

471105

MAGDA FIFIRIG

LUCRĂRI PRACTICE
DE
MECANICĂ FIZICĂ

EDITURA UNIVERSITĂȚII DIN BUCUREȘTI
1998



BIBLIOTECA CENTRALĂ
UNIVERSITARĂ
București

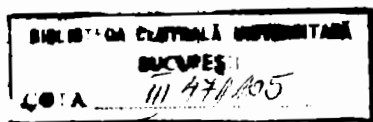
Cota III 471 105
C199901759
Inventar

MAGDA FIFIRIG

**LUCRĂRI PRACTICE
DE
MECANICĂ FIZICĂ**

**EDITURA UNIVERSITĂȚII DIN BUCUREȘTI
1998**

Referenți științifici: Conf. dr. ION PETRE
Prof. dr. CONSTANTIN CIOACĂ



217/99

B.C.U. București



C199901759

© Editura Universității din București
Șos. Panduri, 90-92, București - 76235; Telefon/Fax 410.23.84

ISBN - 973 - 575 - 288 - 3

Cuprins

1	INTRODUCERE	5
2	MĂRIMI FIZICE	7
2.1	INTRODUCERE	7
2.2	FORMULE DIMENSIONALE	8
3	ERORI DE MĂSURARE	11
3.1	INTRODUCERE	11
3.2	EXPRIMAREA ERORILOR DE MĂSURARE	14
4	ALEGEREA CONDIȚIILOR OPTIME DE LUCRU	22
5	REPREZENTAREA GRAFICĂ	25
5.1	TRASAREA GRAFICELOR	25
5.2	METODA CELOR MAI MICI PĂTRATE. DETERMINAREA PARAMETRILOR UNEI DEPENDENȚE LINEARE	26
6	STUDIUL UNOR INSTRUMENTE DE MĂSURĂ	29
6.1	STUDIUL ȘUBLERULUI	29
6.1.1	Teoria lucrării	29
6.1.2	Scopul lucrării	31
6.1.3	Aparate și materiale necesare	31
6.1.4	Modul de lucru. Prelucrarea datelor experimentale	31
6.2	Studiul raportorului cu vernier circular	33
6.2.1	Teoria lucrării	33
6.2.2	Scopul lucrării	34
6.2.3	Aparate și materiale necesare	34
6.2.4	Modul de lucru. Prelucrarea datelor experimentale	34
6.3	Sferometrul	35
6.3.1	Teoria lucrării	35
6.3.2	Scopul lucrării	35

6.3.3	Aparate și materiale necesare	35
6.3.4	Modul de lucru. Prelucrarea datelor experimentale	35
7	VERIFICAREA LEGII MIȘCĂRII ȘI A LEGII VITEZEI ÎN MIȘCAREA RECTILINIE UNIFORM VARIATĂ CU AJUTORUL PLANULUI ÎNCLINAT	39
7.1	Teoria lucrării	39
7.2	Scopul lucrării	40
7.3	Dispozitivul experimental	40
7.4	Modul de lucru. Prelucrarea datelor experimentale	41
8	VERIFICAREA TEOREMEI LUI STEINER	44
8.1	Teoria lucrării	44
8.2	Scopul lucrării	44
8.3	Dispozitivul experimental	44
8.4	Modul de lucru. Prelucrarea datelor experimentale	47
9	STUDIUL COMPUNERII MIȘCĂRILOR ARMONICE PERPENDICULARE	49
9.1	Teoria lucrării	49
9.2	Scopul lucrării	53
9.3	Dispozitivul experimental	53
9.4	Modul de lucru. Prelucrarea datelor experimentale	54
10	STUDIUL COMPUNERII MIȘCĂRILOR ARMONICE PARALELE	58
10.1	Teoria lucrării	58
10.2	Scopul lucrării	62
10.3	Dispozitivul experimental	62
10.4	Modul de lucru. Prelucrarea datelor experimentale	64
11	STUDIUL MIȘCĂRII ARMONICE AMORTIZATE	66
11.1	Teoria lucrării	66
11.2	Scopul lucrării	70
11.3	Dispozitivul experimental	71
11.4	Modul de lucru. Prelucrarea datelor experimentale	71
11.5	Dispozitivul experimental	75

11.6 Modul de lucru. Prelucrarea datelor experimentale	77
12 DETERMINAREA DENSITĂȚII LICHIDELOR CU BALANȚA MOHR-WESTPHALL	79
12.1 Teoria lucrării	79
12.2 Scopul lucrării	80
12.3 Dispozitivul experimental	80
12.4 Modul de lucru. Prelucrarea datelor experimentale	81
13 DETERMINAREA ACCELERĂȚIEI GRAVITAȚIONALE CU PENDULUL MATEMATIC	84
13.1 Teoria lucrării	84
13.2 Scopul lucrării	86
13.3 Dispozitivul experimental	86
13.4 Modul de lucru. Prelucrarea datelor experimentale	87
14 DETERMINAREA ACCELERĂȚIEI GRAVITAȚIONALE CU PENDULUL FIZIC KATER	89
14.1 Teoria lucrării	89
14.2 Scopul lucrării	92
14.3 Dispozitivul experimental	92
14.4 Modul de lucru. Prelucrarea datelor experimentale	93
15 DETERMINAREA MOMENTULUI DE INERȚIE AL UNUI CORP CU AJUTORUL PENDULULUI DE TORSIUNE HARTL	95
15.1 Teoria lucrării	95
15.2 Scopul lucrării	96
15.3 Dispozitivul experimental	97
15.4 Modul de lucru. Prelucrarea datelor experimentale	97
16 DETERMINAREA MOMENTULUI DE INERȚIE AL UNUI CORP CU AJUTORUL PENDULULUI DE TORSIUNE	98
16.1 Teoria lucrării	98
16.2 Scopul lucrării	100
16.3 Dispozitivul experimental	101

16.4	Modul de lucru. Prelucrarea datelor experimentale	102
16.5	Dispozitivul experimental	104
16.6	Modul de lucru. Prelucrarea datelor experimentale	105
17	DETERMINAREA MODULULUI DE ELASTICITATE PE BAZA ÎNTINDERII	108
17.1	Teoria lucrării	108
17.2	Scopul lucrării	111
17.3	Dispozitivul experimental	111
17.4	Modul de lucru. Prelucrarea datelor experimentale	112
18	STUDIUL ÎNCOVOIERII UNEI BARE ELASTICE	114
18.1	Teoria lucrării	114
18.2	Scopul lucrării	118
18.3	Dispozitivul experimental	118
18.4	Modul de lucru. Prelucrarea datelor experimentale	119
19	DETERMINAREA CONSTANTEI ELASTICE A UNUI RESORT	121
19.1	Teoria lucrării	121
19.2	Scopul lucrării	123
19.3	Dispozitivul experimental	123
19.4	Modul de lucru. Prelucrarea datelor experimentale	123
20	DETERMINAREA VITEZEI SUNETULUI ÎN AER PRIN METODA INTERFERENȚEI	125
20.1	Teoria lucrării	125
20.2	Scopul lucrării	128
20.3	Dispozitivul experimental	128
20.4	Modul de lucru. Prelucrarea datelor experimentale	129
21	BIBLIOGRAFIE	131

INTRODUCERE

Acest îndrumar cu lucrări practice de mecanică fizică se adresează studenților Facultății de Chimie. În prima parte a îndrumarului sunt prezentate elemente de calcul al erorilor, de evaluare a preciziei măsurătorilor, de alegere a condițiilor optime de lucru. Cele cincisprezece lucrări de laborator prezentate acoperă o gamă largă de lucrări: lucrări de studiere și utilizare a unor instrumente de măsură (șublerul, sferometrul, raportorul cu vernier), lucrări de verificare a unor legi (legea vitezei și cea a spațiului în mișcarea uniform variată, teorema lui Seiner), lucrări de studiere a unor procese din domeniul mecanicii (mișcarea armonică amortizată, compunerea mișcărilor armonice perpendiculare, compunerea mișcărilor armonice paralele) și lucrări de determinare a unor mărimi fizice (densitatea unor lichide, accelerația gravitațională, momentul de inerție, modulul de elasticitate, viteza sunetului). Pentru a forma deprinderi de lucru la studenți în lucrări se dau indicații detaliate de efectuare a lor.

Fiecare lucrare de laborator este structurată astfel încât să cuprindă: teoria lucrării (o prezentare detaliată a ceea ce urmează să fie studiat), descrierea dispozitivului experimental și a modului de lucru, precum și prelucrarea datelor experimentale culese.

Acest îndrumar a fost elaborat astfel încât să atingă următoarele scopuri

didactice:

- o mai bună înțelegere a materiei predate la curs;
- deprinderea studenților de a folosi metoda experimentală în învățarea fizicii (prin solicitarea lor de a opera cu noțiunile predate la curs);
- deprinderea studenților de a folosi tehnica investigării prin experiment. Această tehnică presupune observarea fenomenului, formularea unei ipoteze, alcătuirea dispozitivului experimental, efectuarea măsurărilor în condițiile alese de experimentator, prelucrarea și interpretarea rezultatelor;
- deprinderea studenților de a realiza experimente sau demonstrații practice (contribuind la formarea lor pentru viitoarea meserie de profesor).

lector Magda Fifrig

MĂRIMI FIZICE

2.1 INTRODUCERE

Elementele constructive ale fizicii sunt mărimile fizice. Exemple de mărimi fizice: timpul, distanța, masa, forța, viteza, densitatea, temperatura, sarcina electrică, energia, lucrul mecanic, puterea, etc. Mărimile fizice se împart în două categorii: mărimi fizice scalare și mărimi fizice vectoriale. **Mărimile fizice scalare** sunt toate mărimile fizice care sunt complet determinate de o valoare numerică și o unitate. Exemple de mărimi scalare: timpul, masa, densitatea, temperatura, sarcina electrică, energia, lucrul mecanic, puterea, fluxul, etc. Mărimilor scalare li se asociază litere, cu ajutorul cărora sunt indicate. **Mărimile fizice vectoriale** nu sunt caracterizate numai de o valoare numerică ci și de o direcție și un sens. Exemple de mărimi vectoriale: vectorul de poziție, forța, viteza, momentul cinetic, momentul forței, accelerația, inducția electrică, inducția magnetică, etc. Mărimile fizice vectoriale sunt indicate printr-o literă careia i s-a adăugat o săgeată.

Mărimile fizice sunt legate între ele prin operații matematice. Ecuația stabilită între anumite mărimi fizice reprezintă expresia matematică a unei legi fizice.

Determinarea cantitativă a unei mărimi fizice se realizează printr-o operație de măsurare. Prin măsurarea unei mărimi se stabilește de câte ori se cuprinde în ea o altă mărime de aceeași natură, aleasă prin convenție drept unitate. Notând cu $[A]$ unitatea de măsură a mărimii A și cu a valoarea sa numerică putem scrie

$$A = a [A]. \quad (2.1)$$

Orice operație de măsurare presupune interacțiunea între obiectul de măsurat și aparatul de măsură. Această interacțiune modifică starea obiectului de măsurat. Deci valoarea exactă, numită **valoare adevărată** a unei mărimi

la un moment dat nu poate fi determinată. Valoarea care se cunoaște totdeauna este **valoare măsurată** a mărimii.

Rezultatul unei măsurări poate fi mai apropiat sau mai puțin apropiat de valoarea adevărată a mărimii măsurate. Diferența între valoarea adevărată și valoarea măsurată se numește **eroare de măsurare**.

În principiu pentru orice mărime fizică se poate alege o unitate de măsură proprie arbitrară. Dacă toate mărimile fizice s-ar exprima prin unități arbitrare atunci expresiile matematice ale legilor fizicii ar trebui să conțină coeficienți numerici dependenți de unitățile folosite. Pentru simplificarea scrierii acestor expresii (în sensul eliminării coeficienților numerici) se alege un număr mic de mărimi, numite **fundamentale** pe baza cărora se construiește un sistem coerent de unități. Celelalte mărimi și unități, legate de cele fundamentale prin legi fizice, se numesc **mărimi și unități derivate**. În mecanică există trei mărimi fizice fundamentale: lungimea, masa și timpul. În sistemul internațional (SI), adoptat de Conferința Generală de Măsură și Greutăți (Paris, octombrie 1960) sunt **7** unități fundamentale. Primele trei unități fundamentale SI sunt mecanice. Ele sunt metrul (m), kilogramul (kg) și secunda (s). În sistemul de unități CGS (Gauss) sunt trei unități fundamentale: centimetrul (cm), gramul (g), și secunda (s).

2.2 FORMULE DIMENSIONALE

Orice formulă fizică este **omogenă** din punct de vedere **dimensional**, adică ambii membri ai egalității, cât și fiecare termen al sumelor algebrice au aceleași dimensiuni fizice.

Folosind formulele fizice, unitatea oricărei mărimi fizice mecanice se poate exprima cu ajutorul unităților mărimilor fundamentale: lungime, masă și timp. Dacă notăm cu L , M și T unitățile mărimilor fundamentale: lungime, masă și timp atunci unitatea unei mărimi fizice A se poate scrie astfel

$$[A] = L^\alpha M^\beta T^\gamma, \quad (2.2)$$

unde α , β și γ sunt numere întregi pentru mărimile mecanice. Ecuația (2.2) se numește **ecuația de dimensiuni** sau **formula dimensională** a mărimii A față de mărimile fundamentale.

Constantele care intervin în legile fizicii pot fi atât dimensionale cât și adimensionale. În ultimul caz ele nu intervin în formula dimensională.

Exemple

1 . Pentru definirea unității de măsură a vitezei se folosește legea mișcării rectilinii uniforme: $s = vt$. Deci viteza particulei care a parcurs uniform spațiul s în timpul t este $v = s/t$. Formula dimensională a vitezei este

$$[v] = \frac{[s]}{[t]} = \frac{L}{T} = LT^{-1} .$$

În SI unitatea de măsură a vitezei este $[v] = m/s$. În sistemul de unități CGS ea este $[v] = cm/s$.

2 . Prin definiție momentul de inerție (I) al unui punct material față de o axă este egal cu produsul dintre masa (m) punctului material și pătratul distanței (R) sale până la axă ($I = mR^2$) . Formula dimensională a momentului de inerție este

$$[I] = [m] \cdot [R]^2 = M L^2 .$$

În SI unitatea de măsură pentru momentul de inerție este

$$[I] = kg \cdot m^2 .$$

3 . Momentul forței față de un pol este definit prin produsul vectorial $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$. Modulul acestui vector este egal cu produsul dintre modulul vectorului forță și brațul forței (lungimea perpendicularei dusă din pol pe suportul forței) . Formula dimensională a momentului forței este

$$[M] = [F] \cdot [b] = M L^2 T^{-2} .$$

În SI unitatea de măsură pentru momentul forței este

$$[M] = N \cdot m .$$

4 . Lucrul mecanic este definit prin produsul dintre deplasare și componenta forței pe direcția deplasării.

$$L = F \cdot d .$$

Formula dimensională a lucrului mecanic este

$$[L] = [F] \cdot [d] = M L^2 T^{-2} ,$$

deci

$$[L] = N \cdot m .$$

În SI unitatea de măsură pentru lucrul mecanic este

$$[L] = J , \quad (Joule) .$$

În concluzie o aceeași mărime fizică poate avea dimensiuni diferite în sisteme de unități diferite. De asemenea, două mărimi de naturi diferite pot avea aceleași dimensiuni într-un sistem dat.

Analiza dimensională poate fi folosită chiar la stabilirea formulei unei legi fizice. De exemplu, se știe din experiență că perioada unui pendul matematic (simplu) depinde de lungimea sa l și de accelerația gravitațională g

$$T = const \cdot l^\alpha \cdot g^\beta .$$

Putem scrie următoarea formulă dimensională pentru perioada pendulului matematic

$$T = L^\alpha (L T^{-2})^\beta = L^{\alpha+\beta} T^{-2\beta} .$$

Prin identificarea exponenților se obține sistemul algebric

$$\alpha + \beta = 0 ; ,$$

$$-2\beta = 1 ,$$

ce are soluțiile $\beta = -1/2$ și $\alpha = 1/2$. Deci perioada pendulului simplu este

$$T = const \cdot \sqrt{l/g} ,$$

unde $const$ este o constantă adimensională de ordinul unității.

3

ERORI DE MĂSURARE

3.1 INTRODUCERE

Determinarea cantitativă a unei mărimi fizice se realizează printr-o operație de măsurare ce presupune interacțiunea între un sistem fizic și un aparat sau instrument de măsură. Rezultatul unei măsurări poate fi mai apropiat sau nu de valoarea adevărată a mărimii măsurate. Eroarea de măsurare (ca evaluare a apropierii sau depărtării de valoarea adevărată) este generată de următoarele surse:

- interacțiunea sistem-aparat;
- aparatul de măsurat;
- obiectul supus măsurării;
- influențele exterioare;
- metodele de măsurare;
- subiectivitatea operatorului.

Erorile datorate interacțiunii sistem-aparat sunt determinate de acțiunea perturbatoare a aparatului de măsurat asupra sistemului studiat. Această acțiune provoacă modificarea stării sistemului. Astfel valoarea măsurată diferă de valoarea anterioară realizării interacțiunii sistem-aparat.

Erorile datorate aparatului de măsurat, numite erori instrumentale depind de concepția și construcția aparatului de măsurat. Limitele acestor erori sunt specificate de fabricant în documentația tehnică a aparatului de măsurat.

Erorile datorate obiectului supus măsurării apar la idealizarea sau simplificarea acestuia, deoarece modelul asociat nu corespunde integral realității.

Erorile datorate influențelor exterioare sunt generate de factori care acționează asupra obiectului supus măsurării și asupra aparatului de măsurat. Acești factori sunt în primul rând cei caracteristici mediului în care se face măsurarea: temperatura, umiditatea, presiunea aerului. Ei sunt de asemenea perturbații externe cum ar fi: câmpuri electromagnetice, radiații, șocuri, vibrații, sunete, gravitația terestră. În unele experimente condițiile de poziționare sau de fixare pot fi surse de erori.

Erorile datorate metodelor de măsurare, după cum sugerează și numele sunt influențate de principiile metodelor de măsurare folosite.

Erorile de operator provin din modul în care operatorul uman apreciază anumite efecte cum ar fi coincidențe, intensități, nuanțe sau diverse mărimi fizice sesizabile.

Când se repetă în condiții identice măsurarea unei aceeași mărimi fizice se constată că nu se obține totdeauna același rezultat. Repetarea măsurării pune în evidență următoarele tipuri de erori

- erori aleatoare sau întâmplătoare,
- erori sistematice,
- erori grosolane (greșeli).

Erorile aleatoare variază imprevizibil atât ca valoare cât și ca semn la repetarea unei măsurări în condiții identice. Rezultatele măsurărilor diferă între ele într-un mod întâmplător. Fiecare măsurare individuală este afectată de o eroare aleatoare ce reprezintă abaterea rezultatului individual de la valoarea adevărată a mărimii fizice măsurate. Mulțimea valorilor individuale succesive este grupată în jurul valorii adevărate cu o anumită repartiție a probabilității de apariție a lor. Erorile aleatoare nu pot fi nici eliminate și nici corectate. Înbunătățind procesul de măsurare (prin perfecționarea mijloacelor de măsurare, prin alegerea unei metode mai precise, prin eliminarea influenței factorilor externi) aceste erori sunt micșorate dar nu excluse.

Poruind de la rezultatele a n măsurări repetate ale mărimii x , oricare ar fi legea de repartiție statistică a acestora, media aritmetică a celor n rezultate individuale x_i reprezintă cea mai bună aproximație a valorii adevărate a mărimii x

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i. \quad (3.1)$$

Accastă aproximare este cu atât mai bună cu cât n este mai mare.

Erorile sistematice sunt acele erori care nu variază la repetarea unei măsurări în condiții identice sau variază într-un mod determinabil când condițiile se modifică. Aceste erori nesclimbându-se de la o măsurare la alta nu pot fi puse în evidență prin repetarea măsurării. Erorile sistematice pot fi constante sau variabile. Erorile sistematice constante pot fi erori instrumentale (gradare incorectă, calibrare greșită), erori de metodă, erori de interacțiune, erori de operator. Erorile sistematice variabile sunt cauzate de efecte de îmbătrânire, de variația în timp a unor mărimi de influență. Pentru a evalua erorile sistematice sunt necesare informații din afara experimentului considerat, cum ar fi rezultatele altor experimente, date referitoare la aparatura folosită, metoda și condițiile măsurării. Erorile sistematice pot fi reduse folosind aparate de măsurat mai precise, metode de măsurare perfecționate, condiții de măsurare mai riguros controlate.

Erorile grosolane sunt de obicei consecința efectuării neadecvate a unei măsurări, neatenției operatorului, greșelilor de citire sau de calcul. Valorile afectate de erori grosolane se abat cu mult de celelalte valori ale șirului de rezultate experimentale. Rezultatul unei măsurări afectate de o eroare grosolană trebuie identificat și eliminat din șirul de rezultate.

Determinarea cantitativă a unei mărimi fizice se poate realiza printr-o metodă de măsurare directă și/sau indirectă. **Metoda de măsurare directă** este metoda prin care valoarea măsurată a mărimii fizice se obține nemijlocit. Metoda de măsurare este considerată directă chiar dacă în interiorul aparatului de măsurat se măsoară altă mărime cu condiția ca aparatul să indice valoarea mărimii măsurate. Exemple de măsurări care folosesc metoda de măsurare directă: măsurarea unei lungimi cu ajutorul unei rigle gradate, măsurarea temperaturii cu ajutorul termometrului, măsurarea timpului cu cronometrul, măsurarea unei mase folosind o balanță, măsurarea unei tensiuni electrice cu un voltmetru, etc.

Metoda de măsurare indirectă este metoda prin care valoarea măsurată a mărimii fizice se obține din valoarea (sau valorile) măsurate ale altei (sau altor) mărimi, legate printr-o dependență funcțională de mărimea măsurată. Această metodă constă de fapt din una sau mai multe măsurări directe, urmate de un calcul. Exemple: măsurarea forței care acționează asupra unui corp, prin măsurarea masei m a corpului și a accelerației sale ($F = ma$), măsurarea densității unui corp solid, prin măsurarea masei m a corpului și a volumului V și aplicarea formulei $\rho = m/V$, măsurarea momentului de inerție al unui corp cu ajutorul pendulului de torsiune, prin măsurarea perioadelor de oscilație ale pendulului, măsurarea ariei unei suprafețe dreptunghiulare de lungime L și lățime l prin măsurarea acestor dimensiuni și apoi efectuarea produsului lor ($A = L \cdot l$).

3.2 EXPRIMAREA ERORILOR DE MĂSURARE

Exprimarea erorilor de măsurare pentru mărimi măsurate direct

Eroarea absolută

Eroarea absolută reprezintă diferența dintre valoarea măsurată și valoarea adevărată a mărimii măsurate. Când numărul de măsurări este mare, valoarea adevărată a mărimii măsurate este aproximată cel mai bine de media aritmetică a rezultatelor obținute prin măsurare pentru mărimea măsurată. Prelungirea excesivă a șirului de măsurări poate modifica valoarea mărimii măsurate și condițiile măsurării. Din această cauză în practică se repetă măsurarea de 10-20 ori.

Valoarea individuală x_i din șirul de n măsurări repetate ale mărimii x este afectată de eroarea

$$\delta_{x_i} = x_i - \bar{x}, \quad (3.2)$$

cu

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i. \quad (3.3)$$

Această eroare poate fi pozitivă sau negativă și are aceeași dimensiune fizică ca și mărimea măsurată.

În cazul repartiției normale erorile au probabilități egale de a fi pozitive sau negative. Astfel încât suma lor, pentru un număr mare de măsurări repetate este nulă.

Eroarea relativă

Eroarea relativă se exprimă ca raportul dintre eroarea absolută și valoarea adevărată a mărimii măsurate. Ea poate fi pozitivă sau negativă și este adimensională. Având o valoare foarte mică de obicei se exprimă procentual.

Eroarea medie pătratică a mediei

Eroarea medie pătratică a mediei sau eroarea standard a mediei aritmetice se calculează cu ajutorul expresiei

$$S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i)^2}{n(n-1)}}, \quad (3.4)$$

unde n este numărul de măsurări efectuate. Această eroare este totdeauna pozitivă și se exprimă cu aceeași unitate de măsură ca și mărimea măsurată. Ea este o măsură a împrăstierii rezultatelor în jurul valorii adevărate. În cazul mărimilor mecanice când se studiază cum variază probabilitatea de apariție a unui rezultat individual în funcție de valoarea măsurată se constată că

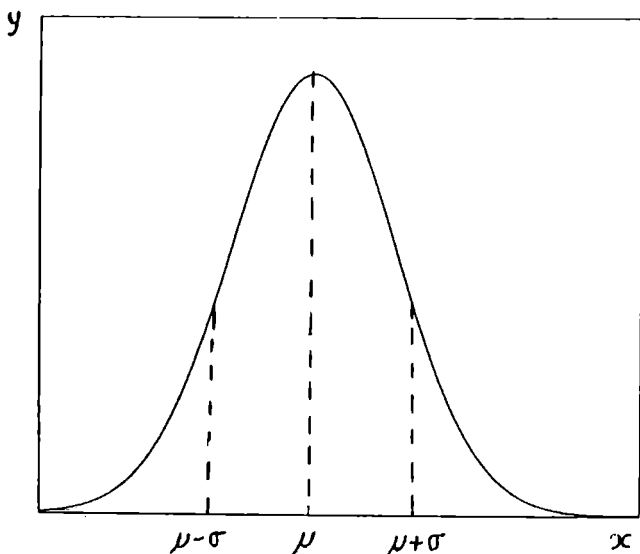


Figura 3.1:

- probabilitatea apariției valorilor x_i apropiate de valoarea medie \bar{x} este mai mare decât cea a valorilor depărtate de \bar{x} ,
- probabilitatea apariției valorilor $x_i > \bar{x}$ este egală cu cea a valorilor $x_i < \bar{x}$ (erorile aleatoare pozitive și negative sunt la fel de probabile).

În acest caz valorile individuale (variabile aleatoare) respectă legea de repartiție normală (sau curba lui Gauss) dată de relația

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2} \right], \quad (3.5)$$

unde y este densitatea de probabilitate, iar

$$\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{n}}, \quad (3.6)$$

$$\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}. \quad (3.7)$$

Dacă se reprezintă grafic densitatea de probabilitate y în funcție de valoarea măsurată x se obține o curbă de forma clopotului lui Gauss (figura 3.1).

Produsul $y \cdot \Delta x$ reprezintă probabilitatea ca rezultatul măsurării să fie cuprins între x și $x + \Delta x$. O valoare mică a lui σ semnifică erori aleatoare mici. În acest caz curba Gauss este îngustă (figura 3.2). Cu cât curba de repartiție normală este mai ascuțită (σ mai mic) ca atât rezultatele vor

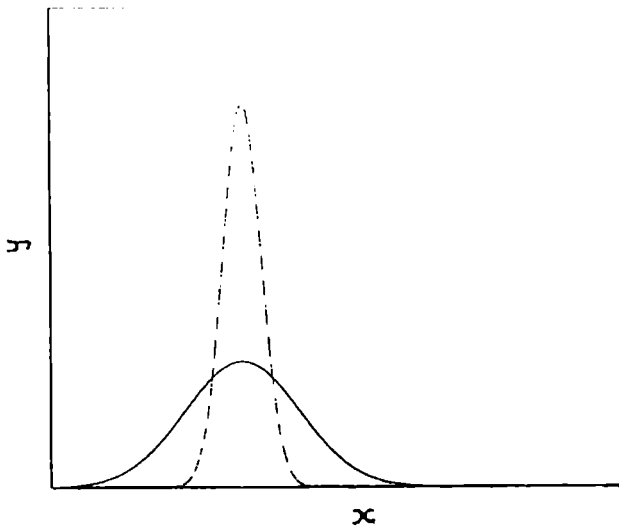


Figura 3.2:

fi mai apropiate între ele. Împrăștierea rezultatelor este mai mică și deci precizia măsurării este mai ridicată.

Precizia sau precizia de măsurare reprezintă calitatea unei măsurări de a da rezultate apropiate de valoarea adevărată a măsurandului. O măsurare este de precizie ridicată dacă erorile de măsurare care o însoțesc (atât aleatoare cât și sistematice) sunt mici.

Intervalul în care se apreciază că se află cu o probabilitate dată, valoarea adevărată a mărimii măsurate se numește incertitudine de măsurare. Incertitudinea de măsurare este un interval de valori ale unor abateri cărora le putem estima niște limite, dar nu și semnul.

