

ION VICTOR PESCARU

VICTOR ȚIGOIU

**ELEMENTE
DE
TERMODINAMICĂ
ȘI
DINAMICA ATMOSFEREI**

Editura Universității din București



BIBLIOTECA CENTRALA
UNIVERSITARA
București

Cota IV 575629
Inventar C199801994

ION VICTOR PESCARU

VICTOR ȚIGOIU

**ELEMENTE
DE TERMODINAMICĂ
ȘI DINAMICA ATMOSFEREI**

EDITURA UNIVERSITĂȚII DIN BUCUREȘTI

<https://biblioteca-digitala.ro/> <https://unibuc.ro>

- 1997 -

Referenți științifici: Prof. dr. LAZĂR DRAGOȘ
Conf. dr. GALINA COMENSCHI

UNIVERSITATEA
BUCUREȘTI
C.C.T.A. 14 515629

B.C.U. București



C199801394

© Editura Universității din București
Șos. Panduri, 90-92, București - 76235;
Telefon 410.23.84

ISBN - 973 - 575 - 160 - 7

PREFAȚĂ

Această carte este scrisă în sprijinul studenților din anii IV, V ai facultății de Matematică, care urmează cursul de "Dinamica Atmosferei". Ea alcătuiește axul central al cursului și reprezintă atât experiența didactică de opt ani a autorilor (în calitate de conducători ai cursului respectiv), cât și o parte din experiența lor de cercetare.

În abordările moderne, meteorologia dinamică se ocupă cu studiul fluidului atmosferic privit ca un corp continuu în mișcare. Mișcarea (împreună cu variațiile de temperatură) caracterizează starea vremii, atât în sensul curent al cuvântului, cât și în sensul său general (incluzând mișcări de tip briză, climatologie, etc.). În general în carte sunt neglijate proprietățile de corp cu structură de bază discretă ale aerului atmosferic, fiind puse în evidență proprietățile de corp continuu ale acestuia (cu mici excepții).

Autorii au pornit, în alcătuirea materialului, de la ideea că diferitele științe ce descriu mișcările naturii sunt (sau ar trebui să fie) unitare. De aceea, în primul capitol al lucrării (și în Anexa 1, în completare) se prezintă o teorie generală de termodinamică a continuumului (datorată lui Coleman, Gurtin, etc.). Aceasta este probabil una dintre cele mai clare și concise teorii, în care subiectul nostru (fluidul atmosferic) se încadrează perfect. Acesta este modelat ca un fluid vâcos liniar (de tip Navier și Stokes). În cuprinsul capitolului arătăm în ce condiții legea lui Fourier este o bună aproximare a fluxului de căldură și ecuația de " propagare a căldurii " (a temperaturii) se scrie în forma clasică. Tot aici scriem ecuațiile complete ce guvernează (din punct de vedere termodinamic) mișcările aerului ca îi problemele cu date inițiale la frontieră și / sau la limită ce pot fi formulate. Punem de asemenea în evidență un fapt fundamental și anume, în natură, o mișcare reală se reprezintă totdeauna în raport cu o stare, numită stare de referință. Câteva asemenea stări sunt descrise din punct de vedere termodinamic, punându-se în evidență ecuațiile adimensionale raportate la ele și o serie de numere (parametrii) adimensionale ce apar și care vor fi utilizate în capitolele următoare.

În Capitolul doi se analizează principalele mișcări ondulatorii ce pot fi puse în evidență de setul de ecuații ce descriu mișcarea atmosferei (deduse în primul capitol). Utilizând teoria micilor perturbații și simplificând sistemul de ecuații, se separă undele sonore orizontale și verticale, undele de gravitație de suprafață și cele inerțiale și undele Rossby, care descriu principalele perturbații la scară mare. În finalul capitolului este descris așa numitul proces de ajustare geostrofică.

Capitolul al treilea este dedicat analizei la scară a principalelor variabile meteorologice. Se pun în evidență ordinele de mărime ale termenilor din fiecare ecuație și se justifică aproximările făcute.

Urmare a celor obținute deja, în capitolul patru sunt descrise principalele modele atmosferice la scară mare. Astfel se pun în evidență, în primul rând, modelele cu ecuații filtrate de tip barotrop și baroclin. Capitolul se încheie cu prezentarea modelelor cu ecuații primitive.

Consecvenți încercării de a face o prezentare unitară a materialului, în Capitolul cinci analizăm, cu mai multă atenție, ce înseamnă a neglija anumiți coeficienți. Astfel suntem conduși la prezentarea câtorva modele asimptotice. Obținem mai întâi modelul lui Boussinesq iar apoi două modele derivate din acesta. Ele vor descrie mișcări în prezența unor obstacole izolate. Tot în acest capitol prezentăm și un model oarecum diferit, de turbulență (propriu descrierii mișcărilor de tip briză), care se bazează pe " teoria K " de aproximare a ecuațiilor turbulenței. O foarte foarte scurtă prezentare a acesteia este făcută în Anexa 3. Toate aceste modele nu pot fi obținute fără utilizarea unor parametri de similitudine ce se evaluează cu ajutorul " teoremei Π " (a analizei dimensionale), prezentată de asemenea în Anexa 3. Pentru o parte a acestor modele se obțin soluții analitice. Pentru celelalte probleme este adusă în formă finală, iar soluțiile sunt prezentate prin programe numerice (sau scheme logice detaliate) în Anexa 4.

În Capitolul al șaselea sunt analizate cele mai uzuale metode numerice utilizate pentru rezolvarea problemelor cu date inițiale și la frontieră prezentate. Astfel sunt studiate, cu metode cu diferențe finite, " ecuațiile de advecție " liniare și neliniare. Apoi se integrează ecuația eliptică (de tip Helmholtz) necesară în modelele cu ecuații filtrate. Pentru rezolvarea ecuațiilor primitive este prezentată o metodă spectrală.

Cartea se încheie cu un număr de cinci anexe. Dintre acestea Anexele 1,3,4 au fost parțial prezentate deja. În Anexa 2 se face o prezentare (pe scurt) a unor proprietăți de calcul algebric și analitic pentru câmpuri scalare, vectoriale și tensoriale, care sunt intens utilizate în lucrare. Anexa se încheie cu teorema de reprezentare a funcțiilor tensoriale izotrope a lui Wang (scrisă în cazul unei funcții tensoriale cu variabile tensor simetric și vector). În Anexa 3 mai prezentăm un exemplu util pentru a înțelege capcanele ce apar când tehnicile de dezvoltări asimptotice nu sunt corect aplicate. Anexa 5 prezintă ecuațiile dinamicii atmosferei în sisteme de coordonate (x,y,p) și în coordonate sferice.

Autorii speră ca această carte, ce se adresează și studenților din anii de studii aprofundate și cercetătorilor în domeniu, să se dovedească a fi un material util pregătirii lor de specialitate.

Nu putem încheia această scurtă prezentare fără a mulțumii domnului dr.N.Beșleagă și a ne închina memoriei domnului dr.A.Doneaud întemeietorii școlii românești de meteorologie dinamică. În același timp aducem calde mulțumiri colectivului Catedrei de Mecanică și Ecuații care ne-a acordat girul său pentru apariția cursului.

În fine dorim să aducem mulțumiri Editurii Universității din București care a găzduit cu amabilitate această lucrare.

Autorii

București

1 Martie 1997

CUPRINS

| | |
|--|----|
| INTRODUCERE | 9 |
| 1. ELEMENTE DE TERMODINAMICĂ | 11 |
| 1.1 Câteva noțiuni de termodinamica mediilor continue. | 11 |
| 1.2 Restricții constitutive termodinamice pentru fluidul Navier - Stokes și gazul perfect. | 18 |
| 1.3 Fluxul de căldură și energia internă în vecinătatea stărilor de echilibru. Ecuația de propagare. | 22 |
| 1.4 Ecuațiile fundamentale ale termodinamicii atmosferei. | 27 |
| 1.5 Stări de referință ale atmosferei. | 30 |
| 1.6 Forma adimensională a ecuațiilor termodinamicii atmosferei. | 32 |
| 1.7 Formularea condițiilor inițiale și la limită. | 35 |
| 2. TIPURI SIMPLE DE MIȘCĂRI ONDULATORII IN ATMOSFERĂ | 39 |
| 2.1 Noțiuni introductive. | 39 |
| 2.2 Ecuații linearizate. | 40 |
| 2.3 Unde sonore verticale | 42 |
| 2.4 Unde sonore orizontale și unde de gravitație interne. | 43 |
| 2.5 Unde de gravitație de suprafață. | 45 |

| | |
|---|-----------|
| 2.6 Unde de gravitație inerțiale. | 49 |
| 2.7 Oscilații inerțiale. | 50 |
| 2.8 Unde Rossby. | 51 |
| 2.9 Procesul de ajustare geostrofică. | 55 |
| | |
| 3. ANALIZA LA SCARĂ | 61 |
| | |
| 3.1 Analiza la scară pentru variabile termodinamice și ecuații de bilanț. . | 61 |
| 3.2 Analiza la scară pentru ecuația turbionului și a divergenței. | 71 |
| | |
| 4. MODELE ATMOSFERICE LA SCARĂ MARE | 74 |
| | |
| 4.1 Modelul echivalent barotrop. | 74 |
| 4.2 Modelul barotrop divergent. | 76 |
| 4.3 Modele barocline. | 80 |
| 4.4 Modele cu ecuații primitive | 84 |
| | |
| 5. MODELE ASIMPTOTICE IN TERMODINAMICA ATMOSFEREI | 87 |
| | |
| 5.1 Introducere. | 87 |
| 5.2 Ecuațiile de bilanț în raport cu o stare de referință. | 89 |
| 5.3 Model de mișcare a aerului cu considerarea gradientului termic propriu (convecția intensă). | 92 |
| 5.4 Model de mișcare a aerului în prezența unui obstacol izolat. | 103 |
| 5.5 Model de briză. | 113 |

| | |
|--|-----|
| 6. METODE NUMERICE PENTRU MODELE LA SCARĂ MARE | 124 |
| 6.1 Noțiuni introductive. | 124 |
| 6.2 Ecuația de advecție lineară. | 132 |
| 6.3 Ecuația de advecție nelineară. | 138 |
| 6.4 Ecuația de ajustare. | 141 |
| 6.5 Metode spectrale. | 143 |
| 6.6 Ecuații eliptice. | 148 |
| | |
| A. ANEXE | 152 |
| A1. Câteva complemente de termodinamică. | 152 |
| A2. Complemente de calcul vectorial și tensorial. | 157 |
| A3. Complemente de dezvoltări asimptotice și calcul dimensional. | 173 |
| A4. Scheme logice și exemple numerice pentru unele modele introduse. . | 186 |
| | |
| BIBLIOGRAFIE | 197 |

INTRODUCERE

De studiul mișcărilor aerului (sub diversele lor aspecte), ca și de studiul (observarea) altor fenomene, ce au loc în atmosferă (ploaie, ninsoare, fulgere, etc.) se poate afirma că, sub o formă sau alta, omul s - a ocupat din cele mai vechi timpuri. Știința care se ocupă cu studiul sistematic al acestor fenomene se numește meteorologie. Numele său vine, nu întâmplător sau prin tradiție, de la grecescul " meteoron ", adică, " ceea ce se întâmplă în aer ". Spunem că nu prin tradiție, deoarece marii gânditori ai Greciei Antice au fost cei care au semnalat, descris și încercat să înțeleagă aceste fenomene. Primele însemnări sunt atribuite lui Herodot (484-425 î.e.n.), însă prima carte în legătură cu subiectul este " Meteorologia " lui Aristotel (384-322 î.e.n.). În aceasta Aristotel încearcă să găsească o explicație a originii apelor și vânturilor. Hiparh (190-125 î.e.n.) și Strebo (63-19 î.e.n.) sunt primii care descoperă și explică legătura între încălzirea aerului și înclinația razelor solare. În India secolului al șaselea, Varamihara descrie (într - un tratat de Astronomie) fenomene meteorologice ca ploaia, vântul, fulgerul, comentând evenimentele ce le prevestesc. Primul care arată că fenomenele meteorologice se produc sub acțiunea unor forțe (fizice) reale este filozoful arab Kindi (800-873), în cartea sa " Epistole ". În mod cert, la acest nivel de prezentare, mai trebuie amintit și Galileo Galilei (1564-1642) care este considerat inventatorul termometrului, ca și Evangelista Torricelli (1608-1647) care este constructorul primului barometru.

După 1700, în Europa încep să se înființeze stații meteorologice de observații. Ca urmare, odată cu acumulările de informații și date, știința respectivă, meteorologia, începe să se dezvolte tot mai rapid (urmând calea naturală de dezvoltare a tuturor științelor naturii). Apar nume celebre (la început legate de partea de observații, măsurători și interpretări empirice) ca E.Mariotte (1620-1684), R.Boyle (1627-1691), D.G.Fahrenheit (1686-1736), A.Celsius (1701-1744), etc. Socotim, într-un anumit fel, etapa încheiată odată cu marele salt calitativ și de obiectivare petrecut în 1820, odată cu întocmirea primei " hărți sinoptice " (H.W.Brandes).

Odată cu înțelegerea aspectului continuu al atmosferei și cu apariția primelor modele de termodinamica continuumului, se trece la ceea ce s-ar putea numi etapa modernă a meteorologiei. Oamenii de știință n-au pregetat să construiască " mo-

dele ” în care să fie prinse proprietățile principale ale aerului (principale pentru fenomenul ce se dorește a fi descris). Astfel lumea științifică a realizat, prin perfecționarea sistemului de măsurători meteorologice (pe înălțimea coloanei de aer), că densitatea variază continuu cu înălțimea dar, cu o bună aproximație, există straturi de densitate constantă. Pe de altă parte, dacă începând de la o anumită înălțime , aerul poate fi aproximat, destul de bine, cu un gaz perfect, totuși, în vecinătatea Pământului el este mai curînd un fluid vâscos (cu vâscozitate slabă) într-o mișcare turbulentă.

Astfel, abia după 1900, încep să apară primele modele matematice pentru mișcarea aerului. Începând cu primele încercări ale lui N.M.Richardson și apoi cu cele ale lui C.G.Rossby, studiul matematic (privind modelarea fenomenelor termodinamice) și cel numeric (privind rezolvarea sistemelor de ecuații obținute) capătă o tot mai mare importanță. Centre puternice se dezvoltă peste tot în lume. Spre mijlocul secolului aceste studii iau mare amploare, apărând lucrările fundamentale ale lui J.G.Charney, E.N.Lorenz, J.Smagorinsky, P.D.Thompson, A.Wiin-Nielsen, etc. În ultimii ani (după anul 1960) pot fi citați pentru aportul lor deosebit A.Arakawa, F.G.Shuman, M.Yamasaki, J.P.Guiraud, K.R.Zeytounian, etc.

Căile pe care această știință se dezvoltă cu precădere în zilele noastre sunt pe de o parte legate de calculul numeric (puternicele centre de calcul numeric crează pachete de programe pentru rezolvarea diferitelor modele implementate, printr-o muncă în mari colective, iar pe de altă parte de construirea de modele (cu precădere la scară locală) care să descrie cât mai exact fenomene locale, dar care afectează viața oamenilor (brize, poluare, etc.).

1. ELEMENTE DE TERMODINAMICĂ

1.1 Câteva noțiuni de termodinamica mediilor continue

Toate fenomenele ce au loc în natură se petrec în prezența unui câmp de temperatură. Prin urmare evoluția (mișcarea, deformarea) corpurilor nu poate fi modelată, apriori, în absența temperaturii. Observații de natură experimentală arată că, pentru a putea descrie corect în vecinătatea Pământului mișcările aerului, este necesar adesea ca acesta să fie privit, din punctul de vedere al modelării matematice, ca un fluid vâscos (chiar dacă vâscozitățile sunt considerate "slabe"). În acest capitol vom prezenta pe scurt axiomele ce stau la baza unei termodinamici a proceselor neomogene ireversibile (pentru mai multe precizări cititorul este trimis la Anexa I a prezentului curs și la bibliografia corespunzătoare) cât și modul în care, pornind de la acestea se obțin informații suplimentare asupra "coeficienților constitutivi" și se poate deduce matematic forma ecuației de propagare a temperaturii.

Cum adesea se poate imagina corpul supus unor "situații" care determină un câmp de temperatură constant în timp și uniform în spațiu (adică aflat în câmpul unor teorii de Mecanica Mediilor Continue - MMC) este clar că axiomele MMC și rezultatele obținute în acel cadru trebuie să se regăsească în orice teorie termodinamică coerentă.

Pentru construcția unei astfel de teorii, care să modeleze comportamentul termodinamic al mediilor continue trebuie introdus un set de **mărimi primitive** și un set de **mărimi derivate** (deduse, definite). Proprietățile fundamentale ale acestora din urmă sunt precizate prin **Axiome** în raport cu primele. Scopul principal al acestui paragraf este de a prezenta un cadru axiomatic coerent pentru înțelegerea modelelor specifice discutate în capitolele următoare.¹

În această parte a lucrării vom nota cu \mathcal{B} un corp continuu deformabil (amorf), cu \mathcal{B}_k o configurație de referință a sa (forma sa materială și geometrică nedefor-mată) și cu \mathcal{B}_t configurația sa actuală (deformată).² \mathcal{B}_k și \mathcal{B}_t sunt submulțimi deschise în \mathbb{R}^3 . **Cantitățile primitive** ale teoriei sunt *mișcarea* (deformarea)

¹Pentru cititorul dornic să se informeze pe larg asupra fundamentelor acestei științe recomandăm tratatele lui C.Truesdell [1969], I.Müller [1985] ca și C.Truesdell, R.Muncaster [1980].

²Pentru amănunte privind axiomatica corpurilor în MMC în sensul lui Noll, a se vedea C.Truesdell [1977], S.Cleja-Țigoiu, N.Cristescu [1985].

corpului $\chi : \mathcal{B}_k \times \mathbf{R} \rightarrow \mathcal{V}$ și câmpul de temperatură $T : \mathcal{B}_t \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}_+^*$. Mai sus s-a notat cu \mathcal{V} spațiul translațiilor lui \mathbf{R}^3 și cu $\mathbf{R}_+^* = (0, \infty)$. Despre câmpurile χ și T se presupune că sunt suficient de regulate pentru a avea sens calculele ce urmează (în axiomatica MMC se presupune, spre exemplu, că mișcarea este o funcție de clasă C^2 în raport cu timpul și cu spațiul).

Perechea (χ, T) se numește *proces termocinetic*.

Starea termodinamică a corpului este descrisă de cunoașterea unui număr de funcții (diferite de tensorul tensiune al lui Cauchy). Acestea sunt U - energia internă a corpului, W - puterea netă a tensiunilor, Q - încălzirea corpului și H - entropia sa. Acestea depind de corpul ce se studiază și de timp. Dintre ele U, Q, H sunt specifice câmpului termodinamicii. Puterea tensiunilor este definită la nivelul MMC (a se vedea citările de mai sus ca și L.Dragoș [1983]). Aceste funcții sunt principalele mărimi derivate ale teoriei. Există diverse interpretări ale acestor funcții. Energia internă este gândită ca o măsură macroscopică (de continuum) a " agitației termice " a moleculelor corpului (sau a energiei cinetice relative a acestora, Truesdell C., Muncaster R.G. [1980]³). Experiențe foarte simple arată că încălzirea Q a corpului poate fi de două tipuri $Q = Q_b + Q_c$. Q_b este încălzirea de masă (volumică), în timp ce Q_c este încălzirea de contact (sau de suprafață). Aceste două tipuri de încălzire modelează radiația și conducția (fenomene fizice complet distincte). Cititorul poate observa cu ușurință asemănarea dintre modul în care se modelează încălzirea unui corp și modul, mai familiar, în care sunt modelate în MMC forțele ce acționează asupra unui corp (forțe masice sau volumice și forțele de contact). Probabil că noțiunea cel mai dificil de înțeles este entropia H . În legătură cu ea există o seamă de interpretări posibile. Ne vom limita să observăm că la nivelul termodinamicii continuumului s-a remarcat că, în timpul unor clase foarte largi de experimente, majoritatea corpurilor "își pierd" unele proprietăți. Aceste schimbări, adesea foarte importante, au fost puse pe seama unei mărimi caracteristice (funcție de material) pe care unii oameni de știință o numesc limita de încălzire a corpului (a se vedea spre exemplu Truesdell C. [1969]). Din punctul de vedere al teoriilor de continuum această mărime ar indica " existența unei limite pentru viteza de transformare a energiei în căldură fără producerea de putere mecanică ". Conținutul acestei observații se constituie ca o axiomă a teoriei. Cea mai mică asemenea margine superioară este legată de noțiunea de entropie (sau mai precis entropia este definită de aceasta) prin

$$\mathcal{L}(\mathcal{B}, t) = T(t)\dot{H}(\mathcal{B}, t)$$

Înainte de a trece la prezentarea axiomelor teoriei și a consecințelor lor, vom

³Desigur aceste interpretări ies din cadrul unei teorii clasice de continuum. Ele își găsesc o justificare completă doar în cadrul unor teorii " microscopice " care să poată fi în concordanță cu teoriile " macroscopice ". De aceea cititorului dornic să cunoască mai profund aceste domenii fundamentale îi recomandăm L.Dragoș [1975], I.Müller [1985] și cu deosebire C.Truesdell și R.Muncaster [1980]

observa că teoriile microscopice (spre exemplu diferite teorii cinetice ale gazelor, teoria legilor constitutive ale soluțiilor de polimerilor, etc. - a se vedea I.Müller [1985], C.Truesdell, R.Muncaster [1980], Curtis și alții [1976]) sunt singurele care dau o interpretare (complet plauzibilă) noțiunii de entropie (interpretare ce se pare că a fost pentru prima dată folosită consecvent de Gibbs [1902]). Entropia este gândită , în acest sens, ca o măsură a dezordinii sistemului discret de " puncte materiale " (ce reprezintă, pentru un observator microscopic, moleculele corpului considerat). Media acestei mărimi, în sensul fiecărei teorii, definește densitatea de entropie de continuum (câmpul de entropie) despre care discutăm în cadrul termodinamicii mediilor continue.

Mărimile definite mai sus și atașate corpului \mathcal{B} pot fi, în anumite condiții, reprezentate prin densități, sau mărimi specifice, definite la nivelul particulei materiale (câmpuri). Astfel, presupunând că funcțiile U , Q_b , H sunt aditive de masă și absolut continue, W este aditivă de volum și absolut continuă, iar Q_c este aditivă de suprafață și absolut continuă o teoremă cunoscută de analiză reală conduce la existența unor densități specifice u , s , h , η pentru care avem reprezentările

$$\begin{aligned}
 U(\mathcal{B}, t) &= \int_{\mathcal{B}_t} u(\mathbf{x}, t) \rho(\mathbf{x}, t) dV \\
 W(\mathcal{B}, t) &= \int_{\mathcal{B}_t} \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) dV \\
 Q(\mathcal{B}, t) &= \int_{\mathcal{B}_t} s(\mathbf{x}, t) \rho(\mathbf{x}, t) dV + \int_{\partial \mathcal{B}_t} h(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) dA = \\
 &= \int_{\mathcal{B}_t} s(\mathbf{x}, t) \rho(\mathbf{x}, t) dV - \int_{\partial \mathcal{B}_t} \mathbf{q}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}, t) dA \\
 H(\mathcal{B}, t) &= \int_{\mathcal{B}_t} \eta(\mathbf{x}, t) \rho(\mathbf{x}, t) dV
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

În ecuațiile (1.1) sunt utilizate notațiile clasice. Astfel \mathbf{T} reprezintă tensorul tensiunilor al lui Cauchy, $\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T)$, ρ este câmpul densității de masă, iar \mathbf{v} este câmpul vitezelor. Relația $h(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) = -\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}, t)$ se obține prin -tr-o metodă asemănătoare cu metoda lui Cauchy pentru reprezentarea vectorului tensiune $\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) = \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}, t)$. În cele de mai sus \mathbf{n} reprezintă versorul normalei exterioare în $\mathbf{x} \in \partial \mathcal{B}_t$ (frontiera configurației de la momentul actual t a corpului \mathcal{B}), punctul (în (1.1)₂, (1.1)₃, etc.) reprezintă produsul scalar al mărimilor respective. În același timp, semnul " - " în a doua parte a formulei (1.1)₃ este o convenție (ca indicând faptul că vectorul flux de căldură \mathbf{q} este orientat în

sens invers gradientului temperaturii pe suprafața considerată, cel puțin în cazul în care inegalitatea lui Fourier este adevărată - a se vedea paragraful 3 al acestui capitol).

Corpul \mathcal{B} trebuie să se supună axiomelor MMC și deci, pentru câmpuri suficient de regulate, următoarele ecuații (ce leagă între ele o parte a funcțiilor de mai sus) trebuie să fie verificate

$$\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (1.2)$$

ecuația de continuitate (conservare locală a masei);

$$\rho \dot{\mathbf{v}} = \operatorname{div} \mathbf{T} + \rho \mathbf{b}, \quad (1.3)$$

ecuațiile de mișcare (de conservare locală a impulsului);

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^T, \quad (1.4)$$

ecuația de conservare locală a momentului (care pune în evidență simetria tensorului tensiunilor al lui Cauchy). În ecuațiile de mai sus câmpul \mathbf{b} reprezintă densitatea forțelor masice ce acționează asupra particulei materiale din punctul \mathbf{x} iar punctul este notația clasică pentru derivata materială $\dot{\cdot} = \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla$

Acestor axiome li se adaugă axiome specifice de termodinamică. **Prima axiomă** a termodinamicii mediilor continue (TDMC) descrie bilanțul global energetic în corpul considerat (este cunoscută sub denumirea de prima lege a TD) și este dată de următoarea relație

$$\dot{U} = W + Q \quad (1.5)$$

Ea reprezintă observația (experimentală) conform căreia, dacă într-un proces se produce putere atunci se poate schimba energia corpului și, pe de altă parte, încălzirea corpului poate produce putere. Bilanțul variației energiei este deci realizat de încălzirea corpului și puterea mecanică produsă. Axioma trebuie interpretată ca o restricție asupra mărimilor ce intră în ea și nu ca o definiție a vreuneia dintre ele. Local, în condiții de regularitate a densităților introduse mai sus, axioma se scrie

$$\rho \dot{u} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{D} - \operatorname{div} \mathbf{q} + \rho s \quad (1.6)$$

Observațiile făcute mai sus cu privire la ” limita de încălzire ” și legătura sa cu entropia corpului H, conduc la introducerea unei ” **a doua legi** ” a termodinamicii (**axiomă**), numită de unii autori (C. Truesdell [1969]) ” **inegalitatea lui Clausius și Planck** ”, care se reprezintă matematic prin

$$T(t)\dot{H}(\mathcal{B}, t) \geq Q(\mathcal{B}, t)$$

Această formă a ” legii a doua ” este improprie utilizării ei pentru obținerea de restricții asupra *răspunsului termodinamic* al materialului, cel puțin în cazul unor procese neomogene (așa cum sunt procesele termodinamice la care ne referim în cadrul acestei lucrări). ⁴ Este de reținut că sensul acestei inegalități trebuie înțeles ca punând în evidență un principiu matematic din care să rezulte proprietatea celor mai multe ” materiale ” conform căreia pentru ele există clase largi de procese termocinetice în care se produc disipări (pierderi). Acest fapt poate fi pus în evidență printr-o inegalitate (numită cel mai adesea inegalitatea disipării).

Procesele termocinetice în care se realizează egalitatea pentru orice timp t se zic **reversibile**. Orice alt proces termocinetic se zice **ireversibil**. Evident proprietatea este constitutivă, în sensul că un proces poate reversibil pentru un corp și ireversibil pentru un altul.

Temperatura este modelată matematic ca un câmp scalar, independent de mișcarea corpurilor.

