C. CIUCU O.A. DOBRESCU

ELEMENTE DE SEISMOLOGIE

Editura Universității din București

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

C. Ciucu, O. A. Dobrescu

ELEMENTE DE SEISMOLOGIE

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

C. CIUCU O. A. DOBRESCU

ELEMENTE DE SEISMOLOGIE

Partea I

Editura Universității din București
– 2001 –

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

BIBLIOTECA CENTRALĂ UNIVERSITARĂ
BUCUREŞTI
COTA III 473480

271/01

Referenţi ştiinţifici: **Conf. dr. E. BARNA**
Lector dr. C. A. STĂNESCU

© Editura Universităţii din Bucureşti
Şos. Panduri 90-92, Bucureşti - 76235; Tel./Fax: 410.23.84
E-mail: editura@unibuc.ro
Internet: www.editura.unibuc.ro

B.C.U. Bucureşti
C20013455

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale
CIUCU, CRISTIAN
Elemente de seismologie / C. Ciucu, O. A. Dobrescu - Bucureşti, Editura Universităţii din Bucureşti, 2001
p. ; cm.
Bibliogr.
ISBN 973-575-505-X
I. Dobrescu, O. A.
550.34

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Cuprins

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Capitolul 1

Introducere

Cutremurele sunt miscari bruste ale scoartei terestre, cu durate scurte (de regula de ordinul secundelor), provocate de eliberarea energiei acumulate intr-o perioada mai lunga de timp. Impactul acestora asupra activitatii umane, efectele lor uneori devastatoare, au dus la dezvoltarea in ultimul secol a unei noi stiinte: seismologia.

Aceasta are ca obiect de studiu generarea, propagarea si inregistrarea undelor seismice precum si sursele care le produc.

Cauzele cutremurelor sunt variate, acestea avindu-si originea, in general, in interiorul Pamantului.

Din totalul miscarilor seismice resimtite anual pe suprafata terestra (evaluate la citeva zeci de mii) cca. 95% o reprezinta cutremurele tectonice.

Celelalte cutremure, mai reduse ca forta si efecte sunt provocate de cause strict locale, cum ar fi prabusirile de diferite origini (din zone carstice, miniere), activitatea vulcanica, exploziile provocate de om, resimtindu-se pe o distanta de citiva kilometri in jurul locului de producere.

Cutremurele tectonice se produc atunci cind tensiunile si energiile acumulate in scoarta ating o valoare limita care depaseste rezistenta rocilor si determina cedarea brusca a acestora prin rupere. Ruperea determina aparitia unor unde elastice numite unde seismice care se propaga in toate directiile in interiorul Pamantului.

Din studiul acestei propagari s-a putut determina structura sa interna aPamantului.

1.1 Structura interna a Pamantului.

Structura interna a Pamantului cuprinde trei invelisuri importante: nucleu, manta si scoarta.

Nucleu central, cu o raza de 3500 km, este inconjurat de manta avind o grosime de 2900 km si scoarta (crusta) a carei grosime variaza de la 8 km sub ocean la 32 km sub continenete (Fig 1.1).

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

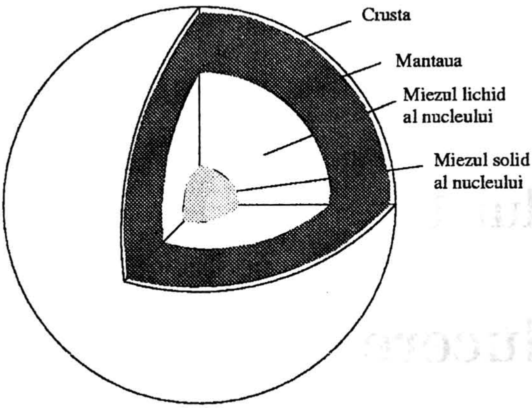


Fig. 1.1

Nucleul are cea mai mare grosime si cuprinde un miez solid cu raza de aproximativ 1300 km, ce poarta numele de nucleu interior, invelit intr-un miez lichid numit nucleul exterior. Faptul ca partea exterioara a nucleului este in stare lichida a fost pus in evidenta de observatia ca undele transversale (undele S) nu se propaga in interiorul acesteia.

Limita de separare nucleu-manta se numeste discontinuitatea GUTENBERG-WEICHERT.

Mantaua care reprezinta 80 % din volumul Pamantului si aproximativ 67 % din masa sa este in cea mai mare parte solida. Exceptie face partea superioara care este formata dintr-o materia viscvoasa cu temperaturi de peste 1000°C numita magna. Limita de separare manta-crusta se numeste discontinuitatea MOHOROVICIC.

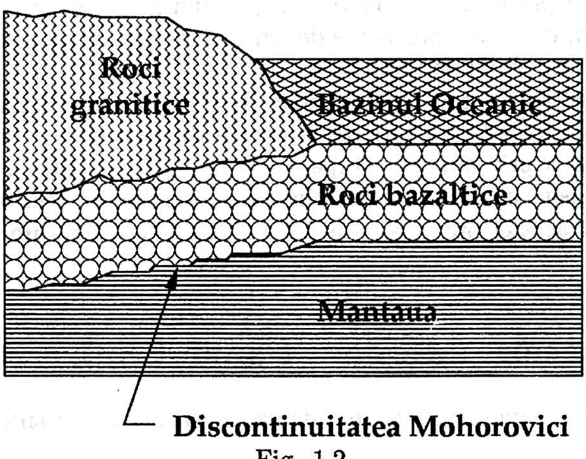


Fig. 1.2

Scoarta are o grosime variabila, fiind mai mica sub oceane si mai mare sub continenete. Ea este formata din trei subinvelisuri: bazaltic cu desfasurare continua

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

si grosime variabila; granitic aflat sub continente si pe marginile bazinelor oceanice; sedimentar prezent atit in alcatuirea continentelor cit si pe fundul bazinelor oceanice.

1.2 Litosfera si Astenosfera

Crusta si partea exterioara a mantalei este formata dintr-un strat rigid de roci avind grosimea cuprinsa intre 50 si 100 km si poarta denumirea de litosfera.

Astenosfera este reprezentata printr-un strat de aproximativ 100 km sub litosfera. Acesta zona este capabila de curgeri plastice, spre deosebire de litosfera rigida si restul mantalei. Aplicarea unor tensiuni de lunga durata cum ar fi greutatea blocurilor continentale sau a unor forte orizontale in cursul derivei continentelor duce la curgerea astenosferei.

In cazul unor tensiuni de scurta durata, cum ar fi cele produse de cutremure, astenosfera se comporta ca un material rigid pentru propagarea undelor ce iau nastere.

Viteza undelor seismice este mai mica in astenosfera decit in litosfera si restul mantalei, ceea ce sugereaza faptul ca acesta are proprietati fizice diferite. Aceasta diferenta este in concordanta cu caracterul plastic al materialului din care este construita astenosfera.

In conditiile de presiune si temperatura din zona astenosferei, materia se gaseste in apropierea punctului de topire. In litosfera temperatura este prea mica, iar in restul mantalei presiunea este prea mare pentru ca materia sa fie plastica.

Cele prezentate mai sus sunt sintetizate in Tabelul 1.1.

<table>
<tr><th colspan="2">Regiunea</th><th>Limitele medii (Km)</th><th>Zone</th></tr>
<tr><td colspan="2">Scoarta (Crusta)</td><td>0-33</td><td rowspan="3">Litosfera</td></tr>
<tr><td colspan="2">Discontinuitatea Mohorovici</td><td>33</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Mantaua</td><td rowspan="2">Mantaua superioara</td><td>33-100</td></tr>
<tr><td>100-400</td><td>Astenosfera</td></tr>
<tr><td>Zona de tranzitie</td><td>400-1000</td><td rowspan="6"></td></tr>
<tr><td>Mantaua inferioara</td><td>1000-2900</td></tr>
<tr><td colspan="2">Discontinuitatea Gutenberg</td><td>2900</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Nucleul</td><td>Nucleul exterior</td><td>2900-4980</td></tr>
<tr><td>Zona de tranzitie</td><td>4980-5120</td></tr>
<tr><td>Nucleul interior</td><td>5120-6370</td></tr>
</table>

Tabelul 1.1

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

1.3 Placile tectonice

Litosfera nu este continua, ci este intrerupta din loc in loc de mari crapaturi (fracturi) . Aceste fracturi separa blocuri mai mari sau mai mici din litosfera numite placi tectonice. Exista 7 placi tectonice majore care reprezinta suportul continentelor si oceanelor. In afara acestora exista si placi de dimensiuni mici si medii. Placile cuprind atit suprafete continentale cit si oceanice. In unele situatii predomina intinderile continentale (placa Euroasiatica) sau intinderile oceanice (placa Pacifica).

In figura 1.4 sunt reprezentate placile tectonice si denumirea lor.

In astenosfera se formeaza curentii de convectie care determina deplasarea lenta a placilor tectonice de deasupra.

Zonele de pe margine ale placilor sunt caracterizate printr-un grad mare de seismicitate. In principiu exista trei tipuri de margini:

- convergenta
- divergenta
- de transformare.

In cazul unei margini divergente cele doua placi se indeparteaza una de cealalta. Indepartarea aceasta este datorata curentilor ascendenti din astenosfera. Acestia creeaza o despicatura in litosfera formind un rift.

"Craparea" oceanului si indepartarea laterala a placilor tectonice fata de rift are ca efect cresterea in suprafata a bazinelor oceanice ("expansiunea" fundului oceanic).

In lungul unui rift se realizeaza o crestere in grosime a litosferei (datorata aparitiei de materie din astenosfera care ajungind la suprafata se consolideaza) formindu-se cu timpul sisteme submarine asemanatoare muntilor: dorsalele oceanice. Deoarece acestea se gasesc de obicei in partea mijlocie (mediana) a oceanelor se numesc si "dorsale medio-oceanice". Cea mai cunoscuta se afla in mijlocul oceanului Atlantic si are forma literei "S".

Cu timplu unele rifturi se inghid in sensul ca aportul de materie din interior inceteaza (aceste rifturi se numesc rise spre deosebire de cele active numite ridge).

Dorsalele (si riftul) sunt intersectate de falii dispuse transversal (perpendicular). Acestea se numesc falii transformante. Intre doua astfel de falii succesive intreaga dorsala este deplasata fata de axul ei initial.

In cazul unei margini convergente doua (sau mai multe placi) se ciocnesc. Apropierea si ciocnirea placilor este datorata curentilor descendenti din astenosfera. Daca cele doua placi sunt oceanice sau una este oceanica si cealalta continentala se formeaza o zona de subductie cand una din placi aluneca sub cealalta. Astfel placa mai subtire si mai coborita altitudinal este acoperita de placa mai groasa continentala si coboara incet sub aceasta, fenomen numit subductie. Materialul placii subduse se afunda un astenosfera si este consumat. La suprafata

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

scoartei, subductia conduce la aparitia unui bazin ingust de sedimentare numit fosa.

Daca cele doua placi sunt de tip continental nu mai are loc fenomenul de subductie, la margine avind loc un fenomen de ridicare creeindu-se lanturi muntoase. Este cazul coliziunii dintre placa indiana si continentul asiatic in urma careia s-a format sistemul muntos himalayan.

In cazul unei margini de transformare cele doua placi aluneca una in raport cu cealalta. Un exemplu in reprezinta falia San Andreas, California.

Placa euroasiatica este compusa din mai multe fragmente numite microplaci sau (subplaci). Pe teritoriul tarii noastre exista mai multe astfel de microplaci: in nord placa est europeana, in sud subplaca Moesica, iar in centru si vest, cuprinzind arcul carpatic, subplaca intra-alpina.

Daca se reprezinta epicentrele cutremurelor pe harta lumii se constata ca acestea nu sunt distribuite uniform ci sunt continute in benzi inguste. Aceste benzi coincid cu marginile placilor tectonice.

1.4 Tipuri de falie

Majoritatea cutremurelor se datoresc deplasarilor bruste ale placilor tectonice in lungul unei falii, ducind la eliberarea tensiunilor acumulate.

In cazul in care rocile sunt supuse la tensiuni ce depasesc o anumita limita pot aparea fracturi.Miscarea in lungul planului fracturii are ca rezultat o falie in roca.

O falie reprezinta o fractura in masa de roca in lungul careia are loc o miscare paralela cu fractura.

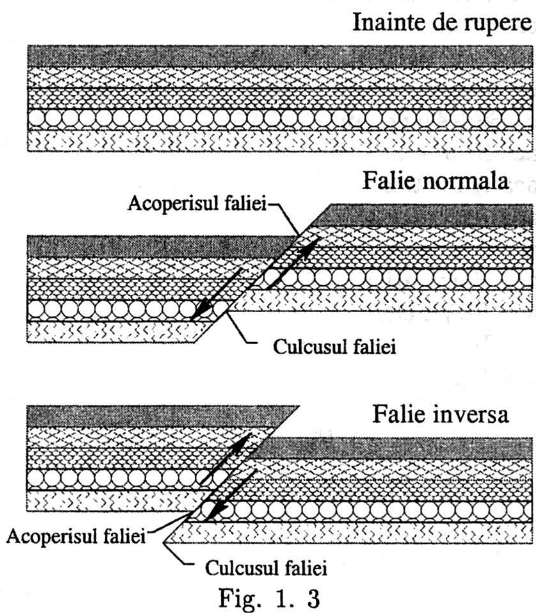
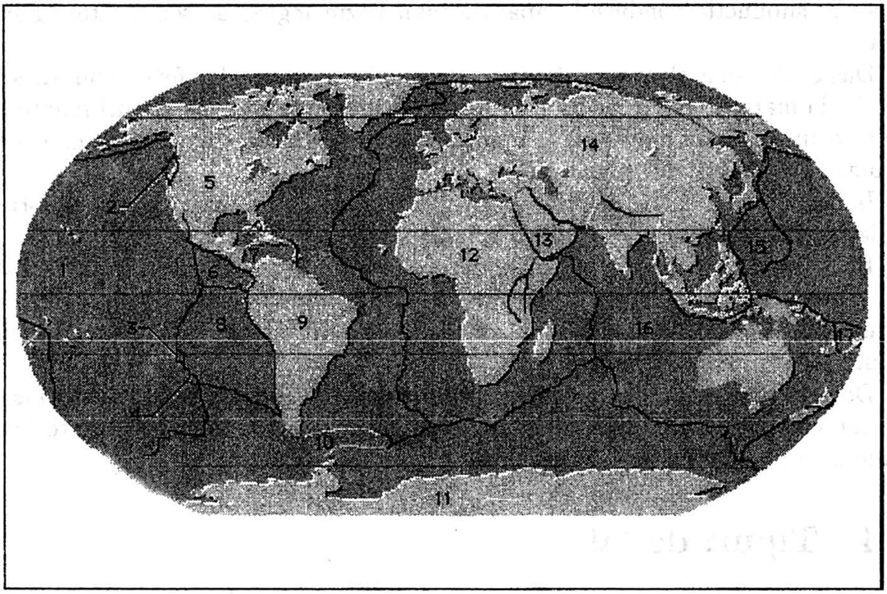


Fig. 1. 3

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro



1. Placa Pacifica
2. Placa Juan de Fuca
3. Microplaca Easter
4. Microplaca Juan Fernandez
5. Placa Nord-Americana
6. Placa Cocos
7. Placa Caraibbelor
8. Placa Nazca
9. Placa Sud-Americana
10. Placa Scotiana
11. Placa Antartica
12. Placa Africana
13. Placa Araba
14. Placa Eurasiatica
15. Placa Filipinelor
16. Placa Indo-Australiana
17. Placa Fiji

Fig. 1.4

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Motivul pentru care majoritatea cutremurelor au loc la marginea placilor tectonice este faptul ca aceste falii apar in general in lungul acestor margini.

Falia este caracterizata prin azimutul faliei, unghiul de inclinare sau trei vectori unitari ($\vec{n}$, $\vec{b}$, $\vec{v}$). Elementele de geometrie a faliei sunt prezentate in Anexa D.

Exista trei tipuri de falii: normala, inversa si cu alunecare oblica. In cazul faliei normale si inverse are loc o miscare a masei de roca in lungul unui plan inclinat. Falia cu alunecare laterala este caracterizata printr-o miscare orizontala.

In cazul faliei cu alunecare normala una din partile masei de roca coboara planul inclinat al faliei in raport cu cealalta parte. In cazul faliei cu alunecare inversa una din parti se misca in sus pe planul inclinat al faliei in raport cu cealalta parte.

Atit falia cu alunecare normala cit si falia cu alunecare inversa duc la aparitia unei diferente de nivel in plan vertical, falia mai purtind numele de falie cu saritura pe inclinare.

Portiunea inclinata pe care se poate urca se numeste culcusul faliei (foot wall). Partea aflata deasupra in timp ce urcam culcusul faliei se numeste acoperisul faliei (hanging wall).

In cazul falei cu alunecare laterala una din masele de roca se misca relativ la cealalta in plan orizontal. In geologie se definesc doua tipuri de falii laterale: lateral dreapta respectiv stinga.

O falie este lateral dreapta (respectiv stinga) daca partea opusa observatorului care priveste la falie, indiferent ce perete vede, se deplaseaza spre dreapta (respectiv stinga).

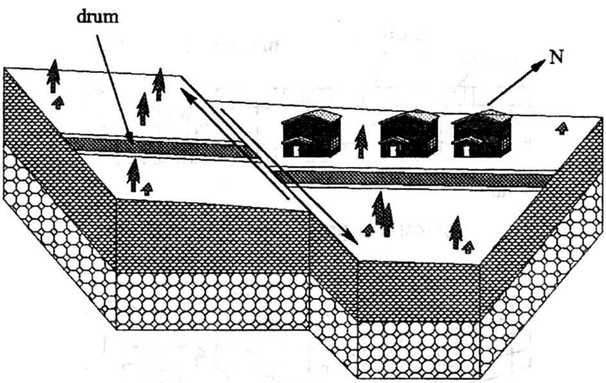


Fig. 1.5

In general putem avea o falie cu alunecare oblica caz in care miscarea se face atit in plan orizontal cat si in plan vertical.

Faliile normale se formeaza in lungul marginilor divergente ale placilor tectonice in timp ce faliile cu alunecare inversa se intilnesc in lungul placilor tectonice convergente .

Cutremurele iau nastere atunci cind un bloc de roca sufera o rupere brusca in lungul unui plan de falie.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Datorita fortelor de frecare mari, la contactul a doua placi tectonice sau doua blocuri de roca se produce un fenomen de alipire a acestora. Miscarea se produce atunci cind tensiunile elastice acumulate depasesc tensiunile datorate fortelor de frecare statice. In acest moment are loc o rupere a rocilor luind nastere un cutremur. In timpul cutremurului ca si dupa aceea miscarea continua pina la o noua alipire.

Locul din profunzimea scoartei unde se produce ruptura care determina cutremurul se numeste focar.

Epicentrul este punctul de pe suprafata Pamintului cel mai aproape de focar, adica proiectia pe suprafata Pamantului a focarului.

1.5 Unde seismice

In urma unui cutremur i-au nastere la trei tipuri de unde:

1. Undele primare (sau P) care sunt unde de tip longitudinal. In acest caz oscilatia particulelor are loc pe directia propagarii undei.

2. Undele secundare (sau S) care sunt unde de tip transversal. In acest caz particulele oscileaza perpendicular pe directia de propagare a undei.

3.Undele de suprafata sunt de doua tipuri : Unde Love si unde Rayleigh. In timp ce undele P si S pot fi considerate ca unde libere, in sensul ca ele se pot propaga practic in orice directie in interiorul Pamantului, undele de suprafata se propaga numai la suprafata libera a Pamintului.

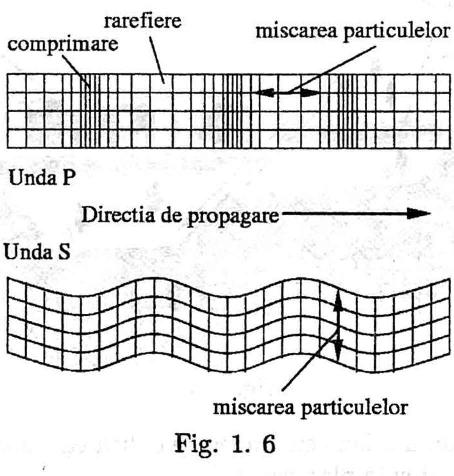
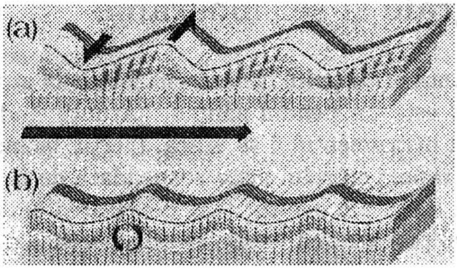


Fig. 1. 6

In cazul undelor Love, miscarea particuleleor este transversal orizontala.

In cazul undelor Rayleigh, particulele sufera o miscare ce este combinatia unei miscari longitudinale (de-a lungul directiei de propagare) si una transversala (in sus si in jos). Miscarea rezultanta are loc pe o elipsa, dimensiunile acesteia descrescind exponential cu adincimea.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro



(a) -unde Love; (b) -unde Rayleigh
Fig. 1.7

Cele trei tipuri de unda au viteze diferite si sosesc la un observator la momente de timp diferite. Undele P sosesc primele, apoi undele S, urmate de undele Love si Rayleigh.

In timp ce viteza undelor Love si Rayleigh ramine constanta, viteza undelor P si S creste cu adincimea si ca urmare a refractiei acestea descriu o traiectorie curba in interiorul Pamantului.

Reflexia si refractia are loc la suprafata de separare intre regiuni cu proprietati diferite. La suprafata Pamintului, unde se intilnesc roci de tip granit, viteza undelor P este de ordinul a 5,5 Km/s, iar a undelor S de aproximariv 3 km/s. In interiorul Pamintului pa masura ce rocile devin tot mai comprimate, viteza undelor P creste la 11 km/s iar aundelor S la 7 km/s.

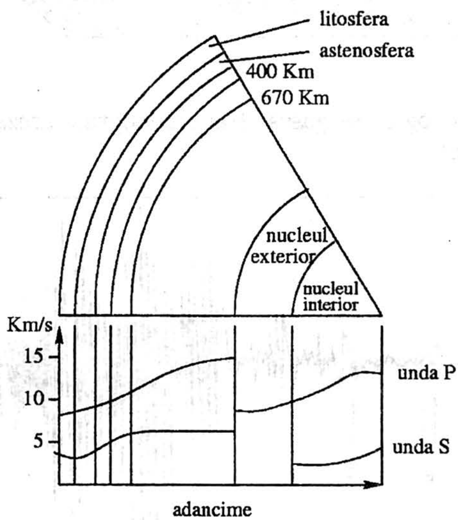


Fig. 1.8

Undele seismice ne ajuta sa dealizam o radiografie a Pamintului si studiind propagarea lor s-a putut determina structura sa interna.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

1.6 Seismografe si seismograme

Seismografule reprezinta principalul instrument folosit in studiul cutremurelor. In esenta un seisomgraf este un pendul simplu. Atunci cind are loc o miscare a solului baza si cadrul instrumentului se misca, inertia facind ca masa pendulului sa ramina pe loc. In raport cu solul masa suspendata de fir pare ca se misca. De masa pendulului este atasata o penita. Prin deplasarea uniforma a unei hirti sub pendulul gravitational prevazut cu penita se inregistreaza o seismograma.

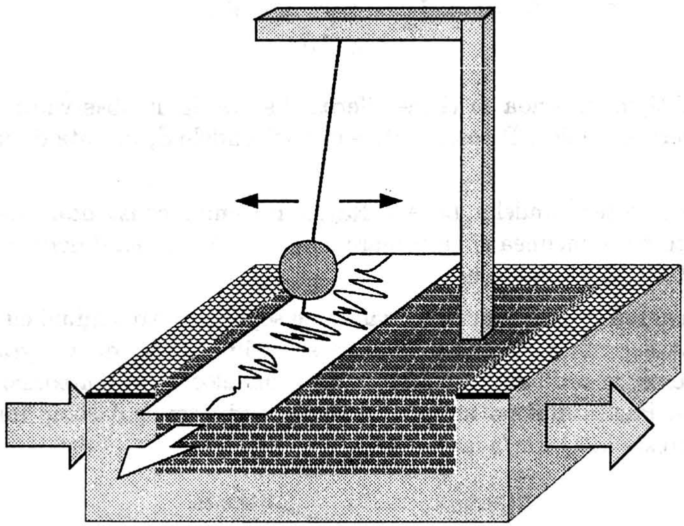


Fig. 1.9

Intr-o statie seismologica se gasesc trei seismografe asezate pe directia nord-sud, est vest si vertical.

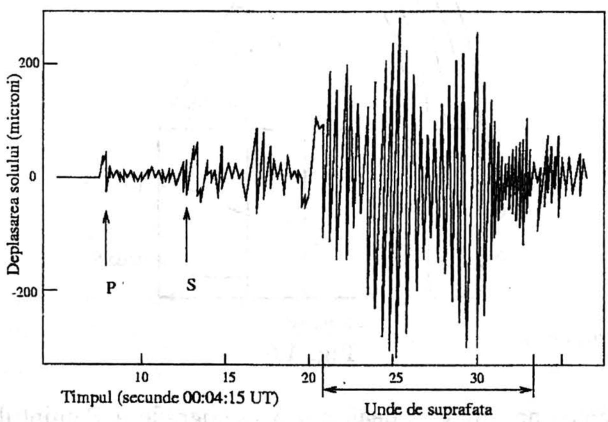


Fig. 1.10

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Seismologii folosesc retele de statii pentru a localiza un cutremur si pentru o mai buna estimare a parametrior.

In Romania exista o retea de statii seismice a caror coordonate si indicative sunt prezentate in anexa A.

Cu ajutorul seismogramelor se pot determina urmatorii parametrii:

- latitudinea si longitudinea epicentrului;
- adincimea sursei sau adincimea focala;
- momentul producerii evenimentului;
- marimea evenimentului: magnitudinea sau energia undelor seismice.

Pentru determinarea primilor trei parametrii sunt necesare numai masuratori de timpi de sosire ai undelor la diferite statii seismice. Al patrulea parametru necesita masuratori de amplitudine si de perioada (Fig. 1.10).

O prima estimare a localizarii unui cutremur se face utilizind timpii de sosire ai undelor P si S la cateva statii seismice.

Undele P se identifica usor pe o seismograma avind in vedere faptul ca este in general prima unda care soseste la statie. Problema care se pune este daca inceputul inregistrarii corespunde unei unde P sau unui zgomot. Prin zgomot intelegem miscari care nu se datoresc unui cutremur: lucrul la constructia unor cladiri, trafic greu etc.

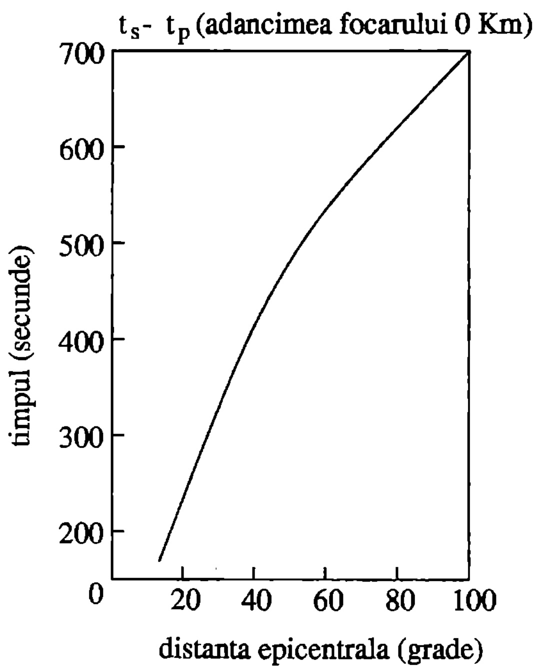


Fig. 1.11

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Momentul sosirii undelor S la diferite statii seismice este mai greu de determinat. Se are in vedere pe de o parte ca amplitudinea undelor S este mai mare ca a undelor P iar pe de alta parte undele S au o perioada mai mare (frecventa mai mica) ca a undelor P.

Cunoscind diferenta de timp $t_s - t_p$ aceasta poate fi comparata cu curbele standard de timp de parcurs (Fig. 1.11) si determina in felul acesta distanta epicentrala (vezi Anexa B) de la statia seismica la epicentru.

Pentru a determina pozitia epicentrului se are in vedere ca oricare ar fi cutremurul, pentru aceeasi distanta epicentrala duratele de propagare pentru undele P si S raman aproximativ aceleasi.

Daca cunoastem date de la trei statii seismice putem determina pozitia epicentrului ca fiind la intersectia cercurilor cu centrul in statiile seismice respective si avind raza egala cu distanta epicentrala corespunzatoare.

Momentul producerii cutremurului se determina facind diferenta intre timpul absolut de sosire al undei P de pe seismograma si timpul de parcurs al undei P aflat de pe curbele standard de timpi de parcurs.

Din analiza unei seismograme se poate determina si orientarea planului de falie si a directiei de alunecare (solutia planului de falie). Pentru aceasta se foloseste semnul primelor deplasari ale undei P.

Odata determinata pozitia spatio-temporala a unui cutremur se pune prob;lema cit de "mare" este acesta.

In acest sens fiecarui eveniment seismic i se atribuie o magnitudine. Exista mai multe scari de magnitudine insa cea mai cunoscuta este scara Richter. Aceasta se bazeaza pe masuratori de amplitudine ale oscilatiilor efectuate cu un instrument standard si la distante fata de sursa bine precizate.

Datorita faptului ca scala de magnitudine este logaritmica o modificare cu o unitate pe scala Richter reprezinta o modificare a amplitudinii de oscilatie cu un factor de 10 si o modificare a energiei eliberate cu un factor de aproximativ 30. Astfel un cutremur avand magnitudinea 5 produce oscilatii cu amplitudinea de 10 ori mai mare si o energie de 30 de ori mai mare ca unul de magnitudine 4.