Valorile $\pm t \cdot S_{\bar{x}}$ obținute prin multiplicarea erorii medii pătratice cu coeficientul t se numesc limite de încredere. Coeficientul t este estimat cu ajutorul repartiției Student. Intervalul $(\bar{x} - t \cdot S_{\bar{x}}, \bar{x} + t \cdot S_{\bar{x}})$ se numește interval de încredere. Probabilitatea ca un rezultat individual să se găsească în intervalul de încredere se numește nivel de încredere sau nivel de confidență (notat de obicei cu P). Coeficientul t depinde de nivelul de încredere P și de numărul de măsurări. Pentru același nivel de încredere, coeficientul t dedus folosind repartiția Student este mai mare decât cel rezultat din repartiția normală, și anume cu atât mai mare cu cât n este mai mic. Când se efectuează un număr mic de măsurări se obține un interval de încredere mare, deci incertitudinea estimată este mare. Pentru $n \rightarrow \infty$ repartiția Student dă aceleași rezultate ca și repartiția normală.

Rezultatul măsurării se exprimă astfel

$$x = \bar{x} \pm S_{\bar{x}} . \quad (3.8)$$

Exprimarea erorilor de măsurare pentru mărimi măsurate indirect

În măsurările indirecte valoarea mărimii fizice u se calculează în funcție de alte mărimi x_1, x_2, \dots cu ajutorul relației

$$u = F(x_1, x_2, \dots) . \quad (3.9)$$

Mărimile x_1, x_2, \dots sunt determinate separat prin măsurări directe. Se disting două cazuri: i) mărimile x_1, x_2, \dots sunt măsurate independent una de alta, ii) mărimile x_1, x_2, \dots **nu** sunt măsurate independent una de alta.

i) Cazul în care mărimile x_1, x_2, \dots sunt independente.

Eroarea absolută se calculează cu ajutorul calculului diferențial. Pentru evaluarea ei se diferențiază funcția F . În expresia obținută se înlocuiesc diferențialele argumentelor cu erorile absolute ale mărimilor fizice corespunzătoare x_1, x_2, \dots , iar derivatele parțiale sunt luate în valoare absolută (deoarece se consideră cazul cel mai nefavorabil)

$$\delta_u = \frac{\partial F}{\partial x_1} \delta_{x_1} + \frac{\partial F}{\partial x_2} \delta_{x_2} + \dots , \quad (3.10)$$

Exemple: 1) $u = ax_1 \pm bx_2$, cu a și b constante reale.

$$du = a dx_1 \pm b dx_2 ,$$

$$\delta_u = |a| \delta_{x_1} + |b| \delta_{x_2} .$$

2) $u = x_1 \cdot x_2$.

$$du = x_1 \cdot dx_2 + x_2 \cdot dx_1 ,$$

$$\delta_u = |x_1| \delta_{x_2} + |x_2| \delta_{x_1} .$$

3) $u = \frac{x_1}{x_2}$.

$$du = \frac{x_1 \cdot dx_2 - x_2 \cdot dx_1}{x_2^2} ,$$

$$\delta_u = \frac{|x_1| \delta_{x_2} + |x_2| \delta_{x_1}}{x_2^2} .$$

Eroarea relativă se calculează cu ajutorul derivatei logaritmice a funcției F . Pentru evaluarea acestei erori se logaritmează funcția F . Logaritmul

obținut se diferențiază. În expresia obținută se înlocuiesc diferențialele argumentelor cu erorile absolute ale mărimilor fizice corespunzătoare. Toate derivatele sunt luate cu semnul plus.

Exemple: 1) $u = \frac{x_1}{x_2}$.

$$\ln u = \ln x_1 - \ln x_2,$$

$$\frac{du}{u} = \frac{dx_1}{x_1} - \frac{dx_2}{x_2},$$

$$\frac{\delta_u}{u} = \frac{\delta_{x_1}}{x_1} + \frac{\delta_{x_2}}{x_2},$$

sau

$$\epsilon_u = \epsilon_{x_1} + \epsilon_{x_2}.$$

2) $u = x^r$, cu r constantă reală.

$$\ln u = r \ln x,$$

$$\frac{du}{u} = r \frac{dx}{x},$$

$$\frac{\delta_u}{u} = |r| \cdot \frac{\delta_x}{x},$$

sau

$$\epsilon_u = |r| \cdot \epsilon_x,$$

Eroarea relativă maximă se obține prin înlocuirea diferențialelor argumentelor din expresia derivatei logaritmice cu preciziile aparatelor folosite la măsurarea mărimilor fizice corespunzătoare. Dacă pe un aparat nu este trecută precizia sa, se ia drept eroare absolută maximă de citire valoarea celei mai mici diviziuni în care este gradată scala aparatului sau chiar jumătate din această valoare.

Exemplu: Momentul de inerție al unei bare suspendate de un fir se poate determina cu ajutorul formulei

$$I = \left(\frac{D^2}{4} + 2R_0^2 \right) m \frac{t_1^2}{t_2^2 - t_1^2}, \quad (3.11)$$

unde D , respectiv m sunt diametrul, respectiv masa a doi cilindri așezați simetric la distanța R_0 față de firul de suspensie. t_1 , respectiv t_2 reprezintă timpii în care sunt efectuate N oscilații în absența, respectiv prezența celor doi cilindri pe bară. Logaritmand această expresie

$$\ln I = \ln \frac{D^2 + 8R_0^2}{4} + \ln m + \ln t_1^2 - \ln(t_2^2 - t_1^2),$$

și apoi diferențiind-o se obține

$$\frac{dI}{I} = \frac{2D dD + 16R_0 dR_0}{D^2 + 8R_0^2} + \frac{dm}{m} + \frac{2t_1 dt_1}{t_1^2} - \frac{2t_2 dt_2 - 2t_1 dt_1}{t_2^2 - t_1^2}.$$

Presupunând că diametrul cilindrilor și distanța R_0 se măsoară cu aceeași riglă

$$\delta_D = \delta_{R_0},$$

și că cei doi timpi se măsoară cu același cronometru

$$\delta_{t_1} = \delta_{t_2} = \delta_t,$$

eroarea relativă maximă are expresia

$$\epsilon_I = \frac{\delta_I}{I} = 2 \frac{D + 8R_0}{D^2 + 8R_0^2} \delta_D + \frac{\delta_m}{m} + 2 \frac{t_2}{t_1} \frac{\delta_t}{t_2 - t_1}, \quad (3.12)$$

deoarece

$$\frac{2}{t_1} \delta_t + 2 \frac{t_2 + t_1}{t_2^2 - t_1^2} \delta_t = 2 \frac{t_2}{t_1} \frac{\delta_t}{t_2 - t_1}.$$

Eroarea medie pătratică a mediei se calculează cu formula de propagare a erorilor

$$S_{\bar{x}} = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)^2_{\bar{x}} S_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)^2_{\bar{x}} S_{x_2}^2 + \dots}, \quad (3.13)$$

unde

$$S_{x_i} = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n (x_i - x_{ij})^2}{n(n-1)}}, \quad (3.14)$$

$$\bar{X} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots), \quad (3.15)$$

n este numărul de măsurări. În formulă intervin valorile derivatelor parțiale ale funcției F calculate pentru valorile medii ale argumentelor x_1, x_2, \dots .

Rezultatul final se scrie sub forma

$$u = \bar{u} \pm S_{\bar{u}}, \quad (3.16)$$

unde

$$\bar{u} = F(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots). \quad (3.17)$$

ii) Cazul în care mărimile x_1, x_2, \dots sunt dependente.

Într-o determinare oarecare i valoarea mărimii u este

$$u_i = F(x_{1i}, x_{2i}, \dots) . \quad (3.18)$$

Abaterea medie pătratică a mediei se calculează cu formula

$$S_{\bar{u}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\bar{u} - u_i)^2}{n(n-1)}} , \quad (3.19)$$

unde n este numărul de măsurări efectuate, iar

$$\bar{u} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u_i . \quad (3.20)$$

Rezultatul măsurării se exprimă astfel

$$u = \bar{u} \pm S_{\bar{u}} . \quad (3.21)$$

Scrierea rezultatelor numerice finale ale măsurărilor

O cifră a unui rezultat al unei măsurări este **exactă** dacă valoarea unei unități din această cifră este mai mare decât eroarea absolută a rezultatului.

Toate cifrele exacte ale rezultatului unei măsurări se numesc **cifre semnificative**. Zerourile din fața numărului nu sunt cifre semnificative deoarece ele indică numai ordinul cifrelor următoare. Aceste zerouri pot fi eliminate prin folosirea factorului 10^k .

Exemple: 1. constanta gazelor perfecte

$$R = 0,082 \frac{\text{atm} \cdot \text{l}}{\text{mol} \cdot \text{grad}} = 82 \cdot 10^{-3} \frac{\text{atm} \cdot \text{l}}{\text{mol} \cdot \text{grad}} .$$

Valoarea sa are 2 cifre semnificative.

2. Dacă masa $m = 12,5$ g se cântărește cu o precizie de 1 mg rezultatul se scrie $m = 12,500$ g. Acest rezultat are 5 cifre semnificative deoarece ultimele 2 zerouri sunt cifre semnificative.

Prin împărțirea a două numere cu toate cifrele exacte, numărul de cifre semnificative nu se conservă. De exemplu, valoarea forței ce imprimă o accelerație de $a = 0,37$ m/s² unui corp cu masa $m = 400,35$ g este dată de produsul

$$\begin{array}{r} 400,35 \text{ ?X} \\ 0,37 \text{ ?} \\ \hline \text{??? ?} \\ 280245 \text{ ?} \\ 120105 \text{ ?} \\ \hline 148,1295 \text{ ?} \\ \text{??? ?} \end{array}$$

Semnele de întrebare situate la sfârșitul numerelor 400,35 și 0,37 indică că cifrele pe care aceste semne le substituie nu sunt cunoscute (nu sunt

exacte). Astfel ultimele patru cifre ale rezultatului obținut nu sunt exacte. Deci valoarea forței din exemplu este $F = 148 \text{ mN}$.

Pentru scrierea rezultatelor unor măsurători se folosesc următoarele reguli de rotunjire

- dacă prima cifră neglijată (care este prima cifră nesemnificativă din număr) este mai mică decât 5, ultima cifră păstrată rămâne neschimbată,
- dacă prima cifră neglijată este mai mare decât 5 se adaugă o unitate la ultima cifră păstrată,
- când prima cifră neglijată este chiar 5 se adaugă o unitate la ultima cifră păstrată dacă această cifră este impară și nu se adaugă nimic dacă este pară sau zero.

Când se calculează eroarea medie pătratică a mediei (sau celelalte erori) se scriu atâtea zecimale câte sunt până la prima zecimală diferită de zero. Această zecimală se rotunjește folosind regulile de mai sus. Valoarea medie a mărimii se scrie cu atâtea zecimale câte are eroarea medie pătratică a mediei. De exemplu, un rezultat scris corect este

$$V = (6,25 \pm 0,05) \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 .$$

ALEGEREA CONDIȚIILOR OPTIME DE LUCRU

Pentru un dispozitiv experimental ales, modul de lucru se stabilește astfel încât mărimea de măsurat să fie determinată cu o eroare cât mai mică.

Exemple:

1 . Perioada unui pendul se determină experimental cu ajutorul relației

$$T = \frac{t}{N} , \quad (4.1)$$

unde t este timpul în care se efectuează cele N oscilații. Astfel perioada este estimată cu o eroare relativă

$$\epsilon_T = \epsilon_t .$$

Presupunem că timpul este măsurat cu un cronometru cu precizia de $0,2 \text{ s}$. În cazul unei perioade $T = 1 \text{ s}$, dacă cronometrăm timpul în care se efectuează o singură oscilație, perioada va fi estimată cu o eroare de

$$\epsilon_T = \frac{0,2 \text{ s}}{1 \text{ s}} = 20\% ,$$

care este foarte mare. Pentru a micșora eroarea se măsoară timpul în care se execută mai multe oscilații.

Dacă timpul cronometrat este de 40 s atunci eroarea este

$$\epsilon_T = \epsilon_t = \frac{0,2 \text{ s}}{40 \text{ s}} = 0,5\% .$$

Pentru $t = 80 \text{ s}$ ea este $0,25\%$. Deci pentru determinarea perioadei se vor număra atâtea oscilații complete câte se efectuează într-un timp $t > 40 \text{ s}$.

În cazul unei perioade $T = 2 \text{ s}$, dacă se cronometrează o singură oscilație eroarea este

$$\epsilon_T = \frac{0,2 \text{ s}}{2 \text{ s}} = 10\% .$$

Deci cu cât perioada este mai mare se cronometrează un număr cu atât mai mic de oscilații complete.

2 . Constanta elastică a unui resort elastic se determină prin metoda dinamică cu formula

$$k = \frac{4\pi^2 N^2}{t^2} m , \quad (4.2)$$

unde m este masa greutății atârnată de resort, iar t este timpul în care resortul execută N oscilații complete. Aplicând derivata logaritmică relației (4.2)

$$\frac{\delta k}{k} = \frac{\delta m}{m} + 2 \frac{\delta \pi}{\pi} + 2 \frac{\delta t}{t} . \quad (4.3)$$

Presupunând că $\delta_m/m = 0,5\%$ și $2(\delta\pi/\pi) = 0,5\%$ constanta elastică este determinată cu o eroare de $1,5\%$ dacă

$$t = \frac{2 \cdot \delta t}{0,5\%} = \frac{2 \cdot 0,2 \text{ s}}{0,005} = 80 \text{ s} .$$

Deci pentru determinarea constantei elastice cu această metodă se vor număra un număr întreg de oscilații, ce se cuprinde într-un interval de timp mai mare de 80 s .

3 . Momentul de inerție al unei bare suspendate de un fir se poate determina cu ajutorul formulei

$$I = \left(\frac{D^2}{4} + 2R_0^2 \right) m \frac{T_1^2}{T_2^2 - T_1^2} , \quad (4.4)$$

sau

$$I = \left(\frac{D^2}{4} + 2R_0^2 \right) m \frac{t_1^2}{t_2^2 - t_1^2} , \quad (4.5)$$

unde D , respectiv m sunt diametrul, respectiv masa fiecăruia dintre cei doi cilindri așezați simetric față de firul de suspensie la distanța R_0 de acesta. T_1 este perioada pendulului de torsiune în absența celor doi cilindri, iar T_2 este perioada de oscilație a pendulului când cei doi cilindri sunt fixați pe bară. Eroarea relativă a lui I are expresia

$$\frac{\delta I}{I} = \frac{\delta m}{m} + \frac{2D + 16R_0}{D^2 + 8R_0^2} \delta D + 2 \frac{T_2}{T_1} \frac{\delta T}{T_2 - T_1} , \quad (4.6)$$

respectiv

$$\frac{\delta_I}{I} = \frac{\delta_m}{m} + \frac{2D + 16R_0}{D^2 + 8R_0^2} \delta_D + 2 \frac{t_2}{t_1} \frac{\delta_t}{t_2 - t_1}. \quad (4.7)$$

S-a considerat că cele două perioade se măsoară cu același cronometru, deci $\delta_{T_1} = \delta_{T_2} = \delta_T$ și că D și R_0 se măsoară de asemenea cu același instrument $\delta_D = \delta_{R_0}$.

Termenul al doilea din membrul drept al egalității (4.6) se poate micșora prin mărirea distanței R_0 . Deci se obțin rezultate bune când cei doi cilindri se fixează cât mai departe de firul de suspensie.

Dacă perioadele T_1 și T_2 se determină direct prin măsurarea timpului în care se execută o singură oscilație, termenul al treilea al membrului drept al egalității (4.6) este mai mare decât cel corespunzător din egalitatea (4.7) deoarece

$$t_2 - t_1 > T_2 - T_1.$$

De asemenea, eroarea este micșorată prin măsurarea timpului în care se efectuează un număr mare de oscilații ($N > 30$).

REPREZENTAREA GRAFICĂ

5.1 TRASAREA GRAFICELOR

Pentru trasarea unui grafic se trec datele experimentale culese într-un tabel. O rubrică este destinată valorilor argumentului x , în ordine crescătoare, iar cealaltă valorilor corespunzătoare ale funcției $y = f(x)$.

x [unit. măs.]	
y [unit. măs.]	

În capul tabelului lângă mărimea fizică se scrie între paranteze drepte unitatea de măsură corespunzătoare.

Dimensiunile graficului trebuie să fie de ordinul 12×18 cm (dublul unei cărți poștale) sau 9×12 cm (cât o carte poștală) în nici un caz mai mici. Raportul optim între lungime și lățime este de 1,4. În funcție de scările alese pentru x și pentru y , graficul poate fi dispus orizontal sau vertical. El se trasează pe hârtie milimetrică.

Următoarea operație este de a stabili domeniul de variație a celor două mărimi x și y prin rotunjirea valorilor extreme până la valori convenabile care să încadreze bine valorile din tabel.

Se aleg apoi scările pentru cele două axe de coordonate. Valoarea unei diviziuni de pe scală trebuie să reprezinte un număr de unități egal cu unul din divizorii lui 10 (1;2 sau 5) înmulțit cu o putere întreagă convenabilă a lui 10 (10^k ; $2 \cdot 10^k$ sau $5 \cdot 10^k$, cu k număr întreg). Nu se folosesc pentru intervale numere sub 0,1 sau peste 500 unități deoarece se folosesc sub-multipli sau multipli unității respective. În consecință pentru construirea

graficelor se folosesc următoarele scări

-0,1 0 0,1 0,2 0,3 0,4 etc.

-0,2 0 0,2 0,4 0,6 0,8 etc.

-0,5 0 0,5 1,0 1,5 2,0 etc.

-1 0 1 2 3 4 etc.

-2 0 2 4 6 8 etc.

-5 0 5 10 15 20 etc.

-10 0 10 20 30 40 etc.

-20 0 20 40 60 80 etc.

-50 0 50 100 150 200 etc.

-100 0 100 200 300 400 etc.

-200 0 200 400 600 800 etc.

-500 0 500 1000 1500 2000 etc.

Se marchează pe cele două axe intervalele echidistante alese.

Fiecare punct experimental se marchează vizibil printr-un cerculeț, pătrățel, triunghi, cruciuliță (de 1 mm mărime) fără a nota pe axe valorile numerice ale coordonatelor punctului. Pentru trasarea graficelor se folosește doar creionul.

Punctele experimentale reprezentate nu trebuie unite prin linii drepte, astfel încât graficul să iasă o linie frântă. Se trasează prin interpolare o curbă care să treacă prin cât mai multe puncte experimentale, lăsând eventual de o parte și de alta, în mod egal și simetric un număr cât mai mic de puncte care să fie cât mai apropiate de curbă. Forma curbei se stabilește pe baza cunoștințelor despre procesul studiat.

Sub cadrul graficului sau sus în cuprinsul său se trece titlul.

5.2 METODA CELOR MAI MICI PĂTRATE. DETERMINAREA PARAMETRILOR UNEI DEPENDENȚE LINEARE

Metoda celor mai mici pătrate ne permite să găsim coeficienții dependenței polinomiale dintre două mărimi fizice x și y ($y = f(x)$) folosind perechile de valori determinate experimental (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , ..., (x_n, y_n) . Cu ajutorul acestei metode putem trasa curba $y = f(x)$, care aproximează cel mai bine datele experimentale, prin determinarea coeficienților din această

funcție. Acești coeficienți sunt determinați din condiția ca suma pătratelor abaterilor lui y de la valoarea teoretică dată de funcția $f(x)$ să fie minimă

$$F = \sum_{i=1}^n (f(x_i) - y_i)^2 \rightarrow \text{minimum}, \quad (5.1)$$

unde x_i și y_i sunt valorile determinate experimental. Această condiție este echivalentă cu sistemul obținut prin anularea derivatelor parțiale ale funcției F în raport cu coeficienții dependenței.

Considerăm că cele două mărimi fizice x și y sunt legate printr-o funcție lineară

$$y = A_0 + A_1 x. \quad (5.2)$$

Se urmărește determinarea coeficienților A_0 și A_1 folosind perechile de valori determinate experimental $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$. Abaterile valorilor experimentale y_i ($i = \overline{1, n}$) de la valorile teoretice $A_0 + A_1 x_i$ ($i = \overline{1, n}$) sunt $\delta_1 = A_0 + A_1 x_1 - y_1, \delta_2 = A_0 + A_1 x_2 - y_2, \dots, \delta_n = A_0 + A_1 x_n - y_n$. Conform metodei celor mai mici pătrate suma pătratelor acestor abateri

$$\delta_i^2 = (A_0 + A_1 x_i - y_i)^2 = A_0^2 + A_1^2 x_i^2 + y_i^2 + 2A_0 A_1 x_i - 2A_0 y_i - 2A_1 x_i y_i,$$

trebuie să fie minimă

$$F(A_0, A_1) = \sum_{i=1}^n \delta_i^2 = nA_0^2 + A_1^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i=1}^n y_i^2 + 2A_0 A_1 \sum_{i=1}^n x_i - 2A_0 \sum_{i=1}^n y_i - 2A_1 \sum_{i=1}^n x_i y_i = \text{minimum}.$$

Minimul funcției $F(A_0, A_1)$ se obține când derivatele parțiale ale funcției în raport cu fiecare din cele două variabile sunt nule

$$\frac{\partial F}{\partial A_0} = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial A_1} = 0. \quad (5.3)$$

Condițiile de minim (5.3) ne conduc la ecuațiile

$$nA_0 + A_1 \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n y_i = 0, \quad (5.4)$$

$$A_0 \sum_{i=1}^n x_i + A_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n x_i y_i = 0, \quad (5.5)$$

numite **ecuații normale**. Din rezolvarea sistemului de ecuații normale se obțin cei doi parametri A_0 și A_1

$$A_1 = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2}, \quad (5.6)$$

$$A_0 = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n x_i y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2}. \quad (5.7)$$

Folosind relațiile

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i,$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i,$$

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2,$$

se obțin formulele

$$A_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) y_i}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \quad (5.8)$$

$$A_0 = \bar{y} - \bar{x} \cdot A_1. \quad (5.9)$$

6

STUDIUL UNOR INSTRUMENTE DE MĂSURĂ

Lungimile, grosimile, respectiv unghiurile se pot măsura direct cu precizii de fracțiuni de milimetru, respectiv grade sau minute cu ajutorul unor instrumente de măsură cum ar fi: șublerul, micrometrul, sferometrul, respectiv raportorul cu vernier.

I. STUDIUL UNOR INSTRUMENTE CU VERNIER

6.1 STUDIUL ȘUBLERULUI

6.1.1 Teoria lucrării

Lungimile pot fi măsurate cu o precizie de 0,1 mm cu ajutorul șublerului. Acest instrument se bazează pe principiul vernierului linear. Vernierul linear este o riglă de dimensiuni mici atașată riglei mari, cu care se fac măsurările și care poate fi translatată de-a lungul ei.

La unele șublere mărimea unei diviziuni y de pe riglă este mai mare decât mărimea unei diviziuni x de pe vernier, adică $y > x$. În acest caz diviziunea m a vernierului coincide cu diviziunea $m - 1$ a riglei mari

$$mx = (m - 1)y . \quad (6.1)$$

Deci o diviziune a vernierului este mai mică cu y/m decât una de pe riglă. Când zeroul vernierului coincide cu zeroul riglei, prima trăsătură de pe vernier rămâne în urmă față de prima trăsătură de pe riglă cu y/m , a doua de pe vernier față de a doua de pe riglă cu $2y/m$, iar diviziunea m de pe vernier rămâne în urmă cu y față de diviziunea m de pe riglă.

Dacă la introducerea unui corp între ciocurile șublerului, prima trăsătură de pe vernier se suprapune cu prima de pe riglă, lungimea corpului introdus este de y/m . În acest caz zeroul vernierului se află între zeroul de pe riglă și prima trăsătură de pe riglă. Dacă a doua trăsătură de pe vernier se suprapune cu a doua de pe riglă, lungimea corpului este de $2y/m$. Când trăsătura m a vernierului coincide cu trăsătura m a riglei, lungimea corpului este egală cu lungimea unei diviziuni de pe riglă, adică cu y .

Lungimea cea mai mică pe care o putem măsura cu acest șubler, adică precizia lui este dată de diferența dintre mărimea y a unei diviziuni de pe riglă și mărimea x a unei diviziuni de pe vernier. Notând precizia cu Δ putem scrie

$$\Delta = y - x = \frac{y}{m} . \quad (6.2)$$

Cel mai simplu șubler de acest tip este cel pentru care 10 diviziuni de pe vernier coincid cu 9 diviziuni de pe riglă. Precizia sa este de 0,1 mm. În acest caz $m = 10$ și $x = 0,9$. Pentru un șubler cu precizia de 0,05 mm, valorile pentru m și x sunt: $m = 20$ și $x = 0,95$ mm, în timp ce pentru unul cu precizia de 0,02 mm ele sunt: $m = 50$ și $x = 0,98$ mm. Deci o dată cu creșterea preciziei șublerului crește și lungimea vernierului (implicit dimensiunile șublerului). La șublerile de mare precizie este greu de apreciat care diviziune de pe vernier coincide cu una de pe riglă. Din aceste motive, în mod curent în măsurări se folosesc șublere cu precizia de 0,1 mm sau 0,05 mm. În măsurările în care este necesară o precizie mai bună se folosește micrometrul.

Pentru o mai bună apreciere a coincidenței unei trăsături de pe vernier cu o trăsătură de pe riglă se construiesc șublere la care mărimea x a unei diviziuni de pe vernier este mai mare de 1 mm dar mai mică decât 2 mm, adică $y < x < 2y$. În acest caz diviziunea m a vernierului coincide cu diviziunea $2m - 1$ a riglei mari

$$mx = (2m - 1)y . \quad (6.3)$$

Deci n diviziuni ale vernierului au o lungime mai mică cu ny/m decât distanța de pe riglă care le cuprinde. Pentru acest tip de vernier precizia este

$$\Delta = 2y - x = \frac{y}{m} . \quad (6.4)$$

Cel mai simplu șubler de acest tip este cel pentru care 10 diviziuni de pe vernier se cuprind exact în 19 mm ai riglei. Precizia sa este de 0,1 mm. Parametrii m și x au valorile $m = 10$, $x = 1,9$ mm.

Pentru a măsura lungimea unui corp, acesta se așează între ciocurile șublerului și se citește pe riglă cu cât s-a deplasat zeroul vernierului. Dacă zeroul de pe vernier coincide cu o trăsătură de pe riglă, valoarea lungimii (L) corpului este egală cu numărul întreg de milimetri citați pe riglă. Când zeroul vernierului se află între două trăsături de pe riglă se citește numărul de diviziuni întregi indicat de diviziunea zero a vernierului la care se adaugă numărul de diviziuni citite pe vernier înmulțit cu precizia vernierului

$$L = n_1 y + n_2 \Delta, \quad (6.5)$$

unde n_1 este numărul de diviziuni întregi de pe riglă până la zeroul vernierului, iar n_2 este numărul diviziunii vernierului care coincide cu o trăsătură de pe riglă.

6.1.2 Scopul lucrării

Măsurarea dimensiunilor unor piese, a ariilor suprafețelor unor plăci și a volumelor unor corpuri paralelipipedice sau cilindrice, cu șublerul.

6.1.3 Aparat și materiale necesare

În această lucrare sunt necesare următoarele materiale: un șubler, bucăți de sârmă de diferite grosimi, plăci metalice, cilindri și corpuri paralelipipedice.

6.1.4 Modul de lucru. Prelucrarea datelor experimentale

- Pentru măsurarea dimensiunilor exterioare ale unei piese se deplasează cursorul și se prinde piesa între ciocurile șublerului. Se fixează șurubul cursorului și se citește dimensiunea piesei cuprinsă între ciocurile șublerului. Se repetă determinarea de 10 ori. Datele culese se trec în tabelul 6.1.

nr. determinare	d [mm]	\bar{d} [mm]	$S_{\bar{d}}$ [mm]

Tabelul 6.1:

unde

$$S_{\bar{d}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\bar{d} - d_i)^2}{n(n-1)}} \quad n > 10 \quad (6.6)$$

Rezultatul final se scrie sub forma

$$d = \bar{d} \pm S_{\bar{d}} . \quad (6.7)$$

- Pentru determinarea ariei suprafeței unei plăci dreptunghiulare de lungime l_1 și lățime l_2 folosim relația

$$A = l_1 \cdot l_2 . \quad (6.8)$$

Lungimea și lățimea se măsoară cu șublerul.

