angles d'oscillation petits ($\alpha<5^{\circ}$, $\sin\theta\approx\theta$) on obtient l'équation :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{r} \cdot \theta = 0 \,. \tag{15}$$

Si on note $\omega^2=g/r$ l'équation (16)

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2 \cdot \theta = 0 \qquad (\ddot{\theta} + \omega^2 \cdot \theta = 0) \tag{16}$$

a la solution générale (l'équation de mouvement du pendule) :

$$\theta = A \cdot \sin(\omega t + \varphi) \ \text{ ou } \ \theta = A \cdot \cos(\omega t + \varphi) \tag{17}$$

où A et ϕ sont deux constantes arbitraires.

On peut vérifier directement le fait que (17) représente la solution de (16). Puisque :

$$\dot{\theta} = A\omega \cdot \cos(\omega t + \varphi) \ \text{ et } \ \ddot{\theta} = -A\omega^2 \cdot \sin(\omega t + \varphi), \tag{18}$$

le remplacement de (17) et (18) en (16) donne :

$$-A\omega^2 \cdot \sin(\omega t + \varphi) + \omega^2 A \cdot \sin(\omega t + \varphi) = 0 \,. \tag{19}$$

En conclusion, le pendule mathématique effectue un mouvement *oscillatoire harmonique* autour de la position d'équilibre ayant la pulsation $\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{g}{h}}$ et la période :

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{r}{g}} \,. \tag{20}$$

On dit que pour $\theta<5^{\circ}$, les oscillations du pendule mathématique son *isochrones* (la période T ne dépend pas de θ).

IX. Le mouvement oscillatoire du point matériel.

1. Oscillateur linéaire harmonique.

a) Définition. La force élastique. Exemple.

Soit une particule de masse m qui se meut sur une droite sous l'action d'une *force proportionnelle à l'écartement de la particule de sa position d'équilibre et constamment dirigée vers la position d'équilibre*. Ce système oscillant est appelé *oscillateur linéaire harmonique*. Les forces répondant aux exigences indiquées plus haut sont appelées *élastiques*. Comme le mouvement de la particule dans un oscillateur linéaire s'effectue suivant une droite, on peut toujours choisir cette droite pour axe de coordonnées. Supposons qu'il s'agit de l'axe Ox et que l'origine des coordonnées coïncide avec la position d'équilibre de la particule (Fig.IX.1). Dans ce cas l'expression de la force élastique s'écrit :

$$\vec{F} = -kx\vec{i} \qquad (1)$$

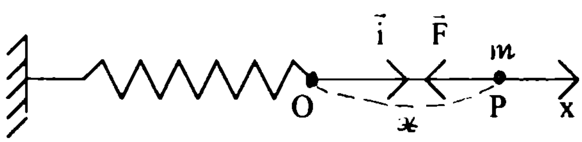


Fig. IX.1

Un exemple de ce mouvement nous est fourni par une bille accrochée à un ressort élastique, de masse négligeable, qui se déplace, sans frottement, le long d'une tige rectiligne horizontale confondue avec l'axe Ox. La constante k>0 est la rigidité du ressort.

b) Equation différentielle du mouvement de la particule P et sa solution.

D'après la deuxième loi de Newton :

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} = -kx\vec{i}\ ;\ \vec{a} = \text{le vecteur accélération} \qquad (2)$$

D'où, l'équation différentielle du mouvement de P :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \qquad (3)$$

En tenant compte de ce que $k/m>0$ et introduisant la notation $k/m=\omega_o^2$ l'on obtient :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0 \qquad (4)$$

La solution de cette équation, nous le savons, est de la forme :

$$x=a\cdot\sin(\omega_o t+\phi) \text{ ou } x= a\cdot\cos(\omega_o t+\phi) \qquad (5)$$

où a et ϕ sont de constantes arbitraires. Ces constantes peuvent être trouvées à partir des conditions initiales : si, par exemple, pour t=0 on a $x=x_o$, $\dot{x}=v_o$, alors, comme il est facile de se convaincre,

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}} \quad \text{et} \quad \varphi = \mathrm{Arctg}\frac{x_0\omega_0}{v_0} \qquad (6)$$

L'équation (5), la solution de (4) représente *l'équation de mouvement de l'oscillateur linéaire harmonique*.

c) Caractéristiques du mouvement de l'oscillateur linéaire harmonique.

x représente *l'élongation* de l'oscillateur linéaire harmonique et a *l'amplitude* du mouvement. La quantité a désigne l'élongation maximale (distance maximale du mobile à sa position d'équilibre O). La quantité ω_0 est la *pulsation* ou *fréquence circulaire*, la quantité $\omega_0 t+\varphi$ s'appelle *phase de l'oscillation* et la quantité φ est la *phase initiale* (ou déphasage) correspondant à t=0. Pour donner une représentation graphique de ce mouvement, on peut porter t en abscisses et les élongations correspondantes du point x en ordonnées; on obtient alors une courbe périodiques *sinusoïdale*. L'amplitude a du mouvement conserve une valeur constante quelque soit t. On dit que dans ce cas l'oscillation harmonique est *non-amortie*.

Le mouvement décrit par la relation (5) sera évidemment périodique, le temps y entre par le moyen d'une fonction périodique. Cela signifie qu'il existe un intervalle de temps T (période d'oscillation) tel que :

$$\sin(\omega_0 t+\varphi)=\sin[\omega_0(t+T)+\varphi] \tag{7}$$

Il en découle que :

$$\omega_0(t+T)+\varphi-(\omega_0 t+\varphi)=2\pi \rightarrow \omega_0 T=2\pi \tag{8}$$

L'inverse de la *période T, fréquence* ν est :

$$\nu=1/T=\omega_0/2\pi \tag{9}$$

Selon la relation $k/m=\omega_0^2$:

$$\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}},\ \nu=\frac{1}{2\pi}\cdot\sqrt{\frac{k}{m}},\ T=2\pi\cdot\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{10}$$

d) L'énergie totale de l'oscillateur linéaire harmonique.

L'énergie cinétique est : $E_C=\frac{m}{2}\cdot\dot{x}^2$. La vitesse $\dot{x}$ du point oscillant s'obtient par dérivation de (5) par rapport au temps :

$$v\equiv\dot{x}=a\omega_0\cdot\cos(\omega_0 t+\varphi). \tag{11}$$

L'énergie cinétique est égale a :

$$E_c=\frac{1}{2}ma^2\omega_0^2\cdot\cos^2(\omega_0 t+\varphi). \tag{12}$$

L'énergie potentielle se trouve de la condition de conservativité remplie par la force élastique $\vec{F}=-kx\cdot\vec{i}$:

$$\vec{F}=-kx\vec{i}=-\text{grad }E_p(x)=-\frac{dE_p}{dx}\vec{i} \tag{13}$$

ou

$$kx=\frac{dE_p}{dx}\rightarrow dE_p=kx\cdot dx \tag{13'}$$

Si pour la valeur nulle de l'énergie potentielle on prend la valeur atteinte au moment où la particule se trouve en position d'équilibre, alors l'énergie potentielle d'une certaine position ayant pour coordonnée x on obtient par l'intégration de l'équation (13') :

$$\int_0^x dE_p=k\cdot\int_0^x x\cdot dx\rightarrow E_p\Big|_0^x=k\frac{x^2}{2}\rightarrow E_p(x)-E_p(0)=k\frac{x^2}{2},$$

$$E_p(0) = 0 \quad \text{(par hypothèse) et alors} \quad E_p(x) = k\frac{x^2}{2} \cdot \qquad (14)$$

En y portant x tiré de (5) et tenant compte de ce que d'après $k=m\cdot\omega_o^2$, on trouve :

$$E_p(x) = \frac{1}{2}ma^2\omega_0^2 \cdot \sin^2(\omega_0 t + \varphi) \cdot \qquad (15)$$

À l'aide de (12) et (15) on trouve *l'énergie totale* :

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2}ma^2\omega_0^2 \cdot \left[\cos^2(\omega_0 t + \varphi) + \sin^2(\omega_0 t + \varphi)\right] \longrightarrow$$

$$E = \frac{1}{2}ma^2\omega_0^2 = \text{constante} \cdot \qquad (16)$$

Les relations (12) et (15) montrent que les énergie cinétique et potentielle varient avec le temps comme les carrés du sinus et du cosinus. Elles montrent que ni l'énergie potentielle ni l'énergie cinétique prises isolement *ne sont constantes*, mais l'énergie totale (16) reste cependant *constante* (l'énergie totale de l'oscillateur harmonique *se conserve*). De plus, on voit de (16) que l'énergie totale est *proportionnelle au carré de l'amplitude du mouvement*.

e) Le calcul de l'élongation (5) en appliquant le principe de conservation de l'énergie totale.

Ecrivons l'énergie totale de la particule :

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{kx^2}{2} = \frac{1}{2}ma^2\omega_0^2 \equiv \frac{ka^2}{2}, k = m\omega_0^2 \cdot \qquad (17)$$

D'où :

$$v^2 = \frac{k}{m}(a^2 - x^2), v = \frac{dx}{dt} \qquad (17')$$

et

$$v \equiv \frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{k}{m}(a^2 - x^2)} \rightarrow \frac{dx}{\pm\sqrt{(a^2 - x^2)}} = \sqrt{\frac{k}{m}}dt \cdot \qquad (18)$$

Puisque

$$\int \frac{dx}{\pm\sqrt{a^2 - x^2}} = \begin{cases} \arcsin\frac{x}{a} + C \\ \arccos\frac{x}{a} + C \end{cases} \qquad (19)$$

en intégrant (18),

$$\int \frac{dx}{\pm\sqrt{a^2 - x^2}} = \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot \int dt \qquad (20)$$

on obtient :

$$\arcsin\frac{x}{a} = \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t + C \qquad (21)$$

et

$$\arccos\frac{x}{a} = \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t + C \quad \cdot$$

Si on fait la remarque :

$$\sin(\arcsin y)=y \quad \text{et} \quad \cos(\arccos y)=y \tag{22}$$

on trouve de (21) :

$$\frac{x}{a}=\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot t+C\right) \rightarrow x=a\cdot\sin(\omega_0 t+C) \tag{23}$$

et

$$\frac{x}{a}=\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot t+C\right) \rightarrow x=a\cdot\cos(\omega_0 t+C)\,. \tag{23'}$$

2. L'oscillateur harmonique amorti.

a) Introduction.

Les oscillations non amorties représentent un cas limite idéal puisque en réalité, tous les mouvements vibratoires ou pendulaires s'amortissent plus ou moins rapidement, du fait des *forces de frottement* qui s'opposent à tout mouvement dans les milieux matériels. Lorsqu'un corps se meut dans un milieu, celui-ci offre une résistance qui tend à ralentir le mouvement. L'énergie du corps se transforme alors finalement en chaleur ou, comme on dit, se dissipe et l'amplitude du mouvement décroît en temps.

b) Equation différentielle du mouvement. Equation de l'élongation.

Considérons le cas où sur le point matériel P agit en outre la force élastique $\vec F=-kx\cdot\vec i$, une " force de frottement " dépendant seulement (pour un milieu homogène donné) de sa vitesse :

$$\vec F_{fr}=-fv\vec i=-f\frac{dx}{dt}\vec i\equiv -f\dot x\vec i \;\; ; \;\; f>0, \tag{24}$$

où x est l'abscisse de P et f un coefficient positif (Fig. IX.2); le signe moins montre que la force agit dans un sens opposé à celui de la vitesse. Telles forces de résistance existent toujours lorsqu'on réalise pratiquement un oscillateur harmonique, du fait que le milieu(l'air) exerce une force de résistance sur ce point matériel

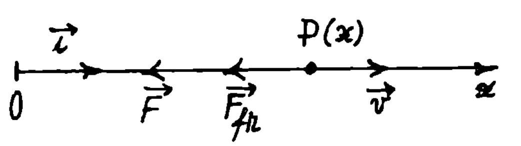


Fig. IX.2

Pour des vitesses de déplacement petites, la force de résistance peut être considérée toujours proportionnelle à la vitesse $\vec v$.

L'équation différentielle du mouvement (la deuxième loi de la dynamique) s'écrit :

$$m\vec a=\vec F+\vec F_{fr} \rightarrow ma_x\vec i=-kx\vec i-f\dot x\vec i\,, \tag{25}$$

$$m\ddot x=-kx-f\dot x \rightarrow m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx-f\frac{dx}{dt}\,. \tag{26}$$

Divisons cette expression par m (la mass de P) et posons :

$$\frac{k}{m}=\omega_0^2 \quad \text{et} \quad \frac{f}{m}=2\beta\,. \tag{27}$$

ω_0 est la fréquence des oscillations du système en l'absence de frottement. La grandeur β est appelée *coefficient d'amortissement*. Nous avons donc l'équation différentielle linéaire d'ordre deux à coefficients constants :

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \cdot \qquad (28)$$

Pour trouver la solution x(t) de cette équation différentielle (pour l'intégrer) on introduit une nouvelle fonction y(t) de sorte que :

$$x(t) = y(t)\cdot e^{-\beta t} \cdot \qquad (29)$$

On obtient :

$$\dot{x} = \dot{y}\cdot e^{-\beta t} - \beta y \cdot e^{-\beta t} \; , \qquad (30)$$

$$\ddot{x} = e^{-\beta t}\left(\ddot{y} - 2\beta\dot{y} + \beta^2 y\right) \cdot$$

Remplaçons (29) et (30) en (28) et introduisons la notation $\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2$.

Après la simplification avec $e^{-\beta t}$ l'on obtient l'équation différentielle linéaire d'ordre deux à coefficients constants :

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0 \cdot \qquad (31)$$

<u>Remarque</u> : On a supposé que la résistance du milieu est aussi petite que $\beta < \omega_0$, ou $\beta^2 < \omega_0^2$, ou $\omega_0^2 - \beta^2 \equiv \omega^2 > 0$.

La solution de l'équation (31) est connue (voir (17)-VIII).

$$y = A \cdot \sin(\omega t + \varphi) \cdot \qquad (32)$$

En tenant compte de la relation (29) la solution de l'équation (28) s'écrit :

$$x(t) = A \cdot e^{-\beta t} \cdot \sin(\omega t + \varphi) = B(t)\cdot \sin(\omega t + \varphi) \qquad (33)$$

où $\quad B(t) = A \cdot e^{-\beta t} \cdot \qquad (34)$

(33) représente *l'équation de l'élongation* d'un mouvement sinusoïdal amorti. L'amplitude B(t) de l'oscillation harmonique amortie décrite par la relation (34) est une fonction *qui décroît exponentiellement*. Un mouvement exprimé à l'aide des relations (33) et (34) constitue ce qu'on appelle des *oscillations amorties*. *Une oscillation amortie peut être considérée comme une oscillation harmonique dont l'amplitude décroît exponentiellement.*

À partir de la pulsation de l'oscillation amortie $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ on peut écrire *l'expression de la période T de l'oscillation amortie* :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \rightarrow T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \cdot \qquad (35)$$

On observe que la "fréquence" ω des oscillations amorties est plus petite que celle des oscillations en l'absence de frottement ω_0 :

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2 \rightarrow \omega_0^2 - \omega^2 = \beta^2 > 0 \rightarrow \omega^2 < \omega_0^2 \rightarrow \omega < \omega_0 \cdot \qquad (37)$$

On pouvait s'attendre *à priori* à ce que le frottement diminue la fréquence, puisque en général il ralentit le mouvement. De la relation (37) résulte également que $T > T_0$:

$$2\pi\nu < 2\pi\nu_0 \Rightarrow \frac{1}{T} < \frac{1}{T_0} \rightarrow T > T_0 \cdot$$

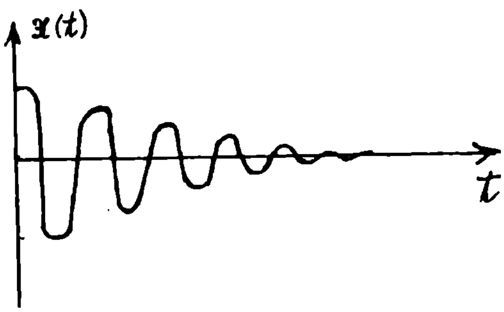


Fig. IX.3

Dans la Fig. IX.3 est représente le graphe d'une oscillation harmonique amortie. La vitesse de décroissance de l'amplitude B(t) est déterminée par le coefficient β.

c) Décrément logarithmique de l'amortissement.

Le coefficient d'amortissement peut être déterminé expérimentalement si on considère deux amplitudes successives B_n et B_{n+1} qui correspondent aux moments du temps nT et (n+1)T (n-nombre naturel) :

$$B_n(nT) = A \cdot e^{-\beta(nT)}, B_{n+1}\left[(n+1)T\right] = A \cdot e^{\beta(n+1)T} \quad (38)$$

Le rapport :

$$\frac{B_n}{B_{n+1}} = e^{\beta T} \quad (39)$$

est appelé *décrément de l'amortissement*.
Le logarithme naturel du décrément de l'amortissement :

$$D = \ln\frac{B_n}{B_{n+1}} = \ln e^{\beta T} = \beta T \quad (40)$$

est appelé *décrément logarithmique de l'amortissement*.
Donc, le coefficient d'amortissement s'écrit :

$$\beta = \frac{D}{T} = \frac{1}{T}\ln\frac{B_n}{B_{n+1}} . \quad (41)$$

La grandeur D est *sans dimension*.

d) Aspects énergiques de l'oscillateur harmonique amorti.

Puisque la force de frottement $\vec{F}_{fr} = -f\dot{x}\vec{i}$ dépend de la vitesse celle-ci n'est plus conservative. Alors, l'énergie mécanique totale du système (l'oscillateur harmonique amorti) ne se conserve plus. En effet, si on multiplie *l'équation différentielle du mouvement* (26) par $\dot{x}$ l'on obtient :

$$m\ddot{x}\dot{x} + kx\dot{x} + f\dot{x}^2 = 0 . \quad (42)$$

D'autre part l'on observe que :

$$m\ddot{x}\dot{x} + kx\dot{x} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2}\right) = \frac{d}{dt}\left(E_c + E_p\right) = \frac{dE}{dt} \quad (43)$$

où $E = E_c + E_p$ représente l'énergie mécanique totale du système en considérant la force $\vec{F}_{fr} = 0$.
De (42) il s'ensuit que :

$$\frac{dE}{dt} = -f\dot{x}^2 < 0 . \quad (44)$$

En d'autres termes, l'énergie mécanique totale E ***décroît avec le temps t***; elle n'est plus constante, raison pour laquelle la force $\vec{F}_{fr}$ est nommé ***force dissipative***.

3. L'oscillateur linéaire harmonique entretenu. Oscillations forcées avec frottement.

a) Introduction.
Les oscillations mécaniques d'un point matériel sont toujours des oscillations amorties, parce qu'on ne peut pas négliger les forces dissipatives du type des forces de frottement. Est-il possible de réaliser un système mécanique qui effectue des oscillations harmoniques, en présence des forces de frottement, dont l'amplitude reste constante ?