Un principiu de limitare **local**, corespunzând observațiilor legate de disipare (făcute mai sus), care formează conținutul așa zisei ” **legea a doua** ” a termodinamicii va fi introdus sub forma inegalității lui Clausius și Duhem.⁵ Aceasta cere ca producția de entropie (în orice punct **x** la orice moment de timp t) să fie nenegativă pe orice proces termocinetic. Global, pe orice parte \mathcal{P} a corpului aceasta se poate scrie

$$\dot{H} - \int_{\mathcal{P}_t} \rho \frac{s}{T} dV + \int_{\partial \mathcal{P}_t} \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}}{T} dA \geq 0$$

Noi vom utiliza forma locală a acestei inegalități și anume

$$\rho \dot{\eta} + \operatorname{div} \left(\frac{\mathbf{q}}{T} \right) - \rho \frac{\dot{s}}{T} \geq 0 \quad (1.7)$$

Este de observat că unii autori (vezi spre exemplu I.Müller[1985]) inter-

⁴In Anexa I a lucrării prezentăm, pe scurt, unele observații, rezultate și comentarii privind această formă a ” legii a doua ” a TD.

⁵Sensul acestei inegalități este mai ușor de înțeles în cadrul unor teorii ” microscopice ” cum ar fi Teoria cinetică a gazelor

pretează aceste inegalități pornind de la observația că entropia specifică η , verifică o **ecuație de bilanț** de forma

$$\rho\dot{\eta} + \operatorname{div}\left(\frac{\mathbf{q}}{T}\right) - \rho\frac{\dot{s}}{T} = \rho\gamma$$

(sau una globală corespunzătoare) și impunând ca producția de entropie γ să fie nenegativă pe orice proces termocinetic. Introducând **densitatea de entropie liberă** a lui Helmholtz prin

$$\psi(\mathbf{x}, t) = u(\mathbf{x}, t) - T(\mathbf{x}, t)\eta(\mathbf{x}, t) \quad (1.8)$$

inegalitatea de mai sus devine imediat

$$\rho\dot{\psi} - \mathbf{T} \cdot \mathbf{D} + \rho\dot{T}\eta + \frac{1}{T}\mathbf{q} \cdot \nabla T \leq 0 \quad (1.9)$$

Pentru ca ecuațiile de mai sus să devină explicite este necesar să cunoaștem "răspunsul materialului" (pe orice proces termocinetic). Aceasta presupune descrierea modului în care funcțiile (constitutive) \mathbf{T} , u (sau ψ), \mathbf{q} și η depind de procesul termocinetic. Se presupune apriori că acestea sunt determinate (în orice punct \mathbf{x} , la orice moment de timp t) de valorile unor funcționale pe istoria procesului termocinetic la care a fost supusă o vecinătate a particulei materiale $X \in \mathcal{B}$. Prin urmare se afirmă existența unor funcționale (constitutive) \bar{T} , \bar{q} , \bar{u} și $\bar{\eta}$ așa încât

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{T}}(\chi^t, T^t)$$

$$u(\mathbf{x}, t) = \bar{u}(\chi^t, T^t)$$

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{q}}(\chi^t, T^t)$$

$$\eta(\mathbf{x}, t) = \bar{\eta}(\chi^t, T^t)$$

În relațiile de mai sus am notat, pentru o funcție $f : \mathbf{R} \rightarrow A$ cu $f^t : [0, \infty) \rightarrow A$, funcția definită prin $f^t(s) = f(t - s)$, pentru orice $s \in [0, \infty)$, care se numește istoria funcției f până la momentul t . Corpurile ce vor face obiectul de studiu al acestei cărți sunt materiale simple de tip fluid. Pentru această clasă largă de materiale teoria legilor constitutive (a se vedea spre exemplu

C. Truesdell [1977], S.Cleja-Tigoiu și N.Cristescu [1985] : "Teorema fundamentală asupra fluidelor") arată că dependența funcționalelor constitutive de istoria mișcării se face prin intermediul tensorului Cauchy-Green (la dreapta) în mișcarea relativă (C_t^i). Un principiu utilizat adesea (care reprezintă imposibilitatea unei opțiuni apriorice asupra tipului dependențelor funcționale din relațiile de mai sus), numit **principiul echiprezenței**, conduce la presupunerea că toate funcționalele constitutive sunt apriori dependente de C_t^i în loc de χ^t . Funcționalele constitutive trebuie să verifice Axiomele teoriei (ecuațiile de bilanț (1.3), (1.4), (1.6) și inegalitatea disipării - oricare ar fi aceasta), oricare ar fi procesul termocinetic la care este supus corpul. Această remarcă face obiectul **axiomei** cunoscută sub denumirea de **Principiul Determinismului Termodinamic** (a se vedea Anexa 1). Pentru utilizarea acestui principiu trebuie satisfăcute ecuațiile (1.3) și (1.6). Pentru aceasta se vor alege câmpurile \mathbf{b} și s astfel ca ecuațiile să fie bilanțate (corespunzător fiecărei alegeri a procesului termocinetic)⁶. Inegalitatea (1.9), pe care o vom utiliza, va impune anumite restricții asupra funcționalelor constitutive considerate (care poartă denumirea de **restricții constitutive**). Odată cu eliminarea câmpurilor \mathbf{b} și s obținem, utilizând observațiile de mai sus, **Principiul Efectiv al Determinismului Termodinamic** (PEDT), care pentru un corp fluid se enunță astfel

Corpul fluid \mathcal{B} este un corp termodinamic dacă există funcționalele \mathcal{T} , q , u și η definite pe istoriile lui C_t și T așa încât

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \mathcal{T}(C_t^i, T^t)$$

$$u(\mathbf{x}, t) = u(C_t^i, T^t)$$

$$q(\mathbf{x}, t) = q(C_t^i, T^t)$$

$$\eta(\mathbf{x}, t) = \eta(C_t^i, T^t)$$

iar inegalitatea (1.9) este satisfăcută oricare ar fi procesul termocinetic la care a fost supus corpul până la momentul t , pentru orice t .⁷ În fapt, PEDT reprezintă **axioma fundamentală** a termodinamicii mediilor continue. Acest principiu indică, calea de urmat pentru obținerea unor informații suplimentare asupra structurii funcționalelor constitutive, informații ce poartă numele de **restricții constitutive**. Din punct de vedere teoretic general nu avem alte mijloace (axiome, etc.) pentru a putea obține " limitări " asupra formei funcționalelor de răspuns (constitutive).

⁶Există și alte modalități de a utiliza aceste relații. I Shih Liu [1972] construiește o metodă de multiplicatori Lagrange pe care o aplică și care este prezentată și în Müller [1985], în timp ce Suliciu [1983] introduce o metodă ce se bazează pe dependența soluției sistemului de ecuații diferențiale de datele inițiale, utilizată de Făciu [1985]

⁷Este ușor de observat că în descrierea de mai sus, aserțiunea - oricare ar fi procesul, revine la oricare ar fi istoria perechii (C_t, T).

1.2 Restricții constitutive termodinamice pentru fluidul lui Navier și Stokes și gazul perfect

Fluidul lui Navier și Stokes, privit din punctul de vedere al termodinamicii mediilor continue, este un corp continuu simplu, de tip fluid (numit și fluidul vâscos, liniar și izotrop). În cele ce urmează vom enunța PEDT pentru acesta. În acest scop să facem mai întâi precizarea că alegerea unei forme particulare pentru funcționalele constitutive se face respectând axiomele introduse. Aceasta cere, în primul rând, precizarea modului în care funcționalele depind de (C_t^i, T^t) . Pentru fluidul izotrop, vâscos și liniar " se știe " că tensorul tensiunilor (presiunilor) al lui Cauchy, \mathbf{T} , este dat de

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = -p(\rho(\mathbf{x}, t), T(\mathbf{x}, t)) \mathbf{I} + \lambda(\rho(\mathbf{x}, t), T(\mathbf{x}, t))(tr \mathbf{D}(\mathbf{x}, t)) \mathbf{I} + 2\mu(\rho(\mathbf{x}, t), T(\mathbf{x}, t)) \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) \quad (1.10)$$

și prin urmare dependența de (C_t^i, T^t) se face, în acest caz, prin intermediul mărimilor ρ , \mathbf{D} , T și ∇T . Există mai multe căi de a obține această ecuație. Se poate apela la " Teorema de aproximare " a lui Coleman și Noll [1960]. Aceasta însă, deși un rezultat matematic foarte frumos, impune restricții importante asupra proceselor ce pot fi luate în considerație. Pe de altă parte se poate presupune că dependența funcțională a tensiunii de C_t^i se realizează doar prin valoarea acestuia la $s = 0$, adică $C_t^i(\mathbf{x}, s)|_{s=0} = 2\mathbf{D}(\mathbf{x}, t)$. În același timp dependența de $T^t(\mathbf{x}, s)$ se realizează prin T și ∇T . Aceste ipoteze conduc la

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = -p(\rho, T) \mathbf{I} + f(\rho, \mathbf{D}, T, \nabla T)$$

care este legea (generală) pentru un fluid vâscos conducător de căldură. Dacă utilizăm acum teorema lui Wang de reprezentare a funcțiilor tensoriale izotrope (cu variabile un tensor simetric și un vector - a se vedea Wang [1970] și Anexa 2) și se ține cont de ipoteza de liniaritate a funcției de răspuns a tensiunii în raport cu variabilele sale, se obține relația (1.10). O prezentare mai detaliată a unui rezultat similar, privind fluxul de căldură, se face în paragraful următor. Cum apriori nu avem motive să considerăm alte liste de variabile pentru celelalte funcții de răspuns (Principiul Echiprezenței), rezultă că " domeniul constitutiv " este

$$\Delta = \{ M = (\rho, T, \mathbf{D}, \mathbf{g}) \mid \rho \in \mathbf{R}_+^*, T \in \mathbf{R}_+^*, \mathbf{D} \in SLin(\mathcal{V}, \mathcal{V}), \mathbf{g} \in \mathcal{V} \} \quad (1.11)$$

unde am notat cu $S_{Lin}(\mathcal{V}, \mathcal{V})$ mulțimea aplicațiilor liniare și simetrice dela spațiul vectorial \mathcal{V} cu valori \mathcal{V} . Prin urmare PEDT se enunță acum astfel

Fluidul vâscos, liniar și izotrop este un corp termodinamic dacă există funcțiile p, λ, μ, F, H și \mathbf{Q} definite pe Δ , astfel ca

$$\begin{aligned}\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) &= -p(\rho, T)\mathbf{I} + \lambda(\rho, T)(\text{tr}\mathbf{D})\mathbf{I} + 2\mu(\rho, T)\mathbf{D} \\ \psi(\mathbf{x}, t) &= F(\rho, T, \mathbf{D}, \mathbf{g}) \\ \eta(\mathbf{x}, t) &= H(\rho, T, \mathbf{D}, \mathbf{g}) \\ \mathbf{q}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{Q}(\rho, T, \mathbf{D}, \mathbf{g})\end{aligned}\tag{1.12}$$

iar inegalitatea (1.9) are loc oricare ar fi procesul termocinetic la care a fost supus corpul până la momentul t , pentru orice t .

Mai sus (și în cele ce urmează) s-a notat $\mathbf{g} = \nabla T$.

Observând modul în care funcțiile de răspuns depind de (χ^t, T^t) suntem conduși la următorul rezultat, ce facilitează utilizarea inegalității C-D.

Fie $T_o \in \mathbf{R}_+$, $\dot{T}_o \in \mathbf{R}$, $\mathbf{g}_o \in \mathcal{V}$, $\mathbf{g}'_o \in \mathcal{V}$, $\mathbf{L}_o, \mathbf{L}'_o \in \text{Lin}(\mathcal{V}, \mathcal{V})$. Atunci există o mișcare χ și un câmp de temperatura T așa încât pentru timpul t și poziția \mathbf{x} fixate, arbitrare să avem

$$\begin{aligned}\nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{L}_o; \quad \frac{d}{dt} \nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{L}'_o; \\ T(\mathbf{x}, t) &= T_o; \quad \dot{T}(\mathbf{x}, t) = \dot{T}_o; \\ \nabla T(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{g}_o; \quad \frac{d}{dt} \nabla T(\mathbf{x}, t) = \mathbf{g}'_o.\end{aligned}\tag{1.13}$$

Pentru demonstrație este suficient să observăm că dacă definim un câmp de viteze și un câmp de temperatură prin

$$\mathbf{v}(\mathbf{y}, \tau) = \mathbf{v}_o + \mathbf{L}_o[\mathbf{y} - \mathbf{x}] + \mathbf{L}'_o[\mathbf{y} - \mathbf{x}](\tau - t)\tag{1.14}$$

și respectiv

$$T(\mathbf{y}, \tau) = T_o + \mathbf{g}_o \cdot [\mathbf{y} - \mathbf{x}] + (\dot{T}_o - \mathbf{g}_o \cdot \mathbf{v}_o)(\tau - t) + \mathbf{g}'_o \cdot [\mathbf{y} - \mathbf{x}](\tau - t) \quad (1.15)$$

și ținem cont de definiția derivatei materiale, un calcul direct conduce imediat la obținerea relațiilor din enunț. Pentru a încheia demonstrația trebuie să observăm că mișcarea χ , pentru care câmpul de viteze este definit de relația (1.14), este soluția problemei Cauchy

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{y}}{d\tau} &= \mathbf{v}(\mathbf{y}, \tau) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{x} \end{aligned} \quad (1.16)$$

unde $\mathbf{y}(\tau) = \chi(\mathbf{X}, \tau)$. Având în vedere forma câmpului \mathbf{v} , problema (1.16) are soluție unică (teorema lui Peano- Cauchy) pe orice interval finit de timp $[t, a]$.

Enunțul va fi folosit în sensul că vom putea afirma că: dacă inegalitatea C-D are loc pentru orice proces termocinetic la care a fost supus corpul până la momentul t , atunci are loc pentru o alegere arbitrară a valorilor funcțiilor $T, \dot{T}, \mathbf{g}, \dot{\mathbf{g}}, \mathbf{D}, \dot{\mathbf{D}}$, la momentul t în \mathbf{x} , și reciproc. Evident, alegerea arbitrară a valorii lui \mathbf{D} rezultă din alegerea posibilă pentru $\mathbf{L} \equiv \nabla \mathbf{v}$, și definiția lui $\mathbf{D} \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T)$.

Cu acestea putem enunța teorema de caracterizare (numită adesea de tip Coleman, căci acesta a dat pentru prima dată o asemenea teoremă de caracterizare pentru materialele simple cu memorie întârziată ; Coleman[1964]) termodinamică a fluidului vâscos, liniar, izotrop al lui Navier și Stokes.

Fluidul vâscos, liniar, izotrop al lui Navier și Stokes verifică PEDT dacă și numai dacă

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{x}, t) &= \bar{F}(\rho, T) \\ \eta(\mathbf{x}, t) &= -\bar{F}_T(\rho, T), \\ p(\mathbf{x}, t) &= \rho^2 \bar{F}_\rho(\rho, T), \\ 3\lambda(\rho, T) + 2\mu(\rho, T) &\geq 0, \quad \mu(\rho, T) \geq 0 \\ -\lambda(\rho, T)(tr\mathbf{D})^2 - 2\mu(\rho, T)tr\mathbf{D}^2 + \frac{1}{T}\mathbf{Q}(\rho, T, \mathbf{D}, \mathbf{g}) \cdot \mathbf{g} &\leq 0 \end{aligned} \quad (1.17)$$

pentru orice $\rho, T \in \mathbf{R}_+^*$, $\mathbf{g} \in \mathcal{V}$ și $\mathbf{D} \in SLin(\mathcal{V}, \mathcal{V})$.

Pentru demonstrație se observă că satisfacerea inegalității (C- D) de către funcțiile de răspuns (1.12) (conform cu PEDT) este echivalentă, prin utilizarea lemei precedente, cu satisfacerea inegalității

$$\begin{aligned}
 & -\rho^2 F_\rho \operatorname{tr} \mathbf{D} + (\rho F_T + \rho H) \dot{T} + \rho F_{\mathbf{g}} \cdot \dot{\mathbf{g}} + \rho F_{\mathbf{D}} \cdot \dot{\mathbf{D}} + \\
 & p \operatorname{tr} \mathbf{D} - \lambda (\operatorname{tr} \mathbf{D})^2 - 2\mu \operatorname{tr} \mathbf{D}^2 + \frac{1}{T} \mathbf{Q} \cdot \mathbf{g} \leq 0
 \end{aligned} \tag{1.18}$$

oricare ar fi $\rho, T \in \mathbf{R}_+^*$, $\mathbf{g}, \dot{\mathbf{g}} \in \mathcal{V}$ și $\mathbf{D}, \dot{\mathbf{D}} \in S\operatorname{Lin}(\mathcal{V}, \mathcal{V})$, unde am ținut cont de ecuația de continuitate.

În această parte a lucrării, notăm cu $A_x(x, y, \dots)$ derivata parțială a funcției A , în raport cu x . Înțelesul notațiilor vectoriale, $F_{\mathbf{g}}$ și respectiv tensoriale, $F_{\mathbf{D}}$ este evident (a se vedea și Anexa 2).

Având în vedere că \bar{F} (și deci și derivatele sale), $H, \mathbf{Q}, p, \lambda$ și μ nu depind de $\dot{T}, \dot{\mathbf{g}},$ și $\dot{\mathbf{D}}$, rezultă că termenii liniari în aceste mărimi trebuie să se anuleze. Prin urmare primele două relații (1.17) sunt satisfăcute. Cu aceasta inegalitatea reziduală devine

$$(p - \rho^2 \bar{F}_\rho) \operatorname{tr} \mathbf{D} - \lambda (\operatorname{tr} \mathbf{D})^2 - 2\mu \operatorname{tr} \mathbf{D}^2 + \frac{1}{T} \mathbf{Q} \cdot \mathbf{g} \leq 0 \tag{1.19}$$

pentru $\rho, T \in \mathbf{R}_+^*, \mathbf{g} \in \mathcal{V}$ și $\mathbf{D} \in S\operatorname{Lin}(\mathcal{V}, \mathcal{V})$. Alegând $\mathbf{g} = 0, \mathbf{D} = s\mathbf{I}$, cu $s \in \mathbf{R}$ arbitrar, inegalitatea este satisfăcută dacă $p = \rho^2 \bar{F}_\rho$ și, pe un proces izotermic, inegalitatea reziduală se scrie

$$-\lambda(\rho, T)(\operatorname{tr} \mathbf{D})^2 - 2\mu \operatorname{tr} \mathbf{D}^2 \leq 0$$

pentru orice $\rho, T \in \mathbf{R}_+^*, \mathbf{D} \in S\operatorname{Lin}(\mathcal{V}, \mathcal{V})$. Inegalitatea de mai sus este echivalentă cu condițiile (1.17)_{4,5} din enunț. Întreg ansamblul de condiții obținute dau răspuns complet teoremei.

Incheiem, acest paragraf, cu câteva observații. Reamintim că pozitivitatea vâscozității cinematice μ și inegalitatea Stokes ($3\lambda + 2\mu \geq 0$) sunt condiții extrem de utile în demonstrarea teoremei de unicitate a soluției problemei cu date inițiale și la frontieră, precum și în demonstrarea stabilității asimptotice a stării de repaus (sau a stabilității soluției în raport cu datele inițiale) pentru fluidul vâscos al lui Navier- Stokes.

Primele trei relații din (1.17) arată că energia liberă specifică ψ (dar și energia internă specifică u) este determinabilă în experiențe termostactice (de echilibru) și, mai mult, ea este potențial termodinamic (în sensul termodinamicii proceselor reversibile), căci determină entropia specifică η și presiunea p .

La acest nivel de generalitate nu se pot obține informații suplimentare prin prelucrarea inegalității reziduale. Pentru necesitățile paragrafului următor, vom observa că inegalitatea (1.17)₆ conduce la introducerea "funcției de disipare"

$$\Gamma : \Delta \longrightarrow \mathbf{R}$$

$$\Gamma(M) = -\lambda(\rho, T)(\text{tr} \mathbf{D})^2 - 2\mu(\rho, T)\text{tr} \mathbf{D}^2 + \frac{1}{T} \mathbf{Q}(M) \cdot \mathbf{g}$$

cu care inegalitatea devine

$$\Gamma(M) \leq 0, \text{ pentru orice } M \in \Delta$$

1.3 Fluxul de căldura și energia internă în vecinătatea stărilor de echilibru. Ecuatia de propagare

În ipotezele constitutive s-a presupus că fluidul pe care îl analizăm este izotrop din punct de vedere termodinamic (deci cele patru funcții de răspuns sunt izotrope). Pentru fluxul de căldură această ipoteză conduce, prin aplicarea teoremei de reprezentare a lui Wang, la o reprezentare particulară a lui \mathbf{Q} . Observând că fluxul de căldură depinde de un vector $\mathbf{g} \in \mathcal{V}$ și de un tensor simetric $\mathbf{D} \in S\text{Lin}(\mathcal{V}, \mathcal{V})$ se constată imediat că mulțimea de generatori corespunzătoare este

$$\mathbf{g}, \mathbf{D}\mathbf{g}, \mathbf{D}^2\mathbf{g},$$

iar mulțimea completă (ireductibilă) a invariantilor corespunzători este:

$$\mathbf{J} = \{\mathbf{g} \cdot \mathbf{g}, \text{tr} \mathbf{D}, \text{tr} \mathbf{D}^2, \text{tr} \mathbf{D}^3, \mathbf{D}\mathbf{g} \cdot \mathbf{g}, \mathbf{D}^2\mathbf{g} \cdot \mathbf{g}\}$$

Cu aceste remarci teorema de reprezentare a funcțiilor izotrope conduce la

$$\mathbf{Q}(\rho, T, \mathbf{g}, \mathbf{D}) = q_1(\rho, T, \mathbf{J})\mathbf{g} + q_2(\rho, T, \mathbf{J})\mathbf{D}\mathbf{g} + q_3(\rho, T, \mathbf{J})\mathbf{D}^2\mathbf{g} \quad (1.20)$$

unde q_i sunt funcții scalare izotrope.

Evident, se pune acum întrebarea: în ce condiții se poate obține "celebra" lege a lui Fourier (de reprezentare a fluxului de căldură) ?

Pentru un fluid (vâscos) starea de echilibru este definită de punctele $M_e = (\rho_e, T_e, \mathbf{0}, 0) \in \Delta$, unde ρ_e, T_e pot depinde de \mathbf{x} , dar nu de t (evident ecuațiile (1.2), (1.3), (1.4) și (1.6) trebuie să fie îndeplinite).

Se poate observa imediat că legea lui Fourier poate fi întotdeauna obținută în ipoteza răspunsului liniar în ambele variabile \mathbf{g}, \mathbf{D} . Ipoteza ni se pare însă prea "tare" (pe de o parte) și ascunzând esența problemei. Trebuie să observăm în plus că, până în prezent nu există experiențe dinamice (controlabile) din care să poată fi pusă în evidență o asemenea relație. În plus, inegalitatea reziduală a disipării (1.17)₀, pune în evidență faptul că funcția de disipare Γ își atinge maximum pe stările de echilibru

$$\Gamma(M) \leq \Gamma(M_e) = 0 \quad (1.21)$$

pentru orice $M \in \Delta$. Vom utiliza (în ipoteze de regularitate pentru λ, μ și \mathbf{Q}) un procedeu cunoscut de stabilire a condițiilor de maxim (care indică faptul că relația de mai sus este echivalentă cu asertarea ei pe orice "direcție" din Δ ce trece prin M_e).

Pentru aceasta se consideră un punct arbitrar fixat $M_1 \in \Delta$ și se observă că pentru orice $M \in M_e M_1$ avem $M = M_e + sM_1$. Se definește funcția

$$\tilde{\Gamma}_{M_1} : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \quad \text{prin} \quad \tilde{\Gamma}_{M_1}(s) = \Gamma(M_e + sM_1)$$

și se observă că (1.21) revine la

$$\tilde{\Gamma}_{M_1}(s) \leq \tilde{\Gamma}_{M_1}(0) = 0 \quad \forall s \in \mathbf{R}, \quad M_1 \in \Delta \quad (1.22)$$

Atunci aceasta este echivalentă cu condițiile

$$\frac{d\tilde{\Gamma}_{M_1}}{ds} \Big|_{s=0} = 0; \quad \frac{d^2\tilde{\Gamma}_{M_1}}{ds^2} \Big|_{s=0} \leq 0 \quad \forall M_1 \in \Delta. \quad (1.23)$$

Observând că

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}_{M_1}(s) &= -[\lambda(\rho_e + s\rho_1, T_e + sT_1)(tr\mathbf{D}_1)^2 + 2\mu(\rho_e + s\rho_1, T_e + sT_1, s\tilde{\mathbf{J}}_1)tr\mathbf{D}_1^2]s^2 \\ &+ \frac{1}{T_e + sT_1}[q_1(\rho_e + s\rho_1, T_e + sT_1, s\tilde{\mathbf{J}}_1)\mathbf{g}_1 + q_2(\rho_e + s\rho_1, T_e \\ &+ sT_1, s\tilde{\mathbf{J}}_1)\mathbf{D}_1[\mathbf{g}_1]s + q_3(\rho_e + s\rho_1, T_e + sT_1, s\tilde{\mathbf{J}}_1)\mathbf{D}_1^2[\mathbf{g}_1]s^2] \cdot \mathbf{g}_1 s^2\end{aligned}$$

Se constată imediat că (1.23)₁ este automat satisfăcută ($\mathbf{q}(M_e) = 0$, din (1.20)), în timp ce (1.23)₂ conduce la

$$-\lambda(\rho_e, T_e)(tr\mathbf{D}_1)^2 - 2\mu(\rho_e, T_e)tr\mathbf{D}_1^2 + \frac{1}{T_e}q_1(\rho_e, T_e)\mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{g}_1 \leq 0 \quad (1.24)$$

pentru orice $\mathbf{g}_1 \in \mathcal{V}$ și $\mathbf{D}_1 \in SLin(\mathcal{V}, \mathcal{V})$. Urmând calea deja cunoscută se constată că aceasta conduce cu necesitate la

$$q_1(\rho_e, T_e) \leq 0, \quad \forall \rho_e, T_e \in \mathbf{R}_+^* \quad (1.25)$$

Cu această observație suntem îndreptățiți acum să considerăm \mathcal{V} o vecinătate suficient de mică a lui $M_e \in \Delta$ și să vedem care este forma lui \mathbf{Q} aici. Pentru aceasta, considerăm că $|\rho - \rho_e|$, $|T - T_e|$, $|\mathbf{g}|$, $|\mathbf{D}|$, sunt mici (în reprezentare adimensională în raport cu 1), ceea ce, cu alte cuvinte înseamnă că starea M este apropiată de starea (în vecinătatea) M_e . Dezvoltând în serie Taylor, până la termenii de ordinul întâi, fluxul de căldură în vecinătatea punctului M_e , obținem

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}(\rho, T, \mathbf{g}, \mathbf{D}) &= \mathbf{Q}(M_e) + \mathbf{Q}_\rho(M_e)(\rho - \rho_e) + \mathbf{Q}_T(M_e)(T - T_e) \\ &+ \mathbf{Q}_\mathbf{g}(M_e)[\mathbf{g}] + \mathbf{Q}_\mathbf{D}(M_e)[\mathbf{D}] + \mathbf{O}(\epsilon^2)\end{aligned} \quad (1.26)$$

În urma unor calcule directe, ținând cont și de (20), ajungem la

$$\mathbf{Q}_\rho(M_e) = \mathbf{0}; \quad \mathbf{Q}_T(M_e) = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{Q}_\mathbf{g}(M_e)[\mathbf{g}] = q_1(M_e)\delta_{ij}g_j\mathbf{e}_i = q_1(M_e)\mathbf{g}$$

$$\mathbf{Q}_\mathbf{D}(M_e)[\mathbf{D}] = \mathbf{0}$$

Prin urmare, în vecinătatea stărilor de echilibru

$$\mathbf{Q}(M) = q_1(M_e)\mathbf{g} + O(\epsilon^2) \quad (1.27)$$

Cu aceasta se poate trage concluzia că, în vecinătatea stărilor de echilibru legea lui Fourier este o bună aproximare a fluxului de căldură pentru un fluid vâscos liniar, iar inegalitatea lui Fourier (1.25) este adevărată.

În mod tradițional se notează cu

$$k(\rho, T) \equiv -q_1(\rho, T) \quad (1.28)$$

și se numește coeficientul conductibilității termice. Cu aceasta concluziile de mai sus se subsumează în :

$$\begin{aligned} \mathbf{q}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{Q}(\rho, T, \nabla T, \mathbf{D}) = -k(\rho, T)\nabla T \\ k(\rho, T) &\geq 0 \end{aligned} \quad (1.29)$$

în vecinătatea unei stări de echilibru $M_e \in \Delta$. Formula (1.29) arată că în vecinătatea unei stări de echilibru fluxul de căldură \mathbf{q} este proporțional cu gradientul temperaturii și are sens opus. Uneori, prin generalizare, se presupune că fluxul de căldură este proporțional cu ∇T , dar mai mult coeficientul conductibilității termice este presupus dependent de T și nu de T_e .