Eroarea relativă cu care se estimează aria este

$$\epsilon_A = \left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} \right) \delta_l , \quad (6.9)$$

unde $\delta_l = 0, 1$ mm. Eroarea ϵ_A se exprimă procentual. Pentru determinarea lățimii, respectiv a lungimii se efectuează 10 determinări. În cazul evaluării ariei prin această metodă, eroarea pătratică medie a mediei este

$$S_{\bar{A}} = l_1 \cdot l_2 \cdot \sqrt{\left(\frac{S_{l_1}}{\bar{l}_1} \right)^2 + \left(\frac{S_{l_2}}{\bar{l}_2} \right)^2} . \quad (6.10)$$

Rezultatul se scrie sub forma

$$A = \bar{A} \pm S_{\bar{A}} . \quad (6.11)$$

unde

$$\bar{A} = \bar{l}_1 \cdot \bar{l}_2 , \quad (6.12)$$

$$\bar{l}_j = \frac{\sum_{i=1}^n l_{ji}}{n} , \quad j = 1, 2 ; \quad n \geq 10 . \quad (6.13)$$

- Volumul unui corp paralelipedic de dimensiuni l_1 , l_2 și l_3 este

$$V = l_1 \cdot l_2 \cdot l_3 . \quad (6.14)$$

Evaluarea volumului corpului paralelipedic cu ajutorul acestei relații este afectată de eroarea relativă

$$\epsilon_V = \left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} + \frac{1}{l_3} \right) \delta_l , \quad (6.15)$$

cu $\delta_l = 0, 1$ mm (precizia cu care se măsoară cele trei dimensiuni ale corpului). Eroarea pătratică medie a mediei are expresia

$$S_{\bar{V}} = \bar{l}_1 \cdot \bar{l}_2 \cdot \bar{l}_3 \cdot \sqrt{\left(\frac{S_{l_1}}{\bar{l}_1} \right)^2 + \left(\frac{S_{l_2}}{\bar{l}_2} \right)^2 + \left(\frac{S_{l_3}}{\bar{l}_3} \right)^2} \quad (6.16)$$

Rezultatul se scrie sub forma

$$V = \bar{V} \pm S_{\bar{V}}, \quad (6.17)$$

unde

$$\bar{V} = \bar{l}_1 \cdot \bar{l}_2 \cdot \bar{l}_3. \quad (6.18)$$

- Volumul unui corp cilindric de rază R și înălțime h este

$$V = \pi R^2 h. \quad (6.19)$$

În acest caz eroarea relativă are expresia

$$\epsilon_V = \left(\frac{2}{R} + \frac{1}{h} \right) \delta_l, \quad (6.20)$$

unde $\delta_l = 0, 1$ mm, iar eroarea pătratică medie a mediei

$$S_{\bar{V}} = \pi \bar{R}^2 \cdot \bar{h} \cdot \sqrt{\left(\frac{2S_{\bar{R}}}{\bar{R}} \right)^2 + \left(\frac{S_{\bar{h}}}{\bar{h}} \right)^2}. \quad (6.21)$$

Rezultatul se scrie sub forma

$$V = \bar{V} \pm S_{\bar{V}}, \quad (6.22)$$

unde

$$\bar{V} = \pi \bar{R}^2 \bar{h}. \quad (6.23)$$

6.2 Studiul raportorului cu vernier circular

6.2.1 Teoria lucrării

Vernierul circular este un mic sector de cerc atașat unui raportor. El este construit pe același principiu ca și vernierul linear. Precizia vernierului circular este

$$\Delta_c = \frac{\alpha}{m}, \quad (6.24)$$

unde: α este mărimea celei mai mici diviziuni de pe raportor, iar m este numărul de diviziuni în care este împărțit vernierul circular.

Măsurarea unghiurilor se face în felul următor: se fixează vârful unghiului de măsurat în centrul cercului raportorului iar una din laturile lui se așează de-a lungul diametrului ce conține diviziunea zero a raportorului. Se

mișcă brațul ce poartă vernierul până când se suprapune zeroul vernierului pe cealaltă latură a unghiului. Se citește numărul diviziunilor întregi n_1 indicate de zeroul vernierului și numărul diviziunii vernierului n_2 care coincide cu una din diviziunile raportorului. Valoarea unghiului este

$$\phi = n_1\alpha + n_2\Delta_c . \quad (6.25)$$

6.2.2 Scopul lucrării

Măsurarea directă a unghiurilor unor sectoare de cerc folosind un raportor cu vernier.

6.2.3 Aparat și materiale necesare

Materialele necesare în această lucrare sunt: un raportor cu vernier și câteva sectoare de cerc de unghiuri diferite.

6.2.4 Modul de lucru. Prelucrarea datelor experimentale

Se așează sectorul de cerc cu vârful în centrul cercului raportorului astfel încât o latură a sa să coincidă cu diametrul vertical ce conține zeroul raportorului. Se mișcă vernierul până când zeroul său se suprapune pe cealaltă latură a sectorului de cerc. Se notează valoarea unghiului. Se repetă măsurarea de 10 ori. Datele se trec în tabelul 6.2.

nr. determinare	ϕ [grd]	$\bar{\phi}$ [grd]	$S_{\bar{\phi}}$ [grd]

Tabelul 6.2:

unde

$$\bar{\phi} = \frac{\sum_{i=1}^n \phi_i}{n}, \quad n \geq 10, \quad (6.26)$$

$$S_{\bar{\phi}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\bar{\phi} - \phi_i)^2}{n(n-1)}}. \quad (6.27)$$

Rezultatul final se scrie sub forma

$$\phi = \bar{\phi} \pm S_{\bar{\phi}}. \quad (6.28)$$

6.3 Sferometrul

6.3.1 Teoria lucrării

Sferometrul este instrumentul cu ajutorul căruia se pot măsura cu o precizie de $1 \mu\text{m}$ ($0,001\text{mm}$) grosimile unor corpuri subțiri, precum și razele de curbură ale suprafețelor sferice. El se compune dintr-un trepied prevăzut cu un șurub micrometric care se termină la partea inferioară cu un vârf ascuțit ce constituie piciorul mobil al sferometrului. Discul sferometrului divizat în 500 de diviziuni se învâрте în lungul unei rigle divizate în jumătăți de milimetru. O rotație completă a discului corespunde cu o deplasare pe verticală de $0,5 \text{ mm}$. Prin urmare, o diviziune a discului corespunde unui micron ($1 \mu\text{m} = 0,001\text{mm}$). Cu acest instrument milimetrii și jumătățile de milimetru se citesc pe riglă în dreptul discului iar miimile de milimetru pe disc în dreptul riglei. Pentru efectuarea unor măsurări corecte se așează sferometrul pe o suprafață perfect plană. Înainte de a începe măsurările se rotește șurubul micrometric până când vârful piciorului mobil atinge suprafața plană. Dacă diviziunea zero a discului nu coincide cu diviziunea zero a riglei se notează indicațiile N_0 de pe riglă și n_0 de pe disc.

6.3.2 Scopul lucrării

În această lucrare se măsoară direct grosimile unor plăci și indirect razele de curbură ale unor calote sferice cu ajutorul sferometrului.

6.3.3 Aparat și materiale necesare

Pentru efectuarea acestor măsurări avem nevoie de un sferometru, o placă suport din sticlă, plăci metalice de diferite grosimi și calote sferice.

6.3.4 Modul de lucru. Prelucrarea datelor experimentale

- Grosimea unei plăci se măsoară cu sferometrul astfel: se așează placa pe suprafața plană sub vârful piciorului mobil. Se rotește șurubul micrometric până când vârful său atinge placa metalică și se notează diviziunea N de pe riglă, situată la întretăierea discului cu rigla și diviziunea n de pe disc din dreptul riglei. Grosimea plăcii în milimetri este

$$l = (N - N_0) \cdot 0,5 + (n - n_0) \cdot 0,001 \quad (6.29)$$

Se repetă determinările de zece ori. Eroarea pătratică medie a mediei este

$$S_{\bar{l}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m (\bar{l} - l_i)^2}{m(m-1)}} \quad m \geq 10. \quad (6.30)$$

Rezultatul final se scrie sub forma

$$l = \bar{l} \pm S_{\bar{l}}. \quad (6.31)$$

- Pentru determinarea razei de curbură a unei calote de dimensiuni mici se așează baza calotei pe suprafața plană. Se aduce vârful piciorului mobil în contact cu vârful calotei. Notând diviziunile N și n indicate de riglă respectiv de disc, înălțimea calotei este

$$h = (N - N_0) \cdot 0,5 + (n - n_0) \cdot 0,001. \quad (6.32)$$

Scriind teorema lui Pitagora în triunghiul OAB din figura 6.1, găsim următoarea expresie pentru raza de curbură

$$R = \frac{r^2 + h^2}{2h}. \quad (6.33)$$

Raza calotei r se măsoară cu șublerul. Eroarea absolută cu care se estimează raza de curbură a calotei este

$$\delta R = \frac{R}{h} \delta h + \frac{r}{h} \delta r, \quad (6.34)$$

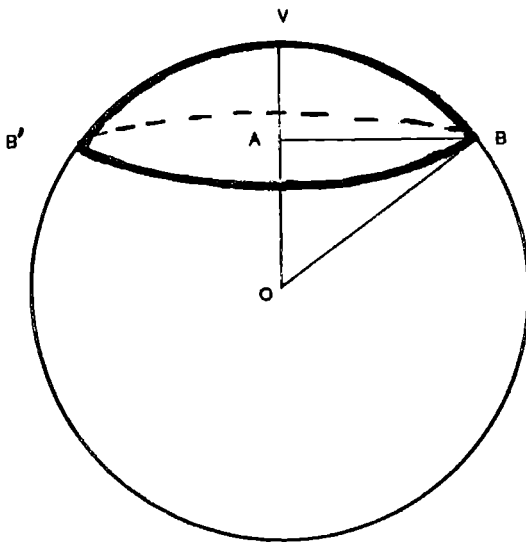
unde $\delta h = 0,001\text{mm}$ iar $\delta r = 0,1\text{mm}$. Eroarea relativă este dată de

$$\epsilon_R = \frac{\delta R}{R} = \frac{\delta h}{h} + \frac{r}{h} \frac{\delta r}{R}. \quad (6.35)$$

iar eroarea pătratică medie a mediei de

$$S_{\bar{R}} = \sqrt{\left(\frac{\bar{r}}{\bar{h}}\right)^2 S_{\bar{r}}^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{\bar{r}^2}{2\bar{h}^2}\right)^2 S_{\bar{h}}^2}. \quad (6.36)$$

- În cazul calotelor de dimensiuni mari se sprijină picioarele trepiedului sferometrului pe suprafața calotei. Apoi se aduce în contact vârful piciorului mobil cu suprafața calotei și se citesc indicațiile de pe riglă (N) și de pe disc (n). Înălțimea calotei cuprinsă între picioarele sferometrului de determină cu relația (6.32). Scriind teorema lui Pitagora în triunghiul AMO din figura 6.2 găsim următoarea expresie pentru raza de curbură



$$\begin{aligned}
 VA &= h \\
 OB &= R \\
 AB &= r = BB'/2 \\
 (R-h)^2 + r^2 &= R^2
 \end{aligned}$$

Figura 6.1:

$$R = \frac{d^2 + 3h^2}{6h}, \quad (6.37)$$

unde d este distanța dintre două picioare ale sferometrului. Valoarea ei se determină experimental cu șublerul. Această evaluare a razei de curbură prezintă următoarele erori:

- eroarea absolută

$$\delta R = \frac{R}{h} \delta h + \frac{d}{3h} \delta d, \quad (6.38)$$

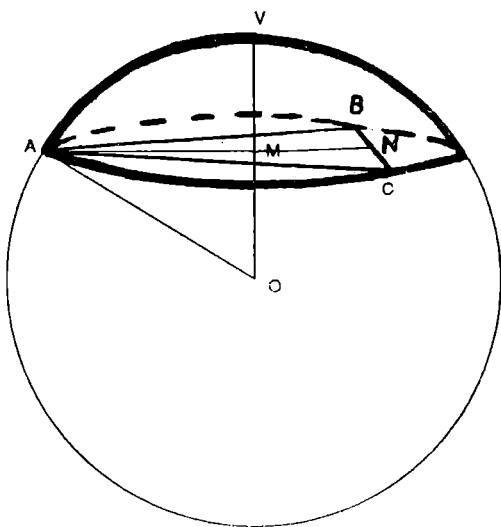
cu $\delta h = 0,001\text{mm}$ iar $\delta d = 0,1\text{mm}$.

- eroarea relativă

$$\epsilon_R = \frac{\delta R}{R} = \frac{\delta h}{h} + \frac{d}{3h} \frac{\delta d}{R}. \quad (6.39)$$

- eroarea pătratică medie a mediei

$$S_{\bar{R}} = \sqrt{\left(\frac{\bar{d}}{3\bar{h}}\right)^2 S_d^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{\bar{d}^2}{6\bar{h}^2}\right)^2 S_{\bar{h}}^2}. \quad (6.40)$$



$$\begin{aligned}
 AC &= d \\
 NC &= d/2 \\
 AM &= 2 \cdot AN/3 \\
 MO &= R - h \\
 VM &= h \\
 AO &= R \\
 AN^2 &= AC^2 - NC^2 = 3d^2/4 \\
 R^2 &= (R-h)^2 + d^2/3
 \end{aligned}$$

Figura 6.2:

VERIFICAREA LEGII MIȘCĂRII ȘI A LEGII VITEZEI ÎN MIȘCAREA RECTILINIE UNIFORM VARIATĂ CU AJUTORUL PLANULUI ÎNCLINAT

7.1 Teoria lucrării

Planul înclinat este o suprafață plană rigidă, înclinată cu un anumit unghi față de orizontală. Considerăm un corp de masă m pe un plan înclinat de unghi α . Greutatea G a acestui corp se descompune în două componente: una G_t paralelă cu planul înclinat iar cealaltă G_n normală la plan. Componenta G_t determină mișcarea corpului pe planul înclinat, în timp ce componenta normală este compensată de reacțiunea planului.

Din figura 7.1 rezultă că componenta G_t are expresia

$$G_t = G \sin \alpha = mg \sin \alpha , \quad (7.1)$$

unde g este accelerația gravitațională. Dacă neglijăm forța de frecare, conform principiului al doilea al dinamicii, accelerația corpului pe planul înclinat este

$$a = g \sin \alpha . \quad (7.2)$$

Deci accelerația pe planul înclinat este *totdeauna* mai mică decât accelerația gravitațională. Această accelerație este cu atât mai mică cu cât înclinarea

planului este mai mică. Deoarece accelerația cu care se mișcă corpul pe plan este constantă, mișcarea acestuia este uniform variată. În mișcarea uniform variată fără viteză inițială expresia matematică a legii vitezei este

$$v = a \cdot t . \quad (7.3)$$

Această lege indică faptul că viteza variază linear cu timpul (viteza este o funcție lineară de timp). Panta dreptei este chiar accelerația corpului.

Legea mișcării rectilinii uniform variate, fără viteză inițială

$$s = \frac{a}{2} \cdot t^2 , \quad (7.4)$$

arată că spațiul s parcurs de corp este proporțional cu pătratul timpului t , în care s-a parcurs distanța s . Constanta de proporționalitate este egală cu jumătate din accelerația corpului.

Considerăm rostogolirea unui disc de masă m și rază R de la înălțimea $h = s \sin \alpha$ pe un plan înclinat de unghi α . Conform legii conservării energiei

$$mgh = \frac{m}{2} \cdot v^2 + \frac{I}{2} \cdot \omega^2 , \quad (7.5)$$

unde $\omega = v/R$ este viteza unghiulară a discului, $I = mR^2/2$ momentul de inerție al discului, iar $v^2 = 2as$ (ecuația lui Galilei). În acest caz accelerația discului este

$$a = \frac{2}{3}g \sin \alpha . \quad (7.6)$$

În cazul în care corpul execută o mișcare rectilinie uniformă ($a = 0$) legea vitezei devine

$$v = ct . \quad (7.7)$$

Legea spațiului în mișcarea rectilinie uniformă are expresia

$$s = v \cdot t . \quad (7.8)$$

7.2 Scopul lucrării

În această lucrare se verifică legea vitezei și cea a spațiului în mișcarea uniform variată a unui disc pe un plan înclinat.

7.3 Dispozitivul experimental

Planul înclinat din această lucrare este format din două bare metalice paralele a căror înclinare față de orizontală se citește pe un raportor fixat pe

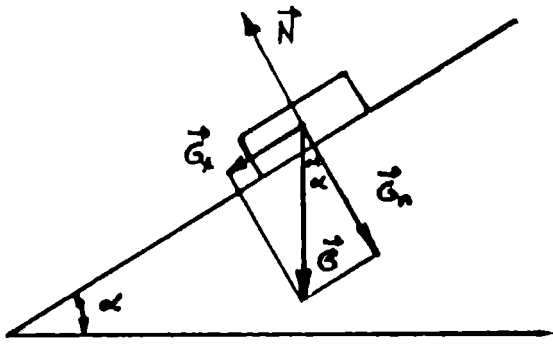


Figura 7.1:

cadru. Aceste bare se continuă cu două bare metalice paralele identice așezate orizontal. Forța de frecare poate fi neglijată dacă pe cele două șine înclinate rostogolim un disc metallic. Ambele perechi de bare au marcate diviziuni în *milimetri* pe una din părți pentru a putea determina ușor spațiul parcurs de disc. Acesta (discul) este pornit cu ajutorul unui dispozitiv de pornire cu pârghie. Discul este oprit cu ajutorul unui opritor mobil. Timpul în care este parcursă distanța între dispozitivul de pornire și opritor (de-a lungul barelor) se măsoară cu un cronometru mecanic.

7.4 Modul de lucru. Prelucrarea datelor experimentale

I. Verificarea legii spațiului

- Se fixează barele planului înclinat la o anumită înclinație, cu ajutorul pârghiei de fixare situată pe cadru.
- Se fixează opritorul la baza planului înclinat.
- Se fixează dispozitivul de pornire la o anumită diviziune s_1 .
- Se pornește cronometrul când se pune în mișcare discul metallic. Când discul ajunge la opritor se oprește și cronometrul. Timpul indicat de cronometru reprezintă timpul în care discul a parcurs distanța s_1 pe

planul înclinat. Se repetă determinarea de trei ori și se calculează valoarea medie a timpului în care este parcursă distanța s_1 .

- Se fixează dispozitivul de pornire la diviziunea s_2 și se determină timpul \bar{t}_2 . Se efectuează determinări pentru cel puțin 10 distanțe diferite. Datele experimentale culese se trec în tabelul 7.1.

înclinare	s [cm]	t [s]	\bar{t} [s]	$2s$ [cm]	\bar{t}^2 [s ²]

Tabelul 7.1:

- Se reprezintă grafic dublul distanței parcurse de disc pe plan în funcție de pătratul timpului în care este parcursă această distanță ($2s = f(\bar{t}^2)$). Panta acestei drepte este chiar accelerația discului pe plan. Conform metodei celor mai mici pătrate această pantă are expresia

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n 2s_i(\bar{t}_i^2 - T^2)}{\sum_{i=1}^n (\bar{t}_i^2 - T^2)^2}, \quad (7.9)$$

unde $n T^2 = \sum_{i=1}^n \bar{t}_i^2$. Nu sunt introduse în calcul valorile pentru punctele experimentale ce sunt mult depărtate de dreapta experimentală.

- Se vor alege cel puțin două înclinări.
- Se va compara pentru o anumită înclinare a planului, valoarea accelerației obținută experimental cu valoarea accelerației obținută cu expresia (7.6).

II. Verificarea legii vitezei

- Se fixează barele mobile (planul înclinat) la una din înclinațiile de la partea precedentă (verificarea legii spațiului).
- Se fixează opritorul pe o anumită diviziune s'_i de pe barele orizontale (planul orizontal).
- Se fixează dispozitivul de pornire pe una din diviziunile s_i , $i = \overline{1, 10}$ corespunzătoare înclinației alese în partea precedentă. Această poziție nu se modifică în timpul acestor determinări.

- Se pornește cronometrul când se pune în mișcare discul metalic și se oprește când discul atinge opritorul. Timpul t''_1 indicat de cronometru reprezintă suma între timpul în care discul a parcurs distanța s_i aleasă pe planul înclinat și cel în care a parcurs distanța s'_1 pe planul orizontal. Se repetă determinarea de trei ori și se calculează valoarea medie $\overline{t''_1}$. Timpul $\overline{t_i}$ în care a fost parcursă distanța s_i pe planul înclinat a fost determinat în partea anterioară. Deci timpul în care este parcursă distanța s'_1 pe planul orizontal este $\overline{t'_1} = \overline{t''_1} - \overline{t_i}$.
- Se fixează opritorul pe o altă diviziune s'_2 și se determină timpul $\overline{t''_2}$. Se efectuează determinări pentru cel puțin 10 distanțe diferite. Datele experimentale culese se trec în tabelul 7.2.

înclinare	s [cm]	\overline{t} [s]	s' [cm]	t'' [s]	t'' [s]	t' [s]

Tabelul 7.2:

- Se reprezintă grafic distanța s' parcursă de disc pe planul orizontal în funcție de timpul $\overline{t'}$ în care este parcursă această distanță ($s' = f(\overline{t'})$). Panta dreptei obținute este chiar viteza de deplasare în mișcarea rectilinie uniformă pe planul orizontal. Conform metodei celor mai mici pătrate viteza are expresia

$$v = \frac{\sum_{i=1}^n s'_i (\overline{t'_i} - T')}{\sum_{i=1}^n (\overline{t'_i} - T')^2}, \quad (7.10)$$

unde $n T' = \sum_{i=1}^n \overline{t'_i}$. Nu sunt introduse în calcul valorile pentru punctele experimentale ce sunt mult depărtate de dreapta experimentală.

- Se va compara valoarea vitezei obținută (experimental) cu ecuația (7.10) cu cea obținută folosind legea vitezei pe planul înclinat

$$v = a \overline{t}, \quad (7.11)$$

unde accelerația a are valoarea determinată anterior.

Atentie: Dacă discul atinge cu unul din capetele sale barele metalice, determinarea respectivă nu se ia în considerație, deoarece mișcarea lui nu mai este uniformă.

VERIFICAREA TEOREMEI LUI STEINER

8.1 Teoria lucrării

Teorema lui Steiner afirmă că momentul de inerție I al unui corp față de o axă oarecare de rotație OO' ce nu trece prin centrul de masă este egal cu momentul de inerție I_0 al corpului față de o axă CC' paralelă la OO' , ce trece prin centrul de masă plus produsul dintre masa corpului m și pătratul distanței (R_0) dintre axe (figura 8.1)

$$I = I_0 + mR_0^2 . \quad (8.1)$$

8.2 Scopul lucrării

În această lucrare se verifică teorema lui Steiner cu ajutorul unui pendul de torsiune.

8.3 Dispozitivul experimental

Dispozitivul experimental (figura 8.2) cu ajutorul căruia se verifică teorema lui Steiner este alcătuit dintr-un cadru ușor din aluminiu ce este fixat la capetele O și O' prin intermediul unor fire elastice de un stativ. Răsucit și apoi lăsat liber, cadrul va efectua oscilații de torsiune în jurul axei OO' .

Pe cadru sunt fixate simetric, în planul orizontal, două discuri metalice masive identice A . Aceste discuri se pot roti în jurul axelor lor de simetrie CC' când sunt deblocate sau în jurul axei OO' când sunt blocate cu ajutorul șuruburilor d . Cele două discuri joacă rolul corpului A din figura 8.1.

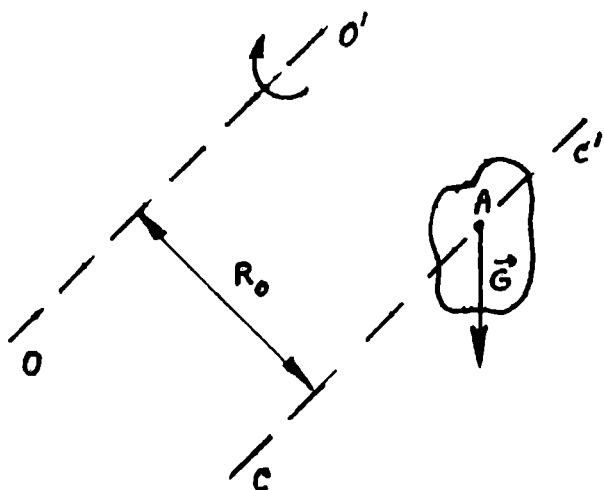


Figura 8.1:

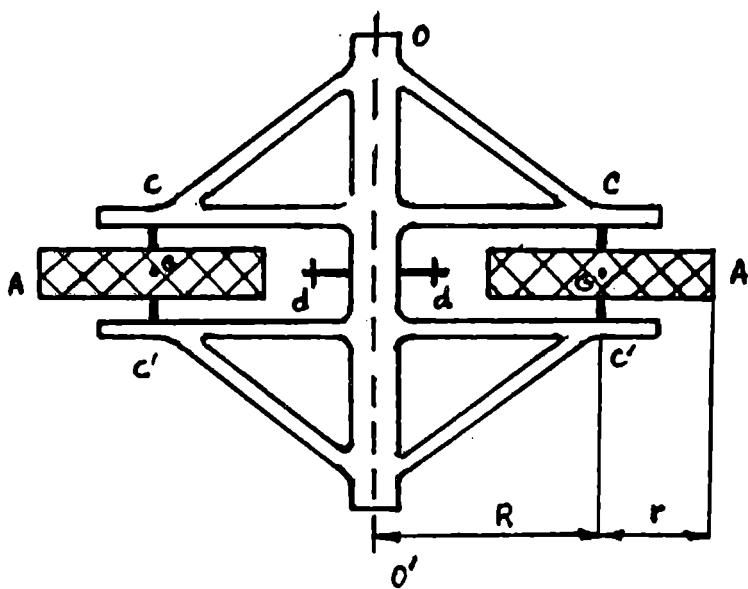


Figura 8.2:

Când discurile sunt deblocate iar cadrul execută mici oscilații produse prin ușoara torsionare a firului de suspensie, discurile execută o mișcare de translație deoarece orice dreaptă ce unește două puncte de pe oricare din cele două discuri rămâne paralelă cu ea însăși în timpul mișcării. În schimb centrul lor de greutate G se rotește în jurul axei OO' . Notând cu m masa unui disc și cu R distanța de la centrul discului la axa OO' , momentul de inerție I' al sistemului față de axa OO' este egal cu suma dintre momentul de inerție al cadrului și dublul momentului de inerție al centrului de greutate al unui disc față de axa OO'

$$I' = I_{\text{cadru}} + 2mR^2. \quad (8.2)$$

Perioada de oscilație a sistemului are expresia

$$T' = 2\pi \sqrt{\frac{I'}{C}}, \quad (8.3)$$

unde C este constanta de torsiune a firului elastic.

Când discurile sunt blocate iar cadrul execută mici oscilații, discurile se rotesc în jurul axei OO' . Momentul de inerție al unui disc față de axa OO' ce nu trece prin centrul de greutate al discului este conform teoremei Steiner

$$mR^2 + \frac{1}{2}mr^2,$$

unde r este raza unui disc. În acest caz momentul de inerție al sistemului față de axa OO' are expresia

$$I = I_{\text{cadru}} + 2 \left(mR^2 + \frac{1}{2}mr^2 \right) = I' + mr^2, \quad (8.4)$$

iar perioada de oscilație este dată de

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{C}} = 2\pi \sqrt{\frac{I' + mr^2}{C}}. \quad (8.5)$$

Ridicând la pătrat relațiile (8.3) și (8.5) și împărțindu-le obținem

$$\frac{T^2}{T'^2} = \frac{I}{I'}. \quad (8.6)$$

Deoarece cadrul are masă mică în comparație cu cea a discurilor, neglijăm momentul de inerție al cadrului în expresiile (8.2) și (8.4)

$$\begin{aligned} I' &= 2mR^2, \\ I &= m(2R^2 + r^2). \end{aligned}$$

Inlocuind aceste expresii în relația (8.6) obținem

$$\frac{T^2}{T'^2} = \frac{2R^2 + r^2}{2R^2}. \quad (8.7)$$

În concluzie utilizând teorema Steiner am obținut relația (8.7). Deci verificarea experimentală a acestei relații este echivalentă cu verificarea teoremei lui Steiner.

Aparate și materiale: pendulul de torsiune descris mai sus, un cronometru și o riglă.

8.4 Modul de lucru. Prelucrarea datelor experimentale

- Se măsoară cu o riglă raza (r) unuia dintre discuri și distanța (R) de la centrul oricărui disc la axa OO' . Se calculează valoarea expresiei

$$Q = 1 + \frac{r^2}{2R^2}.$$

- Se calculează eroarea relativă maximă a acestui raport

$$\epsilon_Q = \frac{\delta_Q}{Q},$$

unde eroarea absolută δ_Q este dată de

$$\delta_Q = \left(\frac{r}{R}\right)^2 \left(\frac{\delta_r}{r} + \frac{\delta_R}{R}\right),$$

cu $\delta_r = \delta_R = 1 \text{ mm}$.

- Se deblochează discurile și se rotește cadrul cu aproximativ 6° . Se cronometrează 5 oscilații complete. Se determină perioada T' de oscilație

$$T' = \frac{t'}{N}, \quad N = 5$$

unde t' este timpul în care se efectuează cele N oscilații complete. Se repetă măsurătorile de 10 ori.