Du fait que l'amortissement des oscillations est le résultat de la perte continuelle d'énergie mécanique à cause de l'existence des forces dissipatives, on pourrait entretenir une oscillation non-amortie si l'on fourni continuellement au système de l'énergie de l'extérieur, pour *compenser* les pertes.
Ce fait est réalisé lorsqu'on applique au point matériel une force extérieure. Nous nous arrêterons ici en détail sur le cas particulier intéressant où la force extérieure qui provoque les oscillations est périodique (sinusoïdale ou cossinussoïdalle), $\vec{F}_e = H \cdot \cos\omega t \cdot \vec{i}$, H=l'amplitude de la force.

b) Equation différentielle du mouvement. Equation de l'élongation.
L'équation différentielle du mouvement du point matériel de masse m s'écrit :

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{F}_{fr} + \vec{F}_e \tag{45}$$

où

$$\vec{F} = -kx \cdot \vec{i}, \vec{F}_{fr} = -f\dot{x} \cdot \vec{i}, \vec{F}_e = H\cos\omega t \cdot \vec{i} \,, \tag{46}$$

$$\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} = \ddot{x} \cdot \vec{i} \,.$$

Scalairement l'équation (45) a la forme suivante :

$$m\ddot{x} = -kx - f\dot{x} + H\cos\omega t \,. \tag{47}$$

Si on introduit les notations :

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2, \ \frac{f}{m} = 2\beta, \ \frac{H}{m} = h \tag{48}$$

l'équation (47) prend la forme :

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = h \cdot \cos\omega t \,. \tag{49}$$

On cherche la solution de cette équation différentielle sous la forme :

$$x(t) = a \cdot \cos(\omega t + \varphi) \tag{50}$$

où la pulsation ω coïncide avec celle de la force périodique extérieure $\vec{F}_e = H\cos\omega t \cdot \vec{i}$.
Déterminons les constantes a et φ en fonction de β, ω, ω_0 et h.
Dans ce but calculons les dérivées $\dot{x}$ et $\ddot{x}$:

$$\dot{x} = -a\omega \cdot \sin(\omega t + \varphi), \ \ddot{x} = -a\omega^2 \cdot \cos(\omega t + \varphi) \tag{51}$$

et portons (50), (51) en (49) :

$$-a\omega^2 \cdot \cos(\omega t + \varphi) - 2\beta a\omega \cdot \sin(\omega t + \varphi) + \omega_0^2 a \cdot \cos(\omega t + \varphi) = h \cdot \cos\omega t \,. \tag{52}$$

En tenant compte de :

$$\begin{cases} \cos(\omega t + \varphi) = \cos\omega t \cdot \cos\varphi - \sin\omega t \cdot \sin\varphi \\ \sin(\omega t + \varphi) = \sin\omega t \cdot \cos\varphi + \cos\omega t \cdot \sin\varphi \end{cases} \tag{53}$$

et mettant en évidence comme facteurs communs les fonctions $\cos\omega t$ et $\sin\omega t$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} &(-a\omega^2 \cdot \cos\varphi + \omega_0^2 a \cdot \cos\varphi - 2\beta a\omega \cdot \sin\varphi - h)\cos\omega t + \\ &+ (a\omega^2 \cdot \sin\varphi - \omega_0^2 a \cdot \sin\varphi - 2\beta a\omega \cdot \cos\varphi)\sin\omega t = 0 \,. \end{aligned} \tag{54}$$

(54) représente une identité trigonométrique qui est valable quelque soit t. Pour remplir l'identité (54) il faut que :

$$\begin{cases} -a\omega^2 \cdot \cos\varphi + \omega_0^2 a \cdot \cos\varphi - 2\beta a\omega \cdot \sin\varphi - h = 0 \,; \\ a\omega^2 \cdot \sin\varphi - \omega_0^2 a \cdot \sin\varphi - 2\beta a\omega \cdot \cos\varphi = 0 \,, \end{cases} \tag{55}$$

ou :

$$\begin{cases}(\omega_0^2-\omega^2)\cdot\sin\varphi+2\beta\omega\cdot\cos\varphi=0 \ , \\ (\omega_0^2-\omega^2)\cdot\cos\varphi-2\beta\omega\cdot\sin\varphi=\dfrac{h}{a} \ .\end{cases} \tag{56}$$

De la première équation on obtient la phase initiale inconnue :

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{2\beta\omega}{\omega^2-\omega_0^2} \ . \tag{57}$$

Si on élève au carré les équations (56) et ensuite on additionne les résultats obtenus il vient pour l'amplitude des oscillations entretenues :

$$a=\frac{h}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)+4\beta^2\omega^2}} \ . \tag{58}$$

(57) et (58) déterminent *la phase* et *l'amplitude* des oscillation forcées.

Par conséquent, *l'équation de l'amplitude* du mouvement d'un oscillateur harmonique amorti est donnée par l'équation (50) avec φ et a donnés par les équation (57) et (58).

c) Le phénomène de résonance.

Commentons la relation de l'amplitude (58) des oscillations forcés d'un oscillateur linéaire harmonique entretenu :

$$a=\frac{h}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)+4\beta^2\omega^2}} \ . \tag{59}$$

Si on varie la valeur de la pulsation ω de la force extérieure on constate également la variation de l'amplitude a des oscillations.

En conclusion on peut considérer l'amplitude a comme fonction de la variable ω, $a(\omega)$.

Posons nous la question suivante : pour quelles valeurs de la pulsation ω de la force extérieure l'amplitude $a(\omega)$ des oscillations forcées a des valeurs *extrêmes* ? Dans ce but calculons la dérivée de (59) par rapport à ω. L'on obtient :

$$\frac{da(\omega)}{d\omega}=-\frac{h\left[8\beta^2\omega-4\left(\omega_0^2-\omega^2\right)\omega\right]}{2\left[\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\beta^2\omega^2\right]^{\frac{3}{2}}} \ . \tag{60}$$

L'annulation de la première dérivation (60) :

$$\frac{da(\omega)}{d\omega}=0 \tag{61}$$

entraîne l'équation :

$$2\beta^2\omega-(\omega_0^2-\omega^2)\omega=0 \tag{62}$$

dont les racines sont :

$$\omega_1=0 \ , \ \omega_{2,3}=\pm\sqrt{\omega_0^2-\beta^2} \ . \tag{63}$$

Il est facile à voir que $\omega_1=0$ correspond à un *minimum* de la fonction $a(\omega)$, pendant que $\omega_{2,3}$ correspondent aux *maxima* de la fonction $a(\omega)$. Les valeurs $\omega_{2,3}$ sont appelées pulsations de *résonance* et l'apparition d'une valeur *maximum* pour l'amplitude $a(\omega)$ est appelé *phénomène de résonance* .

La valeur maximum de l'amplitude $a(\omega)$, désignée par a_{res} l'on obtient portant $\omega_{2,3}$ dans la fonction $a(\omega)$:

$$a_{res} = a(\omega_{2,3}) = \frac{h}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \quad . \tag{64}$$

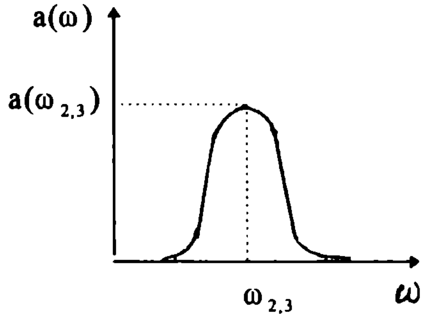


Fig. IX.4

Cas particulier : Si le coefficient de résistance $\beta = 0$, alors $\omega_{res} = \omega_0$, c'est à dire la pulsation de la force extérieure est égale à la pulsation *propre* ω_0. Dans cette situation :

$$a_{res} = \frac{h}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \to \infty \quad .$$

Si on étudie la dépendance de l'amplitude $a(\omega)$ en fonction de la variable ω on obtient pour $\beta \neq 0$ et constant, la courbe de la figure IX.4.

X. La dynamique du système de points matériels.

Ci-dessous on va analyser le comportement dynamique d'un système composé de plusieurs points matériels. Dans le cas général, les distances réciproques entre les points matériels du système se modifient en temps. Un système de points matériels dont les distances sont invariables constitue un corps solide (solide rigide). Le corps solide peut être considéré comme un cas particulier d'un système rigide de points matériels.

1. Forces intérieures et forces extérieures.

Dans le cas du système de points matériels , les forces qui agissent sur les points matériels du système peuvent être classées en deux catégories : *forces intérieures* qui proviennent de l'action des autres points matériels du système et des *forces extérieures*, qui proviennent de l'action des corps qui n'appartiennent pas au système.

a) Théorème du torseur du système.
Enoncé : *Le torseur de forces intérieures d'un système de points matériels est toujours égal a zéro*. C'est-à-dire :
a_1) *La résultante des forces intérieures d'un système de points matériels est égale à zéro.*
a_2) *Le moment résultant des forces intérieures d'un système de points matériels est égale à zéro.*
Démonstration :
a_1) Soit A et B deux points matériels du système. Soit $\vec{F}_{AB}$ la force avec laquelle le point A agit sur le point B et $\vec{F}_{BA}$ la force avec laquelle le point B agit sur le point A (Fig. X.1).

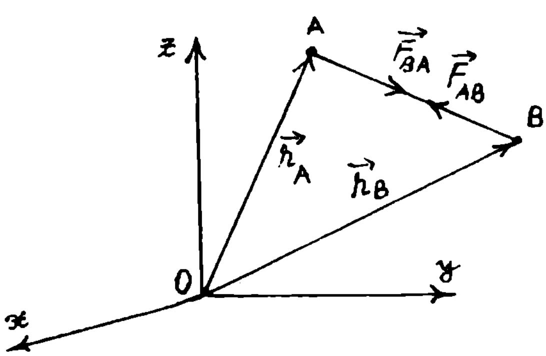


Fig.X.1

D'après la troisième loi de Newton ces deux forces sont égales et opposées, de sorte que :

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA} \qquad (1)$$

et donc leurs somme vectorielle sera nulle :

$$\vec{F}_{AB} + \vec{F}_{BA} = 0 \,. \qquad (2)$$

Cette conclusion est valable pour toute paire j de points matériels du système :

$$\vec{R}_{int} = \sum_j \vec{F}_{int}^{(j)} = 0 \,. \qquad (3)$$

a_2) Pour démontrer que le moment résultant des forces intérieures est toujours nul, on choisit le point arbitraire O de l'espace par rapport auquel on calcule les moments des forces intérieures (son choix ne présente pas d'importance parce que $\sum \vec{F}_{int} = 0$).
Si nous écrivons l'équation des moments des points matériels A et B (Fig. X.1) et si nous en faisons ensuite la somme, on trouve :

$$\vec{M}_A = \vec{r}_A \times \vec{F}_{BA}, \vec{M}_B = \vec{r}_B \times \vec{F}_{AB} = -\vec{r}_B \times \vec{F}_{BA} \;; \qquad (4)$$

$$\vec{M} = \vec{M}_A + \vec{M}_B = \vec{r}_A \times \vec{F}_{BA} - \vec{r}_B \times \vec{F}_{BA} = (\vec{r}_A - \vec{r}_B) \times \vec{F}_{BA} \,. \qquad (5)$$

Puisque les vecteurs $\Delta\vec{r} = \vec{r}_A - \vec{r}_B \equiv \vec{BA}$ (Fig. X.1) et $\vec{F}_{BA}$ sont colinéaires alors :

$$\vec{M} = \Delta\vec{r} \times \vec{F}_{BA} = 0\ . \tag{6}$$

Ce résultat reste valable quel que soit la paire de points matériels du système. Par conséquent on peut écrire :

$$\vec{M}_{int} = \sum_j \vec{M}_{int}^{(j)} = 0\ . \tag{7}$$

Ce théorème sera utilisé pour les démonstrations des théorèmes généraux d'un système de points matériels.

2. <u>Théorèmes généraux</u>.

a₁) <u>Le théorème de la quantité de mouvement</u>.

<u>Enoncé</u> : *La dérivée par rapport au temps de la quantité totale de mouvement d'un système de points matériels est égale à la résultante des forces extérieures.*

<u>Démonstration</u> : Soit un système de n points matériels sur lesquels agissent des forces extérieures et intérieures. On choisit un système de référence par rapport auquel on écrit les équations différentielles du mouvement des points matériels de système :

$$m_j \frac{d\vec{v}_j}{dt} = \vec{F}_{ext}^{(j)} + \vec{F}_{int}^{(j)} = \frac{d(m_j \vec{v}_j)}{dt},\ \ j = 1,2\ldots n\ . \tag{8}$$

En additionnant les relations (8) on obtient :

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{j=1}^{n} m_j \vec{v}_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \vec{F}_{ext}^{(j)} + \sum_{j=1}^{n} \vec{F}_{int}^{(j)}\ . \tag{9}$$

Par définition, la quantité :

$$\vec{P} = \sum_{j=1}^{n} m_j \vec{v}_j \tag{10}$$

qui représente la somme vectorielle des quantités de mouvement des points matériels qui composent le système, est appelée ***la quantité totale de mouvement*** du système.

En tenant compte du fait que :

$$\sum_{j=1}^{n} \vec{F}_{int}^{(j)} = 0 \tag{11}$$

il s'ensuit de (9) la relation qui exprime le théorème de la quantité de mouvement :

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \vec{F}_{ext}^{(j)} \quad \text{ou} \quad \dot{\vec{P}} = \sum_{j=1}^{n} \vec{F}_{ext}^{(j)}\ . \tag{12}$$

a₂) <u>Le théorème de la conservation de la quantité totale de mouvement</u>.

<u>Enoncé</u> : ***Si la résultante des forces extérieures qui agissent sur le système est nulle, le vecteur quantité totale de mouvement du système se conserve en temps (reste constante).***

<u>Démonstration</u> : En effet, si $\sum \vec{F}_{ext}^{(j)} = 0$ (le système est isolé) de la relation (12) on obtient:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \quad \text{ou} \quad \vec{P} = \text{constante}\ . \tag{13}$$

b₁) <u>Le théorème du moment cinétique total</u>.

<u>Enoncé</u> : *La dérivée par rapport au temps du moment cinétique totale du système de points matériels est égale au moment résultant des forces extérieures qui agissent sur les points matériels.*

Démonstration : Pour le point j de masse m_j de système on peut écrire la deuxième loi de Newton :

$$\frac{d(m_j\vec{v}_j)}{dt} = \vec{F}^{(j)}_{ext} + \vec{F}^{(j)}_{int} \quad , \quad (j=1,2,\ldots,n) \; . \tag{14}$$

Si on fait le produit vectoriel de la relation (14) par le vecteur de position $\vec{r}_j$, on obtient :

$$\vec{r}_j \times \frac{d}{dt}(m_j\vec{v}_j) = \vec{r}_j \times \vec{F}^{(j)}_{ext} + \vec{r}_j \times \vec{F}^{(j)}_{int} \quad , \quad (j=1,2,\ldots,n) \; . \tag{15}$$

En additionnant les relations (15) on a :

$$\sum_{j=1}^{n} \vec{r}_j \times \frac{d}{dt}(m_j\vec{v}_j) = \sum_{j=1}^{n} \vec{r}_j \times \vec{F}^{(j)}_{ext} + \sum_{j=1}^{n} \vec{r}_j \times \vec{F}^{(j)}_{int} \; . \tag{16}$$

D'après le théorème du torseur (voir (7)), on a :

$$\vec{M}_{int} = \sum_{j=1}^{n} \vec{r}_j \times \vec{F}^{(j)}_{int} = \sum_{j=1}^{n} \vec{M}^{(j)}_{int} = 0 \; . \tag{17}$$

La relation (16) devient :

$$\sum_{j=1}^{n} \vec{r}_j \times \frac{d}{dt}(m_j\vec{v}_j) = \sum_{j=1}^{n} \vec{r}_j \times \vec{F}^{(j)}_{ext} \; . \tag{18}$$

Puisque les vecteurs $\vec{v}_j$ et $m_j\vec{v}_j$ sont colinéaires le produit vectoriel :

$$\vec{v}_j \times (m_j\vec{v}_j) = m_j(\vec{v}_j \times \vec{v}_j) = 0$$

et par conséquent on peut écrire :

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}_j \times m_j\vec{v}_j) = \frac{d\vec{r}_j}{dt} \times (m_j\vec{v}_j) + \vec{r}_j \times \frac{d}{dt}(m_j\vec{v}_j) = \tag{19}$$

$$= \vec{v}_j \times (m_j\vec{v}_j) + \vec{r}_j \times \frac{d}{dt}(m_j\vec{v}_j) = \vec{r}_j \times \frac{d}{dt}(m_j\vec{v}_j) \; .$$

(on a utilisé :

$$\frac{d}{dt}(\vec{a} \times \vec{b}) = \frac{d\vec{a}}{dt} \times \vec{b} + \vec{a} \times \frac{d\vec{b}}{dt} \quad)$$

La relation (18) prend donc, la forme suivante :

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{d}{dt}(\vec{r}_j \times m_j\vec{v}_j) = \sum_{j=1}^{n} \vec{r}_j \times \vec{F}^{(j)}_{ext} \; . \tag{20}$$

Par la suite, on utilise la propriété :

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{d}{dt}(\vec{r}_j \times m_j\vec{v}_j) = \frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{n} (\vec{r}_j \times m_j\vec{v}_j) \tag{21}$$

ce qui entraîne :

$$\frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{n} (\vec{r}_j \times m_j\vec{v}_j) = \sum_{j=1}^{n} \vec{r}_j \times \vec{F}^{(j)}_{ext} \; . \tag{22}$$

Si l'on désigne par $\vec{L}$, *le vecteur cinétique totale du système* :

$$\vec{L} = \sum_{j=1}^{n} (\vec{r}_j \times m_j\vec{v}_j) = \sum_{j=1}^{n} \vec{L}_j \tag{23}$$

et par $\vec{M}_{ext}$, *le vecteur moment résultant des forces extérieures* :

$$\vec{M}_{ext} = \sum_{j=1}^{n} \vec{r}_j \times \vec{F}^{(j)}_{ext} \tag{24}$$

l'on trouve en définitive : $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{ext}$. (25)

b_2) Le théorème de la conservation du moment cinétique total.

Enoncé : *Si le moment résultant des forces extérieures est nul,*

$$\vec{M}_{ext} = 0 \tag{26}$$

alors le moment cinétique total du système se conserve.

Démonstration : En effet, de la relation (25) si on utilise la condition (26), on obtient :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \quad \text{ou} \quad \vec{L} = \text{constante} \; .$$

c) Le théorème de l'énergie cinétique du système

Enoncé : *La différentielle de l'énergie cinétique d'un système de points matériels est égale à la somme des travaux mécaniques des forces extérieures et intérieures.*

Démonstration : Multiplions scalairement la relation (14) par $d\vec{r}_j = \vec{v}_j dt$ est sommons sur j :

$$\sum_j \frac{d(m_j\vec{v}_j)}{dt} \cdot \vec{v}_j dt = \frac{d}{dt}\left(\sum_j m_j\vec{v}_j\right) \cdot \vec{v}_j dt = \sum_j \vec{F}_{ext}^{(j)} \cdot d\vec{r}_j + \sum_j \vec{F}_{int}^{(j)} \cdot d\vec{r}_j \; . \tag{28}$$

En tenant compte de la suite d'égalités :

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_j m_j\vec{v}_j\right) \cdot \vec{v}_j dt = d\left(\sum_j m_j\vec{v}_j\right) \cdot \vec{v}_j = \sum_j m_j d\vec{v}_j \cdot \vec{v}_j = \tag{29}$$

$$= \sum_j m_j \frac{d(\vec{v}_j^2)}{2} = d\left(\sum_j \frac{m_j v_j^2}{2}\right) = dE_c \quad \text{où}$$

par définition, les expressions

$$E_c = \sum_j \frac{m_j v_j^2}{2} \; , \; dW_{ext} = \sum_j \vec{F}_{ext}^{(j)} \cdot d\vec{r}_j \; , \; dW_{int} = \sum_j \vec{F}_{int}^{(j)} \cdot d\vec{r}_j \tag{30}$$

représentent *l'énergie cinétique totale* du système, et *les travaux élémentaires* des forces extérieures respectivement intérieures, l'on obtient en définitive :

$$dE_c = dW_{ext} + dW_{int} \; . \tag{31}$$

Si le travail élémentaire des forces intérieures s'exprime par une différentielle totale exacte d'une fonction $-E_p(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_n)$ qui dépend uniquement des coordonnées des points du système, nommée l'énergie potentielle :

$$dW_{int} = -dE_p \tag{32}$$

le théorème de l'énergie cinétique (31) devient :

$$dE_c = -dE_p + dW_{ext} \quad \text{ou} \quad d(E_c + E_p) = dW_{ext} \; . \tag{33}$$

La somme :

$$E = E_c + E_p \tag{34}$$

représente *l'énergie mécanique totale du système.*

Si le travail élémentaire dW_{ext} des forces extérieures est nul (système fermé) on retrouve le théorème de conservation de l'énergie mécanique totale :

$$E_c + E_p = \text{constante} \; . \tag{35}$$

d) Le théorème du centre de masse du système.

Enoncé : *Le centre de masse d'un système de points matériels se meut comme un point matériel dont la masse est égale à la masse du système et sur lequel agit la résultante des forces extérieures du système.*

Démonstration : Soit un système de n points matériels de masses m_j (j=1,2 ... n), sur lesquels agissent de l'extérieur les forces $\vec{F}_{ext}^{(j)}$ (j=1,2 ... n). Les équations différentielles du mouvement s'écrivent :

$$m_j \frac{d^2\vec{r}_j}{dt^2} = \vec{F}_{ext}^{(j)} + \vec{F}_{int}^{(j)} \quad (j=1,2 \dots n) \tag{36}$$

où $\vec{r}_j$ représentent les vecteurs de position des points du système.

En faisant la somme des équations pour l'ensemble des points du système, il suit :

$$\sum_{j=1}^{n} m_j \frac{d^2\vec{r}_j}{dt^2} = \sum_{j=1}^{n} \frac{d^2}{dt^2}(m_j\vec{r}_j) = \frac{d^2}{dt^2}\left(\sum_{j=1}^{n} m_j\vec{r}_j\right) = \sum_{j=1}^{n}\vec{F}_{ext}^{(j)} + \sum_{j=1}^{n}\vec{F}_{int}^{(j)} = \sum_{j=1}^{n}\vec{F}_{ext}^{(j)} + 0 \tag{37}$$

En conclusion,

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\sum_{j=1}^{n} m_j\vec{r}_j\right) = \sum_{j=1}^{n}\vec{F}_{ext}^{(j)} \, . \tag{38}$$

Définition du centre de masse du système.

Le vecteur de position du centre du masse (point fictif) d'un système de n points matériels dont les masses sont m_1, m_2, ... , m_n est donné par la relation :

$$\vec{r}_c = \frac{\left(\sum_{j=1}^{n} m_j\vec{r}_j\right)}{M} \, . \tag{39}$$

où

$$M = m_1 + m_2 + \dots + m_n = \sum_{j=1}^{n} m_j \tag{40}$$

est la masse totale du système.