O alta "masura" a marimii unui cutremur este intensitatea acesteia. Intensitatea se bazeaza pe observatii legate de distrugerile provocate de cutremur. Un exemplu de scara de intensitate este scara Mercalli. Intensitatea este o masura a impactului unui cutremur asupra unei zone.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Capitolul 2

Tensorul deformatie

2.1 Introducere

Cu toate ca solidele sunt deformabile, in fizica se utilizeaza notiunea de solid rigid. Miscarea unui solid rigid sub actiunea unor forte exterene date consta in translatie si rotatie. In cazul solidului rigid distanta dintre doua puncte oarecare nu se modifica in timp.

In cele ce urmeaza vom considera cazul in care diferitele puncte ale solidului se pot deplasa unele in raport cu altele. In acest caz un punct de coordonate x_1, x_2, x_3 se poate deplasa intr-o noua pozitie x'_1, x'_2, x'_3, astfel incat x'_1, x'_2, x'_3 sunt functii continuie de x_1, x_2, x_3:

$$x'_i = x'_i(x_1, x_2, x_3) \tag{2.1}$$

Exista, deasemenea, transformarea inversa

$$x_i = x_i(x'_1, x'_2, x'_3) \tag{2.2}$$

Transformarea (2.1) cuprinde atat miscarea de translatie si rotatie a solidului ca intreg, cat si o parte ce corespunde unei deformari pure.

2.2 Deformari omogene

Vom considera in continuare cazul in care transformarea (2.1) este data de functii liniare in x_1, x_2, x_3:

$$\begin{aligned} x'_1 &= (1 + a_{11})x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ x'_2 &= a_{21}x_1 + (1 + a_{22})x_2 + a_{23}x_3 \\ x'_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + (1 + a_{33})x_3 \end{aligned} \tag{2.3}$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

sau

$$x'_i = x_i + a_{ij}x_j \tag{2.4}$$

In relatiile (2.3) nu a fost introdus un termen constant deoarece transformarea $x'_1 = a_1$, $x'_2 = a_2$, $x'_3 = a_3$ reprezinta o translatie a solidului rigid.

Sa introducem vectorul deplasare $\vec{u}$ ale carui componenete (u_1, u_2, u_3) sunt definite de relatiile:

$$\begin{aligned} u_1 &= x'_1 - x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ u_2 &= x'_2 - x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ u_3 &= x'_3 - x_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{aligned} \tag{2.5}$$

In cele ce urmeaza vom considera mici deformatii, caz in care produsele si patratele deplasarilor pot fi neglijate. Sa presupunem atunci ca solidul este supus la doua astfel de deformari; prima deformare este reprezentata de relatia (2.3) iar a doua de relatiile:

$$\begin{aligned} x''_1 &= (1+\alpha_{11})x'_1 + \alpha_{12}x'_2 + \alpha_{13}x'_3 \\ x''_2 &= \alpha_{21}x'_1 + (1+\alpha_{22})x'_2 + \alpha_{23}x'_3 \\ x''_3 &= \alpha_{31}x'_1 + \alpha_{32}x'_2 + (1+\alpha_{33})x'_3 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Introducand (2.3) in (2.6) si neglijand termenii de ordinul doi rezulta

$$\begin{aligned} x''_1 &= (1+\alpha_{11}+a_{11})x_1 + (\alpha_{12}+a_{12})x_2 + (\alpha_{13}+a_{13})x_3 \\ x''_2 &= (\alpha_{21}+a_{12})x_1 + (1+\alpha_{22}+a_{22})x_2 + (\alpha_{23}+a_{23})x_3 \\ x''_3 &= (\alpha_{31}+a_{31})x_1 + (\alpha_{32}+a_{32})x_2 + (1+\alpha_{33}+a_{33})x_3 \end{aligned} \tag{2.7}$$

astfel incat deformarea rezultata se obtine prin superpozitia transformarilor initiale. Se observa totodata ca ordinea in care se efectueaza cele doua transformari nu conteaza.

In conformitate cu ecuatia (2.3) o relatie liniara intre x_1, x_2, x_3 devine o relatie liniara intre x'_1, x'_2, x'_3. Prin urmare, intr-o transformare omogena un plan ramane un plan; o linie dreapta fiind intersectia a doua plane ramane o linie dreapta. Paralelogramele raman paralelograme (unghiurile se modifica). Modificarea in lungime suferita de drepte paralele si egale este aceiasi, iar in cazul dreptelor paralele si inegale este proportionala cu lungimea lor. Deci portiuni similare ca forma si dimensiune ale unui solid vor suferi aceleasi modificari in forma si volum. Acestea sunt de altfel caracteristicile unei transformari omogene.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

2.3 Rotatia

Sa consideram punctele $P_0(x_{01}, x_{02}, x_{03})$ si $P(x_1, x_2, x_3)$. In urma deformarii acestea devin $P_0'(x_{01}', x_{02}', x_{03}')$ respectiv $P'(x_1', x_2', x_3')$. Sa introducem vectorii

$$\begin{aligned}
\vec{A} &= \overrightarrow{P_0P}; \quad \vec{A}(A_1,A_2,A_3) = (x_1 - x_{01}, x_2 - x_{02}, x_3 - x_{03}) \\
\vec{A}' &= \overrightarrow{P_0'P'}; \quad \vec{A}'(A_1',A_2',A_3') = (x_1' - x_{01}', x_2' - x_{02}', x_3' - x_{03}')
\end{aligned} \tag{2.8}$$

In general vectorii $\vec{A}$ si $\vec{A}'$ difera atat ca directie cat si ca marime. Dar

$$\begin{aligned}
A_i' &= x_i' - x_{0i}' = (x_i + a_{ij}x_j) - (x_{0i} + a_{ij}x_{0j}) = \\
&= (x_i - x_{0i}) + a_{ij}(x_j - x_{0j}) = A_i + a_{ij}A_{j=} \\
&= A_i + \delta A_i
\end{aligned} \tag{2.9}$$

unde am nota

$$\delta A_i = A_i' - A_i = a_{ij}A_j \tag{2.10}$$

Punand conditia ca marimea vectorilor sa nu se modifice se obtine

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0$$

respectiv

$$a_{12} + a_{21} = 0, \quad a_{13} + a_{31} = 0, \quad a_{23} + a_{32} = 0 \tag{2.11}$$

Rezulta deci ca pentru ca transformarea infinitezimala (2.3) sa reprezinte o rotatie a solidului rigid trebuie ca

$$a_{ij} = -a_{ji} \tag{2.12}$$

In acest caz transformarea (2.10) capata forma:

$$\begin{aligned}
\delta A_1 &= a_{12}A_2 + a_{13}A_3 = -a_{21}A_2 + a_{13}A_3 \\
\delta A_2 &= a_{21}A_1 + a_{23}A_3 = a_{21}A_1 - a_{32}A_3 \\
\delta A_3 &= a_{31}A_1 + a_{32}A_2 = a_{31}A_1 + a_{32}A_2
\end{aligned} \tag{2.13}$$

relatie ce poate fi scrisa ca produsul vectorial intre vectorul rotatie infinitezimala $\delta\vec{\varphi}(\delta\varphi_1, \delta\varphi_2, \delta\varphi_3)$ si vectorul $\vec{A}$:

$$\delta\vec{A} = \delta\vec{\varphi} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \delta\varphi_1 & \delta\varphi_2 & \delta\varphi_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} \tag{2.14}$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

unde

$$\delta\varphi_1 = a_{32} = -a_{23} = \tfrac{1}{2}(a_{32} - a_{23})$$

$$\delta\varphi_2 = a_{13} = -a_{31} = \tfrac{1}{2}(a_{13} - a_{31}) \tag{2.15}$$

$$\delta\varphi_3 = a_{21} = -a_{12} = \tfrac{1}{2}(a_{21} - a_{12})$$

Avand in vedere proprietatea (2.7) putem separa deplasarea $\vec{u}$ in doua componente adunand si scazand termenii egali

$$\begin{aligned}
u_1 &= a_{11}x_1 + \tfrac{1}{2}(a_{12}+a_{21})x_2 + \tfrac{1}{2}(a_{13}+a_{31})x_3 + \tfrac{1}{2}(a_{12}-a_{21})x_2 + \tfrac{1}{2}(a_{13}-a_{31})x_3\\
u_2 &= \tfrac{1}{2}(a_{21}+a_{12})x_1 + a_{22}x_2 + \tfrac{1}{2}(a_{23}+a_{32})x_3 + \tfrac{1}{2}(a_{21}-a_{12})x_1 + \tfrac{1}{2}(a_{23}-a_{32})x_3\\
u_3 &= \tfrac{1}{2}(a_{31}+a_{13})x_1 + \tfrac{1}{2}(a_{32}+a_{23})x_2 + a_{33}x_3 + \tfrac{1}{2}(a_{31}-a_{13})x_1 + \tfrac{1}{2}(a_{32}-a_{23})x_2
\end{aligned} \tag{2.16}$$

unde

$$\begin{aligned}
u_1^{(1)} &= \tfrac{1}{2}(a_{12}-a_{21})x_2 + \tfrac{1}{2}(a_{13}-a_{31})x_3\\
u_1^{(2)} &= \tfrac{1}{2}(a_{21}-a_{12})x_1 + \tfrac{1}{2}(a_{23}-a_{32})x_3\\
u_1^{(3)} &= \tfrac{1}{2}(a_{31}-a_{13})x_1 + \tfrac{1}{2}(a_{32}-a_{23})x_2
\end{aligned} \tag{2.17}$$

reprezinta o rotatie a solidului rigid, iar

$$\begin{aligned}
u_1^{(2)} &= a_{11}x_1 + \tfrac{1}{2}(a_{12}+a_{21})x_2 + \tfrac{1}{2}(a_{13}+a_{31})x_3\\
u_2^{(2)} &= \tfrac{1}{2}(a_{21}+a_{12})x_1 + a_{22}x_2 + \tfrac{1}{2}(a_{23}+a_{32})x_3\\
u_3^{(2)} &= \tfrac{1}{2}(a_{31}+a_{13})x_1 + \tfrac{1}{2}(a_{32}+a_{23})x_2 + a_{33}x_3
\end{aligned} \tag{2.18}$$

reprezinta o deformare (pura) a solidului rigid.

2.4 Tensorul deformatie

Introducand

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji}) \tag{2.19}$$

relatia (2.18) se scrie

$$u_1 = e_{11}x_1 + e_{12}x_2 + e_{13}x_3$$

$$u_2 = e_{21}x_1 + e_{22}x_2 + e_{23}x_3 \tag{2.20}$$

$$u_3 = e_{31}x_1 + e_{32}x_2 + e_{33}x_3$$

unde coeficientii e_{ij} formeaza componentele tensorului deformatie. Pentru a determina semnificatia coeficientilor e_{ij} sa consideram, de exemplu, un vector $\vec{A}$ paralel cu axa O_{x_1} $\vec{A}(A_1,0,0)$; atunci

$$\delta A_1 = e_{11}A_1, \quad \delta A_2 = e_{21}A_1, \quad \delta A_3 = e_{31}A_1 \tag{2.21}$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

astfel incat

$$A'_1 = A_1 + e_{11}A_1 \quad , \quad A'_2 = e_{21}A_1 = \delta A_2, \quad A'_3 = e_{31}A_1 = \delta A_3$$
$$= A_1 + \delta A_1 \tag{2.22}$$

si are dupa deformare marimea

$$|A'|^2 = A_1'^2 + A_2'^2 + A_3'^2 \simeq A_1^2 + 2e_{11}A_1^2 = A_1^2(1 + 2e_{11}) \tag{2.23}$$

sau

$$|A'| \simeq |A|(1 + e_{11}) \tag{2.24}$$

astfel incat

$$\frac{A' - A}{A} = \frac{\delta A}{A} = e_{11} \tag{2.25}$$

Rezulta deci ca e_{11} reprezinta alungirea relativa a unui vector paralel cu axa O_{x_1}.

Daca e_{11} este pozitiv vom avea de-a face cu o alungire iar daca e_{11} este negativ vom avea o contractie.

Pentru a interpreta din punct de vedere geometric componenta e_{23} sa consideram vectorii $\vec{A} = A_2\vec{e}_2$, respectiv $\vec{B} = B_3\vec{e}_3$. Dupa deformare acestia devin:

$$\begin{aligned}
\vec{A}' &= e_{12}A_2\vec{e}_1 + (A_2 + e_{22}A_2)\vec{e}_2 + e_{32}A_2\vec{e}_3 = \\
&= \delta A_1\vec{e}_1 + (A_2 + \delta A_2)\vec{e}_2 + \delta A_3\vec{e}_3 \\
\vec{B}' &= e_{13}B_3\vec{e}_1 + e_{23}B_3\vec{e}_2 + (B_3 + e_{33}B_3)\vec{e}_3 = \\
&= \delta B_1\vec{e}_1 + \delta B_2\vec{e}_2 + (B_3 + \delta B_3)\vec{e}_3
\end{aligned} \tag{2.26}$$

unde $\delta B_2 = e_{23}B_3$ respectiv $\delta A_3 = e_{32}A_2$ (Fig. 2.1)

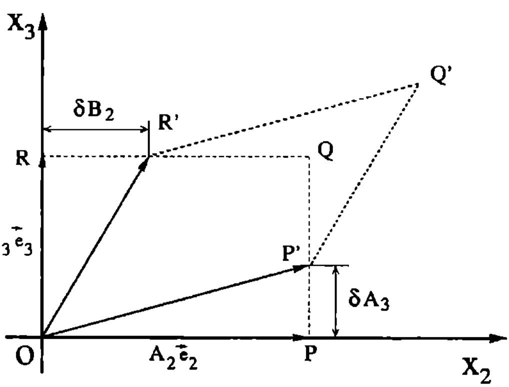


Fig. 2.1

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

In urma deformarii unghiul dintre cei doi vectori devine

$$\cos\theta = \frac{\vec{A}' \cdot \vec{B}'}{A \cdot B} \simeq \frac{e_{23}A_2B_3 + e_{32}A_2B_3}{A_2B_3} = \frac{A_2\delta B_2 + B_3\delta A_3}{A_2B_3} = \tag{2.27}$$

$$= \frac{\delta B_2}{B_3} + \frac{\delta A_3}{A_2} = 2e_{23}$$

Introducand $\alpha_{23} = \frac{\pi}{2} - \theta$, se observa ca

$$\cos\theta = \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha_{23}) = \sin\alpha_{23} \simeq \alpha_{23} \tag{2.28}$$

si deci

$$\alpha_{23} = 2e_{23} \tag{2.29}$$

Se observa din figura (2.1) ca unghiurile $\widehat{POP'}$ si $\widehat{ROR'}$ sunt egale

$$\begin{aligned} \widehat{POP'} &= \tan\widehat{POP'} = \tfrac{\delta A_3}{A_2} = e_{23} \\ \widehat{ROR'} &= \tan\widehat{ROR'} = \tfrac{\delta B_2}{B_3} = e_{23} \end{aligned} \tag{2.30}$$

astfel incat rotind paralelogramul $R'OP'Q'$ cu unghiul e_{23} in jurul originii se obtine figura (Fig. 2.2).

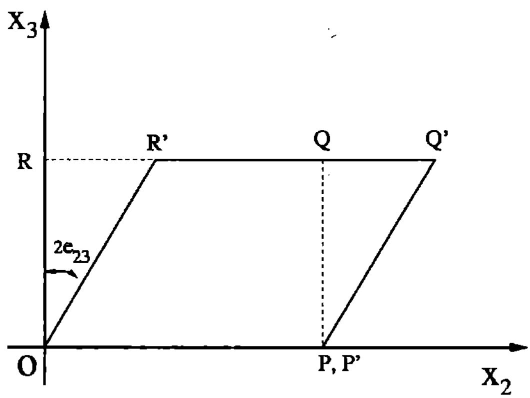


Fig. 2.2

Aceasta reprezinta o alunecare pura toate dreptele paralele cu O_{x_3} deplasandu-se in lungul axei O_{x_3}.

2.5 Deformatia infinitezimala heterogena

In paragraful (2.3) am vazut ca in cazul unei deformatii infinitezimale omogene vectorul $\vec{A}$ de componente A_i se transforma in vectorul $\vec{A}'$ de componente $A'_i =$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

$A_i + \delta A_i$, unde

$$\begin{aligned}\delta A_i = a_{ij}A_j = \tfrac{1}{2}(a_{ij}+a_{ji})A_j + \tfrac{1}{2}(a_{ij}-a_{ji})A_j = \\ = \omega_{ij}A_j + e_{ij}A_j\end{aligned} \tag{2.31}$$

In continuare vom considera cazul unei deformari heterogene. Sa consideram intr-un mediu continuu punctul $P_0(x_{01},x_{02},x_{03})$ caruia ii corespunde dupa deformare punctul $P'_0(x'_{01},x'_{02},x'_{03})$. Vom nota componentele vectorului deplasare corespunzator punctului P_0 prin:

$$\begin{aligned}u_1(x_{01},x_{02},x_{03}) &= x'_{01} - x_{01}\\ u_2(x_{01},x_{02},x_{03}) &= x'_{02} - x_{02}\\ u_3(x_{01},x_{02},x_{03}) &= x'_{03} - x_{03}\end{aligned} \tag{2.32}$$

Sa consideram deasemenea un punct $P(x_1,x_2,x_3)$ in vecinatatea lui P_0 caruia dupa deformare ii va corespunde punctul $P'(x'_1,x'_2,x'_3)$. Daca $\vec{A}$ este vectorul ce uneste punctul P_0 cu punctul P, atunci vectorul deplasare in punctul P este:

$$\begin{aligned}u_1(x_1,x_2,x_3) = u_1(x_{01}+A_1,x_{02}+A_2,x_{03}+A_3) = x'_1 - x_1\\ u_2(x_1,x_2,x_3) = u_2(x_{01}+A_1,x_{02}+A_2,x_{03}+A_3) = x'_2 - x_2\\ u_3(x_1,x_2,x_3) = u_3(x_{01}+A_1,x_{02}+A_2,x_{03}+A_3) = x'_3 - x_3\end{aligned} \tag{2.33}$$

In urma deformarii, vectorul $\vec{A}$ devine $\vec{A}'$ de componente:

$$A'_i = x'_i - x'_{0i} \tag{2.34}$$

astfel incat

$$\begin{aligned}\delta A_i = A'_i - A_i = (x'_i - x'_{0i}) - (x_i - x_{0i}) = \\ = (x'_i - x_i) - (x'_{0i} - x_{0i}) = \\ = u_i(x_{01}+A_1,x_{02}+A_2,x_{03}+A_3) - u_i(x_{01},x_{02},x_{03}) = \\ = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)_0 A_j + \ldots\end{aligned} \tag{2.35}$$

unde s-a dezvoltat in serie Taylor $u_i(x_{01}+A_1,x_{02}+A_2,x_{03}+A_3)$ in jurul punctului P_0.

Introducand notatia

$$u_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \tag{2.36}$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

atunci

$$\delta A_i = u_{ij} A_j \tag{2.37}$$

Comparand formulele (2.10) cu (2.37) se observa ca

$$a_{ij} = u_{ij} \tag{2.38}$$

Considerand deplasarile u_i ca si derivatele sale partiale cantitati mici astfel incat produsele si patratele acestora sa poata fi neglijate, relatia (2.37) defineste o transformare infinitezimala omogena in vecinatatea punctului P_0. Atunci:

$$\begin{aligned}\delta A_i &= \tfrac{1}{2}(u_{ij} + u_{ji})A_j + \tfrac{1}{2}(u_{ij} - u_{ji})A_j = \\ &= e_{ij}A_j + \omega_{ij}A_j\end{aligned} \tag{2.39}$$

unde

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{ij} + u_{ji}), \quad \omega_{ij} = \frac{1}{2}(u_{ij} - u_{ji}) \tag{2.40}$$

Este evident ca transformarea (2.39) in general nu este omogena atat timp cat componentele e_{ij} ca si ω_{ij} sunt functie de coordonatele mediului. Putem spune altfel, ca o transformare continua heterogena este omogena pe portiuni mici.

2.6 Deformatii finite

In capitolele anterioare s-au avut in vedere deformatiile infinitezimale, caz in care se poate aplica principiul superpozitiei. Multe probleme legate de elasticitate impun insa considerarea deformatiilor finite, caz in care deplasarile $\vec{u}$ impreuna cu derivatele sale nu mai sunt neglijabile.

Fie un corp solid presupus continuu. Fiecare punct al sau este determinat de raza vectoare $\vec{r}$. Dupa deformare, un punct oarecare P al corpului va avea raza vectoare $\vec{r}\,'$ (Fig 2.3)

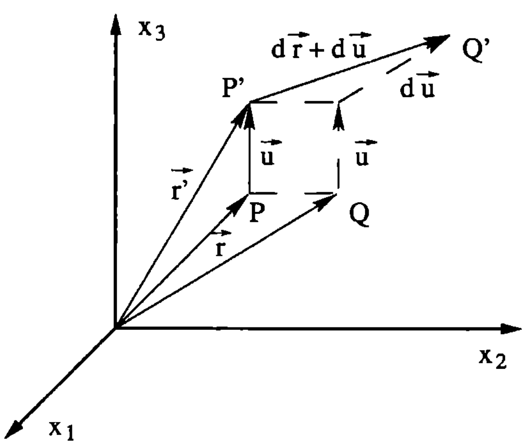


Fig. 2.3

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Deplasarea punctului P in cursul deformarii este reprezentata prin vectorul $\vec{r}\,' - \vec{r}$ notat cu $\vec{u}$ (vectorul deformatie).

$$\vec{u} = \vec{r}\,' - \vec{r} = u_1(x_1, x_2, x_3)\vec{e}_1 + u_2(x_1, x_2, x_3)\vec{e}_2 + u_3(x_1, x_2, x_3)\vec{e}_3 \quad (2.41)$$

Deplasarea $\vec{u}$ depinde evident de punctul P, deci este o functie vectoriala de $\vec{r}(x_1, x_2, x_3)$; daca $\vec{u}$ ar fi acelasi pentru toate punctele solidului nu am avea de-a face cu o deformare ci cu o deplasare a solidului ca intreg. In cazul unei deformari $\vec{u} = \vec{u}(\vec{r})$.

Fie Q un punct infinit vecin de punctul P. Daca dx_i determina raza vectoare intre cele doua puncte inainte de deformare in urma deformarii aceasta devine

$$dx'_i = dx_i + du_i \quad (2.42)$$

unde

$$\begin{aligned} du_1 &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial u_1}{\partial x_3}dx_3 \\ du_2 &= \frac{\partial u_2}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_3}dx_3 \\ du_3 &= \frac{\partial u_3}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}dx_3 \end{aligned} \quad (2.43)$$

relatii ce pot fi scrise sub forma matriceala:

$$\begin{pmatrix} du_1 \\ du_2 \\ du_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix} \quad (2.44)$$

sau

$$d\vec{u} = \widehat{U} \cdot d\vec{r} \quad (2.45)$$

In cursul deformarii distanta intre puncte se modifica. Distanta intre punctele P si Q inainte de deformare era:

$$dl^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 \quad (2.46)$$

Dupa deformare aceasta devine:

$$dl'^2 = dx_1'^2 + dx_2'^2 + dx_3'^2 = \sum_i \left(dx_i + \sum_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}dx_j\right)^2 =$$

$$= \sum_i \left(dx_i + \sum_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}dx_j\right)\left(dx_i + \sum_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k}dx_k\right) = \quad (2.47)$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

$$= \sum_i dx_i^2 + \sum_i \sum_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_i dx_k + \sum_i \sum_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_i dx_j +$$

$$+ \sum_i \sum_j \sum_k \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_j dx_k$$

sau

$$dl'^2 = dl^2 + \sum_i \sum \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \sum_l \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) dx_i dx_k =$$

$$= dl^2 + 2 \sum_i \sum \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \sum_l \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) dx_i dx_k \tag{2.48}$$

si introducand tensorul deformatiilor:

$$\epsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \sum_l \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) \tag{2.49}$$

relatia (2.47) devine

$$dl'^2 = dl^2 + 2 \sum_i \sum_k \epsilon_{ik} dx_i dx_k \tag{2.50}$$

Se observa ca tensorul deformatiilor este simetric $\epsilon_{ik} = \epsilon_{ki}$ avand deci 6 componente independente. Se poate alege un sistem de axe (axele principale ale tensorului) fata de care ϵ_{ik} este diagonal:

$$\epsilon_{ik} = \delta_{ik} \epsilon^{(i)} \tag{2.51}$$

In raport cu acest sistem de axe

$$dl'^2 = dl^2 + \sum_i \sum_k 2\epsilon_{ik} dx_i dx_k =$$

$$= dl^2 + \sum_i \sum_k 2\delta_{ik} \epsilon^{(i)} dx_i dx_k = \tag{2.52}$$

$$= dl^2 + \sum_i 2\epsilon^{(i)} dx_i^2 = \sum_i (1 + 2\epsilon^{(i)}) dx_i^2$$

In acest caz se poate reprezenta deformatia ca un ansamblu de trei deformatii independente pe trei directii ortogonale (axele principale ale tensorului deformatie):

$$dx_i' = \sqrt{1 + 2\epsilon^{(i)}} dx_i \tag{2.53}$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Fiecare deformatie este o alungire sau o comprimare, astfel incat alungirea relativa este:

$$\frac{dx' - dx_i}{dx_i} = \sqrt{1 + 2\epsilon^{(i)}} - 1 \tag{2.54}$$

In cazul in care se considera mici deformatii atunci:

$$\epsilon_{ik} \simeq \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right) \tag{2.55}$$

unde s-au neglijat termenii de ordinul doi din relatia (2.49). In acest caz alungirile relative devin (cu $\epsilon^{(i)} = \partial u_i / \partial x_i \ll 1$):

$$\frac{dx'_i - dx_i}{dx_i} = \sqrt{1 + 2\epsilon^{(i)}} - 1 \simeq 1 + \frac{1}{2} \cdot 2\epsilon^{(i)} - 1 = \epsilon^{(i)} \tag{2.56}$$

iar

$$dx'_i = \sqrt{1 + 2\epsilon^{(i)}} dx_i \simeq (1 + \epsilon^{(i)}) dx_i \tag{2.57}$$

Variatia de volum ca urmare a deformarii este:

$$dV' = dx'_1 dx'_2 dx'_3 = (1 + \epsilon^{(1)})(1 + \epsilon^{(2)})(1 + \epsilon^{(3)}) dx_1 dx_2 dx_3 \tag{2.58}$$

si neglijand termenii de ordin superior se obtine

$$dV' = (1 + \epsilon^{(1)} + \epsilon^{(2)} + \epsilon^{(3)}) dV \tag{2.59}$$

astfel incat

$$\frac{\delta V}{V} = \frac{V' - V}{V} = \sum_i \epsilon^{(i)} = \sum_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \mathrm{div}\vec{u} \tag{2.60}$$

Rezulta deci ca divergenta vectorului deplasare reprezinta variatia relativa de volum ca urmare a deformarii. Rezulta atnci ca daca $\sum_i \epsilon_{ii} = 0$ volumul nu se modifica si se modifica numai forma corpului. In acest caz avem de-a face numai cu o alunecare.

Exista deasemenea deformatii pentru care forma corpului nu se modifica, dar se modifica volumul (compresii uniforme). In acest caz

$$\epsilon_{ik} = \mathrm{const.}\delta_{ik} \tag{2.61}$$

In general orice deformatie poate fi reprezentata ca o suma dintre alunecare si o comprimare uniforma.

$$\epsilon_{ik} = (\epsilon_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik} \sum_l \epsilon_{ll}) + \frac{1}{3}\delta_{ik} \sum_l \epsilon_{ll} =$$

$$= \epsilon_{ik}^{(a)} + \epsilon_{ik}^{(c)} \tag{2.62}$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Se observa ca

$$\frac{1}{3}\delta_{ik}\sum_{l}\epsilon_{ll} = \left(\frac{1}{3}\mathrm{Tr}\,\widehat{\epsilon}\right)\delta_{ik} = \mathrm{const.}\delta_{ik} = \epsilon_{ik}^{(c)} \tag{2.63}$$

iar

$$\sum_{i}\epsilon_{ii}^{(a)} = \sum_{i}\epsilon_{ii} - \frac{1}{3}\left(\mathrm{Tr}\,\widehat{\epsilon}\right)\sum_{i}\delta_{ii} =$$

$$= \mathrm{Tr}\,\widehat{\epsilon} - \frac{1}{3}\left(\mathrm{Tr}\,\widehat{\epsilon}\right)\cdot 3 = 0 \tag{2.64}$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Capitolul 3

Tensorul tensiunilor

3.1 Introducere

In problemele legate de mecanica corpurilor deformabile se izoleaza (mintal) un elemnt de volum marginit de o suprafata S (Fig. 3.1).

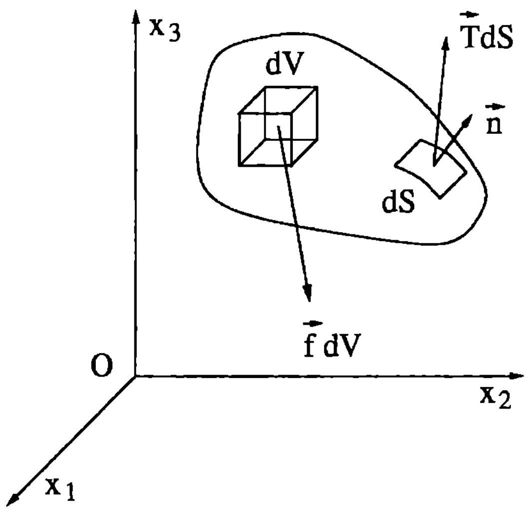


Fig. 3.1

Asupra particulelor aflate in interiorul suprafetei S actioneaza urmatoarele tipuri de forte:

- forte de volum datorate unor campuri externe cum ar fi cele gravitationale, electrice, magnetice. Acestea sunt definite astfel incat $\vec{f}\,dV$ reprezinta forta care actioneaza asupra elementului de volum dV (sunt proportionale cu elementul de volum).

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

- forte de suprafata care se datoresc particulelor aflate in imediata vecinatate a suprafetei S. In conformitate cu Cauchy (1822) astfel de forte de suprafata pot fi reprezentate printr-o tensiune $\vec{T}$, in sensul ca $\vec{T}dS$ reprezinta forta elementara ce actioneaza pe suprafata dS.