- Se blochează discurile și se rotește cadrul cu aproximativ 6° . Se măsoară timpul t în care se efectuează $N = 5$ oscilații complete. Perioada de oscilație a pendulului este

$$T = \frac{t}{N}.$$

Se repetă măsurătorile de 10 ori. Datele experimentale culese se trec în tabelul 8.1.

număr determinări	discuri deblocate		discuri blocate		Q'	Q
	t' [s]	\bar{t}' [s]	t [s]	\bar{t} [s]		

Tabelul 8.1:

- Se calculează raportul

$$Q' = \left(\frac{\bar{T}}{\bar{T}'} \right)^2 = \left(\frac{\bar{t}}{\bar{t}'} \right)^2.$$

- Se calculează eroarea pătratică medie a mediei pentru acest raport

$$S_{Q'} = 2 \left(\frac{\bar{t}}{\bar{t}'} \right)^2 \sqrt{\frac{S_{\bar{t}}^2}{\bar{t}^2} + \frac{S_{\bar{t}'}^2}{\bar{t}'^2}}, \quad (8.8)$$

unde

$$S_{\bar{t}}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\bar{t} - t_i)^2}{n(n-1)}, \quad S_{\bar{t}'}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\bar{t}' - t'_i)^2}{n(n-1)}, \quad n \geq 10.$$

- Se verifică concordanța acestor rapoarte Q și Q' în limita erorilor experimentale.

9

STUDIUL COMPUNERII MIȘCĂRILOR ARMONICE PERPENDICULARE

9.1 Teoria lucrării

Mișcarea armonică este mișcarea oscilatorie descrisă de ecuația

$$x = x_0 \cos(\omega t + \alpha) , \quad (9.1)$$

unde x_0 este amplitudinea mișcării armonice, ω pulsația ei iar α este faza inițială a mișcării.

Compunerea a două mișcări oscilatorii armonice perpendiculare de aceeași pulsație

Considerăm suprapunerea a două mișcări armonice perpendiculare de aceeași pulsație ω , descrise de ecuațiile:

$$x = x_0 \cos(\omega t + \alpha) , \quad (9.2)$$

$$y = y_0 \cos(\omega t + \beta) . \quad (9.3)$$

Pentru a determina traiectoria mișcării rezultante se elimină timpul. În acest scop scriem ecuațiile de mai sus sub forma:

$$\frac{x}{x_0} = \cos \omega t \cos \alpha - \sin \omega t \sin \alpha , \quad (9.4)$$

$$\frac{y}{y_0} = \cos \omega t \cos \beta - \sin \omega t \sin \beta . \quad (9.5)$$

Înmulțim ecuația (9.4) cu $\sin \beta$ iar ecuația (9.5) cu $\sin \alpha$. Scăzând cele două ecuații obținem rezultatul că :

$$\frac{x}{x_0} \sin \beta - \frac{y}{y_0} \sin \alpha = \cos \omega t \sin(\beta - \alpha) . \quad (9.6)$$

Înmulțim ecuația (9.4) cu $\cos \beta$ iar ecuația (9.5) cu $\cos \alpha$. Scăzând cele două ecuații obținem:

$$\frac{x}{x_0} \cos \beta - \frac{y}{y_0} \cos \alpha = \sin \omega t \sin(\beta - \alpha) . \quad (9.7)$$

Ridicăm la pătrat ecuațiile (9.6) și (9.7). Adunându-le apoi membru cu membru obținem:

$$\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + \left(\frac{y}{y_0}\right)^2 - 2\frac{x}{x_0}\frac{y}{y_0}\cos(\beta - \alpha) = \sin^2(\beta - \alpha) . \quad (9.8)$$

Ecuația (9.8) reprezintă ecuația unei elipse. Deci, prin suprapunerea a două oscilații armonice perpendiculare, de aceeași frecvență se obține o mișcare oscilatorie având traiectoria o elipsă. În particular, dacă diferența de fază $\beta - \alpha$ este egală cu 0 sau π elipsa degenerază în două drepte, de-a lungul cărora oscilează punctul material

$$y = \pm \frac{y_0}{x_0} x . \quad (9.9)$$

Dacă diferența de fază $\beta - \alpha$ este $\pi/2$ sau $3\pi/2$, elipsa va avea ca axe de simetrie direcțiile oscilațiilor componente

$$\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + \left(\frac{y}{y_0}\right)^2 = 1 . \quad (9.10)$$

Dacă în plus $x_0 = y_0 = R$ elipsa devine un cerc de rază R .

Compunerea a două mișcări oscilatorii armonice perpendiculare de frecvențe diferite

Compunerea a două mișcări oscilatorii perpendiculare de frecvențe diferite dă traiectorii complicate. Când *raportul frecvențelor este rațional* (adică raport de numere întregi) traiectoria este stabilă (fixă). Această traiectorie se numește figură Lissajous. Forma acestor traiectorii depinde și de diferența de fază. În figura 9.1 sunt reprezentate figuri Lissajous pentru câteva va-

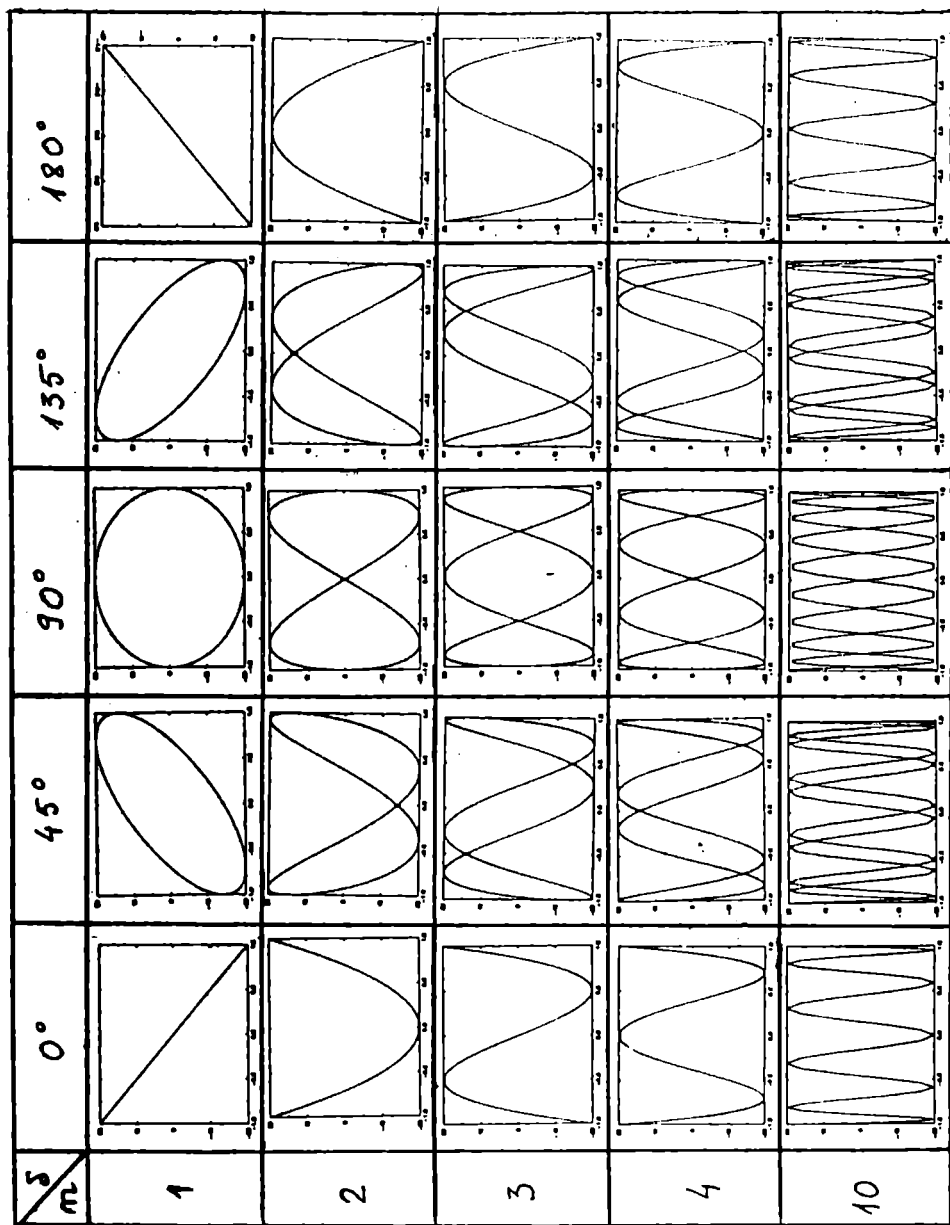


Figura 9.1:

lori ale raportului pulsațiilor celor două mișcări oscilatorii perpendiculare ($n = \omega_y/\omega_x$) și ale diferenței de fază δ .

Considerăm suprapunerea a două mișcări armonice perpendiculare de pulsații ω_x și $\omega_y = n\omega_x$, descrise de ecuațiile

$$x = x_0 \cos \omega_x t, \quad (9.11)$$

$$y = y_0 \cos(n\omega_x t + \delta). \quad (9.12)$$

Pentru determinarea ecuației traiectoriei scriem ecuațiile (9.11) și (9.12) astfel

$$\frac{x}{x_0} = \cos \omega_x t, \quad (9.13)$$

$$\frac{y}{y_0} = \cos n\left(\omega_x t + \frac{\delta}{n}\right). \quad (9.14)$$

Utilizând formula lui Moivre ($\cos n\phi + i \sin n\phi = (\cos \phi + i \sin \phi)^n$), formula fundamentală a trigonometriei ($\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$) și funcțiile trigonometrice sinus și cosinus pentru suma de unghiuri ($\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$ și $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$) și notând $\phi = \omega_x t + \frac{\delta}{n}$, $\alpha = \omega_x t$ și $\beta = \delta/n$ putem scrie că:

$$\begin{aligned} \frac{y}{y_0} + i \sin n\left(\omega_x t + \frac{\delta}{n}\right) &= \left[\frac{x}{x_0} \cos \frac{\delta}{n} - \sqrt{1 - \left(\frac{x}{x_0}\right)^2} \sin \frac{\delta}{n} \right. \\ &\quad \left. + i \left(\sqrt{1 - \left(\frac{x}{x_0}\right)^2} \cos \frac{\delta}{n} + \frac{x}{x_0} \sin \frac{\delta}{n} \right) \right]^n. \end{aligned} \quad (9.15)$$

Ecuația traiectoriei se obține prin identificarea părților reale din expresia (9.15). Deoarece numărul n este egal cu raportul a două numere întregi n_x și n_y

$$n = \frac{n_x}{n_y}, \quad (9.16)$$

ecuația (9.15) devine

$$\begin{aligned} \left[\frac{y}{y_0} + i \sin n\left(\omega_x t + \frac{\delta}{n}\right) \right]^{n_y} &= \left[\frac{x}{x_0} \cos \frac{\delta}{n} - \sqrt{1 - \left(\frac{x}{x_0}\right)^2} \sin \frac{\delta}{n} \right. \\ &\quad \left. + i \left(\sqrt{1 - \left(\frac{x}{x_0}\right)^2} \cos \frac{\delta}{n} + \frac{x}{x_0} \sin \frac{\delta}{n} \right) \right]^{n_x}. \end{aligned} \quad (9.17)$$

Dacă în ecuația (9.17) considerăm x constant (constantă oarecare) și egalăm părțile reale obținem o ecuație de gradul n_y în y . Deci axa Oy sau orice dreaptă paralelă cu Oy intersectează curba traiectoriei (figura Lissajous) de n_y ori.

Dacă în ecuația (9.17) considerăm $y = \text{constant}$ (constantă oarecare) obținem o ecuație de gradul n_x în x . Deci axa Ox sau orice dreaptă paralelă cu Ox intersectează curba traiectoriei (figura Lissajous) de n_x ori.

În concluzie, în cazul figurilor Lissajous, raportul dintre numărul punctelor de tangență ale traiectoriei cu o dreaptă verticală și cel al punctelor de tangență cu o dreaptă orizontală sau raportul dintre numărul punctelor de intersecție ale traiectoriei cu o dreaptă verticală și cel al punctelor de intersecție cu o dreaptă orizontală este egal cu raportul frecvențelor oscilațiilor componente. Dacă una din aceste drepte trece printr-un punct în care figura Lissajous se intersectează, atunci acel punct se numără de două ori.

În cazul figurilor Lissajous putem scrie relația

$$\frac{\omega_y}{\omega_x} = \frac{\nu_y}{\nu_x} = \frac{n_x}{n_y}, \quad (9.18)$$

unde ν_x și ν_y sunt frecvențele celor două oscilații.

Dacă raportul frecvențelor nu este rațional, punctul material descrie o curbă care acoperă treptat o arie, traiectoria schimbându-se continuu.

9.2 Scopul lucrării

Determinarea frecvenței unei oscilații armonice prin compunerea cu o altă oscilație armonică perpendiculară de frecvență cunoscută și analiza figurilor Lissajous obținute.

9.3 Dispozitivul experimental

Aparatura necesară pentru determinarea unei frecvențe necunoscute cu ajutorul figurilor Lissajous este formată dintr-un osciloscop, un generator de frecvență audio și un transformator.

Osciloscopul este un aparat de măsurat ce vizualizează semnalele electrice care-i sunt aplicate. Partea principală a osciloscopului este tubul catodic. Acesta se compune dintr-un tub de sticlă 1 (figura 9.2) în care se află gaz la presiunea de 10^{-6} Torr. În interiorul acestuia prin încălzirea catodului 2 se emite un fascicul de electroni ce este focalizat și în același timp accelerat de cei doi anodi cilindrici 3. Acest fascicul focalizat ajungând pe ecranul fluorescent 4 dă o imagine punctuală luminoasă. Plăcile de deflexie verticală 5 și cele de deflexie orizontală 6 sunt dispuse în unghi drept una față de cealaltă. Dacă pe plăcile 5, respectiv 6 se aplică o tensiune continuă atunci fasciculul de electroni este deviat vertical, respectiv orizontal. Pe ecranul osciloscopului apare o linie dreaptă luminoasă a cărei

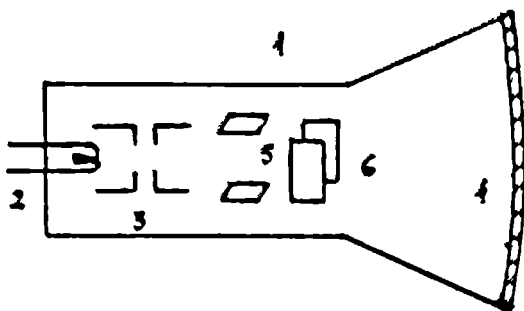


Figura 9.2:

lungime depinde de mărimea tensiunii aplicate. Fasciculul de electroni nu este deviat când pe plăcile de deflexie nu se aplică nici o tensiune.

Dacă pe plăcile de deflexie orizontală aplicăm o tensiune alternativă dată de un transformator T iar pe plăcile de deflexie verticală o tensiune alternativă dată de un generator de frecvență audio G , pe ecranul osciloscopului O apare o figură Lissajous. Prin aplicarea unor tensiuni alternative pe cele două perechi de plăci 5 și 6, așezate perpendicular compunem de fapt două oscilații perpendiculare. Traectoria mișcării rezultante este vizualizată pe ecranul osciloscopului. Prin varierea frecvenței generatorului se obțin diverse figuri Lissajous.

Dispozitivul experimental folosit este reprezentat schematic în figura 9.3.

9.4 Modul de lucru. Prelucrarea datelor experimentale

- Se alimentează la rețea osciloscopul și generatorul.
- Se pune în funcțiune osciloscopul.
- Se focalizează spotul luminos de pe ecranul osciloscopului în centrul ecranului.

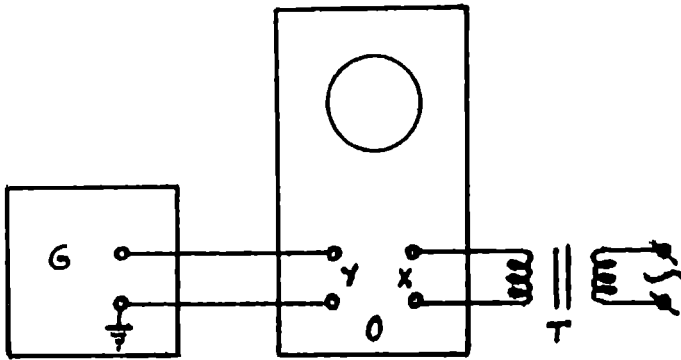


Figura 9.3:

- Se leagă la bornele y ale osciloscopului O generatorul de frecvență audio G .
- Se leagă la bornele x ale osciloscopului O transformatorul T .
- Se alimentează transformatorul.
- Se rotește butonul amplificare pe axa Ox până când pe ecranul osciloscopului se obține o dungă luminoasă având lungimea egală cu jumătate din lățimea ecranului.
- Se pune în funcțiune generatorul.
- Se fixează butonul amplitudine al generatorului în poziția 1 V.
- Se fixează butonul de domeniu de frecvență pe valoarea de 0,025 sau 0,15 kHz.
- Se rotește încet butonul de frecvență al generatorului până se obține o figură stabilă pe ecran.
- Se aleg figurile ce au puține puncte de intersecție cu axele de coordonate.
- Se numără punctele de intersecție ale figurii Lissajous cu axa Ox sau o dreaptă paralelă cu ea (n_x) și cele de intersecție ale figurii Lissajous cu axa Oy sau o dreaptă paralelă cu ea (n_y). Dacă una din axele

sau dreptele menționate mai sus trece printr-un punct în care figura Lissajous se intersectează, acel punct se numără de două ori.

- Cunoscând frecvența tensiunii alternative dată de transformator ($\nu_x = 50 \text{ Hz}$) se determină frecvența (ν_y) a generatorului G conform formulei

$$\nu_y = \nu_x \frac{n_x}{n_y} . \quad (9.19)$$

Rezultatele măsurărilor se trec în tabelul 9.1.

nr. determinare	fig. Lissajous	n_x	n_y	ν_{exp} [Hz]	ν_{teor} [Hz]

Tabelul 9.1:

Când figura Lissajous este o elipsă, cu ajutorul osciloscopului se poate determina și defazajul dintre cele două oscilații care se compun folosind formula

$$\delta = \arcsin \frac{a}{b} = \arcsin \frac{a'}{b'} , \quad (9.20)$$

unde parametrii a , b , a' și b' ai elipsei sunt definiți în figura 9.4.

- Se rotește butonul de frecvență al generatorului G până se obține altă figură Lissajous. Se determină această frecvență cu relația (9.19).
- Se va determina frecvența generatorului în cazul mai multor figuri Lissajous.
- După terminarea determinărilor se închid osciloscopul și generatorul.
- Se deconectează aparatele de la rețea.

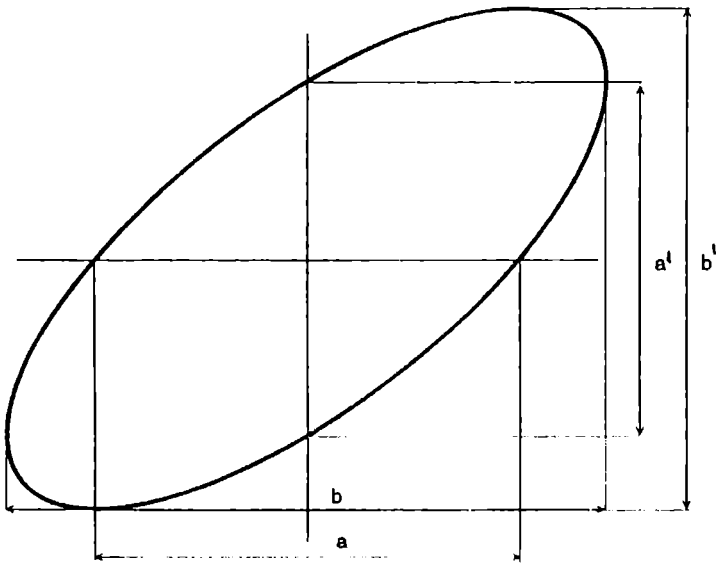


Figura 9.4:

10

STUDIUL COMPUNERII MIȘCĂRILOR ARMONICE PARALELE

10.1 Teoria lucrării

Mișcarea armonică este mișcarea oscilatorie descrisă de ecuația

$$x = x_0 \cos(\omega t + \alpha) , \quad (10.1)$$

unde x_0 este amplitudinea mișcării armonice, ω pulsația ei iar α este faza inițială a mișcării. În ecuația (10.1) se poate folosi funcția sinus în locul celei cosinus numai cu modificarea fazei mișcării.

Compunerea a două mișcări oscilatorii armonice paralele de aceeași pulsație

Considerăm suprapunerea (compunerea) a două mișcări armonice paralele de aceeași pulsație ω , descrise de ecuațiile:

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \alpha_1) , \quad (10.2)$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \alpha_2) . \quad (10.3)$$

Mișcarea rezultantă este o mișcare armonică de aceeași pulsație ω și aceeași direcție.

$$x = A \cos(\omega t + \alpha) . \quad (10.4)$$

Deoarece mișcarea rezultantă este obținută prin suprapunerea a două mișcări armonice paralele

$$x = x_1 + x_2 . \quad (10.5)$$

Înlocuind relațiile (10.2), (10.3) și (10.4) în ecuația (10.5), dezvoltând cosinusurile și făcând identificările se obține

$$A \cos \alpha = A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2 , \quad (10.6)$$

$$A \sin \alpha = A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2 . \quad (10.7)$$

Ridicăm la pătrat aceste ecuații și adunându-le membru cu membru obținem:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1) . \quad (10.8)$$

Împărțind aceste ecuații obținem faza inițială a mișcării rezultante

$$\alpha = \arctg \frac{A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2}{A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2} . \quad (10.9)$$

Aceleași rezultate se obțin cu ajutorul reprezentării complexe

$$\begin{aligned} x = x_1 + x_2 &= A_1 e^{i(\omega t + \alpha_1)} + A_2 e^{i(\omega t + \alpha_2)} \\ &= (A_1 e^{i\alpha_1} + A_2 e^{i\alpha_2}) e^{i\omega t} = A e^{i(\omega t + \alpha)} = A e^{i\alpha} e^{i\omega t} , \end{aligned} \quad (10.10)$$

deci

$$A e^{i\alpha} = A_1 e^{i\alpha_1} + A_2 e^{i\alpha_2} . \quad (10.11)$$

Folosind formula

$$e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha ,$$

obținem relațiile (10.6) și (10.7).

Expresia amplitudinii și cea a fazei inițiale a mișcării rezultante se pot obține și cu metoda fazorială. Fiecărei mișcări armonice i se asociază un fazor, care este un vector ce se rotește cu viteza unghiulară egală cu pulsația ω a mișcării oscilatorii armonice. Acest vector are lungimea egală cu amplitudinea oscilației. El face cu abscisa un unghi egal cu faza oscilației. Astfel compunerea oscilațiilor revine la compunerea a doi vectori folosind metoda paralelogramului (figura 10.1). Scriind teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic OM_2N_2 se obține

$$A^2 = (A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2)^2 + (A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2)^2$$

Scriind $\operatorname{tg} \alpha$ în triunghiul dreptunghic OM_2N_2 se obține

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{\|M_2N_2\|}{\|OM_2\|} = \frac{\|M_2N_1\| + \|N_1N_2\|}{\|OM_1\| + \|M_1M_2\|} \\ &= \frac{A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2}{A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2} . \end{aligned}$$

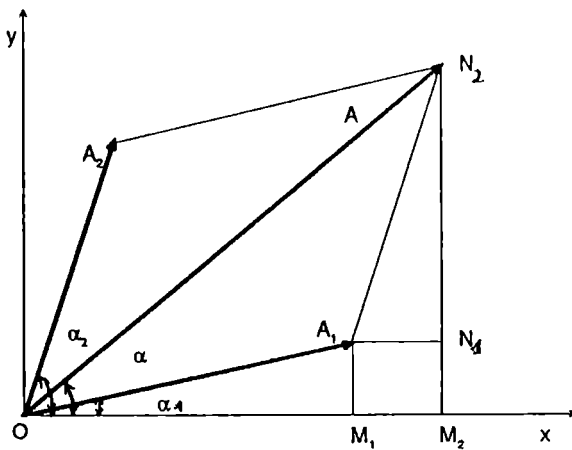


Figura 10.1:

Amplitudinea oscilației rezultante depinde de amplitudinile oscilațiilor ce se compun și de diferența de fază $\alpha_2 - \alpha_1$. Ea are valoarea maximă $A = A_1 + A_2$ când $\cos(\alpha_2 - \alpha_1) = 1$ sau $\alpha_2 - \alpha_1 = 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. În acest caz cele două oscilații care se compun sunt în fază. Amplitudinea oscilației rezultante are o valoare minimă $A = A_1 - A_2$ pentru $\alpha_2 - \alpha_1 = (2n + 1)\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, când oscilații care se compun sunt în opoziție de fază.

Compunerea a două mișcări oscilatorii armonice paralele de frecvențe diferite

Mișcarea rezultată din compunerea a două mișcări oscilatorii paralele de frecvențe diferite **nu** mai este o mișcare oscilatorie armonică. Într-adevăr, fazorii rotindu-se cu viteze unghiulare diferite, unghiul dintre ei este variabil în timp. Fazorul rezultat, de amplitudine variabilă nu se mai rotește uniform. Deci, mișcarea rezultantă este de amplitudine și frecvență variabile.

În cazul particular $A_1 = A_2$, deși amplitudinea mișcării rezultante este variabilă, frecvența mișcării rezultante este constantă. Deci prin suprapunerea a două mișcări oscilatorii armonice paralele de aceeași amplitudine și de frecvențe diferite se obține o oscilație armonică de amplitudine variabilă.

Considerăm cazul a două oscilații armonice paralele de aceeași amplitudine dar de frecvențe diferite, descrise de ecuațiile

$$x_1 = A_0 \cos(\omega_1 t + \alpha_1) , \quad (10.12)$$

$$x_2 = A_0 \cos(\omega_2 t + \alpha_2) . \quad (10.13)$$

Mișcarea rezultantă este obținută prin suprapunerea celor două mișcări armonice paralele

$$x = x_1 + x_2 . \quad (10.14)$$

Înlocuind relațiile (10.12) și (13) în ecuația (10.14) și transformând suma de cosinusuri în produs

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \left(\frac{\beta - \alpha}{2} \right) \cos \left(\frac{\beta + \alpha}{2} \right) ,$$

se obține

$$\begin{aligned} x &= 2A_0 \cos \left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} \right) \\ &\times \cos \left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t + \frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2} \right) . \end{aligned} \quad (10.15)$$

Schimbând convenabil momentul inițial se poate realiza

$$\alpha_2 - \alpha_1 = 0 ,$$

obținându-se astfel pentru x expresia

$$x = 2A_0 \cos \left(\frac{(\omega_2 - \omega_1)t}{2} \right) \cos \left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t + \alpha \right) , \quad (10.16)$$

sau

$$x = A(t) \cos \left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t + \alpha \right) , \quad (10.17)$$

cu

$$A(t) = 2A_0 \cos \left(\frac{(\omega_2 - \omega_1)t}{2} \right) . \quad (10.18)$$

În cazul când frecvențele ω_1 și ω_2 sunt foarte apropiate între ele ($\omega_1 \approx \omega_2$) atunci

$$|\omega_2 - \omega_1| \gg \omega_{1,2} . \quad (10.19)$$

Oscilația rezultantă este aproape sinusoidală, de frecvență $(\omega_2 + \omega_1)/2$ și de amplitudine lent variabilă cu frecvența $|\omega_2 - \omega_1|$ (modulul cosinusului are frecvența dublă, deoarece $2 \cos^2 \alpha = \cos 2\alpha + 1$). Acest caz este denumit în literatura de specialitate fenomenul **bătăilor** (figura 10.2).