În termostatică (termodinamica proceselor reversibile și omogene) se definesc două mărimi importante pentru caracterizarea comportamentului termodinamic: $c_v(\rho, T)$ - căldura specifică la volum constant și respectiv $l_v(\rho, T)$ - căldura latentă în raport cu volumul. În termodinamica proceselor reversibile și omogene se arată că (teoremele de potențialitate) aceste mărimi sunt determinate de energia liberă a lui Helmholtz (ca un potențial) prin

$$\begin{aligned} Jc_v(\rho, T) &= -T\bar{F}_{TT}(\rho, T) \\ Jl_v(\rho, T) &= \rho^2 T\bar{F}_{\rho T}(\rho, T) \end{aligned} \quad (1.30)$$

iar $c_v > 0$ prin axiome. În (1.30) J este constanta ce interconvertește unitățile de lucru în unități de căldură.

Deoarece am arătat că pentru fluidul lui Navier- Stokes ψ (și respectiv u) este determinabilă prin cunoașterea sa pe stările de echilibru (depinzând doar de ρ, T), sau prin experiențe de termostatică, rezultă că formulele (1.30) sunt îndeplinite. Atunci, având în vedere relațiile (1.8), (1.17), (1.30), obținem:

$$\rho \dot{u} = -p(\rho, T) \operatorname{tr} \mathbf{D} + J l_v(\rho, T) \operatorname{tr} \mathbf{D} + \rho J c_v(\rho, T) \dot{T} \quad (1.31)$$

unde s-a presupus că relațiile (1.30) și $c_v > 0$ au loc în vecinătatea unei stări de echilibru M_e .

Aceste observații împreună cu cele din paragraful precedent conduc la scrierea ecuației de bilanț a energiei interne (1.4), pentru un fluid de tip Navier și Stokes, în forma

$$\begin{aligned} & J \rho c_v(\rho, T) \dot{T} - k(\rho_o, T_o) \Delta T \\ & = -J l_v(\rho, T) \operatorname{div} v + \lambda(\rho, T) (\operatorname{tr} \mathbf{D})^2 + 2\mu(\rho, T) \operatorname{tr} \mathbf{D}^2 + \rho s \end{aligned} \quad (1.32)$$

care poartă numele de **ecuația de propagare a temperaturii**, sau a căldurii (în vecinătatea punctului (ρ_o, T_o)).

În majoritatea problemelor ce vor fi tratate în prezentul curs se va presupune că, coeficienții constitutivi $c_v, k, l_v, \lambda, \mu$ sunt constanți.

Se observă că există situații în care se consideră ecuația de propagare în care în locul celui de-al doilea termen din membrul stâng se va lua $\operatorname{div}(k(\rho, T) \operatorname{grad} T)$. O astfel de ecuație corespunde cazului în care se presupune apriori că legea lui Fourier este peste tot adevărată și coeficientul conductibilității termice va depinde atunci de valorile curențe ale densității de masă și ale temperaturii.

Adesea în modelele meteorologice se consideră aerul ca un gaz ideal, perfect. Deci pentru el se presupune că

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = -p(\rho, T) \mathbf{I}, \quad (1.33)$$

și

$$p(\rho, T) = R\rho T, \quad (1.34)$$

unde \mathbf{I} este tensorul unitate, iar R este constanta gazului.

Toate observațiile anterioare rămân valabile iar ecuația de propagare a căldurii se scrie

$$J\rho c_v \dot{T} - k\Delta T = J l_v \frac{\dot{\rho}}{\rho} + \rho s \quad (1.35)$$

Foarte utilă pentru descrierea unor procese omogene, este transcrierea ecuației (1.35) într-o formă ușor modificată. Pentru obținerea, ei amintim că, în termodinamica proceselor reversibile și omogene (a se vedea spre exemplu C.Truesdell [1978]) se arată că pentru un gaz ideal pentru care diferența căldurilor specifice este o constantă pozitivă ($c_p - c_v > 0$), adică are loc relația lui Mayer $c_p - c_v = \frac{R}{J}$, Teorema fundamentală a calorimetriei conduce la obținerea unei relații simple între căldura latentă în raport cu volumul și presiune $J l_v = p$. Ținând acum cont de cele de mai sus și de relațiile (1.30), rezultă că, în vecinătatea stărilor de echilibru, ecuația de propagare (1.35) pentru un gaz ideal conducător de căldură se scrie

$$\dot{T} - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{T}{p} \dot{p} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{T}{p} k \Delta T + \frac{\gamma - 1}{R\gamma} s \quad (1.36)$$

unde $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$, c_p fiind căldura specifică la presiune constantă.

1.4 Ecuațiile fundamentale ale termodinamicii atmosferei

Cu acestea sistemul de ecuații ce va descrie starea termodinamică a unui gaz ideal, perfect este dat de (se introduce (1.33) în (1.3) și (1.2), iar (1.3) și (1.36) dau)

$$\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

$$\dot{\mathbf{v}} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \mathbf{g}$$

$$\dot{T} - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{T}{p} \dot{p} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{T}{p} k \Delta T + \frac{\gamma - 1}{R\gamma} s$$

$$p = R\rho T$$

(1.37)

In același timp sistemul de ecuații ce va descrie starea termodinamică a unui fluid vâscos liniar și izotrop este

$$\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

$$\dot{\mathbf{v}} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \frac{\mu}{\rho} \Delta \mathbf{v} + \frac{1}{3} \frac{\mu}{\rho} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} + \mathbf{g} \quad (1.38)$$

$$\dot{T} + \frac{l_v}{\rho c_v} \operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{k}{J \rho c_v} \Delta T - \frac{2}{3} \frac{\mu(\rho, T)}{J \rho c_v} (\operatorname{div} \mathbf{v})^2 + \frac{2\mu(\rho, T)}{J \rho c_v} D_{ik} D_{ik} + \frac{s}{J c_v}$$

$$p = p(\rho, T)$$

unde am folosit relația lui Stokes $3\lambda + 2\mu = 0$ (caz curent utilizat în dinamica atmosferei).

Dacă relația de stare (1.38)₄ este cea de fluid ideal, adică (1.34) atunci (1.38)₃ se transformă în (1.37)₃ la care se adaugă termenii ce depind de mișcare (de câmpul de viteze \mathbf{v} din membrul drept al relației (1.38)₃.)

Ecuația de propagare (1.37)₃ poate fi scrisă în diferite forme echivalente. Vom da mai jos două asemenea forme ce vor fi des utilizate în capitolele ce urmează. Pentru a le obține vom presupune că gazul este ideal, perfect, neconducător de căldură ($k = 0$) și se găsește în absența unor surse volumice de căldură ($s = 0$)⁸ In aceste condiții, notând $\alpha \equiv 1/\rho$ volumul specific se constată că legea de stare se scrie $p\alpha = RT$. Ținând cont că $Jl_v = p$ și înlocuind direct ρ cu $1/\alpha$ în (1.35) obținem imediat pentru ecuația de propagare

$$Jc_v \dot{T} + p\dot{\alpha} = 0$$

Niște substituții la fel de simple ce țin cont și de relația lui Mayer, conduc la scrierea ecuației (1.37)₃ în forma simplificată

$$Jc_p \dot{T} - \alpha \dot{p} = 0$$

Dacă vom ține cont, acum, de faptul că mișcarea aerului în raport cu un observator solidar legat cu Pământul se face într-un reper neinertial⁹ și dacă ne vom referi la cazul mișcării la scară mare (la acesta scară atmosfera este presupusă

⁸Putem ușor constata că, chiar și în cazul unui gaz conducător de căldură, încălzirea se anulează pe procese adiabatice. Deci se poate presupune, de asemenea, că procesele de care ne ocupăm sunt adiabatice

⁹A se vedea paragraful 6 al acestui capitol pentru precizări suplimentare

în echilibru hidrostatic, adică accelerația verticală și componenta verticală a forței Coriolis se neglijează) atunci ecuațiile de mișcare (37)₂ se scriu

$$\dot{\mathbf{v}}' = -\alpha \text{grad}_{x,y} p - \mathbf{f} \times \mathbf{v}'$$

$$0 = -\alpha \frac{\partial p}{\partial z} - g$$

unde am notat cu \mathbf{v}' câmpul orizontal de viteze în mișcarea relativă $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{w}$ și cu $f \equiv 2\Omega_o \sin \varphi_o$ parametrul lui Coriolis în aproximația descrisă, $\mathbf{f} = f\mathbf{k}$. În cele de mai sus φ_o este latitudinea geografică a observatorului, iar Ω_o este modulul vitezei Coriolis a Pământului.

Cu aceste observații sistemul (1.37) se poate scrie într-una din următoarele forme

$$\dot{\alpha} - \alpha \text{div} \mathbf{v} = 0$$

$$\dot{\mathbf{v}}' = -\alpha \text{grad}_{x,y} p - \mathbf{f} \times \mathbf{v}'$$

$$0 = -\alpha \frac{\partial p}{\partial z} - g \quad (1.37)'$$

$$J_{c_v} \dot{T} + p \dot{\alpha} = 0$$

$$p\alpha = RT$$

sau

$$\dot{\alpha} - \alpha \text{div} \mathbf{v} = 0$$

$$\dot{\mathbf{v}}' = -\alpha \text{grad}_{x,y} p - \mathbf{f} \times \mathbf{v}'$$

$$0 = -\alpha \frac{\partial p}{\partial z} - g \quad (1.37)''$$

$$J_{c_p} \dot{T} - \alpha \dot{p} = 0$$

$$p\alpha = RT$$

ce vor fi utilizate în capitolele următoare.

Adesea în calculele curente, se neglijează constanta J de interconvertibilitate a unităților de căldură în unități de lucru mecanic.

1.5 Stări de referință ale atmosferei

Diferite modele de mișcare a atmosferei ce vor fi discutate în capitolele următoare se referă la perturbarea unei anumite stări date. O astfel de stare (neperturbată), căreia se presupune că- i cunoaștem complet caracteristicile, se numește **stare de referință** (pentru problema considerată). Dintre stările de referință posibile o semnificație deosebită o au: a) *atmosfera politropă* și b) *atmosfera omogenă*.

a) **Atmosfera politropă** este determinată ca o stare staționară de echilibru termodinamic a coloanei de aer. Aceasta înseamnă să presupunem absența mișcării mecanice ($\mathbf{v} = \mathbf{0}$) și forțele externe date de forța de greutate ($\mathbf{b} = \mathbf{g}$ accelerația gravitațională în (1.3)), ceea ce conduce la următoarea formă a ecuațiilor de mișcare

$$p(\mathbf{x}, t) = p_r(z) \tag{1.39}$$
$$\frac{dp_r}{dz} = -\rho_r g$$

de unde, imediat avem că $\rho(\mathbf{x}, t) = \rho_r(z)$ și cu legea de stare $p_r = R\rho_r T_r$ rezultă că și $T(\mathbf{x}, t) = T_r(z)$. Prin urmare, presupunând că suntem în absența surselor volumice de căldură avem, din (1.32) sau (1.36)

$$\frac{d^2 T_r}{dz^2} = 0 \tag{1.40}$$

Observând că (1.40) conduce la un gradient vertical de temperatură constant $\frac{dT_r}{dz} = -\Gamma_r$ și cum în atmosfera standard $\Gamma_r = \frac{(\gamma - 1)g}{\gamma R}$ vom obține imediat, din (1.39) și (1.40), descrierea completă a atmosferei politrope

$$\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

$$T_r(z) = T_r(0) - \Gamma_r z$$

$$\rho_r(z) = \rho_r(0) \left(1 - \frac{\Gamma_r}{T_r(0)} z\right)^{\left(\frac{g}{\Gamma_r R} - 1\right)} \quad (1.41)$$

$$p_r(z) = p_r(0) \left(1 - \frac{\Gamma_r}{T_r(0)} z\right)^{\frac{g}{\Gamma_r R}}$$

Și deci atmosfera politropă este atmosfera în echilibru staționar, în care temperatura descrește liniar cu înălțimea.

b) **Atmosfera de referință omogenă** este (fără alte specificații) aceea stare de echilibru staționar a atmosferei în care densitatea este constantă cu înălțimea. Din (1.31) avem imediat că

$$\frac{p(z)}{T(z)} = \frac{p(0)}{T(0)} = R\rho(0) = \text{const.}$$

Cum (1.41)₄ și (1.41)₂ conduc la

$$\frac{p_r(z)}{p_r(0)} = \left(\frac{T_r(z)}{T_r(0)}\right)^{\frac{g}{\Gamma_r R}} \quad (1.42)$$

rezultă, din cele două relații de mai sus, că atmosfera omogenă este un caz particular de atmosferă politropă în care $\Gamma_r = \Gamma_r^o = \frac{g}{R}$, (unde $g = 9,804 \text{ m/s}^2$, iar $R = 286,8 \text{ m}^2/\text{s}^2 \text{ } ^\circ K$).

Notând cu H_r^o înălțimea atmosferei omogene în cuprinsul căreia densitatea aerului are valoarea ρ_r^o de la nivelul solului, atunci presiunea la sol se poate exprima cu definiția (respectiv cu relația (1.34))

$$p_r^o(0) = \rho_r^o H_r^o g = R\rho_r^o T_r^o(0)$$

de unde se obține

$$H_r^o = \frac{RT_r^o(0)}{g} \simeq 7990,5m \quad (1.43)$$

pentru $T_r^o(0) = 0^\circ C = 273,15^\circ K$.

1.6 Forma adimensională a ecuațiilor termodinamicii atmosferei

Atât pentru rezolvarea unor probleme efective de mișcare a aerului cât și pentru construirea unor "modele" de mișcare (a se vedea capitole următoare) și realizarea unei analize cantitative și calitative a rezultatelor, este deosebit de importantă punerea în evidență a variabilelor fără dimensiune, și, în mod corespunzător, a ecuațiilor scrise în formă adimensională.

Pentru a pune în evidență parametrii proprii ecuațiilor (1.38) să introducem mărimile de adimensionalizare. Precizăm că acestea depind de fiecare problemă în parte (spre exemplu se pot referi la "starea de referință" descrisă în paragraful 5, la caracteristicile domeniului ocupat de fluid, la tipul de problemă, etc.). De aceea, la acest nivel le vom numi mărimi caracteristice. Mai precizăm că se presupune că fluidul (atmosfera) se mișcă relativ la un observator fix pe Pământ. Scara mișcării fiind mult mai mică decât raza medie a Pământului ($a_o \simeq 6367km$) vom lucra într-un sistem de coordonate carteziene, cu axele îndreptate spre est, nord și verticala ascendentă, de versori i, j, k , (k având sens opus lui g – accelerația gravitațională). Deci, dacă vom nota cu Ω viteza Coriolis și cu ψ latitudinea punctului de observație, atunci $\Omega = \Omega_o(\cos\psi j + \sin\psi k)$ și ecuațiile (1.38) se scriu în reperul solidar legat cu Pământul

$$\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

$$\rho \dot{\mathbf{v}} = -\operatorname{grad} p + \mu \Delta \mathbf{v} + \frac{1}{3} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} + \rho \mathbf{g} - 2\rho \Omega_o (\mathbf{e} \times \mathbf{v}) - 4\rho \Omega_o^2 (\mathbf{e} \times (\mathbf{e} \times \mathbf{r})) \quad (1.44)$$

$$\dot{T} - \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{T}{p} \dot{p} = \frac{\gamma-1}{\gamma} k \frac{t}{p} \Delta T + 2 \frac{\gamma-1}{\gamma} \mu \frac{T}{p} (\mathbf{D} \cdot \mathbf{D} - \frac{1}{3} (\operatorname{div} \mathbf{v})^2) + \frac{\gamma-1}{R\gamma} s$$

$$p = R\rho T$$

Pentru obținerea ecuațiilor (1.44) s-a ținut cont de formulele cunoscute (vezi spre exemplu Iacob[1971], sau Dragoș [1976] și [1983]) privind scrierea accelerației în mișcarea relativă

$$\mathbf{a}_a = \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_c$$

Notând cu \mathbf{r} poziția punctului din atmosferă în raport cu un reper solidar legat de Pământ, cu \mathbf{r}_o poziția acestuia în raport cu un reper fix centrat în centrul Pământului ($|\mathbf{r}_o| = a_o \simeq 6367$ km raza medie a Pământului) și cu $\dot{\Omega}$ viteza de rotație instantanee a sistemului mobil în raport cu cel fix, ținând cont că $\dot{\Omega}$ este derivata lui Ω în raport cu sistemul mobil și că Ω este presupus constant în timp față de acesta, avem

$$\mathbf{a}_t \equiv \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r}_o + \dot{\Omega} \times \mathbf{r} + \Omega \times (\Omega \times \mathbf{r}) = \Omega \times (\Omega \times \mathbf{r})$$

Pe de altă parte accelerația Coriolis va fi

$$\mathbf{a}_c = 2(\Omega \times \dot{\mathbf{r}}) = 2\Omega_o(\mathbf{e} \times \mathbf{v})$$

unde am folosit notațiile obișnuite $\dot{\mathbf{r}} \equiv \mathbf{v}$, $\mathbf{e} = \cos\psi\mathbf{j} + \sin\psi\mathbf{k}$, $|\mathbf{e}| = 1$ ($\Omega_o \simeq 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$). Cu acestea ecuațiile (1.40)₂ rezultă imediat din (1.38)₂.

Sistemul astfel obținut este închis și are ca necunoscute ρ, \mathbf{v}, T, p .

Mărimile caracteristice ale problemei noastre vor fi : un timp t_o , două lungimi caracteristice L_o, H_o , (în dinamica atmosferei este util, ca dimensiunea caracteristică verticală să fie luată diferită de cea orizontală, în cele mai multe probleme) , două viteze caracteristice U_o, W_o , (care se află în aceeași relație relativă ca și L_o, H_o) o presiune caracteristică p_o , o densitate caracteristică ρ_o și o temperatură caracteristică T_o (care sunt legate prin $p_o = R\rho_o T_o$). Notând cu \bar{A} mărimea adimensională corespunzătoare mărimii fizice A , avem imediat

$$\begin{aligned} x_i &= L_o \bar{x}_i, \quad i = 1, 2; & x_3 &= H_o \bar{x}_3; & t &= t_o \bar{t}; \\ v_i &= U_o \bar{v}_i, \quad i = 1, 2; & v_3 &= W_o \bar{v}_3; & p &= p_o \bar{p}; \\ T &= T_o \bar{T}; & \rho &= \rho_o \bar{\rho}. \end{aligned} \tag{1.45}$$

Aceste mărimi, introduse în sistemul de ecuații (1.44) conduc, în urma unor calcule simple, la scrierea sistemului în forma

$$Sh \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0$$

$$\rho \left\{ Sh \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \operatorname{grad}) \tilde{\mathbf{v}} + \frac{1}{R_o} (\mathbf{e} \times \tilde{\mathbf{v}}) \right\} + \frac{1}{\gamma M^2} \widetilde{\operatorname{grad} p} = \frac{1}{R_e} (\tilde{\Delta} \tilde{\mathbf{v}} + \frac{1}{3} \widetilde{\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v}}) + a \frac{1}{R_o} \mathbf{g}_e \quad (1.46)$$

$$\left\{ Sh \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \operatorname{grad}) T \right\} + \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{T}{p} \left\{ Sh \frac{\partial p}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \operatorname{grad}) p \right\} = \frac{1}{Re Pr} \frac{T}{p} \tilde{\Delta} T + (\gamma - 1) \frac{M^2}{Re} (2 \tilde{\mathbf{D}} \cdot \tilde{\mathbf{D}} - \frac{2}{3} (\operatorname{div} \mathbf{v})^2) + A s$$

$$p = \rho T$$

În scrierea sistemului (1.46) am notat mărimile adimensionale: $Sh \equiv \frac{L_o}{U_o t_o}$ (Strouhal); $R_o \equiv \frac{U_o}{l_o \Omega_o}$ (Rossby), cu $l_o \equiv 2 \Omega_o \sin \varphi_o$ – parametrul lui Coriolis, și φ_o – o latitudine de referință; $M \equiv \frac{U_o}{(\gamma R T_o)^{1/2}}$ (Mach); $Re \equiv \frac{\rho_o U_o L_o}{\mu}$ (Reynolds); $Pr \equiv \frac{c_p \mu}{k}$ (Prandtl).

Să mai observăm că în ecuația de propagare se poate introduce numărul $Pe \equiv Re Pr$ – (Peclet) și că am notat $a \equiv \frac{g_o}{2 U_o \Omega_o \sin \varphi_o}$ (g_o – fiind accelerația gravitațională medie în regiunea considerată), $\mathbf{g}_e \equiv \overline{(\mathbf{g} - \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}))}$ – accelerația gravitațională efectivă, iar $A \equiv \frac{\gamma - 1}{R \gamma} \frac{L_o s_o}{T_o U_o}$ (unde s_o este o mărime caracteristică pentru sursele volumice de căldură). Asupra acestor din urmă parametri se va reveni în capitolele următoare. În fine, în formulele (46) am notat cu $\tilde{\mathbf{v}}$, $\widetilde{\operatorname{grad}}$, $\tilde{\Delta}$, $\tilde{\mathbf{D}}$ câmpurile

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{v}} &\equiv v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 + v_3 \mathbf{e}_3 \\ \widetilde{\operatorname{grad}} &\equiv \frac{\partial}{\partial x_1} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \mathbf{e}_2 + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial}{\partial x_3} \mathbf{e}_3 \\ \tilde{\Delta} &\equiv \widetilde{\operatorname{grad}} \cdot \widetilde{\operatorname{grad}} \\ \tilde{\mathbf{D}} &\equiv \frac{1}{2} [\widetilde{\operatorname{grad}}(\tilde{\mathbf{v}}) + \widetilde{\operatorname{grad}}^T(\tilde{\mathbf{v}})] \end{aligned} \quad (1.47)$$

unde $\epsilon \equiv H_o/L_o \equiv W_o/U_o$ se numește parametru de scară.

1.7 Formularea condițiilor inițiale și la limită

Pentru a rezolva o problemă concretă legată de mișcarea aerului este evident că, în primul rând, trebuie formulate niște condiții inițiale pentru ρ, \mathbf{v}, T . Acestea vor fi date de

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) |_{t=t_o} &= \mathbf{v}^o(\mathbf{x}) \\ \rho(\mathbf{x}, t) |_{t=t_o} &= \rho^o(\mathbf{x}) \\ T(\mathbf{x}, t) |_{t=t_o} &= T^o(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (1.48)$$

Aceste condiții vor descrie starea atmosferei în domeniul considerat la începutul intervalului de observație. Ea poate fi spre exemplu asimilată unei atmosfere politrope sau unei atmosfere omogene, etc.

Datele inițiale se adimensionalizează ca și ecuațiile, iar în variabilele adimensionale, în formulele adimensionale (1.48) \mathbf{v}^o se înlocuiește cu $\hat{\mathbf{v}}^o$ (spre exemplu).

În ceea ce privește condițiile la frontieră trebuie să observăm că acestea sunt de două tipuri

a) **Condiții pe o suprafață solidă** (nedeformabilă, impermeabilă) **fixă** Σ . Dacă ne referim la sistemul (1.38) atunci trebuie să impunem condiții de aderență (pentru viteze)

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) |_{\Sigma} = \mathbf{0} \quad (1.49)$$

Dacă în plus coeficientul de conductibilitate termică k este nenul, trebuie să impunem o condiție la limită în temperatură adecvată. Aceasta poate fi scrisă (în cazul frontierei impermeabile) într- un caz destul de general sub forma ” **legii de transfer a lui Newton** ”

$$-k \mathbf{n} \cdot \text{grad} T(\mathbf{x}, t) |_{\Sigma} = 4\sigma T_{\Sigma}^3(\mathbf{x}, t) (|T(\mathbf{x}, t) - T_{\Sigma}(\mathbf{x}, t)|) |_{\Sigma} \quad (1.50)$$

În ecuația (1.50) s-a notat cu \mathbf{n} — normala interioară la frontiera Σ și cu T_{Σ} temperatura proprie a suprafeței. Coeficientul σ descrie capacitatea de înmagazinare și transfer de temperatură a frontierei solide Σ (pentru Pământ,

în condițiile standard, este aproximativ $0.55 \cdot 10^{-8} \text{ cal}/m^2 \text{ s}^\circ K^4$). Acest tip de aproximare este alternativ cu cel utilizat în Zeytounian [1988]. Pentru abordări asimptotice se folosește adesea formula

$$T(\mathbf{x}, t) |_{\Sigma} = T_o + \Delta T_o \mathcal{T}(\mathbf{x}, t)$$

unde $T_o = \text{const.}$ este o temperatură de referință, $\mathcal{T}(\mathbf{x}, t)$ este o funcție de distribuție a temperaturii frontierei (legată de transferul de temperatură), iar ΔT_o este o valoare de referință pentru variațiile de temperatură datorate funcției \mathcal{T} . Evident, cazul adaptării perfecte a aerului la frontieră corespunde condiției clasice

$$T'(\mathbf{x}, t) |_{\Sigma} = T'_{\Sigma}(\mathbf{x}), \quad (1.51)$$

care se poate scrie și sub forma (vezi (1.50))

$$\frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}, t) |_{\Sigma} = 0 \quad (1.52)$$

Evident, când $\mu \rightarrow 0$, deci suntem în cazul limită al ecuațiilor (1.37), în locul condiției de aderență (1.49) se consideră condiția de alunecare

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} |_{\Sigma} = 0 \quad (1.53)$$

Trebuie să observăm că în reprezentarea adimensională a condițiilor la frontieră de mai sus intervine forma suprafeței. Condiția de aderență rămâne neschimbată (cu precizarea efectivă a formei adimensionale a ecuației suprafeței Σ). Dacă aceasta este, spre exemplu

$$x_3 = h_o h(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in \mathcal{D}_o$$

$h_o \equiv \max_{(x_1, x_2) \in \mathcal{D}_o} |h(x_1, x_2)|$, atunci condiția devine

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0} \quad (1.54)$$

pentru $x_3 = F_o h(x_1, x_2)$, $(x_1, x_2) \in \mathcal{D}_o$, unde $F_o \equiv h_o/L_o$ este parametrul de formă al frontierei (obstacolului).

Forma adimensională a condiției termice (1.50) la frontieră este

$$-\mathbf{n} \cdot \widetilde{\text{grad}} T(\mathbf{x}, t) = \frac{Pr}{Pr_\Sigma} \frac{T_\Sigma^3(\mathbf{x}, t)}{F_o} [T(\mathbf{x}, t) - T_\Sigma(\mathbf{x}, t)] \quad (1.55)$$

pentru $x_3 = F_o h(x_1, x_2)$, $(x_1, x_2) \in \mathcal{D}_o$, unde $Pr_\Sigma \equiv \frac{\sigma h_o T_o^2}{c_p \mu_o}$ – este numărul lui Prandtl atașat condițiilor de transfer. În termenii condiției folosite de Zeytounian (spre exemplu în [1988]), aceasta devine

$$T(\mathbf{x}, t) = 1 + G_o \bar{T}(x_1, x_2, t)$$

pentru $x_3 = F_o h(x_1, x_2)$, $(x_1, x_2) \in \mathcal{D}_o$. Se poate observa că

$$G_o \equiv \frac{\Delta T_o}{T_o} = \frac{(\gamma - 1) M^2}{\gamma} \frac{1}{Ec}; \quad Ec \equiv \frac{U_o^2}{c_p \Delta T_o}$$

Ec fiind numărul lui Eckert, iar G_o – parametrul termic al frontierei.

b) Condiții la infinit. Adesea sunt considerate probleme ce vor descrie mișcarea aerului în prezenta unui obstacol. În această situație trebuie impuse condiții la infinit (mari distanțe de obstacol). Condițiile, în cele mai des întâlnite probleme, sunt de tipul unei mișcări uniforme la infinit (**amonte**), adică

$$(\rho, \mathbf{v}, T) \rightarrow (\rho_\infty, \mathbf{v}_\infty, T_\infty), \quad \text{când } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty \quad (1.56)$$

Există situații în care condițiile de mai sus nu pot fi impuse la **infinit aval**.