Sa considerama un corp solid supus actiunii unor forte externe $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, ... (Fig. 3.2)

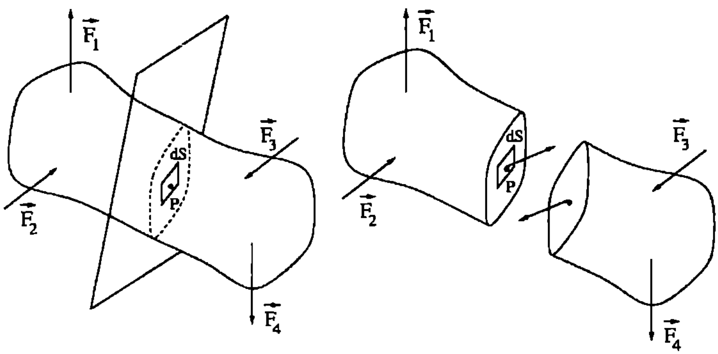


Fig. 3.2

Intr-o sectiune oarecare a solidului vor actiona forte egale si de semn contrar. Una dintre forte este actiunea partii din stanga asupra partii din dreapta, iar cealalta este actiunea partii din dreapta asupra partii din stanga.

Pentru adetermina tensiunea intr-un punct al corpului se considera un plan ce trece prin acel punct si separa deci corpul in doua parti.

Rezultanta fortelor ce actioneaza asupra unui elemnt dS al planului va fi o forta proportionala cu aria acelui element. Daca consideram forta care actioneaza asupra unui element de suprafata dS in jurul punctului P se defineste tensiunea in punctul P ca

$$\vec{T} = \frac{d\vec{F}}{dS} \tag{3.1}$$

Daca normala $\vec{n}$ la elementul de suprafata dS isi modifica directia astfel incat elementul de suprafata sa contina mereu punctul P (efectuam o alta taietura ce trece prin punctul P) forta asupra elemntului de suprafata se modifica. Rezulta deci ca:

$$\vec{T} = \vec{T}(\vec{r}, \vec{n}, t) \tag{3.2}$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

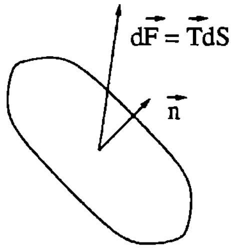


Fig. 3.3

Aceste forte se supun principiului actiunii si reactiunii: actiunea partii aflate de partea lui $\vec{n}$ asupra celei aflate de sens conrar este $\vec{T}(\vec{r},\vec{n},t)$; actiunea partii aflate in sens opus lui $\vec{n}$ asupra celei aflate de partea lui $\vec{n}$ este notata prin $\vec{T} = \vec{T}(\vec{r},-\vec{n},t)$ si:

$$\vec{T}(\vec{r},-\vec{n},t) = -\vec{T}(\vec{r},\vec{n},t) \tag{3.3}$$

Putem face trei taieturi perpendiculare pe versorii $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$. In acest caz normala $\vec{n}$ se va confunda pe rand cu versorii $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$. Alegand versorul $\vec{n}$ pe directia axei O_{x_1} (fig.3.4) atunci vectorul $\vec{T}$ va avea urmatoarele componente:

$$\sigma_{11}, \sigma_{21}, \sigma_{31} \tag{3.4}$$

unde σ_{21} si σ_{31} sunt in planul elementului de arie dS (perpendicular pe axa O_{x_1}), iar σ_{11} actioneaza perpendicular pe planul considerat.

In mod analog, alegand versorul $\vec{n}$ in lungul axelor O_{x_2}, respectiv O_{x_3} se obtin componentele:

$$\begin{array}{ccc} \sigma_{12}, & \sigma_{22}, & \sigma_{32} \\ \sigma_{13}, & \sigma_{23}, & \sigma_{33} \end{array} \tag{3.5}$$

In general, forta pe unitatea de arie intr-un plan normal pe directia i are componentele σ_{ji} $(j = 1, 2, 3)$. Rezulta astfel noua componente ale unui tensor de ordinul doi numit tensorul tensiunilor.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

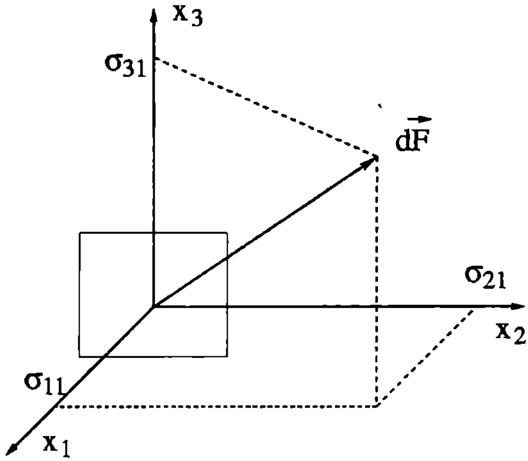


Fig. 3.4

Daca se considera un element de volum de forma unui paralelipiped cu fetele paralele cu axele de coordonate atunci $\vec{T}^{(i)}$ reprezinta tensiunea ce actioneaza pe fata perpendiculara pe axa x_i si are componentele σ_{ji}.

Conventia pentru scalarii σ_{ji} este urmatoarea: considerand normala la una din fetele paralelipipedului atunci componentele σ_{ji} sunt pozitive daca componentele corespunzatoare ale fortei sunt in directia cresterii lui x_1, x_2, x_3 atunci cand normala are acelasi sens cu sensul pozitiv al axei pe care forta respectiva este perpendiculara.

Pe de alta parte, daca normala exterioara la una din fete este in directia opusa sensului pozitiv al axei atunci valorile pozitive ale lui σ_{ji} corespund componentelor fortelor avand sensul opus directiei pozitive ale axelor de coordonate.

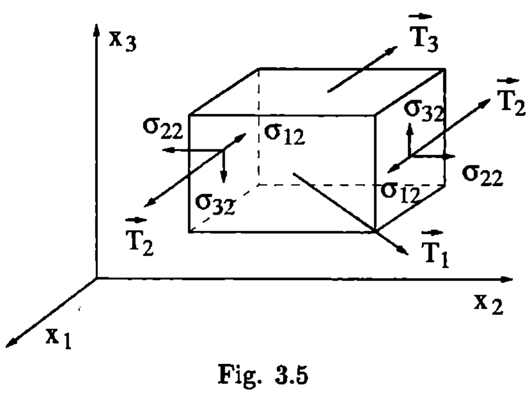


Fig. 3.5

In cazul unei comprimari uniforme fiecare element de suprafata este supus unei presiuni de aceeasi valoare avand directia normalei la suprafata. In acest caz

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

tensorul tensiunilor devine:

$$\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} \tag{3.6}$$

3.2 Ecuatia de echilibru. Relatii de simetrie.

Sa consideram un element de volum de forma paralelipipedica avand fetele paralele cu axele de coordonate.

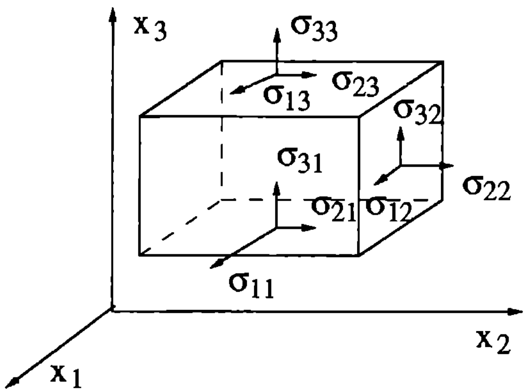


Fig. 3.6

Elementul de volum fiind in echilibru, rezulta

$$\begin{aligned}\sum \vec{T}_{x_1} \quad = \quad & \left[\left(\sigma_{11} + \tfrac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}\Delta x_1 - \sigma_{11}\right)\Delta x_2\Delta x_3 + \right. \\ & + \left(\sigma_{12} + \tfrac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_2}\Delta x_2 - \sigma_{12}\right)\Delta x_1\Delta x_3 \\ & \left. + \left(\sigma_{13} + \tfrac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_3}\Delta x_3 - \sigma_{13}\right)\Delta x_1\Delta x_2\right] = 0\end{aligned} \tag{3.7}$$

sau

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_3} = 0 \tag{3.8}$$

In mod analog pentru axele O_{x_2} respectiv O_{x_3} se obtine

$$\frac{\partial\sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial\sigma_{23}}{\partial x_3} = 0 \tag{3.9}$$

respectiv

$$\frac{\partial\sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial\sigma_{33}}{\partial x_3} = 0 \tag{3.10}$$

sau

$$\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0 \qquad i,j = 1,2,3 \tag{3.11}$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

A doua conditie de echilibru cere ca suma momentelor sa fie egala cu zero. In calculul momentelor intra numai componentele nediagonale ale tensorului tensiunilor presupuse a actiona numai in mijlocul fiecarei fete. Daca momentele sunt calculate in raport cu centrul paralelipipedului se obtine

$$\begin{aligned} \left(\sigma_{21} + \tfrac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1}\Delta x_1 + \sigma_{21}\right)\Delta x_2 \Delta x_3 \tfrac{\Delta x_1}{2} & - \\ \left(\sigma_{12} + \tfrac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2}\Delta x_2 + \sigma_{12}\right)\Delta x_1 \Delta x_3 \tfrac{\Delta x_2}{2} & = 0 \end{aligned} \tag{3.12}$$

sau

$$2\sigma_{21} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1}\Delta x_1 - 2\sigma_{12} - \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2}\Delta x_2 = 0 \tag{3.13}$$

In limita Δx_1, $\Delta x_2 \to 0$, rezulta

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} \tag{3.14}$$

In general

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \tag{3.15}$$

Rezulta astfel ca tensorul tensiunilor este simetric avand deci sase componente independente.

3.3 Tensorul tensiunilor

Forta asupra unui element de suprafata dS poate fi exprimata cu ajutorul fortelor ce actioneaza asupra trei elemente plane de suprafata reciproc perpendiculare ce trec printr-un punct dat. Consideram conditia de echilibru asupra unui mic element de volum (tetraedru) din corpul considerat aflat in vecinatatea punctului P. Alegem un sistem de axe cu originea in punctul P si versorii $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ (fig. 3.7)

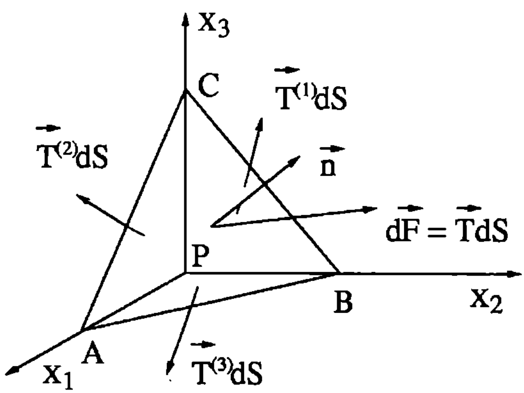


Fig. 3.7

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

ABC este elementul de arie variabila avand normala $\vec{n}$. La limita dx_1, dx_2, $dx_3 \to 0$ planul ABC va contine punctul P.

Neglijand fortele de volum (spre exemplu greutatea) care sunt proportionale cu elementul de volum $dV = dx_1 dx_2 dx_3$ conditia de echilibru se scrie:

$$\vec{T} dS - \vec{T}^{(1)} dS_1 - \vec{T}^{(2)} dS_2 - \vec{T}^{(3)} dS_3 = 0 \tag{3.16}$$

unde am avut in vedere ca normalele exterioare elementului de volum considerat sunt $-\vec{e}_1$, $-\vec{e}_2$ respectiv $-\vec{e}_3$.

Dar

$$\begin{aligned} dS_1 &= dS \cos\alpha_1 = (\vec{n} \cdot \vec{e}_1) dS \\ dS_2 &= dS \cos\alpha_2 = (\vec{n} \cdot \vec{e}_2) dS \\ dS_3 &= dS \cos\alpha_3 = (\vec{n} \cdot \vec{e}_3) dS \end{aligned} \tag{3.17}$$

unde

$$\vec{n} = n_1 \vec{e}_1 + n_2 \vec{e}_2 + n_3 \vec{e}_3 = \cos\alpha_1 \vec{e}_1 + \cos\alpha_2 \vec{e}_2 + \cos\alpha_3 \vec{e}_3 \tag{3.18}$$

Relatia3.16 devine:

$$\vec{T} dS = \vec{T}^{(1)} dS \cos\alpha_1 - \vec{T}^{(2)} dS \cos\alpha_2 - \vec{T}^{(3)} dS \cos\alpha_3 \tag{3.19}$$

sau

$$\begin{aligned} \vec{T} \quad = & \quad (\sigma_{11} \vec{e}_1 + \sigma_{21} \vec{e}_2 + \sigma_{31} \vec{e}_3) \cos\alpha_1 + \\ + & \quad (\sigma_{12} \vec{e}_1 + \sigma_{22} \vec{e}_2 + \sigma_{32} \vec{e}_3) \cos\alpha_2 + \\ + & \quad (\sigma_{13} \vec{e}_1 + \sigma_{23} \vec{e}_2 + \sigma_{33} \vec{e}_3) \cos\alpha_3 \end{aligned} \tag{3.20}$$

La limita $dx_i \to 0$ cu $i = 1,2,3$ ecuatia 3.20permite aflarea tensiunii intr-un plan arbitrar ce trece printr-un punct P cunoscand tensiunile in trei plane perpendiculare si orientarea elemntului de suprafata:

$$\begin{pmatrix} T_{1n} \\ T_{2n} \\ T_{3n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 \\ \cos\alpha_2 \\ \cos\alpha_3 \end{pmatrix} \tag{3.21}$$

Cunoscand componentele σ_{ji} se poate astfel calcula tensiunea $\vec{T}$ pentru orice orientare a normalei $\vec{n}$ la elementul de suprafata ce contine punctul P.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Capitolul 4

Legea lui Hooke

4.1 Coeficenti Lamé

Intre tensiuni si deformatii exista o legatura data de legea lui Hooke generalizata:

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}\epsilon_{kl} \tag{4.1}$$

unde c_{ijkl} reprezinta tensorul modulelor elastice. Pe componente vom avea relatii de tipul:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} = \;& c_{1111}\epsilon_{11} + c_{1112}\epsilon_{12} + c_{1113}\epsilon_{13} + c_{1121}\epsilon_{21} + c_{1122}\epsilon_{22} \\ & + c_{1123}\epsilon_{23} + c_{1131}\epsilon_{31} + c_{1132}\epsilon_{32} + c_{1133}\epsilon_{33} \end{aligned} \tag{4.2}$$

Rezulta astfel 81de constatnte elastice. Cum tensorul deformatiilor este simetric $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$ se obtine

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= c_{1111}\epsilon_{11} + (c_{1112} + c_{1121})\epsilon_{12} + (c_{1113} + c_{1131})\epsilon_{13} + \\ & \quad + (c_{1123} + c_{1132})\epsilon_{23} + c_{1122}\epsilon_{22} + c_{1133}\epsilon_{33} = \\ &= c_{1111}\epsilon_{11} + 2c_{1112}\epsilon_{12} + 2c_{1113}\epsilon_{13} + \\ & \quad + 2c_{1123}\epsilon_{23} + c_{1122}\epsilon_{22} + c_{1133}\epsilon_{33} \end{aligned} \tag{4.3}$$

unde s-a considerat $c_{1112} = c_{1121}$ etc. In general, deoarece $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$ si $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ avem

$$c_{ijkl} = c_{jikl} = c_{ijlk} = c_{klij} \tag{4.4}$$

In formulele de mai sus este comod sa se inlocuiasca perechile de indici i, j si k, l cu indicii p si q care iau valori de la 1, ... , 6. Astfel:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \sigma_1 & \sigma_6 & \sigma_5 \\ & \sigma_2 & \sigma_4 \\ & & \sigma_3 \end{pmatrix} \tag{4.5}$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

adica, inlocuim perechea de indici ij cu indicele p conform schemei:

$$\begin{array}{cccccc} 11 & 22 & 33 & 23 & 13 & 12 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \tag{4.6}$$

Pentru tensorul deformatiilor trecerea de la indicii ij la p se face prin relatia:

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ & & \epsilon_{33} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \epsilon_1 & \frac{1}{2}\epsilon_6 & \frac{1}{2}\epsilon_5 \\ & \epsilon_2 & \frac{1}{2}\epsilon_4 \\ & & \epsilon_3 \end{pmatrix} \tag{4.7}$$

Astfel, relatia (4.3) devine:

$$\sigma_1 = c_{11}\epsilon_1 + c_{12}\epsilon_2 + c_{13}\epsilon_3 + c_{14}\epsilon_4 + c_{15}\epsilon_5 + c_{16}\epsilon_6 \tag{4.8}$$

sau in general

$$\sigma_p = c_{pq}\epsilon_q \tag{4.9}$$

Din considerente energetice se arata ca $c_{ij} = c_{ji}$ si deci numarul parametrilor independenti se reduce la 21.

Proprietati;e elastice ale unui solid izotrop sunt caracterizate numai de doua constante elastice independente de exemplu E si G. In cazul corpurilor anizotro[e insa (cristalele) sunt necesare mai multe constante: de la 3 la cristalele cubice, pana la 21 la cristalele triclinice.

Tensorii ale caror componente nu sunt afectate de o rotatie a axelor se numesc izotropi. In cazul unui mediu izotrop numarul coeficientilor c_{ijkl} se reduce la doi, λ si μ. Acestia au fost introdusi de Lamé si ii poarta numele.

Intr-adevar un tensor izotrop de ordinul patru se scrie

$$T_{ijkl} = a\delta_{ij}\delta_{kl} + b\delta_{ik}\delta_{jl} + c\delta_{il}\delta_{jk} \tag{4.10}$$

In cazul tensorului modulelor de elasticitate $c_{ijkl} = c_{jikl}$, caz in care $b = c$ astfel incat:

$$c_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \tag{4.11}$$

Avand in vedere conventia (4.6) vom avea

$$\begin{array}{ccccccccccc} c_{1111} & = & c_{11} & = & \lambda + 2\mu & & c_{2323} & = & c_{44} & = & \mu \\ c_{2222} & = & c_{22} & = & \lambda + 2\mu & & c_{1313} & = & c_{55} & = & \mu \\ c_{3333} & = & c_{33} & = & \lambda + 2\mu & & c_{1212} & = & c_{66} & = & \mu \\ c_{1122} & = & c_{12} & = & \lambda & & c_{14} & = & c_{1123} & = & 0 \\ c_{1133} & = & c_{13} & = & \lambda & & c_{15} & = & c_{1113} & = & 0 \\ c_{2233} & = & c_{23} & = & \lambda & & c_{16} & = & c_{1112} & = & 0 \end{array} \tag{4.12}$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

astfel incat

$$c_{pq} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & c_{44} & 0 & 0 \\ & & & & c_{55} & 0 \\ & & & & & c_{66} \end{pmatrix} \tag{4.13}$$

si deci legea lui Hooke in cazul izotrop devine:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= c_{11}\epsilon_1 & +c_{12}\epsilon_2 + c_{13}\epsilon_3 \\ \sigma_2 &= c_{21}\epsilon_1 & +c_{22}\epsilon_2 + c_{23}\epsilon_3 \\ \sigma_3 &= c_{31}\epsilon_1 & +c_{32}\epsilon_2 + c_{33}\epsilon_3 \\ \sigma_4 &= c_{44}\epsilon_4 & \\ \sigma_5 &= c_{55}\epsilon_5 & \\ \sigma_6 &= c_{66}\epsilon_6 & \end{aligned} \tag{4.14}$$

unde

$$c_{44} = c_{55} = c_{66} = \mu = \frac{c_{11} - c_{12}}{2} \tag{4.15}$$

4.2 Relatii intre coeficienti

In acest paragraf vom da o semnificatie fizica coeficientilor Lamé.

Avind in vedere (4.12) relatiile (4.14) mai pot fi scrise si sub forma:

$$\sigma_1 = (c_{11} - c_{12})\epsilon_1 + c_{12}(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3) = 2\mu\epsilon_1 + \lambda(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3)$$

$$\sigma_2 = (c_{11} - c_{12})\epsilon_2 + c_{12}(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3) = 2\mu\epsilon_2 + \lambda(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3) \tag{4.16}$$

$$\sigma_3 = (c_{11} - c_{12})\epsilon_3 + c_{12}(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3) = 2\mu\epsilon_3 + \lambda(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3)$$

Adunand relatiile (4.16) se obtine:

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = (2\mu + 3\lambda)(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3) \tag{4.17}$$

Din relatiile (4.16) (4.17) se pot determina deformatiile in functie de tensiuni:

$$\epsilon_1 = -\frac{\lambda}{2\mu}\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{2\mu + 3\lambda} + \frac{\sigma_1}{2\mu}$$

$$\epsilon_2 = -\frac{\lambda}{2\mu}\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{2\mu + 3\lambda} + \frac{\sigma_2}{2\mu} \tag{4.18}$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

$$\epsilon_3 = -\frac{\lambda}{2\mu}\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{2\mu + 3\lambda} + \frac{\sigma_3}{2\mu}$$

Sa consideram o bara de forma cilindrica avind axa paralela cu axa O_{x1} supusa unei forte longitudinale aplicate la unul din capetele ei. In acest caz $\sigma_1 \neq 0$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$. Rezulta atunci din (4.18):

$$\epsilon_1 = \frac{\lambda + \mu}{\mu(2\mu + 3\lambda)}\sigma_1$$

$$\epsilon_2 = \epsilon_3 = -\frac{\lambda}{2\mu(2\mu + 3\lambda)}\sigma_1 \tag{4.19}$$

Introducem notatiile:

$$\nu = -\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} = -\frac{\epsilon_{trans}}{\epsilon_{long}} = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

$$E = \frac{\mu(2\mu + 3\lambda)}{\lambda + \mu} \tag{4.20}$$

Atunci relatiile (4.19) devin:

$$\epsilon_1 = \frac{1}{E}\sigma_1$$

$$\epsilon_2 = \epsilon_3 = -\frac{\nu}{E}\sigma_1 = -\nu\epsilon_1 \tag{4.21}$$

E va reprezenta modulul lui Young iar ν coeficientul Poisson.

Daca $\sigma_1 > 0$ rezulta o alungire in lungul axei cilindrului si respectiv o comprimare transversala.

Din relatiile (4.20) putem exprima coeficentii Lamé in functie de E si ν:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$$

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \tag{4.22}$$

Sa consideram acum

$$\sigma_4 = \sigma_{23} = const.$$

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_5 = \sigma_6 = 0 \tag{4.23}$$

Pentru deformatii rezulta:

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

$$\epsilon_{23} = \frac{1}{2\mu}\sigma_{23} \tag{4.24}$$

Dar din relatia (2.23) am vazut ca $\alpha_{23} = 2\epsilon_{23}$ astfel incit (4.24) mai poate fi scrisa sub forma:

$$\mu = \frac{\sigma_{23}}{\alpha_{23}} = G \tag{4.25}$$

μ poarta numele de modul de forfecare.

Sa consideram un corp de forma oarecare supus unei presiuni uniforme p. Atunci:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -p$$

$$\sigma_4 = \sigma_5 = \sigma_6 = 0 \tag{4.26}$$

Din relatiile (4.18) se obtine:

$$\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 = -\frac{p}{2\mu + 3\lambda} \tag{4.27}$$

astfel incit:

$$\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = -\frac{3p}{2\mu + 3\lambda} = -\frac{p}{K} \tag{4.28}$$

unde

$$K = \frac{2\mu + 3\lambda}{3} = \lambda + \frac{2}{3}\mu \tag{4.29}$$

si reprezinta modulul de compresibilitate $K = -V\frac{\Delta p}{\Delta V}$.

Evident , pentru majoritatea substantelor K este pozitiv. Modulul de compresibilitate mai poate fi exprimat si in functie de E si ν:

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} \tag{4.30}$$

Din relatia (4.30) se observa ca $\nu < \frac{1}{2}$si deci λ este pozitiv.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Capitolul 5

Unde elastice intr-un mediu izotrop

5.1 Undele P si S.

Pentru a gasi ecuatia de miscare a unui element de volum sub actiunea tensiunilor neomogene sa aflam rezultanta fortelor datorate "vecinatatii". Avand in vedere ca tensiunile depind de coordonate (x_1, x_2, x_3) si timp, rezultanta in lungul axei x_1 este:

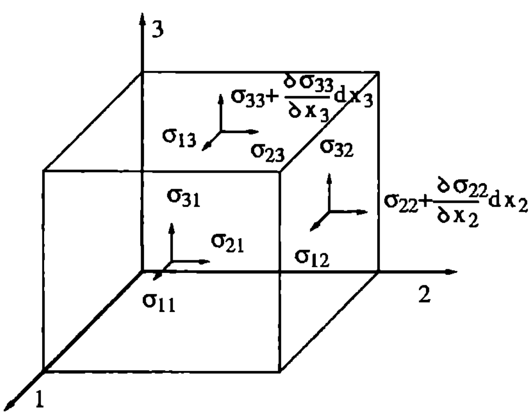


Fig. 5.1

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

$$\begin{aligned} dF_1 &= \left(\sigma_{11} + \tfrac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} dx_1\right) dx_2 dx_3 - \sigma_{11} dx_2 dx_3 + \\ &+ \left(\sigma_{12} + \tfrac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} dx_2\right) dx_1 dx_3 - \sigma_{12} dx_1 dx_3 + \\ &+ \left(\sigma_{13} + \tfrac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} dx_3\right) dx_1 dx_2 - \sigma_{13} dx_1 dx_2 + \\ &= \left(\tfrac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \tfrac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \tfrac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3}\right) dV \end{aligned} \tag{5.1}$$

si deci densitatea de forta in lungul axei x_1 este

$$\frac{dF_1}{dV} = \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} \tag{5.2}$$

analog

$$\frac{dF_2}{dV} = \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} \tag{5.3}$$

$$\frac{dF_3}{dV} = \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} \tag{5.4}$$

Atunci, conform legii lui Newton, ecuatia de miscare a unui mediu elastic in absenta fortelor de volum este:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} &= \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} &= \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} &= \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \end{aligned} \tag{5.5}$$

sau

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = \rho \ddot{u}_i \tag{5.6}$$

Avand in vedere legea lui Hooke (4.1), (4.14) ecuatiile (5.5) devin:

$$\rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x_1}(c_{11}\epsilon_1 + c_{12}\epsilon_2 + c_{13}\epsilon_3) + c_{66}\frac{\partial \epsilon_6}{\partial x_2} + c_{55}\frac{\partial \epsilon_5}{\partial x_3} \tag{5.7}$$

$$\rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = c_{66}\frac{\partial \epsilon_6}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}(c_{21}\epsilon_1 + c_{22}\epsilon_2 + c_{23}\epsilon_3) + c_{44}\frac{\partial \epsilon_4}{\partial x_3} \tag{5.8}$$

$$\rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = c_{55}\frac{\partial \epsilon_5}{\partial x_1} + c_{44}\frac{\partial \epsilon_4}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3}(c_{31}\epsilon_1 + c_{32}\epsilon_2 + c_{33}\epsilon_3) \tag{5.9}$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

unde de exemplu

$$\epsilon_6 = 2\epsilon_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \tag{5.10}$$

Ecuatia (5.7) devine:

$$\rho\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left[(\lambda+2\mu)\epsilon_1 + \lambda\epsilon_2 + \lambda\epsilon_3\right] + \mu\frac{\partial \epsilon_6}{\partial x_2} + \mu\frac{\partial \epsilon_5}{\partial x_3} =$$

$$= (\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \lambda\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1\partial x_2} + \lambda\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_3} +$$

$$+\mu\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2\partial x_1}\right) + \mu\left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1\partial x_3} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2}\right) = \tag{5.11}$$

$$= \mu\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2}\right) + \lambda\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \lambda\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1\partial x_2} +$$

$$+\lambda\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1\partial x_3} + \mu\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \mu\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1\partial x_2} + \mu\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1\partial x_3}$$

sau

$$\rho\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \mu\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2}\right) + (\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right) \tag{5.12}$$

rezultand relatii analoage pentru axele 2 si 3.

Putem scrie formulele obtinute sub forma vectoriala:

$$\rho\vec{u} = \mu\Delta\vec{u} + (\lambda+\mu)grad\cdot div\vec{u} \tag{5.13}$$

Sa consideram cazul unidimensional:

$$\vec{u} = u_1(x_1)\vec{e}_1 + u_2(x_1)\vec{e}_2 + u_3(x_1)\vec{e}_3 \tag{5.14}$$

Atunci:

$$\rho\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \mu\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + (\lambda+\mu)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} = (\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} \tag{5.15}$$

$$\rho\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = \mu\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} \tag{5.16}$$

$$\rho\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = \mu\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} \tag{5.17}$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Rezulta atunci o unda longitudinala cu viteza

$$c_l^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} = \frac{E(1-\nu)}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)} \tag{5.18}$$

respectiv o unda transversala avand vitez

$$c_t^2 = \frac{\mu}{\rho} = \frac{E}{2\rho(1+\nu)} \tag{5.19}$$

Am vazut ca variatia relativa de volum este datat de $div\,\vec{u}$. In unda transversala apar numai u_2 si u_3 si cum acestea nu depind de x_2 si x_3 vom avea $div\,\vec{u} = 0$. Din contra, pentru unda longitudinala $div\,\vec{u} \neq 0$.