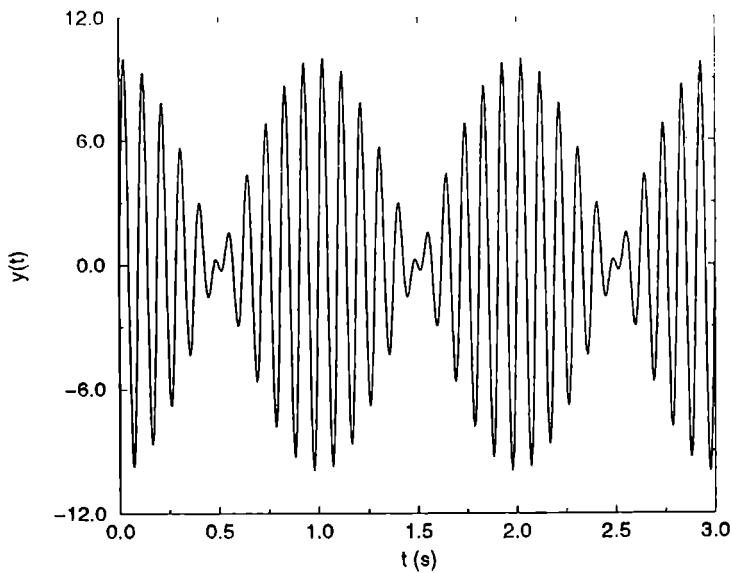


Figura 10.2:

În cazul frecvențelor acustice, sunetul de frecvență $(\omega_2 + \omega_1)/2$ se aude succesiv întărindu-se și slăbindu-se cu frecvența bățăilor

$$\nu_b = |\nu_2 - \nu_1| . \quad (10.20)$$

Perioada acestora este

$$T_b = \frac{1}{\nu_b} = \frac{T_1 T_2}{|T_2 - T_1|} = \frac{2\pi}{|\omega_2 - \omega_1|} . \quad (10.21)$$

Numărul de maxime cuprinse într-o oscilație a amplitudinii este

$$N = \frac{T_b}{T} = \frac{2\pi}{|\omega_2 - \omega_1|} \cdot \frac{\omega_2 + \omega_1}{4\pi} = \frac{\nu_1 + \nu_2}{2 |\nu_1 - \nu_2|} . \quad (10.22)$$

10.2 Scopul lucrării

Determinarea frecvenței unei oscilații armonice care compusă cu o altă oscilație armonică paralelă de frecvență cunoscută produce bățai.

10.3 Dispozitivul experimental

Aparatura necesară pentru determinarea unei frecvențe necunoscute prin metoda bățăilor este formată dintr-un osciloscop și două generatoare de frecvență audio.

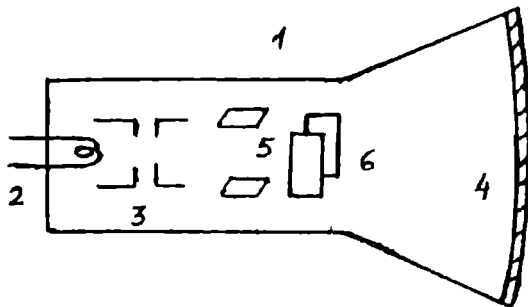


Figura 10.3:

Osciloscopul este un aparat de măsurat ce vizualizează semnalele electrice care-i sunt aplicate. Partea principală a osciloscopului este tubul catodic. Acesta se compune dintr-un tub de sticlă 1 (figura 10.3) în care se află gaz la presiunea de 10^{-6} Torr. În interiorul acestuia prin încălzirea catodului 2 se emite un fascicul de electroni ce este focalizat și în același timp accelerat de cei doi anozii cilindrici 3. Acest fascicul focalizat ajungând pe ecranul fluorescent 4 dă o imagine punctuală luminoasă. Plăcile de deflexie verticală 5 și cele de deflexie orizontală 6 sunt dispuse în unghi drept una față de cealaltă. Dacă pe plăcile 5, respectiv 6 se aplică o tensiune continuă atunci fasciculul de electroni este deviat vertical, respectiv orizontal. Pe ecranul osciloscopului apare o linie dreaptă luminoasă a cărei lungime depinde de mărimea tensiunii aplicate. Fasciculul de electroni nu este deviat când pe plăcile de deflexie nu se aplică nici o tensiune.

Cele două generatoare de frecvență audio se conectează în paralel. Frecvența unuia dintre generatoare se păstrează fixă. Când frecvența celuilalt generator este apropiată de cea a primului pe ecranul osciloscopului se obțin bătăi. În acest caz cele două frecvențe diferă cu

$$\Delta\nu = \frac{2\nu_1}{2N - 1}, \quad (10.23)$$

unde ν_1 este frecvența fixă, iar N este numărul de maxime cuprinse într-o oscilație a amplitudinii oscilației rezultante. Frecvența ν_2 este

$$\nu_2 = \nu_1 \pm \Delta\nu = \nu_1 \left(1 \pm \frac{2}{2N - 1} \right) \quad (10.24)$$

10.4 Modul de lucru. Prelucrarea datelor experimentale

- Se conectează cele două generatoare de frecvență audio în paralel la bornele x ale osciloscopului.
- Se comută osciloscopul pe baza sa proprie de timp.
- Se alimentează la rețea cele trei aparate și se pun în funcțiune.
- Se alege o bază de timp astfel încât figura de pe ecranul osciloscopului să fie staționară.
- Dacă nu se obține o imagine stabilă se va realiza sincronizarea bazei de timp cu semnalul modulator de joasă frecvență.
- Se reglează amplitudinile celor două semnale produse de cele două generatoare (din butoanele amplitudine ale celor două generatoare și prin potrivirea scalei osciloscopului) astfel încât acestea să fie egale. Egalarea celor două amplitudini este realizată când nodul bățăilor este punctual.
- Se fixează frecvența unuia dintre generatoare.
- Se determină frecvența apropiată a celuilalt generator cu formula (10.24), numărând câte oscilații sunt cuprinse într-o perioadă a bățăilor.
- Se compară valoarea acestei frecvențe cu cea indicată de generator.
- Rezultatele măsurărilor se trec în tabelul 10.1.

nr. determinare	ν_1 [kHz]	N	$\nu_{2,exp}$ [kHz]	$\nu_{2,teor}$ [kHz]

Tabelul 10.1:

- În cazul în care egalarea celor două amplitudini nu s-a realizat se poate determina gradul de modulație, care este dat de

$$m = \frac{A - B}{A + B}, \quad (10.25)$$

unde parametrii A și B sunt definiți în figura 10.4.

- Se vor verifica 5 – 10 frecvențe pe scala unuia dintre generatoare, păstrând același generator de referință.
- După terminarea determinărilor se închid aparatele.
- Se deconectează aparatele de la rețea.

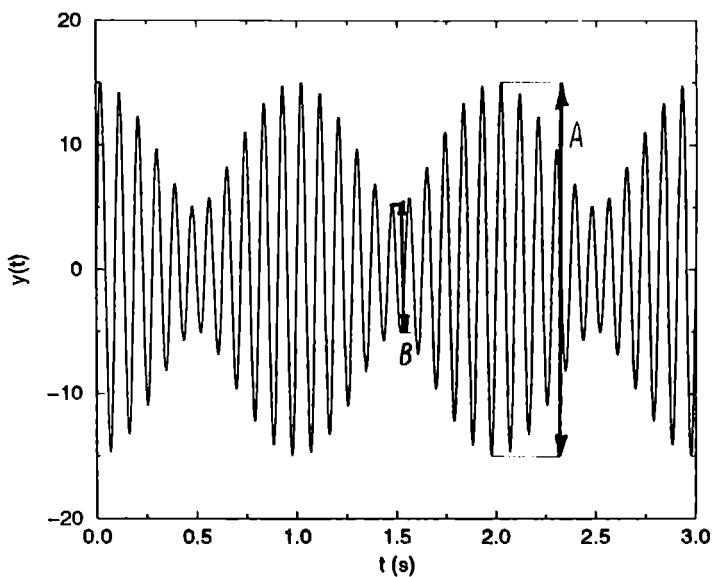


Figura 10.4:

11

STUDIUL MIȘCĂRII ARMONICE AMORTIZATE

11.1 Teoria lucrării

Datorită interacțiunii cu mediul, oscilatorul pierde continuu energie prin frecare. Energia oscilatorului fiind proporțională cu pătratul amplitudinii rezultă că amplitudinea scade cu timpul. Spunem că oscilațiile se sting (se amortizează). În multe cazuri (de exemplu: pendulul gravitațional sau elastic aflat într-un mediu vâcos) efectul mediului asupra oscilatorului poate fi descris de o forță de rezistență proporțională cu viteza particulei. Deoarece în mediul vâcos viteza particulei se micșorează, forța de rezistență este orientată în sens opus vitezei

$$\vec{R} = -r\vec{v}, \quad (11.1)$$

unde r se numește coeficient de rezistență. Unitatea sa de măsură în SI este kg/s . Conform principiului al doilea al dinamicii ($m\vec{a} = \vec{F}$, unde \vec{F} este rezultanta forțelor ce acționează asupra punctului material de masă m) ecuația oscilațiilor amortizate este

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x}, \quad (11.2)$$

sau

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (11.3)$$

unde, prin definiție

$$b = \frac{r}{2m}, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}. \quad (11.4)$$

ω_0 este frecvența oscilațiilor proprii în absența amortizării, iar b coeficientul de amortizare. Unitatea de măsură în SI a coeficientului de amortizare este s^{-1} . Ecuația (11.3) este o ecuație diferențială omogenă de ordinul al doilea cu coeficienți constanți. Soluțiile acestei ecuații sunt de forma $C \exp(\rho t)$ ($x = C \exp(\rho t)$, $\dot{x} = \rho C \exp(\rho t)$, $\ddot{x} = \rho^2 C \exp(\rho t)$). Introducând această soluție în ecuația diferențială (11.3) obținem ecuația caracteristică

$$\rho^2 + 2b\rho + \omega_0^2 = 0. \quad (11.5)$$

Această ecuație algebrică de ordinul al doilea are soluțiile

$$\rho_{1,2} = -b \pm \sqrt{b^2 - \omega_0^2}. \quad (11.6)$$

Soluția generală a ecuației diferențiale (11.3) este

$$x = C_1 e^{\rho_1 t} + C_2 e^{\rho_2 t}, \quad (11.7)$$

dacă $\rho_1 \neq \rho_2$.

După tipul rădăcinilor ecuației caracteristice (complex conjugate, reale distincte sau confundate) distingem trei cazuri.

Oscilații amortizate pseudoperiodice

Când $b < \omega_0$ rădăcinile ecuației caracteristice sunt complex conjugate. În acest caz coeficientul de amortizare este suficient de mic $r < 2\sqrt{mk}$. Dacă constantele C_1 , C_2 sunt complex conjugate între ele atunci soluțiile ecuației diferențiale sunt reale. Fie

$$C_1 = \frac{1}{2}A_0 e^{i\alpha}, \quad C_2 = \frac{1}{2}A_0 e^{-i\alpha}, \quad (11.8)$$

unde A_0 și α sunt două constante reale arbitrare. Ținând cont de formulele lui Euler

$$2 \cos \alpha = e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}, \quad 2i \sin \alpha = e^{i\alpha} - e^{-i\alpha},$$

soluția se scrie

$$x = A_0 e^{-bt} \cos \left(\sqrt{\omega_0^2 - b^2} t + \alpha \right) = A \cos(\omega t + \alpha), \quad (11.9)$$

unde

$$A = A_0 e^{-bt} = A_0 e^{-\frac{r}{2m}t},$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - b^2} = \sqrt{k/m - r^2/(4m^2)} < \omega_0 = \sqrt{k/m}.$$

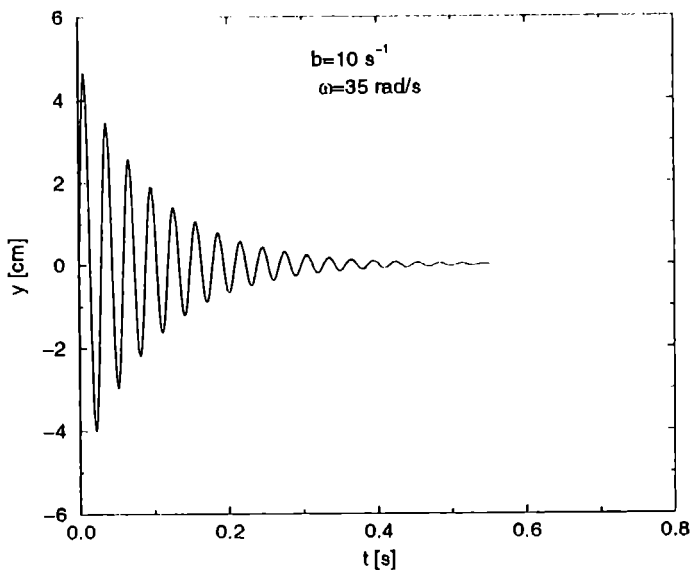


Figura 11.1:

ω este frecvența oscilațiilor amortizate. Ea poartă numele de pseudofrecvență sau pseudopulsăție. Pseudofrecvența este mai mică decât frecvența oscilațiilor proprii $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ în absența amortizării. Acest rezultat era de așteptat deoarece frecările se opun mișcării, întârziind-o.

Oscilațiile amortizate descrise de ecuația (11.9) sunt de tip sinusoidal cu amplitudinea descrescătoare exponențial (figura 11.1).

Efectuând raportul elongațiilor sau amplitudinilor la un interval de timp egal cu perioada T obținem

$$\frac{x(t)}{x(t+T)} = \frac{A_0 e^{-bt} \cos(\omega t + \alpha)}{A_0 e^{-b(t+T)} \cos[\omega(t+T) + \alpha]} = e^{bT}. \quad (11.10)$$

Prin definiție logaritmul natural al acestui raport este decrementul logaritmic

$$D = bT = \frac{2\pi b}{\omega} = \frac{2\pi b}{\sqrt{\omega_0^2 - b^2}}. \quad (11.11)$$

Ca și coeficientul de amortizare, decrementul logaritmic caracterizează de asemenea, gradul de amortizare al oscilațiilor, dar spre deosebire de acesta este adimensional.

Inversul coeficientului de amortizare indică în cât timp amplitudinea oscilației scade de $e = 2,718$ ori. Având dimensiune de timp, el se numește

timp de relaxare (sau timp de viață) și se notează cu τ

$$\tau = \frac{1}{b} = \frac{2m}{r} . \quad (11.12)$$

Între decrementul logaritmic D și timpul de relaxare există relația

$$\frac{1}{D} = \frac{1}{bT} = \frac{\tau}{T} = N_e . \quad (11.13)$$

Această relație arată că inversul decrementului logaritmic este egal cu numărul oscilațiilor efectuate într-un timp egal cu timpul de relaxare.

Amplitudinea se înjumătățește după un timp numit timp de înjumătățire $T_{1/2}$. Expresia sa se obține din condiția

$$A_0 e^{-b(t+T_{1/2})} = \frac{1}{2} A_0 e^{-bt} .$$

Deci

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{b} = \tau \ln 2 = 0,693\tau . \quad (11.14)$$

Dacă în timpul de înjumătățire $T_{1/2}$ se efectuează N_0 oscilații (perioade)

$$T_{1/2} = N_0 T , \quad (11.15)$$

inversul decrementului logaritmic este dat de

$$\frac{1}{D} = \frac{1}{bT} = \frac{\tau N_0}{T_{1/2}} = \frac{N_0}{\ln 2} . \quad (11.16)$$

Deci decrementul logaritmic este

$$D = \frac{\ln 2}{N_0} = \frac{0,693}{N_0} . \quad (11.17)$$

Când amortizarea este mică, adică $b \ll \omega_0$ ($r \ll \sqrt{mk}$) valoarea pseudofrecvenței este apropiată de cea a frecvenței oscilațiilor proprii $\omega \approx \omega_0$. În acest caz decrementul logaritmic îndeplinește condiția

$$D = bT \simeq \frac{2\pi b}{\omega_0} \ll 1 , \quad (11.18)$$

de unde $N_0 = 1/D \gg 1$. Deci în timpul de viață se efectuează un număr mare de oscilații. Într-o perioadă amplitudinea oscilației amortizate rămâne aproape neschimbată. În acest caz se poate calcula energia oscilatorului cu formula de la oscilatorul armonic

$$E = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A_0^2 e^{-2bt} = E_0 e^{-2bt} . \quad (11.19)$$

Deci energia scade exponențial cu timpul, cu coeficientul de atenuare $2b = r/m$.

Mișcarea amortizată aperiodică

Când $b > \omega_0$ rădăcinile ecuației caracteristice sunt reale și distincte. În acest caz coeficientul de amortizare este suficient de mare

$$r > 2\sqrt{mk}.$$

Soluția generală a ecuației diferențiale (11.3) este

$$x = e^{-bt} \left(C_1 e^{-\sqrt{b^2 - \omega_0^2}t} + C_2 e^{\sqrt{b^2 - \omega_0^2}t} \right). \quad (11.20)$$

Deci, elongația tinde asimptotic spre zero. În funcție de condițiile inițiale oscilatorul poate trece prin poziția de echilibru cel mult o singură dată.

Mișcarea amortizată aperiodică critică

Când $b = \omega_0$ rădăcinile ecuației caracteristice sunt reale și confundate. Soluția generală a ecuației diferențiale (11.3) este

$$x = C e^{-bt}. \quad (11.21)$$

Această mișcare este un caz particular al amortizării aperiodice (figura 11.2).

11.2 Scopul lucrării

Determinarea constantelor care caracterizează oscilațiile amortizate: decrementul logaritmic D , constanta de amortizare b și coeficientul de rezistență r .

Varianta 1

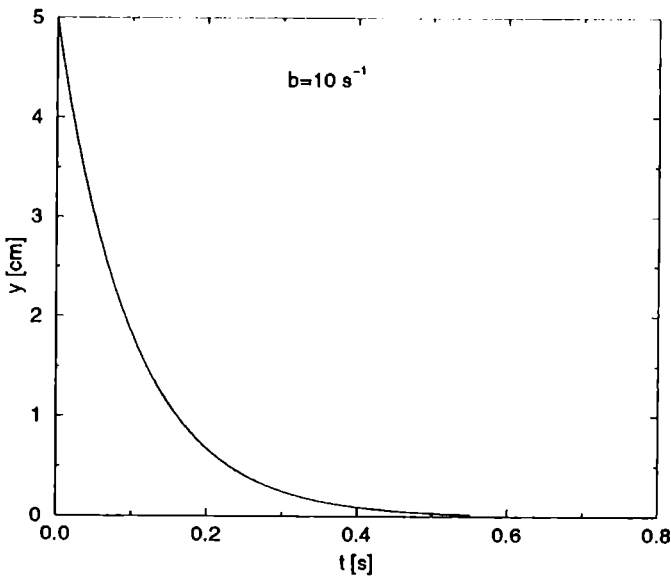


Figura 11.2:

11.3 Dispozitivul experimental

Dispozitivul experimental este constituit dintr-un resort fixat la capătul superior de un suport vertical. De capătul inferior se suspendă un platan. Acest pendul elastic oscilează în interiorul unui cilindru plin cu lichid. Resortul este prevăzut cu un ac indicator ce permite citirea alungirilor resortului pe scala gradată atașată.

Aparate și materiale: un pendul elastic, mase marcate, o scală gradată în milimetri, un cilindru umplut cu lichid, un cronometru.

11.4 Modul de lucru. Prelucrarea datelor experimentale

- Se suspendă de resort o masă marcată m . Se notează poziția de echilibru x_0 a greutății.
- Se deviază greutatea în jos până la o anumită diviziune x și se dă drumul resortului să oscileze. Se cronometrează timpul în care amplitudinea $x - x_0$ se reduce la jumătate ($T_{1/2} = N_0T$). Se notează

numărul N_0 de oscilații complete efectuate în timpul $T_{1/2}$. Diviziunea de pe scală pentru care amplitudinea s-a redus la jumătate este

$$x_0 + \frac{x - x_0}{2} .$$

- Se repetă determinarea de 10 ori.
- Rezultatele măsurărilor se trec în tabelul 11.1.

nr. determinare	$T_{1/2}$ [s]	$T_{1/2}$ [s]	N_0	D	b [s^{-1}]	\bar{r} [kg/s]

Tabelul 11.1:

Decrementul logaritmic se calculează cu formula

$$D = \frac{\ln 2}{N_0} , \quad (11.22)$$

coeficientul de amortizare cu

$$b = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} , \quad (11.23)$$

iar coeficientul de rezistență cu

$$r = 2mb . \quad (11.24)$$

- Se va calcula cu cât la mie se schimbă frecvența oscilațiilor datorită amortizării, adică

$$\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{\omega_0^2}} - 1 \approx -\frac{D^2}{8} \pi^2 = -12,5D^2\%.$$

- Se repetă determinările și pentru alte diviziuni x de pe scala gradată.
- Se repetă experiența și pentru alte mase marcate m .

Varianta 2

Principiul fizic al metodei

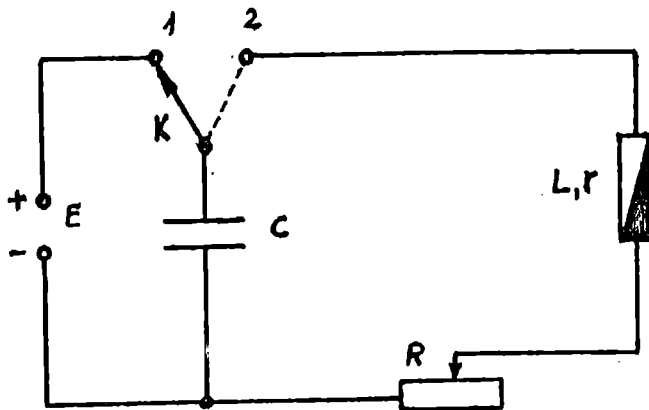


Figura 11.3:

Se consideră circuitul din figura 11.3. Condensatorul de capacitate C este încărcat de la sursa de tensiune continuă E (baterie sau redresor) când comutatorul K este în poziția 1. Trecând comutatorului K în poziția 2 condensatorul se va descărca în circuitul de rezistență totală $R_t = R + r$, unde r este rezistența bobinei. La descărcarea condensatorului, în bobina de inductanță L se generează o tensiune electromotoare de autoinducție ca urmare a variației curentului din circuit (conform legii autoinducției). Această tensiune reîncarcă condensatorul, care se descarcă din nou și procesul se repetă. În circuit se produc astfel oscilații electrice. Circuitul închis format dintr-un condensator, o bobină și o rezistență electrică, în care se pot produce oscilații electromagnetice libere se numește **circuit oscilant**.

Dacă circuitul nu ar avea rezistență, energia câmpului electric al condensatorului s-ar transforma integral în energia câmpului magnetic din bobină. Deoarece o parte din energie se pierde prin căldura degajată prin efect Joule prin rezistența circuitului, oscilațiile electromagnetice se vor amortiza.

Conform legii a doua a lui Kirchhoff suma dintre diferența de potențial de la bornele condensatorului și căderea de tensiune pe rezistența totală a circuitului este egală cu tensiunea electromotoare de autoinducție

$$\frac{Q}{C} + R_t i = -L \frac{di}{dt}, \quad (11.25)$$

unde Q este sarcina de pe una dintre armăturile condensatorului. Dacă sarcina înmagazinată în timpul dt este dQ atunci intensitatea curentului în

circuit va fi

$$i = \frac{dQ}{dt} . \quad (11.26)$$

Derivând în raport cu timpul ecuația (11.25) se obține

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R_t \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0 . \quad (11.27)$$

Notând $b = R_t/(2L)$ (coeficientul de amortizare) și $\omega_0^2 = 1/(LC)$ (pulsatia proprie a circuitului oscilant) ecuația (11.27) devine

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + 2b \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = 0 , \quad (11.28)$$

care este analoagă ecuației diferențiale (11.3). Soluția ei este de forma $i = B \cdot \exp(\rho t)$ ($di/dt = \rho B \cdot \exp(\rho t)$, $d^2 i/dt^2 = \rho^2 B \cdot \exp(\rho t)$). Introducând această soluție în ecuația diferențială (11.27) se obține ecuația caracteristică

$$\rho^2 + 2b\rho + \omega_0^2 = 0 , \quad (11.29)$$

ce are soluțiile

$$\rho_{1,2} = -b \pm \sqrt{b^2 - \omega_0^2} . \quad (11.30)$$

Soluția generală a ecuației diferențiale (11.27) este

$$i = B_1 e^{\rho_1 t} + B_2 e^{\rho_2 t} , \quad (11.31)$$

dacă $\rho_1 \neq \rho_2$.

Conform discuției de la începutul lucrării, dacă $b \geq \omega_0$ sau $R_t \geq 2\sqrt{L/C}$ descărcarea condensatorului este aperiodică. În acest caz rădăcinile ecuației caracteristice sunt reale și distincte. Soluția generală a ecuației diferențiale (11.27) este

$$i = e^{-bt} \left(B_1 e^{-\sqrt{b^2 - \omega_0^2} t} + B_2 e^{\sqrt{b^2 - \omega_0^2} t} \right) . \quad (11.32)$$

Când $R_t < 2\sqrt{L/C}$ ($b < \omega_0$) descărcarea condensatorului este periodică. În acest caz rădăcinile ecuației caracteristice sunt complex conjugate. Dacă cele două constante de integrare $B_{1,2}$ sunt complex conjugate

$$B_1 = \frac{1}{2} I_0 e^{i\alpha} , \quad B_2 = B_1^* , \quad (11.33)$$

soluția generală a ecuației diferențiale (11.27) devine

$$i(t) = I_0 e^{-bt} \cos \left(\sqrt{\omega_0^2 - b^2} t + \alpha \right) . \quad (11.34)$$

Constantele reale I_0 și α se determină din condițiile inițiale. De asemenea periodic variază și intensitatea curentului electric din circuit, diferența de potențial de la bornele condensatorului și căderea de tensiune de la bornele rezistorului. Termenul $I_0 \cdot \exp(-bt)$, ce reprezintă amplitudinea oscilațiilor curentului electric scade exponențial cu timpul. Deoarece $b = R_t/(2L)$ rezultă că amortizarea oscilațiilor este cu atât mai pronunțată cu cât rezistența totală R_t a circuitului este mai mare și cu cât inductanța circuitului este mai mică. Perioada oscilațiilor amortizate este

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - b^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R_t}{2L}\right)^2}}. \quad (11.35)$$

Decrementul logaritmic D este egal cu logaritmul natural al raportului a două amplitudini succesive (separate printr-o perioadă)

$$D = \ln \left(\frac{I_0 e^{-bt}}{I_0 e^{-b(t+T)}} \right) = bT. \quad (11.36)$$

Timpul de relaxare are expresia

$$\tau = \frac{1}{b} = \frac{2L}{R_t}. \quad (11.37)$$

În concluzie circuitul oscilant este analog pendulului elastic. Între măsurile caracteristice se poate stabili corespondența prezentată în tabelul 11.2.

11.5 Dispozitivul experimental

Pentru a studia oscilațiile electrice amortizate se folosește montajul din figura 11.4. Când comutatorul K_1 este în poziția 1 condensatorul de capacitate C este încărcat de la sursa de tensiune continuă E . Prin trecerea comutatorului K_1 în poziția 2 se realizează circuitul oscilant. Rezistența totală a circuitului este suma dintre rezistența rezistorului R și rezistența r a sârmei spirelor bobinei ($R_t = R + r$). Când comutatorul K_2 este în poziția 1 pe ecranul osciloscopului este vizualizată curba variației în timp a tensiunii la bornele condensatorului. Atunci când comutatorul K_2 este în poziția 2 pe ecranul osciloscopului este vizualizată curba variației în timp a intensității (i) curentului prin circuit și a tensiunii ($u_R = Ri$) la bornele rezistorului R .

mărimi mecanice	mărimi electrice
elongația x	sarcina electrică q
masa m	inductanța L
constanta elastică k	inversul capacității $1/C$
coeficient de rezistență r	rezistența totală a circuitului R_t
viteza $v = dx/dt$	intensitatea curentului $i = dQ/dt$
energia cinetică $E_c = mv^2/2$	energia câmpului magnetic din bobină $W_m = Li^2/2$
energia potențială de deformare $E_p = kx^2/2$	energia câmpului electric din condensator $W_e = q^2/(2C)$
energia mecanică $E = E_c + E_p$	energia câmpului electromagnetic $W = W_m + W_e$

Tabelul 11.2:

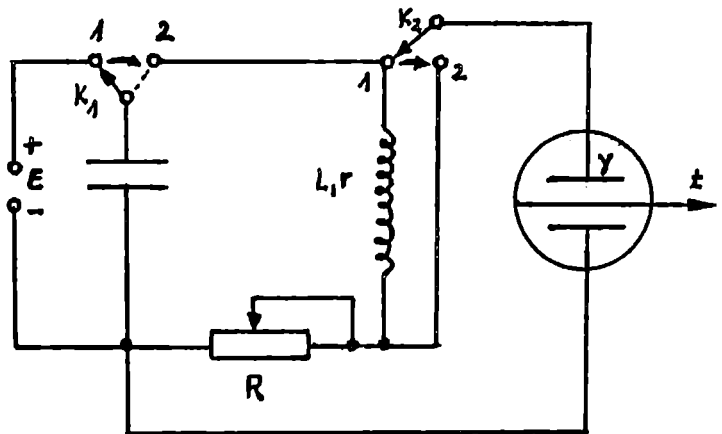


Figura 11.4:

Aparate și materiale: o sursă de tensiune continuuă, un osciloscop, un condensator de capacitate cunoscută, o bobină de rezistență și inductanță cunoscute, un rezistor de rezistență variabilă, 2 comutatoare, fire de conexiune.