Valorile $\rho_\infty, \mathbf{v}_\infty, T_\infty$ sunt bine definite descriind o stare cunoscută a atmosferei¹⁰.

Alte numere dimensionale. Din cele de mai sus se vede că în cadrul rezolvării unei probleme de mișcare a aerului pot apărea, pentru același tip de mărimi fizice, diferite mărimi caracteristice (în general, cele ce vor caracteriza domeniul de mișcare și domeniul de referință). În această situație pot fi introduse numere dimensionale pentru " compararea " lor.

¹⁰În orice problemă de aplicație efectivă valorile respective se extrag din datele reale provenite din măsurători specifice

Spre exemplu, constatăm că numărul

$$H_{\infty} \equiv RT_{\infty}(0)/g, \quad g \equiv |g|$$

caracterizează înălțimea atmosferei omogene (a se vedea (1.43)), unde $T_{\infty}(0)$ este valoarea la sol a temperaturii standard. Raportul

$$\frac{H_o}{H_{\infty}} \equiv B_o = \frac{H_o g}{RT_{\infty}(0)} \quad (1.57)$$

se numește numărul lui Boussinesq.

Cu ajutorul lui H_o și $T_{\infty}(0)$ se poate construi numărul lui Fr_{H_o} (numărul lui Froude) și respectiv M_{∞} , unde

$$Fr_{H_o} = \frac{U_o}{(gH_o)^{1/2}}, \quad M_{\infty} = \frac{U_o}{(\gamma RT_{\infty}(0))^{1/2}} \quad (1.58)$$

Este evident că

$$Fr_{H_o}^2 = \frac{\gamma}{B_o} M_{\infty}^2 \quad (1.59)$$

Dacă $R_o \ll 1$ ($L_o \gg U_o/l_o \simeq 10^5$) se înlocuiește adesea numărul lui Reynolds cu numărul lui Eckman

$$E_k \equiv \frac{R_o}{R_e} = \frac{\mu_o/\rho_o}{L_o^2 l_o} \quad (1.60)$$

și numărul lui Strouhal cu numărul lui Kibel

$$K_i \equiv S_h R_o = \frac{1}{t_o l_o} \quad (1.61)$$

Aceste înlocuiri sunt cerute de tipul de problemă ce se studiază, așa cum se va vedea în capitolul referitor la Modele Asimptotice.

2. TIPURI SIMPLE DE MIȘCĂRI ONDULATORII ÎN ATMOSFERĂ

2.1 Noțiuni introductive

În continuare pentru a descrie mișcarea fluidului atmosferic, se folosesc ecuațiile (1.37') și (1.37'') scrise în sistemul de referință neinertial (legat de pământ) sub forma simplificată:

Ecuția de continuitate:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (2.1)$$

-ecuația de mișcare:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}} &= -\alpha \nabla p - \mathbf{f} \times \mathbf{v} \\ 0 &= -\alpha \frac{\partial p}{\partial z} - g \end{aligned} \quad (2.2)$$

unde am notat cu g accelerația efectivă g_e și am folosit aproximația hidrostatică în cea de a 3-a ecuație de mișcare, a cărei justificare o vom prezenta în capitolul 3.

-primul principiu al termodinamicii în ipoteza că nu există schimb de căldură:

$$0 = c_v \dot{T} + p \dot{\alpha} \quad (2.3)$$

-ecuația de stare:

$$\alpha p = RT \quad (2.4)$$

unde $\alpha = \frac{1}{\rho}$

În ipoteza echilibrului hidrostatic, este convenabil să folosim presiunea p ca o coordonată verticală. În anexa A2 se prezintă forma ecuațiilor în sistemul de coordonate izobaric (x, y, p, t) precum și în coordonate sferice.

Comparând ordinele de mărime ale termenilor din ecuația de mișcare orizontală (prima ecuație din (2.2)), se remarcă faptul că termenul accelerației se poate neglija într-o primă aproximație (detalii în cap.3). Rezultă faptul că în

aproximația geostrofică, câmpul de presiune este în echilibru cu câmpul vântului. Ecuațiile vântului geostrofic sunt:

$$\begin{aligned} u &= -\frac{\alpha}{f} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} \\ v &= \frac{\alpha}{f} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \end{aligned} \quad (2.5)$$

și exprimă faptul că vântul este paralel cu izobarele și proporțional cu gradientul câmpului de presiune

2.2 Ecuații linearizate

Pentru a înțelege mișcările extrem de complexe ale atmosferei, este de dorit ca să izolăm și să analizăm câteva tipuri simple de mișcare. Vom prezenta dezvoltările făcute de Haltiner [1971].

Considerăm mișcarea numai în planul $x-z$, uniformitate în direcția y și neglijăm rotația pământului. Sistemul de ecuații în (2.1-2.3) se scrie:

$$\left. \begin{aligned} \dot{u} + \alpha \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} &= 0 \\ \dot{w} + \alpha \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + g &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ecuațiile de mișcare}$$

$$\alpha \bar{p} + p \gamma \bar{\alpha} = 0 \text{ principiul 1 al termodinamicii}$$

$$\dot{\alpha} - \alpha \text{div} \mathbf{v} = 0 \text{ ecuația de continuitate}$$

$$\text{unde } \gamma = \frac{c_p}{c_v};$$

Linearizăm sistemul cu metoda micilor perturbații presupunând fiecare variabilă ca o sumă de 2 termeni: o valoare de bază (neperturbată) și o perturbație mică ex: $u = U + u'$.

Înlocuind în sistem, scăzând ecuațiile valabile pentru mișcarea de bază și neglijând termenii produse de perturbații, vom obține ca rezultat un sistem linear de ecuații pentru perturbații:

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + U \frac{\partial u'}{\partial x} + \bar{\alpha} \frac{\partial \bar{p}'}{\partial x} = 0$$

$$\delta_1 \left(\frac{\partial w'}{\partial t} + U \frac{\partial w'}{\partial x} \right) + \bar{\alpha} \frac{\partial \bar{p}'}{\partial z} - \frac{g \alpha'}{\bar{\alpha}} = 0$$

$$\bar{\alpha} \left(\frac{\partial \bar{p}'}{\partial t} + U \frac{\partial \bar{p}'}{\partial x} \right) - g w' + \bar{p} \gamma \left(\frac{\partial \alpha'}{\partial t} + U \frac{\partial \alpha'}{\partial x} + w' \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial z} \right) = 0 \quad (2.6)$$

$$\left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial w'}{\partial z} \right) \bar{\alpha} - \delta_1 \left(\frac{\partial \alpha'}{\partial t} + U \frac{\partial \alpha'}{\partial x} + w' \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial z} \right) = 0$$

Simbolurile δ_1 și δ_2 identifică termenii ce conțin accelerația verticală și respectiv termenii de compresibilitate, și vor avea valoarea 1 sau 0, după cum se dorește sau nu luarea în considerare a acestor termeni.

Coefficienții variabilelor dependente vor fi considerați constanți, pentru cazul când scara fenomenului este mică.

Presupunem că perturbațiile sunt armonice în x, z și t cu coeficienți constanți:

$$\begin{cases} u' = S e^{i(\mu x + k z - \nu t)} \\ w' = W e^{i(\mu x + k z - \nu t)} \\ p' = P e^{i(\mu x + k z - \nu t)} \\ \alpha' = A e^{i(\mu x + k z - \nu t)} \end{cases}$$

unde μ și k sunt numerele de undă în direcțiile x și z , iar ν este frecvența.

Înlocuind aceste funcții în sistemul (2.6), se ajunge la un sistem algebric liniar și omogen pentru amplitudinile S, W, P și A :

$$(\mu U - \nu)S + \bar{\alpha}\mu P = 0$$

$$i\delta_1(\mu U - \nu)W + i\bar{\alpha}kP = \frac{g}{\alpha} A = 0$$

$$\left(\bar{p}\gamma \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial z} - g\right)W + i\bar{\alpha}(\mu U - \nu)P + \bar{p}\gamma i(\mu U - \nu)A = 0$$

$$i\mu\bar{\alpha}S + i\bar{\alpha}kW - i\delta_2(\mu U - \nu)A - \delta_2 \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial z} W = 0.$$

Sistemul poate fi scris în forma matricială:

$$\begin{pmatrix} (\mu U - \nu) & 0 & \bar{\alpha}\mu & 0 \\ 0 & \delta_1(\mu U - \nu) & \bar{\alpha}k & \frac{g}{\alpha} \\ 0 & \left(g - \bar{p}\gamma \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial z}\right) & \bar{\alpha}(\mu U - \nu) & \bar{p}\gamma i(\mu U - \nu) \\ \bar{\alpha}\mu & \left(\bar{\alpha}k + i\delta_2 \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial z}\right) & 0 & -\delta_2(\mu U - \nu) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S \\ W \\ P \\ A \end{pmatrix} = 0 \quad (2.7)$$

Pentru ca sistemul să admită și alte soluții în afară de soluția banală, determinantul coeficienților trebuie să fie nul. Aceasta conduce la o ecuație de ordinul 4 pentru valorile permise pentru frecvență, ceea ce descrie starea de bază și lungimea de undă a perturbațiilor. Luând în considerare variația parametrului

Coriolis, apare cel de-al 5-lea mod de oscilație pentru undele quasi-orizontale, care sunt caracteristice mișcărilor sinoptice, la scară mare.

2.3 Unde sonore verticale

Vom omite prima linie și prima coloană a determinantului și vom pune $\mu = 0$. Notând:

$$k = \frac{2\pi}{L}; \quad \nu = \frac{2\pi}{T}; \quad c = \frac{L}{T} = \frac{\nu}{k}$$

unde:

T -perioada;
 c -viteza de fază a undelor

Raportul celor doi termeni care compun elementul din ultima linie, coloana 2, este:

$$\frac{\partial \bar{\alpha} / \partial z}{\bar{\alpha} k} \sim \frac{L}{2\pi H}$$

unde H este scara verticală a atmosferei .

Pentru unde sonore, acest raport este mic, deci termenul gradient poate fi neglijat aici.

Cu aceste simplificări și cu notațiile de mai înainte, determinantul devine:

$$\begin{vmatrix} -\delta_1 c k & \bar{\alpha} k & \frac{g i}{\bar{\alpha}} \\ \left(g - \bar{\gamma} \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial z} \right) i & -\bar{\alpha} c k & -\bar{p} \gamma k \\ \bar{\alpha} k & 0 & \delta_2 c k \end{vmatrix} = 0$$

Rezultă ecuația:

$$\delta_1 \delta_2 c^2 k^2 - R \bar{T} \gamma k^2 + k i g - \delta_2 k i \left(g - \bar{\gamma} \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial z} \right) = 0$$

Reținând compresibilitatea și accelerația verticală $\delta_1 = \delta_2 = 1$. Putem neglija de asemenea $\frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial z}$ în raport cu $R \bar{T} k^2$. Am notat și $\bar{p} \bar{\alpha} = R \bar{T}$

Rezultă:

$$c = \pm \sqrt{\left(\frac{c}{c_p} \frac{R \bar{T}}{c_p} \right)} \quad (2.8)$$

care este viteza Laplace a sunetului și reprezintă propagarea verticală a undelor sonore în ambele direcții.

Pe de altă parte, dacă fie δ_1 sau δ_2 sunt luați zero, adică dacă se utilizează forma incompresibilă a ecuației continuității, sau perturbația este

considerată hidrostatică, nu există unde sonore care se propagă vertical. Oricum, ipoteza de incompresibilitate este o foarte drastică limitare pentru modelarea atmosferei în scopuri meteorologice, pe când aproximația hidrostatică, care de asemenea filtrează undele sonore care se propagă vertical, nu constituie o limitare semnificativă în investigarea perturbațiilor la scară mare a atmosferei.

2.4 Unde sonore orizontale și unde de gravitație interne

În continuare, vom considera că undele se propagă numai în direcția x , deci nu vom include linia și coloana a 2-a.

Ecuția de frecvență devine acum:

$$\begin{vmatrix} (\mu U - \nu) & \bar{\alpha}\mu & 0 \\ 0 & \bar{\alpha}(\mu U - \nu) & \bar{p}\gamma(\mu U - \nu) \\ \bar{\alpha}\mu & 0 & -\delta_2(\mu U - \nu) \end{vmatrix} = 0$$

Punând $c = \frac{\nu}{\mu}$ și simplificând, rezultă:

$$\delta_2(U - c)^3 - \gamma(U - c)\bar{p}\bar{\alpha} = 0$$

Acum, dacă includem termenul de compresibilitate în ecuația de continuitate, $\delta_2 = 1$ și rădăcinile ecuației de frecvență sunt: rădăcina trivială $c = U$ și din nou vitezele de fază pentru undele sonore:

$$c = U \pm \sqrt{\frac{c_p R \bar{T}}{c_v}} \quad (2.9)$$

pe de altă parte, neglijând compresibilitatea, $\delta_2 = 0$, ceea ce este echivalent cu ipoteza unei curgeri nedivergente, apare numai soluția banală $c = U$, undele sonore fiind filtrate.

Revenind acum la cazul general, și egalând cu zero determinantul matricii coeficienților, rezultă ecuația de frecvență:

$$\delta_1 \delta_2 (\mu U - \nu)^4 - \left[R \bar{T} \gamma (k^2 + \mu^2 \delta_1) + g i k (\delta_2 - 1) + \delta_2 \frac{g}{\alpha} \frac{c \bar{\alpha}}{c^2} \right] \cdot (\mu U - \nu)^2 - g \mu^2 \left(g - \gamma R \bar{T} \frac{1}{\alpha} \frac{c \bar{\alpha}}{c^2} \right) = 0 \quad (2.10)$$

Pentru a simplifica această ecuație, neglijăm termenii mici care conțin g în termenul pătratic, exprimăm ultimul termen ca o funcție de temperatură potențială. Rezultă:

$$\delta_1 \delta_2 (\mu l - \nu)^4 - [RT\bar{\gamma}(k^2 + \mu^2 \delta_1)](\mu l - \nu)^2 + \frac{gR\bar{T}\mu^2 \gamma}{\bar{\theta}} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} = 0$$

Cele patru rădăcini ale ecuației corespund unei perechi de unde sonore și unei perechi de unde de gravitație internă.

Undele de gravitație pot fi neglijate, omițând ultimul termen, care conține g . Pentru simplificare vom neglija de asemenea și curentul de bază și vom pune $\delta_1 = \delta_2 = 1$, în care caz, ecuația de mai sus se reduce la binecunoscuta formulă pentru viteza sunetului:

$$c^2 = \gamma R \bar{T},$$

unde

$$c = \frac{\nu}{\sqrt{k^2 + \mu^2}}$$

Este evident că ipoteza de incompresibilitate sau cea a echilibrului hidrostatic va elimina undele sonore care au o componentă verticală a vitezei de fază.

Pentru a izola undele de gravitație, se ia $\delta_2 = 0$ și $\delta_1 = 1$. Punând $l = 0$ se pun în evidență următoarele frecvențe, relative la curentul de bază:

$$\nu^2 = \frac{\mu^2}{k^2 + \mu^2} \frac{g}{\bar{\theta}} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z}$$

Substituind ν în forma de mai înainte:

$$c = \pm \frac{\mu}{\mu^2 + k^2} \sqrt{\frac{g}{\bar{\theta}} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z}} \quad (2.11)$$

Aceste oscilații gravitaționale sunt stabile dacă gradientul temperaturii este subadiabatic, adică $\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} > 0$. Dacă gradientul este supraadiabatic adică $\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} < 0$ perturbația se amplifică.

Dacă adâncimea perturbației este mare comparată cu scara orizontală $\mu^2 > k^2$, și rezultă:

$$\nu = \pm \sqrt{\frac{g}{\bar{\theta}} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z}} \quad (2.12)$$

Aceasta este frecvența *Brunt-Vaisala* pentru oscilații verticale semnificative. Dacă gradientul este supraadiabatic, ν este imaginară și perturbația se amplifică exponențial în timp.

Acum dacă scara orizontală este mult mai mare decât cea verticală, aproximația hidrostatică este valabilă și $\delta_1 = 0$, rezultă:

$$v^2 = \frac{\mu^2}{k^2} \frac{g}{\theta} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z}$$

ceea ce poate proveni și din relația de mai înainte, cu $k^2 > \mu^2$.

În continuare, pentru o propagare strict orizontală $v = c\mu$ și rezultatul acesta se scrie:

$$c = \pm \frac{1}{k} \sqrt{\frac{g}{\theta} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z}} \quad (2.13)$$

care exprimă viteza de fază pentru propagarea orizontală a undelor de gravitație internă, rezultat care va fi dezvoltat mai târziu, într-o formă ușor diferită, din alt punct de vedere.

2.5 Unde de gravitație de suprafață

Cazul următor de unde care se propagă orizontal, va permite mișcări pe orizontală și verticală.

Atmosfera va fi considerată incompresibilă $\alpha' = 0$.

Deoarece fluidul este incompresibil, va exista o suprafață superioară liberă.

Ecuatiile de mișcare linearizate, la care am renunțat la notația cu "prim":

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + U \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \\ \delta \left(\frac{\partial w}{\partial t} + U \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \end{cases} \quad (2.14)$$

Ecuția echilibrului hidrostatic aplicată la mișcarea neperturbată este:

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = -g\bar{\rho}$$

Integrând această ecuație de la $z = 0$ până la înălțimea suprafeței libere H (unde nu mai există perturbații) rezultă:

$$g\bar{\rho}H = p_0$$

În continuare vom presupune că perturbațiile sunt armonice:

$$\begin{cases} u = \Psi(z)e^{i\mu(x-ct)}, \\ w = \Phi(z)e^{i\mu(x-ct)}, \\ \frac{p}{\rho} = P(z)e^{i\mu(x-ct)} \end{cases}$$

Inlocuind în sistem și simplificând rezultă:

$$\begin{cases} (U-c)\Psi(z) + P(z) = 0 \\ i\mu\delta(U-c)\Phi(z) + P'(z) = 0, \\ i\mu\Psi(z) + \Phi'(z) = 0 \end{cases} \quad (2.15)$$

Eliminând $P(z)$ din primele 2 ecuații și mai departe eliminând $\Psi(z)$, rezultă ecuația:

$$\Phi''(z) - \mu^2\delta\Phi(z) = 0$$

Considerăm 2 cazuri: $\delta = 1$ în care accelerațiile verticale sunt permise și $\delta = 0$ când perturbațiile sunt hidrostatice. Soluțiile sunt respectiv:

$$\Phi(z) = a_1 e^{i\mu z} + a_2 e^{-i\mu z} \quad \text{pentru } \delta = 1$$

$$\Phi(z) = a'_1 z + a'_2 \quad \text{pentru } \delta = 0$$

unde coeficienții "a" sunt arbitrari și pot fi determinați din condițiile la frontieră.

La frontiera inferioară, care se presupune a fi orizontală, viteza verticală este nulă. Deci $a_1 = -a_2 \equiv a$, pentru $\delta = 1$ și deci:

$$\Phi(z) = a(e^{i\mu z} - e^{-i\mu z}) \quad \text{pentru } \delta = 1$$

Dezvoltând funcțiile exponențiale în serie de puteri, se poate aproxima:

$$\Phi(z) = 2a\mu z + \dots$$

În cazul hidrostatic ($\delta = 0$), $a'_2 = 0$ și punând $a'_1 = a$, rezultă:

$$\Phi(z) = az$$

Cea de-a doua condiție de frontieră este ca presiunea totală a unei particule la suprafață (care trebuie să rămână pe frontieră) rămâne neschimbată. Deci:

$$\frac{d(\bar{p} + p)}{dt} = 0 \quad \text{pe suprafața liberă}$$

Accasta poate fi aproximată prin linearizare și aplicând această condiție la $z = H$. Rezultă:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + U \frac{\partial \Phi}{\partial x} + w \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad \text{la } z = H$$

Utilizând soluțiile $\Phi(z)$ în sistemul inițial rezultă:

Cazul 1: Nehidrostatic ($\delta = 1$)

$$\Psi(z) = ia(e^{\mu z} + e^{-\mu z})$$

$$P(z) = -ia(U - c)(e^{\mu z} + e^{-\mu z})$$

Introducând valorile acestor funcții, ținând cont de forma perturbațiilor în condiția la limită pentru $z = H$ se obțin rădăcinile ecuației de frecvență:

$$c = U \pm \left(\sqrt{\frac{gL}{2\pi} \tanh \frac{2\pi H}{L}} \right)$$

Cazul 2: Hidrostatic ($\delta = 0$):

$$\Psi(z) = \frac{a'i}{\mu}$$

$$P(z) = -\frac{ia'(U - c)}{\mu}$$

Procedând similar se ajunge la:

$$c = U \pm \sqrt{gH} \quad (2.16)$$

Undele care călătoresc cu viteza de fază dată de relația de mai sus sunt în general numite "shallow-water" (apă puțin adâncă) sau unde lungi. Când raportul H/L , în expresia vitezei undelor din cazul nehidrostatic, este relativ mare (în jur de 0,5 este suficient) viteza de fază este aproximată cu:

$$c = U \pm \sqrt{\frac{gL}{2\pi}} \quad (2.17)$$

Undele sunt numite unde "deep-water" (apă adâncă) și traiectoriile particulei sunt aproape circulare. Pe de altă parte, pentru valori mici ale raportului H/L ($\leq 0,04$) formula se reduce la cea valabilă pentru cazul hidrostatic și traiectoriile particulelor sunt elipse foarte întinse și sunt aproape linii orizontale.

Dacă se presupune o atmosferă omogenă, ecuația hidrostatică dă:

$$gH = \frac{P_0}{\rho} = RT$$

și viteza de fază a undelor se poate scrie: $c = U \pm \sqrt{RT}$

Astfel, viteza undelor de gravitație lungi, este aproape viteza undelor sonore.

Viteza de fază a undelor de gravitație lungi a fost obținută neglijând accelerația verticală și presupunând perturbația hidrostatică. Acest rezultat poate fi obținut într-un mod mai direct. Presupunând echilibrul hidrostatic, rezultă imediat că pentru orice punct din fluid $g\bar{\rho}(h-z) = p$, unde h este înălțimea suprafeței libere. Punând $h = H + h'$ și rezultă:

$$g\bar{\rho}h' = p'$$

și deci, nemaiuând în considerare notația cu prim:

$$g \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

astfel că prima ecuație de mișcare se scrie în perturbații:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + U \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0$$

Cea de-a 2-a ecuație în u și h se obține integrând ecuația de continuitate pe verticală. În același mod, ecuația conservării masei poate fi dezvoltată direct în funcție de u și h , după cum urmează (fig.2.1)

$$\frac{\partial(\bar{\rho}h)}{\partial t} = - \frac{\partial(\bar{\rho}uh)}{\partial x}$$

Linearizând și simplificând, rezultă:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + U \frac{\partial h}{\partial x} + H \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

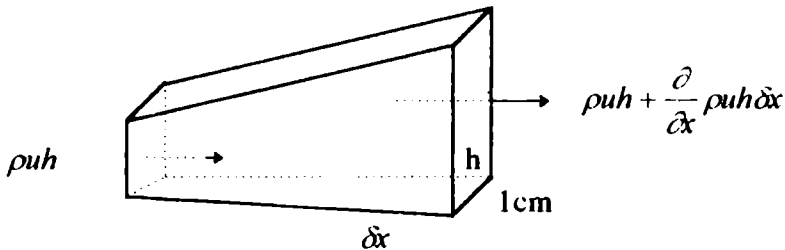


Fig.2.1 Continuitatea de masă

unde u și h sunt acum perturbații.

Intrucât u și h sunt funcții de z , pot fi luate de forma:

$$\begin{cases} u = u_0 e^{im(x-ct)} \\ h = h_0 e^{im(x-ct)} \end{cases} \quad \text{unde } u_0, h_0 \text{ sunt constante}$$

Înlocuind în sistemul celor 2 ecuații în h și u și punând condiția ca determinantul coeficienților să fie nul, rezultă din nou viteza de fază, pentru undele "shallow-water":

$$c = U \pm \sqrt{gH}$$

ceea ce era cunoscut. Aceste unde se mai numesc externe, întrucât maximum este atins la frontiera fluidului. Există de asemenea unde de gravitație internă care se pot dezvolta pe interfețele de discontinuitate de densitate sau viteză. vitezele de propagare pentru astfel de unde de gravitație internă pot fi diferite față de cele menționate mai înainte. De exemplu, în cazul simplu a 2 niveluri semi-infinite separate printr-o suprafață de discontinuitate de ordinul zero a densității și a vitezei, viteza de fază este dată de:

$$c = \frac{\rho U + \rho' U'}{\rho + \rho'} \pm \sqrt{\left[\frac{gL(\rho - \rho')}{2\pi(\rho + \rho')} - \frac{\rho\rho'(U - U')^2}{(\rho + \rho')^2} \right]}$$

unde cu prim am notat parametrii nivelului superior. S-a presupus că perturbațiile sunt nule la $+\infty$. Viteza de fază pentru undele "deep-water" poate fi obținută punând $\rho' = 0$.

2.6 Unde de gravitație inerțiale

Vom lua în considerare mișcarea de rotație a Pământului. Considerăm un curent zonal constant de bază U , în balanța geostrofică:

$$U = -\frac{g}{f} \frac{\partial H}{\partial y}$$

H este adâncimea unui fluid de densitate constantă. Dacă perturbațiile u, v și h , la fel ca și f sunt considerate independente de y , rezultă următorul sistem de ecuații:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + U \frac{\partial u}{\partial x} - fv + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + U \frac{\partial v}{\partial x} + fu + g \frac{\partial h}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial h}{\partial t} + U \frac{\partial h}{\partial x} + H \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial H}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (2.18)$$

Considerând H constant și presupunând perturbații armonice de forma $u_0 e^{i\mu(x-ct)}$, este necesar pentru ca u_0, v_0 și h_0 să aibă soluții nenule, să fie îndeplinită condiția:

$$\begin{vmatrix} \mu(U - c)i & -f & g\mu \\ f & \mu(U - c)i & 0 \\ H\mu i & -\frac{fU}{g} & \mu(U - c)i \end{vmatrix} = 0$$

ceea ce conduce la următoarea ecuație de frecvență:

$$(U - c)^3 - gH(U - c) + \frac{cf^2}{\mu^2} = 0$$

Se pot găsi rădăcini aproximative pentru această ecuație de gradul 3, considerând că cel puțin una din vitezele de fază este considerabil mai mică decât cea a undelor de gravitație, deci: $gH \gg (U - c)^2$. Astfel primul termen poate fi neglijat în raport cu cel de-al doilea și deci:

$$c = \frac{U}{1 + f^2 / (\mu^2 gH)} \quad (2.19)$$

Pentru valori tipice ale lui f, μ și H pentru atmosferă, $f^2 / (\mu^2 gH) \sim (L/20)^2$ cu L în mii de kilometri. Rezultă deci $c = U$ justificând ipoteza inițială.

Celelalte două rădăcini, care se așteaptă să reprezinte unde de gravitație, se pot obține presupunând $c \gg U$, în care caz Uf^2 / μ^2 poate fi adăugat ultimul termen din ecuația de frecvență, care se scrie într-o formă mai simplă:

$$(U - c)^3 - gH(U - c) - \frac{f^2}{\mu^2}(U - c) = 0$$

Rezolvând ecuația, obținem $c = U$, ca mai sus și:

$$c = U \pm \sqrt{\left(gH + \frac{f^2}{\mu^2}\right)} \quad (2.20)$$

care reprezintă vitezele de fază pentru undele de gravitație inerțiale. După cum s-a arătat mai înainte f^2 / μ^2 , este în general mic în comparație cu gH .

2.7 Oscilații inerțiale

Este de interes să cercetăm modul în care sunt posibile oscilațiile orizontale în atmosferă, când fluctuațiile presiunii sunt neglijabile. Pentru acest scop, vom neglija variația spațială a perturbațiilor și vom omite curentul de bază U .