Du fait que (voir (39)) :

$$M\vec{r}_c = \sum_{j=1}^{n} m_j\vec{r}_j \tag{41}$$

la relation (38) devient :

$$M\frac{d^2\vec{r}_c}{dt^2} = \sum_{j=1}^{n}\vec{F}_{ext}^{(j)} \tag{42}$$

qui exprime *la forme mathématique du théorème du centre de masse du système.*

Corollaires : 1) *La quantité de mouvement du centre du masse du système est égale à la quantité totale de mouvement du système des points matériels.*

Démonstration : On dérive par rapport au temps la relation (41) et on obtient :

$$M\frac{d\vec{r}_c}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{j=1}^{n} m_j\vec{r}_j\right) = \sum_{j=1}^{n} m_j\frac{d\vec{r}_j}{dt} \tag{43}$$

ou

$$M\vec{v}_c = \sum_{j=1}^{n} m_j\vec{v}_j \, . \tag{44}$$

2) *Si la résultante des forces extérieures qui agissent sur le système est nulle, le centre de masse de celui-ci est au repos ou se meut rectiligne et uniforme ($\vec{v}_c$ =const).*

Démonstration : Dans la relation (42) mettons :

$$\sum_{j=1}^{n} \vec{F}^{(j)}_{ext} = 0 \,. \qquad (45)$$

Il vient :

$$\frac{d^2\vec{r}_c}{dt^2} = \frac{d\vec{v}_c}{dt} = 0 \;\rightarrow\; \vec{v}_c = \text{const.} \qquad (46)$$

Remarque : L'on observe que les forces intérieures du système n'influent pas le mouvement du centre de masse du système.

3. La masse réduite. Définition.

a) Considérons un système *fermé* (la résultante des forces extérieures est égale à zéro) constitué par deux points matériels de masses m_1 et m_2 en interaction (Fig. X.2).

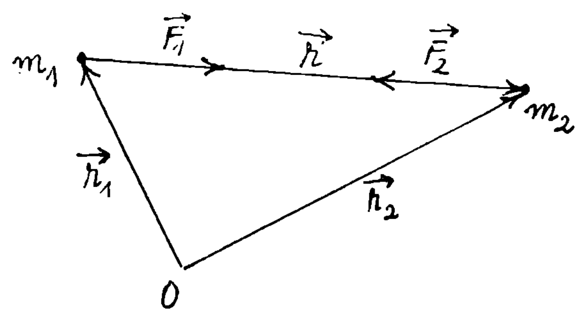


Fig. X.2

Les équations de mouvement de ces points peuvent s'écrire :

$$\frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} = \frac{\vec{F}_1}{m_1}\,,\quad \frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} = \frac{\vec{F}_2}{m_2}\,. \qquad (47)$$

En vertu de la troisième loi de Newton on doit avoir $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$. En formant la différence de ces équations on trouve :

$$\frac{d^2}{dt^2}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = \frac{\vec{F}_2}{m_2} - \frac{\vec{F}_1}{m_1} = \vec{F}_2\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right). \qquad (48)$$

Cette équation décrit le mouvement d'un point matériel par rapport à l'autre, car la différence $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ est le rayon vecteur reliant ces points. Ce rayon vecteur définit univoquement la position du second point par rapport au premier. Introduisons les notations :

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \quad \text{ou} \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\,. \qquad (49)$$

L'équation précédente s'écrira alors :

$$\mu\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = F_2\,. \qquad (50)$$

Formellement (50) est analogue à l'expression de la deuxième loi de Newton. Le rôle de la force active y est assumé par la force $\vec{F}_2$ agissant sur le second point matériel et celui de la masse par la quantité auxiliaire μ dites *masse réduite*.

Il est bien évident que la seule équation (50) ne peut être équivalente aux deux équations initiales (47). On peut cependant y arriver associant à l'équation (50) l'équation (42) exprimant le théorème du mouvement du centre de masse du système où $\sum \vec{F}_{ext}^{(j)} = 0$.

Alors : $$\frac{d^2\vec{r}_c}{dt^2} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{v}_c}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{v}_c = \text{const.} \qquad (51)$$

Donc, dans le cas considéré ce théorème ne fait qu'affirmer que le centre de masse du système est en mouvement rectiligne et uniforme ($\vec{v}_c$ =const).

Aussi le problème du mouvement de deux points matériels se laisse décomposer en deux problèmes indépendants :

1) celui du calcul du *mouvement uniforme* du centre de masse et
2) celui du calcul du *mouvement relatif* d'un point matériel par rapport à l'autre.

Ce dernier problème se ramène à l'étude du mouvement d'un point matériel de masse μ dans le champs de forces de l'autre point. C'est ce qui justifie l'introduction de la notion de masse réduite.

b) Exemple d'application de la masse réduite.

Pour illustrer l'intérêt qui présente l'introduction de la masse réduite considérons l'exemple suivant. Soit une planète décrivant autour du Soleil une orbite circulaire de rayon r. Conformément à la loi de *la gravitation universelle*, elle est soumise à la force, $F = GMm/r^2$, M étant la masse du soleil, m celle de la planète et G la constante de gravitation. Comme la force pointe vers le Soleil, sous forme vectorielle cette équation écrit:

$$\vec{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} = -G\frac{Mm}{r^3}\vec{r} \ . \qquad (52)$$

Introduisons la masse réduite et écrivons l'équation du mouvement de la planète par rapport au Soleil :

$$\mu\ddot{\vec{r}} \equiv \frac{Mm}{M+m}\ddot{\vec{r}} = -G\frac{Mm}{r^3}\vec{r} = \vec{F} \ . \qquad (53)$$

On en tire : $$\ddot{\vec{r}} = -G\frac{M+m}{r^3}\vec{r} \ . \qquad (54)$$

Comme la révolution de la planète est uniforme on a $m\ddot{\vec{r}} = -m\omega^2\vec{r}$ et par suite :

$$\omega^2 = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = G\frac{M+m}{r^3} \ , \qquad (55)$$

ω étant la vitesse angulaire et T la période de révolution de la planète. Si la masse de la planète était négligeable par rapport à celle du Soleil, la vitesse angulaire ω_1 et sa période de révolution T_1 seraient données par l'équation :

$$\omega_1^2 = \left(\frac{2\pi}{T_1}\right)^2 = G\frac{M}{r^3} \ . \qquad (56)$$

Si la masse de la planète était égale à la masse du Soleil, l'expression donnant la vitesse angulaire ω_2 et la période de révolution T_2 aurait été :

$$\omega_2^2 = \left(\frac{2\pi}{T_2}\right)^2 = G\frac{2M}{r^3} \cdot \quad (57)$$

Pour une même distance r, on aurait : $$\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = 2 \cdot \quad (58)$$

Autrement dit, dans ce dernier cas, la période de révolution serait $\sqrt{2}$ fois plus courte que dans le premier cas.

XI. La dynamique du solide rigide.

a) Définition : *On appelle solide rigide un système de points matériels dont les distances mutuelles restent les mêmes quel que soit le mouvement*; si on note par ρ la densité du solide, considéré homogène (ρ=const) on entend par *points matériels* non pas des atomes ou des molécules, mais des parties dV macroscopiquement petites de masse dm que l'on pourrait obtenir en subdivisant, en pensée, le solide rigide. Par définition,

$$dm = \rho \cdot dV .$$

b) Le mouvement de rotation du solide rigide autour d'un axe fixe Δ.

Etant donné un solide rigide sur lequel agit un système de forces extérieures $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n$ et qui tourne autour d'un axe qui le perce dans les points O_1 et O_2, il faut :

1⁰) déterminer *la loi de mouvement* de la rotation du solide

2⁰) déterminer *les forces de réaction* dans les points O_1 et O_2.

Pour répondre à ces questions il est nécessaire de trouver tout d'abord les expressions des grandeurs physiques telles que : *la quantité de mouvement, le moment cinétique et l'énergie cinétique* du solide en mouvement de rotation.

c) La quantité de mouvement du solide rigide en rotation. Définition.

Considérons un solide rigide qui tourne à la vitesse angulaire constante ω autour d'axe fixe Δ (Fig. XI.1) et un élément de volume dV situé à la distance r par rapport à l'axe de rotation.

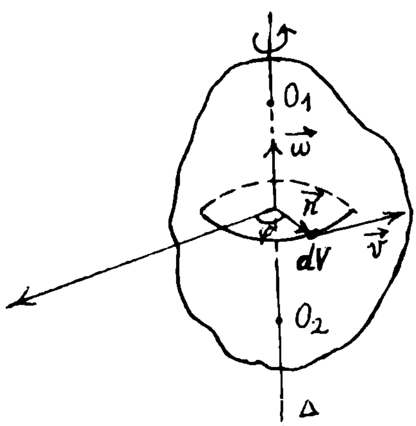


Fig. XI.1

Pendant le mouvement de rotation du solide, le point matériel de volume dV et de masse dm parcourt une cercle de rayon r à la vitesse angulaire constante ω. *La quantité de mouvement du point matériel par rapport à* Δ est :

$$d\vec{G}_\Delta = \vec{v} \cdot dm = \vec{v} \cdot \rho dV \qquad (1)$$

Puisque

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r},\ |\vec{v}| = |\vec{\omega} \times \vec{r}| = |\vec{\omega}| \cdot |\vec{r}| \cdot \sin\frac{\pi}{2}, |\vec{v}| = |\vec{\omega}| \cdot |\vec{r}| \quad \text{ou} \quad v = \omega \cdot r$$

le module de (1) s'écrit :

$$dG_\Delta = \omega \cdot r \cdot \rho \cdot dV , \qquad (2)$$

nomme quantité de mouvement élémentaire.
La quantité de mouvement total (intégral) du solide en modul par rapport à l'axe Δ, s'obtient par l'opération d'intégration de l'égalité (2) sur le volume V du solide :

$$G_\Delta \equiv \iiint_V dG_\Delta = \iiint_V v \cdot dm = \omega\rho \cdot \iiint_V r \cdot dV \ . \qquad (3)$$

d) Les moments cinétique et d'inertie du solide rigide en rotation. Définition.

Soit un point matériel de masse dm = ρdV du solide en mouvement de rotation à la vitesse angulaire constante ω autour d'un axe Δ fixe. Si la vitesse linéaire du point matériel est $\vec{v}$ et la distance de celui-ci à l'axe Δ est égale à r, *le moment cinétique élémentaire* (en module) du point par rapport à cet axe Δ est :

$$dL_\Delta = \left|\vec{r} \times d\vec{G}_\Delta\right| = \left|\vec{r} \times \vec{v} \cdot dm\right| = \left|\vec{r} \times \vec{v}\right| \cdot dm = \left|\vec{r}\right| \cdot \left|\vec{v}\right| \cdot \sin\frac{\pi}{2} \cdot dm = rv \cdot dm \ . \qquad (4)$$

Puisque

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}, \left|\vec{v}\right| \equiv v = \left|\vec{\omega} \times \vec{r}\right| = \omega \cdot r \cdot \sin\frac{\pi}{2} = \omega \cdot r \qquad (5)$$

il s'ensuit

$$dL_\Delta = r^2\omega \cdot dm \ . \qquad (6)$$

Cette quantité s'appelle *moment cinétique élémentaire par rapport à* Δ. *Le moment cinétique total (intégral)* du solide par rapport à l'axe de rotation Δ du solide s'obtient par l'intégration de la relation (6) :

$$L_\Delta = \iiint_V dL_\Delta = \iiint_V \omega \cdot r^2 dm = \omega \iiint_V r^2 dm \ . \qquad (7)$$

L'intégrale :

$$I_\Delta = \iiint_V r^2 dm = \rho \iiint_V r^2 dV \qquad (8)$$

s'appelle *moment d'inertie du solide par rapport à l'axe de rotation* Δ de celui-ci. Le moment d'inertie I_Δ du solide reste dans ce cas (si Δ est fixe) *constant* pendant la rotation du corps.
L'équation (7) montre que le moment cinétique d'un solide rigide par rapport à son axe de rotation Δ est égale au produit de son moment d'inertie par rapport au même axe par sa vitesse angulaire :

$$L_\Delta = \omega I_\Delta \ . \qquad (9)$$

e) L'énergie cinétique totale du solide en rotation par rapport à l'axe Δ.

L'énergie cinétique élémentaire d'un point matériel du solide de masse dm et de vitesse linéaire $\vec{v}$ s'écrit :

$$dE_c^\Delta = \frac{1}{2} v^2 dm \ . \qquad (10)$$

L'énergie cinétique intégrale ou totale du solide en rotation est la „somme" (intégrale) des énergies cinétiques élémentaires des tous les points du solide en mouvement:

$$E_c^\Delta = \iiint_V dE_c^\Delta = \frac{1}{2}\iiint_V v^2 dm = \frac{1}{2}\iiint_V r^2\omega^2 dm = \frac{\omega^2}{2}\iiint_V r^2 dm \qquad (11)$$

soit

$$E_c^{\Delta} = \frac{I_{\Delta}\omega^2}{2} = \frac{L_{\Delta}^2}{2I_{\Delta}} \quad (12)$$

Cette expression ressemble à la relation correspondante de l'énergie cinétique d'un point matériel : $E_c = mv^2/2 = p^2/2m$ et s'obtient de celle-ci en réalisant les substitutions : $m \to I_D$, $v \to \omega$, $p \to L_\Delta$.

f) L'équation du mouvement de rotation d'un corps autour d'un axe fixe

Utilisons le théorème du moment cinétique total pour un système de points matériels :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{ext} . \quad (13)$$

Prenons en considération la projection de l'équation (13) sur l'axe de rotation fixe Oz d'un système de coordonnées cartésiennes :

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z^{ext} \quad \text{où} \quad L_z = \omega \cdot I_z \quad (14)$$

ou

$$\frac{d}{dt}(\omega \cdot I_z) = M_z^{ext} \quad (15)$$

où M_z^{ext} est le moment des forces extérieures par rapport à l'axe de rotation Oz. C'est *l'équation fondamentale de la dynamique du mouvement de rotation autour d'un axe fixe*.

Elle ressemble à l'équation de Newton du mouvement d'un point matériel $\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{F}$. Le moment d'inertie I_Z joue le rôle de la masse, la vitesse angulaire ω celui de la vitesse, le moment de la force M_z^{ext} le rôle de la force et le moment cinétique L_Z celui de l'impulsion.

Enoncé : *La dérivée du moment cinétique par rapport au temps est égale au moment des forces extérieures par rapport à l'axe de rotation.*

Dans le cas ou le moment M_z^{ext} des forces extérieures par rapport à l'axe de rotation est nul, *le moment cinétique* ωI_z *se conserve.*

Un cas particulier important est celui de la rotation d'un corps solide autour d'un axe fixe, comme d'ailleurs on a considéré plus haut. Le moment d'inertie I_z reste alors constant pendant la rotation du corps et l'équation (15) devient :

$$I_z \frac{d\omega}{dt} = M_z^{ext} . \quad (16)$$

Le produit du moment d'inertie d'un corps solide par rapport à un axe de rotation fixe par l'accélération angulaire $\frac{d\omega}{dt}$ *est égal au moment des forces extérieures par rapport au même axe.*

D'autre part, la vitesse angulaire considérée en général variable $\omega(t)$ se peut exprimer par l'angle de rotation $\varphi(t)$:

$$\omega(t) = \frac{d\varphi}{dt} \quad (17)$$

et par suit (16) devient :

$$I_z \frac{d^2\omega}{dt^2} = M_z^{ext} . \quad (18)$$

(18) représente une équation différentielle de deuxième ordre, dont la solution $\varphi = \varphi(t)$ représente *l'équation du mouvement* du solide.

Energie cinétique totale en fonction des moments d'inertie.

g) Moments d'inertie par rapport a un système de coordonnée. Tenseur d'inertie.

Déduisons l'expression de l'énergie cinétique totale d'un solide (de rotation) par rapport à un système de coordonnée cartésiennes à l'origine sur l'axe de rotation (Fig. XI.2). On considere $\vec{\omega} = \text{const.}$:

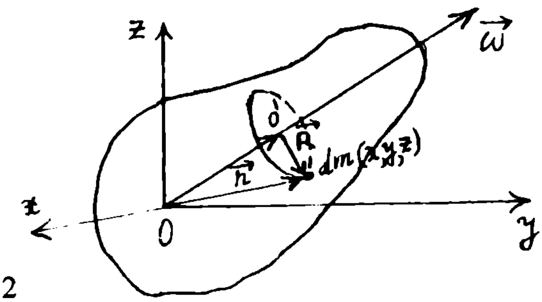


Fig. XI.2

$$E_c = \frac{1}{2}\iiint_V v^2 dm \tag{19}$$

où :

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{R} = \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{OO'}) = \vec{\omega} \times \vec{r} - \vec{\omega} \times \vec{OO'} = \vec{\omega} \times \vec{r}, \vec{\omega} \times \vec{OO'} = 0 \tag{20}$$

Puisque :

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = \vec{i}(\omega_y z - y\omega_z) + \vec{j}(\omega_z x - z\omega_x) + \vec{k}(\omega_x y - x\omega_y) \tag{21}$$

alors,

$$\vec{v}^2 = (\omega_y z - y\omega_z)^2 + (\omega_z x - z\omega_x)^2 + (\omega_x y - x\omega_y)^2 . \tag{22}$$

Par conséquent,

$$E_c = \frac{1}{2}\iiint_V \left[(\omega_y z - y\omega_z)^2 + (\omega_z x - z\omega_x)^2 + (\omega_x y - x\omega_y)^2\right] dm . \tag{23}$$

En élevant au carré les parenthèses :

$$\begin{aligned}&(\omega_y z - y\omega_z)^2 + (\omega_z x - z\omega_x)^2 + (\omega_x y - x\omega_y)^2 = \\ &= \omega_x^2(y^2+z^2) + \omega_y^2(z^2+x^2) + \omega_z^2(x^2+y^2) - 2yz\omega_y\omega_z - 2xz\omega_x\omega_z - 2xy\omega_x\omega_y\end{aligned} \tag{24}$$

et en désignant par

$$I_{xx} = \iiint_V (y^2+z^2)dm,\ I_{yy} = \iiint_V (z^2+x^2)dm,\ I_{zz} = \iiint_V (x^2+y^2)dm , \tag{25}$$

$$I_{xy} = I_{yx} = -\iiint_V xydm,\ I_{xz} = I_{zx} = -\iiint_V xzdm,\ I_{yz} = I_{zy} = -\iiint_V yzdm \tag{26}$$

l'énergie cinétique de rotation (23) devient :

$$E_c = \frac{1}{2}I_{xx}\omega_x^2 + \frac{1}{2}I_{yy}\omega_y^2 + \frac{1}{2}I_{zz}\omega_z^2 + I_{xy}\omega_x\omega_y + I_{yz}\omega_y\omega_z + I_{zx}\omega_z\omega_x . \tag{27}$$

Les quantités constantes (25) ont la signification des *moments d'inertie du corps par rapport aux axes de coordonnées* Ox, Oy, Oz. Les quantités (26) sont *appelées moments de déviation (centrifuges)* .

Par conséquent, l'énergie cinétique de rotation E_c est une *forme quadratique* par rapport aux composantes du vecteur vitesse angulaire $\vec{\omega}$, dont les coefficients sont les moments d'inertie.

L'ensemble de neuf quantités I_{ij} forme une matrice :

$$\hat{I} = \begin{vmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{vmatrix} \tag{28}$$

qui porte le nom de ***tenseur d'inertie du corps par rapport au point*** O. Les quantités I_{ij} constituent ***les composantes*** de ce tenseur. Le tenseur d'inertie est ***symétrique***, c'est-à-dire $I_{ij}=I_{ji}$.

g1) La relation entre le moment d'inertie par rapport à l'origine et I_{ij}.

Le moment d'inertie du corps par rapport à l'origine du système de coordonnée sera (29) :

$$I_o = \iiint_V r^2 dm = \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dm = \frac{1}{2}\iiint_V (2x^2 + 2y^2 + 2z^2) dm = \frac{1}{2}\left(I_{xx} + I_{yy} + I_{zz}\right)$$

En conclusion,

$$I_o = \frac{1}{2}\left(I_{xx} + I_{yy} + I_{zz}\right) . \tag{29'}$$

h) Applications.

h_1) Le moment d'inertie d'une barre cylindrique.

Soit une barre cylindrique homogène (la densité ρ=const) de longueur l et ayant une section S constante. Calculons le moment d'inertie de celle-ci ***par rapport à l'axe*** Oy qui passe par le centre de l'une de ses bases et qui est perpendiculaire à l'axe Ox (Fig. XI.3)

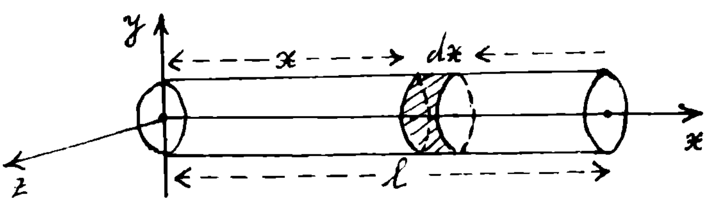


Fig. XI.3

Considérons une élément de volume dV d'épaisseur dx située à la distance x de l'origine O et de masse dm=ρdV=ρSdx. Le moment d'inertie cherché sera :

$$I_y = \int_0^l x^2 dm = \rho S \int_0^l x^2 dx = \rho S \frac{x^3}{3}\Big|_0^l = \rho S \frac{l^3}{3} .$$

Comme la masse de la barre est $M = \rho V = \rho l S$ l'on obtient :

$$I_y = \frac{Ml^2}{3} .$$

h₂) <u>Le moment d'inertie d'une plaque rectangulaire</u>.