Sa rescriem ecuatia (5.13) folosind formulele obtinute pentru vitezele longitudinale si cele transversale:

$$\vec{u} = c_t^2 \Delta \vec{u} + (c_l^2 - c_t^2) grad\, div\, \vec{u} \tag{5.20}$$

Conform teoremei Helmholtz orice camp vectorial avand anumite proprietati (univoc si continuu si tinde la zero spre infinit) poate fi reprezentat ca o suma de doua campuri

$$\vec{u} = \vec{u}_l + \vec{u}_t \tag{5.21}$$

unde

$$\vec{u}_l = grad\, \phi \quad ; \qquad \vec{u}_t = rot\, \vec{\psi} \tag{5.22}$$

si se obtine

$$\vec{u}_l + \vec{u}_t = c_t^2 \Delta(\vec{u}_l + \vec{u}_t) + (c_l^2 - c_t^2) grad\, div\, \vec{u}_l \tag{5.23}$$

Aplicand operatorul divergentei expresiei (5.23) se obtine:

$$div\left(\frac{\partial^2 \vec{u}_l}{\partial t^2} - c_l^2 \Delta \vec{u}_l\right) = 0 \tag{5.24}$$

Pe de alta parte

$$rot\left(\frac{\partial^2 \vec{u}_l}{\partial t^2} - c_l^2 \Delta \vec{u}_l\right) = \frac{\partial^2}{\partial t^2}(rot\, \vec{u}_l) - c_l^2 \Delta(rot\, \vec{u}_l) = 0 \tag{5.25}$$

si din (5.24) si (5.25) rezulta

$$\frac{\partial^2 \vec{u}_l}{\partial t^2} - c_l^2 \Delta \vec{u}_l = 0 \tag{5.26}$$

Aplicand operatorul rotor expresiei (5.23) se obtine

$$rot\left(\frac{\partial^2 \vec{u}_t}{\partial t^2} - c_t^2 \Delta \vec{u}_t\right) = 0 \tag{5.27}$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

unde am avut in vedere ca $rot\,(grad\,\psi) = 0$. Dar

$$div\,\left(\frac{\partial^2\vec{u}_t}{\partial t^2} - c_t^2\Delta\vec{u}_t\right) = \frac{\partial^2}{\partial t^2}(rot\,\vec{u}_t) - c_t^2\Delta(rot\,\vec{u}_t) = 0 \tag{5.28}$$

astfel incat din (5.27) si (5.28) rezulta:

$$\frac{\partial^2\vec{u}_t}{\partial t^2} - c_t^2\Delta\vec{u}_t = 0 \tag{5.29}$$

In concluzie deformatiile ondulatorii intr-un solid elastic pot fi descompuse in doua componente, longitudinala si transversal, fiecare satisfacand ecuatia undelor.

Undele longitudinale avand viteza mai mare sosesc primele la o statie seismologica motiv pentru care se mai numesc si unde primare iar undele transversale unde secundare. In acest sens se mai utilizeaza si notatia

$$\vec{u}_l = \vec{u}_p \quad ; \quad \vec{u}_t = \vec{u}_s \tag{5.30}$$

respectiv

$$v_l = v_p = \alpha \quad ; \quad v_t = v_s = \beta \tag{5.31}$$

5.2 Unde plane

Am vazut ca undele P si S satisfac ecuatia undelor

$$\Delta\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0 \tag{5.32}$$

Considerand cazul unidimensionla ecuati (5.32) devine:

$$\frac{\partial^2\phi(x,\,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0 \tag{5.33}$$

Efectuand schimbarea de variabila

$$\begin{aligned} \xi &= x - ct \\ \eta &= x + ct \end{aligned} \tag{5.34}$$

atunci

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial x}\phi(x(\xi,\eta),\,t(\xi,\eta))\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\xi}\right)\cdot\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial\xi}\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\eta}\right)\cdot\frac{\partial\eta}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial\eta}\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} = \tag{5.35}$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

$$= \frac{\partial^2\phi}{\partial\xi^2}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial^2\phi}{\partial\xi\partial\eta}\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x} + \frac{\partial^2\phi}{\partial\eta^2}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial\phi}{\partial\xi}\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + \frac{\partial\phi}{\partial\eta}\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}$$

dar

$$\frac{\partial\xi}{\partial x} = 1 \qquad \text{si} \qquad \frac{\partial\eta}{\partial x} = 1 \tag{5.36}$$

astfel incat

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\phi}{\partial\xi^2} + 2\frac{\partial^2\phi}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{\partial^2\phi}{\partial\eta^2} \tag{5.37}$$

si ananlog

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2\phi}{\partial\xi^2} - 2c^2\frac{\partial^2\phi}{\partial\xi\partial\eta} + c^2\frac{\partial^2\phi}{\partial\eta^2} \tag{5.38}$$

Ecuatia undelor devine

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial\xi\partial\eta} = 0 \tag{5.39}$$

Integrand in raport cu ξ rezulta

$$\frac{\partial\phi}{\partial\eta} = F(\eta) \tag{5.40}$$

unde $F(\eta)$ este o functie arbitrara in η. Integrand in raport cu variabila η

$$\phi(\xi, \eta) = f_1(\xi) + \int F(\eta)d\eta = f_1(\xi) + f_2(\eta) \tag{5.41}$$

sau

$$\phi(x, t) = f_1(x - ct) + f_2(x + ct) \tag{5.42}$$

Rezulta deci ca cea mai generala expresie a lui $\phi(x, t)$ care satisface ecuatia (5.32) este suma a doua functii arbitrare f_1 si f_2 de variabile $x - ct$ respectiv $x + ct$.

Sa consideram functia

$$\phi(x, t) = f_1(x - ct) \tag{5.43}$$

Se observa ca pentru $t = 0$ aceasta este o functie oarecare de x (Fig. 5.3). Fie B_0 un maxim pentru $x = x_0$ (avand amplitudinea $f_1(x_0)$).

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

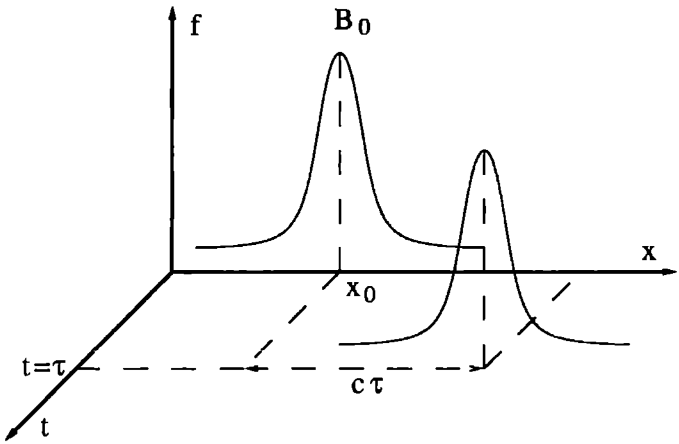


Fig. 5.3

Pentru $t = \tau$ functia devine $\phi(x - c\tau)$ iar noua pozitie a maximului se obtine pentru

$$f_1(x_0) = f_1(x - c\tau) \tag{5.44}$$

adica

$$x = x_0 + c\tau \tag{5.45}$$

Asadar, functia f_1 isi pastreaza forma initiala pe masura ce timpul creste daca coordonata x se deplaseaza in sensul pozitiv al axei cu viteza c. Functia $f_1(x - ct)$ reprezinta unda ce se deplaseaza spre dreapta in timp ce $f_1(x + ct)$ se propaga spre stanga.

Se numeste faza cantitatea

$$\varphi(x, t) = x - ct$$

Suprafetele de faza constanta reprezinta suprafete pentru care $\varphi(x, t)$ =const. In cazul unidimensional considerat mai sus, suprafetele de faza constanta, la orice moment de timp t, sunt plane (x =const.) paralele cu planul O_{yz}.

$$x = \text{const.} + ct \tag{5.46}$$

Viteza de deplasare V a unei suprafete de faza constanta se obtine din

$$d\varphi = dx - cdt = 0 \tag{5.47}$$

si deci

$$V = \left.\frac{dx}{dt}\right|_{\varphi=\text{const.}} = c \tag{5.48}$$

fiind egala cu viteza c.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Unde plane monocromatice In acest caz marimile caracteristice variaza sinusoidal in timp. Utilizand scrierea complexa

$$\widetilde{\phi}(x, y, z, t) = \phi_0(x, y, z)e^{-i\omega t} \tag{5.49}$$

astfel incat

$$\phi(x, y, z, t) = \Re e\{\widetilde{\phi}(x, y, z, t)\} = \Re e\left\{\phi_0(x, y, z)e^{-i\omega t}\right\} \tag{5.50}$$

si avand in vedere ca

$$\frac{\partial^2 \widetilde{\phi}}{\partial t^2} = -\omega^2 \phi_0 e^{-i\omega t} \tag{5.51}$$

$$\Delta \widetilde{\phi} = \Delta \phi_0 e^{-i\omega t} \tag{5.52}$$

se obtine pentru $\phi_0(x, y, z)$ ecuatia:

$$\Delta \phi_0 + \frac{\omega^2}{c^2}\phi_0 = 0 \tag{5.53}$$

numita ecuatia Helmholtz.

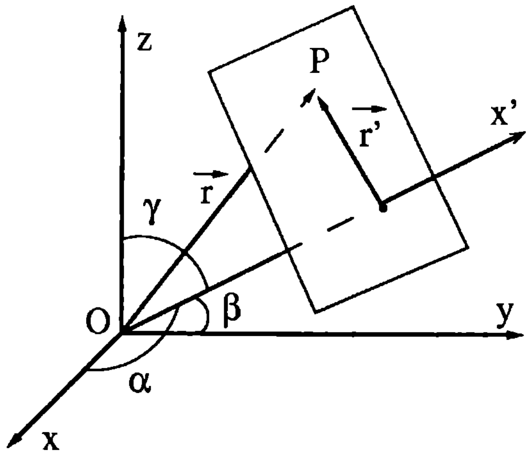


Fig. 5.4

In particular putem considera unda plana monocromatica. In acest caz:

$$\phi(x, t) = f(x - ct) = f_0(x)e^{-i\omega t} \tag{5.54}$$

unde $f_0(x)$ satisface ecuatia

$$\frac{d^2 f_0}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2} f_0(x) = 0 \tag{5.55}$$

Solutia ecuatiei (5.55) este

$$f_0 = Ae^{ikx} \tag{5.56}$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

unde $k = \omega/c$ iar $A = A_0 e^{i\alpha}$. Rezulta atunci

$$\tilde{\phi}(x,\, t) = Ae^{-i\omega(t-\frac{x}{c})} = Ae^{-k(ct-x)} \tag{5.57}$$

si deci

$$\phi(x,\, t) = \Re e\left\{\tilde{\phi}(x,\, t)\right\} = A_0 \cos\left(\frac{\omega}{c}x - \omega t + \alpha\right) \tag{5.58}$$

Sa consideram acum o unda monocromatica plana a carei directie de propagare este specificata de unghiurile α, β, γ pe care axa $O_{x'}$ le face cu axele O_x, O_y, O_z.

Astfel, daca $\vec{n}$ este un vector in directia axei $O_{x'}$ atunci

$$\vec{n} = \cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\,\vec{k} \tag{5.59}$$

In raport cu sistemul de coordonate $O_{x'y'z'}$ unda este descrisa de:

$$\tilde{\Phi}(x', t) = Ae^{i(kx'-\omega t)} \tag{5.60}$$

Coordonata x' in lungul axei $O_{x'}$ poate fi exprimata in functie de coordonatele x, y, z ale vectorului de pozitie $\vec{r}$ prin relatia:

$$x' = \vec{n}\cdot\vec{r} = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma \tag{5.61}$$

astfel incat in raport cu sistemul de coordonate O_{xyz} unda este descrisa de

$$\tilde{\phi}(\vec{r},\, t) = Ae^{i(k\vec{n}\cdot\vec{r}-\omega t)} \tag{5.62}$$

sau, introducand vectorul de unda $\vec{k} = (\omega/c)\vec{n}$ avand marimea ω/c si directia data de versorul $\vec{n}$ atunci

$$\tilde{\phi}(\vec{r},\, t) = Ae^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \tag{5.63}$$

Unde P si S monocromatice Considerand ca vectorul deformatie variaza armonic in timp, atunci

$$\tilde{\vec{u}}(\vec{r},\, t) = \tilde{\vec{u}}_0(\vec{r})e^{-i\omega t} = \tilde{\vec{u}}_l(\vec{r},\, t) + \tilde{\vec{u}}_t(\vec{r},\, t) = \tag{5.64}$$

$$= \tilde{\vec{u}}_{0l}(\vec{r})e^{-i\omega t} + \tilde{\vec{u}}_{0t}(\vec{r})e^{-i\omega t}$$

unde s-a avut in vedere relatia (5.21)(Helmholtz).

Dar

$$\frac{\partial^2\tilde{\vec{u}}_\alpha}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left\{\tilde{\vec{u}}_{0\alpha}(\vec{r})e^{-i\omega t}\right\} = -\omega^2\tilde{\vec{u}}_{o\alpha}(\vec{r})e^{-i\omega t}$$

$$\Delta\tilde{\vec{u}}_\alpha(\vec{r}) = \Delta\left\{\tilde{\vec{u}}_{0\alpha}(\vec{r})e^{-i\omega t}\right\} = \Delta\tilde{\vec{u}}_{o\alpha}(\vec{r})e^{-i\omega t} \tag{5.65}$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

unde indicele $\alpha = t, l$.

Atunci, ecuatia undelor pentru fiecare componenta devine:

$$\Delta \overrightarrow{\widetilde{u}}_{0l} + k_l^2 \overrightarrow{\widetilde{u}}_{0l} = 0$$

$$\Delta \overrightarrow{\widetilde{u}}_{0t} + k_l^2 \overrightarrow{\widetilde{u}}_{0t} = 0 \tag{5.66}$$

adica amplitudinile complexe ale ambelor tipuri de unde satisfac ecuatia Helmholtz, iar

$$k_l = \omega / c_l$$
$$k_t = \omega / c_t \tag{5.67}$$

reprezinta vectori de unda pentru unda longitudinala respectiv transversala.

In cazul undelor plane monocromatice

$$\overrightarrow{\widetilde{u}}_{0l}(\vec{r}) = \overrightarrow{\widetilde{A}}_{0l} e^{i \vec{k}_l \cdot \vec{r}}$$

$$\overrightarrow{\widetilde{u}}_{0t}(\vec{r}) = \overrightarrow{\widetilde{A}}_{0t} e^{i \vec{k}_t \cdot \vec{r}}$$

astfel incat

$$\overrightarrow{\widetilde{u}}_l(\vec{r}, t) = \overrightarrow{\widetilde{A}}_{0l} e^{i(\vec{k}_l \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

$$\overrightarrow{\widetilde{u}}_t(\vec{r}, t) = \overrightarrow{\widetilde{A}}_{0t} e^{i(\vec{k}_t \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

5.3 Unde SV si SH

Am vazut ca

$$\vec{u} = \vec{u}_P + \vec{u}_S = grad\, \phi + rot\, \vec{\psi} \tag{5.68}$$

astfel incat

$$u_1 = \frac{\partial \phi}{\partial x_1} + \left(\frac{\partial \psi_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \psi_2}{\partial x_3} \right) \tag{5.69}$$

$$u_2 = \frac{\partial \phi}{\partial x_2} + \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_3} - \frac{\partial \psi_3}{\partial x_1} \right) \tag{5.70}$$

$$u_3 = \frac{\partial \phi}{\partial x_3} + \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} \right) \tag{5.71}$$

Considerand sistemul de coordonate din Fig 5.2

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

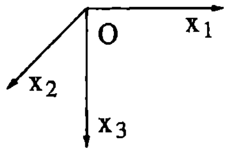


Fig. 5.2

in carea planul $O_{x_1x_2}$ coincide cu suprafata Pamantului iar axa O_{x_3} cu adancimea si considerand miscarea independenta de coordonata x_2, rezulta:

$$u_1 = \frac{\partial\phi}{\partial x_1} - \frac{\partial\psi_2}{\partial x_3}$$

$$u_2 = \frac{\partial\psi_1}{\partial x_3} - \frac{\partial\psi_3}{\partial x_1} \tag{5.72}$$

$$u_3 = \frac{\partial\phi}{\partial x_3} + \frac{\partial\psi_2}{\partial x_1}$$

Din relatiile de mai sus se observa ca in componenta u_2 a deplasarii nu apare unda P ci numai unda S. Aceasta este componenta orizontala a undei S, notata u_{SH}. Componentele u_1 si u_3 contin atat unda P cat si unda S astfel incat

$$-\frac{\partial\psi_2}{\partial x_3}\vec{e}_1 + \frac{\partial\psi_2}{\partial x_1}\vec{e}_3 = \vec{u}_{SV} \tag{5.73}$$

formeaza componenta verticala a undei S. Putem scrie deplasarea $\vec{u}$ sub forma:

$$\vec{u} = \vec{u}_P + \vec{u}_S = \vec{u}_P + \vec{u}_{SH} + \vec{u}_{SV} \tag{5.74}$$

dar

$$\vec{u}_{SV} = rot\ \left(\psi^{SV}\vec{e}_2\right) \tag{5.75}$$

Intr-adevar

$$rot\ \left(\psi^{SV}\vec{e}_2\right) = -\frac{\partial\psi^{SV}}{\partial x_3}\vec{e}_1 + \frac{\partial\psi^{SV}}{\partial x_1}\vec{e}_3 \tag{5.76}$$

unde $\psi^{SV} = \psi_2$ iar

$$\vec{u}_{SH} = V\vec{e}_2 = \left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x_3} - \frac{\partial\psi_3}{\partial x_1}\right)\vec{e}_2 = rot\ \left(\psi^{SH}\vec{e}_3\right) \tag{5.77}$$

Trebuie observat ca ψ^{SV} si ψ^{SH} satisfac ecuatia undelor

$$\Delta\psi^{SV,SH} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi^{SV,SH}}{\partial t^2} = 0 \tag{5.78}$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

5.4 Unde sferice

Revenind la ecuatia undelor (5.32) si considerand

$$\phi = \phi(r, t) \tag{5.79}$$

astfel incat marimile caracteristice depind spatial doar de distanta r pana la un punct (centrul undei). Undele sferice sunt produse de o sursa punctuala intr-un mediu omogen si izotrop. Exprimand laplaceanul in coordonate sferice si avand in vedere simetria problemei se obtine

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial \phi}{\partial r}\right) = 0 \tag{5.80}$$

Cautand o solutie de forma

$$\phi(r, t) = \frac{f(r, t)}{r} \tag{5.81}$$

atunci

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \tag{5.82}$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial \phi}{\partial r}\right) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{f(r, t)}{r}\right)\right] = \frac{1}{r}\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \tag{5.83}$$

rezultand

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} = 0 \tag{5.84}$$

care reprezinta ecuatia undelor plane (in variabila r), cu solutia

$$f(r, t) = f_1(r - ct) + f_2(r + ct) \tag{5.85}$$

unde f_1 si f_2 sunt functii arbitrare.

Solutia generala a undelor sferice este

$$\phi(r, t) = \frac{f_1(r - ct)}{r} + \frac{f_2(r + ct)}{r} = \phi_d(r, t) + \phi_c(r, t) \tag{5.86}$$

unde

$$\phi_d(r, t) = \frac{f_1(r - ct)}{r} \tag{5.87}$$

reprezinta unda divergenta, iar

$$\phi_c(r, t) = \frac{f_2(r + ct)}{r} \tag{5.88}$$

reprezinta unda convergenta.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

In cazul in care nu exista surse in origine ($r = 0$), atunci

$$\begin{aligned} \phi(r=0,\, t) &= \text{finit} \\ &= \left.\frac{f_1(r-ct)+f_2(r+ct)}{r}\right|_{r=0} \end{aligned} \tag{5.89}$$

rezulta

$$f_1(r-ct) + f_2(r+ct)\big|_{r=0} = 0 \tag{5.90}$$

si deci

$$f_2 = -f_1 = f \tag{5.91}$$

astfel incat in cazul undelor sferice fara surse in origine

$$\phi(r,\, t) = \frac{f(r-ct) + f(r+ct)}{r} \tag{5.92}$$

Daca exista surse in origine ($r = 0$), atunci

$$\phi(r,\, t) = \phi_d(r,\, t) = \frac{f(r-ct)}{r} \tag{5.93}$$

unde $f_2 = 0$ si $f_1 = f$.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Capitolul 6

Reflectia si refractia undelor

6.1 Introducere

In timpul propagarii undelor de volum in interiorul Pamantului acestea vor suferi reflectii si refractii ca si in cazul undelor luminoase. Pentru ca fenomenul de reflexie si refractie sa aiba loc trebuie sa existe o variatie a vitezei la suprafata de separare a celor doua medii. Aceasta presupune o modificare a proprietatilor elastice sau a densitatii celor doua medii.

Exista insa o diferenta majora fata de fenomenele optice. Existenta celor doua tipuri de unda, P si S, face de exemplu ca o unda incidenta P la suprafata de separare a celor doua medii solide va da nastere la patru tipuri de unde (Fig 6.1): doua reflectate P si S si doua refractate P si S. Eficienta conversiei unui tip de unda este determinata de coeficientii de reflexie si refractie.

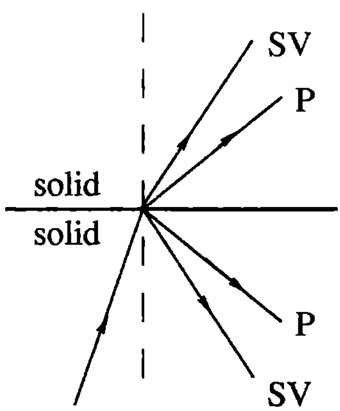


Fig. 6.1

In figura 6.2 sunt rezumate diverse cazuri posibile.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

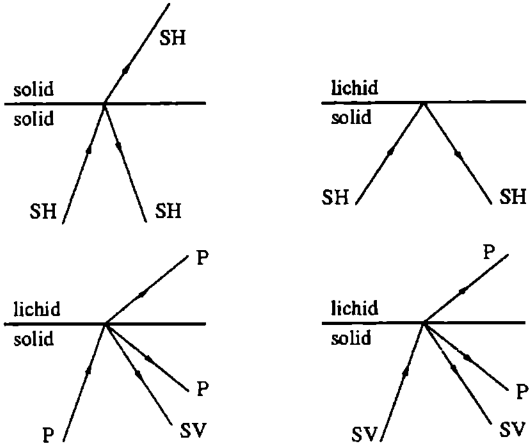


Fig. 6.2

In fiecare din cele doua regiuni este valabila ecuatia de miscare pentru un mediu omogen. Evident, la suprafata de separatie trebuiesc impuse conditii asupra tensiunilor si deformatiilor.

In cazul unei suprafete libere ($O_{x_1x_2}$) trebuie ca $\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0$, celelalte componente nefiind supuse la constrangeri. In acest caz asupra deplasarilor nu se impune nici o conditie.

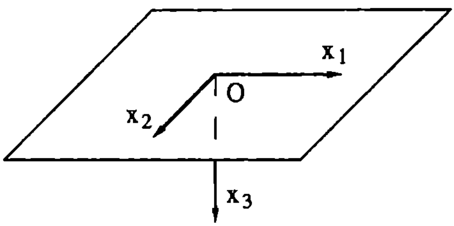


Fig. 6.3

Daca interfata este intre un solid si un fluid prefect, fluidul poate aluneca in lungul interfetei. In acest caz componentele tangentiale ale deplasarii nu sunt continue iar tensiunile tangentiale se anuleaza. Datorita complexitatii calculelor algebrice vom determina in continuare coeficientii de reflexie si refractie pentru cazul unei unde P incidenta la o suprafata libera.

6.2 Reflexia undelor P pe o suprafata libera

Am vazut mai sus ca in cazul unei suprafete libere tensiunile se anuleaza. Cum in cazul Pamantului masuratorile se fac in apropierea sau la suprafata este necesara intelegerea fenomenelor ce au loc in aceasta zona pentru interpretarea seismogramelor.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Sa consideram o unda plana P incidenta la o suprafta libera si care face unghiul θ_p cu axa O_{x_3} (fig 6.4). Planul $O_{x_1x_2}$ coincide cu suprafata libera :

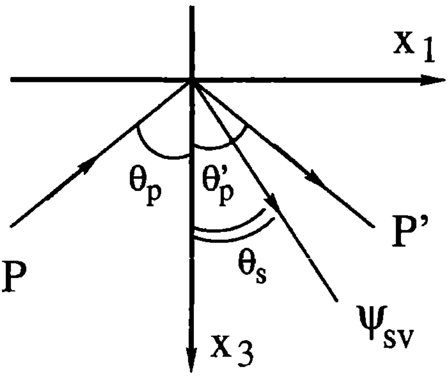


Fig. 6.4

Vom considera unde plane armonice. In acest caz potentialul $\widetilde{\phi}$ al undei P incidente este dat de:

$$\widetilde{\phi}_i = a_{pp}e^{ik_p(x_1\sin\theta_p - x_3\cos\theta_p)} \tag{6.1}$$

unde s-a omis factorul $e^{i\omega t}$.

Avand in vedere faptul ca undele P sunt cuplate cu undele SV, vom avea pentru undele P si SV reflectate

$$\begin{aligned} \widetilde{\phi}_r &= a'_{pp}e^{ik_p(x_1\sin\theta'_p + x_3\cos\theta'_p)} \\ \psi_{SV} &= a_{ps}e^{ik_s(x_1\sin\theta'_s + x_3\cos\theta'_s)} \end{aligned} \tag{6.2}$$

In general deci,

$$\begin{aligned} \phi &= a_{pp}e^{ik_p(x_1\sin\theta_p - x_3\cos\theta_p)} + a'_{pp}e^{ik_p(x_1\sin\theta'_p + x_3\cos\theta'_p)} \\ \psi_{SV} &= a_{ps}e^{ik_s(x_1\sin\theta'_s + x_3\cos\theta'_s)} \end{aligned} \tag{6.3}$$

unde marimea vectorilor de unde este data de $k_p = \omega/\nu_p$, $k_s = \omega/\nu_s$. Compunentele u_1 respectiv u_3 ale deplasarii sunt:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{\partial\phi}{\partial x_1} - \frac{\partial\psi^{SV}}{\partial x_3} \\ u_3 &= \frac{\partial\phi}{\partial x_3} + \frac{\partial\psi^{SV}}{\partial x_1} \end{aligned} \tag{6.4}$$

astfel incat

$$\begin{aligned} u_1 = {} & ik_p\sin\theta_p a_{pp}e^{ik_p(x_1\sin\theta_p - x_3\cos\theta_p)} + ik_p\sin\theta'_p a'_{pp}e^{ik_p(x_1\sin\theta'_p + x_3\cos\theta'_p)} - \\ & -ik_s\cos\theta_s a_{ps}e^{ik_s(x_1\sin\theta'_s + x_3\cos\theta'_s)} \end{aligned} \tag{6.5}$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

$$u_1 = -ik_p \cos\theta_p a_{pp} e^{ik_p(x_1 \sin\theta_p - x_3 \cos\theta_p)} + ik_p \cos\theta'_p a'_{pp} e^{ik_p(x_1 \sin\theta'_p + x_3 \cos\theta'_p)} +$$
$$+ik_s \sin\theta_s a_{ps} e^{ik_s(x_1 \sin\theta'_s + x_3 \cos\theta'_s)} \tag{6.6}$$

Relatiile intre coeficienti se gasesc impunand conditiile la limita

$$\sigma_{13}|_{x_3=0} = 0 \quad \text{si} \quad \sigma_{33}|_{x_3=0} = 0 \tag{6.7}$$

cu

$$\sigma_{13}|_{x_3=0} = \mu\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right)\Bigg|_{x_3=0} = 0 \tag{6.8}$$

$$\sigma_{33}|_{x_3=0} = \left(\lambda\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + (\lambda+2\mu)\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)\Bigg|_{x_3=0} = 0 \tag{6.9}$$

unde am avut in vedere ca derivatele in raport cu x_2 sunt egale cu zero.