Rezultă un sistem simplu:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - fv = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + fu = 0 \end{cases}$$

Folosind procedura obișnuită:

$$u = u_0 e^{-i\omega t}, \quad v = v_0 e^{-i\omega t}$$

care va conduce la:

$$\begin{vmatrix} -i\nu & -f \\ f & -i\nu \end{vmatrix} = 0$$

și ecuația de frecvență cu soluția:

$$\nu = \pm f$$

Perioada oscilațiilor inerțiale este $2\pi/\nu$ și deci rezultă $12h/\sin\varphi$ adică aproape $17 h$ la 45° latitudine. Astfel frecvența oscilațiilor inerțiale la latitudini medii este considerabil mai mare decât a undelor sinoptice ordinare care au perioade de la câteva zile la o săptămână. Introducând în sistemul inițial u_0 și v_0 pentru fiecare în rădăcinile $\pm f$ rezultă:

$$v_{0+} = -iu_{0+}; \quad v_{0-} = iu_{0-}$$

Soluția completă a sistemului de ecuații este:

$$\begin{aligned} u &= u_{0+} e^{-i\eta} + u_{0-} e^{i\eta} \\ v &= -iu_{0+} e^{-i\eta} + iu_{0-} e^{i\eta} \end{aligned}$$

Din sistem rezultă:

$$\frac{\partial(u^2 + v^2)}{\partial t} = 0$$

care este de asemenea verificată de partea reală a soluțiilor sistemului.

2.8 Unde Rossby

Continuând investigarea efectelor rotației pământului asupra mișcărilor ondulatorii din atmosferă, vom considera din nou un fluid incompresibil omogen fără frecare, cu o frontieră de jos, orizontală și o suprafață liberă deasupra. Presupunând că atmosfera este determinată hidrostatic, ecuația de mișcare se exprimă în forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - fv + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad (2.21 \text{ a})$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + fu + g \frac{\partial h}{\partial y} = 0 \quad (2.21 \text{ b})$$

Din cauza ipotezei de densitate constantă, forța de presiune orizontală este independentă de înălțime. Presupunând că, câmpul vântului este inițial independent de înălțime, acesta va rămâne așa, astfel încât termenii de advecție verticală au fost omiși în sistemul de mai sus.

Cu ipoteza de incompresibilitate, ecuația de continuitate este lineară:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Integrând această ecuație în raport cu z , se obține:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \cdot h + w_h - w_0 = 0$$

Conform condițiilor la limită cinematice, w trebuie să se anuleze la limita inferioară, $w_0 = 0$. Pe de altă parte, viteza verticală $w = \dot{z}$ la limita superioară, reprezintă viteza cu care este ridicată suprafața liberă.

Astfel: $w_h = \dot{h}$ și deci:

$$h \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\dot{h} = - \left(\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} \right) \quad (2.22)$$

Avem astfel un sistem de 3 ecuații cu necunoscutele u, v și h .

notând:
$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

putem obține ecuația turbionului:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \beta v = -(\zeta + f) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - (\zeta + f) \frac{1}{h} \dot{h}$$

care de asemena poate fi scrisă:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\zeta + f}{h} \right) = 0 \quad (2.23)$$

Ecuatia arată faptul că, cantitatea $\frac{\zeta + f}{h}$, care se numește turbion potențial, se conservă.

Scopul ecuației turbionului este de a introduce variația latitudinală a parametrului Coriolis β , pentru simplificarea analizei.

Pentru a obține soluții analitice pentru sistemul de ecuații (2.21 a,b), (2.22) și (2.23), ecuațiile vor fi linearizate cu metoda perturbației.

Presupunând un curent zonal U și perturbații independente de y , rezultă:

$$\delta \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) u - fv + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) h + \frac{\partial H}{\partial y} v + H \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial v}{\partial x} + \beta v + f \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Aici H este grosimea medie a fluidului, $\frac{\partial v}{\partial x}$ este turbionul, u, v și h reprezintă perturbații.

Coeficientul δ al operatorului linear diferențial în prima ecuație va identifica sursa acestui termen-ecuația de conservare a momentului.

În starea neperturbată ecuația (2.21 b) se reduce la:

$$fU = -g \frac{\partial H}{\partial y}$$

care poate fi folosită în sistemul de mai sus.

Vom considera soluții armonice pentru perturbațiile u, v și h .

$$\begin{cases} u = u_0 e^{i\mu(x-ct)} \\ v = v_0 e^{i\mu(x-ct)} \\ h = h_0 e^{i\mu(x-ct)} \end{cases} \quad \mu = \frac{2\pi}{L}$$

Pentru a simplifica analiza, f și β vor fi presupuse constante, la fel și u_0, v_0 și h_0 .

Înlocuind în sistemul de ecuații se ajunge la următorul sistem de ecuații:

$$\delta(U - c) i \mu u_0 - f v_0 + g i \mu h_0 = 0$$

$$H i \mu u_0 - \frac{fU}{g} v_0 + (U - c) i \mu h_0 = 0$$

$$f i \mu u_0 + [\beta - \mu^2 (U - c)] v_0 = 0$$

Soluții nenule există numai dacă determinantul coeficienților este nul:

$$\begin{vmatrix} \delta(U-c) & -f & g \\ f & \beta - \mu^2(U-c) & 0 \\ H & \frac{-fU}{g} & U-c \end{vmatrix} = 0$$

Dezvoltând:

$$[\beta - \mu^2(U-c)][gH - \delta(U-c)^2] - f^2[(U-c) - U] = 0$$

mai întâi presupunem că viteza de fază este mult mai mică decât a undelor de gravitație:

$$(U-c)^2 \ll gH$$

Rezultă:

$$[\beta - \mu^2(U-c)]gH - f^2[(U-c) - U] = 0$$

Rezolvând pentru $c - U$ rezultă:

$$c = U - \frac{\beta + f^2U/gH}{\mu^2 + f^2/gH}$$

Pentru a aproxima rădăcinile care mai rămân, presupunem că viteza undelor depășește C_R (viteza undei Rossby):

$$|c| \gg |C_R| \equiv \left| U - \frac{\beta}{\mu^2} \right|$$

Intrucât C_R și U au același ordin de mărime,

$$|c| \gg |U|, \quad |c - U| \gg U$$

Cu aceste aproximații, termenul ce conține β poate fi omis, la fel și ultimul U din ecuația de frecvență:

$$-\mu^2[gH - \delta(U-c)(U-c)] - f^2 = 0$$

sau

$$(U - c)^2 = gH + \frac{f^2}{\mu^2}, \delta \equiv 1$$

$$c = U \pm \sqrt{gH + \frac{f^2}{\mu^2}} \quad (2.24)$$

2.9 Procesul de ajustare geostrofic

O problemă care a fost luată în considerare mai recent, este ajustarea mutuală a câmpului masei și al vitezei, când nu există un balans inițial. Este important pentru necesitatea de a avea o determinare potrivită condițiilor inițiale pentru masă și viteză pentru integrare numerică a ecuațiilor de mișcare primitive.

Considerăm un fluid barotrop cu un nivel de grosime H cu aceste condiții inițiale impuse la $t = 0$.

$$\begin{cases} u = u_0, & |y| \leq a \\ u_0 = 0, & |y| > a, \\ v_0 = 0, & (\nabla h)_0 = 0 \end{cases} \quad (2.25)$$

Intrucât transportul lateral al masei este important aici, variațiile în direcția x vor fi neglijate. Rezultă următorul sistem de ecuații lineare:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - fv = 0 \end{cases} \quad (2.26 \text{ a})$$

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} + fu + g \frac{\partial h}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (2.26 \text{ b})$$

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + H \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (2.26 \text{ c})$$

Derivăm (2.26 b) în raport cu t și (2.26 c) în raport cu y :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + f \frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial^2 h}{\partial y \partial t} \quad (2.27)$$

și:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial y \partial t} = -H \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \quad (2.28)$$

Inlocuind din (2.26 a) și (2.28) în (2.27) rezultă o ecuație pentru v :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + f^2 v - gH \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \quad (2.29)$$

Pentru soluții de tip undă de forma $Ae^{i(ky - vt)}$, unde de gravitație inerțiale se propagă cu frecvența ($c = v/k$)

$$v = \pm \sqrt{f^2 + gHk^2}$$

unde k este numărul de undă în direcția y .

Pentru analiza procesului de ajustare, trebuie să includem difuzia. Pentru aceasta soluția poate fi reprezentată prin integrala Fourier.

$$v(y, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{v}(k, t) e^{iky} dk$$

unde:

$$\tilde{v}(k, t) = \int_{-\infty}^{\infty} v(y, t) e^{-iky} dy$$

Aceste integrale sunt transformări Fourier inverse și directe.

În continuare, ecuația (2.29) poate fi transformată în spațiul (k, t) înmulțind cu e^{-iky} și integrând în raport cu y de la $-\infty$ la $+\infty$.

Primii doi termeni sunt respectiv $\frac{\partial^2 \tilde{v}(k, t)}{\partial t^2}$ și $f^2 \tilde{v}(k, t)$, pe când cel de-al treilea termen $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$ se transformă în $-k^2 \tilde{v}(k, t)$. Rezultă că ecuația transformată este:

$$\frac{\partial^2 \tilde{v}(k, t)}{\partial t^2} + (f^2 + gHk^2) \tilde{v}(k, t) = 0$$

care are soluția generală:

$$\tilde{v}(k, t) = A(k) \cos vt + B(k) \sin vt \quad (2.30)$$

unde v este definit mai înainte.

Pentru a determina $A(k)$, punem $t = 0$ în și folosind definiția lui $\tilde{v}(k, t)$, rezultă:

$$A(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} v(y, 0) e^{-iky} dy \quad (2.31)$$

Derivând relația (2.30) rezultă:

$$\frac{\partial v(k, t)}{\partial t} = -vA(k) \sin vt + vB(k) \cos vt$$

și:

$$\frac{\partial v(k, 0)}{\partial t} = vB(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial v(y, 0)}{\partial t} e^{-iky} dy$$

Deci:

$$B(k) = \frac{1}{v} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iky} \frac{\partial v(y, 0)}{\partial t} dy \quad (2.32)$$

Rezultă din (2.26 b), folosind condiția inițială (2.25) ca:

$$\frac{\partial v(y, 0)}{\partial t} = -fu_0, \quad \text{pentru } y \leq |a|$$

Din (2.31) rezultă $A(k) \equiv 0$ și din (2.32):

$$B(k) = \frac{1}{v} \int_{-\infty}^{\infty} -fe^{-iky} u_0 dy = \frac{fu_0 e^{-iky}}{vik} \Big|_{-\infty}^a$$

de unde:

$$B(k) = -\frac{2fu_0}{kv} \sin ka$$

Substituind aceste valori în (2.30) rezultă:

$$\tilde{v}(k, t) = -\frac{2fu_0}{kv} \sin ka \sin vt$$

Și din definiția lui $v(y, t)$ rezultă:

$$v(y, t) = \frac{-2fu_0}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin ka \sin vt}{k} \frac{1}{v} e^{iky} dk$$

Intrucât distribuția inițială este simetrică în raport cu y , soluția poate fi scrisă ca o integrală din cosinus, adică:

$$v(y, t) = \frac{-2fu_0}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin ka \sin vt}{k} \frac{1}{v} \cos ky dk$$

unde v este cunoscut.

Unele rezultate interesante pot fi obținute pentru valori tipice ale diversilor parametri.

De exemplu: $u_0 = 10 \text{ m/s}$, $f = 10^{-4} \text{ sec}^{-1}$, $H = 10^3 \text{ m}$, raza deformării λ ,

$$\lambda \equiv \sqrt{\left(\frac{gH}{f^2}\right)} = 1000 \text{ km}$$

Valoarea mică comparativă a lui H este aleasă pentru a reduce viteza de grup maximă \sqrt{gH} a undelor de gravitație extreme (de suprafață la o valoare apropiată de cea a undelor de gravitație internă în atmosferă, care vor avea ca efect principal redistribuirea masei într-o situație concretă de "nebalanță").

Figurile următoare, după Winninghoff, prezintă înălțimea suprafeței funcție de timp la $y = -a$, înălțimea suprafeței ca o funcție de y după 80 de ore și viteza laterală ca o funcție de timp la $y = 0$.

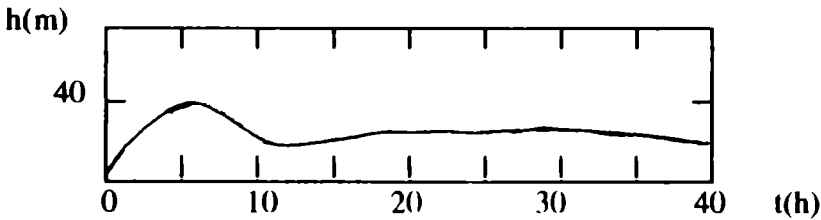


Fig.2.2 Înălțimea suprafeței ca funcție de timp la $y = -a = -500 \text{ km}$

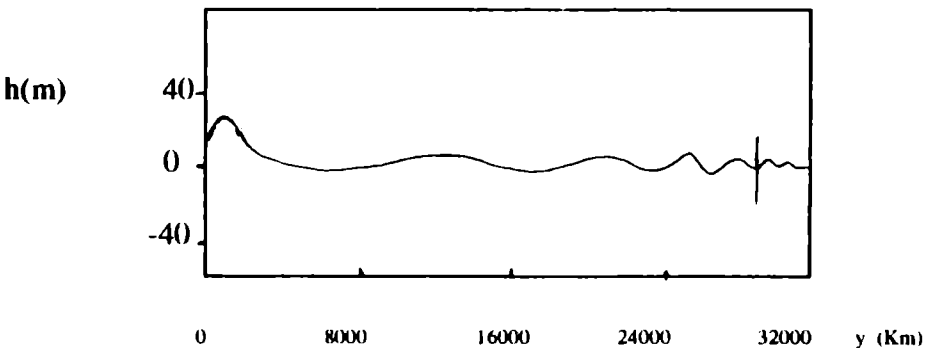


Fig.2.3 Înălțimea suprafeței ca funcție de y după 800 de ore, $a = 500 \text{ km}$

În figura 2.2 notăm o ridicare inițială a suprafeței în punctul $y = -a$, deoarece masa este transportată rapid spre dreapta centrului curentului $y = 0$.

Suprafața oscilează apoi, deoarece undele de gravitație inerțiale se propagă lateral traversând curentul cu oscilații care scad în timp, deoarece curentul tinde către un echilibru geostrofic.

Linia verticală din figura 2.3 la aproape 30000 km arată prezența unei regiuni de influență care se propagă cu viteza de grup maximă $G = \sqrt{gH}$.

Mai general:

$$G = c - L \frac{dc}{dL}$$

Figura 2.4 arată variația vitezei laterale cu timpul la mijlocul curentului inițial $y=0$. Deplasarea inițială a masei spre dreapta, se reflectă în viteze negative în primele câteva ore.

Mișcările de gravitație inerțiale în atmosferă au amplitudine mică, întrucât ele tind să fie estompate prin dispersia de energie în spectrul lungimilor de undă care sunt prezentate în mod obișnuit.

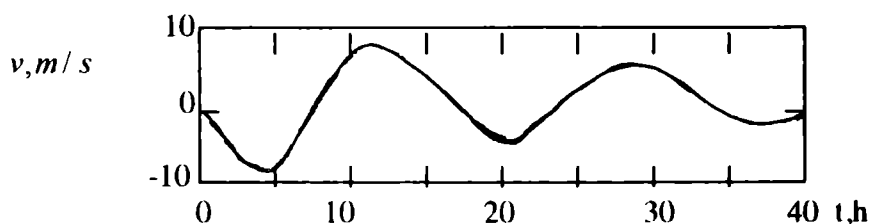


Fig.2.4. Viteza laterală ca o funcție de timp la $y=0$, $a=2000$ km

Ca o consecință, energia totală a acestor mișcări tinde să fie dispersată în regiuni din ce în ce mai mari și este eventual disipată prin frecare.

În raport cu perturbațiile sinoptice, o funcție importantă a undelor de gravitație inerțiale este de a ajusta nepotrivirea dintre câmpul de presiune și cel al vântului, care tinde către o stare cuasi-geostrofică, proces care este numit în mod curent, ajustare geostrofică.

Natura precisă a acestui proces depinde critic de scara mișcării L . Dacă această scară este mare în comparație cu raza deformației, $L > \lambda$, efectul ajustării este mai întâi schimbarea câmpului vântului, pe când pentru scări mici, $L < \lambda$, câmpul masei se schimbă mai rapid.

În problema precedentă câmpul de viteză zonal a fost impus instantaneu pentru un fluid staționar în echilibru. Forța Coriolis generează unde de gravitație inerțiale care se propagă lateral, care redistribuie masa și energia. O problemă analogă constă din impunerea dintr-o dată a unei distribuții de masă variabile lateral pentru un fluid staționar în echilibru, și apoi determinarea caracterului evoluției câmpului de viteze și redistribuirea masei.

Ecuațiile pentru această problemă sunt identice cu cele precedente, dar este mai convenabil să obținem o ecuație diferențială pentru înălțimea suprafeței decât pentru viteza și asta se obține într-un mod indirect, utilizând ecuația turbionului potențial, care se poate scrie:

$$\frac{\partial q}{\partial t} = 0 \quad \text{unde: } q = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\rho h}{H}$$

Când condiția de egalitate pentru valorile inițiale și finale ale turbionului potențial este impusă, împreună cu ipoteza că starea finală este geostrofică, este ușor de obținut expresii pentru distribuțiile limitate ale înălțimii și vitezei.

În cazul când distribuția inițială a înălțimii este dată de $h = h_0$, $|y| \leq a$ și $h_0 = 0, |y| > 0$, câmpurile rezultante după un interval infinit de timp sunt simetrice față de $y = 0$ cu vânturi de vest spre nord și vânturi de est spre sud. Întrucât turbionul potențial trebuie să rămână zero pentru $|y| > 0$, creșterea lui h trebuie să fie estompată prin contribuții laterale conform relației de mai sus.

Apar două probleme în legătură cu rezolvarea sistemului de ecuații primitive pentru prognoza numerică. Prima este de a simula corespunzător ajustarea geostrofică către starea sa caracteristică cuasi-nedivergentă, de exemplu în raport cu condițiile inițiale unde pot fi nepotriviri eronate între câmpurile de masă și viteză, datorită datelor de observație puține și incorecte.

A doua este că schema de integrare numerică trebuie să prognozeze corect mișcarea la scară mare a atmosferei și deci transformările dintre energia cinetică și cea potențială.

3. ANALIZA LA SCARĂ

3.1 Analiza la scară pentru variabile termodinamice și ecuații de bilanț

O analiză la scară, furnizează o metodă sistematică de comparare a mărimilor diferiților termeni care apar în ecuații hidrodinamice care guvernează mișcările atmosferice.

Această teorie împreună cu considerații energetice, permite desemnarea unor modele consistente dinamic și matematic pentru analiza dinamică și prognoza numerică a vremii Haltiner [1971].

Variabilele fizice sunt presupuse a avea valori caracteristice și scara în spațiu și timp după cum urmează.

L -scara orizontală caracteristică (grosier un sfert din lungimea de undă a perturbației);

D -scara verticală caracteristică;

H -scara înălțimii atmosferei (uzual troposfera);

V, W -scara caracteristică a vitezelor orizontale și verticale;

$\frac{L}{V}$ -perioada caracteristică (o perioadă de advecție);

De exemplu pentru unde sinoptice tipice: $L \sim 1000 \text{ km}$, $H \sim 10 \text{ km}$, $V \sim 10 \text{ m/s}$.

Se presupune că mărimea aproximativă a derivatelor este:

$$\frac{\partial v}{\partial y} \sim \frac{\partial u}{\partial x} \sim \frac{V}{L}, \text{etc.} \quad \frac{\partial u}{\partial z} \sim \frac{V}{L}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} \sim \frac{V}{L/V} = \frac{V^2}{L}$$

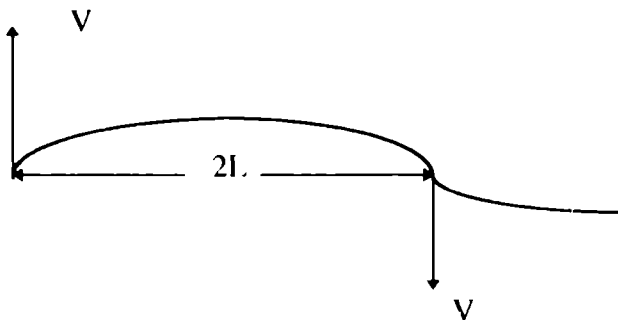


Fig.3.1 - Mărimi caracteristice

Vom analiza următoarele ecuații, care descriu mișcarea fără frecare:

$$\dot{\mathbf{v}} + 2\bar{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{v} = -\alpha \nabla p + \mathbf{g}$$

$$\frac{1}{\rho} \dot{\rho} = -\nabla \cdot \mathbf{v}$$

$$\frac{c_p T}{\theta} \dot{\theta} = Q; \quad \theta = T \left(\frac{P}{p} \right)^{R/c_p} \quad (3.1)$$

$$p\alpha = RT \quad \alpha = \frac{1}{\rho}$$

Variabile termodinamice

Presupunând că atmosfera are temperatura constantă $\bar{\theta}$ și integrând ecuația hidrostatică:

$$d\rho = -g\rho dz \quad \text{rezultă:}$$

$$p = P e^{-gz/R\bar{\theta}} = P e^{-z/H}$$

$$\text{unde } H = \frac{R\bar{\theta}}{g} \quad (3.2)$$

definește scara înălțimii, ca fiind nivelul unde presiunea atmosferică este egală cu P/e , adică aproximativ 37% din valoarea sa la nivelul mării.

În continuare, vom scrie variabilele termodinamice în formă adimensională, ca perturbații de la o stare de referință (standard) care depinde numai de z :

$$\begin{aligned} p &= p_s(z) + \delta p = P(\rho'_s + \delta \rho') \\ T &= T_s(z) + \delta T = \bar{\theta}(T'_s + \delta T'_s) \\ \theta &= \theta_s(z) + \delta \theta = \bar{\theta}(\theta'_s + \delta \theta') \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_s(z) + \delta \rho = \frac{P}{R\bar{\theta}}(\rho'_s + \delta \rho') = \frac{P}{gH}(\rho'_s + \delta \rho') \\ \alpha &= \alpha_s(z) + \delta \alpha = \frac{R\bar{\theta}}{P}(\alpha'_s + \delta \alpha') = \frac{gH}{P}(\alpha'_s + \delta \alpha') \end{aligned}$$

Cantitățile adimensionale $T'_s, \rho'_s, \rho'_s, \alpha'_s, \theta'_s$ sunt apropiate de unitate, pe când $\delta T'_s, \delta \rho', \delta \rho', \delta \alpha'$ și $\delta \theta'$ sunt mult mai mici decât 1. Este evident că variabilele adimensionale pentru atmosfera standard satisfac relațiile:

$$\begin{cases} \rho'_s = \frac{1}{\alpha'_s} p'_s = \rho'_s T'_s \\ \theta'_s = T'_s p'_s{}^{R/c_p}, \quad H \frac{d\rho'_s}{dz} = -\rho'_s \end{cases} \quad (3.4)$$

Dacă coordonata verticală este scalată cu ajutorul înălțimii H , de exemplu:

$$\frac{\partial A_s}{\partial z} = \frac{1}{H} \frac{\partial A_s}{\partial z'}, \text{ relația hidrostatică devine:}$$

$$\frac{\partial p'_s}{\partial z'} = -\rho'_s \quad \text{sau} \quad \frac{\partial \ln p'_s}{\partial z'} = -\frac{1}{T'_s} \quad (3.5)$$

În general, variabilele termodinamice care reprezintă starea de referință a atmosferei vor fi scalate vertical cu parametrul H , pe când variabilele dinamice $\delta p', \delta T'$, etc. sunt scalate în conformitate cu lungimea caracteristică de scală, care pentru direcția verticală este D . Introducând variabilele adimensionale în ecuația de stare obținem:

$$P(p'_s + \delta p'_s) \frac{R\bar{\theta}}{P} (\alpha'_s + \delta \alpha'_s) = R\bar{\theta} (T'_s + \delta T'_s)$$

Neglijând produsele de perturbații și utilizând (3.4) rezultă:

$$p'_s \delta \alpha'_s + \alpha'_s \delta p'_s = \delta T'_s$$

și

$$\frac{\delta \alpha'_s}{\alpha'_s} + \frac{\delta p'_s}{p'_s} = \frac{\delta T'_s}{T'_s} \quad (3.6)$$

Ecuția de continuitate

În coordonate curbilinii sferice (vezi anexa A2), ecuația de continuitate este:

$$(\ln \rho) + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{v \lg \varphi}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{2w}{r} = 0 \quad (3.7)$$

$$\frac{V}{L} \quad \frac{V}{L} \quad \frac{V}{L} \quad \frac{V}{a} \quad \frac{W}{D} \quad \frac{2W}{a} \sim 0$$

Ordinile de mărime sunt scrise sub fiecare termen.

Deoarece $r \sim a$ (a raza pământului):

$$\frac{2W}{r} \sim \frac{2W}{a} \ll \frac{W}{D}$$

De asemenea

$$\frac{1}{\rho} \dot{\rho} \sim \frac{1}{\rho} \frac{\Delta \rho}{L} \leq \frac{V}{L}$$

De asemenea

$$\frac{1}{\rho} \dot{p} \sim \frac{1}{\rho} \frac{\Delta p}{L/V} \leq \frac{V}{L}$$

rezultă că ultimul termen din (3.7) poate fi neglijat. Mai mult, primii 3 termeni din (3.7) sunt de ordinul de mărime $\frac{V}{L}$ sau mai mici, dar:

$$\frac{W}{D} < \frac{V}{L} \text{ sau } W < \frac{D}{L} V \quad (3.8)$$

Pentru mișcări la scară mare, $D/L \ll 1$, deci $W \ll V$.

Este evident în mod empiric că termenii $\frac{\partial u}{\partial x}$ și $\frac{\partial v}{\partial y}$ tind să se compenseze unul pe celălalt, și deci suma lor este de un ordin de mărime mai mică decât fiecare termen individual.

Ecuția de mișcare orizontală

Se consideră ecuația de mișcare:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + w \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} + f \mathbf{k} \times \mathbf{v} = -\alpha \nabla p \quad (3.11)$$

$$\frac{V^2}{L} \quad \frac{V^2}{L} \quad W \frac{V}{D} \quad fV$$

Dar $\bar{f} = 2\Omega \sin \varphi \sim 10^{-4} \text{ s}^{-1}$, iar pentru mișcări la scară mare $\frac{V}{L} \sim 10^5$.

În consecință, accelerația orizontală este de un ordin de mărime mai mic decât forța Coriolis. Rezultă că pentru această scară a mișcării forța de presiune trebuie să fie de același ordin de mărime ca forța Coriolis (vântul geostrofic).

Raportul dintre accelerație și forța Coriolis este denumit numărul lui Rossby R_o .

$$R_o = \frac{V}{fL} \quad (3.12)$$

Pentru $R_o \leq 0.1$ suntem în cadrul aproximației geostrofice.

Ecuția (3.11) poate fi scrisă în forma adimensională, utilizând (3.3), alte valori caracteristice și numărul lui Rossby:

$$R_o \dot{\mathbf{v}}' + \frac{f}{\bar{f}} \mathbf{k} \times \mathbf{v}' = -\frac{H}{D} \frac{R_o}{F} \alpha \nabla' \delta \alpha' \quad (3.13)$$

unde \bar{f} este valoarea parametrului Coriolis la o latitudine medie și:

$$t = \frac{L}{V} t'; \quad \mathbf{v} = V \mathbf{v}'; \quad \nabla = L^{-1} \nabla'; \quad \alpha = \frac{gH}{p} \alpha' \quad (3.14)$$

iar $F = V^2 / g \cdot D$ (numărul lui Froude)

Este evident din (3.13) întucât $V' \sim 1 \sim \alpha'$, că :

$$\delta p' \sim DF / HR_0 \quad \text{pentru} \quad R_0 < 1 \quad (3.15)$$

$$\delta p' \sim DF / H \quad \text{pentru} \quad R_0 \geq 1$$

sau

$$\delta p' \sim DF / HR_1$$

unde

$$R_1 = R_0 \quad \text{pentru} \quad R_0 < 1$$

$$R_1 = 1 \quad \text{pentru} \quad R_0 \geq 1$$

O valoare mică a lui R_0 , sau o valoare mare a lui F pot fi asociate cu o perturbație mare de presiune.