Calculons le moment d'inertie d'une plaque rectangulaire homogène (ρ=const) ayant les côtés égaux à a et b d'épaisseur négligeable, par rapport à l'un des côtés choisi comme axe Oy (Fig. XI.4).

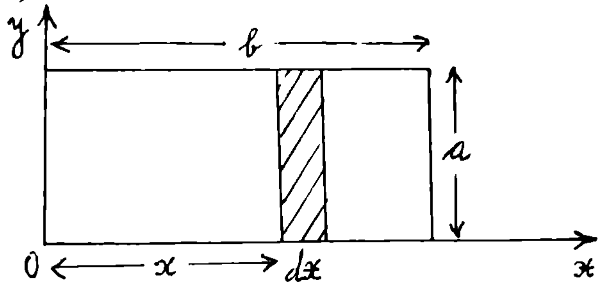


Fig. XI.4

On considère comme élément de surface dS une bande parallèle à l'axe Oy et d'épaisseur dx, dont la masse sera dm=ρdS=ρadx. Le moment d'inertie de la plaque par rapport à l'axe Oy est :

$$I_y = \int_0^b x^2 dm = \rho a \int_0^b x^2 dx = \rho a \frac{x^3}{3}\Big|_0^b = \rho a \frac{b^3}{3} .$$

Comme la masse de la plaque est $M = \rho S = \rho ab$ on a en définitive :

$$I_y = \frac{Mb^2}{3} .$$

h₃) <u>Le moment d'inertie d'une plaque circulaire</u>.

Soit une plaque demi-circulaire de rayon R et d'une grosseur négligeable. Calculons son moment d'inertie par rapport à une axe perpendiculaire à son plan et qui passe par le point O. En raison de la symétrie de la plaque (Fig. XI.5) nous allons utiliser les coordonnées polaire planes.

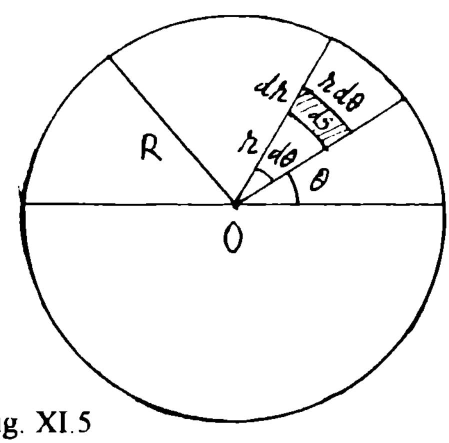


Fig. XI.5

L'élément de surface s'écrit en coordonnées polaires planes :

$$dS = r \cdot dr \cdot d\theta$$

Puisque $dm = \rho \cdot dS = \rho \cdot r \cdot dr \cdot d\theta$, le moment d'inertie de la plaque par rapport à O s'exprime par l'intégrale double :

$$I_o = \iint r^2 dm = \rho \iint r^3 dr d\theta = \rho \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} d\theta = \pi\rho \frac{R^4}{2} \cdot$$

Ayant en vue la masse totale de la plaque circulaire qui est égale à :

$$M = \rho S = \rho\pi R^2 \quad \text{où} \quad S = \pi R^2 \quad (\text{ l'aire du disque })$$

l'on obtient le résultat final :

$$I_o = \frac{1}{2} M R^2 \cdot$$

Le théorème de Huygens-Steiner. Applications.

Soit deux droites parallèles, par exemple, les axes Oz et O'z' de deux systèmes de coordonnées cartésiennes (Fig. XI.6) et soit *a*, *b* les coordonnées de l'origine O' du système O'x'y'z' par rapport au système Oxyz.

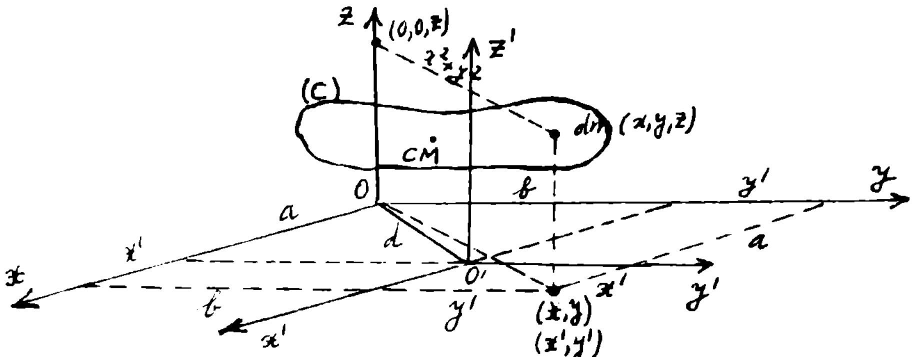


Fig. XI.6

Le moment d'inertie d'un corps quelconque (C) par rapport à l'axe Oz s'écrit :

$$I_{zz} = \iiint_V (x^2 + y^2) dm \tag{30}$$

où $x^2 + y^2$ représente le carré de la distance du point matériel dm à l'axe Oz. En tenant compte des relations (voir la Fig. XI.6)

$$\begin{cases} x = x' + a \\ y = y' + b \\ d^2 = a^2 + b^2 \end{cases} \tag{31}$$

on obtient :

$$I_{zz} = \iint \left[(x' + a)^2 + (y' + b)^2 \right] dm = \iint \left[(x')^2 + (y')^2 \right] dm + 2a \iiint x' dm + 2b \iiint y' dm + (a^2 + b^2) \iiint dm \cdot$$

Le vecteur de position du centre de masse du corps (C) par rapport au système O'x'y'z' si la répartition des masses est continue est *par définition* :

$$\vec{r}'_{CM} = \frac{\iiint \vec{r}' dm}{M} \quad \text{où} \quad M = \iiint dm \quad \text{est la masse totale du corps}$$

ou sous la forme scalaire :

$$x'_{CM} = \frac{\iiint x' dm}{M}, \quad y'_{CM} = \frac{\iiint y' dm}{M}, \quad z'_{CM} = \frac{\iiint z' dm}{M} \quad \cdot \tag{33}$$

Supposons maintenant que l'axe $O'x'z'$ *passe par le centre de masse* CM *du corps*. Dans ce cas les coordonnées cartésiennes du point CM seront données par :

$$x'_{CM} = 0,\ y'_{CM} = 0 \text{ et } z'_{CM} \neq 0 \tag{34}$$

et les relations (33) deviennent :

$$\iiint x'dm = 0,\ \iiint y'dm = 0,\ \iiint z'dm = Mz'_{CM} \ . \tag{35}$$

Reportant (35) dans (32) il en suit que :

$$I_{zz} = \iiint\left[(x')^2 + (y')^2\right]dm + d^2M \ . \tag{36}$$

Puisque l'intégrale de droite est *par définition* le moment d'inertie $I_{z'z'}$ du corps par rapport à l'axe $O'z'$:

$$I_{z'z'} = \iiint\left[(x')^2 + (y')^2\right]dm \ , \tag{37}$$

la relation (36) devient finalement :

$$I_{zz} = I_{z'z'} + Md^2 \ . \tag{38}$$

Cette importante relation géométrique porte le nom de *théorème de Huygens-Steiner* et s'énonce comme suit : *Le moment d'inertie d'un corps par rapport à un axe est égal à la somme de son moment d'inertie par rapport à un axe parallèle au précédent et passant par le centre de masse du corps et de la quantité* Md^2, *où* d *est la distance entre les deux axes*.

Application.

Considérons un disque homogène d'épaisseur négligeable de rayon R. Calculons le moment d'inertie du disque par rapport a un axe perpendiculaire à un plan du disque situé à la distance d du centre de celui-ci.

Solution : Le calcul direct est difficile, mais en appliquant *le théorème de Huygens-Steiner* et en tenant compte de ce que le moment d'inertie d'une plaque circulaire de rayon R par rapport a un axe z' perpendiculaire sur le plan de la plaque et qui passe par le centre de masse de celle-ci est égale à $\frac{MR^2}{2} = I_{z'z'}$, l'on obtient :

$$I_{zz} = I_{z'z'} + Md^2 = \frac{MR^2}{2} + Md^2 = M\left(\frac{R^2}{2} + d^2\right) \text{ ou } I_{zz} = M\left(\frac{R^2}{2} + d^2\right) \ . \tag{39}$$

Pendule pesant.

a) Définition :

Un pendule pesant est constitué par un corps mobile autour d'un axe horizontal fixe dont le point d'intersection O avec le plan vertical passant par le centre de masse du pendule est son *point de suspension* (Fig. XI.7).

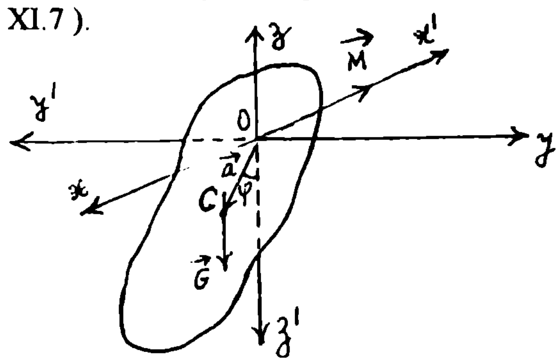


Fig. XI.7

Sur le corps agit seulement la force de pesanteur $\vec{G} = m\vec{g}$ dont le point d'application se trouve dans le centre de masse du corps. À tout instant la position du corps peut être caractérisée par l'angle φ de l'axe du pendule avec sa position d'équilibre.

b) Equation différentielle du mouvement. Période. Equation du mouvement.

Notons par *a* la distance du centre de suspension O au centre de masse C. On choisit un système de coordonnées cartésiennes à l'origine en O et dont l'axe Ox coïncide à l'axe de rotation. Dans ce cas :

$$G_x = 0,\ G_y = 0,\ G_z = -mg \cdot \tag{40}$$

Le vecteur $\vec{M}$, moment de la force $\vec{G}$:

$$\vec{M} = \vec{a} \times \vec{G}$$

est antiparallèle à l'axe Ox (il est perpendiculaire sur le plan yOz et le sens de celui-ci est donné par la règle de tire-bouchon). Alors,

$$M_x = -mga\sin\theta, M_y = 0, M_z = 0 \ \ (\vec{M} = M_x\vec{i} = mga\sin\theta\vec{i}) \cdot \tag{41}$$

L'équation différentielle du mouvement est donnée par :

$$I_x \frac{d^2\varphi}{dt^2} = M_x^{ext} \ \ (\text{ l'axe de rotation est Ox }) \tag{42}$$

ou :

$$I_x \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mga\sin\varphi \ . \tag{43}$$

Si les oscillations sont de petite amplitude, on peut remplacer le sinus de l'angle φ par l'angle, $\sin\varphi \cong \varphi$ et par suite l'équation (43) s'écrit :

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{mga\varphi}{I_x} = 0 \ \text{où} \ \ \omega^2 = \frac{mga}{I_x} \ \cdot \tag{44}$$

Cette équation est analogue à celle du pendule mathématique (VIII-14). On en conclut que les oscillations de faible amplitude du pendule pesant seront approximativement *harmoniques*, de pulsation :

$$\omega = \sqrt{\frac{mga}{I_x}} \tag{45}$$

et de période :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_x}{mga}} \ \cdot \tag{46}$$

Si la période des oscillations ne dépend pas de leur amplitude, ces oscillations sont dites *isochrones*. *Les petites oscillations du pendule pesant sont isochrones*.

La solution de l'équation (44) représente l'équation du mouvement du pendule pesant :

$$\varphi(t) = A\sin(\omega t + \alpha) \tag{47}$$

où A et α sont deux constantes arbitraires qui peuvent être déterminées à partir des conditions initiales.

XII. Mouvement ondulatoire.

1. Concept d'onde. Définition. Classification. Caractéristiques.

Le concept d'onde (mouvement ondulatoire) définit la propagation dans l'espace d'une perturbation dépendante du temps, qui a lieu de proche en proche avec une vitesse finie de déplacement et qui transporte de l'énergie.
Les particularités d'un mouvement ondulatoire sont conditionnées autant par la nature de la perturbation (mécanique, électromagnétique, etc...) que par la nature du milieu traversé par l'onde.
Les mouvements ondulatoires les plus fréquemment observes sont les ondes élastiques et électromagnétiques. Par une *onde élastique* on comprend la propagation d'un état de déformation mécanique (d'habitude une oscillation harmonique) des particules matérielles à travers un milieu élastique. Un milieu où les particules matérielles constituantes (atomes ou molécules) interagissent entre elles par des forces élastiques, constitue un *milieu élastique*. *L'onde électromagnétique* correspond au déplacement dans l'espace d'un ensemble des champs : électrique $\vec{E}(\vec{r},t)$ et magnétique $\vec{B}(\vec{r},t)$ qui oscillent en phase, de sorte que le vecteurs $\vec{E}$, $\vec{B}$ et $\vec{v}$ (la vitesse de propagation de l'onde) forment un trièdre droit.
La propagation de l'onde électromagnétique peut avoir lieu sans avoir un milieu comme support de propagation. Elle peut se déplacer même dans la vide.
En fonction de la nature *scalaire* ou *vectorielle* de la perturbation, les ondes peuvent être classifiées comme des ondes scalaires et vectorielles. Dans le cas d'une onde vectorielle si le vecteur perturbation est perpendiculaire à la direction de propagation, l'onde s'appelle *transversale*. Si le vecteur perturbation est orienté dans la direction de propagation il s'agit d'une onde *longitudinale*.
Par exemple, l'onde électromagnétique est transversale parce que les vecteurs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ oscillent perpendiculairement à la direction de propagation qui coïncide avec la direction du vecteur vitesse $\vec{v}$. L'étude mathématique des processus ondulatoires a mis en évidence l'existence d'un modèle *mathématique unique* pour ces processus (l'équation des ondes). Pour établir ce modèle mathématique nous analyserons la propagation des ondes transversales au long d'une corde tendue.

2. Equation des ondes.

Considérons une corde élastique tendue et tensionée, d'une masse négligeable, fixée à ses deux extrémités.
Par *corde élastique* on comprend un milieu élastique, homogène (la densité ρ de celui-ci est constante) et *absolument flexible*, c'est-à-dire, la tension $\vec{F}$ est tangente à la corde. Considérons rien que les oscillations petites de sorte que la corde dévie très peu de la ligne droite Ox. Dans ce cas l'angle α entre la tangente à la corde et l'axe Ox sera petit :

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \operatorname{tg}\alpha \cong \alpha, \sin\alpha \cong \alpha, \cos\alpha \cong 1 \quad (1)$$

On pose que les oscillations de tous les points de la corde se produisent dans le même plan fixe Oxu (Fig. XII.1). Dans l'état de repos, la direction de la corde coïncide avec l'axe Ox. Si on agit de l'extérieure à une force transversale l'effet de celle-ci sera le déplacement de la corde de sa position d'équilibre. Soit un élément de la corde *infiniment petit* de longueur dx déplacé de sa position d'équilibre à une distance u(x,t) (l'élongation du point x au moment t).

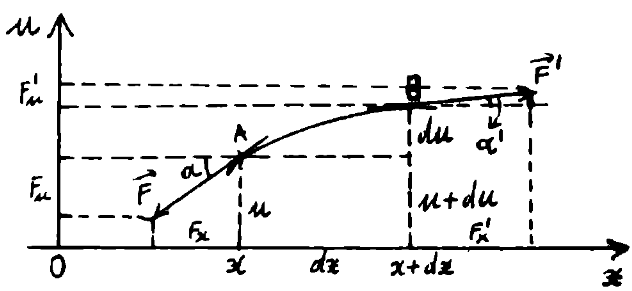


Fig. XII.1

Aux extrémités de l'élément dx agissent les forces de tension $\vec{F}$ et $\vec{F}'$ qui sont tangentes à l'élément dx de la corde dans les points A et B. C'est à cause de ces forces que l'élément de la corde dx exécutera des oscillations autour de la position d'équilibre. Puisque le milieu est élastique ce mouvement se propage au long de la corde. De plus, les points de la corde se mouvant transversalement, il n'y a pas d'accélération et par suite de force dans la direction *longitudinale* Ox. Par conséquent, la projection R_x de la force résultante $\vec{R} = \vec{F} + \vec{F}'$ qui agit sur l'élément dx de masse dm doit être égale à zéro :

$$R_x = F_x + F'_x = -F\cos\alpha + F'\cos\alpha' = 0 \cdot \qquad (2)$$

Du fait que $\cos\alpha' \cong 1$, $\cos\alpha \cong 1$ il s'ensuit de (2) :

$$F = F' \qquad (3)$$

c'est-à-dire, la tension a approximativement le même module au long de la corde.

Egalement, la longueur de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ coïncide approximativement avec l'élément dx, puisque $dx \cong \overset{\frown}{AB}\cos\alpha \cong \overset{\frown}{AB}$ et, par suite, la densité ρ de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ elle aussi ne change pas.

Sur la direction transversale Ou la force résultante R_u qui agit sur l'élément dm est :

$$R_u = F_u + F'_u = -F\sin\alpha + F'\sin\alpha' \cong F(\alpha' - \alpha) \cdot \qquad (4)$$

Etant donné que (voir dans le cours d'analyse l'interprétation géométrique de la dérivée)

$$\frac{\partial u(x+dx,t)}{\partial x} = \mathrm{tg}\alpha' \cong \sin\alpha' \cong \alpha' ; \qquad (5)$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \mathrm{tg}\alpha \cong \sin\alpha \cong \alpha ;$$

$$\frac{u(x+dx,t) - u(x,t)}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (\text{ pour } dx \to 0) \qquad (6)$$

la relation (4) devient (7) :

$$R_u = F\left[\frac{\partial u(x+dx,t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right] = F\frac{\partial}{\partial x}\left[u(x+dx,t) - u(x,t)\right] = F\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx\right) = F\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx \cdot$$

<u>Remarque</u> : L'ordonnée du point d'abscisse x+dx (l'élongation de ce point) est donnée par la relation (voir (6)):

$$u(x+dx,t) = u(x,t) + \frac{\partial u}{\partial x}dx \qquad (8)$$

Conformément à l'équation fondamentale de la dynamique (Newton) écrite au long de la direction Ou pour l'élément de masse dm, on a :

$$(dm)a_u = R_u \text{ où } a_u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \ . \qquad (9)$$

Si la section de la corde est égale à S, il suit l'expression de l'élément de masse dm :

$$dm = \rho dV = \rho S dx \qquad (10)$$

où le volume de celui-ci est $dV=S\cdot dx$.

D'après (7), (9) et (10) il résulte que :

$$F\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx = dm\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \rho S dx\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \ . \qquad (11)$$

En résulte *l'équation différentielle des ondes transversales de la corde (équation des ondes)* :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\rho S}{F}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad (12)$$

où la grandeur physique $F/\rho S$ a la dimension d'une vitesse au carré. En effet :

$$\left\langle\frac{F}{\rho S}\right\rangle_{SI} = \frac{\langle F\rangle_{SI}}{\langle\rho\rangle_{SI}\langle S\rangle_{SI}} = \frac{N}{\frac{Kg}{m^3}\cdot m^2} = \frac{Kg\cdot\frac{m}{s^2}}{\frac{Kg}{m^3}\cdot m^2} = \frac{m^2}{s^2} \ .$$

Par définition,

$$v = \sqrt{\frac{F}{\rho S}} \qquad (13)$$

représente *la vitesse des ondes transversales* qui se propagent au long de la corde. Par suite, l'équation (12) devient :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \ . \qquad (14)$$

Cette équation a été étudiée pour la première fois par D. Bernoulli, Euler et d'Alembert.

Pour le cas général où la direction de propagation des ondes ne coïncide pas à l'un des axes de coordonnées l'équation différentielle correspondante s'écrit sous la forme générale suivante :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \qquad (15)$$

où l'élongation $u(x,y,z,t) \equiv u(\vec{r},t)$ est fonction des coordonnées x,y,z et du temps.

En utilisant *l'opérateur de Laplace* :

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \qquad (16)$$

l'équation des ondes (15) s'écrit en coordonnées cartésiennes rectangulaires

$$\Delta u(\vec{r},t) - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u(\vec{r},t)}{\partial t^2} = 0 \ . \qquad (17)$$

Par l'utilisation de *l'opérateur de d'Alembert* :

$$\Box = \Delta - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \qquad (18)$$

(17) devient

$$\Box u(\vec{r},t) = 0 \ . \qquad (19)$$

L'équation d'onde (19) est une équation différentielle linéaire homogène aux derivées partielles. L'étude de la propagation des ondes longitudinale à travers un solide élastique a conduit à une équation de la même forme que (19). De plus, dans la théorie de Maxwell on obtient pour le champs électrique $\vec{E}(\vec{r},t)$ et magnétique $\vec{B}(\vec{r},t)$ qui constituent l'onde électromagnétiques, des équations de la même forme que (19). Par suite, indépendamment de la nature de l'onde, l'étude mathématique de la propagation des ondes revient à la résolution d'une équation de la forme (19) appelée *l'équation des ondes*.

3. Ondes sphériques.

a) Définition : Au voisinage d'une source d'oscillations S dont les dimensions négligeables située dans un milieu homogène et isotrope, la surface d'onde S sera une sphère dont le rayon est égal à r. Dans tous les points situés sur la surface d'onde la perturbation (l'élongation) a pour un t donné la même valeur $u_s = u_s(r,t)$ (Fig. XII.2).