Rezulta atunci:

$$k_p^2 \sin 2\theta_p a_{pp} e^{ik_p(x_1 \sin\theta_p - x_3 \cos\theta_p)} - k_p^2 \sin 2\theta'_p a'_{pp} e^{ik_p(x_1 \sin\theta'_p + x_3 \cos\theta'_p)} +$$
$$+k_s^2 \cos 2\theta_s a_{ps} e^{ik_s(x_1 \sin\theta'_s + x_3 \cos\theta'_s)}\Big|_{x_3=0} = 0 \tag{6.10}$$

astfel incat

$$k_p \sin\theta_p = k_p \sin\theta'_p = k_s \sin\theta_s \tag{6.11}$$

de unde

$$\theta'_p = \theta_p \quad \text{si} \quad \frac{\sin\theta_p}{\nu_p} = \frac{\sin\theta_s}{\nu_s} \tag{6.12}$$

Considerand $\lambda \approx \mu$ rezulta $\nu_p/\nu_s = \sqrt{3}$ astfel incat

$$\frac{\sin^2\theta_p}{\sin^2\theta_s} = 3 \tag{6.13}$$

Revenind la relatia (6.10) si avand in vedere (6.11) se obtine:

$$k_p^2 \sin 2\theta_p a_{pp} - k_p^2 \sin 2\theta_p a'_{pp} + k_s^2 \cos 2\theta_s a_{ps} = 0 \tag{6.14}$$

sau

$$\sin 2\theta_p - \frac{a'_{pp}}{a_{pp}} \sin 2\theta_p + \frac{k_s^2}{k_p^2}\frac{a_{ps}}{a_{pp}} \cos 2\theta_s = 0 \tag{6.15}$$

Din conditaia $\sigma_{33}|_{x_3=0} = 0$ rezulta:

$$-a_{pp}k_p^2(\lambda + 2\mu\cos^2\theta_p) - a'_{pp}k_p^2(\lambda + 2\mu\cos^2\theta_p) - \mu a_{ps}k_s^2 \sin 2\theta_s = 0 \tag{6.16}$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

dar din

$$V_p^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \tag{6.17}$$

$$V_s^2 = \frac{\mu}{\rho} \tag{6.18}$$

rezulta

$$\lambda = \rho(V_p^2 - 2V_s^2) \tag{6.19}$$

astfel incat

$$\begin{aligned} \lambda + 2\mu\cos^2\theta_p &= \rho(V_p^2 - 2V_s^2 + 2V_s^2\cos^2\theta_p) = \\ &= \rho\left[V_p^2 + 2V_s^2(-1+\cos^2\theta_p)\right] = \rho(V_p^2 - 2V_s^2\sin^2\theta_p) \end{aligned} \tag{6.20}$$

si avand in vedere relatia (6.12)

$$\begin{aligned} \lambda + 2\mu\cos^2\theta_p &= \rho\left(V_p^2 - 2V_s^2\tfrac{V_p^2}{V_s^2}\sin^2\theta_p\right) = \\ &= \rho V_p^2(1 - 2\sin^2\theta_s) = \rho V_p^2\cos 2\theta_s \end{aligned} \tag{6.21}$$

rezultand deci

$$-a_{pp}k_p^2V_p^2\cos 2\theta_s - a'_{pp}k_p^2V_p^2\cos 2\theta_s - a_{ps}k_s^2V_s^2\sin 2\theta_s = 0 \tag{6.22}$$

sau

$$\cos 2\theta_s + \frac{a'_{pp}}{a_{pp}}\cos 2\theta_s + \frac{V_s^2}{V_p^2}\frac{k_s^2}{k_p^2}\frac{a_{ps}}{a_{pp}}\sin 2\theta_s = 0 \tag{6.23}$$

si deci se obtine sistemul

$$\begin{cases} \cos 2\theta_s + \frac{a'_{pp}}{a_{pp}}\cos 2\theta_s + \frac{a_{ps}}{a_{pp}}\sin 2\theta_s = 0 \\ \sin 2\theta_p - \frac{a'_{pp}}{a_{pp}}\sin 2\theta_p + \frac{V_p^2}{V_s^2}\frac{a_{ps}}{a_{pp}}\cos 2\theta_s = 0 \end{cases} \tag{6.24}$$

Determinantul sistemului este:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -\cos 2\theta_s & -\sin 2\theta_s \\ \sin 2\theta_p & -\frac{V_p^2}{V_s^2}\cos 2\theta_s \end{vmatrix} = \frac{V_p^2}{V_s^2}\cos^2 2\theta_s + \sin 2\theta_p \sin 2\theta_s \tag{6.25}$$

rezulta atunci

$$\frac{a'_{pp}}{a_{pp}} = \frac{\begin{vmatrix} +\cos 2\theta_s & -\sin 2\theta_s \\ \sin 2\theta_p & -\frac{V_p^2}{V_s^2}\cos 2\theta_s \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-\frac{V_p^2}{V_s^2}\cos^2 2\theta_s + \sin 2\theta_p\sin 2\theta_s}{\Delta} = \tag{6.26}$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

$$= \frac{\cos^2 2\theta_s - \frac{V_s^2}{V_p^2}\sin 2\theta_p \sin 2\theta_s}{\cos^2 2\theta_s + \frac{V_s^2}{V_p^2}\sin 2\theta_p \sin 2\theta_s}$$

analog

$$\frac{a_{ps}}{a_{pp}} = \frac{\begin{vmatrix} -\cos 2\theta_s & \cos 2\theta_s \\ \sin 2\theta_p & \sin 2\theta_p \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-2\sin 2\theta_p \cos 2\theta_s}{\frac{V_p^2}{V_s^2}\cos^2 2\theta_s + \sin 2\theta_p \sin 2\theta_s} = \tag{6.27}$$

$$= -\frac{2\sin 2\theta_p \cos 2\theta_s}{\frac{V_p^2}{V_s^2}\left(\cos^2 2\theta_s + \frac{V_s^2}{V_p^2}\sin 2\theta_p \sin 2\theta_s\right)} = -\frac{2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 \sin 2\theta_p \cos 2\theta_s}{\cos^2 2\theta_s + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 \sin 2\theta_p \sin 2\theta_s}$$

In cazul in care $\theta_p = 0$ rezulta

$$a'_{pp} = -a_{pp} \tag{6.28}$$

$$a_{ps} = 0$$

deci unda reflectata este de tip longitudinal.

6.3 Reflexia undelor SV pe o suprafta libera

In cazul unei unde incidente SV pe o suprafata libera vor rezulta (Fig. 6.5) o unda P si una SV reflectate.

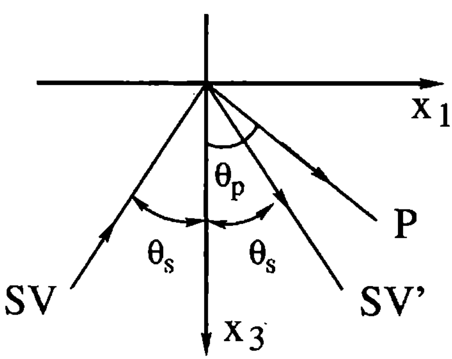


Fig. 6.5

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Rezulta atunci :

$$\psi^{SV} = a'_{SV} e^{ik_s(x_1 \sin\theta_s - x_3 \cos\theta_s)} + a_{SV} e^{ik_s(x_1 \sin\theta_s + x_3 \cos\theta_s)} \tag{6.29}$$

$$\phi_r = a_{sp} e^{ik_p(x_1 \sin\theta_p + x_3 \cos\theta_p)} \tag{6.30}$$

In acest caz componentele deplasarii sunt

$$u_1 = ik_p \sin\theta_p a_{sp} e^{ik_p(x_1 \sin\theta_p + x_3 \cos\theta_p)} + ik_s \cos\theta_s a_{sv} e^{ik_s(x_1 \sin\theta_s - x_3 \cos\theta_s)} - \\ - ik_s \cos\theta_s a'_{sv} e^{ik_s(x_1 \sin\theta_s + x_3 \cos\theta_s)} \tag{6.31}$$

$$u_3 = ik_p \cos\theta_p a_{sp} e^{ik_p(x_1 \sin\theta_p + x_3 \cos\theta_p)} + ik_s \sin\theta_s a_{sv} e^{ik_s(x_1 \sin\theta_s - x_3 \cos\theta_s)} + \\ + ik_s \sin\theta_s a'_{sv} e^{ik_s(x_1 \sin\theta_s + x_3 \cos\theta_s)} \tag{6.32}$$

Din conditiile

$$\sigma_{13}|_{x_3=0} = 0 \quad \text{si} \quad \sigma_{33}|_{x_3=0} = 0 \tag{6.33}$$

rezulta sistemul

$$\begin{cases} \sin 2\theta_s - \frac{a'_{sv}}{a_{sv}} \sin 2\theta_s - \frac{a_{sp}}{a_{sv}} \cos 2\theta_s = 0 \\ \cos 2\theta_s + \frac{a'_{sv}}{a_{sv}} \cos 2\theta_s - \frac{V_s^2}{V_p^2} \frac{a_{sp}}{a_{sv}} \sin 2\theta_p = 0 \end{cases} \tag{6.34}$$

avand determinantul egal cu:

$$\Delta = \frac{V_s^2}{V_p^2} \sin 2\theta_s \sin 2\theta_p + \cos^2 2\theta_s \tag{6.35}$$

rezulta atunci

$$\frac{a'_{sv}}{a_{sv}} = \frac{\begin{vmatrix} \sin 2\theta_s & \cos 2\theta_s \\ \cos 2\theta_s & \frac{V_s^2}{V_p^2} \sin 2\theta_p \end{vmatrix}}{\frac{V_s^2}{V_p^2} \sin 2\theta_s \sin 2\theta_p + \cos^2 2\theta_s} = \frac{\frac{V_s^2}{V_p^2} \sin 2\theta_p \sin 2\theta_s - \cos^2 2\theta_s}{\frac{V_s^2}{V_p^2} \sin 2\theta_s \sin 2\theta_p + \cos^2 2\theta_s} \tag{6.36}$$

analog

$$\frac{a_{sp}}{a_{sv}} = \frac{2 \sin 2\theta_s \cos 2\theta_s}{\frac{V_p^2}{V_s^2} \cos^2 2\theta_s + \sin 2\theta_p \sin 2\theta_s} = \tag{6.37}$$

$$= \frac{2 \sin 2\theta_s \cos 2\theta_s}{\frac{V_p^2}{V_s^2} \left(\cos^2 2\theta_s + \frac{V_s^2}{V_p^2} \sin 2\theta_p \sin 2\theta_s \right)} = \frac{2 \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^2 \sin 2\theta_s \cos 2\theta_s}{\cos^2 2\theta_s + \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^2 \sin 2\theta_p \sin 2\theta_s}$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

6.4 Reflexia totala in cazul undelor SV

Am vazut in paragraful anterior ca in cazul reflexiei undelor SV legea sinusului este

$$\frac{\sin\theta_p}{V_p} = \frac{\sin\theta_s}{V_s} \tag{6.38}$$

si cum $V_p > V_s$ rezulta

$$\sin\theta_p = \frac{V_p}{V_s}\sin\theta_s > \sin\theta_s \tag{6.39}$$

si deci $\theta_p > \theta_s$. In acest caz exista o valoare a unghiului de incidenta θ_s^l, numit unghi limita, pentru care $\theta_p = \pi/2$ si deci $\sin\theta_p = 1$, adica:

$$\sin\theta_s^l = \frac{V_s}{V_p} \tag{6.40}$$

sau

$$\theta_s^l = \arcsin\frac{V_s}{V_p} \tag{6.41}$$

Rezulta ca pentru unghiuri mai mari decat θ_s^l,

$$\frac{V_p}{V_s}\sin\theta_s > 1 \tag{6.42}$$

ceea ce duce la fenomenul de reflexie totala.

Potentialul corespunzator undelor P se scrie (exceptand factorul temporal $e^{i\omega t}$):

$$\phi_r = a_{sp}e^{ik_p(x_1\sin\theta_p + x_3\cos\theta_p)} \tag{6.43}$$

dar

$$\cos\theta_p = \pm\sqrt{1-\sin^2\theta_p} = \pm\sqrt{1-\left(\frac{V_p}{V_s}\right)^2\sin^2\theta_s}$$

si avand in vedere (6.42) rezulta:

$$\cos\theta_p = \pm i\sqrt{\left(\frac{V_p}{V_s}\right)^2\sin^2\theta_s - 1} \tag{6.44}$$

Rezulta atunci

$$\phi_r = a_{sp}e^{ik_p\left(x\sin\theta_p \pm iz\sqrt{\left(\frac{V_p}{V_s}\right)^2\sin^2\theta_s - 1}\right)} =$$

$$= a_{sp}e^{\mp k_p z\sqrt{\left(\frac{V_p}{V_s}\right)^2\sin^2\theta_s - 1}}e^{ik_p x\sin\theta_p} \tag{6.45}$$

notand $k = k_p\sin\theta_p$ relatia (6.45) devine:

$$\phi_r = a_{sp}e^{\mp\sqrt{k^2-k_p^2}z}e^{ikx}$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

6.5 Reflexia undelor SH pe o suprafta libera

In cazul in care o unda SH intalneste o suprafata de discontinuitate paralela cu miscarea SH sunt generate numai doua unde: o unda SH reflectata si o unda SH' reflectata (Fig. 6.7)

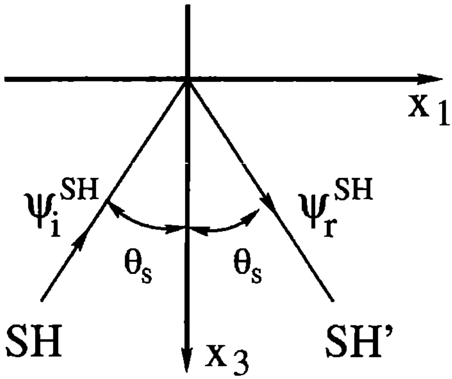


Fig. 6.7

In cazul unei suprafete libere va rezulta deci numai o unda SH reflectata. Potentialele corespunzatoare sunt:

$$\psi_i^{SH} = a_{SH} e^{ik_s(x_1 \sin\theta_s - x_3 \cos\theta_s)}$$

$$\psi_r^{SH} = a'_{SH} e^{ik_s(x_1 \sin\theta_s + x_3 \cos\theta_s)}$$

Singura tensiune care se anuleaza este

$$\sigma_{23}|_{x_3=0}$$

sau

$$\left.\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right|_{x_3=0} = 0$$

unde am avut in vedere ca $\partial u_3/\partial x_2 = 0$; cum

$$u_2 = -\frac{\partial \psi^{SH}}{\partial x_1}$$

rezulta

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_3}\left(a_{SH} e^{ik_s(x_1 \sin\theta_s - x_3 \cos\theta_s)} + a'_{SH} e^{ik_s(x_1 \sin\theta_s + x_3 \cos\theta_s)}\right)\Big|_{z=0} = 0$$

de unde se obtine

$$a_{SH} = a'_{SH}$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

6.6 Notatia undelor de volum

In seismologie datele experimentale sunt furnizate de seismograme. Seismogramele sunt alcatuite din faze (Fig 6.7). O faza este inregistrarea corespunzatoare unui anumit tip de unda.

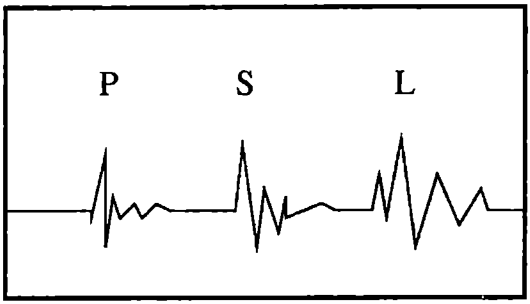


Fig. 6.7

Fazele unei seismograme se disting prin trasaturi specifice ale inregistrarii. De foarte multe ori fazele se suprapun ceea ce face dificila identificarea si delimitarea lor.

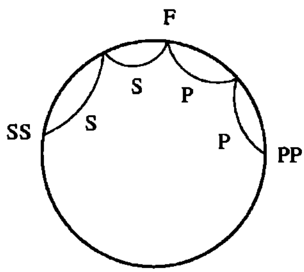


Fig. 6.8

Din acest punct de vedere, o pozitie privilegiata o au undele de volum longitudinale directe, undele P, care sosesc in general primele la o statie seismica. Undele P sau S se pot relecta de suprafata libera. Fazele corespunzatoare undelor care au suferit reflexii la suprafata exterioara a Pamantului sunt notate PP, PPP, SS, SSS, PS, SP, PPS etc. De exemplu, PS corespunde unei unde de tip P inainte de reflexie si de tip S dupa aceea (Fig 6.8).

Alte faze importante sunt asociate cu prezenta discontinuitatii suprafetei care la adancimea de 2900 Km separa mantaua de nucleul exterior. Astfel daca o unda P este refectata pe o suprafata exterioara a nucleului exterior, unda reflectata fiind de tip S, notatia utilizata este PcS. In mod similar exista fazele PcP, ScS, ScP (Fig 6.9).

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

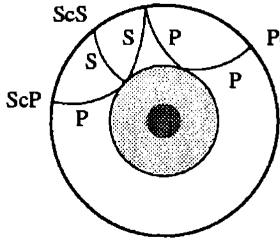


Fig. 6.9

Simbolul K este folosit pentru a nota partea drumului undei (de tip P) care a trecut prin nucleul exterior. Astfel fazele PKS corespund undelor care initial de tip P se refracta prin nucleul exterior tot de tip P si sunt refractate in manta de tip S (Fig 6.10).

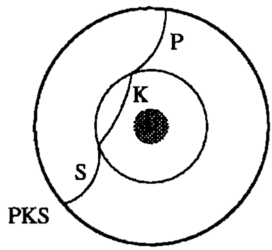


Fig. 6.10

Ca extensie, se pot obtine unde SKS, SKP. Fazele $PKKP$, $PKKKP$, $SKKS$ corespund undelor care au suferit reflexie pe suprafata interna a nucleului exterior (Fig 6.11).

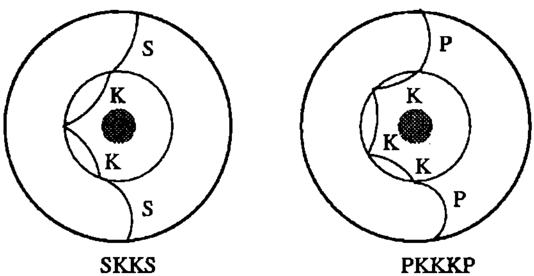


Fig. 6.11

Pentru drumul undelor in interiorul nucleului central se utilizeaza notatia I (pentru undele de tip P). Astfel, $PKIKP$ corespunde unei unde care pleaca din manta, este refractata in nucleul exterior ca o unda P (K), este refractata in nucleul exterior ca o unda P (notatia I), este refractata din nou ca o unda P in nucleul exterior (K) si este refractata din nou ca o unda P in manta (Fig 6.12).

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

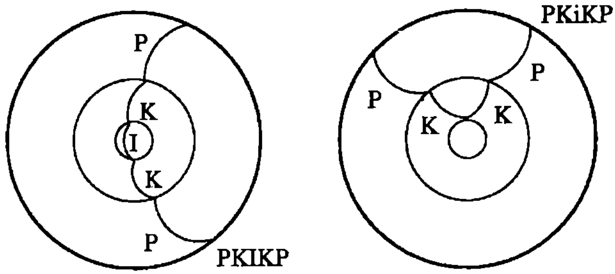


Fig. 6.12

In cazul undelor S nu exista simbolul K deoarece acestea nu patrund in nucleul exterior. Simbolul J a fost adoptat pentru undele S care patrund in nucleul interior.

Simbolul i semnifica reflexia pe suprafata nucleului interior (de exemplu $PKiKP$).

In cazul cutremurelor adanci putem avea unde de tipul pP reprezentand unda directa inspre suprafata Pamantului (Fig 6.13). Evident in acest caz putem intalni urmatoarele faze: sS, pS si sP. Aceste tipuri de unde sunt importante in determinarea adancimii focarului: cu cat acesta este mai adanc cu atat este mai mare timpul de parcurs al undei pP fata de unda P. Se pot intalni si unde de tipul pPP, pPS etc (Fig 6.14).

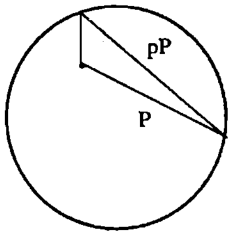


Fig. 6.13

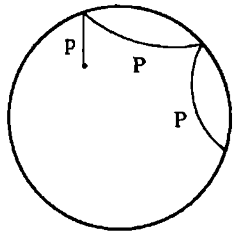


Fig. 6.14

In intervalul $0° - 13°$ $(0 - 1400\,Km)$ in propagarea undelor apar numai faze crustrale. La aceste distante mici se poate neglija curbura Pamantului si considera straturile plan-paralele. Astfel, in Fig 6.16 OO reprezinta suprafata Pamantului, CC discontinuitatea Conrad, MM discontinuitatea Mohorovicic (Moho) iar sub MM se afla mantaua.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

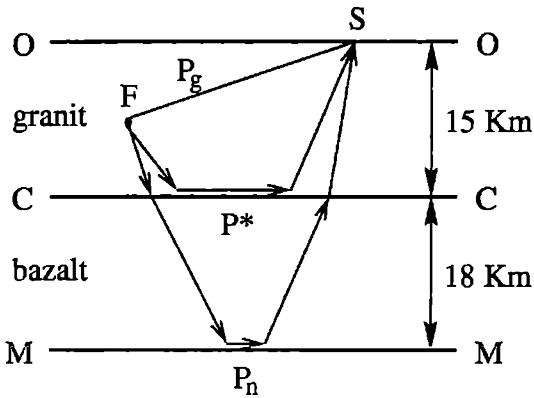


Fig. 6.15

Vom avea urmatoarele tipuri de unda:

- P_g, S_g -unda directa longitudinala, respectiv transversala prin stratul de granit;
- P^*, S^* -unda longitudinala, respectiv transversala care urmeaza stratul de discontinuitate CC;
- P_n, S_n -unda longitudinala, respectiv transversala care urmareste discontinuitate Moho.

Pe linga undele mentionate mai sus exista si unde reflectate. Undele reflectate pe discontinuitatea Moho sunt notate cu P_nP in cazul undelor P respectiv S_mS in cazul undelor S (fig 6.16). Exista deasemenea unde mixte de tipul S_mP sau P_mS.

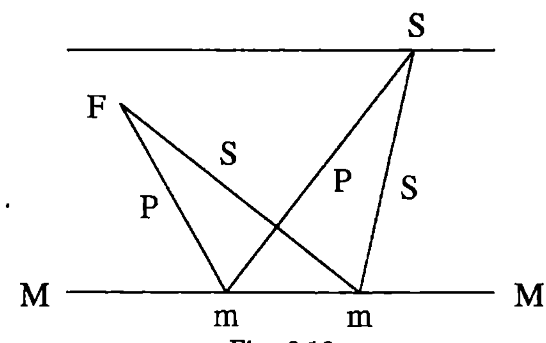


Fig. 6.16

Avand in vedere diversitate de notatii s-ar parea ca este imposibil de urmarit o unda. Vom vedea insa ca o anumita raza seismica este specificata de un parametru si prin urmare aceasta poate fi urmarita din focar pana la statia de inregistrare.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Aparitia unor faze pe seismograma si numarul lor depinde de distanta epicentrala. In Tabelul 6.1 este prezentata o clasificare a fazelor in functie de distanta epicentrala.

Δ°	Principalele faze observate
$0 < \Delta < 8$	P_g, P_n, S_n, S_g
$8 < \Delta < 30$	P, S, PcP, ScS, (PP)
$30 < \Delta < 70$	P, PP, (PPP), PcP, S, ScS, (SKS), SS, $PKPPKP$
$70 < \Delta < 105$	P, PP, PPP, PS, SKS, $SKKS$, SS, $PKKP$
$105 < \Delta < 143$	P, $(PKiKP)$, $PKIKP$, PP, PPP, SKS, $SKIKS$, $SKKS$, SS, SSS, PS, PPS
$143 < \Delta < 180$	$PKIKP$, $PKP1$, $PKP2$, PP, PPP, $SKIKS$, $SKKS$, PS, PPS, SS, SSS

Tabelul 6.1

Observatie: aparita fazelor din paranteza este incerta.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Capitolul 7

Unde de suprafata

7.1 Unde Rayleigh

Am vazut ca in cazul in care $\theta_s > \theta_s'$

$$\phi_r = a_{SP} e^{\mp\sqrt{k^2-k_p^2}\cdot z} e^{ikx} \tag{7.1}$$

si considerand solutia cu semnul $-$ se obtine o unda a carei amplitudine scade cu adancimea z. Trebuie observat insa faptul ca pentru a satisface conditiile la limita

$$\sigma_{13} = \sigma_{23} = 0 \;\; \text{si} \;\; \sigma_{33} = 0 \tag{7.2}$$

nu putem avea numai o unda P pe suprafata ci trebuie si o unda SV.

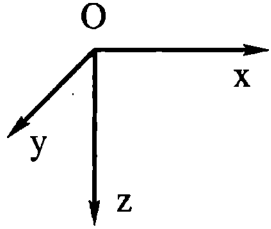


Fig. 7.1

Ecuatia undelor se scrie sub forma:

$$\Delta u - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \tag{7.3}$$

unde u este o componenta a lui $\vec{u}_l$ sau $\vec{u}_t$ iar c este viteza corespunzatoare c_l sau c_t. Alegand axele ca in figura (Fig 7.1) vom alege u de forma:

$$u = f(z) e^{i(kx-\omega t)} \tag{7.4}$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

si inlocuind in ecuatia (7.3) se obtine:

$$\frac{d^2 f}{dz^2} = \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right) f(z) \tag{7.5}$$

In cazul in care $k^2 - \omega^2/c^2 < 0$ se obtine o unda periodica. Vom considera deci cazul in care $k^2 - \omega^2/c^2 > 0$, caz in care, solutia ecuatiei (7.5) este:

$$f(z) = Ae^{\pm z\sqrt{k^2-\omega^2/c^2}} \tag{7.6}$$

Cu alegerea axelor ca in figura (Fig 7.1) vom alege solutia:

$$f(z) = Ae^{-z\sqrt{k^2-\omega^2/c^2}} = Ae^{-\gamma z} \tag{7.7}$$

unde

$$\gamma = \sqrt{k^2 - \omega^2/c^2} \tag{7.8}$$

Atunci solutia (7.4) devine:

$$u(x, y, z) = e^{i(kx-\omega t)}e^{-\gamma z} \tag{7.9}$$

Aceasta solutie corespunde unei unde care se amortizeaza rapid (exponential) cu adancimea (reprezentand undele de suprafata).

In cazul undelor de suprafata nu se mai poate face insa o separare in unde longitudinale si transversale; vom avea astfel o combinatie intre $\vec{u}_l$ si $\vec{u}_t$. Pentru a gasi aceasta combinatie vom face apel la conditiile la limita:

$$\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0 \tag{7.10}$$

si anume

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} = 0 \tag{7.11}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} = 0 \tag{7.12}$$

si

$$\lambda\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \lambda\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + (\lambda + 2\mu)\frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0 \tag{7.13}$$

unde x_1, x_2, x_3 sunt notatiile obisnuite pentru coordonatele x, y, respectiv z de mai sus. Cum marimile nu depind de coordonata y ($y \leftrightarrow x_2$) din relatia (7.12) rezulta

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_3} = 0 \tag{7.14}$$

iar din ecuatia (7.9), cu conditia de mai sus, rezulta:

$$u_2 = 0 \tag{7.15}$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Partea "transversala" $\vec{u}_t$ trebuie sa satisfaca conditia:

$$\mathrm{div}\,\vec{u}_t = 0 \tag{7.16}$$

si deci

$$\frac{\partial u_{tx}}{\partial x} + \frac{\partial u_{tz}}{\partial z} = 0 \tag{7.17}$$

unde am revenit la notatiile x, y, z petru coordonate, notatie ce va fi pastrata in continuare. Dependenta partilor transversale u_{tx} respectiv u_{tz} este de forma:

$$u_{tx} = A_{tx} e^{i(kx-\omega t)} e^{-\gamma_t z}$$

$$u_{tz} = A_{tz} e^{i(kx-\omega t)} e^{-\gamma_t z} \tag{7.18}$$

astfel incat rezulta

$$iku_{tx} - \gamma_t u_{tz} = 0 \tag{7.19}$$

sau

$$\frac{u_{tx}}{u_{tz}} = \frac{\gamma_t}{ik} \tag{7.20}$$

Rezulta atunci

$$u_{tx} = \gamma_t a e^{i(kx-\omega t)} e^{-\gamma_t z}$$

$$u_{tz} = ika e^{i(kx-\omega t)} e^{-\gamma_t z} \tag{7.21}$$

unde a este o constanta iar γ_t este dat de relatia:

$$\gamma_t = \sqrt{k^2 - \omega^2/c_t^2} \tag{7.22}$$

Componenta longitudinala $\vec{u}_l$ satisface conditia:

$$\mathrm{rot}\,\vec{u}_l = 0 \tag{7.23}$$

sau

$$\frac{\partial u_{lx}}{\partial z} - \frac{\partial u_{lz}}{\partial x} = 0 \tag{7.24}$$

Cum

$$u_{lx} = A_{lx} e^{i(kx-\omega t)} e^{-\gamma_l z}$$

$$u_{lz} = A_{lz} e^{i(kx-\omega t)} e^{-\gamma_l z} \tag{7.25}$$

cu

$$\gamma_l = \sqrt{k^2 - \omega^2/c_l^2} \tag{7.26}$$

rezulta

$$iku_{tz} - \gamma_l u_{lx} = 0 \tag{7.27}$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

de unde

$$\frac{u_{lx}}{u_{lz}} = -\frac{ik}{\gamma_l} = \frac{k}{i\gamma_l} \tag{7.28}$$

astfel incat

$$u_{lx} = kbe^{i(kx-\omega t)}e^{-\gamma_l z} \tag{7.29}$$

$$u_{lz} = i\gamma_l be^{i(kx-\omega t)}e^{-\gamma_l z} \tag{7.30}$$

Rezulta atunci:

$$u_x = \gamma_t ae^{i(kx-\omega t)}e^{-\gamma_t z} + kbe^{i(kx-\omega t)}e^{-\gamma_l z} \tag{7.31}$$

$$u_z = ikae^{i(kx-\omega t)}e^{-\gamma_t z} + i\gamma_l be^{i(kx-\omega t)}e^{-\gamma_l z} \tag{7.32}$$

Conditiile la limita (7.10) se scriu:

$$\sigma_{13} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} = 0 \tag{7.33}$$

$$\sigma_{33} = c_l^2 \frac{\partial u_z}{\partial z} + (c_l^2 - 2c_t^2)\frac{\partial u_x}{\partial x} = 0 \tag{7.34}$$

Din prima conditie (7.33) obtinem:

$$\gamma_t^2 a + 2\gamma_l kb + k^2 a = 0 \tag{7.35}$$

sau

$$a(\gamma_t^2 + k^2) + 2\gamma_l kb = 0 \tag{7.36}$$

A doua conditie (7.34) duce la:

$$c_l^2[-ik\gamma_t a - i\gamma_l^2 b] + (c_l^2 - 2c_t^2)[ik\gamma_t a + ik^2 b] = 0$$
$$\Downarrow$$
$$a[(c_l^2 - 2c_t^2)k\gamma_t - c_l^2 k\gamma_t] + b[k^2(c_l^2 - 2c_t^2) - c_l^2\gamma_l^2] = 0$$
$$\Downarrow$$
$$-2ac_t^2 k\gamma_t + b[c_l^2(k^2 - \gamma_l^2) - 2c_t^2 k^2] = 0$$

$$\Downarrow$$

$$2ak\gamma_t + b\left[\frac{c_l^2}{c_t^2}\left(\gamma_l^2 - k^2\right) + 2k^2\right] = 0 \tag{7.37}$$

dar

$$\gamma_l^2 - k^2 = -\frac{\omega^2}{c_l^2} = -(k^2 - \gamma_t^2)\frac{c_t^2}{c_l^2} \tag{7.38}$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

si rezulta

$$2a\gamma_t k + b(k^2 + \gamma_t^2) = 0 \tag{7.39}$$

Rezulta in final sistemul de ecuatii:

$$\begin{cases} a(k^2 + \gamma_t^2) + 2b\gamma_l k = 0 \\ \\ 2a\gamma_t k + b(k^2 + \gamma_t^2) = 0 \end{cases} \tag{7.40}$$

Sistemul admite solutii daca

$$\begin{vmatrix} k^2 + \gamma_t^2 & 2\gamma_l k \\ 2\gamma_t k & k^2 + \gamma_t^2 \end{vmatrix} = 0 \tag{7.41}$$

adica

$$\left(k^2 + \gamma_t^2\right)^2 = 4k^2\gamma_t\gamma_l \tag{7.42}$$

sau, ridicand la patrat,

$$\left(k^2 + k^2 - \frac{\omega^2}{c_t^2}\right)^4 = 16k^4\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c_t^2}\right)\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c_l^2}\right) \tag{7.43}$$

Introducand

$$\omega = c_t k \xi \tag{7.44}$$

rezulta

$$\left(2k^2 - k^2\xi^2\right)^4 = 16k^4\left(k^2 - k^2\xi^2\right)\left(k^2 - \frac{c_t^2}{c_l^2}k^2\xi^2\right) \tag{7.45}$$

sau

$$\left(2 - \xi^2\right)^4 = 16\left(1 - \xi^2\right)\left(1 - \frac{c_t^2}{c_l^2}\xi^2\right) \tag{7.46}$$

Rezulta in final:

$$\xi^6 - 8\xi^4 + 8\xi^2\left(3 - 2\frac{c_t^2}{c_l^2}\right) - 16\left(1 - \frac{c_t^2}{c_l^2}\right) = 0 \tag{7.47}$$

Daca introducem

$$f(\xi) = \xi^6 - 8\xi^4 + 8\xi^2\left(3 - 2\frac{c_t^2}{c_l^2}\right) - 16\left(1 - \frac{c_t^2}{c_l^2}\right) \tag{7.48}$$

se observa ca pentru $\xi = 0$

$$f(0) = -16\left(1 - \frac{c_t^2}{c_l^2}\right) < 0 \tag{7.49}$$

iar pentru $\xi = 1$

$$f(1) = 1 \tag{7.50}$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Atunci ecuatia $f(\xi) = 0$ are cel putin o solutie reala intre 0 si 1.