Ecuția de mișcare verticală

In coordonate curbilinii sferice ecuația se scrie:

$$\dot{w} - \frac{u^2 + v^2}{r} - u \, 2\Omega \cos \varphi + g + \alpha \frac{\partial p}{\partial z} = 0$$

Considerând mișcări cu $v \sim 10 \text{ m/s}$, $f \sim 10^{-4} \text{ s}^{-1}$, al doilea și al treilea termen sunt de cel puțin 4 ordine de mărime mai mici decât forța de gravitație. Rezultă:

$$\dot{w} + g + \alpha \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad (3.16)$$

Introducând variabilele adimensionale, rezultă:

$$\frac{VW}{L} \dot{w}' + g + \frac{gH}{p} (\alpha'_s + \delta \alpha') \frac{p}{H} \frac{\partial p'_s}{\partial z'} + \frac{gH}{p} (\alpha'_s + \delta \alpha') \frac{p}{D} \frac{\partial \delta p'}{\partial z'} = 0$$

care se reduce la:

$$\frac{VW}{L} \dot{w}' - g \frac{\delta \alpha'}{\alpha'} + \frac{gH}{D} (\alpha'_s + \delta \alpha') \frac{\partial \delta p'}{\partial z'} = 0 \quad (3.17)$$

Primul termen are mărimea VW/L , pe când ultimul termen, folosind (3.15) are mărimea V^2/DR_1 . Raportul dintre accelerație și perturbația verticală a forței de presiune este:

$$\frac{(VW/L)HR_1}{(gH/D)DF} \sim \frac{WDR_1}{VL} \leq \frac{D^2 R_1}{L^2} \leq \frac{D^2}{L^2}$$

ceea ce arată că $D^2/L^2 \ll 1$ este o condiție suficientă pentru aproximația hidrostatică. Aceasta este evident valabilă pentru mișcări tipice la scară mare, deoarece D este foarte mic în comparație cu L , și nu este valabilă de exemplu pentru studiul convecției, unde $D \sim L$. Cu aproximația hidrostatică, (3.17) se reduce la:

$$\frac{\delta\alpha'}{\alpha'_s} = \frac{H}{D} (\alpha'_s + \delta\alpha') \frac{\partial\delta\rho'}{\partial z'} \quad (3.18)$$

$$\frac{\delta\alpha'}{\alpha'_s} \sim \frac{H}{D} \frac{DF'}{HR_1} = \frac{F'}{R_1} \sim \frac{\delta\rho'}{\rho'_s}$$

Folosind relația (3.15) în (3.16) rezultă:

$$\frac{\delta T'}{T'_s} \sim \frac{F'}{R_1} + \frac{DF'}{HR_1} \sim \frac{F'}{R_1} \quad (3.19)$$

În mod similar, introducerea unor cantități adimensionale în definiția temperaturii potențiale conduce la:

$$\frac{\delta\theta'}{\theta'_s} = \frac{\delta T'}{T'_s} - \frac{R}{c_p} \frac{\delta\rho'}{\rho'_s}$$

iar

$$\frac{\delta\theta'_s}{\theta'_s} \sim \frac{F'}{R_1} + \frac{R}{c_p} \frac{DF'}{HR_1} \sim \frac{F'}{R_1} \quad (3.20)$$

Principiul I al termodinamicii

Poate fi scris sub forma adiabatică:

$$\frac{\partial \ln \theta}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \ln \theta + \omega \frac{\partial \ln \theta}{\partial z} = 0$$

Putem scrie în continuare:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) \ln \left[\theta_s \left(1 + \frac{\delta\theta}{\theta_s} \right) \right] = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) \ln \left(1 + \frac{\delta\theta'}{\theta'_s} \right) \leq \frac{V}{L} \frac{F'}{R_1}$$

$$w \frac{\partial}{\partial z} \ln \left[\theta_s \left(1 + \frac{\delta\theta}{\theta_s} \right) \right] = w \frac{1}{\theta_s} \frac{\partial \theta_s}{\partial z} + w \frac{\partial}{\partial z} \ln \left(1 + \frac{\delta\theta'}{\theta'_s} \right) =$$

$$= w \frac{\partial \ln \theta_s}{\partial z} + w \frac{\partial \delta\theta'}{\partial z \theta'_s} \sim \frac{W\sigma_s}{D} + \frac{WF'}{DR_1}$$

unde $\sigma_s = D \frac{\partial \ln \theta_s}{\partial z}$ este parametrul de stabilitate statică, bazat pe o atmosferă standard și care are o valoare de aproximativ 0,1.

Rezultă că:

$$\frac{VF}{LR_1} + \frac{W\sigma_s}{D} + \frac{WF}{DR_1} \sim 0$$

Pentru mișcări la scară sinoptică $F \sim 10^3$ deci $W\sigma_s/D > WF/DR_1$.

Rezultă că primii doi termeni din relația precedentă trebuie să aibă același ordin de mărime, dar de semn opus, deci:

$$\frac{VF}{LR_1} \sim \frac{W\sigma_s}{D} \quad \text{sau} \quad W \sim \frac{DVF}{L\sigma_s R_1}$$

Accelerația orizontală

Accelerația vântului orizontal poate fi dezvoltată astfel:

$$\dot{\mathbf{v}} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) \mathbf{v} + w \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \quad (3.21)$$

$$\frac{V^2}{L} \sim \frac{V^2}{L} + \frac{WV}{D} \sim \frac{V^2}{L} + \frac{V^2 F}{L\sigma_s R_1}$$

Pentru mișcări la scară mare, $F/\sigma_s R_1 \sim 10^{-1}$, deci advecția verticală a momentului este uzual de aproape un ordin de mărime mai mic decât advecția orizontală a momentului pentru mișcarea la scară mare.

Ecuția de continuitate

Revenind la ecuația de continuitate, temperatura potențială θ se poate scrie sub

$$\text{forma: } \ln \theta = -\ln \rho + \frac{c_v}{c_p} \ln p + \text{const.}$$

Deci

$$\frac{\partial \ln \rho}{\partial z} = \frac{c_v}{c_p} \frac{\partial \ln p}{\partial z} - \frac{\partial \ln \theta}{\partial z} = -\frac{c_v}{c_p} \frac{g}{RT} - \frac{\partial \ln \theta}{\partial z}$$

Substituind în ecuația de continuitate:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) \ln \rho - \frac{c_v}{c_p} \frac{g w}{RT} - w \frac{\partial \ln \theta}{\partial z} + \nabla \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Mărimile diferiților termeni sunt:

$$(a) \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) \ln \rho \sim \frac{V}{L} \frac{F}{R_1}$$

$$(b) \quad \frac{c_v}{c_p} \frac{g w}{RT} \sim \frac{c_v}{c_p} \frac{w}{H} \sim \frac{c_v}{c_p} \frac{D}{H\sigma_s R_1} \frac{F}{L}$$

$$(c) \quad w \frac{\partial \ln \theta}{\partial z} \sim \frac{w \sigma_s}{D} \sim \frac{F V}{R_1 L}$$

$$(d) \quad \nabla \cdot \mathbf{v} \leq \frac{V}{L}$$

$$(e) \quad \frac{\partial w}{\partial z} \sim \frac{W}{D} \sim \frac{F V}{\sigma_s R_1 L}$$

Intrucât $F/\sigma_s R_1 \sim 10^{-1}$ pentru perturbații la scară mare, rezultă că: $\nabla \cdot \mathbf{v} < \frac{V}{L}$ ceea

ce stabilește că: $\frac{\partial u}{\partial x}$ și $\frac{\partial v}{\partial y}$ ambele de ordinul $\frac{V}{L}$ trebuie să fie de semn opus și

$$\text{div } \mathbf{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \sim 10^{-1} \frac{V}{L} \sim 10^{-6} s^{-1} .$$

Pentru perturbații adânci $D \sim H$ și $\sigma_s < 1$. Rezultă că (b) este mai mare decât (a) și (c) și deci ecuația de continuitate se scrie:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{c_v}{c_p} \frac{g w}{RT} = 0 \quad (\text{perturbații adânci})$$

sau înlocuind ambii termeni care conțin advecția verticală a densității:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial w}{\partial z} + w \frac{\partial \ln \rho}{\partial z} = 0$$

Când perturbațiile sunt puțin adânci, $D/H < 1$ ultimul termen din ecuația de mai sus se neglijează și se rețin numai (d) și (e):

$$\nabla \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (\text{perturbații puțin adânci})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (\text{fluid quasi nedivergent})$$

Coordonatele de presiune

Dacă aproximația geostrofică este valabilă e convenabil să utilizăm x, y, p, t . Ecuațiile de mișcare se scriu:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \omega \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial p} + f \mathbf{k} \times \mathbf{v} = -\nabla \Phi$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \theta + \omega \frac{\partial \theta}{\partial p} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p} = -\alpha = \frac{-RT}{p} \quad (3.22)$$

unde:

$$\omega = \dot{p} = \frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla p + \omega \frac{\partial p}{\partial z} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) p - g \rho \omega$$

$$\omega \sim \frac{VP}{L} \left(\frac{\partial}{\partial t'} + \mathbf{v}' \cdot \nabla' \right) \delta p' - \frac{WP}{H} (\rho' + \delta \rho')$$

$$\omega \sim \frac{VPDF}{LHR_1} + \frac{DVFP}{L\sigma_s HR_1} \sim \frac{DVPF}{HL\sigma_s R_1}$$

Al doilea termen este de regulă dominant, sugerând următoarea scalare:

$$\omega = \frac{DVPF}{HL\sigma_s R_1} \omega' \equiv \frac{DVP}{HLR_1 R_1} \omega' \text{ cu numărul lui Richardson:}$$

$$R_1 = \frac{g \partial \ln \theta / \partial z}{(\partial \mathbf{v} / \partial z)^2} \sim \frac{g D \sigma_s}{V^2} = \frac{\sigma_s}{F}$$

pentru $R_1 = R_0 < 1$; $\omega \sim 10^{-3} \text{ hPa} / \text{s}$.

Scalarea geopotentialului $\Phi = gz$ este:

$$\Phi = gH\Phi'$$

Cu acestea ecuația de mișcare se poate scrie:

$$\frac{V^2}{L} \left(\frac{\partial}{\partial t'} + \mathbf{v}' \cdot \nabla' \right) \mathbf{v}' + \frac{V}{P} \frac{FPV}{L\sigma_s R_1} \omega' \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial p'} + f \mathbf{v} k \times \mathbf{v}' + \frac{gH}{L} \nabla' (\Phi' + \delta \Phi') = 0$$

unde $\hat{c}p = \frac{D}{H} p \hat{c}p'$

Împărțind ecuația cu $V\bar{f}$ și simplificând:

$$R_1 \left(\frac{\partial}{\partial t'} + \mathbf{v}' \cdot \nabla' \right) \mathbf{v}' + \frac{F}{\sigma_s} \omega' \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial p'} + \frac{f}{\bar{f}} k \times \mathbf{v}' = \frac{-gH}{LV\bar{f}} \nabla' \delta \Phi'$$

sau

$$R_1 \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}' \cdot \nabla' \right) \mathbf{v}' + \frac{R_1^2}{R_1 R_1^2} \omega' \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial p'} + \frac{f}{f} \mathbf{k} \times \mathbf{v}' = \frac{HR_1}{DF} \nabla' \delta\Phi' = 0$$

$R_1 R_1^2 \sim 1$ pentru unde sinoptice ($R_1 \sim 10^{-1}, \sigma_s \sim 10^{-1}, F = 10^{-3}, R_1 \sim 10^2$).

Comparând forțele de presiune și forțele Coriolis, cu $R_1 \sim 0,1$ rezultă:

$$\delta\Phi' \sim DF/HR_1$$

$$\Phi'' \equiv \frac{HR_1}{DF} \delta\Phi' \sim 1$$

În același mod, ecuația termodinamică, ecuația de continuitate și ecuația hidrostatică poate fi normalizată după cum urmează:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t'} + \mathbf{v}' \cdot \nabla' \right) \theta'' - \omega' \left(\alpha'_s \theta'_s - \frac{1}{R_1 R_1} \frac{\partial \theta''}{\partial p'} \right) = 0$$

$$\nabla' \cdot \mathbf{v}' + \frac{R_1}{R_1 R_1^2} \frac{\partial \omega'}{\partial p'} = 0$$

$$\alpha'' \equiv \frac{R_1 \delta\alpha'}{F}; \quad \theta'' \equiv \frac{R_1 \delta\theta'}{F}$$

$$\frac{\partial \Phi''}{\partial p'} + \alpha'' = 0 \tag{3.23}$$

Vântul divergent

Teorema lui Helmholtz permite împărțirea vântului într-o parte rotațională și o parte divergentă.

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_\psi + \mathbf{v}_x; \quad \mathbf{v}_\psi = \mathbf{k} \times \nabla \psi; \quad \mathbf{v}_x = \nabla \chi$$

Deci ecuația de continuitate se poate scrie:

$$\text{div} \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v}_x = -\frac{\partial \omega}{\partial p}$$

Scalând această ecuație:

$$\frac{V_x}{L} \sim \frac{DVPF}{(DP/H)HL\sigma_s R_1} = \frac{VF}{L\sigma_s R_1} = \frac{V}{R_1 R_1 L}$$

și

$$V_x \sim \frac{FV}{\sigma_s R_1}, \quad V_x \sim \frac{1}{R_1 R_1} V \quad \text{și} \quad V_\psi \sim V$$

partea divergentă este cu un ordin de mărime mai mică decât partea rotațională, deci:

$$\nabla' \cdot \mathbf{v}'_x + \frac{\partial \omega'}{\partial \phi'} = 0$$

3.2 Analiza la scară pentru ecuația turbionului și a divergenței

Ecuația turbionului

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + (\mathbf{v}_\psi + \mathbf{v}_x) \cdot \nabla \zeta + \beta (\mathbf{v}_\psi + \mathbf{v}_x) + \omega \frac{\partial \zeta}{\partial \phi} + (\zeta + f) \text{div} \mathbf{v} + k \nabla \omega \times \frac{\partial (\mathbf{v}_\psi + \mathbf{v}_x)}{\partial \phi} = 0$$

$$\begin{aligned} & \frac{V^2}{L^2} + \frac{V^2}{L^2} \left(1 + \frac{1}{R_1 R_1} \right) + (2\Omega \cos \varphi) \frac{V}{a} \left(1 + \frac{1}{R_1 R_1} \right) + \frac{V^2}{R_1 R_1 L^2} + \\ & + \left(\frac{V}{L} + 10^{-4} \right) \frac{1}{R_1 R_1} \frac{V}{L} + \frac{1}{R_1 R_1} \frac{V^2}{L^2} \left(1 + \frac{1}{R_1 R_1} \right) = 0 \end{aligned}$$

Aici ordinul de mărime al termenilor ce conțin ω a fost luat din estimările de mai înainte a vitezei verticale cu $f \sim 10^{-4} \text{ s}^{-1} \sim 2\Omega \cos \varphi$, $V/L \sim 10^{-5}$, și $(R_1 R_1)^{-1} \sim 10^{-1}$ pentru mișcări la scară mare și medie și $V/a < V/L$

Este evident că termenul $k \nabla \omega \times \partial \mathbf{v}_x / \partial \phi$ este mic, deci o primă aproximație a ecuației turbionului este:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla (\zeta + f) \omega \frac{\partial \zeta}{\partial \phi} + (\zeta + f) \nabla \cdot \mathbf{v}_x + k \nabla \omega \times \frac{\partial \mathbf{v}_\psi}{\partial \phi} = 0 \quad (3.24)$$

Cu o a doua aproximație, termenii de ordinul $V^2/L^2 R_1 R_1$ pot fi omiși :

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \mathbf{v}_\psi \cdot \nabla (\zeta + f) + \mathbf{v}_x \cdot \nabla f + f \nabla \cdot \mathbf{v}_x = 0 \quad (3.25)$$

advecția parametrului Coriolis prin vântul divergent poate fi neglijată:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \mathbf{v}_\psi \cdot \nabla (\zeta + f) + f \nabla \cdot \mathbf{v}_x = 0$$

Pentru a menține restricțiile integrale se folosește \bar{f} , obținând forma cuasi-geostrofică a ecuației turbionului:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \mathbf{v}_v \cdot \nabla(\zeta + f) = \bar{f} \frac{\partial \omega}{\partial p}$$

Omitând ultimul termen, se ajunge la ecuația turbionului simplu barotropic:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \mathbf{v}_v \cdot \nabla(\zeta + f) = 0$$

Ecuția divergenței

O scriem sub forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\text{divv})}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla(\text{divv}) + \omega \frac{\partial(\text{divv})}{\partial p} + (\text{divv})^2 + \nabla \omega \frac{\partial v}{\partial p} - f\zeta + \beta u - 2J(u, v) + \nabla^2 \Phi = 0 \\ \frac{1}{R_i R_1} \frac{V^2}{L^2} + \frac{1}{R_i R_1} \frac{V^2}{L^2} + \frac{1}{(R_i R_1)^2} \frac{V^2}{L^2} + \frac{1}{(R_i R_1)} \frac{V^2}{L^2} + \\ + \frac{1}{R_i R_1} \frac{V^2}{L^2} + 10^4 \frac{V}{L} + 10^4 \frac{V}{a} + \frac{V^2}{L^2} + \frac{1}{R_1} \frac{V^2}{L^2} = 0 \end{aligned}$$

unde βu este aproximația plan β Holton [1979].

Cei mai mari termeni sunt $f\zeta$ și $\nabla^2 \Phi$ urmați de βu și $J(u, v)$. Deci pentru mișcări la scară mare:

$$\nabla^2 \Phi - f\zeta + (\mathbf{k} \times \mathbf{v}) \nabla f - 2J(u, v) = 0$$

Ținând cont de partea rotațională $\mathbf{v} = \mathbf{k} \times \nabla \Psi$

ceea ce reprezintă:

$$\nabla^2 \Phi - f \nabla^2 \Psi - \nabla \Psi \nabla f + 2 \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} \right)^2 - 2 \frac{\partial^2 \Psi \partial^2 \Psi}{\partial x^2 \partial y^2} = 0 \quad (3.26)$$

o balanță continuă între componenta rotațională a vântului și câmpul de geopotențial. Omitând termenii nelinari, rezultă balanța lineară:

$$\nabla(f \nabla \Psi) - \nabla^2 \Phi = 0 \quad (3.27)$$

In final aproximația cuasigeostrofică:

$$\bar{f}\nabla^2\Psi - \nabla^2\Phi = 0$$

Ecuția termodinamicii

Pentru ecuația termodinamicii care a fost analizată mai înainte, considerații similare ca în cazul ecuației turbionului și a divergenței, conduc la ecuația:

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} + \mathbf{v}_\psi \cdot \nabla\theta + \sigma_s \omega = 0 \quad (3.28)$$

care este considerată cu aproximația geostrofică.

Ecuția ω

Vom deriva ecuația de balanță liniară (3.27) în raport cu timpul:

$$f \frac{\partial\zeta}{\partial t} - \nabla^2 \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \nabla f \nabla \frac{\partial\Psi}{\partial t} = 0$$

Eliminând $\frac{\partial\zeta}{\partial t}$ între această ecuație și ecuația turbionului, rezultă:

$$\nabla^2 \frac{\partial\Phi}{\partial t} - \nabla f \nabla \frac{\partial\Psi}{\partial t} + f\mathbf{v}_\psi \cdot \nabla(\zeta + f) + f\mathbf{v}_z \cdot \nabla f - f^2 \frac{\partial\omega}{\partial p} = 0$$

Analizând ordinele de mărime din ecuația precedentă, se ajunge în final la relația:

$$\sigma_s \nabla^2 \omega + \bar{f}^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial p^2} = \bar{f} \frac{\partial}{\partial p} \left[\mathbf{v}_\psi \cdot \nabla(\zeta + f) \right] - \nabla^2 \left(\mathbf{v}_\psi \cdot \nabla \frac{\partial\Phi}{\partial p} \right) \quad (3.29)$$

care este o relație de diagnoză pentru câmpul vitezelor verticale ω .

4. MODELE ATMOSFERICE LA SCARĂ MARE

Introducere

Modelarea atmosferei presupune o cunoaștere aprofundată a legilor și proceselor fizice care au loc în atmosferă, posibilitatea definirii elementelor esențiale ale acestora și neglijarea celor cu efect secundar. Ipotezele simplificatoare, care definesc fiecare model în parte trebuie alese de o asemenea manieră încât modelul să reprezinte cât mai fidel realitatea, dar în același timp să fie suficient de simplu, pentru ca să poată fi folosit în mod operativ.

Utilizarea calculatoarelor pentru integrarea numerică a ecuațiilor ce caracterizează aceste modele, face ca acestea să fie folosite în practica curentă a Institutelor Naționale de Meteorologie realizându-se hărți ce descriu evoluția viitoare a câmpurilor meteorologice, necesare atât pentru prognoza timpului, cât și pentru protecția meteorologică a navigației aeriene.

4.1 Modelul echivalent barotrop

Ipotezele care stau la baza definirii modelului echivalent barotrop sunt Thompson [1961]:

i) direcția vântului variază puțin pe verticală în condițiile circulației la scară mare;

ii) variațiile vitezei vântului cu înălțimea sunt aceleași pentru toate verticalele;

Vom face uz de ecuația turbionului, în coordonate (x, y, p) scrisă sub forma:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla (\zeta + f) + \omega \frac{\partial \zeta}{\partial p} = -(\zeta + f) \operatorname{div} \mathbf{v} + \mathbf{k} \times \frac{\partial}{\partial p} \times \nabla \omega \quad (4.1)$$

și ecuația continuității:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0 \quad (4.2)$$

Ipotezele enunțate mai sus ne conduc la următoarea evaluare:

$$\mathbf{v}(x, y, p, t) = A(p) \mathbf{v}(x, y, t) \quad (4.3)$$

unde $A(p)$ este o funcție empirică.

Procedând în mod analog, pentru turbionul relativ, se obține:

$$\zeta(x, y, p, t) = A(p)\bar{\zeta}(x, y, t) \quad (4.4)$$

Operatorul bară indică o valoare mediată pe verticală de la $p = p_0$ (presiunea de la nivelul mării) la $p = 0$ și se definește:

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{p_0 - p_0} \int_{p_0}^0 \alpha dp \quad (4.5)$$

Aplicând relației (4.3) acest operator de mediere, se obține:

$$\bar{v} = \bar{A}\bar{v} \quad \text{sau} \quad \bar{A} = 1 \quad (4.6)$$

Folosind (4.3) și (4.4) în (4.1) și (4.2) rezultă:

$$A \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial t} + A^2 \bar{v} \nabla \bar{\zeta} + A \bar{v} \nabla f + \frac{dA}{dp} \omega \bar{\zeta} = -A(A \bar{\zeta} + f) \text{div} \bar{v} + \frac{dA}{dp} \mathbf{k} \cdot \bar{v} \times \nabla \omega \quad (4.7)$$

și

$$A \text{div} \bar{v} + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0 \quad (4.8)$$

Vom media din nou aceste ecuații prin integrarea în raport cu p .

Pentru ecuația continuității (4.8), făcând uz și de (4.6) se obține:

$$\text{div} \bar{v} = -[\omega]_{p_0}^{p_0}$$

Se consideră pentru ω următoarele condiții de limită, care se impun în mod natural:

$$\omega = 0 \quad \text{pentru} \quad p = 0 \quad \text{și} \quad p = p_0$$

Rezultă deci: $\text{div} \bar{v} = 0$

care introdusă în ecuația (4.8) arată că pentru aceste condiții la limită, viteza verticală tinde la zero.

Integrând în raport cu p ecuația turbionului și ținând cont și de relația (4.9) se obține:

$$\frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial t} + \bar{A}^2 \bar{v} \nabla \bar{\zeta} + \bar{v} \nabla f = 0 \quad (4.10)$$

Funcția $A(p)$ se determină statistic, luând în considerare un mare număr de date. Se alege un nivel pentru care $\bar{A}^2(p^*) = A(p^*)$ și relația (4.10) devine:

$$\frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial t} + A(p^*) \bar{v} \nabla \bar{\zeta} + \bar{v} \nabla f = 0 \quad (4.11)$$

sau folosind relațiile (4.3) și (4.4) obținem:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla (\zeta + f) = 0 \quad (4.12)$$

sau

$$\frac{d}{dt} (\zeta + f) = 0 \quad (4.12')$$

S-a constatat că, această formă simplă a ecuației turbionului, care exprimă conservarea turbionului absolut în raport cu timpul este valabilă la două niveluri p^* . Acestea sunt numite niveluri echivalent barotrope și se situează în apropierea suprafeței de 500 hPa și respectiv 200 hPa.

Analogul hidrodinamic al acestui model de atmosferă poate fi interpretat ca un fluid incompresibil și omogen ce se mișcă între doi pereți rigizi.

4.2 Modelul barotrop divergent

În continuare vom pune în evidență efectul divergenței la scară mare în cazul mișcărilor barotrope Doos [1968].

Conform teoremei de descompunere a lui Helmholtz, se exprimă câmpul vântului în funcție de potențialul χ și funcția de curent ψ :

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_\psi + \mathbf{v}_\chi \quad (4.13)$$

unde am notat cu:

$$\mathbf{v}_\psi = \mathbf{k} \times \nabla \psi \quad (4.14)$$

partea nedivergentă a vântului și cu:

$$\mathbf{v}_\chi = \nabla \chi \quad (4.15)$$

partea nerotațională.

Cu aceste notații, turbionul relativ și divergența se transcriu:

$$\begin{cases} \zeta = \nabla^2 \psi \\ \text{div} \mathbf{v} = \nabla^2 \chi \end{cases} \quad (4.15')$$

Considerăm ecuația divergenței scrisă sub forma generală:

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{div} \mathbf{v} + \mathbf{v} \nabla \text{div} \mathbf{v} + (\text{div} \mathbf{v})^2 - 2\mathbf{J}(u, v) - v \frac{\partial f}{\partial x} + u \frac{\partial f}{\partial y} - f\zeta + g\nabla^2 Z = 0 \quad (4.16)$$

Vom face o analiză a ordinilor de mărime pentru termenii ecuațiilor (4.1) și (4.16) în funcție de numărul lui Rossby (3.12).

Păstrând în ecuațiile (4.1) și (4.16) termenii de ordinul $R^0 = 1$ și unii termeni convenabili de ordinul lui $R^1 = 10^{-1}$ și utilizând și relațiile (4.15) se obține ecuația turbionului sub forma:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla\right)(\nabla^2\psi + f) + (\nabla^2\psi + f)\nabla^2\chi = 0 \quad (4.17)$$

iar ecuația divergenței se transformă în așa zisă ecuație de balanță, care exprimă faptul că în atmosfera reală există o corelație strânsă între câmpul vântului și al geopotentialului:

$$2\left[\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}\right)^2\right] + \nabla(f\nabla\psi) = g\nabla^2Z \quad (4.18)$$

Această ecuație este de tip Mongé-Ampere și e dificil de rezolvat, necesitând condiții suplimentare care să asigure faptul că este de tip eliptic.

Rezultatele bune se obțin și cu ecuația de balanță lineară:

$$\nabla(f\nabla\psi) = g\nabla^2Z \quad (4.19)$$

Se consideră atmosfera ca fiind formată din 2 straturi de fluid omogene, incompresibile și nevâscoase limitate de 2 pereți rigizi.

Se fac următoarele ipoteze:

- sistemul este static stabil ($\rho' < \rho$) ;
- fluidul din stratul superior este în repaos;
- în stratul inferior, viteza fluidului este independentă de înălțime;
- înălțimea h a interfeței ce separă cele două fluide este variabilă (depinde de timp);

-mișcarea pe verticală este presupusă mică, astfel că mișcarea indusă în fluidul de deasupra poate fi neglijată.

Vom considera următorul sistem de ecuații ale dinamicii aerului, în coordonate obișnuite, rectangulare:

-ecuația turbionului (4.17);

-ecuația de balanță (4.19);

-ecuația continuității:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (4.20)$$

-ecuația echilibrului hidrostatic sub forma:

$$z = (1 - \varepsilon)h + const. \quad (4.21)$$

unde am notat $\varepsilon = \rho' / \rho$

Se integrează ecuația continuității (4.20) de la 0 la h :

$$\int_0^h \frac{\partial w}{\partial z} dz = - \int_0^h \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dz \quad (4.22)$$

Cantitățile $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ depind de z , iar pentru w folosim următoarele condiții la limită:

$$\begin{cases} w = w_0 & \text{pentru } z = 0 \\ w = \bar{h} & \text{pentru } z = h \end{cases} \quad (4.23)$$

unde $w_0 = v_0 \nabla H$ și v_0 - viteza vântului de la suprafața solului și $\nabla H =$ gradientul orografiei.