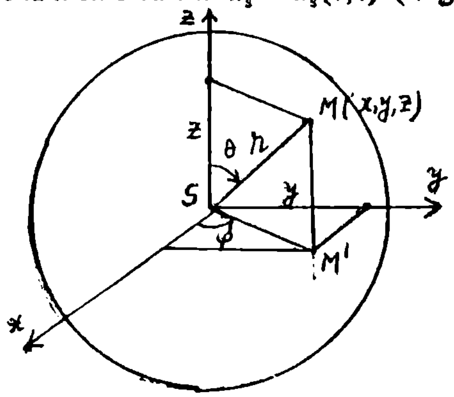


Fig. XII.2

Si les coordonnées sphériques d'une point quelconque M(x,y,z) qui se trouve sur la surface d'onde (S) sont r,θ,φ de sorte que :

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \tag{20}$$

alors l'élongation $u_S(r,t)$ au moment t du point arbitraire M ne dépend que de la coordonnée sphérique r (et ne dépend pas de θ et φ). On dit que la fonction $u_S(r,t)$ jouit d'une symétries sphériques. Au point de vue mathématique la symétrie sphérique de $u=u_S(r,t)$ se traduit par :

$$\frac{\partial u_s}{\partial \theta} = \frac{\partial u_s}{\partial \varphi} = 0 \tag{21}$$

b) Expression du laplacien en coordonnées sphériques.

Dans le cas particulier des coordonnées cartésiennes rectangulaires il prend la forme :

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{22}$$

Pour l'étude des ondes sphériques il est recommandable d'utiliser l'opérateur de Laplace en coordonnées sphériques. Dans le cours d'analyse vectorielle on fournit une méthode permettant d'obtenir cette expression. On se limitera ici à donner la formule sans démonstration :

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \tag{23}$$

Calculons maintenant l'effet du laplacien sur la fonction $u_s(r,t)$, l'élongation de l'onde sphérique :

$$\Delta u_s(r,t)=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u_s}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u_s}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u_s}{\partial\varphi^2} \quad (24)$$

En tenant compte de la symétrie sphérique de u_s (voir (21)), l'on obtient :

$$\Delta u_s(r,t)=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u_s}{\partial r}\right). \quad (25)$$

c) L'équation des ondes sphériques.

L'équation différentielle linéaire homogène aux dérivées partielles (17) s'écrit pour une onde sphérique :

$$\Delta u_s(r,t)-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u_s(r,t)}{\partial t^2}=0, \quad (26)$$

ou

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u_s}{\partial r}\right)-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u_s(r,t)}{\partial t^2}=0. \quad (27)$$

Ayant en vue la suite des identités :

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u_s}{\partial r}\right)=\frac{2}{r}\frac{\partial u_s}{\partial r}+\frac{\partial^2 u_s}{\partial r^2}=\frac{1}{r}\frac{\partial^2(r\cdot u_s)}{\partial r^2}, \quad (28)$$

l'on obtient :

$$\frac{\partial^2(r\cdot u_s)}{\partial r^2}-\frac{r}{v^2}\frac{\partial^2 u_s}{\partial t^2}=0. \quad (29)$$

Puisque dans un point d'observation, r ne dépend pas du temps l'équation des ondes sphériques (29) devient :

$$\frac{\partial^2(r\cdot u_s)}{\partial r^2}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2(r\cdot u_s)}{\partial t^2}=0. \quad (30)$$

En introduisant la notation :

$$\psi(r,t)=r\cdot u_s(r,t) \quad (31)$$

on obtient, en définitive, *l'équation des ondes sphériques* :

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=0 \quad (32)$$

d) La solution de l'équation des ondes sphériques.

Comme toute équation linéaire homogène l'équation (32) jouit de la propriété importante suivante. Supposons qu'on ait trouvé la solution particulière de (32) ψ_1; alors $C_1\psi_1$ où C_1 est une constante arbitraire sera également solution de (32). Si l'on connaît les solutions particulières ψ_1 et ψ_2, alors $\psi=C_1\psi_1+C_2\psi_2$, où C_1 et C_2 sont des constantes arbitraires, sera également solution de l'équation d'onde (32) (*le principe de superposition*). La fonction ψ sera la *solution générale* de l'équation (32). Appliquons dans la suite le principe de superposition. Soit les solution particulière :

$$\psi_1(r,t)=C_1F_1\left(t-\frac{r}{v}\right) \quad \text{et} \quad \psi_2(r,t)=C_2F_2\left(t+\frac{r}{v}\right)$$

de l'équation (32). En effet, on voit facilement que, par exemple, ψ_1 est une solution de (32). Pour ce faire, on introduit la variable $u=(t-r/v)$ et par suite, on peut écrire :

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial r}=\frac{\partial\psi_1}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial r}=C_1\frac{\partial F_1}{\partial u}\left(-\frac{1}{v}\right)=-\frac{C_1}{v}\frac{\partial F_1}{\partial u},$$

$$\frac{\partial^2\psi_1}{\partial r^2}=-\frac{C_1}{v}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial F_1}{\partial u}\right)\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{C_1}{v^2}\frac{\partial^2 F_1}{\partial u^2}\,. \tag{33}$$

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial t}=\frac{\partial\psi_1}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t}=C_1\frac{\partial F_1}{\partial u},$$

$$\frac{\partial^2\psi_1}{\partial t^2}=C_1\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial F_1}{\partial u}\right)\frac{\partial u}{\partial t}=C_1\frac{\partial^2 F_1}{\partial u^2}\,. \tag{34}$$

En introduisant (33) et (34) en (32) l'on constate que ψ_1 est une solution particulière de (32). De la même façon l'on procède avec ψ_2. Par conséquent, la *solution générale* de (32) sera de la forme ·

$$\psi(r,t)=C_1F_1\left(t-\frac{r}{v}\right)+C_2F_2\left(t+\frac{r}{v}\right) \tag{35}$$

où F_1 et F_2 sont deux nouvelles fonctions plus générales.

e) Ondes progressives et régressives. Surface equiphase ou surface d'onde. Vitesse de phase.

Dans la relation (35) la fonction ψ_1 représente une *onde progressive* tandis que la fonction ψ_2, une *onde régressive*. Pour s'y convaincre considérons tout d'abord la fonction ψ_1. Son argument :

$$\Phi_1(r,t)=\left(t-\frac{r}{v}\right), \tag{36}$$

c'est une grandeur physique sans dimension, nommée *la phase de l'onde*. L'équation :

$$\left(t-\frac{r}{v}\right)=\text{const}\,. \tag{37}$$

représente des surfaces dont les points ont la phase constante :

$$\Phi_1(r,t)=\text{const}\,. \tag{38}$$

Puisque pour un $t=t_0$ donné la condition $\Phi_1(r,t_0)=\text{const}$ conduit à la conclusion $r=\text{const}$, les surfaces equiphase sont des sphères concentriques ayant le centre dans la source S.
Par la différenciation de l'équation (37) l'on obtient :

$$dt-\frac{1}{v}dr=0 \quad \text{ou} \quad v=\frac{\partial r}{\partial t} \tag{39}$$

ce qui montre que la grandeur v représente la vitesse avec laquelle se déplacent les surfaces equiphase. Pour cette raison, v s'appelle *vitesse de phase*. Comme dans l'expression de la vitesse, celle-ci a le signe positif, l'onde représentée par la fonction ψ_1 se propage de la source S vers l'extérieur. Une telle onde s'appelle *progressive* ou *directe*.
Si on répète les raisonnements précédentes pour la fonction ψ_2 il s'ensuit $v=-dr/dt$; le signe " moins " de la vitesse indique le fait que cette fonction représente une onde qui converge vers la source. Une telle onde s'appelle *régressive* ou *inverse*.
Dans la suite, nous allons considérer seulement les ondes progressive et d'après (31) l'élongation des ondes sphériques progressives s'écrit :

$$u_s(r,t)=\frac{\psi(r,t)}{r}=\frac{\psi_1(r,t)}{r}=\frac{C_1F_1\left(t-\frac{r}{v}\right)}{r}\,. \tag{40}$$

4. Onde plane. Onde plane harmonique.

a) Introduction : Dans la proximité d'un point d'observation situé à une grande distance de source, considérée de dimensions négligeables, la surface d'onde peut être approximée par une surface plane. Il s'agit d'une *onde plane*. La même situation sera réalisée si la source présente une *extension plane*.
Dans ce cas à *n'importe quelle distance* de celle-ci la surface d'onde sera plane.

b) Définition de l'onde plane : Si tous les particules situés dans un plan perpendiculaire sur la direction de propagation de l'onde, oscillent identiquement, c'est-à-dire, *présentent la même élongation* ψ l'onde s'appelle plane.

En d'autres termes, si les points arbitraires P et P′ des rayons de positions $\vec{r}$ et $\vec{r}'$ se trouvent dans ce plan, alors, *par définition de l'onde plane*,

$$\psi(\vec{r},t) = \psi(\vec{r}',t) \cdot \qquad (41)$$

c) Définition et l'équation de l'onde plane harmonique (monochromatique) :

Définition : Si tous les points qui se trouvent dans un plan perpendiculaire sur la direction de propagation de l'onde plane effectuent des oscillations dont l'élongation ψ est donnée par une *fonction harmonique* d'une certaine fréquence ω alors l'onde plane s'appelle aussi *harmonique*.

c_1) La déduction de l'équation de l'onde plane harmonique.

L'on suppose que dans le plan P_1 qui passe par l'origine 0 d'un système cartésien des coordonnées (Fig.XII.3) l'élongation des points matériels du milieu élastique s'écrit.

$$\psi_0 = \psi(0,t) = A \cdot \cos\omega t \cdot \qquad (42)$$

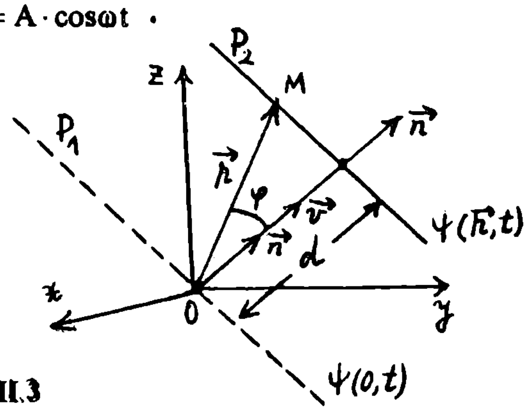


Fig. XII.3

Les points du plan P_2 qui se trouve à la distance d par rapport au plan P_1 auront une élongation $\psi(\vec{r},t)$. Recherchons l'expression de $\psi(\vec{r},t)$. Le mouvement ondulatoire des points du plan P_1 se transmet de proche en proche à la vitesse v aux points matériels trouvés dans le plan P_2. Les oscillations des particules du plan P_2 seront *retardées* avec le temps $\tau = d / v$ nécessaire à la propagation de l'onde du plan P_1 à P_2. Donc, l'élongation $\psi(d,t)$ des points matériels trouvés à la distance d de P_1, sera égale à l'élongation des points matériels appartenant au plan P_1, au moment t' = t-d/v. De la sorte , on peut écrire :

$$\psi(d,t) = A \cdot \cos\omega t' = A \cdot \cos\omega\left(t - \frac{d}{v}\right) \cdot \qquad (43)$$

La distance d peut être exprimée en fonction du rayon vecteur $\vec{r}$, mené de l'origine 0 à un point quelconque M de P_2, et le vecteur unitaire $\vec{n}$, perpendiculaire sur la surface d'onde P_2. De la figure se voit que la distance d peut être exprimée par le produit scalaire :

$$d = r \cdot \cos\varphi \equiv \vec{r} \cdot \vec{n} \; . \tag{44}$$

Il est commode d'introduire *le vecteur d'onde* ainsi définit :

$$\vec{k} = k \cdot \vec{n} = \frac{\omega}{v} \cdot \vec{n} \tag{45}$$

orienté dans le sens de la propagation de l'onde.

En tenant compte des relations (43), (44) et (45) on peut écrire ***l'équation de l'onde harmonique plane*** progressive qui se propage suivant une direction quelconque (46):

$$\psi(d,t) = \psi(\vec{r},t) = A \cdot \cos\omega\left(t - \frac{\vec{r}\cdot\vec{n}}{v}\right) = A \cdot \cos 2\pi\nu\left(t - \frac{\vec{r}\cdot\vec{n}}{v}\right) = A \cdot \cos\frac{2\pi}{t}\left(t - \frac{\vec{r}\cdot\vec{n}}{v}\right) =$$

$$= A \cdot \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{v}\vec{r}\cdot\vec{n}\right) = A \cdot \cos\left(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}\right) = A \cdot \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{\vec{r}\cdot\vec{n}}{T\cdot v}\right) = A \cdot \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{\vec{r}\cdot\vec{n}}{\lambda}\right)$$

où

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2\pi\nu} = \frac{1}{\nu} \quad \text{et} \quad \lambda = v \cdot T \; . \tag{47}$$

La *longueur d'onde λ* de l'onde harmonique plane, représente la distance parcourue par l'onde dans l'intervalle de temps T nommée *la période d'oscillation* de l'onde.

Si

$$\begin{aligned} \vec{k} &= k_x \cdot \vec{i} + k_y \cdot \vec{j} + k_z \cdot \vec{k} \; , \\ \vec{r} &= x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k} \end{aligned} \tag{48}$$

alors

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = x \cdot k_x + y \cdot k_y + z \cdot k_z \tag{49}$$

et

$$\psi(\vec{r},t) = A \cdot \cos\left(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}\right) = A \cdot \cos\left(\omega t - x \cdot k_x - y \cdot k_y - z \cdot k_z\right) \; . \tag{50}$$

Si y=z=0 l'on obtient l'équation de *l'onde plane harmonique à une dimension* (l'onde se propage au long de l'axe Ox) :

$$\psi(x,t) = A \cdot \cos\left(\omega t - x \cdot k_x\right) = A \cdot \cos(\omega t - x \cdot k) \tag{51}$$

où

$$k = k_x = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{T \cdot v} = \frac{2\pi}{\lambda} \; . \tag{52}$$

La grandeur :

$$\varphi(x,t) = \omega t - xk = \omega\left(t - \frac{x}{v}\right) \tag{53}$$

représente *la phase* de l'onde harmonique plane à une dimension. Dans le cas général (à trois dimensions) :

$$\varphi(\vec{r},t) = \omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} \; . \tag{54}$$

Dans un point quelconque du milieu élastique ($\vec{r}$ =const), la phase $\varphi(\vec{r},t)$ varie en fonction du temps et à un moment donne $t=t_0$, la phase est function du vecteur de position $\vec{r}$. Dans un plan quelconque P_2 qui est perpendiculaire à la direction de propagation $\vec{n}$, au moment donné $t=t_0$, la phase de l'onde est constante. En effet la relation (41) entraîne :

$$A \cdot \cos\left(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}\right) = A \cdot \cos\left(\omega t - \vec{k}' \cdot \vec{r}'\right) \tag{55}$$

où $\vec{r}$ et $\vec{r}'$ représentent les positions de deux points quelconque qui se trouvent dans le plan P_2.

La relation (55) implique :

$$\varphi(\vec{r},t) = \varphi(\vec{r}',t) = \text{const} \cdot \tag{56}$$

Au point de vue mathématique il et commode d'écrire la formule d'élongation (50) sous forme complexe :

$$\varphi(\vec{r},t) = A \cdot e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})} \;. \tag{57}$$

Du fait que pour une onde élastique, l'élongation $\psi(\vec{r},t)$ est une grandeur réelle, dans les résultats finals des certains calculs, l'on prend la partie réelle (on imaginaire) de l'expression (57), en tenant compte de la *relation de Euler* :

$$e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})} = \cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}) + i\cdot\sin(\omega t - \vec{k}'\cdot\vec{r}') \;\cdot \tag{58}$$

5. Paquet d'ondes.

Introduction : Les ondes décrites par la relation (51) sont caractérisées par le fait qu'ont une amplitude constante et une fréquence bien déterminée quelque soient les point de l'espace ($\vec{r}$-arbitraire). Autrement dit, elles sont *monochromatiques*. Il s'agit ici d'un cas idéalise, parce que les ondes qui se trouvent dans la nature ne sont pas toujours monochromatiques; elles ont une *extension finie* dans l'espace étant définies par :

$$u(x,t) = \begin{cases} \neq 0, x \in [x_1, x_2] \\ = 0, x \notin [x_1, x_2] \end{cases} \;\cdot \tag{59}$$

D'après le théorème de Fourier une telle fonction limitée dans l'espace peut être représentée par *l'intégrale de Fourier*.

$$u(x,t) = \int_{k_0-\Delta k}^{k_0+\Delta k} A(k)\cdot e^{i[\omega(k)t - kx]} dk \;\cdot \tag{60}$$

Celle-ci représente une superposition d'ondes planes à k variant continûment dans les limites d'un certain intervalle $2\cdot\Delta k$ dont les dimensions seront définies par la suite. Choisissons dans intervalle $2\cdot\Delta k$ un certain point moyen k_0 et montrons que en effectuant l'intégrale (60) on peut obtenir *un train d'ondes planes limité ou comme on l'appelle un paquet d'ondes*.

Quant à l'amplitude A(k) d'ondes planes sommées, on admettra qu'elle est *constante* dans tout l'intervalle $\pm\Delta k$ et égale à $A(k_0) \equiv A_0$. La variation de pulsation ω en fonction de k, $\omega(k)$, s'appelle *dispersion* des ondes. Pour un petit intervalle Δk on peut représenter $\omega(k)$ sous forme d'une série de puissances (Taylor) :

$$\omega(k) = \omega(k_0) + (k-k_0)\cdot\left(\frac{\partial\omega}{\partial k}\right)\Bigg|_{k=k_0} + \frac{1}{2}(k-k_0)^2\cdot\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial k^2}\right)\Bigg|_{k=k_0} + \ldots \quad \cdot \tag{61}$$

Calculons maintenant l'intégrale (60) en posant que l'intervalle $k-k_0$ est si petit que dans (61) on peut négliger tous les termes à partir du troisième, c'est-à-dire choisir pour $\omega(k)$ l'expression linéaire :

$$\omega(k) = \omega(k_0) + (k-k_0)\cdot\left(\frac{\partial\omega}{\partial k}\right)\Bigg|_{k=k_0} \cdot \tag{62}$$

Portant cette expression de $\omega(k)$ dans (60) on obtient :

$$u(x,t) = A_0 \int_{k_0-\Delta k}^{k_0+\Delta k} e^{i[\omega_0 t + (k-k_0)ct - kx]}\cdot dk \tag{63}$$

où l'on a utilisé les notations :

$$\omega_0 = \omega(k_0); \varepsilon = \left(\frac{\partial\omega}{\partial k}\right)\Bigg|_{k=k_0} \tag{64}$$

En sortant tous les facteurs indépendants de k devant l'intégrale l'on obtient :

$$u(x,t) = A_0 \cdot e^{i[\omega_0 t - k_0 \varepsilon t]} \int_{k_0-\Delta k}^{k_0+\Delta k} e^{ik(\varepsilon t - x)} \cdot dk \tag{65}$$

En effectuant l'intégrale il s'ensuit :

$$u(x,t) = A_0 \cdot e^{i[\omega_0 - k_0\varepsilon]t} \cdot \frac{e^{ik(\varepsilon t - x)}}{i(\varepsilon t - x)}\Bigg|_{k_0-\Delta k}^{k_0+\Delta k} = A_0 \cdot e^{i[\omega_0 - k_0\varepsilon]t} \cdot \frac{e^{i(k_0+\Delta k)(\varepsilon t - x)} - e^{i(k_0-\Delta k)(\varepsilon t - x)}}{i(\varepsilon t - x)} =$$

$$= A_0 \cdot e^{i[\omega_0 - k_0\varepsilon]t} \cdot \frac{e^{ik_0(\varepsilon t - x)}\left[e^{i\Delta k(\varepsilon t - x)} - e^{-i\Delta k(\varepsilon t - x)}\right]}{i(\varepsilon t - x)} = A_0 \cdot e^{i[\omega_0 t - k_0 x]} \cdot 2\Delta k \cdot \frac{e^{i\Delta k(\varepsilon t - x)} - e^{-i\Delta k(\varepsilon t - x)}}{2\Delta k \cdot i(\varepsilon t - x)} =$$

$$= A_0 \cdot e^{i[\omega_0 t - k_0 x]} \cdot 2\Delta k \cdot \frac{\sin w}{w} \tag{66}$$

où on a utilisé la relation de Euler :

$$\sin w = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} \ ; \ w = \Delta k(\varepsilon t - x) \ . \tag{67}$$

Si on note par :

$$u_0(x,t) = 2A_0 \cdot \Delta k \cdot e^{i[\omega_0 t - k_0 x]} \tag{68}$$

la fonction d'onde harmonique plane de fréquence ω_0 et vecteur d'onde $\vec{k}_0$, (66) devient :

$$u(x,t) = u_0(x,t) \cdot \frac{\sin w}{w} \ . \tag{69}$$

Une telle onde *nonharmonique* porte le nom de *paquet d'ondes* ou *groupe d'ondes*.