11.6 Modul de lucru. Prelucrarea datelor experimentale

- Se realizează montajul electric prezentat anterior.
- Se conectează osciloscopul la rețeaua de energie electrică și se pune la punct focalizarea și strălucirea spotului.
- Se alege o anumită valoare a rezistenței variabile.
- Se încarcă condensatorul prin așezarea comutatorului K_1 în poziția 1.
- Se comută K_1 și K_2 în poziția 2. Pe ecranul osciloscopului vor fi vizualizate oscilațiile amortizate ce se produc în circuit.
- Se măsoară două amplitudini succesive A_1 și A_2 . Se determină decrementul logaritmic D cu formula

$$D = \ln \left(\frac{A_1}{A_2} \right) . \quad (11.38)$$

Se repetă măsurările pentru alte amplitudini succesive.

- Se execută 10 determinări.
- Rezultatele măsurătorilor se trec în tabelul 11.3.

nr. determinare	D	\bar{D}	$S_{\bar{D}}$	T_{exp} [s]	T_{teor} [s]

Tabelul 11.3:

cu

$$\bar{D} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n D_i , \quad (11.39)$$

$$S_{\bar{D}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\bar{D} - D_i)^2}{n(n-1)}} , \quad (11.40)$$

unde n este numărul de determinări realizate.

$$b = \frac{R + r}{2L}, \quad (11.41)$$

$$T_{exp} = \frac{\bar{D}}{b}, \quad T_{teor} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R_t}{2L}\right)^2}}. \quad (11.42)$$

- Se repetă determinările pentru altă valoare a rezistenței R .

DETERMINAREA DENSITĂȚII LICHIDELOR CU BALANȚA MOHR-WESTPHALL

12.1 Teoria lucrării

Conform legii lui Arhimede, un lichid acționează asupra unui corp cufundat în el cu o forță (F_A) egală cu greutatea volumului de lichid dezlucuit de corp

$$F_A = \rho V g , \quad (12.1)$$

unde ρ este densitatea lichidului, iar V volumului de lichid dezlucuit de corp. Forța F_A se numește forță arhimedică. Dacă același corp este cufundat până la același nivel într-un alt lichid de densitate ρ' , forța arhimedică are expresia

$$F'_A = \rho' V g . \quad (12.2)$$

Împărțind cele două relații se obține pentru densitatea ρ' expresia

$$\rho' = \rho \frac{F'_A}{F_A} .$$

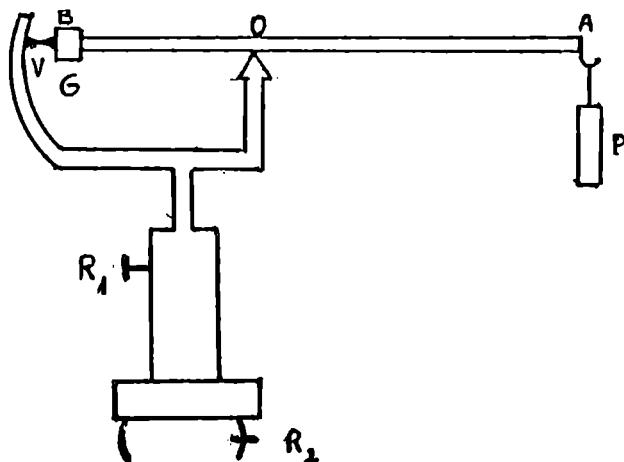


Figura 12.1:

12.2 Scopul lucrării

Măsurarea directă a densității relative a unui lichid (mai dens decât apa, respectiv mai puțin dens decât apa).

12.3 Dispozitivul experimental

Balanța Mohr-Westphall are două brațe de lungimi inegale (figura 12.1). Brațul scurt OB este încărcat cu o greutate G care se poate deplasa prin înșurubare, iar cel lung OA cu un plutitor P . Brațul lung al balanței Mohr-Westphall este împărțit în 10 părți egale. Balanța este prevăzută cu un șurub R_1 pentru reglarea înălțimii sale și cu un șurub R_2 pentru reglarea orizontalității. Vârful V servește la stabilirea poziției de echilibru al balanței. Balanța este prevăzută de asemenea, cu trei călăreți de greutate a , $a/10$ și $a/100$. Greutatea călărețului mare (a) este egală cu greutatea volumului de apă distilată dezlocuit de plutitor când acesta este cufundat în întregime în apă distilată.

$$a = \rho_{H_2O} V_P g, \quad (12.3)$$

unde V_P este volumul plutitorului, iar ρ_{H_2O} este densitatea apei distilate. Călăreții pot fi așezați pe oricare din cele 10 diviziuni ale balanței.

Aparate și materiale: o balanță Mohr-Westphall, sticle cu lichidele ale căror densități se determină, un pahar cu apă distilată.

12.4 Modul de lucru. Prelucrarea datelor experimentale

- Se scoate balanța din cutie și se montează.
- Se potrivește înălțimea balanței prin manevrarea șurubului R_1 . Orizontalitatea ei se realizează cu ajutorul șurubului R_2 .
- Se echilibrează balanța în aer, manevrând greutatea G . În decursul operațiilor ulterioare poziția lui G nu se mai modifică.
- Se cufundă plutitorul P în paharul cu apă distilată. Echilibrul balanței se stabilește prin adăugarea călărețului mare de greutate a pe diviziunea 10 a brațului OA (la capătul brațului). În cazul în care echilibrul nu este realizat, plutitorul va fi cufundat parțial. Pentru a menține același volum de lichid dezlocuit, în operațiile ulterioare plutitorul trebuie cufundat în lichidul a cărui densitate se determină, până la același nivel la care a fost cufundat în apa distilată.
- După ștergerea și uscarea plutitorului, acesta se va cufunda în lichidul a cărui densitate se determină. Dacă lichidul este mai dens decât apa brațul OA se va ridica. Pentru a reechilibra balanța lăsăm călărețul a pe diviziunea 10 și adăugăm ceilalți doi călăreți pe diviziunile potrivite. Fie x respectiv y diviziunile pe care sunt așezați călărețul $a/10$ și respectiv cel de greutate $a/100$. Suma momentelor forțelor de greutate ale călăreților față de punctul O este

$$a \cdot 10 + \frac{a}{10} \cdot x + \frac{a}{100} \cdot y = 10a \left(1 + \frac{x}{100} + \frac{y}{1000} \right) = 10a \cdot 1,0xy$$

Momentul forței arhimedice față de punctul O are expresia

$$\rho V_P g \cdot 10. \quad (12.4)$$

Conform relației (12.3) expresia (12.4) devine

$$\frac{\rho}{\rho_{H_2O}} \cdot 10a.$$

Balanța fiind echilibrată suma momentelor forțelor de greutate ale călăreților față de punctul O este egală cu momentul forței arhimedice față de același punct O

$$10a \cdot 1,0xy = \frac{\rho}{\rho_{H_2O}} \cdot 10a .$$

Deci densitatea relativă a lichidului este

$$d_{rel} = \frac{\rho}{\rho_{H_2O}} = 1,0xy . \quad (12.5)$$

Dacă lichidul este mai puțin dens decât apa, brațul OA va coborâ. Echilibrul se restabilește printr-o aranjare potrivită a călăreților a , $a/10$ și $a/100$. Dacă x , y și z sunt diviziunile pe care sunt așezați cei trei călăreți a , $a/10$ și $a/100$ la echilibrul balanței putem scrie ecuația

$$a \cdot x + \frac{a}{10} \cdot y + \frac{a}{100} \cdot z = \frac{\rho}{\rho_{H_2O}} \cdot 10a .$$

Densitatea relativă a lichidului va fi dată de

$$d_{rel} = \frac{\rho}{\rho_{H_2O}} = 0,xyz . \quad (12.6)$$

În lucrare se determină: 1) densitățile unor soluții de sare gemă în apă; 2) densitățile unor soluții de alcool în apă. În cazul fiecărei soluții se repetă determinarea de 10 ori. Datele experimentale culese se trec în tabelul 12.1.

nr. determ.	d_{rel}	d_{rel}	$S_{d_{rel}}$

Tabelul 12.1:

unde

$$\overline{d_{rel}} = \frac{\sum_{i=1}^n d_{rel_i}}{n} , \quad n \geq 10 , \quad (12.7)$$

$$S_{d_{rel}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\overline{d_{rel}} - d_{rel_i})^2}{n(n-1)}} , \quad n \geq 10 , \quad (12.8)$$

Rezultatul final se scrie sub forma

$$d_{rel} = \overline{d_{rel}} \pm S_{d_{rel}} . \quad (12.9)$$

- Se trasează grafic curba variației densității cu concentrația, în ambele cazuri.

- După terminarea determinărilor se demontează balanța și se introduce în cutia ei, iar călăreții în cutiuța lor.

Pentru a evita amestecarea soluțiilor este preferabil ca determinările să se facă în sticlele de păstrare a soluțiilor, cufundându-se plutitorul complet în lichid.

DETERMINAREA ACCELERĂȚIEI GRAVITAȚIONALE CU PENDULUL MATEMATIC

13.1 Teoria lucrării

Pendulul matematic (simplu sau gravitațional) este un corp idealizat (reduc la un punct material) suspendat de un fir inextensibil și de masă neglijabilă. Când pendulul simplu de masă m și lungime l (figura 13.1) este deplasat din poziția sa de echilibru, acesta va forma cu verticala un unghi θ numit elongație unghiulară. Lăsat liber va oscila în plan vertical datorită forței de greutate.

Forțele care acționează asupra punctului material sunt forța de greutate $\vec{G} = m\vec{g}$ și tensiunea \vec{T} din fir. Componenta greutății pe direcția firului este $G_n = mg \cos \theta$ iar componenta tangențială $G_t = mg \sin \theta$. Componenta normală G_n este compensată de tensiunea din fir. Componenta tangențială G_t este forța de revenire care acționează asupra pendulului pentru a-l readuce în poziția de echilibru

$$F = -mg \sin \theta . \quad (13.1)$$

Semnul minus indică faptul că această forță readuce corpul la poziția de echilibru. Dacă unghiul θ este mic atunci valoarea lui $\sin \theta$ este foarte apropiată de valoarea lui θ exprimată în radiani. Deci pentru unghiuri mai mici de 6° putem scrie $\sin \theta \simeq \theta$ când θ este exprimat în radiani. Pentru

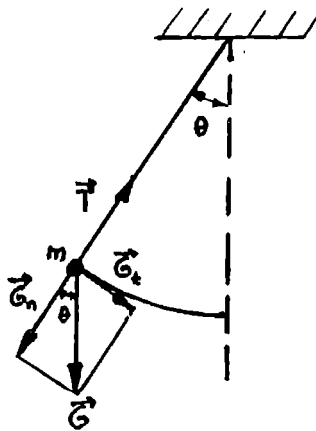


Figura 13.1:

unghiuri la centru mici, arcul de cerc este aproximativ egal cu coarda

$$\theta \simeq \frac{x}{l}, \quad (13.2)$$

unde x reprezintă distanța de la punctul material la poziția de echilibru măsurată pe cerc ($x > 0$ în dreapta poziției de echilibru și $x < 0$ în stânga poziției de echilibru). Această distanță se numește **elongație**. În consecință forța de revenire are expresia

$$F = -\frac{mg}{l}x = -kx, \quad (13.3)$$

unde semnul minus indică faptul că această forță este totdeauna de sens opus elongației. Deci pentru elongații unghiulare mici, forța de revenire spre poziția de echilibru este aproximativ de tip elastic (forță cvasielastice) și mișcarea pendului matematic poate fi considerată o mișcare oscilatorie armonică. Constanta elastică k a pendului simplu având expresia $k = (mg)/l$ rezultă pentru perioada sa expresia

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (13.4)$$

Din relația (13.4) rezultă că perioada pendului matematic este independentă de masa acestuia. În cazul unghiurilor mici, perioada de oscilație a pendului simplu nu depinde de amplitudinea (A) oscilației. În acest caz

oscilațiile se numesc **izocrone**. De asemenea, perioada de oscilație nu depinde de natura substanței din care este realizat pendulul. Relația (13.4) arată că perioada de oscilație a pendulului matematic este proporțională cu rădăcina pătrată a lungimii pendulului și invers proporțională cu rădăcina pătrată a accelerației gravitaționale.

Mișcarea pendulului matematic este descrisă de ecuația

$$m\ddot{x} = F ,$$

sau

$$\ddot{x} + \frac{g}{l}x = 0 .$$

Notând $\omega^2 = g/l$, soluția acestei ecuații este

$$x = A \sin(\omega t + \alpha) .$$

Constantele de integrare A și α se determină din condițiile inițiale. Mărimea ω are semnificație de pulsație ($\omega = 2\pi/T$). Ecuația diferențială în $\theta = x/l$ este

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0 ,$$

a cărei soluție este de forma

$$\theta = \Theta \sin(\omega t + \gamma) .$$

Constantele de integrare Θ (amplitudinea unghiulară) și γ (faza inițială a oscilației) se determină din condițiile inițiale.

13.2 Scopul lucrării

Determinarea accelerației gravitaționale folosind pendulul matematic.

13.3 Dispozitivul experimental

Dispozitivul experimental, format dintr-un suport pe care este fixat un pendul bifilar (ce conservă planul de oscilație) este reprezentat în figura 13.2.

Aparate și materiale: un pendul bifilar, un cronometru, o riglă, un cârlig cu o greutate pentru scurtarea lungimii pendulului.

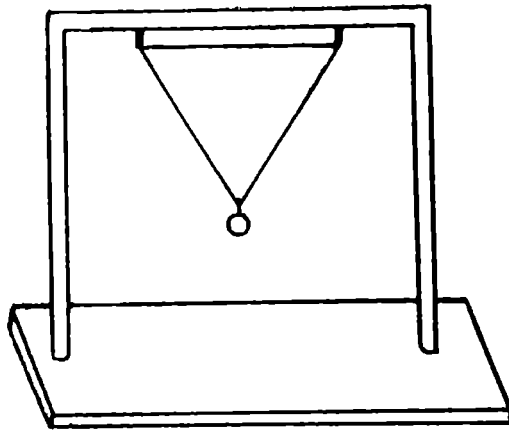


Figura 13.2:

13.4 Modul de lucru. Prelucrarea datelor experimentale

- Se scoate pendulul din poziția de echilibru, sub un unghi mai mic de 6° și se lasă să oscileze.
- Stabilim cu privirea o anumită poziție a pendulului în raport cu cadrul, poziție pe care o luăm drept referință, și declanșăm cronometrul. Numărăm circa $n = 50 \div 70$ oscilații complete și oprim cronometrul. Fie t timpul în care sunt efectuate cele n oscilații complete. Se calculează perioada de oscilație

$$T = \frac{t}{n}.$$

Se repetă operația de 10 ori, numărându-se de fiecare dată alt număr de oscilații.

- Se determină lungimea l a pendulului. În acest scop se măsoară baza (b) și una din laturile (d) triunghiului isoscel format de fir. Lungimea l a pendulului este dată de

$$l = \sqrt{d^2 - \frac{b^2}{4}} \quad (13.5)$$

- Cu ajutorul unui cârlig cu o greutate se micșorează lungimea pendulului. Se determină perioada și lungimea pendulului nou format.
- Datele experimentale culese se trec în tabelul 13.1.

nr. determ.	d [cm]	l [cm]	t [s]	n	T [s]	\bar{T} [s]	\bar{g} [m/s ²]	$S_{\bar{g}}$ [m/s ²]

Tabelul 13.1:

unde

$$\bar{g} = \frac{4\pi^2 l}{\bar{T}^2}, \quad (13.6)$$

$$S_{\bar{g}} = \frac{8\pi^2 l}{\bar{T}^3} S_{\bar{T}}, \quad (13.7)$$

cu

$$S_{\bar{T}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (\bar{T} - T_i)^2}{N(N-1)}}, \quad N \geq 10, \quad (13.8)$$

unde N este numărul de determinări. Rezultatul final se scrie sub forma

$$g = \bar{g} \pm S_{\bar{g}}. \quad (13.9)$$

DETERMINAREA ACCELERĂȚIEI GRAVITAȚIONALE CU PENDULUL FIZIC KATER

14.1 Teoria lucrării

Pendulul fizic este un corp rigid care poate oscila sub acțiunea greutății sale în jurul unei axe orizontale fixe ce nu trece prin centrul său de greutate (figura 14.1). Fiecare din punctele materiale ce alcătuiesc pendulul fizic oscilează ca și pendulul matematic. Dacă ar fi izolate ar oscila conform legilor pendulului matematic. Perioada de oscilație a pendulului matematic are expresia

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (14.1)$$

Pendulul fizic fiind un corp rigid, între punctele materiale care îl alcătuiesc se exercită forțe care împiedică mișcarea independentă a acestor puncte. Deci perioada de oscilație a pendulului fizic nu se poate calcula cu relația (14.1).

Punctul O din figura 14.1 este numit punct de suspensie. Punctul C este centrul de greutate al corpului rigid. Notăm cu d distanța dintre centrul de greutate și punctul de suspensie. Dacă scoatem pendulul fizic din poziția de echilibru, dreapta ce trece prin punctele O și C face unghiul θ cu verticala. Asupra corpului acționează greutatea sa $\vec{G} = m\vec{g}$ în centrul de greutate și reacțiunea $\vec{R} = -\vec{G}$ în punctul de suspensie O . Aceste forțe formează un cuplu care rotește corpul în jurul unei axe perpendiculare pe planul

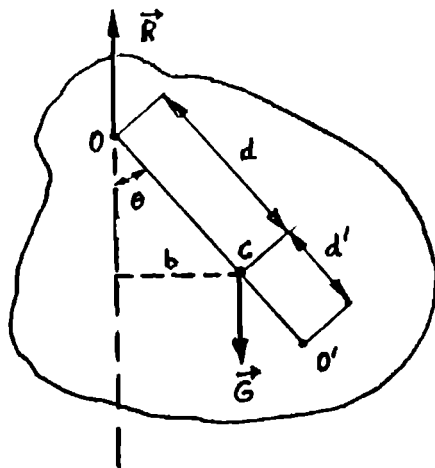


Figura 14.1:

cuplului. Această axă poartă numele de axă de rotație. Brațul cuplului are expresia

$$b = d \sin \theta . \quad (14.2)$$

Momentul cuplului este

$$M = -mgb = -mgd \sin \theta . \quad (14.3)$$

Semnul minus indică faptul că acest moment tinde să readucă corpul în poziția de echilibru. Din ecuația momentului cinetic rezultă ecuația fundamentală pentru mișcarea de rotație

$$I \frac{d^2 \theta}{dt^2} = M_{\parallel} , \quad (14.4)$$

unde I este momentul de inerție al corpului față de axa de rotație, $d^2 \theta / dt^2 = \ddot{\theta}$ accelerația unghiulară a mișcării de rotație a corpului. M_{\parallel} este momentul forțelor în raport cu axa de rotație, adică proiecția pe axa de rotație a momentului resultant \vec{M} , calculat în raport cu un punct de pe axă. Această ecuație este analogă ecuației

$$m \frac{dv}{dt} = F ,$$

pentru mișcarea de translație. În cazul pendulului fizic ecuația (14.4) se scrie

$$I \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -mgd \sin \theta . \quad (14.5)$$

Dacă unghiul θ este mic $\sin \theta \simeq \theta$. În aceste condiții ecuația (14.5) devine

$$\ddot{\theta} + \frac{mgd}{I}\theta = 0. \quad (14.6)$$

Notând $\omega^2 = mgd/I$ obținem ecuația diferențială

$$\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0,$$

a cărei soluție este de forma

$$\theta = \Theta \sin(\omega t + \gamma).$$

Constantele de integrare Θ (amplitudinea unghiulară) și γ (faza inițială a oscilației) se determină din condițiile inițiale. Mărimea ω are semnificație de pulsație ($\omega = 2\pi/T$). În consecință, perioada pendulului fizic este

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}. \quad (14.7)$$

Perioada pendulului fizic este egală cu perioada unui pendul matematic de lungime

$$l_r = \frac{I}{md}. \quad (14.8)$$

Această lungime se numește **lungimea redusă** a pendulului fizic.

Conform teoremei lui Steiner momentul de inerție I al corpului rigid față de axa de rotație ce nu trece prin centrul de greutate este egal cu suma dintre momentul de inerție I_0 al corpului față de o axă ce trece prin centrul de greutate și este paralelă cu axa de rotație și momentul md^2 al centrului de greutate față de axa de rotație

$$I = I_0 + md^2. \quad (14.9)$$

Astfel, perioada pendulului fizic devine

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_0 + md^2}{mgd}}. \quad (14.10)$$

Dacă se suspendă corpul în punctul O' perioada pendulului fizic nou format este

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{I_0 + md'^2}{mgd'}}. \quad (14.11)$$

Dacă $T = T'$ atunci $l_r = d + d'$, deci lungimea redusă a pendulului fizic este egală cu distanța dintre punctele de suspensie O și O' . În acest caz punctul de suspensie O' se numește centru de oscilație.

Eliminând momentul de inerție I_0 , din relațiile (14.10) și (14.11) se obține

$$g = \frac{4\pi^2(d^2 - d'^2)}{dT^2 - d'T'^2} \quad (14.12)$$

14.2 Scopul lucrării

Determinarea accelerației gravitaționale cu ajutorul pendulului fizic.

14.3 Dispozitivul experimental

Pendulul Kater este un pendul fizic format dintr-o tijă gradată pe care glisează două greutatea mari P și P' , două greutatea mici p și p' și două cuțite O și O' care fixează pozițiile punctelor de suspensie O și O' din figura 14.2.

Determinarea accelerației gravitaționale cu relația (14.12) presupune cunoașterea distanțelor d și d' , adică a distanțelor de la centrul de greutate la punctele de suspensie O , respectiv O' .

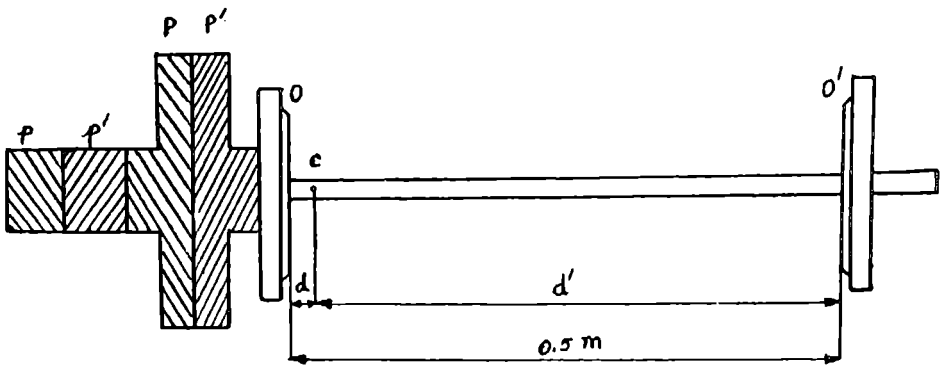


Figura 14.2:

Pendulul fizic propus în această lucrare este reprezentat în figura 14.2. În cazul său distanțele d' și d au următoarele valori: $d' = 0,427$ m iar $d = 0,073$ m.

Aparate și materiale: un pendul Kater, un cronometru.

14.4 Modul de lucru. Prelucrarea datelor experimentale

- Se verifică dispunerea greutăților P , P' , p și p' pe tijă, conform figurii 14.2.
- Se suspendă pendulul pe cuțitul O .
- Se scoate pendulul din poziția de echilibru, sub un unghi mai mic de 6° și se lasă să oscileze.
- Stabilim cu privire o anumită poziție a pendulului în raport cu cadrul, poziție pe care o luăm drept referință, și declanșăm cronometrul. Numărăm circa $N = 30 \div 50$ oscilații complete și oprim cronometrul. Fie t timpul în care s-au efectuat cele N oscilații complete numărate. Perioada de oscilație se calculează cu relația

$$T = \frac{t}{N}.$$

Se repetă operația de 10 ori.

- Se întoarce pendulul și se sprijină pe celălalt cuțit. Se repetă identic operația precedentă, gășind perioada $T' = t'/N$. t' este timpul în care s-au efectuat cele N oscilații complete când pendulul este sprijinit pe noul cuțit.
- Datele experimentale culese se trec în tabelul 14.1.

nr. determ.	N	t [s]	\bar{t} [s]	t' [s]	\bar{t}' [s]	\bar{g} [m/s ²]	$S_{\bar{g}}$ [m/s ²]

Tabelul 14.1:

unde

$$\bar{g} = \frac{4\pi^2 N^2 (d^2 - d'^2)}{d\bar{t}^2 - d'\bar{t}'^2}, \quad (14.13)$$

$$S_{\bar{g}} = \frac{8\pi^2 N^2 (d^2 - d'^2)}{(d\bar{t}^2 - d'\bar{t}'^2)^2} \sqrt{(d\bar{t})^2 S_{\bar{t}}^2 + (d'\bar{t}')^2 S_{\bar{t}'}^2}, \quad (14.14)$$

cu

$$S_{\bar{t}}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\bar{t} - t_i)^2}{n(n-1)}, \quad n \geq 10, \quad (14.15)$$

$$S_{\bar{t}}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\bar{t} - t'_i)^2}{n(n-1)}, \quad n \geq 10, \quad (14.16)$$

unde n este numărul de determinări. Rezultatul final se scrie sub forma

$$g = \bar{g} \pm S_{\bar{g}}. \quad (14.17)$$

DETERMINAREA MOMENTULUI DE INERȚIE AL UNUI CORP CU AJUTORUL PENDULULUI DE TORSIUNE HARTL

15.1 Teoria lucrării

Pendulul de torsiune este un corp rigid care execută oscilații de torsiune în jurul firului de care este suspendat (figura 15.1).

Firul este răsucit cu ajutorul unui cuplu de forțe. Lăsat liber el va efectua oscilații de torsiune. Pentru unghiuri θ de răsucire mici, momentul forțelor elastice care se opun răsucirii (torsionării) firului este proporțional cu unghiul (măsurat în radiani)

$$M = -C\theta, \quad (15.1)$$

unde C este constanta de torsiune (momentul director) a firului. Semnul minus indică faptul că acest moment tinde să readucă firul în poziția de echilibru. Dacă neglijăm forțele de frecare, mișcarea de rotație a corpului rigid suspendat de fir este descrisă de ecuația

$$I \frac{d^2 \theta}{dt^2} = M, \quad (15.2)$$

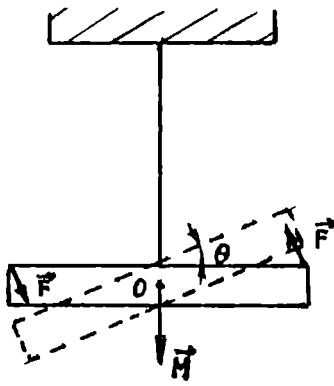


Figura 15.1:

sau

$$\ddot{\theta} + \frac{C}{I}\theta = 0, \quad (15.3)$$

unde I este momentul de inerție al corpului față de axa de rotație.

Prin comparație cu ecuația oscilatorului armonic ($\ddot{x} + \omega^2 x = 0$) rezultă pentru perioada oscilațiilor de torsiune expresia

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{C}}. \quad (15.4)$$

Pentru a elimina constanta de torsiune C , în general necunoscută, se adaugă solidului dat un altul de moment de inerție I' . Perioada pendului nou format este

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{I + I'}{C}}. \quad (15.5)$$

Ridicând la pătrat relațiile (15.4) și (15.5) și împărțindu-le obținem pentru I' expresia

$$I' = I \left[\left(\frac{T'}{T} \right)^2 - 1 \right]. \quad (15.6)$$

15.2 Scopul lucrării

Determinarea momentelor de inerție ale unor corpuri cu ajutorul pendulului Hartl.

15.3 Dispozitivul experimental

Pendulul Hartl este un pendul de torsiune compus dintr-un dispozitiv în formă de cruce suspendat de un suport prin intermediul unei lame înguste de oțel. Momentul de inerție al dispozitivului în formă de cruce este $I = 13,966 \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.

Aparate și materiale: un pendul Hartl, un disc din aluminiu, un disc din oțel, un inel din oțel, un cronometru.

15.4 Modul de lucru. Prelucrarea datelor experimentale

- Se răsuțește dispozitivul cu un unghi mai mic de 6° . Se cronometrează timpul t în care se efectuează $N = 10$ oscilații complete. Perioada proprie de oscilație a dispozitivului este $T = t/N$. Se repetă determinările de 10 ori.
- Se așează pe dispozitiv corpul al cărui moment de inerție se determină. Se repetă operația precedentă, găsind perioada $T' = t'/N$.

nr. determ.	t [s]	\bar{t} [s]	t' [s]	\bar{t}' [s]	\bar{T}' [kg·m ²]	$S_{\bar{T}'}$ [kg·m ²]

Tabelul 15.1:

- Datele culese se trec în tabelul 15.1.

unde

$$\bar{T}' = I \left[\left(\frac{\bar{t}'}{\bar{t}} \right)^2 - 1 \right], \quad (15.7)$$

iar

$$S_{\bar{T}'} = 2I \left(\frac{\bar{t}'}{\bar{t}} \right)^2 \sqrt{\frac{S_{\bar{t}'}^2}{\bar{t}'^2} + \frac{S_{\bar{t}}^2}{\bar{t}^2}}, \quad (15.8)$$

(conform formulei de propagare a erorilor).