Viteza undelor este

$$V_R = \xi c_t \tag{7.51}$$

astfel, pentru $\lambda \approx \mu$, $c_t/c_l \approx \sqrt{3}$ si $\xi \approx 0,8453$ si deci $V_R < c_t$. Totodata V_R este independenta de frecventa si deci undele Rayleigh sunt nedispersive intr-un mediu omogen.

Undele Rayleigh se pot propaga intr-un mediu uniform (spre deosebire de undele Love pentru care este necesar un mediu stratificat). In cazul undelor Rayleigh este suficienta prezenta unei suprafete libere, ceea ce duce la cuplajul undelor P cu cele SV.

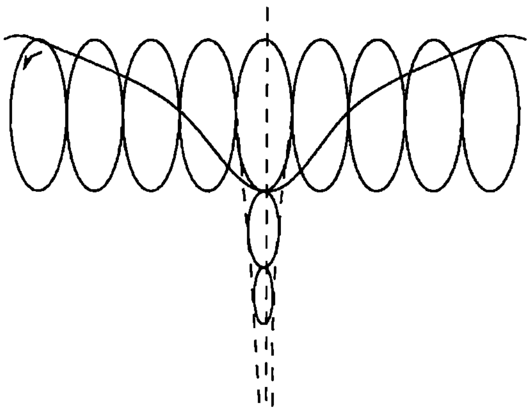


Fig. 7.2

Revenind la sistemul de ecuatii (7.40) se observa ca

$$\frac{a}{b} = -\frac{k^2+\gamma_t^2}{2\gamma_t k} = -\frac{k^2+k^2-\frac{\omega^2}{c_t^2}}{2k\sqrt{k^2-\frac{\omega^2}{c_t^2}}} = -\frac{2k^2-\frac{\omega^2}{c_t^2}}{2k\sqrt{k^2-\frac{\omega^2}{c_t^2}}} =$$

$$= -\frac{2k^2-k^2\xi^2}{2k\sqrt{k^2-k^2\xi^2}} = -\frac{2-\xi^2}{2\sqrt{1-\xi^2}}\,, \text{ unde } \xi < 1 \tag{7.52}$$

Rezulta totodata

$$u_x = b\left(ke^{-\gamma_l z} + \gamma_t\frac{a}{b}e^{-\gamma_t z}\right)e^{i(kx-\omega t)} \tag{7.53}$$

$$u_z = -ib\left(\gamma_l e^{-\gamma_l z} + k\frac{a}{b}e^{-\gamma_t z}\right)e^{i(kx-\omega t)} \tag{7.54}$$

astfel incat, pentru $z = 0$, deplasarile (7.53, 7.54) devin

$$u_x = b\left(k + \gamma_t\frac{a}{b}\right)\cos(kx-\omega t) \tag{7.55}$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

$$u_z = b\left(\gamma_l + k\frac{a}{b}\right)\sin(kx - \omega t) \tag{7.56}$$

unde raportul a/b este dat de relatia (7.52). Se observa din relatiile (7.53, 7.54) ca deplasarile u_x si u_z depind armonic de x si exponential de z.

In cazul undelor Rayleigh particulele vibreaza atat vertical cat si orizontal, deplasarile u_x si u_z fiind defazate cu $\pi/2$. Miscarea astfel rezultata are loc pe o elipsa ce este parcursa in sens retrograd. Aceasta traiectorie eliptica este continua intr-un plan vertical ce contine directia de propagare (componenta u_y a deplasarii este egala cu zero).

In figura (Fig 7.2) este reprezentata miscarea particulelor pe suprafata precum si in adancime, pe masura ce unda Rayleigh se propaga.

In cazul simplu in care undele Rayleigh se propaga in lungul suprafetei unui mediu omogen am vazut ca viteza undelor este $V_R = \xi V_S$. Acest rezultat nu se modifica nici in cazul in care se peresupune o structura stratificata. Totodata in cazul unui mediu omogen viteza undelor Rayleigh nu depinde de frecventa, in timp ce in cazul unei structuri stratificate apare fenomenul de dispersie.

7.2 Undele Love

Am vazut ca in cazul undelor Rayleigh este suficienta prezenta unei suprafete libere pentru a se realiza cuplajul undelor P cu undele SV.

Pe de alta parte componenta SH a undelor S poate fi "captata" langa suprafata libera daca exista o structura stratificata. Fenomenul de reflexie totala a undelor SH combinat cu structura interna stratificata a Pamantului duce la aparitia undelor de suprafata Love.

Sa consideram un strat de grosime H (Fig 7.3) unde $x_3 = 0$ reprezinta suprafata libera. Fie $\beta_1 = v_{s_1}$ viteza undelor SH in stratul de grosime H (stratul mai profund).

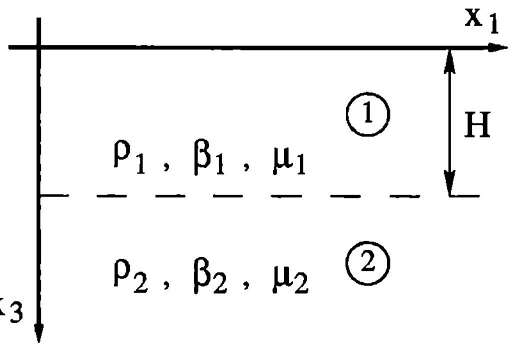


Fig. 7.3

Vom arata in continuare ca viteza undelor Love este cuprinsa intre β_1 si β_2,

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

adica, $\beta_1 < v_L < \beta_2$. Componentele deplasarilor in mediul $\{1\}$ sunt date de:

$$u_1^{(1)} = u_3^{(1)} = 0 \;\; ; \;\; u_2^{(1)} = f(x_3)e^{i(kx_1 - \omega t)} \tag{7.57}$$

unde $\omega/k = c_L$. In mediul $\{2\}$ vom avea o unda amortizata in profunzime:

$$u_1^{(2)} = u_3^{(2)} = 0 \;\; ; \;\; u_2^{(2)} = Ce^{-\kappa_2 x_3}e^{i(kx_1 - \omega t)} \tag{7.58}$$

unde

$$\kappa_2 = \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{v_{s_2}^2}} = \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{\beta_2^2}} \tag{7.59}$$

Functia $f(x_3)$ satisface ecuatia:

$$f'' + \kappa_1^2 f = 0 \tag{7.60}$$

unde

$$\kappa_1 = \sqrt{\frac{\omega^2}{\beta_1^2} - k^2} \;\; , \;\; \kappa_1 > 0 \tag{7.61}$$

astfel incat

$$f(x_3) = A\sin\kappa_1 x_3 + B\cos\kappa_1 x_3 \tag{7.62}$$

Conditiile la limita petru aceasta problema sunt

$$\sigma_{32}|_{x_3=0} = 0 \tag{7.63}$$

(nu exista tensiuni in lungul axei libere), sau

$$\frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_3} = 0 \tag{7.64}$$

ceea ce ne conduce la:

$$(A\kappa_1\cos\kappa_1 x_3 - B\kappa_1\sin\kappa_1 x_3)e^{(kx_1 - \omega t)}\Big|_{x_3=0} = 0 \tag{7.65}$$

de unde rezulta

$$A = 0 \tag{7.66}$$

Pe de alta parte, la frontiera dintre cele doua medii avem conditiile:

$$u_2^{(1)}\Big|_{x_3=H^-} = u_2^{(2)}\Big|_{x_3=H^+} \tag{7.67}$$

(continuitatea deplasarilor), respectiv:

$$\sigma_{33}|_{x_3=H^-} = \sigma_{32}|_{x_3=H^+} \tag{7.68}$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

(continuitatea tensiunilor), unde:

$$\sigma_{32} = \mu \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \tag{7.69}$$

Din conditia (7.67) rezulta:

$$B \cos \kappa_1 H = C e^{-\kappa_2 H} \tag{7.70}$$

iar din conditia (7.68)

$$\mu_1 \kappa_1 B \sin \kappa_1 H = \mu_2 \kappa_2 C e^{-\kappa_2 H} \tag{7.71}$$

Efectuand raportul relatiilor (7.71) si (7.70) se obtine:

$$\tan \kappa_1 H = \frac{\mu_2 \kappa_2}{\mu_1 \kappa_1} \tag{7.72}$$

ecuatie ce defineste sub forma implicita legatura dintre k si ω (ecuatie de dispersie).
Avand in vedere (7.59) si (7.61) ecuatia (7.71) devine

$$\tan H \sqrt{\frac{\omega^2}{\beta_1^2} - k^2} = \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{\sqrt{k^2 - \omega^2/\beta_2^2}}{\sqrt{k^2 - \omega^2/\beta_1^2}} \tag{7.73}$$

sau avand in vedere ca $c_L = \omega / k$:

$$\tan H\omega \sqrt{\frac{1}{\beta_1^2} - \frac{1}{c_L^2}} = \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{\sqrt{\frac{1}{c_L^2} - \frac{1}{\beta_2^2}}}{\sqrt{\frac{1}{c_L^2} - \frac{1}{\beta_1^2}}} \tag{7.74}$$

Pentru ca solutiile ecuatiei (7.74) sa fie reale trebuie ca $\beta_1 < c_L < \beta_2$ si deci propagarea este posibila numai in cazul in care $\beta_2 > \beta_1$.

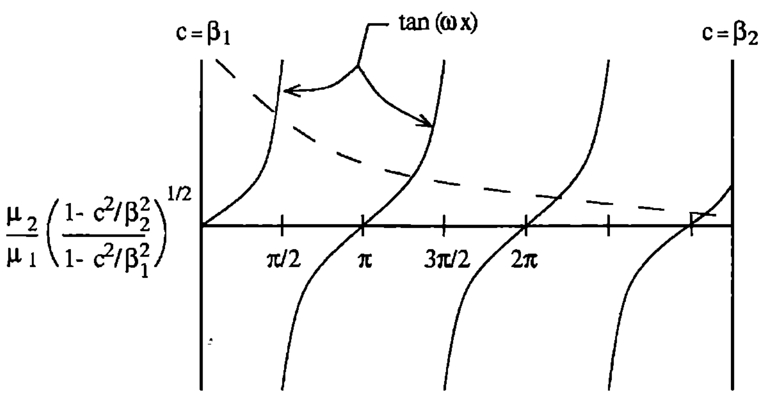


Fig. 7.4

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Sulutiile ecuatiei (7.74) pot fi ilustrate in mod grafic. Vom nota

$$x = H\sqrt{\frac{1}{\beta_1^2} - \frac{1}{c_L^2}} \tag{7.75}$$

unde x este definit in intervalul $0 < x < H\sqrt{\frac{1}{\beta_1^2} - \frac{1}{\beta_2^2}}$.

In figura (Fig 7.4) este reprezentat $\tan \omega x$ functie de partea dreapta a ecuatie (7.74) in intervalul de definitie a lui x.

Avand in vedere ca in cazul undelor Love miscarea particulelor este paralela cu suprafata, iar in cazul undelor Rayleigh miscarea are loc intr-un plan vertical, rezulta o separare a celor doua tipuri de unda. Se constata totodata ca in timp ce in cazul undelor Rayleigh acestea se pot propaga intr-un mediu uniform fiind suficienta prezenta unei suprafete libere, in cazul undelor Love este necesar un model stratificat. din punct de vedere al vitezelor de propagare viteza undelor Love este mai mare decat cea a undelor Rayleigh.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Capitolul 8

Raza seismica

8.1 Introducere

Interiorul Pamantului este mediul in care au loc cutremurele si in care se propaga undele seismice. De aceea, cunoasterea proprietatilor fizice ale acestuia este o problema fundamentala in seismologie.

Viteza undelor seismice depinde de densitatea si constantele elastice ale mediului elastic prin care se propaga, astfel incata, determinarea sturcturii interne a Pamantului devine atunci echivalenta cu determinarea "structurii de viteze" a undelor seismice in interiorul Pamantului.

Informatii asupra undelor seismice se obtin ca urmare a faptului ca odata ajunse la suprafata Pamntului acestea produc oscilatii ce sunt inregistrate de statii seismice aflate in diferite puncte de pe Glob. Diferenta dintre momentul sosirii unei unde la o statie si momentul producerii cutremurului reprezinta timpul de parcurs al undei de la focar la statie T. Pe de alta parte, pozitia focar-statie este determinata prin unghiul la centru Δ numita distanta epicentrala (vezi Anexa B).

Pentru fiecare statie se obtine (pentru un cutremur dat si un tip dat de unda) o perche de valor (T, Δ). Datele de la mai multe statii dau o dependenta $T = f(\Delta)$ numita timp de parcurs.

Elaborandu-se un model al Pamantului cu o structura de viteze data se poate determina dependenta $T(\Delta)$ corespunzatoare modelului si compara cu datele experimentale. Diferenta va reflecta abaterea structurii reale a Pamantului de model.

Considerand Pamantul o sfera omogena atunci propagarea undelor in interiorul Pamantului ar avea loc in lungul dreptei FS.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

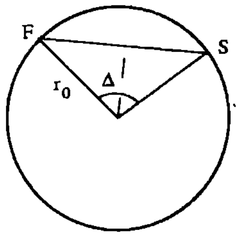


Fig. 8.1

Din figura (Fig 8.1) se observa ca:

$$FS = 2r_0 \sin\frac{\Delta}{2} \tag{8.1}$$

si deci

$$T(\Delta) = \frac{2r_0}{v}\sin\frac{\Delta}{2} \tag{8.2}$$

unde v poate fi viteza undelor P sau S. Rezulta in acest caz ca dependenta $T = T(\Delta)$ nu este o linie dreapta (Fig 8.2 (a)) chiar daca viteza undelor ar fi constanta.

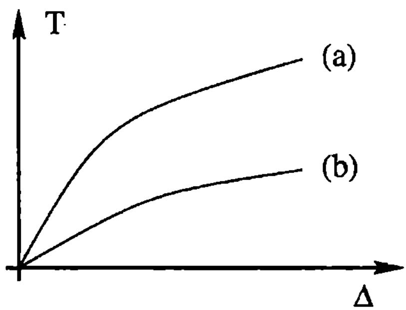


Fig. 8.2

In realitate curba $T = T(\Delta)$ pentru undele P arata ca in figura (Fig 8.2 (b)). se poate trage atunci concluzia ca viteza undelor P (sau S) creste cu adancimea.

8.2 Generalizarea legii sinusurilor

Se numeste suprafata de unda locul geometric al punctelor mediului atinse in acelasi moment de oscilatiile aflate in propagare. Prin urmare perturbatia tuturor punctelor aflate pe suprafata de unda are aceeasi faza.

Pentru o unda plana suprafata de unda este data de ecuatia:

$$\bar{k}\bar{r} - \omega t = \text{const}$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

care pentru un t fixat reprezinta un plan perpendicular pe directia vectorului de unda.

In cazul undelor sferice suprafetele de unda sunt date de $r - ct =$ const. care pentru un t fixat reprezinta sfere.

Strans legat de conceptul de suprafata de unda este conceptul de traiectoria undei.

Liniile perpendiculare pe suprafetele de unda succesive se numesc raze si corespund directiei de propagare a undei (Fig 8.3).

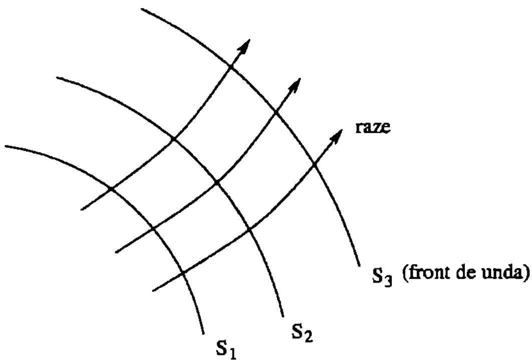


Fig. 8.3

Trebie observat ca relatia dintre raze si suprafete este aceeasi ca intre forta si suprafetele echipotentiale.

Din focarul unui cutremur pornesc raza seismice in toate directiile. Acestea au proprietatea ca se gasesc in planul determinat de focar, centrul Pamantului si punctul in care acestea ating suprafata Pamantului. Aceasta este consecinta faptului ca suprafetele de discontinuitate in modelul stratificat al Pamantului sunt sfere cu centrul in centrul Pamantului.

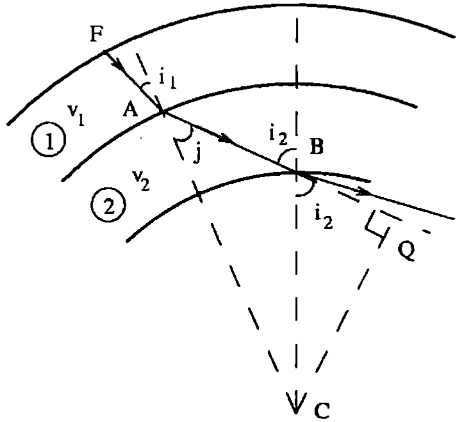


Fig. 8.4

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Tinand cont de curbura Pamantului ca si de cea a suprafetelor de discontinuitate nu mai putem utiliza formula Snell dedusa in Capitolul 6. Pentru distante epicentrale mai mari de 12° legea Snell trebuie modificata.

Sa consideram ca o raza seismica pornita dintr-un punct oarecare F atinge o suprafat de discontinuitate in punctul A unde este reflectata. Conform legilor refractiei, raza incidenta, normala si raza reflectata se gasesc in acelasi plan. Dar normala la suprafata de discontinuitate in punctul A este raza sferei, raza ce trce prin centrul Pamantului (Fig 8.4). In punctul B are loc o noua refractie, raza refractata BQ aflandu-se in planul FAB. Considerand ca in mediul 1 viteza undelor este v_1 iar in mediul 2 viteza este v_2, din legea sinusurilor se obtine:

$$\frac{\sin i_1}{v_1} = \frac{\sin j}{v_2} \tag{8.3}$$

Din $\Delta\, AQC \Rightarrow$

$$\sin j = \frac{QC}{AC} \tag{8.4}$$

Din $\Delta\, BQC \Rightarrow$

$$\sin i_2 = \frac{QC}{BC} \tag{8.5}$$

Din relatiile (8.4) (8.4) obtinem:

$$\sin j = \sin i_2 \frac{BC}{AC} \tag{8.6}$$

Notand

$$\begin{aligned} AC &= r_1 \\ BC &= r_2 \end{aligned} \tag{8.7}$$

rezulta

$$\frac{r_1 \sin i_1}{v_1} = \frac{r_2 \sin i_2}{v_2} = ... = \text{const.} \tag{8.8}$$

si notam

$$p = \frac{r \sin i}{v} \tag{8.9}$$

unde p poarta numele de parametrul razei seismice.

Trbuie observat faptul ca parametrul p este constant de-a lungul unei raze seismice, avand o valoare diferita pentru o alta raza.

Parametrul unei raze seismice se poate determina experimental intr-un punct S la suprafata Pamantului

$$p = \frac{r_0 \sin i_s}{v_0}$$

unde r_0 este raza Pamantului, i_s este unghiul sub care iese unda in punctul S si se poate determina cu ajutorul inregistrarilor facute, iar v_0 este viteza undei la suprafata.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

8.3 Legatura dintre p, Δ si T

In cele ce urmeaza vom lucra intr-un sistem de coordonate polare cu polul in centrul Pamantului. Un punct aflat pe traiectoria razei seismice este caracterizat de r, distanta de la centrul Pamantului la punct, si unghiul θ dintre vectorul de pozitie al punctului dat si vectorul de pozitie al focarului masurat in sens retrograd (Fig 8.5).

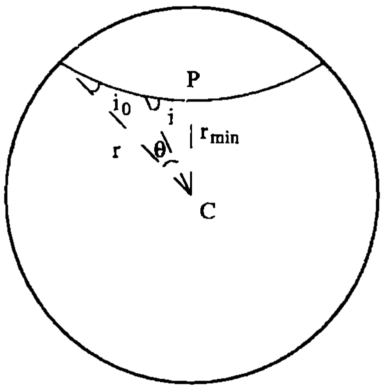


Fig. 8.5

Sa notam cu Δ valoarea maxima a lui θ. Daca F este focarul unui cutremur si S o statie de inregistrare, Δ este distanta epicentrala masurata in grade iar T este timpul de parcurs. Sa consideram doua raze seismice care pleaca din acelasi punct F si ajung in doua puncte S_1 si S_2 foarte apropiate unul de altul. Cele doua raza seismice au parametrii p, T, Δ respectiv $p+dp$, $T+dT$, $\Delta+d\Delta$. Se observa din figura (Fig 8.6) ca

$$\sin i_0 = \frac{v_0 dT}{r_0 d\Delta} \tag{8.10}$$

sau

$$\frac{r_0 \sin i_0}{v_0} = \frac{dT}{d\Delta} = p \tag{8.11}$$

unde r_0 este raza Pamantului.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

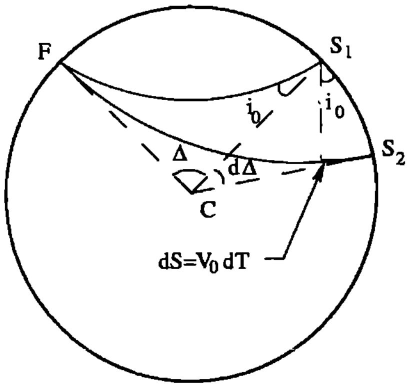


Fig. 8.6

Rezulta ca parametrul p reprezinta panta curbei $T = f(\Delta)$. Astfel, in cazul in care Pamantul este presupus o sfera omogena

$$p = \frac{dT}{d\Delta} = \frac{r_0 \cos\frac{\Delta}{2}}{v} \tag{8.12}$$

unde am avut in vedere relatia (8.2).

8.4 Ecuatia diferentiala a razei seismice

Presupunand un model sferic stratificat al Pamantului vitezele de propagare ale undelor seismice vor depinde doar de distanta r de la centrul Pamantului: $v = v(r)$. In cadrul acestui model traiectoria razei seismice se afla intr-un plan diametral.

Ecuatia razei seismice in coordonate polare este data de relatia:

$$r = r(\theta) \tag{8.13}$$

Am vazut ca o anumita raza seismica este caracterizata de parametrul p, unde

$$p = \frac{r \sin i}{v} \tag{8.14}$$

Introducand notatia $\eta(r) = r/v(r)$ relatia (8.14)mai poate fi scrisa sub forma

$$p = \eta \sin i \tag{8.15}$$

In particular, la suprafata Pamantului

$$p = \frac{r_0 \sin i_0}{v_0} = \eta_0 \sin i_0 \tag{8.16}$$

Din figura (Fig 8.7) se observa ca

$$\tan i = \frac{r d\theta}{dr} \tag{8.17}$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

dar avand in vedere relatia (8.14) rezulta

$$\tan i = \frac{\sin i}{\cos i} = \frac{vp}{r\sqrt{1 - \frac{p^2 v^2}{r^2}}} = \frac{p}{\sqrt{\eta^2 - p^2}} \tag{8.18}$$

Din relatiile (8.17) si (8.18) rezulta

$$d\theta = \frac{pdr}{r\sqrt{\eta^2 - p^2}} \tag{8.19}$$

care reprezinta ecuatia diferentiala a razei seismice.

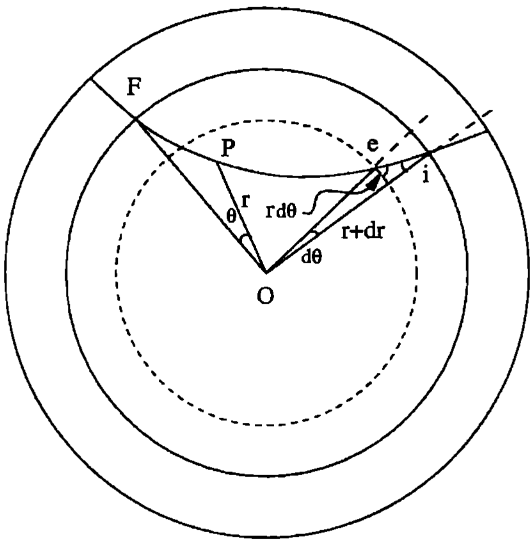


Fig. 8.7

Legea generalizata a sinusurilor (8.8) ca si ecuatia razei seimice sunt consecinte ale principiului lui Fermat care afirma ca unda seismica se propaga pe drumul caruia ii corespunde timpul cel mai scurt.

Timpul necesar undei pentru a ajunge din focar la statie este dat de integrala

$$T = \int_F^S \frac{ds}{v(r)} = \int_F^S \frac{1}{v(r)} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta \tag{8.20}$$

Dupa cum se observa din (8.20) T este o functionala care depinde de $r(\theta)$, in sensul ca unei functii $r(\theta)$ ii corespunde un numar $T[r(\theta)]$.

Sa notam

$$f = \frac{1}{v(r)} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} = \frac{1}{v(r)} \sqrt{r^2 + r'^2} \tag{8.21}$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

unde $r' = \frac{dr}{d\theta}$. Atunci, conform teoremei Eule, daca curba $r(\theta)$ realizeaza un extremul al integralei (8.20) atunci functia $r = r(\theta)$ reprezentata de aceasta curba verifica ecuatia diferentiala:

$$\frac{d}{d\theta}\left(f - r'\frac{df}{d\theta}\right) = 0 \tag{8.22}$$

Cu f dat de (8.21) se obtine

$$\frac{d}{d\theta}\left[\frac{1}{v(r)}\sqrt{r^2 + r'^2} - r'\frac{r'}{v(r)\sqrt{r^2 + r'^2}}\right] = 0 \tag{8.23}$$

sau

$$\frac{d}{d\theta}\left[\frac{r^2}{v(r)\sqrt{r^2 + r'^2}}\right] = 0 \tag{8.24}$$

astfel incat

$$\frac{r^2}{v(r)\sqrt{r^2 + r'^2}} = \text{const.} \tag{8.25}$$

Avand in vedere relatia (8.17), din (8.25) rezulta

$$\frac{r^2}{v(r)\sqrt{r^2 + r'^2}} = \frac{r \sin i}{v} = p \tag{8.26}$$

Din (8.26) se obtine

$$\frac{r^4}{v^2\left[r^2 + r'^2\right]} = p^2 \tag{8.27}$$

de unde

$$\frac{dr}{d\theta} = \pm\frac{r}{p}\sqrt{\frac{r^2}{v^2(r)} - p^2} \tag{8.28}$$

adica tocmai ecuatia diferentiala a razei seismice.

Daca s-ar cunoaste campul de viteze $v = v(r)$ ecuatia (8.28) ar putea fi integrata si gasi ecuatia razei seismice.

Trebuie observat faptul ca $\frac{dr}{d\theta}$ este o functie continua in raportcu r astfel incat trecerea de la semnul "+" la semnul "−" (sau invers) se face pentru $\frac{dr}{d\theta} = 0$. Aceasta implica existenta unui punct de minim P_0 (fig 8.5). In punctul P_0

$$\frac{r_m}{v(r_m)} = \eta(r_m) = p \tag{8.29}$$

relatie ce permite determinarea vitezei in acest punct.

Rezulta totodata ca pentru aceiasi raza geometrica r exista doua unghiuri e_1 si e_2 egale in valoare absoluta dar diferite ca semn. Astfel, din (8.17) si (8.28) obtinem

$$\tan e_1(r) = +\frac{1}{p}\sqrt{\frac{r^2}{v^2(r)} - p^2} \tag{8.30}$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

$$\tan e_2(r) = -\frac{1}{p}\sqrt{\frac{r^2}{v^2(r)} - p^2} \tag{8.31}$$

si deci $e_1(r) = -e_2(r)$ (unde e_1 si e_2 sunt unghiurile de emergenta).

Curba $r(\theta)$ fiind simetrica in raport cu punctul de intoarcere P_0 (pentru care $r = r_m$), obtinem integrand intre F si P_0 (cu r_0 raza sferei)

$$\Delta(p) = 2\int_{r_m}^{r_0} \frac{pdr}{r\sqrt{\eta^2 - p^2}} \tag{8.32}$$

Deasemenea, timpul T in care unda parcurge distanta de la focar la statie este:

$$\begin{aligned} T &= \int_F^S \frac{1}{v(r)}\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta = \int_F^S \frac{r^2}{pv^2} d\theta = \\ &= 2\int_{r_m}^{r_0} \frac{\eta^2}{r}(\eta^2 - p^2)^{-1/2} dr \end{aligned} \tag{8.33}$$

Prelucrand expresia (8.33) si avand in vedere (8.32) rezulta

$$\begin{aligned} T &= 2\int_{r_m}^{r_0} \left[p^2 r^{-1}(\eta^2 - p^2)^{-1/2} + r^{-1}(\eta^2 - p^2)^{1/2}\right] dr = \\ &= p\Delta + 2\int_{r_m}^{r_0} r^{-1}(\eta^2 - p^2)^{1/2} dr \end{aligned} \tag{8.34}$$

relatie ce leaga timpul de parcurs de distanta epicentrala Δ.