Le facteur $\frac{\sin w}{w}$, c'est *l'amplitude variable (modulée)* de l'onde harmonique plane $u_0(x,t)$.

En modifiant l'argument w, l'amplitude variable $\frac{\sin w}{w}$ passe par une série de maximums et de minimums. Toutefois, leur valeur est petite par rapport au maximum principal pour w=0 et décroît rapidement avec l'accroissement de l'argument.

Pour $w \to 0$ $\quad \lim \frac{\sin w}{w} = 1$,

Pour $w = \pm\pi$ $\quad \lim \frac{\sin w}{w} = 0$.

La forme instantanée (pour $t=t_0$=const) du paquet d'ondes est représentée dans la Fig. XII.4.

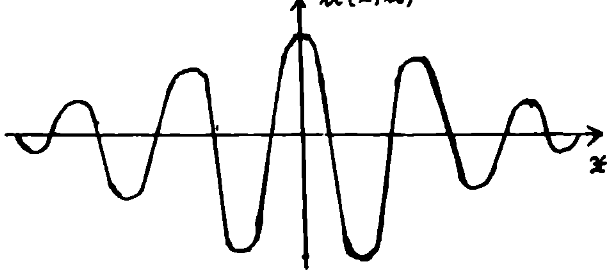


Fig. XII.4

6. Vitesse de phase et de groupe. La relation de Rayleigh.

a) La phase du paquet d'ondes entre dans le facteur $\cos(\omega t - kx)$ de (68). En égalant la phase $\cos(\omega t - kx)$ à la constante et en dérivant par rapport au temps on trouve la *vitesse de phase* v_f :

$$\omega t - kx = \text{constante} \ , \ \omega - k\frac{dx}{dt} = 0 \ , \ v_f = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} \ . \tag{1}$$

La vitesse de phase v_f représente la vitesse de déplacement des surfaces equiphases des ondes qui constituent le paquet d'ondes.

La vitesse de déplacement du paquet d'ondes représente la vitesse de déplacement du maximum principal du paquet ou la vitesse de déplacement du paquet en bloc (la vitesse de déplacement de la surface equiamplitude). De l'équation :

$$\alpha = \frac{\Delta k}{2}\left[\left(\frac{d\omega}{dt}\right)t - x\right] = 0 \tag{2}$$

qui représente la condition de maximum principal du paquet, résulte la vitesse de groupe v_g en dérivant par rapport ou temps la relation (2) :

$$\left(\frac{d\omega}{dt}\right) - \frac{dx}{dt} = 0 \ , \ v_g = \frac{dx}{dt} = \left(\frac{d\omega}{dk}\right) \ . \tag{3}$$

b) Examinons maintenant ces deux vitesses, celle de phase et celle de groupe, et comparons-les dans les deux cas:

1. Le cas où la vitesse de phase des ondes harmoniques formant le paquet est *indépendante de k*. On dit des milieux possédant cette propriété qu'ils ne sont par *dispersif*.

2. Le cas où le milieu est dispersif, c'est-à-dire quand la vitesse de phase *est fonction de k*.

Prenons le cas (1). De la relation de la vitesse de phase $v_f = \frac{\omega}{k}$ on tire $\omega = k \cdot v_f$.

Calculons maintenant la vitesse de groupe :

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk}(kv_f) = v_f\frac{dk}{dk} = v_f \ . \tag{4}$$

Ainsi donc, en l'absence de dispersion la vitesse de groupe et la vitesse de phase sont identiques.

Dans le cas (2) v_f est fonction de k et, par suite,

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk}(kv_f) = v_f + k\frac{dv_f}{dk} \ . \tag{5}$$

Le deuxième terme du second membre se transforme ainsi :

$$\frac{dv_f}{dk} = \frac{dv_f}{d\lambda}\cdot\frac{d\lambda}{dk} = \frac{dv_f}{d\lambda}\cdot\frac{1}{\frac{dk}{d\lambda}} = \frac{dv_f}{d\lambda}\cdot\frac{1}{\frac{d\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)}{d\lambda}} = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{dv_f}{d\lambda}\cdot\frac{1}{\frac{d\left(\frac{1}{\lambda}\right)}{d\lambda}} = -\frac{\lambda^2}{2\pi}\cdot\frac{dv_f}{d\lambda} \ . \tag{6}$$

Portant dans (5) il vient :

$$v_g = v_f - \lambda\frac{dv_f}{d\lambda} \ . \quad \text{(la relation de Rayleigh)} \tag{7}$$

On voit qu'en présence d'une dispersion la vitesse de groupe est différente de la vitesse de phase

XIII. Equations du mouvement de Lagrange

1. Point matériel (particule). Système de points matériels

Une des notions fondamentales de la mécanique est celle de *point matériel*. On entend par point matériel un corp macroscopique dont les dimensions sont suffisamment petites pour pouvoir être négligées dans l'étude du mouvement. La totalité de la masse de ce corps se trouve concentrée en ce point. Il n'existe pas de points matériels dans la nature, c'est donc une abstraction, un objet théorique - représentation idéalisée du corps réel. On peut se poser la question de savoir quels corps on peut assimiler à un point matériel dans les études de leurs mouvements. La réponse à cette question dépend, d'une part, du caractère propre du mouvement et, d'autre part, du but poursuivi par l'étude. Par exemple, dans les études du mouvement orbital de la Terre autour du Soleil, on peut assimiler la Terre à un point matériel à un très grand degré de précision. Mais cette approximation n'est plus valable lorsqu'il s'agit du mouvement de rotation de la Terre autour de son propre axe. Il est dénué de sens de parler de la rotation d'un point autour d'un axe lorsque cet axe passe par le point considéré.
Nous avons inclue dans la définition du point matériel la condition que ce point doit être un *corps macroscopique*. Cette condition est nécessaire afin de pouvoir mettre en oeuvre la mécanique classique. Cependant, dans nombre de cas, le mouvement des *microparticules* peut être aussi traité par la mécanique classique. C'est le cas, par exemple, du mouvement des électrons, des protons ou des ions dans les accélérateurs de particules. Les microparticules peuvent alors être assimilées aux points matériels de la mécanique classique. Un ensemble discret de N points matériels constitue un *système de points matériels*.

2. Degrés de liberté du système. Cordonnées et vitesses généralisées.

Le nombre des grandeurs *indépendantes* qu'il faut se donner pour déterminer de façon univoque la position (configuration) d'un système est appelé *nombre de dégrée de liberté* du système.
f grandeurs quelconque q_1, q_2, ..., q_f indépendantes caractérisant complètement la position d'un système à f degrés de liberté sont appelées ses *coordonnés généralisées* et les dérivées $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$, ..., $\dot{q}_f$ ses *vitesses généralisées*.
Exemple:
La position (configuration) d'un *point* qui se meut *librement* dans l'espace (dans des directions arbitraires) peut être repérée par indication de trois coordonnées rectangulaires x, y, z,. Mais on peut aussi utiliser à la place des coordonnées rectangulaires des coordonnées sphériques ou cylindriques (voir fig. 1,2,3) ou tout autre système de coordonnées.

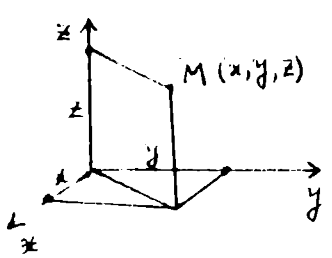


Fig XIII-1

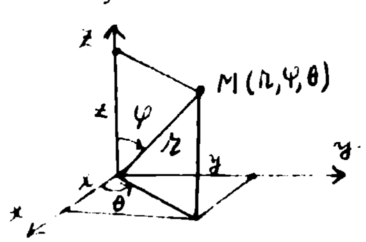


Fig XIII-2

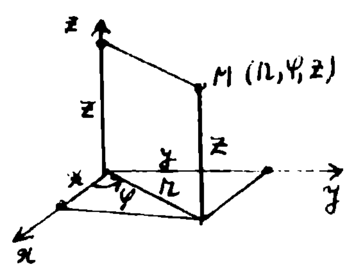


Fig XIII-3

Quel que soit le système choisi, ce qui importe c'est que le nombre de coordonnées indépendantes requises pour une détermination univoque de la position du point se mouvant dans l'espace de façon *arbitraire* soit égal à *trois*. D'un point ainsi défini on dira qu'il possède *trois degrés de liberté*. Les coordonnées généralisées et les vitesses généralisées dans ce cas sont : $q_1 = x$, $q_2 = y$, $q_3 = z$; $\dot{q}_1 = \dot{x}$, $\dot{q}_2 = \dot{y}$, $\dot{q}_3 = \dot{z}$ ou bien $q_1 = r$, $q_2 = \theta$, $q_3 = \varphi$; $\dot{q}_1 = \dot{r}$, $\dot{q}_2 = \dot{\theta}$, $\dot{q}_3 = \dot{\varphi}$ ou bien $q_1 = r$, $q_2 = \varphi$, $q_3 = z$; $\dot{q}_1 = \dot{r}$, $\dot{q}_2 = \dot{\varphi}$, $\dot{q}_3 = \dot{z}$.

D'autre part, on voit qu'il n'est pas absolument nécessaire que les coordonnées généralisées aient la dimension d'une *longueur* (par exemple les coordonnées θ et φ).

Les coordonnées cartésiennes x, y, z du point M peuvent être exprimées par d'autre sortes de coordonnées généralisées (voir fig. b et c).En effet :

$$\begin{cases} x = r\cos\theta.\sin\varphi \\ y = r\sin\theta.\sin\varphi \\ z = r\cos\varphi \end{cases} , \quad \begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = x(r,\theta,\varphi) \\ y = y(r,\theta,\varphi) \\ z = z(r,\theta,\varphi) \end{cases}$$

Les composantes $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ des vitesses du point M peuvent être exprimées elles-aussi en fonction des coordonnées et vitesses généralisées. En effet :

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{r}\cos\theta\sin\theta - r\dot{\theta}\sin\theta\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\theta\cos\varphi \\ \dot{y} = \dot{r}\sin\theta\sin\varphi + r\dot{\theta}\cos\theta\sin\varphi + r\dot{\varphi}\sin\theta\cos\varphi, \\ \dot{z} = \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x} = \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi \\ \dot{y} = \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi \\ \dot{z} = \dot{z} , \end{cases}$$

$$\text{ou} \quad \begin{cases} \dot{x} = \dot{x}(\dot{r},\dot{\theta},\dot{\varphi}; r,\theta,\varphi) \\ \dot{y} = \dot{y}(\dot{r},\dot{\theta},\dot{\varphi}; r,\theta,\varphi) \\ \dot{z} = \dot{z}(\dot{r},\dot{\theta},\dot{\varphi}; r,\theta,\varphi) . \end{cases}$$

3. Généralisation de ces considérations à un système mécanique constitué par un nombre arbitraire N de points matériels.

Si tous ces points peuvent se déplacer *librement* (sans aucune restriction), on devra connaître 3N coordonnées pour caractériser leurs positions instantanées (3 coordonnées par point). On dit alors que le système possède f=3N degrés de liberté. Pour déterminer donc univoquement les positions de tous les points matériels du système, il suffit de connaître, par exemple, les coordonnées cartésiennes x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2;..., x_N, y_N, z_N qui constituent un ensemble de 3N données indépendantes. Il n'est nullement nécessaire de choisir comme coordonnées indépendantes les coordonnées rectangulaires (cartésiennes). On peut prendre n'importe quelles f quantités $q_1, q_2,..., q_f$ dont la connaissance détermine univoquement les positions des N points matériels du système. Ces quantités constituent les *coordonnées généralisées* du système. Le mouvement du système sera entièrement défini si l'on connaît *la variation des coordonnées généralisées en fonction du temps* $q_i(t)$. Les dérivées des coordonnées généralisées par rapport au temps $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_f$ portent le nom de vitesses généralisées.

Les coordonnées généralisées $q_1,q_2,...,q_f$ peuvent être choisies de façon arbitraire, mais à tout instant elles doivent déterminer complètement la position du système mécanique. Dans tous les cas le nombre f des coordonnées généralisées indépendantes sera le même; c'est *le nombre de degrés de liberté du système*.

4. Liaisons. Mouvement lié. Exemples.

a) Dans certaines conditions le mouvement du point ne peut être arbitraire. Considérons, par exemple, une bille attachée a une extrémité d'un fil inextensible de longueur L connue, l'autre extrémité étant fixe (pendule mathématique). Lorsque le fil est tendu, la bille ne peut se déplacer que sur la surface d'une sphère d'équation $x^2+y^2+z^2-L^2=0$ (le centre de la sphère se trouve dans le point de fixation du fil). Il existe un grand nombre d'autre exemple où le point matériel est assujetti à rester sur une surface donnée d'équation $f(x,y,z)=0$. Dans tous ces cas on dit que le mouvement du point est *lié*. Les coordonnées x, y, z d'un tel point doivent vérifier l'équation de la surface considérée $f(x, y, z)=0$, dénommée également l'équation de la liaison. Il s'ensuit que dans ce cas deux coordonnées seulement sont indépendantes, x et y par exemple. La troisième coordonnée z peut être calculée par résolution de l'équation de liaison $f(x, y, z)=0$. On dira dans ce cas que le point possède *deux degrés de liberté*.

b) Si le point ne peut se déplacer que le long d'une courbe donnée dont les coordonnées x, y, z satisfont aux équations $F(x, y, x)=0$ et $G(x, y, z)=0$ (L'intersection de ces deux surfaces constitue la courbe donnée), puisque le nombre de liaisons est égale à deux, le nombre de coordonnées indépendantes nécessaires pour caractériser sa position se réduit à un. Pour coordonnée, on peut prendre, par exemple, la distance du point matériel à un point de la courbe et l'évaluer le long de celle-ci (la coordonnée curviligne du point dénotée par s) (voir la figure XIII.4)

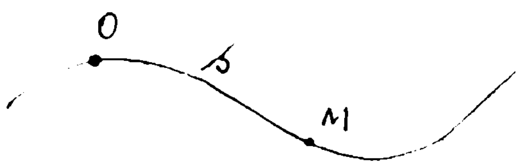


Fig. XIII.4

c) En général, si un système de N particules est soumis à l conditions de liaison *entre les coordonnées* des particules , alors des 3N coordonnées le nombre de coordonnées indépendantes sera donne par la formule:

$$f=3N-l$$

les l coordonnées restantes seront déterminées par le nombre des liaisons qui existe dans le système. Dans les deux cas examinés au-dessus (N=1) on peut donc écrire $f_1=3-1=2$ et $f_2=3-2=1$. En d'autre termes, si entre les 3N donnes du système constitué de N points matériels, il y a l relations de dépendance, des liaisons, le nombre des degrés de liberté se réduit avec le nombre l des liaisons $f=3N-l$

Applications.

1) Soit un système de deux masses ponctuelles se trouvant à la distance invariable d l'une de l'autre. Déterminer le nombre de degrés de liberté du système.

Solution: Entre les six coordonnées cartésiennes de ces particules (voir la figure XIII.5) il existe un relation (condition de liaison) $(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2=d^2$

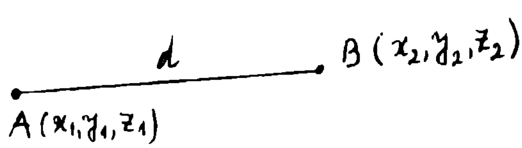


Fig. XIII.5

qui permet de déterminer l'une des coordonnées en fonction des cinq autres . Ainsi donc, dans ce cas la configuration (position) du système est complètement définie par cinq paramètres *indépendants* ($f = 3N - l = 3 \cdot 2 - 1 = 5$) et c'est pourquoi il suffit de posséder cinq coordonnées généralisées.

2) Déterminer le nombre de degrés de liberté d'un solide parfait.

Solution : On entend par solide parfait un système de points matériels dont les distances mutuelles demeurent *invariables* dans le temps lorsque le solide est en mouvement. Nous allons démontrer que tout solide parfait dont le mouvement n'est soumis à aucune restriction possède six degrés de liberté. En effet pour déterminer univoquement la position d'un solide, il suffit de connaître trois points A, B, C, *non alignés*. Soit x_a, y_a, z_a ; x_b, y_b, z_b ; x_c, y_c, z_c les coordonnées cartésiennes de ces trois points. Ces neuf coordonnées *ne sont pas indépendantes*, étant liées entre elles par les relations :

$$(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2 = AB^2 = \text{const},$$

$$(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2 + (z_B - z_C)^2 = BC^2 = \text{const},$$

$$(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 + (z_C - z_A)^2 = CA^2 = \text{const}.$$

(les longueurs AB, BC et CA sont invariables). Il ne subsiste ainsi que six coordonnées indépendantes et le solide possède donc six degrés de liberté:

$$f = 3N - l = 3 \cdot 3 - 3 = 9 - 3 = 6 .$$

Si on impose une restriction à la liberté de mouvement du solide, le nombre de degré de liberté diminue:

a) Un solide dont l'un des points est fixe, par exemple $x_a=a$, $y_a=b$, $z_a=c$ (le solide peut tourner autour de ce point fixe) possède *trois degrés de liberté*. En effet, le point fixe A echivaut à trois liaisons données par $x_a=a$, $y_a=b$, $z_a=c$ où a, b, c sont des constantes et donc le nombre totale des liaisons du solide este égale a $l=6$. Par suite $f=9-6=3$ degrés de liberté

b) Un solide qui est assujetti à tourner autour d'un axe fixe ne possède qu'un seul degré de liberté.

En effet, soit les points $A(x_a, y_a, z_a)$ et $B(x_b, y_b, z_b)$ fixes du solide. Le nombre total des liaisons est égale à huit ($l=8$): $x_1=x_a$, $y_1=y_a$, $z_1=z_a$; $x_2=x_b$, $y_2=y_b$, $z_2=z_b$ et AC=constante, BC=constante, donc $f=3N-l=9-8=1$.

3) Ecriver les coordonnées généralisées d'un système de deux points matériels M_1 et M_2 assujettis à se mouvoir sur un cercle de rayon R qui se trouve dans le plan xOy.

Solution : Le nombre de liaisons du système est égal à quatre ($l=4$). En effet, les coordonnées cartésiennes des points x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2 satisfont à quatre équations : $x_1^2 + y_1^2 = R^2, z_1 = 0,$ $x_2^2 + y_2^2 = R^2, z_2 = 0$.

Donc, $f = 3N - l = 3 \cdot 2 - 4 = 2$. En coordonnées polaires dans le plan du cercle on peut écrire

$$x_1 = R\cos\theta_1, y_1 = R\sin\theta_1, x_2 = R\cos\theta_2, y_2 = R\sin\theta_2 .$$

Donc, les coordonnées généralisées sont $q_1 = \theta_1, q_2 = \theta_2$.

5. Etat d'un point matériel „classique". Etat d'un système „classique"

Le vecteur de position $\vec{r}$ et la vitesse $\vec{v}$ du point matériel représentent des paramètres qui déterminent *l'état* du point matériel à un moment donne.

On admet comme un fait expérimental fondamental que l'état mécanique d'un corps macroscopique, assimilé à un point matériel, est complètement défini à chaque instant, par les vecteurs $\vec{r}$ et $\vec{v}$.

De tels objets dont l'état à un moment donné est déterminé complètement par la connaissance simultanée de la position et de la vitesse et qui se mouvent sur une trajectoire bien définie, s'appellent des objets classiques. Si l'on a toutes les coordonnées généralisées $q_1, q_2,\ldots,q_f$, ainsi que toutes les vitesses généralisées, c'est-à-dire les dérivées des coordonnées généralisées par rapport au temps $\dot{q}_1, \dot{q}_2,\ldots,\dot{q}_f$, on peut dire que l'état du système est complètement défini. En mécanique classique *l'état instantané du système* se définit donc par 2f paramètres indépendants.

6) <u>Espace de configuration</u>.

La configuration (position) d'un système de points matériels définit par les grandeurs $q_1, q_2,\ldots,q_f$ peut être représenté par un seul point dans un espace à f dimensions dont les coordonnées sont justement les coordonnées généralisées. Cet espace s'appelle *l'espace de configuration*. Au passage du système d'un état initial S_0 à un autre S, puisque entre ces états la configuration du système change, le point représentatif décrira une trajectoire dans l'espace de configuration. Un tel passage d'un état mécanique à un autre s'appelle processus mécanique.

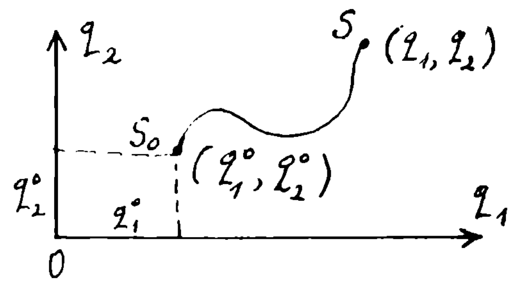


Fig. XIII.6

Soit le cas particulier d'un point qui se meut librement dans le plan de coordonnées cartésiennes xOy. La configuration du point est défini a un moment t_0 donné par les paramètres $q_1^\circ = x_0, q_2^\circ = y_0$ (voir la figure XIII.6). L'état du point au moment t_0 est caractérisé par les paramètres $q_1^\circ, q_2^\circ, \dot{q}_1^\circ, \dot{q}_2^\circ$ et au moment t, par les grandeurs $q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2$.
Au moment t la configuration du système est donnée par $q_1=x$, $q_2=y$. La dimension d'un tel espace est égale à f=2.