- Rezultatul final se scrie sub forma

$$I' = \left(\bar{T}' \pm S_{\bar{T}'} \right) \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \quad (15.9)$$

16

DETERMINAREA MOMENTULUI DE INERȚIE AL UNUI CORP CU AJUTORUL PENDULULUI DE TORSIUNE

16.1 Teoria lucrării

Pendulul de torsiune este un corp rigid ce poate executa oscilații de torsiune în jurul firului de care este suspendat, când acesta este răsucit (figura 16.1).

Când firul este răsucit (torsionat) cu un unghi de răsucire mic, momentul forțelor elastice ce se opun răsucirii firului este proporțional cu unghiul de răsucire exprimat în radiani

$$M = -C\theta, \quad (16.1)$$

unde C este constanta de torsiune (momentul director) a firului. În SI unitatea de măsură a constantei de torsiune este $N \cdot m/rad$. Semnul minus indică faptul că acest moment tinde să readucă firul în poziția de echilibru.

Mișcarea de rotație a solidului rigid este descrisă de ecuația

$$I\ddot{\theta} = -C\theta, \quad (16.2)$$

sau

$$\ddot{\theta} + \frac{C}{I}\theta = 0, \quad (16.3)$$

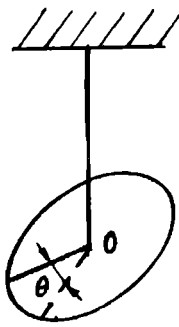


Figura 16.1:

unde I este momentul de inerție al corpului față de axa de rotație. Notând $\omega^2 = C/I$ ecuația diferențială (16.3) devine

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \theta = 0, \quad (16.4)$$

ce are soluții de tipul

$$\begin{aligned} \theta &= A e^{rt}, & (16.5) \\ (\dot{\theta} &= A r e^{rt}, \quad \ddot{\theta} = A r^2 e^{rt}). \end{aligned}$$

Introducând această soluție în ecuația diferențială (16.4) se obține ecuația caracteristică a ecuației diferențiale

$$r^2 + \omega^2 = 0, \quad (16.6)$$

cu soluțiile $r_{1,2} = \pm i\omega$. Soluția generală a ecuației diferențiale (16.4) este

$$\theta = A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t}. \quad (16.7)$$

Dacă se aleg constantele de integrare $A_{1,2}$ complex conjugate între ele

$$A_1 = \frac{1}{2} \Theta e^{i\alpha}, \quad A_2 = \frac{1}{2} \Theta e^{-i\alpha},$$

cu Θ și α constante reale, soluția generală a ecuației diferențiale (16.4) are forma

$$\theta = \Theta \cos(\omega t + \alpha), \quad (16.8)$$

unde constantele Θ și α se determină din condițiile inițiale. Pentru obținerea acestei expresii s-a folosit formula Euler

$$2 \cos \phi = e^{i\phi} + e^{-i\phi} .$$

Mărimea ω are semnificația fizică de pulsație, deci perioada oscilațiilor de torsiune are expresia

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{C}} . \quad (16.9)$$

Momentul de inerție al corpului față de axa de rotație, care în general nu trece prin centrul său de greutate se determină cu ajutorul teoremei Steiner. El este deci egal cu suma dintre momentul de inerție al corpului față de o axă ce trece prin centrul de greutate al corpului și este paralelă cu axa de rotație și produsul dintre masa corpului și pătratul distanței dintre cele două axe. Când corpul are o formă geometrică simplă (sferă, cilindru, paralelipiped) momentul său de inerție față de axele de simetrie ce trec prin centrul său de greutate se pot calcula. În caz contrar momentul său de inerție se determină experimental. Deoarece în expresia perioadei sunt două necunoscute (I și C) este necesară încă o ecuație. Aceasta se obține prin adăugarea solidului dat a unui alt corp de moment de inerție I_n cunoscut (sau calculat). Perioada noilor oscilații de torsiune este

$$T' = 2\pi \sqrt{\frac{I'}{C}} , \quad (16.10)$$

unde $I' = I + I_n$ este momentul de inerție al sistemului astfel modificat (s-a folosit proprietatea de aditivitate a momentului de inerție). Ridicând la pătrat relațiile (16.9) și (16.10) și împărțindu-le membru cu membru, obținem

$$\frac{T'^2}{T^2} = \frac{I'}{I} . \quad (16.11)$$

16.2 Scopul lucrării

Determinarea momentului de inerție al unui corp cu pendulul de torsiune, precum și a constantei de torsiune a pendulului.

Varianta 1

16.3 Dispozitivul experimental

Solidul al cărui moment de inerție se determină este un disc D pe care se află așezată o bară subțire L , ce are la capete două lăcașuri în care se pot așeza două bile de oțel b (figura 16.2). Deoarece bara L este ușoară, neglijăm momentul ei de inerție. Momentul de inerție al oricăreia dintre sferile din oțel (de rază r și masă m) față de o axă ce trece prin centrul de greutate și este paralelă cu axa de suspensie este

$$\frac{2}{5}mr^2.$$

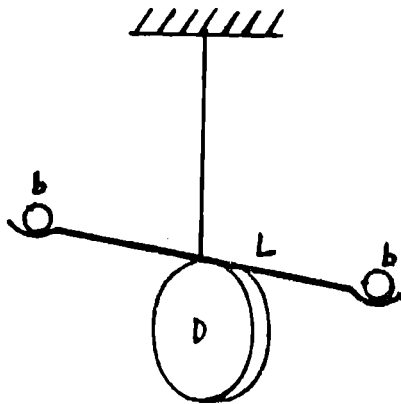


Figura 16.2:

Conform teoremei lui Steiner, momentul de inerție față de axa de suspensie are expresia

$$I_b = \frac{2}{5}mr^2 + mR_0^2, \quad (16.12)$$

unde R_0 este distanța de la centrul bilei la axa de suspensie. Notând cu I momentul de inerție al discului față de axa de suspensie, momentul de inerție I' al sistemului disc+bile este

$$I' = I + 2I_b = I + 2m \left(\frac{2}{5}r^2 + R_0^2 \right). \quad (16.13)$$

Introducând această expresie în relația (16.11) se obține

$$I = \frac{2m(R_0^2 + 2r^2/5)}{T'^2/T^2 - 1}. \quad (16.14)$$

Înlocuind în formula (16.9) momentul de inerție I cu expresia sa (16.14) constanta de torsiune este dată de

$$C = 8\pi^2 m \frac{R_0^2 + 2r^2/5}{T'^2 - T^2}. \quad (16.15)$$

Aparate și materiale: pendulul de torsiune prezentat anterior, 2 perechi de bile de raze diferite, o riglă sau un șubler, un cronometru, o balanță.

16.4 Modul de lucru. Prelucrarea datelor experimentale

- Se determină perioada de oscilație T a sistemului format din discul D și bara L fără bile. Oscilațiile de torsiune se imprimă răsucind cu un unghi de aproximativ 6° pendulul fizic. Perioada de oscilație se determină cu relația

$$T = \frac{t}{N}, \quad (16.16)$$

unde t este timpul în care se efectuează N oscilații de torsiune complete ($N \geq 20$). Se repetă determinările de 10 ori.

- Se adaugă bilele în lăcașurile de pe bara L . Se determină perioada de oscilație T' a sistemului modificat prin adăugarea bilelor. Deoarece în expresia (16.14) intervine raportul perioadelor se va păstra același număr de oscilații N . Deci

$$\frac{T'^2}{T^2} = \frac{t'^2}{t^2},$$

unde t' este timpul în care sistemul disc+bile efectuează cele N oscilații de torsiune complete.

Se repetă determinările de 10 ori.

- Se măsoară și se notează raza unei bile (r) și distanța (R_0) de la centrul unui lăcaș la firul de suspensie. Se cântărește o bilă și se notează valoarea masei m .
- Datele culese se trec în tabelul 16.1.

nr. determ.	t [s]	\bar{t} [s]	t' [s]	\bar{t}' [s]	\bar{I} [kg·m ²]	$S_{\bar{I}}$ [kg·m ²]

Tabelul 16.1:

unde

$$\bar{I} = \frac{2m(R_0^2 + 2r^2/5)}{\bar{t}'^2/\bar{t}^2 - 1}, \quad (16.17)$$

iar

$$S_{\bar{I}} = 4m \frac{\bar{t}'^2}{\bar{t}^2} \frac{R_0^2 + 2r^2/5}{(\bar{t}'^2/\bar{t}^2 - 1)^2} \sqrt{\frac{S_{\bar{t}'}}{\bar{t}'^2} + \frac{S_{\bar{t}}}{\bar{t}^2}}, \quad (16.18)$$

conform formulei de propagare a erorilor.

- Rezultatele finale pentru I și C se scriu sub forma

$$I = (\bar{I} \pm S_{\bar{I}}) \text{ kg} \cdot \text{m}^2. \quad (16.19)$$

$$C = (\bar{C} \pm S_{\bar{C}}) \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{rad}}, \quad (16.20)$$

unde

$$\bar{C} = 8\pi^2 m N^2 \frac{R_0^2 + 2r^2/5}{\bar{t}'^2 - \bar{t}^2}, \quad (16.21)$$

$$S_{\bar{C}} = 16m\pi^2 N^2 \frac{R_0^2 + 2r^2/5}{(\bar{t}'^2 - \bar{t}^2)^2} \sqrt{S_{\bar{t}'}^2 \cdot \bar{t}'^2 + S_{\bar{t}}^2 \cdot \bar{t}^2}. \quad (16.22)$$

- Se compară valoarea momentului de inerție \bar{I} determinată experimental cu (16.17) cu cea calculată cu ajutorul expresiei

$$I_t = \frac{M}{2} R^2, \quad (16.23)$$

dacă discul este fixat vertical, sau

$$I_t = \frac{M}{4} \left(R^2 + \frac{h^2}{3} \right), \quad (16.24)$$

dacă discul este fixat orizontal (figura 16.3). Am notat prin M masa discului, R raza sa, iar h grosimea sa.

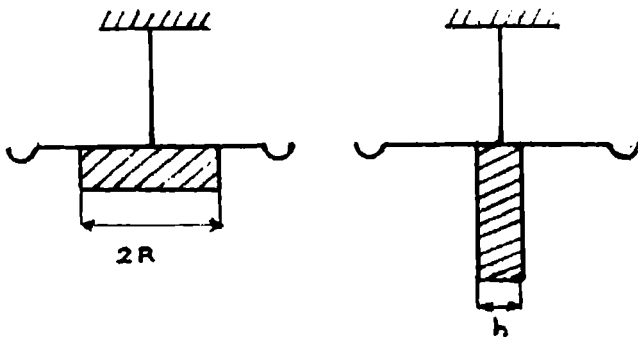


Figura 16.3:

- Se compară valoarea constantei de torsiune \bar{C} determinată experimental cu (16.21) cu cea teoretică determinată cu

$$C_t = \frac{\pi}{32} \frac{G d^4}{l_0}, \quad (16.25)$$

unde l_0 este lungimea firului, d diametrul său, iar G modulul de forfecare, care pentru oțel are valoarea $G = 0,8 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$.

- Se va relua experiența cu cea de a doua pereche de bile.

Varianta 2

16.5 Dispozitivul experimental

Solidul al cărui moment de inerție se determină este o bară metalică B prevăzută cu 4 cuișoare, dispuse simetric față de firul de suspensie (figura 16.4). Pe cuișoarele 1 și 2 sau 3 și 4 se pot așeza doi cilindri de aceeași rază și înălțime.

Momentul de inerție al oricăruia dintre cilindrii de rază R și masă m față de o axă ce trece prin centrul de greutate de-a lungul înălțimii acestuia este

$$I_0 = \frac{1}{2} m R^2.$$

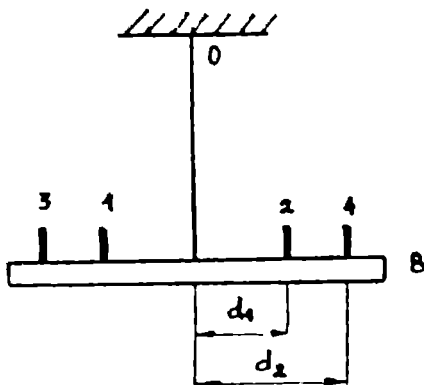


Figura 16.4:

Notând cu I momentul de inerție al barei față de axa de suspensie, momentul de inerție I' al sistemului bară+cilindri este

$$I' = I + 2(I_0 + md_1^2),$$

când cilindrii sunt așezați pe cuișoarele 1 și 2. Introducând această expresie în relația (16.11) se obține

$$I = \frac{2m(R^2/2 + d_1^2)}{T'^2/T^2 - 1}. \quad (16.26)$$

Constanta de torsiune este dată de

$$C = 8\pi^2 m \frac{R^2/2 + d_1^2}{T'^2 - T^2}. \quad (16.27)$$

Aparate și materiale: pendulul de torsiune prezentat anterior, 2 perechi de cilindri de raze diferite, o riglă sau un șubler, un cronometru, o balanță.

16.6 Modul de lucru. Prelucrarea datelor experimentale

- Se determină perioada de oscilație T a sistemului format numai din bara B . Oscilațiile de torsiune se înprună răsucind cu un unghi de

aproximativ 6° pendulul fizic. Perioada de oscilație se determină cu relația

$$T = \frac{t}{N}, \quad (16.28)$$

unde t este timpul în care se efectuează N oscilații de torsiune complete ($N \geq 20$). Se repetă determinările de 10 ori.

- Se așează doi cilindri identici pe cuișoarele 1 și 2. Se determină perioada de oscilație T' a sistemului modificat prin adăugarea cilindrilor. Deoarece în expresia momentului de inerție al barei intervine raportul perioadelor, se va păstra același număr de oscilații N . Deci

$$\frac{T'^2}{T^2} = \frac{t'^2}{t^2},$$

unde t' este timpul în care sistemul bară+cilindri efectuează cele N oscilații de torsiune complete. Se repetă determinările de 10 ori.

- Se măsoară și se notează raza unui cilindru (R) și distanța (d_1) de la cuișorul 1 la firul de suspensie. Se cântărește un cilindru și se notează valoarea masei sale m .
- Datele culese se trec în tabelul 16.2.

nr. determ.	t (s)	\bar{t} (s)	t' (s)	\bar{t}' (s)	I (kg·m ²)	S_I (kg·m ²)

Tabelul 16.2:

unde

$$I = \frac{2m(R^2/2 + d_1^2)}{\bar{t}'^2/\bar{t}^2 - 1}, \quad (16.29)$$

iar,

$$S_I = 4m \left(\frac{\bar{t}'^2}{\bar{t}^2} \right)^2 \frac{R^2/2 + d_1^2}{(\bar{t}'^2/\bar{t}^2 - 1)^2} \sqrt{\frac{S_{\bar{t}'}}{\bar{t}'^2} + \frac{S_{\bar{t}}}{\bar{t}^2}}, \quad (16.30)$$

conform formulei de propagare a erorilor.

- Rezultatele finale pentru I și C se scriu sub forma

$$I = (\bar{I} \pm S_{\bar{I}}) \text{ kg} \cdot \text{m}^2 . \quad (16.31)$$

$$C = (\bar{C} \pm S_{\bar{C}}) \frac{N \cdot m}{\text{rad}} , \quad (16.32)$$

unde

$$\bar{C} = 8\pi^2 m N^2 \frac{R^2/2 + d_1^2}{\bar{t}^2 - \bar{t}^2} , \quad (16.33)$$

$$S_C = 16m\pi^2 N^2 \frac{R^2/2 + d_1^2}{(\bar{t}^2 - \bar{t}^2)^2} \sqrt{S_{\bar{t}}^2 \cdot \bar{t}^2 + S_{\bar{t}}^2 \cdot \bar{t}^2} . \quad (16.34)$$

- Se vor așeza cei doi cilindri pe cuișoarele 3 și 4 și se vor relua determinările. În acest caz se înlocuiește d_1 cu d_2 în formulele de calcul. Se va compara valoarea momentului de inerție al barei determinat în cazul în care cei doi cilindri sunt așezați pe cuișoarele 1 și 2 cu cea obținută când cilindrii sunt așezați pe cuișoarele 3 și 4.
- Se va relua experiența cu cea de a doua pereche de cilindri.

DETERMINAREA MODULULUI DE ELASTICITATE PE BAZA ÎNTINDERII

17.1 Teoria lucrării

Între particulele constituente ale unui solid există forțe de interacțiune care diferă de la solid la solid și care asigură stabilitatea acestuia. Aceste forțe joacă un rol important în manifestarea diverselor proprietăți ale solidelor. Unele dintre aceste proprietăți sunt proprietățile elastice. Ele se manifestă atunci când un corp este deformat sub acțiunea unor forțe exterioare. Deformația se referă la deplasarea din pozițiile de echilibru ale particulelor constituente ale solidului. Dacă această deplasare a fost mică este posibilă revenirea particulelor în pozițiile de echilibru, în lipsa forțelor exterioare. Această deformație ce dispare odată cu încetarea acțiunii forțelor exterioare se numește **deformație elastică**.

Dacă forțele exterioare sunt mari particulele constituente nu mai revin la pozițiile de echilibru, în absența forței exterioare. Această deformație ce nu dispare odată cu încetarea acțiunii forțelor exterioare se numește **deformație plastică**. Ea apare pentru acele valori ale forțelor exterioare ce depășesc o anumită limită de elasticitate.

Deformațiile pot fi de mai multe tipuri: **alungire** (întindere, tracțiune) sau **compresie** (comprimare), **forfecare** (alunecare), **torsiune** (răsucire), **încovoiere** (flexiune).

În limita deformațiilor mici, toate deformațiile satisfac următoarele legi:

- în limita de elasticitate deformația este proporțională cu mărirea forței exterioare;
- schimbarea semnului forței exterioare provoacă numai schimbarea semnului deformației fără să-i modifice valoarea absolută;
- când acționează mai multe forțe exterioare, deformația totală este egală cu suma deformațiilor parțiale.

În toate cazurile, expresia cantitativă a relației dintre forța exterioară și deformație este dată de legea lui Hooke.

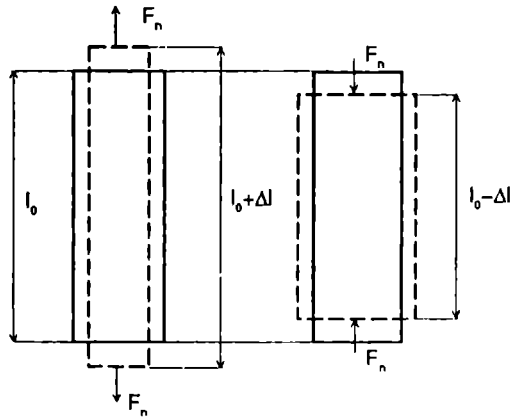


Figura 17.1:

În cazul alungirii respectiv, comprimării (figura 17.1) legea lui Hooke arată că alungirea relativă sau deformația specifică este proporțională cu efortul unitar pentru materialul dat

$$\frac{\Delta l}{l_0} = \frac{1}{E} \frac{F_n}{S_0}, \quad (17.1)$$

unde

- Δl reprezintă alungirea (comprimarea) absolută;
- $\Delta l/l_0$ reprezintă alungirea (comprimarea) relativă;
- F_n reprezintă forța exterioară aplicată perpendicular pe suprafață :

- S_0 reprezintă secțiunea inițială pe care acționează forța;
- E reprezintă modulul de elasticitate (Young);
- F_n/S_0 reprezintă efortul unitar.

La metale modulul de elasticitate este de ordinul 10^{11} N/m².

Dacă reprezentăm grafic efortul unitar în funcție de deformație (alungirea sau comprimarea relativă) obținem curba experimentală din figura 17.2.

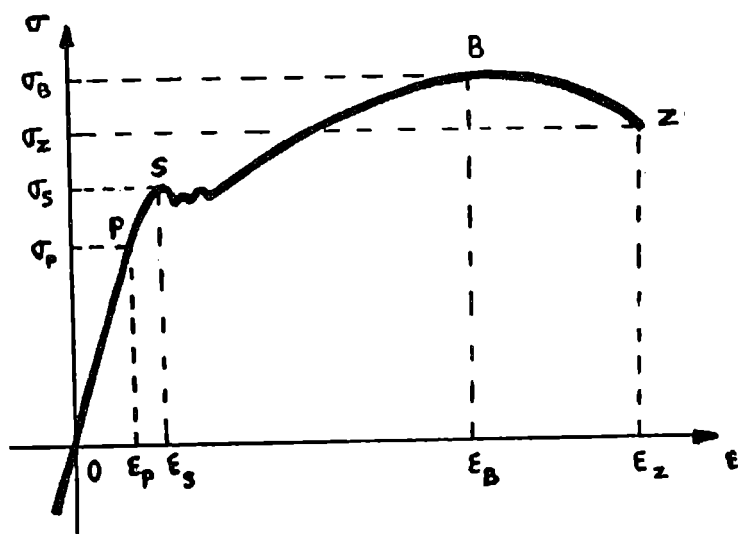


Figura 17.2:

În porțiunea OP legea lui Hooke este valabilă. Punctul P reprezintă limita de proporționalitate (limita domeniului Hooke). Deformațiile elastice se întind de obicei ceva mai departe de limita de proporționalitate, până la limita de elasticitate, după care începe domeniul deformațiilor plastice. Punctul critic S (ϵ_S, σ_S) reprezintă limita de curgere sau de fluiditate. Dincolo de această limită deformațiile cresc neregulat, fără vreo solicitare suplimentară. În practică prelucrarea plastică a metalelor se realizează în această zonă. După terminarea curgerii, efortul unitar crește din nou cu alungirea relativă până la limita de rezistență B (ϵ_B, σ_B) când apare într-un loc o gătuire pronunțată a barei, după care se produce ruperea ei. Ruperea barei corespunde punctului Z (ϵ_Z, σ_Z).

Corpurile sunt elastice dacă limita de elasticitate se atinge pentru forțe exterioare mari (de exemplu: oțel, cauciuc) și neelastice dacă limita de elasticitate se atinge pentru forțe exterioare mici (de exemplu: plumb).

17.2 Scopul lucrării

Determinarea modulului de elasticitate (Young) al unei sârme din oțel supusă întinderii.

17.3 Dispozitivul experimental

Sârma S confecționată din materialul al cărui modul de elasticitate se determină este fixată între două console (figura 17.3). Prin adăugarea de greutate pe platanul P prins de consola C se produce alungirea sârmei. Pe consola C se sprijină o bară de lungime b pe care este fixată o oglindă plană O . Când sârma este întinsă, consola coboară, provocând rotirea barei cu un unghi α . Oglinda fiind fixată pe această bară se rotește și ea cu același unghi α . Pentru alungiri mici, deci unghiuri mici, în triunghiul VWI putem scrie

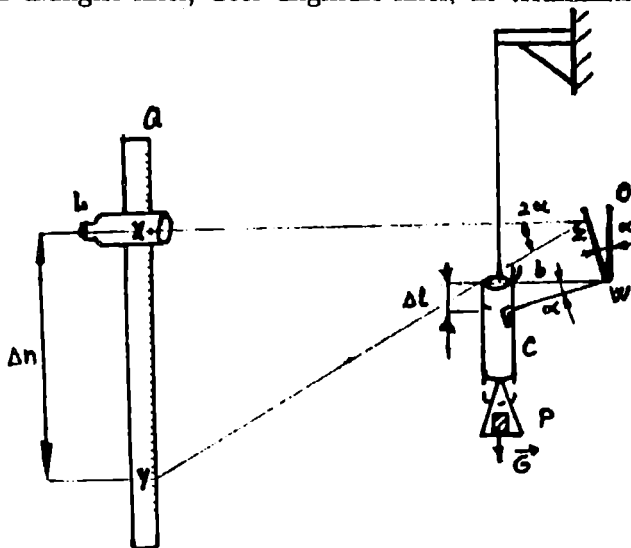


Figura 17.3:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta l}{b} \simeq \alpha . \quad (17.2)$$

Modificarea poziției oglinzii poate fi pusă în evidență cu ajutorul scalei gradate Q prin intermediul lunetei L . Înainte de a adăuga o greutate pe platan, intersecția firelor reticulare ale lunetei indică o diviziune n_0 pe imaginea scalei gradate. Când oglinda se rotește, această imagine se deplasează. Astfel, după adăugarea greutății G pe platan, intersecția firelor reticulare ale lunetei indică o nouă diviziune n pe imaginea scalei gradate. Notăm cu Δn diferența diviziunilor pentru o rotație a oglinzii cu un unghi α și cu D distanța de la oglindă la scală. Pentru alungiri mici, deci unghiuri de rotație mici, în triunghiul XYZ putem scrie

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\Delta n}{D} \simeq 2\alpha. \quad (17.3)$$

Din relațiile (17.2) și (17.3) obținem

$$\Delta l = \frac{b}{2D} \Delta n. \quad (17.4)$$

Introducând relația (17.4) în relația (17.1) obținem pentru modulul Young următoarea expresie

$$E = \frac{2lDg}{bS} \frac{m}{\Delta n}, \quad (17.5)$$

cu $S = \pi d^2/4$, d fiind diametrul sârmei. Dispozitivul experimental din laborator este caracterizat de următorii parametri: $l = 2$ m, $d = 0,8$ mm, $b = 6$ cm. Distanța D de la lunetă la oglindă se măsoară cu o ruletă.

Aparate și materiale: un fir din oțel fixat între două console dintre care una este încastrată în perete iar de cealaltă este prins un platan, o lunetă, mase marcate, o ruletă.

17.4 Modul de lucru. Prelucrarea datelor experimentale

- Se reglează luneta astfel încât să se prindă imaginea scalei gradate.
- Se citește diviziunea n_0 indicată de intersecția firelor reticulare ale lunetei.
- Se adaugă pe platan prima masă marcată $m_1 = 0,5$ kg și se citește diviziunea n_1 indicată de intersecția firelor reticulare ale lunetei. Determinăm diferența diviziunilor $\Delta n_1 = n_1 - n_0$.

- Se adaugă succesiv unități de masă de 0,5 kg până când pe platan se află o masă de 3,5 kg (obținându-se astfel 7 puncte experimentale), citindu-se de fiecare dată diviziunea n corespunzătoare ($\Delta n = n - n_0$).
- Datele experimentale culese se trec în tabelul 17.1.

nr. determ.	n_0 [mm]	m [kg]	n [mm]	Δn [mm]

Tabelul 17.1:

- Se reprezintă grafic diferența diviziunilor (Δn) în funcție de masa (m) pusă pe platan. Panta P a dreptei obținute este egală cu raportul

$$\frac{2lDg}{bSE}$$

- Conform metodei celor mai mici pătrate această pantă are expresia

$$P = \frac{\sum_{i=1}^n (m_i - \bar{m}) \Delta n_i}{\sum_{i=1}^n (m_i - \bar{m})^2}$$

- Valoarea modului lui Young este dată de

$$E = \frac{2lDg}{bSP}$$

- Din calcule se elimină punctele experimentale care sunt depărtate mult de dreaptă

Atenție la unitățile de măsură.

STUDIUL ÎNCOVOIERII UNEI BARE ELASTICE

18.1 Teoria lucrării

Între particulele constituente ale unui solid există forțe de interacțiune care diferă de la solid la solid și care asigură stabilitatea acestuia. Aceste forțe joacă un rol important în manifestarea diverselor proprietăți ale solidelor. Unele dintre aceste proprietăți sunt proprietățile elastice. Ele se manifestă atunci când un corp este deformat sub acțiunea unor forțe exterioare. Deformația se referă la deplasările din pozițiile de echilibru ale particulelor constituente ale solidului. Dacă aceste deplasări au fost mici este posibil ca particulele să revină în pozițiile de echilibru, în lipsa forțelor exterioare. Deformația ce dispăre odată cu încetarea acțiunii forțelor exterioare se numește **deformație elastică**.

Dacă forțele exterioare sunt mari particulele constituente nu mai revin la pozițiile de echilibru în absența forței exterioare. Această deformație ce nu dispăre odată cu încetarea acțiunii forțelor exterioare se numește **deformație plastică**. Ea apare pentru acele valori ale forțelor exterioare ce depășesc o anumită limită de elasticitate.

Deformațiile pot fi de mai multe tipuri: **alungire** (întindere, tracțiune) sau **compresie** (comprimare), **forfecare** (alunecare), **torsiune** (răsucire), **încovoiere** (flexiune).