8.5 Raza de curbura

In cazul in care traiectoria este data de relatia (8.13), curbura traiectoriei este

$$C = \frac{r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\theta^2}}{\left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right]^{3/2}} \tag{8.35}$$

Avand in vedere relatia (8.20) si faptul ca

$$\frac{d^2r}{d\theta^2} = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{dr}{d\theta}\right) = \frac{d}{dr}\left(\frac{dr}{d\theta}\right) \cdot \frac{dr}{d\theta} \tag{8.36}$$

unde

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{dr}{d\theta}\right) = \frac{1}{p}\left(\eta^2 - p^2\right)^{1/2} + \frac{1}{2}\frac{r}{p}\frac{2rv^2(r) - r^2\frac{d}{dr}v^2(r)}{v^4\sqrt{\eta^2 - p^2}} \tag{8.37}$$

rezulta

$$\begin{aligned} \frac{d^2r}{d\theta^2} &= \left[\frac{1}{p}\left(\eta^2 - p^2\right)^{1/2} + \frac{1}{2}\frac{r}{p}\frac{2rv^2(r) - r^2\frac{d}{dr}v^2(r)}{v^4\sqrt{\eta^2 - p^2}}\right]\frac{r}{p}\sqrt{\eta^2 - p^2} \\ &= \frac{r}{p^2}\left(2\frac{r^2}{v^2} - p^2 - \frac{r^3}{v^3}\frac{dv}{dr}\right) \end{aligned} \tag{8.38}$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Se observa ca pentru $r = r_{min}$, $p = \frac{r_m}{v(r_m)}$ si deci

$$\left.\frac{d^2r}{d\theta^2}\right|_{r=r_m} = \frac{r}{p^2}\left(\frac{r^2}{v^2(r)} - \frac{r^3}{v^3(r)}\frac{dv}{dr}\right) = \frac{r^3}{p^2v^2(r)}\left(1 - \frac{r}{v(r)}\frac{dv}{dr}\right) \tag{8.39}$$

Introducand relatia (8.38) in (8.35) rezulta

$$C = \frac{p}{r}\frac{dv}{dr} \tag{8.40}$$

sau

$$\rho = \frac{r}{p}\frac{dr}{dv} \tag{8.41}$$

respectiv pentru $r = r_{min}$

$$C = \frac{1}{v(r_{min})}\left.\frac{dv}{dr}\right|_{r=r_{min}} \tag{8.42}$$

Astfel, de exemplu, daca dependenta vitezei de r este data de relatia

$$v(r) = a - br^2 \tag{8.43}$$

in acest caz

$$\rho = -\frac{1}{2bp} = \text{const.} \tag{8.44}$$

caz in care traiectoria este un cerc.

8.6 Conditia de existenta a minimului

Am vazut in paragraful 8.4 ca exista un punct de minim pentru care $dr/d\theta = 0$. Se pune intrebarea daca acest punct de minim este unic. Sa presupunem ca exista cel putin doua minime (punctele P_1 si P_2) si deci un maxim in punctul M (Fig 8.8).

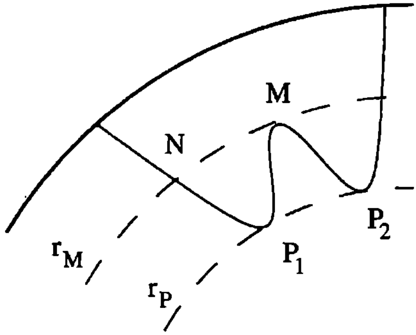


Fig. 8.8

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Atunci in punctul M

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)_M = \frac{r_M}{p}\sqrt{\frac{r_M^2}{v^2(r_M)} - p^2} = 0 \tag{8.45}$$

si deci

$$p = \frac{r_M}{v(r_M)} \tag{8.46}$$

Dar intr-un punct N de pe traiectorie

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)_N = \frac{r_N}{p}\sqrt{\frac{r_N^2}{v^2(r_N)} - \frac{r_M^2}{v^2(r_M)}} \neq 0 \tag{8.47}$$

si cum $r_N = r_M$ pentru ca relatia (8.47) sa fie indeplinita trebuie ca $v(r_N) \neq v(r_M)$. Dar in modelul stratificat al Pamantului s-a presupus ca viteza depinde doar de distanta r de la centrul Pamantului, fapt ce ne conduce la concluzia ca nu poate exista decat un singur minim.

Pe de alta parte daca P_0 este un punct de minim atunci:

$$\left.\frac{dr}{d\theta}\right|_{P_0} = 0 \quad \text{si} \quad \left.\frac{d^2r}{d\theta^2}\right|_{P_0} \geq 0 \tag{8.48}$$

Aceasta este conditia ca raza seismica sa iasa la suprafata Pamantului (conditia de existenta). Din relatia (8.39) conditia $\frac{d^2r}{d\theta^2} \geq 0$ este indeplinita pentru

$$\frac{dv}{dr} \leq \frac{v}{r} \tag{8.49}$$

Daca viteza undelor creste cu adancimea, relatia (8.49) este indeplinita deoarece $v > 0$, $r > 0$ si deci $v/r > 0$ iar $dr < 0$ astfel incat $dv/dr < 0$.

Daca insa viteza scade cu adancimea atunci $dv/dr > 0$ iar relatia $dv/dr \leq v/r$ nu mai este indeplinita intotdeauna.

8.7 Variatia vitezei cu adancimea

In general, in majoritatea punctelor din interiorul Pamantului viteza creste lent cu adancimea; aceasta comportare a vitezei o vom numi normala.

Sa consideram trei sfere concentrice de raze $r_0 > r_1 > r_2$ (unde r_0 este raza Pamantului) si sa presupunem ca:

- pentru $r_1 < r < r_0$ $\quad dv/dr < v/r$
- pentru $r_2 < r < r_1$ $\quad dv/dr > v/r$
- pentru $r < r_2$ $\quad dv/dr < v/r$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

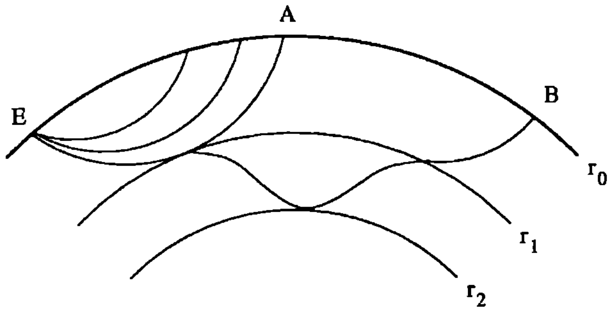


Fig. 8.9

Atunci razele seismice pentru care $r_1 < r < r_0$ vor iesi la suprafata pana la o distanta epicentrala maxima data de lungimea arcului EA (Fig 8.9). Pentru $r_2 < r < r_1$ razele nu mai ies la suprafata. Stratul cuprins intre r_1 si r_2 se numeste strat de viteza redusa deoarece viteza scade cu adancimea. Cum pentru $r < r_2$ viteza undelor incepe din nou sa creasca atunci exista o raza care atinge adancimea maxima in r_2 la care

$$v(r_2) = v(r_1)\frac{r_2}{r_1} \ , \tag{8.50}$$

va trece printr-un minim si va iesi la suprafata in punctul B.

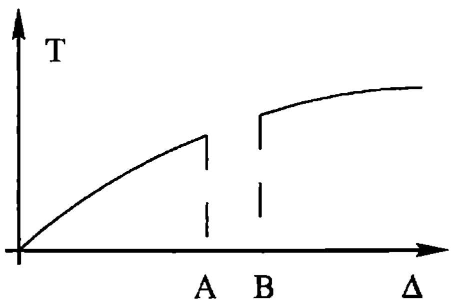


Fig. 8.10

In aceste conditii statiile dintre E si A inregistreaza cutremurul pe cand cele dintre A si B nu il inregistreaza. Portiunea dintre A si B se numeste "umbra seismica" iar hodocrona arata ca in figura (Fig 8.10).

Situatia ilustrata mai sus corespunde cazului in care sub litosfera ar fi un strat de viteza redusa - astenosfera. Astfel, se pot determina grosimea astenosferei si chiar a litosferei cu conditia ca grosimea acestor straturi sa fie constanta.

Sa consideram acum cazul in care viteza creste cu adancimea ($dv/dr < 0$) existand urmatoarele situatii:

- (a) in stratul cuprins intre r_1 si r_2 viteza creste mai mult cu adancimea decat in rest. In aceasta situatie razele seismice care patrund in stratul (r_1, r_2)

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

au o curbura mai are decat in rest rezultand o concentre a razelor seismice intre punctele B si D (Fig 8.11). In zona cuprinsa intre B si D cutremurul se simte mai puternic decat in rest. Aceasta ar fi o explicatie pentru aparitia insulelor de intensitate macroseismica mare pe hartile izoseismice (Fig 8.12)

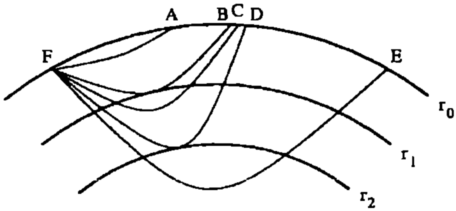


Fig. 8.11

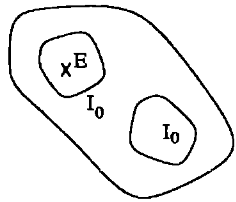


Fig. 8.12

- (b) o alta situatie este cazul in care cresterea de viteza in stratul cuprins intre r_1 si r_2 se produce astfel incat sa aiba loc o concentrare de raze seismice in punctul B. Se formeaza astfel un fel de al doilea "epicentru" (Fig 8.13).

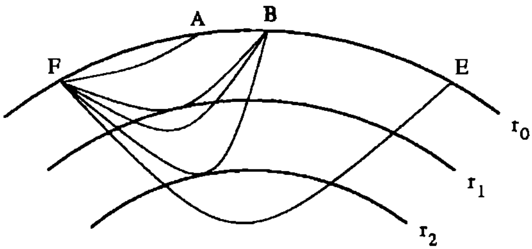


Fig. 8.13

- (c) incepand cu r_1 viteza creste rapid cu adncimea astfel incat razele seismice cuprinse intre r_1 si r_2 sunt curbate puternic, punctele lor de emergenta devenind retrograde. Cu cat razele seismice parcurg un drum mai lung in stratul de grosime (r_1, r_2) cu atat punctele lor de emergenta se apropie de focarul F. Daca incepand cu r_2 cresterea devine normala punctele de emergenta reincep sa progreseze.

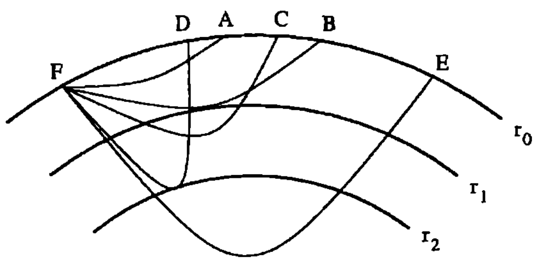


Fig. 8.14

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

8.8 Formula Herglotz-Wiechert

Viteza undelor in interiorul Pamantului se poate determina daca din observatiile facute la suprafata Pamantului se cunosc timpii de parcurs. Astfel, relatia

$$p(\Delta) = \frac{dT}{d\Delta} = \frac{r \sin i}{v} \tag{8.51}$$

permite determinarea parametrului $p(\Delta)$ fie cunoscand $T(\Delta)$ fie cunoscand viteza la suprafata Pamantului v_0 ca si unghiul i_0.

Pe de alta parte, in punctul de minim al razei seismice (varful razei seismice):

$$p = \frac{r_m}{v(r_m)} \tag{8.52}$$

astfel incat se poate determina viteza $v(r_m)$ cunoscand parametrul p si adancimea $r_m(\Delta)$. Evident, pentru ca varful sa existe trebuie indeplinita conditia (8.48).

Formula Herglotz-Wiechert permite determinarea adancimii maxime pana la care a patruns raza seismica precum si viteza in punctul cel mai adanc de raza r_m.

Am vazut ca distanta epicentrala Δ este functie de parametrul p:

$$\Delta(p) = 2\int_{r_{min}}^{r_0} \frac{p dr}{r\sqrt{\eta^2 - p^2}} \tag{8.53}$$

unde $\eta(r) = r/v(r)$. Schimband variabila de integrare de la r la η ($r = r(\eta)$), se obtine

$$\Delta(p) = \int_{\eta(r_m)=p}^{\eta_0=r_0/v_0} \frac{2p}{r\sqrt{\eta^2 - p^2}} \frac{dr}{d\eta} d\eta = \int_{\eta(r_m)=p}^{\eta_0=r_0/v_0} \frac{2p}{r\sqrt{\eta^2 - p^2}} \frac{d(\ln r)}{d\eta} d\eta \tag{8.54}$$

unde $d(\ln r)/d\eta = (1/r)(dr/d\eta)$, iar $\eta(r_m) = p$, $\eta_0 = r_0/v_0$. Sa inmultim la stanga si la dreapta egalitatii (8.54) cu

$$\int_{p_1=\eta_1}^{p=\eta_0} \frac{dp}{\sqrt{p^2 - \eta_1^2}} \tag{8.55}$$

Se observa ca (8.55) reprezinta o integrare pe o familie de raze seismice de la $p = \eta_0 = r_0/v_0$ ($\Delta = 0$), la o raza avand punctul de intoarcere r_1, astfel incat η_1 are o valoare bine precizata $\eta_1 = r_1/v_1 = p_1$. Deasemenea, fie Δ_1 valoarea lui Δ pentru raza a carei adancime maxima de patrundere corespunde lui Δ_1. Se obtine atunci:

$$\int_{\eta_1}^{\eta_0=\frac{r_0}{v_0}} \frac{\Delta(p)dp}{\sqrt{p^2 - \eta_1^2}} = \int_{\eta_1}^{\eta_0=\frac{r_0}{v_0}} \frac{dp}{\sqrt{p^2 - \eta_1^2}} \int_{p=\eta(r_m)}^{\eta_0=\frac{r_0}{v_0}} \frac{2p}{\sqrt{\eta^2 - p^2}} \frac{d(\ln r)}{d\eta} d\eta$$

Sa efectuam integrala din membrul drept. Schimband ordinea de integrare se obtine:

$$2\int_{\eta_1}^{\eta_0=\frac{r_0}{v_0}} \frac{d}{d\eta}(\ln r) \left\{ \int_{\eta_1}^{\eta} \frac{p dp}{\sqrt{(p^2 - \eta_1^2)(\eta^2 - p^2)}} \right\} d\eta \tag{8.56}$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

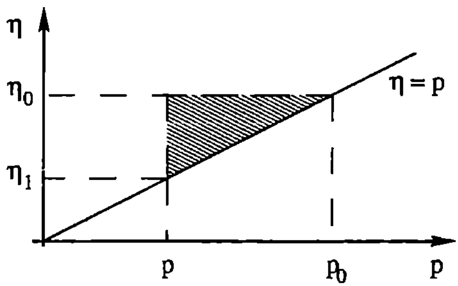


Fig. 8.15

Noile limite de integrare pentru p si η se obtin din aria de integrare (triunghiul hasurat) in planul p, η (Fig 8.15). Aria hasurata este maturata de limitele $\eta = p$ la η_0 si $p = \eta_1$ la η_0. Schimband ordinea de integrare limitele sunt $\eta = \eta_1$ la η_0 respectiv $p = \eta_1$ la η.

Sa calculam integrala din paranteza efectuind substitutia:

$$p^2 = \eta_1^2 \cos^2 t + \eta^2 \sin^2 t \tag{8.57}$$

Prin diferentiere se obtine

$$\begin{aligned} 2pdp &= -\eta_1^2 2 \cos t \sin t \, dt + \eta^2 2 \sin t \cos t \, dt = \\ &= (\eta^2 - \eta_1^2) \sin 2t \, dt \end{aligned} \tag{8.58}$$

respectiv

$$\begin{aligned} p^2 - \eta_1^2 &= \eta_1^2 \cos^2 t + \eta^2 \sin^2 t - \eta_1^2 = (\eta^2 - \eta_1^2) \sin^2 t \\ \eta^2 - p^2 &= \eta^2 - \eta_1^2 \cos^2 t - \eta^2 \sin^2 t = (\eta^2 - \eta_1^2) \cos^2 t \end{aligned} \tag{8.59}$$

si deci

$$\int_{\eta_1}^{\eta} \frac{2p\,dp}{\sqrt{p^2 - \eta_1^2}\sqrt{\eta^2 - p^2}} = \int_0^{\pi/2} \frac{(\eta^2 - \eta_1^2) \sin 2t \, dt}{(\eta^2 - \eta_1^2) \sin t \cos t} = \pi \tag{8.60}$$

Rezulta atunci

$$\int_{\eta_1}^{\eta_0} \frac{\Delta(p)dp}{\sqrt{p^2 - \eta_1^2}} dp = \pi \int_{\eta_1}^{\eta_0} \frac{d(\ln r)}{d\eta} d\eta = \pi \ln r \Big|_{r_1}^{r_0} = \pi \ln \frac{r_0}{r_1} \tag{8.61}$$

unde r_1 este raza pentru care $r_1/v_1 = \eta_1$.

Sa revenim asupra integralei din stanga:

$$\begin{aligned} \int_{p=\eta_1}^{p=\eta_0} \frac{\Delta(p)}{\sqrt{p^2 - \eta_1^2}} dp &= \int_{p=\eta_1}^{p=\eta_0} \frac{\Delta(p) d(p/\eta_1)}{\sqrt{(p/\eta_1)^2 - 1}} = \\ &= \int_{\eta_1}^{\eta_0} \Delta(p) d \left[\cosh^{-1} \left(\frac{p}{\eta_1} \right) \right] \end{aligned} \tag{8.62}$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

unde am avut in vedere ca

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\cosh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \tag{8.63}$$

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = d\left(\cosh^{-1} x\right)$$

Integrand prin parti se obtine:

$$\int_{\eta_1}^{\eta_0} \Delta(p) d\left[\cosh^{-1}\left(\frac{p}{\eta_1}\right)\right] =$$

$$= \Delta(p) \cosh^{-1}\left(\frac{p}{\eta_1}\right)\Big|_{\eta_1}^{\eta_0} - \int_{\eta_1}^{\eta_0} \cosh^{-1}\left(\frac{p}{\eta_1}\right) d(\Delta(p)) \tag{8.64}$$

dar

$$\Delta(p) \cosh^{-1}\left(\frac{p}{\eta_1}\right)\Big|_{\eta_1}^{\eta_0} = 0 \tag{8.65}$$

deoarece pentru $p = \eta_0 = r_0/v(r_0) \Rightarrow \Delta(\eta_0) = 0$ (acest lucru prin definitie), iar $\cosh^{-1} 1 = 0$. Rezulta:

$$-\int_{\eta_1}^{\eta_0} \cosh^{-1}\left(\frac{p}{\eta_1}\right) d\Delta(p) = \pi \ln \frac{r_0}{r_1} \tag{8.66}$$

dar am vazut ca $\Delta(\eta_0) = 0$ si deci:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\Delta_1} \cosh^{-1}\left(\frac{p}{\eta_1}\right) d\Delta(p) = \ln \frac{r_0}{r_1} \tag{8.67}$$

Cum functia $\cosh^{-1} x$ este complexa pentru $x \leq 1$ trebuie ca $\eta_1 \leq p$.

Ecuatia (8.67) este folosita pentru a determina distributia de viteze $v = v(r)$. Astfel, din punct de vedere experimental cunoastem dependenta timpului de parcurs T in functie de distanta epicentrala Δ: $T = T(\Delta)$ (Fig 8.16).

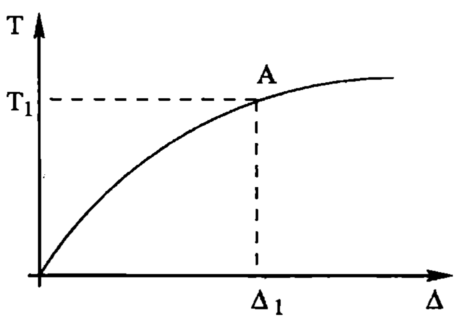


Fig. 8.16

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Punctul A de pe hodocrona defineste raza seismica ce a parcurs o distanta epicentrala Δ_1 in timpul T_1. In acest punct panta curbei reprezinta parametrul corespunzator acestei raze.

$$p_1 = \left.\frac{dT}{d\Delta}\right|_A \tag{8.68}$$

Problema care se pune este de a gasi din $T = T(\Delta)$ dependenta vitezei cu adancimea: $v = v(r)$. Punctul B din figura (Fig 8.17) defineste adancimea $r_0 - r_1$ in interiorul Pamantului pentru care raza corespunzatoare punctului ce trece printr-un minim iar viteza este v_1.

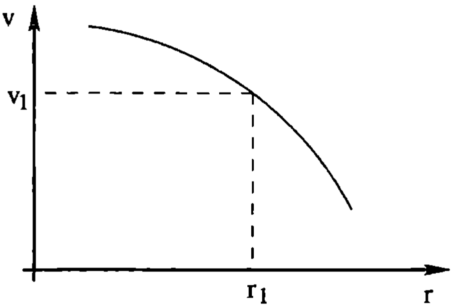


Fig. 8.17

Din formula Herglotz-Wiechert, cunoscand p functie de Δ (cu exceptia cazurilor in care apar complicatii) , se poate efectua integrala pentru o famile de raze cuprinse intre $\Delta = 0$ si $\Delta = \Delta_1$. Atunci din formula (8.67) va rezulta r_1 ca o functie de p_1 si din relatia $p_1 = r_1/v_1$ se obtine viteza corespunzatoare lui r_1.

In mod practic se efectuiaza urmatorii pasi:

1. Se alege pe hodocrona Δ_1 si se calculeaza $p(\Delta_1)$.
2. Se deriveaza hodocrona pe intervalul $0 - \Delta_1$ si se calculeaza $p(\Delta)$.
3. Se calculeaza raportul $p(\Delta)/p(\Delta_1)$ respectiv $\cosh^{-1}(p(\Delta)/p(\Delta_1))$.
4. Se calculeaza integrala (8.67).
5. Se gaseste varful minimului razei seismice r_1.
6. Din $p(\Delta_1) = r_1/v(r_1)$ se obtine viteza in punctul r_1: $v(r_1)$.

Se repeta apoi operatiile (1-6) pentru o alta valoare a distantei epicentrale Δ_2, ... , rezultand dependenta vitezei de adancime. In final putem tabela viteza in functie de adancime sau reprezenta grafic.

Cunoscand timpii de parcurs functie de distanta epicentrala $T = T(\Delta)$ se poate calcula numeric derivata $dT/d\Delta$ cu ajutorul diferentelor (formula Newton):

$$y'(x_0) = \frac{1}{h}\left(\Delta y_0 - \frac{\Delta^2 y_0}{2} + \frac{\Delta^3 y_0}{3} - \frac{\Delta^4 y_0}{4} + \frac{\Delta^5 y_0}{5} - \dots\right) \tag{8.69}$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

unde $\Delta^k y$ este diferenta finita de ordinul k a functiei.

In Tabelul 8.1 sunt prezentati timpii de parcurs ai undei P corespunzator distantelor epicentrale cuprinse in intervalul $10° - 90°$. In acest caz $h = 5$.

$$\left.\frac{dT}{d\Delta}\right|_{\Delta=10°} = \frac{1}{5}\left(67 + \frac{7}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ...\right) = 13,98\, s/\text{grad} \qquad (8.70)$$

$\Delta°$	T (m:s)	Δ^1	Δ^2	Δ^3	Δ^4
10	2:26	67	-7	-1	4
15	3:33	60	-8	3	-2
20	4:33	52	-5	1	0
25	5:25	47	-4	1	2
30	6:12	43	-3	3	-5
35	6:55	40	0	-2	1
40	7:35	40	-2	-1	3
45	8:15	38	-3	2	-2
50	8:53	35	-1	0	1
55	9:23	34	-1	1	-4
60	10:02	33	0	-3	5
65	10:35	33	-3	2	-5
70	11:08	30	-1	-3	7
75	11:38	29	-4	4	-
80	12:07	25	0	-	-
85	12:33	25	-	-	-
90	12:58	-	-	-	-

Tabelul 8.1

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Capitolul 9

Seismograful

9.1 Introducere

Un seismograf este un dispozitiv ce permite inregistrarea vibratiilor produse de un cutremur. Seismografele se impart in doua categorii: cele ce inregistreaza miscari verticale, respectiv orizontale.

Intr-o statie seismica se folosesc trei seismografe, unul vertical (sau "Z") si doua orizontale dispuse pe directia est-vest, nord-sud.

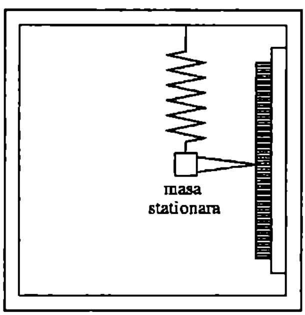


Fig. 9.1

In Fig 9.1 este reprezentat un seismograf vertical.

Masa suspendata are o perioada foarte mare ramanand practic stationara in spatiu in timp ce scala se misca in sus si in jos in prezenta undei seismice.

Seismograful orizontal functioneaza intr-un mod asemanator cu exceptia faptului ca inregistreaza miscari orizontale.

Seismografele verticale inregistreaza undele P si Rayleigh in timp ce seismografele orizontale inregistreaza undele SH si Love.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

9.2 Ecuatia de miscare

Din punctul de vedere al observatorului legat de sol miscarea este relativa si apare ca fiind efectuata de pendul sub influenta unei forte $\vec{F}$ care reprezinta forta de antrenare a solului de catre seism.

Desi detaliile de constructie ale seismografelor orizontale si verticale difera, ecuatia de miscare a unui pendul seismic este aceeasi

$$m(\ddot{x} + \ddot{u}) = -kx - r\dot{x} \tag{9.1}$$

unde $-r\dot{x}$ reprezinta forta de rezistenta, $-kx$ forta elastica, iar $u(t)$ este deplasarea solului.

Ecuatia (9.1) mai poate fi scrisa:

$$\ddot{x} + 2b\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = -\ddot{u} \tag{9.2}$$

unde

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad , \quad 2b = \frac{r}{m\omega_0} \tag{9.3}$$

Avand in vedere ca deplasarile maxime produse de cutremurele cele mai puternice din lume nu depasesc 10^{-2}m coodonata x este mult prea mica pentru a fi inregistrata direct. Este necesar un procedeu de amplificare a semnalului seismic. Astfel, unele seismografe folosesc un sistem de "brate" atasate pendulului ce permit marirea deplasarii x. Miscarea astfel amplificata este inregistrata pe o hartie aflata pe un cilindru ce se roteste uniform si este atasat rigid de sol.

Introducand amplificarea statica V_s si notand cu X deplasarea penitei (ce este proportionala cu x)

$$X = V_s x \tag{9.4}$$

ecuatia penitei este:

$$\ddot{X} + 2b\omega_0\dot{X} + \omega_0^2 X = -V_s\ddot{u} \tag{9.5}$$

9.3 Miscarea armonica simpla a Pamantului

Considerand deplasarea u a solului de forma:

$$u(t) = A\sin(\Omega t + \psi) \tag{9.6}$$

atunci

$$\ddot{u}(t) = -A\Omega^2\sin(\Omega t + \psi) \tag{9.7}$$

si ecuatiile (9.2) respectiv (9.5) devin:

$$\ddot{x} + 2b\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = -A\Omega^2\sin(\Omega t + \psi) \tag{9.8}$$

$$\ddot{X} + 2b\omega_0\dot{X} + \omega_0^2 X = -AV_s\Omega\sin(\Omega t + \psi) \tag{9.9}$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Utilizand numere complexe:

$$\ddot{z} + 2b\omega_0\dot{z} + \omega_0^2 z = -A\Omega^2 e^{i(\Omega t+\psi)} = A\Omega^2 e^{i(\Omega t+\psi+\pi)} \tag{9.10}$$

Cautand o solutie particulara de forma

$$z = Be^{i(\Omega t+\psi+\pi)} \tag{9.11}$$

rezulta

$$B = \frac{A\Omega^2(\omega_0^2 - \Omega^2)}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4b^2\omega_0^2\Omega^2} + \frac{A\Omega^2 2b\omega_0\Omega}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4b^2\omega_0^2\Omega^2} =$$

$$= |B|e^{-i\varphi} = |B|(\cos\varphi - i\sin\varphi) \tag{9.12}$$

unde

$$|B| = \frac{A\Omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4b^2\omega_0^2\Omega^2}} \tag{9.13}$$

$$\tan\varphi = -\frac{2b\omega_0\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} \tag{9.14}$$

si deci

$$x = \operatorname{Im} z = -\frac{A\Omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4b^2\omega_0^2\Omega^2}}\sin(\Omega t + \psi - \varphi) \tag{9.15}$$

respectiv

$$X = -\frac{AV_s\Omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4b^2\omega_0^2\Omega^2}}\sin(\Omega t + \psi - \varphi) \tag{9.16}$$

Introducand notatia

$$V_d = \frac{\Omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4b^2\omega_0^2\Omega^2}} = \frac{1}{\sqrt{\left[\left(\frac{\omega_0}{\Omega}\right)^2 - 1\right]^2 + 4b^2\left(\frac{\omega_0}{\Omega}\right)^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(n^2-1)^2 + 4b^2n^2}} \tag{9.17}$$

unde

$$n = \frac{\omega_0}{\Omega} \tag{9.18}$$

atunci

$$x = -AV_d\sin(\Omega t + \psi - \varphi) \tag{9.19}$$

$$X = -AV_sV_d\sin(\Omega t + \psi - \varphi) \tag{9.20}$$

iar

$$\tan\varphi = -\frac{2bn}{n^2 - 1} \tag{9.21}$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Din relatia (9.19) se vede ca oscilatiile solului sunt amplificate de pendulul seismic cu marimea V_d si defazate cu φ.

Dupa cum arata relatia (9.17) oscilatia va fi amplificata diferit in functie de frecventa undelor ce o produc. Rezulta totodata, ca diferite aparate seismice cu caracteristici constructive diferite vor amplifica aceasta unda in mod diferit, dand nastere la inregistrari diferite.