7) <u>Equation de Lagrange. Fonction de Lagrange</u>.

Les équations du mouvement de Lagrange sont des équations différentielles valables pour tout système de coordonnées et forment un système de f équations différentielles du second ordre à f fonctions inconnues $q_i(t)$.
Soit une particule *libre* actionnée par la *force potentielle* $\vec{F}$ qui dérive de la *fonction potentielle* $E_p(x, y, z, t)=E_p(\vec{r}, t)$ (potentiel simple) donc :

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k} = -\text{grad } E_p = -\frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial E_p}{\partial z}\vec{k} \; .$$

Sa position est généralement caractérisée par trois coordonnées. Il peut s'agir des coordonnées cartésiennes x, y, z de même que de toutes autres coordonnées q_1, q_2, q_3. Supposons qu'on connaît les formules exprimant x, y, z en fonction de q_1, q_2, q_3:

$$x = x\,(q_1, q_2, q_3),\;\; y = y\,(q_1, q_2, q_3),\;\; z = z\,(q_1, q_2, q_3) \; . \qquad (1)$$

Ecrivons l'équation du mouvement en coordonnées cartésiennes (il s'agit de l'équation de Newton $\vec{F} = m\vec{a}$) :

$$m\ddot{x} = F_x, m\ddot{y} = F_y, m\ddot{z} = F_z \quad . \tag{1'}$$

Multiplions maintenant la première de ces équation par $\frac{\partial x}{\partial q_1}$, la seconde par $\frac{\partial y}{\partial q_1}$, la troisième par $\frac{\partial z}{\partial q_1}$, et additionnons-les :

$$m\left(\ddot{x}\frac{\partial x}{\partial q_1} + \ddot{y}\frac{\partial y}{\partial q_1} + \ddot{z}\frac{\partial z}{\partial q_1}\right) = F_x\frac{\partial x}{\partial q_1} + F_y\frac{\partial y}{\partial q_1} + F_z\frac{\partial z}{\partial q_1} \quad . \tag{2}$$

Le second membre de l'équation obtenue sera désigne par Q_1:

$$F_x\frac{\partial x}{\partial q_1} + F_y\frac{\partial y}{\partial q_1} + F_z\frac{\partial z}{\partial q_1} = Q_1 \quad . \tag{3}$$

Remarquant que:

$$\begin{aligned} \ddot{x}\frac{\partial x}{\partial q_1} &= \frac{d}{dt}\left(\dot{x}\frac{\partial x}{\partial q_1}\right) - \dot{x}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right) , \\ \ddot{y}\frac{\partial y}{\partial q_1} &= \frac{d}{dt}\left(\dot{y}\frac{\partial y}{\partial q_1}\right) - \dot{y}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right) , \\ \ddot{z}\frac{\partial z}{\partial q_1} &= \frac{d}{dt}\left(\dot{z}\frac{\partial z}{\partial q_1}\right) - \dot{z}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right) , \end{aligned} \tag{3'}$$

on peut récrire l'équation (2) sous la forme :

$$\frac{d}{dt}\left[m\left(\dot{x}\frac{\partial x}{\partial q_1} + \dot{y}\frac{\partial y}{\partial q_1} + \dot{z}\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)\right] - m\left[\dot{x}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right) + \dot{y}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right) + \dot{z}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)\right] = Q_1 \tag{4}$$

Dérivons les relations (1) par rapport au temps en considérant x, y, z comme des fonctions du temps:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial x}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \frac{\partial x}{\partial q_3}\dot{q}_3 , \\ \dot{y} &= \frac{\partial y}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial y}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \frac{\partial y}{\partial q_3}\dot{q}_3 , \\ \dot{z} &= \frac{\partial z}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial z}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \frac{\partial z}{\partial q_3}\dot{q}_3 \quad . \end{aligned} \tag{5}$$

Maintenant, dérivons (5) par rapport à $\dot{q}_1$:

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial x}{\partial q_1}, \frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial y}{\partial q_1}, \frac{\partial \dot{z}}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial z}{\partial q_1} \tag{6}$$

Puis comme les résultats des dérivations ne dépendent pas de l'ordre dans lequel s'effectuent deux dérivations successives on a :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right) = \frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{\partial \dot{x}}{\partial q_1}, \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right) = \frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{\partial \dot{y}}{\partial q_1}, \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right) = \frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{dz}{dt}\right) = \frac{\partial \dot{z}}{\partial q_1} \tag{7}$$

Ayant en vue les relations (6) et (7), on peut récrire l'équation (4) sous la forme :

$$\frac{d}{dt}\left[m\left(\dot{x}\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_1} + \dot{y}\frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{q}_1} + \dot{z}\frac{\partial \dot{z}}{\partial \dot{q}_1}\right)\right] - m\left(\dot{x}\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_1} + \dot{y}\frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{q}_1} + \dot{z}\frac{\partial \dot{z}}{\partial \dot{q}_1}\right) = Q_1 \quad . \tag{8}$$

L'énergie cinétique E_c de la particule s'exprime en fonction des composantes des vitesses $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ de la façon suivante :

$$E_c = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) \cdot$$

On dérive la fonction E_c par rapport à $\dot{q}_1$ et q_1 :

$$\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_1} = m\left(\dot{x}\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_1} + \dot{y}\frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{q}_1} + \dot{z}\frac{\partial \dot{z}}{\partial \dot{q}_1}\right);$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial q_1} = m\left(\dot{x}\frac{\partial \dot{x}}{\partial q_1} + \dot{y}\frac{\partial \dot{y}}{\partial q_1} + \dot{z}\frac{\partial \dot{z}}{\partial q_1}\right) \cdot$$

L'équation (8) prend maintenant la forme :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_1} = Q_1 \cdot \qquad (9)$$

Par hypothèse la force $\vec{F}$ qui agit sur la particule libre est potentielle. En conséquence :

$$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x}, F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y}, F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z}, \text{ où } E_p = E_p(\vec{r}, t)$$

et alors l'expression (3) pour Q_1 peut être écrite ainsi

$$Q_1 = -\left(\frac{\partial E_p}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial q_1} + \frac{\partial E_p}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial q_1} + \frac{\partial E_p}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial q_1}\right) = -\frac{\partial E_p}{\partial q_1} \cdot$$

Maintenant l'équation (9) prend la forme :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_1} = -\frac{\partial E_p}{\partial q_1} \cdot \qquad (10)$$

Introduisons enfin une nouvelle fonction L égale à la différence de l'énergie cinétique et la fonction potentielle (potentiel simple)

$$L(q_1, q_2, q_3; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3; t) = E_c(q_1, q_2, q_3; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3) - E_p(q_1, q_2, q_3; t) \cdot \qquad (10')$$

Cette fonction s'appelle *fonction de Lagrange* ou *potentiel cinétique*. Comme le potentiel simple $E_p(q_1, q_2, q_3; t)$ ne dépend pas des vitesses $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3$, $\frac{\partial E_p}{\partial \dot{q}_1} = 0$ et donc :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial(E_c - E_p)}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial E_p}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_1} \cdot \qquad (11)$$

L'équation (10) prend la forme simple :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_1} = 0 \cdot \qquad (12)$$

C'est justement la première des équation de Lagrange. Les deux autres s'obtiennent d'une manière analogue :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_2} = 0\ ;\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_3}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_3} = 0 \cdot \qquad (13)$$

Commentaires :

a) Si le système physique a f degrés de liberté il y a f équations Lagrange :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_k}=0\ ,\ k=1,2,\ldots,f \tag{14}$$

Dans ce cas la fonction de Lagrange du système s'écrit :

$$L(q_1,q_2,\ldots,q_f;\dot{q}_1,\dot{q}_2,\ldots,\dot{q}_f;t) \tag{15}$$

ou plus brièvement

$$L(q;\dot{q};t)\ . \tag{16}$$

b) Si le *potentiel simple* $E_p(q_1, q_2,\ldots,q_f, t)=E_p(q,t)$ ne dépend pas explicitement de la variable temporelle t :

$$\frac{\partial E_p}{\partial t}=0 \tag{17}$$

la force potentielle $\vec{F}$ qui agit sur le système s'appelle *conservative* tandis que la fonction $E_p(q_1, q_2,\ldots,q_f)=E_p(q)$ s'appelle *l'énergie potentielle* du système physique. La fonction de Lagrange dans le cas conservatif s'écrit :

$$L(q;\dot{q})=E_c(q;\dot{q})-E_p(q)\ . \tag{18}$$

c) <u>Fonction de Lagrange d'un point matériel isolé ($\vec{F}=0$) de masse m</u>

Si la force $\vec{F}$ qui agit sur le point matériel est zéro

$$\vec{F}=-\text{grad}E_p=0\ . \tag{19}$$

C'est-à-dire

$$\text{grad }E_p=\frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial E_p}{\partial z}\vec{k} \tag{20}$$

d'où :

$$\frac{\partial E_p}{\partial x}=0,\frac{\partial E_p}{\partial y}=0,\frac{\partial E_p}{\partial z}=0\ . \tag{21}$$

En conséquence, l'énergie potentielle du point E_p ne dépend pas de x, y, z d'où E_p = constante. Si l'on convient de prendre cette constante égale à zéro, la fonction de Lagrange d'un point isolé qui se meut par rapport à un référentiel inertiel (système de référence galiléen) se réduit à son énergie cinétique :

$$L=E_c=\frac{mv^2}{2}$$

où v représente la vitesse du point par rapport au système galiléen.

d) <u>La fonction de Lagrange étant additive, on a, pour un système de point ne réagissant pas les unes sur les autres</u> :

$$L=\sum_{i=1}^{n}\frac{mv^2}{2}\ . \tag{23}$$

e) <u>Equation de Lagrange d'un système fermé de N point matériels en coordonnées cartésiennes</u>

Un système de points matériels réagissant les uns sur les autres, mais isolés de tout corps étranger, s'appelle *fermé*. Soit $\vec{r}_1,\vec{r}_2,\ldots,\vec{r}_N;\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_N$ les vecteurs de position et les vitesses de ces N points du système. Les forces d'interaction des points sont considérées *conservatives*. La fonction de Lagrange du système s'écrit :

$$L(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\ldots,\vec{r}_N;\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_N)=\sum_{i=1}^{N}\frac{m_iv_i^2}{2}-E_p(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\ldots,\vec{r}_N)\ . \tag{24}$$

Connaissant la fonction de Lagrange, nous pouvons écrire les équations différentielles du mouvement (Lagrange). Tout d'abord, écrivons ces équations pour le point j du système dont les coordonnées cartésiennes sont x_j, y_j, z_j.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j}\right)-\frac{\partial L}{\partial x_j}=0, \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_j}\right)-\frac{\partial L}{\partial y_j}=0, \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}_j}\right)-\frac{\partial L}{\partial z_j}=0 \cdot \tag{25}$$

Multiplions ces équations par les vecteurs unitaires $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ et après cela les ajoutons :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j}\vec{i}+\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_j}\vec{j}+\frac{\partial L}{\partial \dot{z}_j}\vec{k}\right)-\left(\frac{\partial L}{\partial x_j}\vec{i}+\frac{\partial L}{\partial y_j}\vec{j}+\frac{\partial L}{\partial z_j}\vec{k}\right)=0 \cdot \tag{26}$$

Si on introduit les *notations* :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_j}=\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j}\vec{i}+\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_j}\vec{j}+\frac{\partial L}{\partial \dot{z}_j}\vec{k}, \tag{27}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_j}=\frac{\partial L}{\partial x_j}\vec{i}+\frac{\partial L}{\partial y_j}\vec{j}+\frac{\partial L}{\partial z_j}\vec{k}$$

on obtient l'expression finale sous une forme très concise des équations Lagrange dans le cas analysé :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}_j}\right)-\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_j}=0 \cdot \tag{28}$$

Portant (24) dans (28) et tenant compte du fait que

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{v}_j}=\frac{\partial E_c}{\partial \vec{v}_j}=\frac{m_j}{2}\frac{d\vec{v}_j^2}{d\vec{v}_j}=m_j\vec{v}_j, \tag{29}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_j}=-\frac{\partial E_p}{\partial \vec{r}_j}$$

on obtient finalement :

$$m_j\frac{\partial \vec{v}_j}{\partial t}=-\frac{\partial E_p}{\partial \vec{r}_j} \cdot \tag{30}$$

Sous cette forme, les équations du mouvement (Lagrange) sont appelées équations de Newton et constituent la base de la Mécanique d'un système de particules interagissantes.

Le vecteur $\vec{F}_j=-\frac{\partial E_p}{\partial \vec{r}_j}$

est appelé *force* agissant sur le j^{ieme} point.

f) *L'avantage des équations de Lagrange* par rapport à celles de Newton apparaît dans le cas où le mouvement des particules est soumis à des *liaisons*. Dans ce cas, le nombre de paramètres indépendants caractérisant la configuration du système sera non plus 3f mais un nombre inférieur et sera défini par le nombre de degrés de liberté du système $q_1, q_2, \ldots q_f$ où $f = 3N-l$. On aura autant d'équations de Lagrange. Si, par exemple, il s'agit du mouvement d'une particule sur une surface donnée (une seul équation de liaison), alors il suffit de *deux* équations de Lagrange pour définir le mouvement de la particule sur une courbe donnée il est suffisant d'avoir une seule équation de Lagrange.

8. Pendule mathématique (application).

Trouver la fonction de Lagrange d'un pendule simple oscillant dans un plan xOy, ayant une masse m et la longueur r.

Ecriver les équations Lagrange différentielles correspondantes et donner les solutions de ceux-ci (les équations du mouvement du pendule).

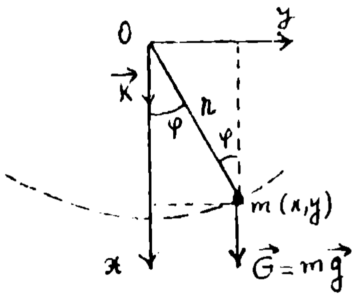


Fig. XIII - 7

Solution: La symétrie du problème suggère que les coordonnés les plus commodes sont dans ce cas les *cordonnées polaires* r et φ liées aux coordonnées cartésiennes par les relations (fig. XIII.7)

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi \tag{1}$$

Le mouvement du pendule est *lié*. Il y a deux liaisons dont les équations sont représentées par les relations $z = 0$ (le pendule se meut dans le plan xOy) et $x^2 + y^2 = r^2$ (le pendule se meut sur en cercle de rayon donné r=const. qui se trouve dans le plan xOy). Donc, la position du pendule peut être défini par un seul paramètre qui correspond à un seul degré de liberté $f = 3N - l = 3 - 2 = 1$ Soit la coordonnée généralisée correspondante $q_1 = \varphi$. La vitesse généralisée sera $\dot{q}_1 = \dot{\varphi}$. Il y a, donc une seule équation Lagrange (f = 1)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \tag{2}$$

Pour établir la fonction de Lagrange correspondant à ce cas rappelons que

$L = E_c - E_p$ où $E_c = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$ est l'énergie cinétique du point m. E_p est l'énergie potentielle du pendule supposé sous l'action de la force conservative de pesanteur $\vec{G}$ du point m :

$$\vec{G} = m\vec{g} = mg\vec{k} = -\text{grad } E_p = -\frac{dE_p}{dx}\vec{k} \tag{3}$$

(La force de pesanteur étant verticale a une seul componsante, au long de l'axe Ox) Il est convenable de passer l'énergie cinétique en coordonnées polaires r et φ. En effet, (1) entraîne :

$$\dot{x} = \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi,\ \dot{y} = \dot{r}\sin\varphi + r\cos\varphi\cdot\dot{\varphi} \tag{3'}$$

Puisque r=constant, $\dot{r}=0$ et donc $\dot{x} = -r\cdot\dot{\varphi}\sin\varphi$, $\dot{y} = r\cdot\dot{\varphi}\cos\varphi$. Portant ces expressions dans E_c on trouve après de simples calculs : $E_c(r,\dot{\varphi}) = \frac{r^2\dot{\varphi}^2 m}{2}$. (4)

C'est justement l'expression de l'énergie cinétique en cordonnées polaires dans le plan (si la coordonnée r n'était pas constante, l'énergie cinétique E_c serait $E_c = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2)$.

L'expression de l'énergie potentielle E_p en coordonnées polaires résulte de l'équation (3). En effet, $mg\vec{k} = -\frac{dE_p}{dx}\vec{k}$ entraîne $mg = -\frac{dE_p}{dx}$, $dE_p = -mgdx$, $E_p(x) = -mgx + C$ où C est une constante arbitraire de l'integration. Si on suppose que pour $x = r$, $E_p(x=r) = 0$, alors on peut determiné la valeur de la constante $C = mgr$ et par conséquent $E_p(x) = mg(r-x)$.

Si on utilise la relation $x = r\cos\varphi$ de (1) on trouve l'expression de l'énergie potentielle du systeme en coordonnées polaires $E_p(r,\varphi) = r(1-\cos\varphi)mg$

En conséquence, la fonction de Lagrange du système en coordonnées polaires planes r, φ s'écrit de la manière suivante

$$L(r,\varphi,\dot\varphi)=E_c-E_p=\frac{mr^2\dot\varphi^2}{2}-mg(1-\cos\varphi)\ . \tag{5}$$

Puisque par hypothèse r=const, la fonction du Lagrange dépend uniquement de φ et $\dot\varphi$ (la coordonnée généralisée est φ et la vitesse généralisée est $\dot\varphi$). On obtient :

$$L(\varphi,\dot\varphi)=E_c(\dot\varphi)-E_p(\varphi)\ . \tag{6}$$

Pour écrire l'équation de Lagrange sous une forme finale calculons tout d'abord les dérivées :

$$\frac{\partial L}{\partial\dot\varphi}=\frac{\partial E_c(\dot\varphi)}{\partial\dot\varphi}=\frac{\partial}{\partial\dot\varphi}\left(\frac{mr^2\dot\varphi^2}{2}\right)=mr^2\dot\varphi\ , \tag{7}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\varphi}=-\frac{\partial E_p(\varphi)}{\partial\varphi}=-\frac{\partial}{\partial\varphi}(mg-mg\cos\varphi)=\frac{\partial}{\partial\varphi}(mg\cos\varphi)=-mg\sin\varphi\ .$$

En conséquence, l'équation de Lagrange (2) s'écrit :

$$\frac{d}{dt}\left(mr^2\dot\varphi\right)+mg\sin\varphi=0\ . \tag{8}$$

Après l'accomplissement de la dérivée par rapport au temps est la division de l'équation par la constante mr^2 on trouve :

$$\ddot\varphi+\frac{g}{r}\sin\varphi=0\ . \tag{9}$$

Si les oscillations du pendule sont présumées petites ($\varphi\le 4^o$), alors il est raisonnable d'écrire l'approximation sinφ ≅φ et par suite :

$$\ddot\varphi+\frac{g}{r}\varphi=0\ . \tag{10}$$

Puisque les constantes, g et r sont positives (g>o, r>o) il est loisible d'introduire la notation $g/r=\omega_o^2>o$.

On obtient, de la sorte, une équation différentielle linéaire d'ordre deux aux coefficients constants et homogène.

$$\ddot\varphi+\omega_0^2\varphi=0\ . \tag{11}$$

qui représente l'équation différentielle du mouvement recherchée. La solution de cette équation φ= φ(t) constitue par définition l'équation du mouvement proprement dite. Une telle solution, on peut vérifier qu'en est ainsi, à la forme bien connue $\varphi=A\sin(\omega_o t+\alpha)$ ou A et α sont des constantes. La vérification se fait tout de suite. En effet, $\dot\varphi=A\,\omega_o\cos(\omega_o t+\alpha)$,

$\ddot\varphi=-A\,\omega_o^2\sin(\omega_o t+\alpha)$ et de ce fait, en substituant $\ddot\varphi$ et φ dans (5), résulte :

$$-A\omega_0^2\sin(\omega_0 t+\alpha)+A\omega_0^2\sin(\omega_0 t+\alpha)=0\ .$$

9. Impulsions et forces généralisées.

Les équations de Lagrange conduisent constamment la résolution du problème à l'intégration des équations différentielles du second ordre. Dans nombre de cas, toutefois, il est commode, au lieu d'utiliser les équations du second ordre, de se servir des équations du premier ordre mais en quantité double. Pour écrire ces équations on doit avant tout introduire une nouvelle notion, celle de *l'impulsion généralisée*.

A chaque coordonnée généralisée q_i on fera correspondre une impulsion généralisée p_i qu'on définira comme une dérivée partielle de la fonction de Lagrange par rapport à la vitesse généralisée correspondante $\dot{q}_i$:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, f. \tag{1}$$

Pour le cas de forces potentielles qui dérivent d'une fonction potentielle $E_p(q_i, t)$,

$$L = E_c(q_i, \dot{q}_i) - E_p(q_i, t) \text{ et } p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_i}. \tag{2}$$

Pour comprendre la signification physique de l'impulsion généralisée il est utile de calculer leurs expressions explicites en diverses coordonnées. Pour un point rapporté aux coordonnées cartésiennes

$$E_c = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right)$$

et, par suite,

$$p_x = \frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, p_y = \frac{\partial E_c}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}, p_z = \frac{\partial E_c}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}. \tag{3}$$

Dans ce cas les impulsions généralisées sont tout simplement les projections de la quantité du mouvement $\vec{p} = m\vec{v} = m\dot{x}\vec{i} + m\dot{y}\vec{j} + m\dot{z}\vec{k}$ sur les axes de coordonnées cartésiennes.