În limita deformațiilor mici, toate deformațiile satisfac următoarele legi:

- în limita de elasticitate deformația este proporțională cu mărimea forței exterioare;
- schimbarea sensului forței exterioare provoacă numai schimbarea sensului deformației fără să-i modifice valoarea absolută;

- când acționează mai multe forțe exterioare, deformația totală este egală cu suma deformațiilor parțiale.

În toate cazurile, expresia cantitativă a relației dintre forța exterioară și deformație este dată de legea lui Hooke.

În cazul deformațiilor mici, orice deformație complexă poate fi considerată ca o sumă de deformații simple (alunecări).

În această lucrare se studiază o deformație complexă și anume încovoierea unei bare elastice drepte, cu un capăt fixat. Dacă la capătul liber se acționează cu o forță F bara se va încovoia. La încovoierea barei straturile ei superioare se vor întinde, cele inferioare se vor comprima, iar la mijloc există un strat, numit **strat neutru**, care își va păstra lungimea și nu va suferi decât o curbare. Încovoierea barei este caracterizată de **unghiul de încovoiere**, care este unghiul dintre poziția inițială a barei și poziția după încovoiere, sau de **săgeata de încovoiere**, ce reprezintă deplasarea lineară a extremității libere a barei (figura 18.1). Săgeata de încovoiere poate fi exprimată în funcție de unghiul de încovoiere. În practică este mai comod să se măsoare săgeata de încovoiere.

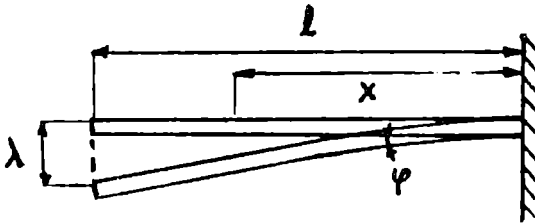


Figura 18.1:

În cazul încovoierii, legea lui Hooke, ce exprimă relația între forța exterioară și deformație se scrie

$$\lambda = KF, \quad (18.1)$$

unde λ este săgeata de încovoiere, iar F forța exterioară. Constanta K depinde de forma, dimensiunile și natura solidului deformat. Relația (18.1)

exprimă că săgeata de încovoiere este direct proporțională cu forța care încovoiește bara. Dacă încovoierea este descrisă cu ajutorul unghiului de încovoiere, relația analoagă relației (18.1) este

$$\frac{d\phi}{dx} = K'lF, \quad (18.2)$$

unde ϕ este unghiul de încovoiere, F forța aplicată la capătul liber, iar $d\phi/dx$ unghiul de încovoiere pe unitatea de lungime. Constanta K' depinde de forma, dimensiunile și natura solidului deformat.

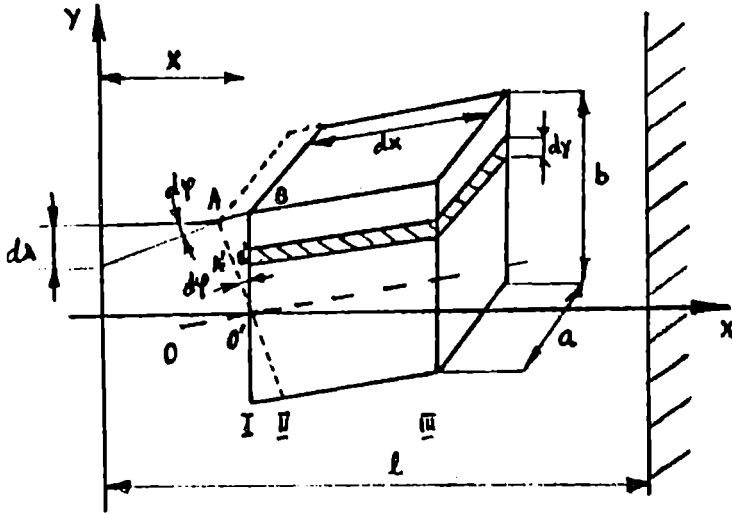


Figura 18.2:

În continuare urmărim să găsim dependența lui K de forma, dimensiunile și natura solidului deformat prin încovoiere. În acest scop considerăm o bară dreptunghiulară de dimensiuni l , b și a . Considerăm de asemenea, o secțiune transversală la distanța x de extremitatea ei liberă. În vecinătatea acestei secțiuni considerăm un element infinitesimal dx al barei (figura 18.2). Notăm cu I poziția secțiunii înainte de încovoiere, cu II poziția după încovoiere și cu III o secțiune imediat vecină. Înainte de încovoiere secțiunea I este paralelă cu secțiunea III . Prin încovoiere secțiunea I trece în poziția II printr-o rotație infinitesimală de unghi $d\phi$ în jurul unei axe ce trece prin stratul neutru OO' , deoarece straturile de arie $a \cdot dx$ de deasupra stratului neutru OO' se întind în timp ce cele de dedesupt se comprimă. În punctele A și B se duc perpendiculare pe direcțiile secțiunilor I și II care se prelungesc până la extremitatea liberă a barei. Aceste perpendiculare fac între ele unghiul $d\phi$. La capătul liber al barei, distanța $d\lambda$ dintre cele două

perpendiculară este elementul infinezimal al săgeții de încovoiere datorată rotației secțiunii transversale considerate. Aproximând tangenta unghiului $d\phi$ cu unghiul avem

$$d\lambda = x d\phi . \quad (18.3)$$

Considerăm că forța elastică elementară dF acționând asupra unui strat arbitrar de înălțime dy aflat la distanța y de stratul neutru, îl alungește cu dl . Secțiunea acestui strat pe care acționează forța elastică elementară este $dS = a dy$. Din triunghiul $A'O'B'$ rezultă că

$$dl = y d\phi . \quad (18.4)$$

Forța elastică dF ce produce alungirea cu dl a stratului considerat are expresia (conform legii lui Hooke)

$$dF = E dS \frac{dl}{dx} , \quad (18.5)$$

unde dl/dx reprezintă alungirea relativă a stratului, iar E modulul de elasticitate al materialului din care este confecționată bara. Din relațiile (18.4) și (18.5) și $dS = a dy$ obținem

$$dF = E a y dy \frac{d\phi}{dx} . \quad (18.6)$$

Momentul încovoiilor elementar al forțelor elastice dF față de axa de rotație ce trece prin stratul neutru este

$$dM = y dF ,$$

sau

$$dM = E a y^2 dy \frac{d\phi}{dx} . \quad (18.7)$$

Momentul total de încovoiere, produs de forțele elastice în secțiunea transversală considerată se găsește prin integrare

$$M = E a \frac{d\phi}{dx} \int_{-b/2}^{b/2} y^2 dy = \frac{1}{12} a b^3 E \frac{d\phi}{dx} . \quad (18.8)$$

Deoarece la echilibru momentul de încovoiere datorat forțelor elastice este egal cu momentul încovoiilor al forțelor exterioare F aplicate la extremitatea liberă a barei

$$\frac{1}{12} a b^3 E \frac{d\phi}{dx} = x F . \quad (18.9)$$

Înlocuind în această expresie pe $d\phi$ dat de relația (18.3) obținem

$$d\lambda = 12 \frac{F}{a b^3 E} x^2 dx . \quad (18.10)$$

Săgeata de încovoiere totală se obține prin integrarea ecuației (18.10)

$$\lambda = \frac{12 F}{a b^3 E} \int_0^l x^2 dx = \frac{4 l^3 F}{a b^3 E}, \quad (18.11)$$

sau

$$\lambda = K F, \quad K = \frac{4 l^3}{a b^3 E}, \quad (18.12)$$

unde a este lățimea secțiunii transversale a barei, b înălțimea acestei secțiuni, iar l lungimea barei. Într-adevăr constanta K depinde de forma, dimensiunile și natura substanței din care este confecționată bara (prin E).

18.2 Scopul lucrării

Determinarea modului de elasticitate (Young) al materialului din care este construită o bară elastică, când aceasta este supusă încovoierii.

18.3 Dispozitivul experimental

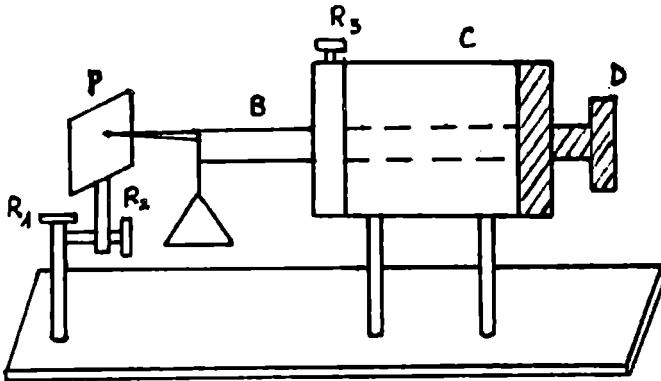


Figura 18.3:

Dispozitivul experimental (figura 18.3) constă dintr-un cilindru C prin care trece bara B a cărei comportare la încovoiere se studiază. O porțiune l din bară este înafara cilindrului. Capătul liber este prevăzut cu un platan pe care se așează succesiv diferite mase marcate. Săgeata de încovoiere a barei se citește pe scala gradată în *milimetri* de pe plăcuța P . Poziția

acestei plăcuțe se reglează cu ajutorul șuruburilor R_1 și R_2 . În partea dreaptă a tamburului, bara este pusă în legătură cu discul D . Acest disc servește la așezarea barei în diferite poziții. Capătul barei dinspre cilindru este înțepenit în poziția aleasă cu șurubul R_3 . Bara dispozitivului din laborator are lungimea $l = 0,6$ m și secțiunea transversală un dreptunghi de dimensiuni 4 mm și 3 mm.

Aparate și materiale: dispozitivul prezentat anterior, o cutie cu mase marcate.

18.4 Modul de lucru. Prelucrarea datelor experimentale

- Se alege cu ajutorul discului D o poziție a barei. Se fixează bara în această poziție cu ajutorul șurubului R_3 . Cu ajutorul șuruburilor R_1 și R_2 se aduce diviziunea aleasă ca reper pe plăcuța P în dreptul acului indicator de la capătul liber al barei.
- Se pun pe platan pe rând greutateți de 20 g până la 200 g (din 20 g în 20 g) și se citește de fiecare dată diviziunea în dreptul căreia a ajuns acul indicator. Scăzând din această diviziune, diviziunea aleasă ca reper se determină săgeata de încovoiere λ corespunzătoare masei m pusă pe platan.
- Datele experimentale culese se trec în tabelul 18.1.

nr. determ.	m [g]	λ [mm]

Tabelul 18.1:

- Se fixează apoi bara în cealaltă poziție. În acest caz lățimea secțiunii transversale corespunzătoare poziției anterioare a barei devine înălțime, iar înălțimea devine lățime. După punerea la punct a dispozitivului se așează pe rând greutateți pe platan și se determină săgețile corespunzătoare.

- Se reprezintă grafic săgeata de încovoiere (λ) în funcție de masa (m) de pe platan. Panta P a dreptei obținute este egală cu raportul

$$\frac{4 l^3 g}{a b^3 E} .$$

- Conform metodei celor mai mici pătrate această pantă are expresia

$$P = \frac{\sum_{i=1}^n (m_i - \bar{m}) \lambda_i}{\sum_{i=1}^n (m_i - \bar{m})^2} .$$

- Valoarea modulului lui Young este dată de

$$E = \frac{4 l^3 g}{a b^3 P} .$$

- Din calcule se elimină punctele experimentale care sunt depărtate mult de dreaptă.
- Se compară valorile pentru modulul de elasticitate obținute pentru cele două poziții ale barei.

Atentie la unitățile de măsură.

DETERMINAREA CONSTANTEI ELASTICE A UNUI RESORT

19.1 Teoria lucrării

Pendulul elastic este un corp idealizat (reduc la un punct material) atârnat de un resort elastic. Corpul, datorită greutateii sale întinde resortul. În resort apar forțe interne între regiunile deplasate ale acestuia. Sub acțiunea acestor forțe resortul revine la forma inițială (când de resort nu mai este atârnat nici un corp). Aceste forțe de reacțiune sunt proporționale cu deformațiile, dacă forțele exterioare nu depășesc o limită caracteristică aceluia corp, numită limită de elasticitate. Forța proporțională cu valoarea deformației și orientată în sens opus creșterii deformației se numește forță elastică. Considerând că deformațiile se fac după direcția Ox , expresia matematică a forței elastice este

$$F = -kx, \quad (19.1)$$

unde x este deformația sistemului, iar k o constantă pozitivă, caracteristică pentru fiecare sistem elastic. Valoarea lui k depinde de natura substanței din care este confecționat resortul și de geometria lui (diametrul firului și diametrul spirei). Constanta elastică a unui resort este numeric egală cu forța elastică care apare la o alungire a acestuia egală cu unitatea. Semnul minus din formulă arată că forța elastică este orientată în sens opus sensului deformației.

Punctul material care se mișcă rectiliniu sub acțiunea forței elastice ($F = -kx$) se numește **oscilator liniar armonic**. Mișcarea sa se numește

mişcare oscilatorie armonică. Dacă m este masa punctului material, atunci forța F îi va imprima o accelerație $a = \ddot{x}$. Conform legii a doua a mecanicii putem scrie

$$m\ddot{x} = -kx ,$$

sau

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 . \quad (19.2)$$

Notând

$$\omega^2 = k/m , \quad (19.3)$$

ecuația (19.2) devine

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 .$$

Această ecuație diferențială de ordinul al doilea este omogenă. Soluția ei este de forma

$$x = A \sin(\omega t + \alpha) . \quad (19.4)$$

Constantele de integrare: amplitudinea A (elongația maximă) și faza inițială a mișcării oscilatorii α se determină din condițiile inițiale. O soluție a ecuației (19.2) este și cea în care în locul sinusului se ia cosinusul. Alegerea funcției trigonometrice este arbitrară, ea ducând la schimbarea fazei inițiale α .

Mărimea ω are semnificație de pulsație ($\omega = 2\pi/T$). Rezultă pentru perioada oscilației armonice expresia

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} . \quad (19.5)$$

Deci, perioada mișcării unui sistem mecanic în oscilație armonică este direct proporțională cu rădăcina pătrată a masei și invers proporțională cu rădăcina pătrată a constantei elastice k .

Pentru determinarea constantei elastice a unui resort se folosesc două metode: metoda statică și metoda dinamică. Metoda statică se bazează pe faptul că forța elastică are valoarea egală cu cea a forței de greutate a corpului atârnat

$$k \Delta l = mg . \quad (19.6)$$

Cunoscând greutatea corpului atârnat și determinând alungirea resortului sub acțiunea greutății sale, constanta elastică a resortului este

$$k = g \frac{m}{\Delta l} . \quad (19.7)$$

Dacă deplasăm sistemul din poziția de echilibru, atunci forța elastică dezvoltată în resort și forța de greutate nu mai sunt în echilibru. Sub

acțiunea forței elastice suplimentare dirijată spre poziția de echilibru și proporțională cu depărtarea x de la poziția de echilibru ($F = -kx$) corpul oscilează armonic. Perioada oscilațiilor are expresia $T = 2\pi\sqrt{m/k}$. Deci constanta elastică este

$$k = 4\pi^2 \frac{m}{T^2} . \quad (19.8)$$

Această relație stă la baza metodei dinamice de determinare a constantei elastice.

19.2 Scopul lucrării

Determinarea constantei elastice a unui resort liniar din oțel atât prin metoda statică cât și prin cea dinamică.

19.3 Dispozitivul experimental

Dispozitivul experimental este constituit dintr-un resort fixat la capătul superior de un suport vertical, capătul inferior fiind lăsat liber. De capătul liber se suspendă un platan. Dinamometrul este prevăzut cu un indicator ce permite citirea alungirilor resortului pe hârtia milimetrică atașată.

Aparate și materiale: un pendul elastic, un cronometru, mase marcate.

19.4 Modul de lucru. Prelucrarea datelor experimentale

Metoda statică

- Se suspendă pe platan 10 mase marcate diferite m_i .
- Se măsoară și se notează alungirile Δl_i corespunzătoare fiecărei greutate $G_i = m_i g$. Citirea este corectă când ochiul observatorului și acul indicator sunt pe aceeași orizontală.
- Datele experimentale culese se trec în tabelul 19.1.

nr. determ.	m [g]	Δl [mm]

Tabelul 19.1:

Dacă masa așezată pe platan este prea mare, atunci valoarea raportului $m/\Delta l$ diferă foarte mult de celelalte. În acest caz s-a depășit limita de elasticitate.

- Se reprezintă grafic alungirea resortului (Δl) în funcție de masa așezată pe platanul atârnat de resortul elastic (m). Panta (P) dreptei obținute este chiar raportul între accelerația gravitațională și constanta elastică (g/k).
- Utilizând metoda celor mai mici pătrate această pantă are expresia

$$P = \frac{\sum_{i=1}^n (m_i - \bar{m}) \Delta l_i}{\sum_{i=1}^n (m_i - \bar{m})^2}, \quad n \geq 10.$$

Metoda dinamică

- Se imprimă resortului o mișcare oscilatorie de amplitudine mică, pentru fiecare masă m_i utilizată anterior. Cu ajutorul unui cronometru se măsoară timpul t în care se efectuează N oscilații. Perioada se calculează cu relația $T = t/N$. Se repetă determinarea lui T de 3 ori pentru fiecare masă m_i .
- Datele experimentale culese se trec în tabelul 19.2.

nr. determ.	m [g]	t [s]	N	T [s]	\bar{T} [s]	T^2 [s ²]

Tabelul 19.2:

- Se reprezintă grafic pătratul perioadei (\bar{T}^2) în funcție de masa (m) corpului atârnat de resort. Panta dreptei este raportul $4\pi^2/k$.
- Utilizând metoda celor mai mici pătrate această pantă are expresia

$$P = \frac{\sum_{i=1}^n (m_i - \bar{m}) \bar{T}_i^2}{\sum_{i=1}^n (m_i - \bar{m})^2}, \quad n \geq 10.$$

- Valoarea constantei elastice se determină cu relația

$$k = 4\pi^2/P.$$

DETERMINAREA VITEZEI SUNETULUI ÎN AER PRIN METODA INTERFERENȚEI

20.1 Teoria lucrării

Fenomenul de interferență constă în suprapunerea neperturbată în același loc (dintr-un mediu) a două sau mai multe unde de aceeași lungime de undă sau aceeași pulsație.

Regiunea în care se produce suprapunerea undelor se numește câmp de interferență. Considerăm un punct P (figura 20.1) dintr-un câmp de interferență al undelor plane de aceeași pulsație ω , ce provin de la două centre de oscilații S_1 și S_2 . Presupunem de asemenea, că cele două oscilații care ajung în punctul P sunt armonice și paralele. Ele au elongațiile de forma

$$y_1 = A_1 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_1}{\lambda} \right), \quad (20.1)$$

$$y_2 = A_2 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_2}{\lambda} \right). \quad (20.2)$$

Punctul P va executa mișcarea rezultată prin compunerea celor două oscilații armonice paralele de aceeași pulsație. Mișcarea rezultantă este tot o mișcare oscilatorie armonică, de aceeași perioadă și direcție. Ecuația mișcării rezultante este

$$y = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\alpha}{2\pi} \right). \quad (20.3)$$

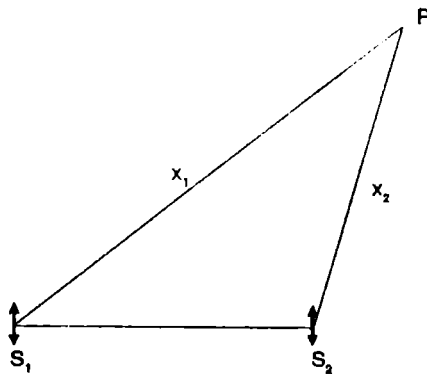


Figura 20.1:

Deoarece mișcarea rezultantă se obține prin compunerea celor două oscilații armonice putem scrie că

$$y = y_1 + y_2 . \quad (20.4)$$

Defazajul dintre cei doi oscilatori aflați la distanța x_1 , respectiv x_2 de punctul P este

$$\Delta\phi = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_2}{\lambda} \right) - 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_1}{\lambda} \right) = \frac{2\pi}{\lambda}(x_1 - x_2) = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x ,$$

unde Δx este diferența de drum dintre cele două oscilații.

Introducând expresiile (20.1), (20.2) și (20.3) în ecuația (20.4) și aplicând formula $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \sin\beta \cos\alpha$, în urma identificărilor obținem

$$A \cos \alpha = A_1 \cos \frac{2\pi}{\lambda}x_1 + A_2 \cos \frac{2\pi}{\lambda}x_2 , \quad (20.5)$$

$$A \sin \alpha = A_1 \sin \frac{2\pi}{\lambda}x_1 + A_2 \sin \frac{2\pi}{\lambda}x_2 . \quad (20.6)$$

Ridicând ecuațiile (20.5) și (20.6) la pătrat și adunându-le membru cu membru obținem amplitudinea oscilației rezultante

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos \frac{2\pi}{\lambda}(x_1 - x_2) . \quad (20.7)$$

Rezultă că amplitudinea oscilației punctului P depinde de amplitudinile oscilațiilor care se suprapun și de diferența de drum dintre oscilații, în punctul de interferență. Dacă propagarea oscilațiilor se face într-un mediu în

care nu există amortizare, amplitudinea oscilației rezultante va depinde numai de diferența de drum dintre cele două oscilații. Când această diferență de drum este constantă, atunci și amplitudinea oscilației rezultante este constantă.

Amplitudinea oscilației rezultante este maximă ($A = A_1 + A_2$), dacă

$$\cos \frac{2\pi}{\lambda} \Delta x = 1, \quad \text{sau} \quad \frac{2\pi}{\lambda} \Delta x = 2k\pi.$$

Din această condiție rezultă

$$\Delta x = 2k \frac{\lambda}{2}, \quad k \in Z.$$

Amplitudinea oscilației rezultante este minimă ($A = |A_1 - A_2|$), pentru

$$\cos \frac{2\pi}{\lambda} \Delta x = -1, \quad \frac{2\pi}{\lambda} \Delta x = (2k + 1)\pi.$$

Această condiție este echivalentă cu

$$\Delta x = (2k + 1) \frac{\lambda}{2}, \quad k \in Z.$$

În concluzie, toate punctele din câmpul de interferență pentru care diferența de drum este un număr par de $\lambda/2$, oscilează cu o amplitudine maximă, iar cele pentru care diferența de drum este un număr impar de $\lambda/2$, oscilează cu o amplitudine minimă.

Pentru cazul particular $A_1 = A_2 = a$ obținem $A = 2a$ pentru amplitudinea maximă și $A = 0$ pentru amplitudinea minimă.

Între lungimea de undă și viteza de propagare (viteza de fază) există relația

$$\lambda = vT, \quad \lambda = \frac{v}{\nu}, \quad (20.8)$$

unde ν este frecvența undei. În cazul primului minim de interferență ($k = 0$) putem scrie

$$\delta_0 = \frac{v}{2\nu}, \quad v = 2\nu\delta_0, \quad (20.9)$$

unde δ_0 este diferența de drum între undele care interferă când se produce primul minim de interferență. Al doilea minim de interferență se produce când

$$\delta_1 = \frac{3v}{2\nu}, \quad v = \frac{2}{3}\nu\delta_1, \quad (20.10)$$

unde δ_1 este diferența de drum între undele care interferă când se produce al doilea minim de interferență.

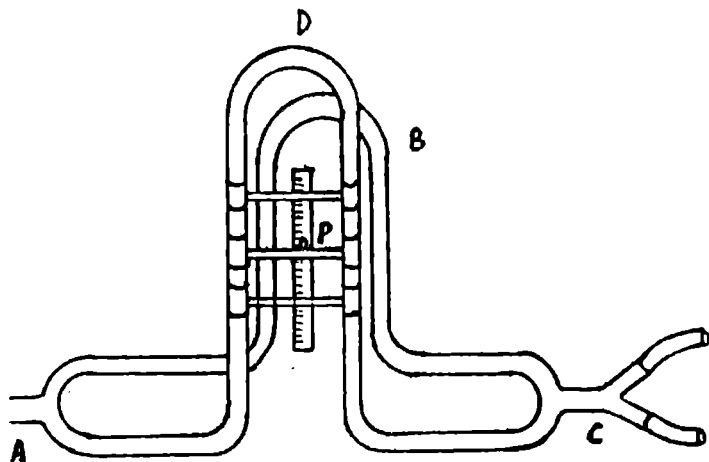


Figura 20.2:

20.2 Scopul lucrării

Determinarea vitezei de propagare a sunetului în aer prin metoda interferenței cu ajutorul tubului König.

20.3 Dispozitivul experimental

Tubului König (figura 20.2) este format din două tuburi îndoite, așezate vertical, unul lângă altul. Lungimea unuia din tuburi (B) este fixă, iar lungimea celuilalt (D) este variabilă. Dublul indicației acului P pe scala gradată ne arată cu cât este mai lung tubul D decât tubul B .

La prelungirea orizontală A se produc oscilații sonore (de exemplu cu ajutorul unui diapazon). Undele emise interferă în punctul C după ce au parcurs cele două ramificații B și D . Diferența de drum dintre cele două unde este chiar dublul indicației acului P pe scala gradată. În timp ce se mișcă tubul D se ascultă cu ajutorul celor două tuburi de cauciuc de la capătul C . În funcție de valoarea diferenței de drum se aud întăriri sau slăbiri ale sunetului. Se urmăresc minimele deoarece sunt mai ușor de distins.

Aparate și materiale: un tub König, un izvor sonor (câteva diapazoane de frecvențe diferite).

20.4 Modul de lucru: Prelucrarea datelor experimentale

- Se produce în capătul A o oscilație sonoră (de exemplu prin lovirea unui diapazon în aer). În cazul tubului K \ddot{o} nig din laborator frecvența emisă de izvorul sonor trebuie să fie mai mare de 750 Hz (pentru a putea percepe cel puțin două minime de interferență).
- Se mișcă tubul D până când cu ajutorul celor două tuburi de cauciuc de la capătul C percepem prima slăbire a sunetului (primul minim de interferență). Se notează diviziunea M la care se găsește acul indicator pe scala gradată. Viteza sunetului în aer este dată de

$$v = 4\nu M, \quad (20.11)$$

unde ν este frecvența sunetului emis de diapazon. Frecvența sunetului emis de diapazon este trecută pe diapazon.

- Se repetă determinarea de 10 ori.
- Rezultatele măsurătorilor se trec în tabelul 20.1.

nr. determinare	ν [Hz]	M [cm]	M [cm]	\bar{v} [m/s]	$S_{\bar{v}}$ [m/s]

Tabelul 20.1:

unde

$$\bar{v} = 4\nu\bar{M}, \quad (20.12)$$

$$S_{\bar{v}} = 4\nu S_{\bar{M}}, \quad (20.13)$$

cu

$$S_{\bar{M}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\bar{M} - M_i)^2}{n(n-1)}}, \quad n \geq 10, \quad (20.14)$$

unde n este numărul de determinări.

- Rezultatul final se scrie sub forma

$$v = \bar{v} \pm S_{\bar{v}}. \quad (20.15)$$

- Se vor face determinări și pentru al doilea minim de interferență. În acest caz viteza sunetului în aer se calculează cu formula

$$v = \frac{4}{3} \nu M' , \quad (20.16)$$

unde M' este diviziunea la care se găsește acul indicator pe scala gradată când percepem al doilea minim de interferență.

- Se repetă determinarea de 10 ori.
- Se compară valorile obținute cu formulele (20.11) și (20.16).
- Se fac determinări și pentru altă frecvență a izvorului sonor.

BIBLIOGRAFIE

1. C. Cioacă, *Lucrări practice de mecanică fizică și elemente de prelucrarea datelor experimentale*, Litografia Universității din București, 1991
2. C. Plăvițu, A. Hristev, L. Georgescu, V. Dima, C. Stănescu, C. Ciucu, E. Barna, D. Borșan, L. Constantinescu, C. Gherbanovski, *Mecanică fizică și acustică. Lucrări practice*, Litografia Universității din București, 1989
3. D. Grosu, C. Grosu, *Îndrumar de lucrări practice și culegere de probleme de fizică*, Litografia Universității Al. I. Cuza, Iași, 1982
4. A. Hristev, *Mecanică și acustică*, Editura didactică și pedagogică, București, 1982
5. L. Panaiotu, I. Chelu, M. Petrescu-Prahova, E. A. Teodoru, *Lucrări experimentale de fizică*, Editura didactică și pedagogică, București, 1972
6. N. Ciorănescu, *Tratat de matematici speciale*, Editura didactică și pedagogică, București, 1963
7. A. Millea, *Cartea metrologului. Metrologie generală*, Editura Tehnică, București, 1985

VERIFICAT
2007



Tiparul s-a executat sub c-da nr. 498/1998,
la Tipografia Editurii Universității din București



ISBN: 973 - 575 - 288 - 3

Lei 9500