Un cutremur este format din grupari succesive de timpi de sosire, de oscilatii avand frecvente diferite ceea ce va duce la amplificari diferite.

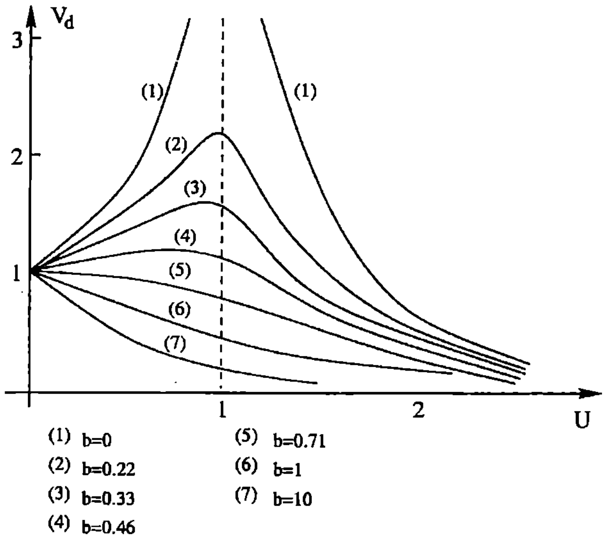


Fig. 9.2

Dependenta lui V_d de $u = \omega_0/\Omega$ la diferite valori ale lui b este redata in figura (Fig. 9.2).

9.4 Seismograful ca deplasometru sau accelerometru

In cazul in care $n \ll 1$ relatia (9.17) devine

$$V_d = \frac{1}{\sqrt{1 - 2n^2 + 4b^2n^2 + n^4}} = \frac{1}{\sqrt{1 - [2n^2(1-2b^2) - n^4]}} \simeq$$

$$\simeq 1 + (1 - 2b^2)n^2 \simeq 1 \tag{9.22}$$

unde am avut in vedere ca

$$\frac{1}{\sqrt{1-\alpha}} \simeq 1 + \frac{1}{2}\alpha + ... \tag{9.23}$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

iar

$$\alpha = 2n^2(1 - 2b^2) - n^4 \tag{9.24}$$

Totodata

$$\tan\varphi = -\frac{2bn}{n^2 - 1} \simeq 2bn \simeq 0 \tag{9.25}$$

si deci

$$\varphi = 0 \tag{9.26}$$

Rezulta atunci

$$x = -A\sin(\Omega t + \psi) = -u \tag{9.27}$$

iar seismograful inregistreaza deplasarea u cu semn schimbat.

Sa consideram cazul in care $\omega_0 \gg \Omega$ si deci $n \gg 1$. In aceste conditii (cu b mic) rezulta

$$V_d = \frac{1}{n^2} = \frac{\Omega^2}{\omega_0^2} \tag{9.28}$$

iar

$$\tan\varphi = \frac{2b\omega_0\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} \simeq 0 \tag{9.29}$$

Rezulta atunci din relatia (9.19)

$$x = -\frac{A\Omega^2}{\omega_0^2}\sin(\Omega t + \psi) = \frac{\ddot{u}}{\omega_0^2} \tag{9.30}$$

Relatiile de mai sus exprima faptul ca daca se folosesc pendului slabi amortizati a caror perioada proprie este mult mai mica ca a undelor seismice atunci aparatul inregistreaza acceleratia solului.

Accelerometrele nu functioneaza permanent. Ele sunt reglate pentru a intra in functie numai cand se produc cutremure care duc la o acceleratie a solului superioara unui prag de sensibilitate care rezulta din constructia aparatului.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

ANEXE

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Anexa A

Statii seismice din Romania

Lista statiilor seismice permanente din Romania:

Nr. crt.	Denumirea Statiei	Codul international	Latitudinea	Longitudinea	Altitudinea
1.	Bacau	BAC	46,5667	26,9000	167
2.	Baia-Mare	BMR	47,6743	23,4970	228
3.	Birlad	BIR	46,2665	27,6263	225
4.	Bordesti	BRD	45,5533	27,0300	356
5.	Bucuresti-Filaret	BUC	44,4617	26,0967	63
6.	Bucuresti-Magurele	BUC_1	44,3467	26,0300	75
7.	Buzias	BZS	45,6167	21,6167	150
8.	Caracaliu	CFR	45,1853	28,1531	21
9.	Carei	CEI	47,6850	22,4585	125
10.	Caldarusani	CDB	44,6768	26,2707	85
11.	Calugareni	CGN	44,1712	26,6067	78
12.	Ceahlau	CED	46,9758	25,9511	1699
13.	Cernavoda	CVD	44,3453	28,0448	104
14.	Cimpulung	CMP	45,2683	25,0383	598
15.	Clasani	CLO	45,0739	22,8019	335
16.	Cluj-Napoca	CJR	46,7133	23,5982	750
17.	Colonesti	CLI	46,5888	27,2562	508
18.	Covasna	CVO	45,8200	26,1667	615
19.	Cozia	COZ	45,3205	24,3425	1610
20.	Deva	DEV	45,8833	22,9033	250

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Nr. crt.	Denumirea Statiei	Codul international	Latitudinea	Longitudinea	Altitudinea
21.	Dragasani	DRA	44,6787	24,2362	180
22.	Focsani	FOC	45,6950	27,1833	61
23.	Gura Zlata	GZR	45,3933	22,7767	850
24.	Hani Mare	HNM	47,2774	24,7338	1580
25.	Iasi	IAS	47,1939	27,5617	180
26.	Istrita	ISR	45,1378	26,5441	750
27.	Laresti	LER	45,6643	25,1500	
28.	Molnas	MSR	46,0380	25,8215	640
29.	Malini	MCN	27,4542	26,0800	
30.	Medias	MDB	46,1342	24,3680	375
31.	Muntele Rosu	MLR	45,4917	25,9036	1360
32.	Odobesti	ODA	45,7747	27,0562	140
33.	Popeni	PPE	46,2578	27,8503	267
34.	Strehaia	SRE	44,6622	23,2054	335
35.	Susara	SSR	44,8633	21,7433	400
36.	Timisoara	TIM	45,7367	21,2217	88
37.	Topalul	TLB	44,5863	28,0453	15
38.	Tulcea	TLC	45,1850	28,8168	15
39.	Valea Ierii	VLR	46,6541	23,3548	1080
40.	Vranceoaia	VRI	45,8700	26,7250	480

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Anexa B

Distanta epicentrala

Seismologii masoara distanta pe glob prin unghiul Δ. Pentru a introduce unghiul Δ sa consideram doua puncte A si B pe suprafata globului (epicentrul si o statie seismica). Distanta epicentrala este lungimea arcului cel mai scurt care uneste cele doua puncte; ($1^\circ \simeq 111$ Km).

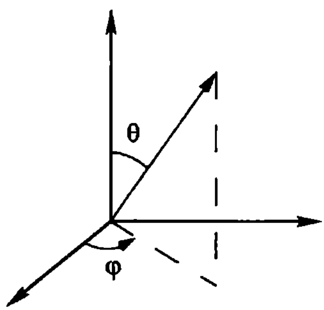


Fig. B.1

Fata de un sistem de coordonate sferic (Fig B.1)un punct este caracterizat prin

$$\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\theta \\ y &= r\sin\theta\cos\varphi \\ z &= r\cos\theta \end{aligned} \tag{B.1}$$

unde $0 \leq r \leq \infty$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi < 2\pi$.

Considerand pe o sfera doua puncte A si B (Fig B.2)atunci vectorii unitate pe

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

directia lui $\overrightarrow{OA}$ respectiv $\overrightarrow{OB}$ au componentele:

$$\begin{array}{ll} \vec{e}_A & (\sin\theta_A \cos\varphi_A \,,\, \sin\theta_A \sin\varphi_A \,,\, \cos\theta_A) \\ \vec{e}_B & (\sin\theta_B \cos\varphi_B \,,\, \sin\theta_B \sin\varphi_B \,,\, \cos\theta_B) \end{array} \tag{B.2}$$

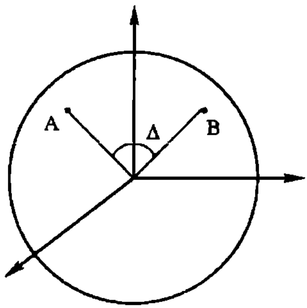


Fig. B.2

Efectuand produsul scalar intre cei doi vectori se obtine:

$$\begin{aligned} \cos\Delta &= \sin\theta_A \cos\varphi_A \sin\theta_B \cos\varphi_B + \sin\theta_A \sin\varphi_A \sin\theta_B \sin\varphi_B + \\ &\quad + \cos\theta_A \cos\theta_B = \\ &= \sin\theta_A \sin\theta_B (\cos\varphi_A \cos\varphi_B + \sin\varphi_A \sin\varphi_B) + \\ &\quad + \cos\theta_A \cos\theta_B = \\ &= \sin\theta_A \sin\theta_B \cos(\varphi_A - \varphi_B) + \cos\theta_A \cos\theta_B \end{aligned} \tag{B.3}$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Anexa C

Azimutul

Un alt unghi ce leaga doua puncte de pe o sfera este azimutul Z. Daca ne asezam intr-un punct A si privim catre un punct B de-a lungul unui cerc mare, unghiul format de directia nordica (meriadianul ce trece prin A) si acel cerc mare (arcul AB) masurat pozitiv in sensul acelor de ceasornic reprezinta azimutul.

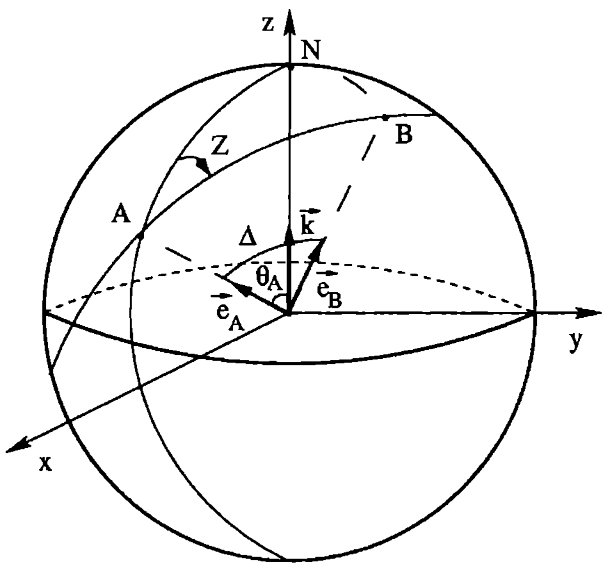


Fig. C.1

Fie $\vec{k}$ (0, 0, 1) un vector unitate pe directia ON si doi vectori unitate pe directia lui OA si OB ($\vec{e}_A$, $\vec{e}_B$). Azimutul este unghiul dintre planele ONA si OAB iar unghiul dintre normalele la aceste plane este $\pi - Z$.

Marimile produselor vectoriale $\vec{k} \times \vec{a}$ si $\vec{a} \times \vec{b}$ sunt $\sin\theta_A$ respectiv $\sin\Delta$,

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

astfel incat efectuand produsul scalar $(\vec{k} \times \vec{a}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$ se obtine:

$$\sin\theta_A \cdot \sin\Delta \cos(\pi - Z) = -\sin\theta_A \sin\Delta \cos Z \tag{C.1}$$

Dar in raport cu un sistem cartezian de coordonate

$$\begin{gathered} \vec{k}\,(0, 0, 1) \\ \vec{e}_A\,(\sin\theta_A \cos\varphi_A, \sin\theta_A \sin\varphi_A, \cos\theta_A) \\ \vec{e}_B\,(\sin\theta_B \cos\varphi_B, \sin\theta_B \sin\varphi_B, \cos\theta_B) \end{gathered} \tag{C.2}$$

astfel incat

$$\vec{k} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ \sin\theta_A \cos\varphi_A & \sin\theta_A \sin\varphi_A & \cos\theta_A \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}(-\sin\theta_A \sin\varphi_A) + \vec{j}(\sin\theta_A \cos\varphi_A) \tag{C.3}$$

iar

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \sin\theta_A \cos\varphi_A & \sin\theta_A \sin\varphi_A & \cos\theta_A \\ \sin\theta_B \cos\varphi_B & \sin\theta_B \sin\varphi_B & \cos\theta_B \end{vmatrix} =$$

$$\begin{gathered} = \vec{i}(\sin\theta_A \sin\varphi_A \cos\varphi_B - \sin\theta_B \sin\varphi_B \cos\theta_A) + \\ + \vec{j}(\sin\theta_B \cos\varphi_B \cos\theta_A - \sin\theta_A \cos\varphi_A \cos\theta_B) + \\ + \vec{k}(\sin\theta_A \cos\varphi_A \sin\theta_B \sin\varphi_B - \sin\theta_A \sin\varphi_A \sin\theta_B \cos\varphi_B) \end{gathered} \tag{C.4}$$

obtinandu-se

$$\begin{gathered} (\vec{k} \times \vec{a}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \\ -\sin\theta_A \sin\varphi_A(\sin\theta_A \sin\varphi_A \cos\varphi_B - \sin\theta_B \sin\varphi_B \cos\theta_A) + \\ + \sin\theta_A \cos\varphi_A(\sin\theta_B \cos\varphi_B \cos\theta_A - \sin\theta_A \cos\varphi_A \cos\theta_A) = \\ = -\sin^2\theta_A \cos\theta_B + \sin\theta_A \sin\theta_B \cos\theta_A \cos(\varphi_A - \varphi_B) \end{gathered} \tag{C.5}$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Egaland (C.1) cu (C.5) rezulta:

$$\cos Z = \frac{\sin\theta_A \cos\theta_B - \sin\theta_B \cos\theta_A \cos(\varphi_B - \varphi_A)}{\sin\Delta} \tag{C.6}$$

Pe de alta parte, calculand modulul produsului vectorial $(\vec{k} \times \vec{a}) \times (\vec{a} \times \vec{b})$ va rezulta modulul lui $\sin Z$.

Dar

$$(\vec{k} \times \vec{e}_A) \times (\vec{e}_A \times \vec{e}_B) =$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\sin\theta_A \sin\varphi_A & \sin\theta_A \cos\varphi_A & 0 \\ (\vec{a} \times \vec{b})_x & (\vec{a} \times \vec{b})_y & (\vec{a} \times \vec{b})_z \end{vmatrix} \tag{C.7}$$

astfel incat, pe componente, rezulta:

$$O_z: \quad -\sin\theta_A \sin\varphi_A(\sin\theta_B \cos\varphi_B \cos\theta_A - \sin\theta_A \cos\varphi_A \cos\theta_B) -$$

$$-\sin\theta_A \cos\varphi_A(\sin\theta_A \sin\varphi_A \cos\varphi_B - \sin\theta_B \sin\varphi_B \cos\theta_A) =$$

$$-\sin\theta_A \sin\varphi_A \sin\theta_B \cos\theta_A + \sin^2\theta_A \sin\varphi_A \cos\varphi_A \cos\theta_B -$$

$$-\sin^2\theta_A \cos\varphi_A \sin\varphi_A \cos\varphi_B + \sin\theta_A \cos\varphi_A \sin\theta_B \sin\varphi_B \cos\theta_A =$$

$$= \sin\theta_A \sin\theta_B \cos\theta_A(\sin\varphi_A \cos\varphi_B - \cos\varphi_A \sin\varphi_B) =$$

$$= \sin\theta_A \sin\theta_B \cos\theta_A \sin(\varphi_A - \varphi_B)$$

$$O_y: \quad \sin\theta_A \sin\varphi_A(\sin\theta_A \cos\varphi_A \sin\theta_B \sin\varphi_B - \sin\theta_A \sin\varphi_A \sin\theta_B \cos\varphi_B)$$

$$= \sin\theta_A \sin\varphi_A \sin\theta_A \sin\theta_B \sin(\varphi_B - \varphi_A) =$$

$$= \sin^2\theta_A \sin\varphi_A \sin\theta_B \sin(\varphi_B - \varphi_A)$$

$$O_x: \quad \sin^2\theta_A \sin\theta_B \cos\varphi_A \sin(\varphi_B - \varphi_A)$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Atunci marimea vectorului $(\vec{k} \times \vec{a}) \times (\vec{a} \times \vec{b})$ este

$$\pm \sin\theta_A \sin\theta_B \sin(\varphi_B - \varphi_A)\sqrt{\sin^2\theta_A \cos^2\varphi_A + \sin^2\theta_A \sin^2\varphi_B + \cos^2\theta_B} =$$

$$= \pm \sin\theta_A \sin\theta_B \sin(\varphi_B - \varphi_A)$$

sau

$$\sin\theta_A \sin\Delta \sin Z = \pm \sin\theta_A \sin\theta_B \sin(\varphi_B - \varphi_A)$$

si cu semnul + rezulta

$$\sin Z = \frac{\sin\theta_B \sin(\varphi_B - \varphi_A)}{\sin\Delta}$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Anexa D

Geometria sursei

Pozitia unui punct in spatiu este specificata deobicei prin coordonatele carteziene x_1, x_2, x_3. Pe linga acestea pot fi utilizate si coordonatele sferice (Fig. D.1).

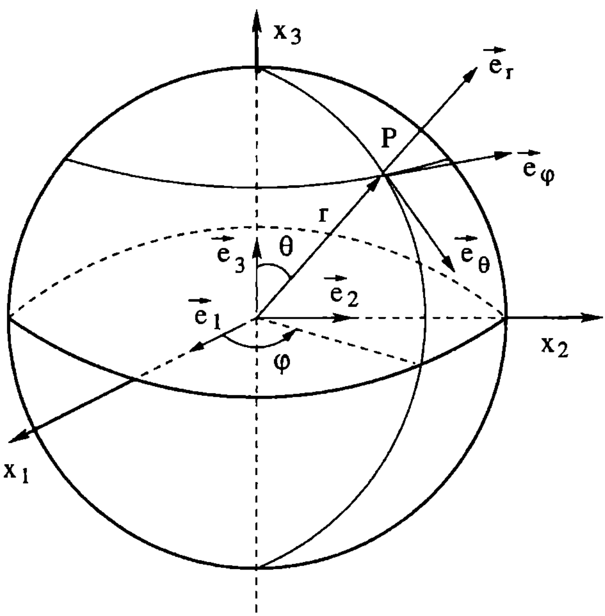


Fig. D.1

Astfel punctul P este caracterizat de distanta r de la originea sistemului de axe $O_{x_1x_2x_3}$ la punctul P, unghiul θpe care vectorul de pozitie $\vec{r}$ il face cu axa O_{x_3} si respectiv unghiul φ masurat intre axa O_{x_1}si proiectia lui $\vec{r}$in planul $O_{x_1x_2}$.

In cazul Pamantului planul $O_{x_1x_2}$ coincide cu planul ecuatorial, axa O_{x_3} cu directia polului Nord iar planul $O_{x_1x_3}$ trece prin meridianul Greenwich.

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Intre coordonatele sferice si cele carteziene ale unui punct exista legatura:

$$x = r\sin\theta\cos\varphi$$

$$y = r\sin\theta\sin\varphi \tag{D.1}$$

$$z = r\cos\theta$$

unde $0 \le r < \infty$, $0 \le \theta \le 2\pi$, $0 \le \varphi < 2\pi$.

In particular coordonatele focarului sunt r_0, θ_0 si φ_0.

Suprafetele de coordonate constante sunt suprafetele determinate de $r = const.$, $\theta = const.$, $\varphi = const.$. Suprafetele cu $r = const.$ sunt sfere concentrice, $\theta = const.$ sunt conuri cu virful in O iar cele cu $\varphi = const.$ sunt plane care trec prin axa O_{x_3}. Intr-un punct P aceste suprafete sunt perpendiculare.

O pereche de suprafete constante se intersecteaza in lungul unei curbe continue numita linie de coordonate. Astfel, conul $\theta = const.$ intersecteaza sfera $r = const.$ dupa un cerc. In lungul acestui cerc numai φ se modifica, r si θ raminind constanti..

Prin punctul P_0 (Fig. D.1.) trec trei linii de coordonate perpendiculare pe care le putem considera axe de coordonate curbe. In lungul unei asemenea axe numai una din coordonate se poate modifica.

In fiecare punct se pot construi trei vectori unitate $\vec{e}_{r_0}$,$\vec{e}_{\theta_0}$,$\vec{e}_{\varphi_0}$ care sunt tangenti la liniile de coordonate. Spre deosebire de vectorii unitate $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ acesti trei vectori isi modifica directia de la un punct la altul fiind deci functie de coordonate. Intre vectorii unitate $\vec{e}_{r_0}$, $\vec{e}_{\theta_0}$, $\vec{e}_{\varphi_0}$ si $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ exista legatura:

$$\vec{e}_{r_0} = \sin\theta_0\cos\varphi_0\vec{e}_1 + \sin\theta_0\sin\varphi_0\vec{e}_2 + \cos\theta_0\vec{e}_3$$

$$\vec{e}_{\theta_0} = \cos\theta_0\cos\varphi_0\vec{e}_1 + \cos\theta_0\sin\varphi_0\vec{e}_2 - \sin\theta_0\vec{e}_3 \tag{D.2}$$

$$\vec{e}_{\varphi_0} = -\sin\varphi_0\vec{e}_1 + \cos\varphi_0\vec{e}_2$$

sau matricial:

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_{r_0} \\ \vec{e}_{\theta_0} \\ \vec{e}_{\varphi_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta_0\cos\varphi_0 & \sin\theta_0\sin\varphi_0 & \cos\theta_0 \\ \cos\theta_0\cos\varphi_0 & \cos\theta_0\sin\varphi_0 & -\sin\theta_0 \\ -\sin\varphi_0 & \cos\varphi_0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix} \tag{D.3}$$

Linia de intersectie a planului de falie (plan ce contine focarul F) cu suprafata Pamantului se numeste **directia faliei** . Orientarea acesteia este data de unghiul φ_s, azimutul faliei masurat in sensul acelor de ceasornic fata de Nord.

Sensul pozitiv al directiei faliei se alege la dreapta unui observator ce priveste spre peretele din culcus (footwall).

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Linia de la suprafata Pamantului care este perpandiculara pe directia faliei, definita fata de Nord de unghiul $\frac{\pi}{2} + \varphi_s$ se numeste directia inclinarii faliei.

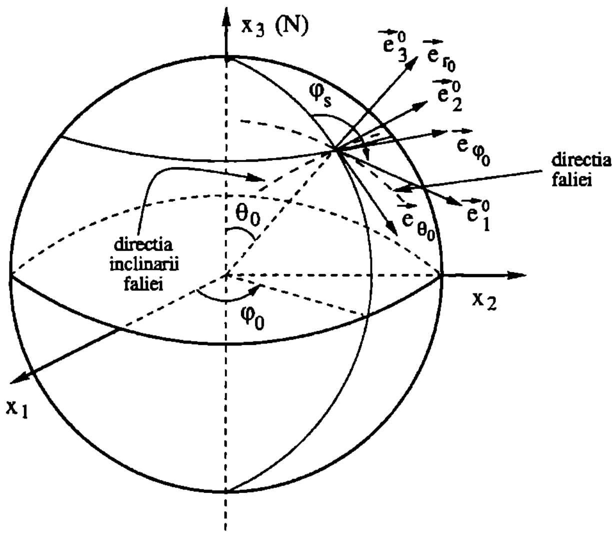


Fig. D.2

Rotind sistemul de coordonate $\vec{e}_{r_0}, \vec{e}_{\theta_0}, \vec{e}_{\varphi_0}$ cu unghiul $\pi - \varphi_s$ in jurul axei $\vec{e}_{r_0}$, se obtine un nou sistem de coordonate sistemul de coordonate ai sursei ai carei vectori unitate sunt $\vec{e}^{\,o}_1, \vec{e}^{\,o}_2, \vec{e}^{\,o}_3$. Ca urmare a acestei rotatii axa $\vec{e}^{\,o}_1$ coincide cu directia faliei, iar $\vec{e}^{\,o}_2$ se afla in lungul directiei inclinarii.

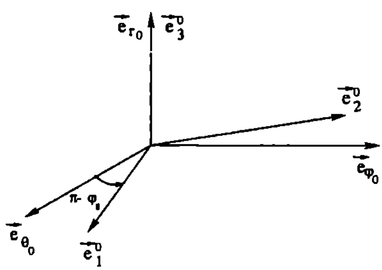


Fig. D.3

Legatura intre vectorii unitate $\vec{e}^{\,o}_1, \vec{e}^{\,o}_2, \vec{e}^{\,o}_3$si $\vec{e}_{r_0}, \vec{e}_{\theta_0}, \vec{e}_{\varphi_0}$ este data de

$$\vec{e}^{\,o}_3 = \vec{e}_{r_0}$$

$$\vec{e}^{\,o}_2 = -\sin\varphi_s \vec{e}_{\theta_0} - \cos\varphi_s \vec{e}_{\varphi_0} \tag{D.4}$$

$$\vec{e}^{\,o}_3 = -\cos\varphi_s \vec{e}_{\theta_0} + \sin\varphi_s \vec{e}_{\varphi_0}$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

sau matricial

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_3^o \\ \vec{e}_2^o \\ \vec{e}_1^o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\sin\varphi_s & -\cos\varphi_s \\ 0 & -\cos\varphi_s & \sin\varphi_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_{r_0} \\ \vec{e}_{\theta_0} \\ \vec{e}_{\varphi_s} \end{pmatrix} \tag{D.5}$$

Sa introducem normala $\vec{n}$ la planul de falie. Se alege directia vectorului $\vec{n}$ astfel incit unghiul dintre $\vec{n}$ si $\vec{e}_3^o$ sa fie ascutit.

Unghiul dintre vectorii $\vec{n}$ si $\vec{e}_3^o$ se numeste unghiul de inclinare si se noteaza cu δ. Acesta este cuprins intre 0 si $\frac{\pi}{2}$.Unghiul δ este egal si cu unghiul pe care planul de falie il face cu planul orizontal care trece prin sursa.

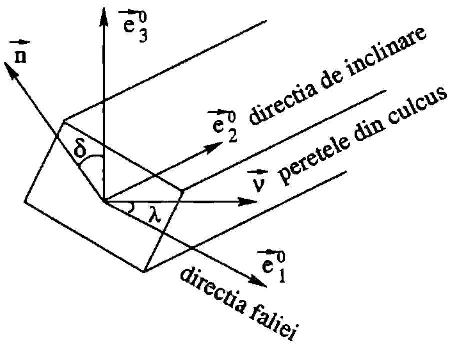


Fig. D.4

Fie $\vec{\nu}$ vectorul unitate in directia in care se deplaseaza peretele din acoperis fata de peretele din culcus. In cazul unei falii cu alunecare laterala deplasarea are loc in lungul directiei faliei. In cazul unei falii cu alunecare normala sau inversa deplasarea are loc in planul faliei, perpendicular pe directia faliei. In general insa deplasarea are loc ca urmare a unei superpozitii intre cele cele doua situatii, rezultand o falie cu inclinare oblica.

Sa notam cu λ unghiul pe care $\vec{\nu}$ il face cu vectrul unitate $\vec{e}_1^o$. Unghiul λ se numeste unghi de alunecare ($0 \leq \lambda < 2\pi$). Se observa atunci ca daca $\lambda = 0$ sau π avem de-a face cu o falie cu alunecare laterala, iar daca $\lambda = \pi/2$ sau $3\pi/2$ rezulta o falie cu alunecare normala sau inversa.

Definim vectorul nul

$$\vec{b} = \vec{n} \times \vec{\nu} \tag{D.6}$$

astfel incat vectorii $\vec{b}$, $\vec{n}$ si $\vec{\nu}$ formeaza un triedru drept.

Vectorii ($\vec{b}$, $\vec{n}$, $\vec{\nu}$) se pot obtine din ($\vec{e}_1^o$,$\vec{e}_2^o$, $\vec{e}_3^o$) rotind sistemul de coordonate al sursei cu unghiul δ in jurul lui $\vec{e}_1^o$ si rotind apoi sistemul astfel obtinut cu unghiul λ in jurul noii pozitii a axei definita de vectorul unitate $\vec{e}_3^o$:

$$\begin{pmatrix} \vec{\nu} \\ \vec{b} \\ \vec{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\lambda & \sin\lambda\cos\delta & \sin\lambda\sin\delta \\ -\sin\lambda & \cos\lambda\cos\delta & \cos\lambda\sin\delta \\ 0 & -\sin\delta & \cos\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_1^o \\ \vec{e}_2^o \\ \vec{e}_3^o \end{pmatrix} \tag{D.7}$$

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Bibliografie

[1] Petrescu G. "Cutremure de Pamant" Editura tehnica, Bucuresti 1959

[2] Bullen K. E. and Bolt B. A. "An introduction to the theory of seismology" Cambridge Univ. Press, 1985

[3] Gubbins D. "Seismology and Plate Tectonics" Cambridge Univ. Press, 1990

[4] Bath M. "Introduction to seismology" Birkhauser, Boston, 1979

[5] Bolt B.A. "Inside the Earth: Evidence from Earthquakes" Freeman, San Francisco, 1982

[6] Simon R.B. "Earthquake Interpretation: A manual for Reading Seismograms" W. M. Kaufmann, Los Altos, CA (1981)

[7] Anderson D.L. "Theory of the Earth" Blackwell, Boston, 1989

[8] Thorne Lay, Terry C. Wallace "Modern Global seismology" Academic Press, 1955

[9] Lascu Stefan, "Principiile observatiilor seismice" Univ. Bucuresti, 1984

VERIFICAT 2007

VERIFICAT 2017

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

Tiparul s-a executat sub cda 762/2001
la Tipografia Editurii Universității din București

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro

DATA RESTITUIRII

~~14 IUN 2002~~	22 MAR 2011	
2 IUN 2005		
5 MAI 2009		
18 AUG 2009		
19 AUG 2009		
1 SEP 2009		
2 SEP 2009		
21 FEB 2011		

BIBLIOTECA CENTRALA
UNIVERSITARA „CAROL I”

DE SPIRITU ET ANIMA

55.800

ISBN 973-575-505-X

Lei 55800

https://biblioteca-digitala.ro / https://unibuc.ro