Dans d'autres coordonnées les impulsions généralisées peuvent prendre un autre contenu ainsi qu'une dimension différente.

Cherchons, par exemple, les impulsions correspondant aux coordonnées polaires r et φ. L'énergie cinétique en coordonnées polaires est :

$$E_c = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right).$$

Relativment aux impulsions généralisées correspondantes, elles seront :

$$p_r = \frac{\partial E_c}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad p_\varphi = \frac{\partial E_c}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi}. \tag{4}$$

Comme on le voit, l'impulsion radiale p_r a la dimension de la quantité du mouvement, tandis que l'impulsion angulaire p_φ a la dimension du moment cinétique.

La force généralisée Q_i conjuguée à une cordonnée généralisée q_i est par définition la dérivée partielle de la fonction de Lagrange par rapport à la cordonnée généralisée q_i :

$$Q_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, f. \tag{5}$$

Pour comprendre la signification physique de la force généralisée il est utile de calculer leurs expressions explicites en coordonnées cartésiennes. Pour le cas de forces potentielles :

$L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) - E_p(x, y, z, t)$ on a :

$$\begin{aligned} Q_x &= \frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial E_p}{\partial x} = F_x; \\ Q_y &= \frac{\partial L}{\partial y} = -\frac{\partial E_p}{\partial y} = F_y; \\ Q_z &= \frac{\partial L}{\partial z} = -\frac{\partial E_p}{\partial z} = F_z; \end{aligned} \tag{6}$$

où F_x, F_y, F_z représentent les composantes cartésiennes de la force potentielle :

$$\vec{F} = -\frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{k} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k} . \qquad (6')$$

Profitant des notions d'impulsion généralisée et force généralisée on peut donner aux équations de Lagrange une *nouvelle forme*. Ecrivons ces équations :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \ , \ i = 1,2,\ldots,f$$

et en y remplaçant suivant les définitions (2) et (5) $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ par p_i et $\frac{\partial L}{\partial q_i}$ par Q_i on a :

$$\dot{p}_i \equiv \frac{dp_i}{dt} = Q_i \ , \ i = 1,2,\ldots,f \qquad (7)$$

En y joignant la définition de l'impulsion généralisée :

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ , \ i = 1,2,\ldots,f \qquad (8)$$

on obtient un système de 2f équations de *premier ordre*.
En coordonnées cartésiennes pour un point matériel de coordonnées x, y, z et actionné par une force *potentielle* de composantes F_x, F_y, F_z les équations Lagrange (7) s'écrivent :

$$\dot{p}_x = F_x \ , \ \dot{p}_y = F_y \ , \ \dot{p}_z = F_z \ . \qquad (9)$$

Ce n'est d'autre chausse que la *loi de Newton* sous la forme scalaire qui se peut récrire sous la forme vectorielle, $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \dot{\vec{p}}$.

XIV. Equations canoniques de Hamilton.

Introduction. Les équations (7) et (8) obtenues à la fin de paragraphe précédent répondent au désir de remplacer les équations du second ordre par des équations de *première ordre* Toutefois, elle sont très *dissymétriques*. Dans la pratique on utilise souvent une *autre forme* d'équations du premier ordre, dites *équations canoniques de Hamilton* qui sont remarquablement simples et élégantes.

1. Variables canoniques. L'espace des phases. La fonction de Hamilton.

Dans les discussions précédentes on a considéré en qualité des paramètres d'état indépendants, les coordonnées et les vitesses généralisées, d'un système de points à f degrés de liberté. L'état de ce système à un moment t donné peut être alors déterminé par les valeurs *simultanées* de f coordonnées généralisées $q_1, q_2, \ldots, q_f$ et de f vitesses generalisees $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_f$.

En physique, pour caractériser l'état du système il est également possible d'utiliser ses coordonnées généralisées $q_1, q_2, \ldots, q_f$ et ses impulsions généralisées $p_1, p_2, \ldots, p_f$ et non pas ses vitesses généralisées $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_f$.

Mathématiquement, les divers états du système peuvent être représentés par des points dans un espace dit des *phases* (ce dernier étant une notion purement mathématique). Sur les axes des coordonnées généralisées de cet espace, on porte les valeurs des coordonnées généralisées et des impulsions généralisées du système étudié. Ainsi, chaque système possède son espace des phases propre à 2f dimensions, où f est le nombre de degrés de liberté du système. Cet ensemble de 2f paramètres s'appellent *des variables canoniques*, chaque paire des variables p_i et q_i étant dénommée *canonique conjuguée*.

Tout point de l'espace des phases qui correspond à des valeurs déterminées des coordonnées et des impulsions généralisées du système représente un état déterminé du système.

Lorsque l'état du système varie dans le temps, le point représentatif correspondant de l'espace des phases (nous dirons simplement "point de phases" du système) décrira une certaine ligne, qu'on appelle trajectoire des phases.

Exemple : Un point matériel de masse m se meut au long de l'axe Ox. L'équation du mouvement du point est $x = A \cdot \sin\omega t$ (l'oscillateur harmonique linéaire). Trouver l'équation de la trajectoire du point matériel dans l'espace des phases du point ainsi définit.

Réponse : L'état du point est définit par la connaissance simultanée de la coordonnée x de celui-ci et de son impulsion $p = m\dot{x}$ (à un moment t donné). Les variables canoniques conjuguées sont donc x et p et ceux-ci représente un état déterminé du point. Le nombre de degrés de liberté du point est égal à un (le point est "lié" son mouvement s'effectue au long d'une droite, l'axe Ox) et la coordonnée généralisée correspondante est $q_1 = x$. L'impulsion généralisée du point est $p_1 = m\dot{x}$. Donc, le nombre de dimensions de l'espace des phases du point est égal à *deux*. Soit Oq_1 et Op_1 les deux axes orthogonaux de l'espace des phases. Un point de cet espace de coordonnées (q_1 , p_1) à un moment de temps t donné définit l'état du point à ce moment. On peut donc écrire :

$$q_1 = x = A \cdot \sin\omega t \ , \ p_1 = m\dot{x} = mA\omega \cdot \cos\omega t .$$

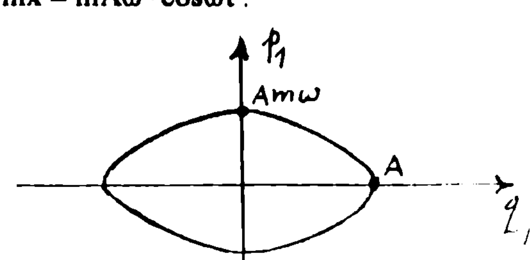


Fig. XIV.1

Pour trouver l'équation de la trajectoire du point dans l'espace des phases on élimine le paramètre t entre ces deux équations (les équations du mouvement du point dans l'espace des phases). En élevant au carre ces deux équations et ensuite en les ajoutant membre à membre on obtiendra l'équation de la trajectoire (voir la figure XIV.1), (l'équation d'une ellipse) :

$$\frac{q_1^2}{A^2}+\frac{p_1^2}{m^2A^2\omega^2}=1 \ .$$

1'. Fonction de Hamilton.

Soit un système physique à f degrés de liberté. Soit les vitesses généralisées et les impulsions généralisées du système : $\dot{q}_1,\dot{q}_2,\ldots,\dot{q}_f$; $p_1,p_2,\ldots,p_f$. La fonction de Lagrange du système dépend des coordonnées généralisées, des vitesses généralisées et en général du temps : $L=L(q_1,q_2,\ldots,q_f;\dot{q}_1,\dot{q}_2,\ldots,\dot{q}_f;t)\equiv L(q;\dot{q};t)$. La fonction de Hamilton est une fonction d'état du système définie par l'expression :

$$H(p_1,p_2,\ldots,p_f;q_1,q_2,\ldots,q_f;t)\equiv H(p;q;t)=\sum_{i=1}^{f}p_i\dot{q}_i-L(q;\dot{q};t) \ .$$

À la différence de la fonction de Lagrange la fonction de Hamilton dépend des impulsions généralisées.

2. Equations canoniques de Hamilton (déduction).

Soit la fonction de Hamilton d'un système à f degrés de liberté :

$$H(p;q;t)=\sum_{i=1}^{f}p_i\dot{q}_i-L(q;\dot{q};t) \ . \tag{1}$$

Prenons la différentielle totale du premier et du second membre de (1) :

$$dH=\sum d\dot{q}_i\ p_i+\sum\dot{q}_i dp_i-\sum\frac{\partial L}{\partial q_i}dq_i-\sum\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}d\dot{q}_i-\frac{\partial L}{\partial t}dt \ .$$

Comme $p_i=\dfrac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}$, la première et la quatrième somme se simplifient de sorte qu'on a :

$$dH(p;q;t)=\sum\dot{q}_i dp_i-\sum\frac{\partial L}{\partial q_i}dq_i-\frac{\partial L}{\partial t}dt \ . \tag{2}$$

D'autre part, la différentielle totale de H qui représente une fonction de q_i, de p_i (mais non de $\dot{q}_i$) et de t, doit avoir la forme :

$$dH(p;q;t)=\sum\frac{\partial H}{\partial p_i}dp_i+\sum\frac{\partial H}{\partial q_i}dq_i+\frac{\partial H}{\partial t}dt \ .$$

Comparant avec (2) et tenant compte du fait que $\dot{p}_i=\dfrac{\partial L}{\partial q_i}$, on a :

$$\text{a) } \dot{q}_i=\frac{\partial H}{\partial p_i},\ \text{b) } \dot{p}_i=-\frac{\partial H}{\partial q_i},\ -\frac{\partial L}{\partial t}=\frac{\partial H}{\partial t},\ i=1,2,\ldots,f \tag{3}$$

Les équations différentielles a) et b) du premier ordre constituent justement les *équations canonique de Hamilton* pour des systèmes à f degrés de liberté. Leur nombre total est égal à 2f, c'est-à-dire deux fois plus grand que le nombre d'équations du second ordre de Lagrange.

3. Pendule mathématique (application).

Trouver la fonction de Hamilton d'un pendule simple oscillant dans le plan xOy, ayant une masse m et la longueur r.
Ecriver les équations de Hamilton et trouver l'équation différentielle du mouvement du pendule.

La fonction de Lagrange du système a l'expression $L(\varphi, \dot{\varphi}) = \frac{mr^2\dot{\varphi}^2}{2} - rmg(1 - \cos\varphi)$ (voir le même problème résolu par la méthode des équations de Lagrange).
Solution : Le système dispose d'un seul degré de liberté (f=1) et par conséquent il y aura 2f=2 équations de Hamilton (i=1) :

$$\dot{q}_1 = \frac{\partial H}{\partial p_1}, \; \dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial q_1} \; , \tag{4}$$

où $q_1 = \varphi$ et $p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}$ et $H = p_1\dot{q}_1 - L = p_1\dot{\varphi} - L$.

Si on remplace l'expression de L dans l'expression de H on obtient l'Hamiltonienne du système :

$$H = p_1\dot{\varphi} - \frac{mr^2\dot{\varphi}}{2} + rmg(1 - \cos\varphi) \; . \tag{5}$$

Pourtant cette expression contient la coordonnée généralisée $\dot{\varphi}$ qui doit être exprimée par l'intermédiaire de l'impulsion généralisée p_1 (la fonction de Hamilton s'exprime toujours par les variables canoniques p_i, q_i). Pour faire ça on utilise la relation $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$. En dérivant la fonction de Lagrange du système par rapport à la variable $\dot{q} \equiv \dot{\varphi}$ on obtient :

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi} \; ,$$

et, par suite, $\dot{\varphi} = \frac{p_1}{mr^2}$. Par sa substitution dans (5) on trouve la fonction H sous *forme canonique* :

$$H(p_1, \varphi) = \frac{p_1^2}{2mr^2} + rmg(1 - \cos\varphi) \; .$$

Maintenant, explicitons les équations de Hamilton :

$$\dot{q}_1 \equiv \dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_1} = \frac{p_1}{mr^2} \quad , \quad \dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = -rmg\sin\varphi \quad , \tag{6}$$

Pour résoudre ce système de deux équations différentielles à deux inconnues φ et p_1, on tire p_1 de la première et l'on remplace dans la deuxième. On obtient ainsi $\dot{p}_1 = mr^2\ddot{\varphi}$ et par conséquent :

$$mr^2\ddot{\varphi} = -rmg \cdot \sin\varphi \; , \tag{6'}$$

ou

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{r}\sin\varphi = 0 \; . \tag{7}$$

La solution de cette équation dans l'approximation $\sin\varphi \approx \varphi$ s'écrit (voir l'application de Lagrange) :

$$\varphi(t) = A\sin(\omega_0 t + \alpha) \; . \tag{8}$$

Par suite,

$$p_1(t) = mr^2\dot{\varphi} = Amr^2\omega_0\cos(\omega_0 t + \alpha) \; . \tag{8'}$$

Les résultats sont les même comme dans le formalisme de Lagrange

4. Principe classique de causalité (Laplace). Equations canoniques de Hamilton.

L'équation différentielle d'ordre deux (7) (L'ordre d'une équation différentielle est donné par la dérivée la plus élevée figurant dans l'équation) a comme solution l'expression $\varphi(t) = A\sin(\varphi_0 t + \alpha)$ qui décrit le mouvement du pendule. Pourtant, cette solution contient deux *constantes arbitraires* A et α qui proviennent de l'intégration de l'équation différentielle d'ordre deux (7) ce qui implique que le mouvement du pendule n'est pas *univoquement* déterminé. L'équation différentielle seule (7) ne suffit donc pas à la détermination univoque du mouvement.) Pour un t donné il y a une double infinité de valeurs pour $\varphi(t)$).
Pour décrire de manière univoque le mouvement, il faut adjoindre à l'équation différentielle (7) des données supplémentaires. Ce sont les valeurs que les coordonnées et les impulsions généralisées $q_i(t)$ et $p_i(t)$ prennent à l'instant t=0. Ces valeurs portent le nom de *conditions initiales*. En effet, dans le cas du problème examiné au-dessus si on prend comme conditions initiales $\varphi(0)=0$ et $p_1(0)= p_0$ pour t=0 on peut déterminé les valeurs des constantes arbitraires A et α à partir de (8) et (8'):

$$\begin{cases} \varphi(0) = 0 = A\sin\alpha \rightarrow \sin\alpha = 0 \rightarrow \alpha = 0 \;, \\ p_1(0) = p_0 = Amr^2\omega_0\cos\alpha \rightarrow A = \dfrac{p_0}{mr^2\omega_0} \;. \end{cases} \tag{9}$$

De la sorte, les équations qui décrivent le mouvement du pendule (8) et (8') deviennent:

$$\begin{cases} \varphi(t) = \dfrac{p_0}{mr^2\omega_0}\sin\omega_0 t \\ p_1(t) = p_0\cos\omega_0 t \end{cases} \tag{10}$$

C'est-à-dire, l'ensemble des valeurs de $\varphi(t)$ et $p_1(t)$ pour t=0 (l'état initial) permet *de prévoir* son état futur (pour tout moment ultérieur t).
Ainsi, les équations canoniques de Hamilton sont par leur forme, l'expression la plus explicite du *principe classique de causalité* (Laplace).

5. Contenu physique de la fonction de Hamilton.

Soit un système *potentiel* (sur lequel agit une force potentielle) à f degrés de liberté. La fonction du système s'écrit :

$$H(q;p;t) = \sum_{i=1}^{f} p_i\dot{q}_i - L(q,\dot{q},t) \tag{1}$$

où

$$L(q;\dot{q};t) = E_c(q,\dot{q}) - E_p(q,t) \;. \tag{2}$$

Comme le potentiel simple $E_p(q,t)$ ne dépend pas de $\dot{q}$ on a $\dfrac{\partial E_p}{\partial \dot{q}_i} = 0$.

$$\text{Donc, } p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial(E_c - E_p)}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial E_p}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_i} \;. \tag{3}$$

On obtient ainsi :

$$\sum_{i=1}^{f} p_i\dot{q}_i = \sum_{i=1}^{f}\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i \;, \tag{4}$$

et, par suite,

$$H(q,p,t) = \sum_{i=1}^{f}\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L(q,\dot{q},t) \;. \tag{5}$$

Maintenant il faut prendre en considération que pour toutes coordonnées généralisées, l'énergie cinétique est une *fonction homogène de vitesses* $\dot{q}_i$ *de dimension 2*. En effet, pour les coordonnées cartésiennes et polaires on peut s'en convaincre directement :

$$E_c(\dot{x},\dot{y}) = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right),\ E_c(\dot{r},\dot{\varphi}) = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) \cdot \tag{6}$$

En général, suivant le théorème d'Euler sur les fonctions homogènes, si f(x,y,z,…,u,v) est une *fonction homogène* en coordonnées x,y,z,…,u,v de dimension n, c'est-à-dire si β est un paramètre quelconque $f(\beta x,\beta y,\beta z,\ldots,\beta u,\beta v)=\beta^n f(x,y,z,\ldots,u,v)$, alors :

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + \ldots + u\frac{\partial f}{\partial u} + v\frac{\partial f}{\partial v} = nf \cdot \tag{7}$$

Par exemple, dans les deux cas (6) on a :

$$\dot{x}\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}} + \dot{y}\frac{\partial E_c}{\partial \dot{y}} = \dot{x}(m\dot{x}) + \dot{y}(m\dot{y}) = m\dot{x}^2 + m\dot{y}^2 = 2E_c(\dot{x},\dot{y})\ ; \tag{8}$$

$$\dot{r}\frac{\partial E_c}{\partial \dot{r}} + \dot{\varphi}\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\varphi}} = \dot{r}(m\dot{r}) + \dot{\varphi}(mr^2\dot{\varphi}) = m\dot{r}^2 + mr^2\dot{\varphi}^2 = 2E_c(\dot{r},\dot{\varphi},r)\ .$$

Appliquant le théorème (7) dans le cas le plus général quand la fonction E_c dépend de f vitesses généralisées $E_c(\dot{q}_1,\dot{q}_2,\ldots,\dot{q}_f,q_1,q_2,\ldots,q_f)$ la somme (4) devient :

$$\sum_{i=1}^{f}\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i = \dot{q}_1\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_1} + \dot{q}_2\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_2} + \ldots + \dot{q}_f\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_f} = 2E_c \tag{9}$$

et (5) donne :

$$H = \sum_{i=1}^{f}\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L = 2E_c - (E_c - E_p) = E_c + E_p\ \cdot \tag{10}$$

Ainsi, pour des *systèmes potentiels* la fonction de Hamilton H est tout simplement la somme de l'énergie cinétique E_c et le potentiel simple $E_p(q,t)$ du système :

$$H(q,p,t) = E_c(q,\dot{q}) + E_p(q,t) \cdot \tag{11}$$

Si le système potentiel est *conservatif*, $H(p,q) = E_c(q,\dot{q}) + E_p(q)$.

6. Quelques exemples de la fonction de Hamilton.

a) Particule dans un champ de potentiel $E_p(x,y,z)$ (cas conservatif).
Puisque l'énergie cinétique de la particule s'écrit :

$$E_c(\dot{x},\dot{y},\dot{z}) = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) \tag{12}$$

on a

$$p_x = \frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}} = m\dot{x},\ p_y = \frac{\partial E_c}{\partial \dot{y}} = m\dot{y},\ p_z = \frac{\partial E_c}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} \tag{13}$$

Donc,

$$E_c(p_x,p_y,p_z) = \frac{m}{2}\left(\frac{p_x^2}{m^2} + \frac{p_y^2}{m^2} + \frac{p_z^2}{m^2}\right) = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} \tag{14}$$

et par suite :

$$H(p_x,p_y,p_z;x,y,z) = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right) + E_p(x,y,z) = \frac{1}{2m}p^2 + E_p(x,y,z) \tag{15}$$

b) Oscillateur linéaire de masse m a un degré de liberté.

$$E_c(\dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2,\ E_p(x) = \frac{1}{2}kx^2\ ,\ k=\text{constante}$$

$$p_x = \frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, E_c(p_x) = \frac{p_x^2}{2m}$$

$$H(p_x, x) = E_c(p_x) + E_p(x) = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{kx^2}{2} \qquad (16)$$

c) Electron dans un champ de Coulomb.

$$E_c(r, \dot{r}, \dot{\varphi}) = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right), E_p(r) = -\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r} \ ;$$

$$p_r = \frac{\partial E_c}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, p_\varphi = \frac{\partial E_c}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi} \ ;$$

$$E_c(p_r, p_\varphi) = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{1}{r^2}p_\varphi^2\right) \ ;$$

$$H(p_r, p_\varphi, r) = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{1}{r^2}p_\varphi^2\right) - \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r} \qquad (17)$$

Tiparul s-a executat sub c-da nr. 428/1998,
la Tipografia Editurii Universității din București

ISBN - 973 - 575 - 231 - x

Lei 8300