Cu aceasta (4.22) devine:

$$\bar{h} - v \nabla H + h \overline{\nabla^2 \chi} = 0 \quad (4.24)$$

unde $\overline{\nabla^2 \chi}$ reprezintă valoarea medie a divergenței.

Se folosesc în continuare următoarele ipoteze simplificat:

- (i) $v = k \times \nabla \psi$ -se neglijează partea divergentă a vântului;
- (ii) $v \nabla h = 0$ -mişcarea fluidului este paralelă cu interfața de înălțime h ;
- (iii) $h = \bar{h}$
- (iv) în expresia $\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{1}{1-\varepsilon} \frac{\partial Z}{\partial t}$ se face aproximația geostrofică $\frac{\partial Z}{\partial t} = \frac{f}{g} \frac{\partial \psi}{\partial t}$
- (v) $v_0 = a v$ = hodograful vântului este drept.

Cu acestea ecuația turbionului (4.17) devine:

$$(\nabla^2 - q) \frac{\partial \psi}{\partial t} = \mathbf{J}(\nabla^2 \psi + f + bH; \psi) \quad (4.25)$$

unde

$$q = \frac{f(\nabla^2 \psi + f)}{g \bar{h} (1-\varepsilon)} \quad (4.26)$$

și

$$b = \frac{a(\nabla^2 \psi + f)}{\bar{h}} \quad (4.27)$$

Constantele q și b se calculează prin liniarizarea expresiilor (4.26) și (4.27), în funcție de alegerea nivelelor z și h .

Ecuatia (4.25) este ecuatia de lucru a modelului barotrop divergent, în care este inclus și efectul orografic Doneaud, Pescaru [1978]. Neglijând termenul de corecție datorat orografiei ($bH = 0$), se regăsește ecuatia modelului barotrop divergent obișnuit Doos [1968]:

$$(\nabla^2 - q) \frac{\partial \psi}{\partial t} = \mathbf{J}(\nabla^2 \psi + f, \psi) \quad (4.28)$$

Vom pune în evidență câteva caracteristici ale acestui model.

Presupunem o mișcare de bază în direcția Ox cu viteza U . Se suprapun peste acest curent de bază perturbații armonice mici, independente de direcția nord-sud. Rezultă pentru funcția de curent:

$$\psi = -Uy + \psi'(x, t) \quad (4.29)$$

Introducând (4.29) în (4.28) se obține după liniarizare:

$$\frac{\partial^3 \psi'}{\partial t \partial x^2} + U \frac{\partial^3 \psi'}{\partial x^3} + \beta \frac{\partial \psi'}{\partial x} - q \frac{\partial \psi'}{\partial t} = 0 \quad (4.30)$$

cu notația consacrată Haltiner [1971], $\beta = \frac{df}{dy}$.

Presupunem în continuare că perturbațiile sunt sub formă de unde cu lungimea de undă L și amplitudinea A și că ele se propagă fără să-și schimbe forma în direcția est cu viteza c .

$$\psi' = A e^{ik(x-ct)} \quad (4.31)$$

unde $k = \frac{2\pi}{L}$ este numărul de undă.

Pentru a satisface ecuatia (4.30) viteza de fază trebuie să satisfacă relația:

$$c = \frac{Uk^2 - \beta}{k^2 + q}$$

Viteza de grup pentru aceste unde este:

$$c_g = \frac{Uk^2 + \beta + 2gc}{k^2 + q} \quad (4.32)$$

Notăm că pentru unde cu lungimea de undă mai mică decât $2\pi \sqrt{\frac{U}{\beta}}$ ($c > 0$), viteza de fază este puțin mai mică pentru modelul divergent.

Pentru unde cu lungimea de undă mai mare decât $2\pi \sqrt{\frac{U}{\beta}}$ ($c < 0$), viteza de fază este considerabil mai mică pentru modelul divergent.

În legătură cu viteza de grup se observă că aceasta poate fi și negativă în cazul modelului divergent, ceea ce înseamnă că energia se poate propaga contra curentului, pentru unde foarte lungi.

Se poate studia de asemenea și rata de dispersie, care se poate măsura prin diferența dintre viteza de grup și viteza de fază.

$$c_g - c = \frac{2k^2(\beta + qU)}{(q + k^2)^2} \quad \text{-in cazul divergent}$$

și

$$c_g - c = 2 \frac{\beta}{k^2} \quad \text{-in cazul nedivergent}$$

Din aceste expresii se observă că dispersia descrește cu creșterea latitudinii (deoarece se micșorează $\beta = \frac{df}{dy}$, $f = 2\omega \sin \varphi$).

Notăm de asemenea că dispersia este cu mult mai mare în cazul nedivergent, crescând rapid cu creșterea lungimii de undă.

La modelul barotrop divergent, dispersia are un maxim pentru o anumită lungime de undă.

4.3 Modele barocline

Vom face mai întâi câteva considerații energetice privind modelele barocline.

Modelele barotrope pot descrie numai redistribuirea energiei cinetice în atmosferă. În realitate, energia cinetică se disipă în mod continuu, astfel încât, după o săptămână se reduce cu aproape 10% din valoarea inițială. Se pune întrebarea, în ce condiții și în ce mod este creată energia cinetică în atmosferă.

Considerând că, componentă verticală a vântului este de aproape 3 ordine de mărime mai mică decât componentele orizontale, se poate considera următoarea expresie pentru energia cinetică:

$$K = \frac{1}{2}(u^2 + v^2)$$

Din ecuațiile de mișcare, scrise în sistemul de coordonate (x, y, p) se deduce cu ușurință relația:

$$\frac{\partial K}{\partial t} + \mathbf{v} + \omega \frac{\partial K}{\partial p} + g\mathbf{v}\nabla Z = 0$$

Folosind ecuația continuității, ecuația hidrostatică și ecuația de stare, relația devine:

$$\frac{\partial K}{\partial t} = -\nabla \cdot [(K + gZ)\mathbf{v}] - \frac{\partial}{\partial p} [(K + gZ)\omega] - R \frac{\omega T}{p}$$

Pentru a simplifica interpretarea acestei ecuații, o vom integra pe un domeniu închis S , neglijând transportul de energie prin frontieră.

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_S K ds = - \iint_S \frac{\partial}{\partial p} [(K + gZ)\omega] ds - R \iint_S \frac{\omega T}{p} ds$$

În continuare se integrează din nou relația raport cu p , de la 0 la p_0 . Condițiile la limită pentru ω fiind cele obișnuite, adică $\omega = 0$ la $p = p_0$ și $p = 0$, primul termen din membrul drept al relației dispare:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^{p_0} \iint_S K dp ds = -R \int_0^{p_0} \iint_S \frac{\omega T}{p} ds \quad (4.34)$$

Din definiția atmosferei barotrope, ρ și T sunt constante pe fiecare suprafață de presiune. Rezultă că relația (4.34) se poate scrie:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^{p_0} \iint_S K dp ds = -R \int_0^{p_0} \frac{T}{p} dp \iint_S \omega ds = 0$$

întrucât $\iint_S \omega ds = 0$, rezultă că energia cinetică totală este constantă într-o atmosferă barotropă.

Revenind la atmosfera baroclină, vom presupune că regiunile de ascendență și de descendență ale aerului sunt egale. Considerând o viteză verticală medie ω_m și notând cu T_v temperatura aerului cald, iar cu T_k temperatura aerului rece, rezultă din (4.34):

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^{p_0} \iint_S K dp ds = -R \int_0^{p_0} \frac{dp}{p} \left\{ - \iint_{S/2} T_v |\omega_m| ds + \iint_{S/2} T_k |\omega_m| ds \right\} = R \int_0^{p_0} \frac{dp}{p} \iint_{S/2} |\omega_m| (T_v - T_k) ds > 0$$

Rezultă că energia cinetică crește, când energia potențială și cea internă descresc.

Energia cinetică este generată, în principiu, în două moduri diferite.

Mai întâi, datorită încălzirii diferențiate a atmosferei, încălzire datorată în principiu radiației solare, se crează gradienti de temperatură ce implică o creștere corespunzătoare a energiei cinetice.

O alta formă de creare a energiei cinetice este în legătură cu cicloneza. Aceasta perturbație ondulară este asociată cu o creștere rapidă a energiei cinetice, energia potențială descrescând corespunzător.

Fenomenul de ciclogeneza nu poate fi descris de mișcarea barotropă și de aceea, folosirea exclusivă a unor modele de acest tip poate conduce uneori la prognoze eronate. Deficiențele modelului barotrop decurg din ipotezele artificiale care au fost impuse pentru această mișcare și anume: direcția vântului este independentă de înălțime și izotermele sunt paralele cu izobarele.

Pentru a prognoza ciclogeneza, trebuie să utilizăm așa numitele mișcări barocline, pentru care se presupune ca vântul variază liber de la un nivel la altul; și în care distribuția temperaturii nu este, în general, în fază cu distribuția presiunii. Vom formula ecuațiile unui tip mai general de model, a cărui stare este caracterizată prin condiții la mai mult decît un nivel.

Se pornește de la ecuația turbionului (4.17) scrisă sub forma:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla (\zeta + \iota) = f \frac{\partial \omega}{\partial p} \quad (4.35)$$

și ecuația termodinamicii scrisă sub forma:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial Z}{\partial p} \right) + \mathbf{v} \nabla \left(\frac{\partial Z}{\partial p} \right) + \omega \sigma = 0 \quad (4.36)$$

unde σ este indicele de stabilitate statică și are expresia:

$$\sigma = \frac{1}{g \sigma \theta} \frac{\partial \theta}{\partial p} \quad (4.37)$$

Considerând o relație de balanță geostrofică între câmpul de geopotențial și cel al vântului, ecuația turbionului devine:

$$\nabla^2 \frac{\partial Z}{\partial t} = \mathbf{J}(\zeta + f, Z) + \frac{f^2}{g} \frac{\partial \omega}{\partial p} \quad (4.38)$$

care ζ are expresia:

$$\zeta = \frac{g}{f_0} \nabla^2 Z \quad (4.39)$$

unde am folosit o relație de balanță geostrofică.

Ecuațiile (4.36) și (4.38) reprezintă un sistem complet de 2 ecuații pentru două variabile dependente Z și ω .

Intrucât condițiile de frontieră sunt condiții restrictive esențiale pentru ω (fluxul vertical al masei), este natural să căutăm o ecuație care să permită estimarea lui ω la orice moment de timp, în funcție de distribuția câmpului de geopotențial Z . O astfel de ecuație se obține prin derivarea ecuației (4.38) raport cu p , aplicând operatorul ∇^2 ecuației (4.36) și scăzând prima din aceste ecuații din cea de a doua.

Rezultă:

$$\sigma \nabla^2 \omega - \frac{f^2}{g} \frac{\partial^2 \omega}{\partial p^2} = \frac{g}{f} \nabla^2 \mathbf{J} \left(Z, \frac{\partial Z}{\partial p} \right) - \frac{\partial}{\partial p} \mathbf{J}(Z, \zeta + f) \quad (4.40)$$

unde indicele de stabilitate statică σ este presupus constant pentru un nivel izobaric dat.

Ecuatia (4.40) sau așa numita ecuația ω , este o ecuație de diagnoză pentru câmpul mișcărilor verticale la un moment dat, iar ecuația turbionului (4.38) este ecuația de prognoză pentru câmpul de geopotential. Ele formează un sistem închis de doua ecuații cu două necunoscute, care este astfel rezolvabil:

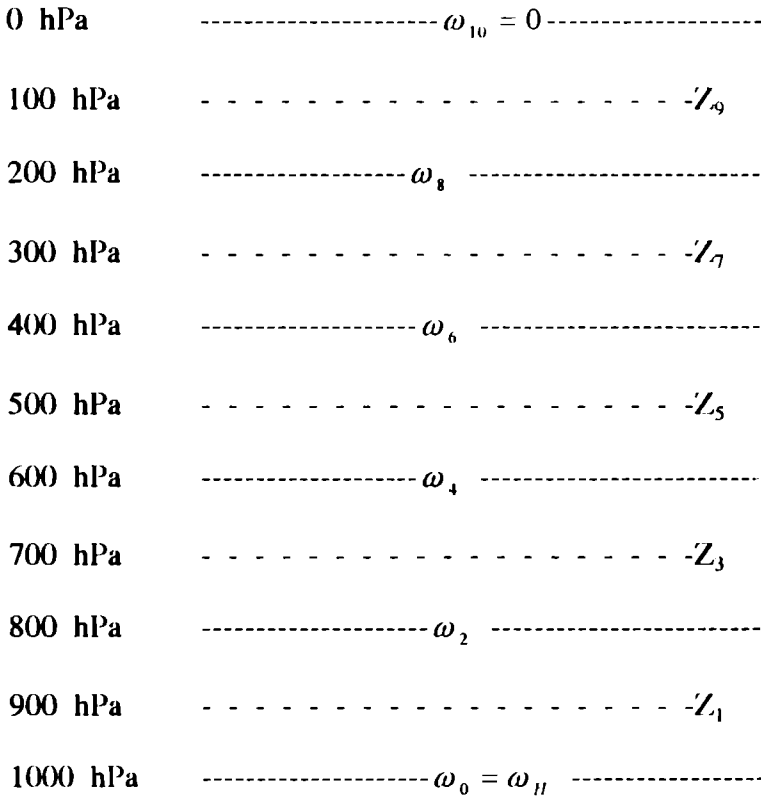


Fig.4.1 Rezoluția verticală a modelului baroclin cu 5 niveluri

Pentru soluționarea acestui sistem, s-a presupus atmosfera împărțită în 10 straturi echidistante (fig.4.1). Ecuația ω este presupusă valabilă la nivelurile pare, iar ecuația turbionului la nivelurile impare.

Pe frontiera orizontală a domeniului se poate considera cu o bună aproximație că $\omega = 0$ și $\frac{\partial Z}{\partial t} = 0$, adică aceste frontiere acționează ca niște pereți rigizi.

Pentru câmpul vitezelor verticale ω , se mai consideră și următoarele condiții de frontieră:

$$\begin{aligned} \omega &= 0 && \text{pentru} && p = 0 \text{ hPa} \\ \omega &= \omega_{11} && \text{pentru} && p = 1000 \text{ hPa} \end{aligned} \quad (4.41)$$

unde:

$$\omega_H = \omega_{H1} + \omega_{H2} \quad (4.42)$$

S-a notat cu ω_{H1} componenta suplimentară a vitezei verticale a aerului datorită frecării și cu ω_{H2} cea datorită orografiei.

Viteza verticală indusă prin frecare în stratul Ekman se poate estima cu formula:

$$\omega_{H1} = -c\zeta \quad (4.43)$$

unde c este o constanta de proporționalitate, iar ζ_0 este turbionul la nivelul izobaric de 1000 hPa.

Constanta c este pozitivă și se poate calcula funcție de coeficientul de vâscozitate cinematică, accelerație gravitațională, densitatea aerului și parametrul Coriolis. Pentru condițiile atmosferei standard, s-a luat pentru c o valoare medie de 16,88 hPa.

Pentru a pune în evidență și influența masivelor muntoase, s-a estimat și componenta vitezei verticale generalizate, ce ia naștere prin efect orografic, cu ajutorul relației:

$$\omega_{H2} = -g\rho_0 v_0 \nabla H \quad (4.44)$$

unde s-a notat cu v_0 vântul de la nivelul de 1000 hPa.

Rezultă că, modelele barocline cu ecuații filtrate, de tip diferențial, permit introducerea efectelor orografice și a celor de frecare, prin modificarea condiției la limita inferioară a atmosferei pentru câmpul vitezelor verticale.

4.4 Modele cu ecuații primitive

Rezolvarea ecuațiilor primitive ridică o serie de dificultăți datorită neliniarității ecuațiilor și a condițiilor la limită de la suprafața pământului și de la frontiera domeniului luat pentru analiză. În acest sens este necesar să se asigure continuitatea și integrabilitatea funcțiilor în domeniul considerat, evitându-se totodată instabilitățile de calcul legate de neliniaritatea ecuațiilor.

Vom prezenta numai cazul modelelor barotrope, rezultatele putând fi extinse cu ușurință pentru modelele barocline.

Ecuațiile modelului barotrop, reprezentând mișcarea fluidului atmosferic omogen, în prezența unui relief muntos H , sunt scrise sub forma:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(H+K) + (f+\zeta)v + F'_u \\ \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial y}(H+K) - (f+\zeta)u + F'_v \\ \frac{\partial H}{\partial t} = D(H_s - H) + \mathbf{v} \cdot (\nabla H_s - \nabla H) + F'_H \end{cases} \quad (4.45)$$

unde s-a notat cu $D = \text{div v}$, H_s este înălțimea obstacolului orografic, iar F'_u, F'_v și F'_H reprezintă termeni de forță.

Vom considera mai întâi cazul unidimensional, adică omogenitatea în direcția $y \left(\frac{\partial}{\partial y} = 0 \right)$. Astfel:

$$K = \frac{1}{2}(u^2 + v^2); \quad D = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \zeta = \frac{\partial v}{\partial x}$$

și sistemul de ecuații devine:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = fv - g \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial K}{\partial x} + \zeta v + F'_u \\ \frac{\partial v}{\partial t} = -fu - \zeta u + F'_v \\ \frac{\partial H}{\partial t} = -H \cdot D - u \frac{\partial H}{\partial x} + u \frac{\partial H_s}{\partial x} + H_s \cdot D + F'_H \end{cases} \quad (4.46)$$

Sistemul (4.46) deși simplificat, are toate caracteristicile esențiale pentru un model cu ecuații primitive și poate fi utilizat în aplicații simple pentru a înțelege modul de funcționare și a experimenta rezolvarea numerică.

Termenii care apar se pot clasifica în trei categorii:

-termeni liniari sau quasilineari;

-termeni dinamici neliniari;

-termeni de forță și disipare, F'_u, F'_v, F'_H împreună cu termenul de forță orografic $H_s \cdot D$.

Vom cerceta mai întâi proprietățile lineare ale modelului. Pentru aceasta vom lineariza sistemul (4.46) în absența unei mișcări de bază, $H = \bar{H}$ și fără forță. Se notează:

$$\begin{cases} H = \bar{H} + h'(x, t) \\ u = u'(x, t) \\ v = v'(x, t) \end{cases} \quad (4.47)$$

unde perturbațiile sunt considerate armonice și mici. Aplicând metoda micilor perturbații sistemul de ecuații linearizate se scrie:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u'}{\partial t} &= f v' - g \frac{\partial h'}{\partial x} \\ \frac{\partial v'}{\partial t} &= -f u' \\ \frac{\partial h'}{\partial t} &= -\bar{H} \frac{\partial u'}{\partial x}\end{aligned}\tag{4.48}$$

Astfel putem determina viteza de fază a perturbațiilor:

$$c = \pm \sqrt{g\bar{H} + \frac{f^2}{\mu^2}}$$

deci sistemul pune în evidență undele gravitaționale.

Un raționament similar se poate face și pentru sistemul bidimensional (4.45), punând astfel în evidență undele gravitaționale alături de undele Rossby care au importanță pentru mișcările la scară mare.

Sistemul (4.45) cât și (4.46) conține 3 ecuații de mișcare pentru variabilele u, v și H , și poate fi rezolvat numeric, astfel că pornind de la distribuția inițială a acestor câmpuri să se poată estima evoluția viitoare a acestora. Detalii despre metodele numerice ce pot fi utilizate vor fi date în capitolul 6.

5. MODELE ASIMPTOTICE IN TERMODINAMICA ATMOSFEREI

5.1 Introducere

Scopul capitolului este de a prezenta câteva **ecuații model**, ce se obțin ca urmare a folosirii unor dezvoltări asimptotice. Evident sistemul de la care se pornește este sistemul adimensional (1. 46) pentru descrierea comportamentului termodinamic al atmosferei, privită ca un fluid vâscos. Desigur, în cazul în care considerăm fluidul nevâscos (perfect, $\mu \rightarrow 0$) trebuie scrise ecuațiile adimensionale corespunzătoare ecuațiilor (1. 37), care se obțin imediat din (1.46):

$$\begin{aligned}
 Sh \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\text{div} \rho \mathbf{v}) &= 0 \\
 \rho \left\{ Sh \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \tilde{\mathbf{v}} + \frac{1}{R_o} (\mathbf{e} \times \tilde{\mathbf{v}}) \right\} + \frac{1}{\gamma M^2} \widetilde{\text{grad} p} &= a \frac{1}{R_o} \mathbf{g}_e \\
 Sh \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \text{grad}) T + \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{T}{p} \left\{ Sh \frac{\partial p}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \text{grad}) p \right\} & \quad (5.1) \\
 &= \frac{1}{Re Pr} \frac{T}{p} \tilde{\Delta} T + A_s \\
 p &= R \rho T
 \end{aligned}$$

cu notațiile folosite în (1.46).

Numărul parametrilor adimensionali ce se introduc, depinde, în mod evident de problema ce urmează a fi analizată. Problemele matematice ce apar prin reținerea sistemului (1.46) sau (5.1), devin extrem de complexe și cel mai adesea imposibil de rezolvat. De aceea se caută punerea în evidență a unor " modele " mai simple (din punct de vedere matematic), dar care să conducă la rezultate " bune ", atunci când dorim să studiem una sau mai multe proprietăți specifice, bine precizate, ale mișcării aerului. Aceste " modele " se obțin din cel general

printr-un proces de trecere la limită după unul sau mai mulți parametri. Din punct de vedere **pur matematic** problema revine la:

i) demonstrarea existenței și unicității soluției problemei cu date inițiale și la limită atașate problemei complete: $\mathcal{V} = (\mathbf{v}, \rho, p, T)$;

ii) construcția aproximării asimptotice \mathcal{V}^a a problemei date;

iii) estimarea erorii $\delta(\epsilon)$ cu care aproximarea \mathcal{V}^a diferă de soluția exactă \mathcal{V} ($\delta(\epsilon) \rightarrow 0$ când $\epsilon \rightarrow 0$), adică $\frac{\|\mathcal{V} - \mathcal{V}^a\|}{\delta(\epsilon)} \rightarrow 0$ când $\epsilon \rightarrow 0$, unde $\|\cdot\|$ reprezintă o normă într-un spațiu funcțional convenabil ales, iar ϵ este "parametru mic" principal al problemei. Ecuațiile corespunzătoare aproximării \mathcal{V}^a se numesc **ecuații model** sau pe scurt, **modele**.

Chestiunea care se pune cu acuitate este legată de posibilitatea ducerii la bun sfârșit a celor trei puncte stabilite mai sus. În cazul sistemului (1.46) acest lucru a putut fi stabilit doar în câteva situații particulare (a se vedea spre exemplu Lions [1969], Temam [1979]).

Scopul acestui capitol nu este analiza detaliată a unuia sau mai multor cazuri de reușită completă, ci prezentarea unor modele utile, cu rezolvarea lor completă și analizarea cazurilor de aplicabilitate (deci, într-un anumit sens, rezolvarea punctului ii)). Totuși în această situație trebuie analizate cu atenție rezultatele obținute, căci așa cum se poate observa pe un exemplu simplu (vezi Anexa 3) nu orice dezvoltare în raport cu un "parametru mic" este o dezvoltare asimptotică. În exemplu se vede că se pot obține soluții care nu verifică proprietățile problemei inițiale.

În acest scop (ca de altfel în orice situație în care se urmărește realizarea unei analize de tip asimptotic), prima problemă care se pune este obținerea parametrilor adimensionali ai modelului de pornire. Modelele ce vor fi analizate sunt modele laminare și, chiar dacă în cele mai multe cazuri, se va face o aproximare la numere Reynolds mari, acestea vor fi mari, dar totuși "moderate", astfel că turbulența să nu aibe decât un efect neglijabil. Experiența a arătat (vezi Guiraud - Zeytounian [1979]) că se pot face "previziuni" utile, fără a ține cont de turbulență (și aceasta ar fi justificarea, a posteriori, a studiului modelării asimptotice a curgerilor laminare cu $Re \gg 1$). Mai trebuie să observăm că nu dorința de a face modelul mai "comod", sau vreo "intuiție fizică" trebuie să conducă la "neglijarea" unor termeni în modelul primar, ci necesitatea de a pune mai clar în evidență anumite proprietăți ale curgerii (care se dovedesc a fi primordiale) selectate în mod rațional. De altfel o seamă de modele asimptotice se reprezintă prin probleme cu date inițiale și la frontieră (la limită) ce nu se pot rezolva (până în prezent) decât numeric.

O primă împărțire globală a acestor modele se face în raport cu mărimea parametrului de scară $\epsilon \equiv H_v/L_o$. Astfel vom avea modele la scară sinoptică ($\epsilon \ll 1$; $\epsilon \sim 10^{-2}$); modele la mesoscară, în care $\epsilon \sim 10^{-1}$ și modele locale ($\epsilon \sim 1$). În capitolul prezent, modelele ce vor fi analizate fac parte din ultima categorie.

Mai mult, atât datorită faptului că în fenomenele la care modelele respective au aplicabilitate (mișcări în prezența unor obstacole, brize, etc.) cât și pentru obținerea unor soluții cu posibilitate de interpretare mai rapidă, vom presupune că aerul este un fluid perfect, ideal, conducător de căldură, și prin urmare evoluția sa termodinamică este guvernată de ecuațiile (1). În obținerea ecuațiilor model un rol esențial vor juca numerele M , Sh și R_o .

Modelul din paragraful 5 (modelul de briză) face totuși apel la vâscozitatea fluidului. Aceasta este reprezentată prin intermediul coeficientului de difuzie turbulentă k (funcție constitutivă) ce este aproximată diferit în straturile considerate, prin formule empirice.

5.2 Ecuațiile de bilanț în raport cu o stare de referință

În acest paragraf vom scrie ecuațiile ce guvernează mișcarea aerului într-un domeniu \mathcal{D} . Aceasta este considerată ca o perturbație a stării din domeniul de referință (presupusă ca fiind atmosfera politropă, descrisă prin ecuațiile (1.39), (1.40) sau de soluțiile acestora (1.41)) dată de

$$\frac{dp_r}{dz} = -\rho_r g; \quad p_r = R\rho_r T_r; \quad \frac{dT_r}{dz} = -\Gamma_r \quad (5.2)$$

ρ_r , T_r , p_r sunt funcții de z .

Vom presupune că perturbațiile față de starea de referință sunt mici, adică vom scie

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}, t) &= p_r(z)(1 + \pi(\mathbf{x}, t)) \\ \rho(\mathbf{x}, t) &= \rho_r(z)(1 + \eta(\mathbf{x}, t)) \\ T(\mathbf{x}, t) &= T_r(z)(1 + \theta(\mathbf{x}, t)) \end{aligned} \quad (5.3)$$

Introducând (5.3) în sistemul de ecuații (1.44) scris pentru un gaz ideal, perfect conductor de căldură, ținând seama de (5.2) și neglijând forța centrifugă (în (1.44)₂ obținem următorul sistem (dimensional):

$$\begin{aligned} \frac{d\eta}{dt}(1 + \eta)[\operatorname{div} \mathbf{v} + (\Gamma_r - g/R)\frac{w}{T_r}] &= 0 \\ (1 + \eta)\left[\frac{du}{dt} + 2\Omega_o w \cos\psi - 2\Omega_o v \sin\psi\right] &= -RT_r \frac{\partial\pi}{\partial x} \\ (1 + \eta)\left[\frac{dv}{dt} + 2\Omega_o u \sin\psi\right] &= -RT_r \frac{\partial\pi}{\partial y} \\ (1 + \eta)\left[\frac{dw}{dt} - 2\Omega_o u \cos\psi\right] &= -RT_r \frac{\partial\pi}{\partial z} + g(1 + \eta)\theta \\ (1 + \eta)\frac{d\theta}{dt} - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{d\pi}{dt} + (1 + \pi)\left[\frac{\gamma - 1}{\gamma} \Gamma_r^\circ - \Gamma_r\right] \frac{w}{T_r} &= \\ &= \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{k}{R\rho_r} \Delta\theta - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{2k\Gamma_r}{R\rho_r T_r} \frac{\partial\theta}{\partial z} \\ \pi &= \eta + \theta + \eta\theta \end{aligned} \tag{5.4}$$

În ecuațiile (5.4) s-a notat cu (vezi și Cap.1.4) $\Gamma_r = -\frac{dT_r}{dz}$ (gradientul temperaturii în atmosfera politropă) în timp ce $\Gamma_r^\circ = g/R$ este gradientul temperaturii în atmosfera omogenă. În același timp observăm că perturbațiile π, η, θ sunt funcții adimensionale. Sistemul (5.4), împreună cu condiții inițiale și la limită convenabil alese, conduce la aflarea perturbațiilor $\pi, \eta, \theta, \mathbf{v}$, iar prin (5.3) și (5.2) la obținerea mărimilor reale ale presiunii, densității, temperaturii și vitezei în problema formulată.

Forma adimensională a sistemului (5.4), corespunzătoare deci sistemului (5.1) se obține observând că, pe de o parte sunt mărimi ce trebuie adimensionalizate în raport cu domeniul ocupat de fluid și mărimi ce se adimensionalizează în raport cu atmosfera politropă de referință. Pentru aceasta vom nota cu t° un timp caracteristic al mișcării perturbate, cu L și H dimensiunile caracteristice orizontale și verticale ale domeniului \mathcal{D} și cu U, W mărimile caracteristice ale vitezelor orizontale (u, v) și respectiv a vitezei verticale w . De remarcat că $W/U = H/L \equiv \epsilon$. Vom nota, în fine, cu $p_r^\circ, \rho_r^\circ, T_r^\circ$ mărimile de referință constante pentru p_r, ρ_r, T_r . Ca urmare putem scrie

$$\begin{aligned} t &= t^\circ \bar{t}; & u &= U \bar{u}; & v &= U \bar{v}; & w &= W \bar{w}; & x &= L \bar{x}; & y &= L \bar{y}; \\ z &= H \bar{z}; & p_r &= p_r^\circ \bar{p}_r; & \rho_r &= \rho_r^\circ \bar{\rho}_r; & T_r &= T_r^\circ \bar{T}_r. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Introducând (5.5) în (5.4), notând variabilele adimensionale $\bar{t}, \bar{x}, \bar{y}, \dots$ cu $t,$

x, y, \dots și funcțiile adimensionale \bar{u}, \bar{v}, \dots cu u, v, \dots ; sistemul (5.4) devine

$$\begin{aligned}
 Sh \frac{\partial \eta}{\partial t} + (1 + \eta) \left[\operatorname{div} \mathbf{v} + (\alpha_o - B_o) \frac{w}{T_r} \right] + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \eta &= 0 \\
 (1 + \eta) \left[Sh \frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} u + \frac{1}{R_o} (\epsilon w \cos \psi - v \sin \psi) \right] &= -\frac{T_r}{\gamma M_o^2} \frac{\partial \pi}{\partial x} \\
 (1 + \eta) \left[Sh \frac{\partial v}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} v + \frac{1}{R_o} u \sin \psi \right] &= -\frac{T_r}{\gamma M_o^2} \frac{\partial \pi}{\partial y} \\
 (1 + \eta) \left[Sh \frac{\partial w}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} w - \frac{1}{R_o} \frac{1}{\epsilon} u \cos \psi \right] &= -\frac{T_r}{\gamma M_o^2 \epsilon^2} \frac{\partial \pi}{\partial z} + \\
 &+ \frac{B_o}{\gamma M_o^2 \epsilon^2} \theta (1 + \eta) \tag{5.6}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (1 + \eta) \left\{ \left[Sh \frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \theta \right] - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \left[Sh \frac{\partial \pi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \pi \right] + \right. \\
 \left. + (1 + \pi) \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma} B_o - \alpha_o \right) \right\} \frac{v}{T_r} &= \frac{1}{Re Pr} \frac{1}{\rho_r} \left[\Delta_{xy} \theta + \frac{1}{\epsilon^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right] - \\
 &- \frac{2\alpha_o}{\epsilon^2 Re Pr} \frac{1}{Pr} \frac{\partial \theta}{\partial z}
 \end{aligned}$$

$$\pi = \eta + \theta + \eta\theta$$

În sistemul (5.6) au apărut următoarele numere (constante) adimensionale: Sh — numărul lui Struhal; $\alpha_o \equiv \frac{\Gamma_r}{\Gamma_r^o/H} = H/H_r$ — parametru ce descrie dimensiunile relative pe înălțime ale domeniului \mathcal{D} și ale domeniului de variație a temperaturii de referință (atmosfera politropă); B_o — numărul lui Boussinesq (1.57), care descrie dimensiunile relative pe înălțime ale domeniului \mathcal{D} și ale domeniului de omogenitate a stării de referință (aici $B_o \equiv H/H_r^o = \frac{Hg}{RT_r^o}$). Numerele R_o (Rossby), Pr (Prandtl) și parametrul de forma ϵ sunt definite ca în (1.5) în timp ce numerele M_r (Mach) și Re (Reynolds) se definesc în mod corespunzător prin

$$M_r \equiv \frac{U}{\sqrt{\gamma RT_r^o}}; \quad Re \equiv \frac{\rho_r^o UL}{\mu} \tag{5.7}$$

O scurta analiză cantitativă, pentru unele valori standard ale mărimilor în discuție este edificatoare. Pentru atmosferă avem următoarele valori medii uzuale

$\rho_r^o = 1.293 \text{ kg/m}^3$, $\gamma = 1.402$, $U \simeq 10 \text{ m/s}$, $k \simeq 5.510^{-3} \text{ cal/ms}^2 \text{ } ^\circ K$, de unde rezultă imediat

$$\frac{1}{RePr} = \frac{k}{\rho_r^o LU} \simeq 4.310^{-7} \frac{1}{L} \text{ m.}$$

Deci oricât am lua dimensiunea caracteristică orizontală L rezultă că $\frac{1}{RePr} \ll 1$. În plus, cum $\alpha_o < 1$ (sau cel mult $\alpha_o = O(1)$) rezultă că în ecuația (5.6)₅ putem neglija termenii din membrul drept, în prezența celor din membrul stâng, ceea ce înseamnă că în atmosferă se pot neglija fenomenele de transfer de căldură în favoarea celor convective (proprietatea aerului de izolant termic).

5.3 Model pentru mișcarea aerului cu considerarea gradientului termic propriu (convecția intensă)

Având în vedere cele discutate în paragraful anterior, să luăm acum $T_r^o = 273,15 \text{ } ^\circ K$. Obținem pentru numărul lui Mach

$$M_r \simeq 0.03 \ll 1.$$

Aceasta justifică pe deplin încercarea de a obține un model asimptotic pentru ecuațiile (5.6) în limita $M_r \rightarrow 0$ (cu atât mai mult cu cât starea de referință este caracterizată de absența mișcării)¹. Un rol important îl joacă acum relațiile de similitudine (Anexa 3, Teorema Π). Vom alege ordinele de mărime ale parametrilor în acestea așa încât să nu "dispară complet" ecuațiile de mișcare (se observă că sistemul (5.2) este aproximația de ordin zero în Mach a sistemului (5.6)). Pentru aceasta introducem următoarele dezvoltări

$$\mathbf{v} = M_r^a \mathbf{v}_a + \dots$$

$$\pi = M_r^b \pi_b + \dots$$

$$\eta = M_r^c \eta_c + \dots$$

$$\theta = M_r^d \theta_d + \dots$$

(5.8)

¹Conținutul acestui paragraf urmărește articolele lui Ogura și Phillips [21], cartea lui Zeytounian [1988] și articolul lui Cipu și Țigoiu [în pregătire]

unde a, b, c, d , sunt numere pozitive și vor reprezenta cele mai mici puteri ale lui M_r în seriile respective. Dezvoltările (5.8) se introduc în sistemul (5.6), iar la nivelul cel mai mic de aproximare se obțin așa numitele "ecuații ale convecției intense" (sau forțate). Cum mișcarea este considerată într-un domeniu în care $H \simeq H_r^o$, trebuie să admitem că numărul lui Boussinesq este $B_o = O(1)$. Asupra parametrului α_o nu putem impune nici o restricție, deoarece nu știm apriori modul în care este legat de M_r și B_o . Ceilalți parametri ai ecuațiilor (5.6) sunt fixați. Aplicând teorema II rezultă imediat că

$$a = 0, \quad b = c = d = 2$$

Cum dorim să avem un model local, pe de o parte, iar pe de altă parte se poate considera apriori că viteza verticală este de același ordin de mărime cu viteza orizontală, rezultă evident că $\epsilon \simeq O(1)$ (el poate fi diferit de 1, dar nu cu un ordin de mărime).

O atenție deosebită trebuie dată ecuației de bilanț a energiei (5.6)₅, care în prima aproximație conduce la

$$Sh \frac{\partial \theta_2}{\partial t} + \mathbf{v}_o \cdot \text{grad} \theta_2 - \frac{\gamma - 1}{\gamma} [Sh \frac{\partial \pi_2}{\partial t} + \mathbf{v}_o \cdot \text{grad} \pi_2] + \frac{\gamma - 1}{\gamma} B_o - \alpha_o \frac{w_o}{T_r} = 0 \quad (5.9)$$

Analiza arată că dacă parametrul

$$S = \frac{\frac{\gamma - 1}{\gamma} B_o - \alpha_o}{M_r^2}$$

ar avea proprietatea că $\lim_{M_r \rightarrow 0} S(M_r, \alpha_o) = \infty$, ar rezulta că viteza $w_o = 0$ și deci mișcarea verticală ar fi cu un ordin de mărime mai mică decât cea orizontală, ceea ce contrazice ipoteza de pornire. Prin urmare trebuie considerat că

$$\lim_{M_r \rightarrow 0} \frac{\frac{\gamma - 1}{\gamma} B_o - \alpha_o}{M_r^2} < \infty$$

adică $\alpha_o = \frac{\gamma - 1}{\gamma} B_o - M_r^2 S$ este o relație de evaluare a parametrului de formă

α_0 . Cu acestea, în locul sistemului (5.6) obținem pentru $M_r \rightarrow 0$ următoarele ecuații ce descriu convecția intensă (forțată)

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div} \mathbf{v}_0 &= \frac{B_0}{\gamma T_r} w_0 \\
 Sh \frac{\partial u_0}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \cdot \operatorname{grad} u_0 + \frac{1}{R_0} (\epsilon w_0 \cos \psi - v_0 \sin \psi) &= -\frac{T_r}{\gamma} \frac{\partial \pi_2}{\partial x} \\
 Sh \frac{\partial v_0}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \cdot \operatorname{grad} v_0 + \frac{1}{R_0} u_0 \sin \psi &= -\frac{T_r}{\gamma} \frac{\partial \pi_2}{\partial y} \\
 Sh \frac{\partial w_0}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \cdot \operatorname{grad} w_0 - \frac{1}{\epsilon R_0} u_0 \cos \psi &= -\frac{T_r}{\epsilon^2 \gamma} \frac{\partial \pi_2}{\partial z} + \frac{B_0}{\epsilon^2 \gamma} \theta_2 \\
 Sh \frac{\partial \theta_2}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \cdot \operatorname{grad} \theta_2 - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \left[Sh \frac{\partial \pi_2}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \cdot \operatorname{grad} \pi_2 \right] + \frac{S}{T_r} w_0 &= 0 \\
 \pi_2 &= \theta_2 + \eta_2
 \end{aligned} \tag{5.10}$$

În acestea intervin doi parametri de similitudine esențiali B_0 / γ și S . În legătură cu parametrul S , se constată imediat că apar două cazuri distincte: a) $S = 0$, și b) $S \neq 0$. O observație specială, necesită cazul $\lim_{M_r \rightarrow 0} S = 0$, adică (dacă ținem cont de definițiile pentru α_0 și B_0) pentru care

$$\Gamma_r = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \Gamma_r^0.$$

Aceasta permite introducerea " parametrului de stabilitate statică "

$$K_r^0 = \frac{\frac{\gamma - 1}{\gamma} \Gamma_r^0 - \Gamma_r}{T_r^0} H$$

Cu el, $S = K_r^0 / M_r^2$ și cum S trebuie să fie mărginit, $K_r^0 \rightarrow 0$ ca și M_r^2 , adică Γ_r trebuie să fie în vecinătatea lui $\frac{\gamma - 1}{\gamma} \Gamma_r^0$.

Prin urmare, sistemul (5.10) descrie mișcarea aerului considerat ca un gaz compresibil la numere Mach mici. Pe de altă parte, cum problema în discuție este o problemă la scară locală, avem imediat evaluarea pentru numerele lui Strouhal și Rosby

$$Sh \equiv \frac{L}{Ut^o} \simeq \frac{10^4}{10t^o} \simeq O(10^{-2})$$

$$R_o \equiv \frac{U}{2\Omega_o L} \simeq O(10)$$

unde t^o este considerat $O(10^5)$. Deci vom putea considera în plus (ca o nouă serie de dezvoltări asimptotice) că avem mișcări la numere Strouhal mici și numere Rossby mari. Aceasta ar presupune introducerea a două noi dezvoltări de genul

$$\mathbf{v}_o = \mathbf{v}_{o0} + Sh\mathbf{v}_{o1} + \dots$$

$$\pi_2 = \pi_{21} + Sh\pi_{21} + \dots$$

$$\eta_2 = \eta_{2o} + Sh\eta_{21} + \dots$$

$$\theta_2 = \theta_{21} + Sh\theta_{21} + \dots$$

.

și respectiv

$$\mathbf{v}_{o0} = \mathbf{v}_{o0}^o + \frac{1}{R_o}\mathbf{v}_{o0}^1 + \dots$$

$$\pi_{2o} = \pi_{2o}^o + \frac{1}{R_o}\pi_{2o}^1 + \dots$$

$$\eta_{2o} = \eta_{2o}^o + \frac{1}{R_o}\eta_{2o}^1 + \dots$$

$$\theta_{2o} = \theta_{2o}^o + \frac{1}{R_o}\theta_{2o}^1 + \dots$$

în sistemul (5.10). Introducând pe rând cele două dezvoltări și reținând în fiecare prima aproximație (pentru $Sh \rightarrow 0$, respectiv $R_o^{-1} \rightarrow 0$), se obține, renotând această aproximație cu $(\mathbf{v}_o, \pi_2, \eta_2, \theta_2)$, următorul sistem

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \mathbf{v}_o &= \frac{B_o}{\gamma T_r} w_o \\
\mathbf{v}_o \cdot \operatorname{grad} u_o &= -\frac{T_r}{\gamma} \frac{\partial \pi_2}{\partial x} \\
\mathbf{v}_o \cdot \operatorname{grad} v_o &= -\frac{T_r}{\gamma} \frac{\partial \pi_2}{\partial y} \\
\epsilon^2 \mathbf{v}_o \cdot \operatorname{grad} w_o &= -\frac{T_r}{\gamma} \frac{\partial \pi_2}{\partial z} + \frac{B_o}{\epsilon^2 \gamma} \theta_2 \\
\mathbf{v}_o \cdot \operatorname{grad} \theta_2 - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \mathbf{v}_2 \cdot \operatorname{grad} \pi_2 + \frac{S}{T_r} w_o &= 0 \\
\pi_2 &= \theta_2 + \eta_2
\end{aligned} \tag{5.11}$$

Dezvoltarea în raport cu numărul Sh și reținerea primei aproximări revine la a considera procesele cuasistaționare (câmpurile nu depind explicit de timp), în timp ce a reține prima aproximare din dezvoltarea în raport cu $\frac{1}{R_o}$ revine la a neglija efectul undelor mari din atmosferă asupra mișcării locale.

Pentru o primă abordare a sistemului să considerăm că mișcarea este bidimensională (nu avem, variații ale mărimilor caracteristice în direcția y). Se observă că dacă presupunem componenta $v_o = \text{const.}(0)$ atunci din ecuația (5.11)₃ rezultă $\pi_2 = \pi_2(x, z)$ și deci ipoteza capătă o semnificație mai clară. Presupunând deci funcțiile necunoscute independente de y avem imediat sistemul (5.11) sub forma

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_o}{\partial x} + \frac{\partial w_o}{\partial z} &= \frac{B_o}{\gamma T_r} w_o \\
u_o \frac{\partial u_o}{\partial x} + w_o \frac{\partial u_o}{\partial z} &= -\frac{T_r}{\gamma} \frac{\partial \pi_2}{\partial x} \\
\epsilon^2 u_o \frac{\partial u_o}{\partial x} + \epsilon^2 w_o \frac{\partial u_o}{\partial z} &= -\frac{T_r}{\gamma} \frac{\partial \pi_2}{\partial z} + \frac{B_o}{\epsilon^2 \gamma} \theta_2 \\
u_o \frac{\partial \theta_2}{\partial x} + w_o \frac{\partial \theta_2}{\partial z} - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \left[u_o \frac{\partial \pi_2}{\partial x} + w_o \frac{\partial \pi_2}{\partial z} \right] + \frac{S}{T_r} w_o &= 0 \\
\pi_2 &= \theta_2 + \eta_2
\end{aligned} \tag{5.12}$$

În cele ce urmează se aplică un procedeu cunoscut pentru analiza sistemului (5.12) care conduce la obținerea ecuației pentru funcția de curent.

Remarcăm mai întâi, că deoarece

$$T_r(z) = \frac{\gamma - 1}{\gamma} B_o z$$

derivând (5.12)₃ în raport cu x , (5.12)₂ în raport cu z și scăzând relațiile astfel obținute avem, în cele din urmă (cu (5.12)₁)

$$u_o \frac{\partial \omega}{\partial x} + w_o \frac{\partial \omega}{\partial z} + \frac{B_o}{\gamma T_r} w_o \omega = \frac{B_o}{\gamma} \frac{\partial}{\partial x} \left[\theta_2 - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \pi_2 \right] \quad (5.13)$$

unde s-a notat

$$\omega \equiv \epsilon^2 \frac{\partial w_o}{\partial x} - \frac{\partial u_o}{\partial z}$$

turbionul. Folosind (5.12)₁, putem introduce funcția de curent generalizată $\psi \equiv \psi(x, z)$, pentru care

$$\begin{aligned} u_o &= -\exp\left(\frac{B_o}{\gamma} \int \frac{dz}{T_r(z)}\right) \frac{\partial \psi}{\partial z} \\ w_o &= \exp\left(\frac{B_o}{\gamma} \int \frac{dz}{T_r(z)}\right) \frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned} \quad (5.14)$$

Introducând în (5.12)₄, rezultă că aceasta admite o integrală primă de forma

$$F(\psi) = \theta_2 - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \pi_2 + S \int \frac{dz}{T_r(z)} \quad (5.15)$$

Atunci, observând că

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\theta_2 - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \pi_2 \right) = \frac{dF}{d\psi} \frac{\partial \psi}{\partial x},$$

ecuația turbionului (5.13) conduce la

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} \left[\omega \exp\left(\frac{B_o}{\gamma} \int \frac{dz}{T_r(z)}\right) - \frac{B_o}{\gamma} \frac{dF}{d\psi} z \right] -$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} \left[\omega \exp\left(\frac{B_o}{\gamma} \int \frac{dz}{T_r(z)}\right) - \frac{B_o}{\gamma} \frac{dF}{d\psi} z \right] = 0, \quad (5.16)$$

Aceasta, la rândul ei, produce o nouă integrală primă

$$G(\psi) = \omega \exp\left(\frac{B_o}{\gamma} \int \frac{dz}{T_r(z)}\right) - \frac{B_o}{\gamma} \frac{dF}{d\psi} z \quad (5.17)$$

Să observăm acum că, având în vedere expresia funcției $T_r(z)$, se obțin imediat următoarele relații (din (5.14))

$$\exp\left(\frac{B_o}{\gamma} \int \frac{dz}{T_r(z)}\right) = \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma} B_o z\right)^{-1/\gamma-1}$$

$$\frac{\partial w_o}{\partial x} = \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma} B_o z\right)^{-1/\gamma-1} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad (5.18)$$

$$\frac{\partial u_o}{\partial x} = - \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma} B_o z\right)^{-1/\gamma-1} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{B_o}{\gamma} \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma} B_o z\right)^{-1/\gamma-1} \frac{\partial \psi}{\partial z}$$

Atunci, ținând cont de (5.15) și (5.17), ecuația (5.13) conduce la următoarea ecuație pentru funcția de curent

$$\epsilon^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{B_o}{\gamma} \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma} B_o z\right)^{-1} \frac{\partial \psi}{\partial z} =$$

$$= \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma} B_o z\right)^{2/\gamma-1} \left[G(\psi) + \frac{B_o}{\gamma} z \frac{dF}{d\psi} \right] \quad (5.19)$$

pentru care vom atașa condiții la limită corespunzătoare obținute din condițiile pentru u_o , w_o , θ_2 , π_2 .

Suntem deci condu și la următoarea concluzie:

Aflarea soluției sistemului (5.12) cu condițiile la limită date în domeniul de tip bandă $\mathcal{D} \equiv \{(x, z) \mid x \in (-\infty, \infty), z \in [0, 1]\}$ este echivalentă cu aflarea soluției sistemului (5.14), (5.19), (5.12)_{5,6} cu condițiile la limită deduse din precedentele.

Ecuția (5.19) suferă o serie de explicitări care conduc, dacă nu la o formă esențial simplificată, cel puțin la una pentru care metodele numerice sunt mai ușor aplicabile.

Pentru aceasta trebuie însă precizate mai întâi condițiile la frontieră ($z = 0, z = 1$) și condițiile la limită ($x \rightarrow \pm\infty$). Pentru descrierea completă a acestora, vom presupune că există o mișcare la infinit amonte paralelă cu planul orizontal, iar atmosfera politropă de referință este descrisă de așa zisa **atmosferă standard**. Fluidul fiind un gaz ideal, condițiile pe frontiera solidă $z = 0$ și pe suprafața liberă $z = 1$ sunt descrise în Cap.1.6. Să mai observăm că la infinit aval nu avem, apriori, condiții de impus, în afara celor de mărginire uniformă a soluțiilor și de racord cu celelalte condiții. Cu acestea avem evident următoarele

$$\begin{aligned} u(x, z) &= \bar{U}(z) = U(z)/U \\ w(x, z) &= 0 \\ T(x, z) &= T_r(z); \quad \pi(x, z) = \pi_r(z) \end{aligned} \tag{5.20}$$

pentru $x \rightarrow -\infty$ și

$$\begin{aligned} w(x, 0) &= w(x, 1) = 0 \\ T'(x, 0) &= T'_o; \quad T'(x, 1) = T'_r(1) \\ \pi(x, 0) &= \pi_r(0); \quad \pi(x, 1) = \pi_r(1) \end{aligned} \tag{5.21}$$

Relațiile (5.20), (5.21) devin în termenii modelului descris (adică pentru perturbațiile introduse și apoximația asimptotică luată în considerație)

$$\begin{aligned} u_o(x, z) &= \bar{U}(z) = U(z)/U \\ w_o(x, z) &= 0 \\ \theta_2(x, z) &= \pi_2(x, z) = 0 \end{aligned} \tag{5.22}$$

pentru $x \rightarrow -\infty$, și respectiv

$$w_o(x, 0) = w_o(x, 1) = 0$$

$$\theta_2(x, 0) = \frac{T(x, 0) - T_r(0)}{T_r(0)} M^{-2}; \quad \theta_2(x, 1) = 0 \quad (5.23)$$

$$\pi_2(x, 0) = \pi_2(x, 1) = 0$$

Cu aceste remarci, să notăm, pentru claritate, $z \equiv z^\infty$ la infinit amonte ($x \rightarrow -\infty$) și atunci din (5.14)₁ avem imediat

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = -u_o \left(1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma} B_o z\right)^{1/\gamma - 1}$$

și prin urmare ($\psi \in C_D^2$) la infinit amonte funcția de curent este dată de

$$\psi \equiv \psi^\infty(z^\infty) = - \int_0^{z^\infty} \bar{U}(z) \left(1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma} B_o z\right)^{1/\gamma - 1} dz \quad (5.24)$$

Ecuția (5.24) poate fi rezolvată în raport cu z^∞ (dacă $u_o \neq 0$) și avem

$$\hat{z}^\infty(\psi) \equiv \psi^\infty(z^{\infty - 1}) = z^\infty,$$

unde \hat{z}^∞ este funcția inversă a funcției ψ^∞ . Cum am observat deja, dacă $\bar{U}(z^\infty) > 0$, atunci funcția \hat{z}^∞ este uniformă. Să constatăm acum că ecuațiile (5.15), (5.16) devin, la infinit amonte

$$F(\psi) = \frac{S}{B_o} \frac{\gamma}{1 - \gamma} \ln \left[1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma} B_o \hat{z}^\infty(\psi) \right] \quad (5.25)$$

și respectiv

$$G(\psi) = - \left[1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma} B_o \hat{z}^\infty(\psi) \right]^{-1/\gamma - 1} \frac{d\bar{U}(z^\infty)}{dz^\infty} - \frac{S B_o}{\gamma} \left[1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma} B_o \hat{z}^\infty(\psi) \right] \hat{z}^\infty \frac{d\hat{z}^\infty}{d\psi} \quad (5.26)$$

Ținând cont că (5.15), (5.16) sunt integrale prime, atunci (5.25), (5.26) conduc la următoarea formă a ecuației (5.19)

$$\begin{aligned} \epsilon^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{B_o}{\gamma} \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma} B_o z\right)^{-1} \frac{\partial \psi}{\partial z} = \\ = \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma} B_o z\right)^{2/\gamma-1} \left[\frac{S B_o}{\gamma} \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma} B_o \tilde{z}^\infty(\psi)\right)^{-1} (z - \tilde{z}^\infty(\psi)) \frac{d\tilde{z}^\infty}{d\psi} \right. \\ \left. - \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma} B_o \tilde{z}^\infty(\psi)\right)^{-1/\gamma-1} \frac{d\bar{U}(z^\infty)}{dz^\infty} \right]. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Evident forma ecuației (5.27) depinde esențial de alegerea vitezei \bar{U} . Vom lua în cele ce urmează pentru \bar{U} următoarea expresie

$$\bar{U}(z^\infty) = \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma} B_o z^\infty\right)^{-1/\gamma-1} \quad (5.28)$$

cu aceasta avem imediat din (5.24)

$$\psi^\infty(z^\infty) = -z^\infty \quad (5.29)$$

Expresia (5.29) conduce la explicitarea membrului drept în (5.27) și astfel obținem

$$\begin{aligned} \epsilon^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{B_o}{\gamma} \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma} B_o z\right)^{-1} \frac{\partial \psi}{\partial z} = \\ \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma} B_o z\right)^{2/\gamma-1} \left[-\frac{S B_o}{\gamma} \frac{z + \psi}{1 + \frac{\gamma-1}{\gamma} B_o \psi} - \frac{B_o}{\gamma} \left(1 + \frac{\gamma-1}{\gamma} B_o \psi\right)^{-\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \right] \end{aligned} \quad (5.30)$$

Observând acum că $\frac{\gamma-1}{\gamma} \simeq 0.287$ și $B_o \simeq O(1)$ (dar subunitar), rezultă că notând $\lambda \equiv \frac{\gamma-1}{\gamma} B_o$ avem $\lambda \simeq O(10^{-1})$ și deci putem căuta o primă aproximație asimptotică a lui ψ considerând dezvoltarea

$$\psi = \psi_0 + \lambda\psi_1 + \dots \quad (5.31)$$

Scriind dezvoltările expresiilor de tipul $(1 - \lambda z)^\alpha$ și $(1 + \lambda\psi)^\beta$, introducându-le împreună cu (5.31) în (5.30) și reținând prima aproximație a ecuației obținute avem

$$\epsilon^2 \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial z^2} + \frac{B_0}{\gamma} \frac{\partial \psi_0}{\partial z} + \frac{SB_0}{\gamma} \psi_0 = -\frac{B_0}{\gamma} (1 + Sz), \quad (5.32)$$

ecuație ce descrie, în primă aproximație, comportarea funcției de curent.

Condițiile la limită (5.22), (5.23), împreună cu relațiile (5.14) și (5.29) conduc la formularea problemei la limită pentru ecuația (5.32)

$$\begin{aligned} \psi_0(x, 0) &= 0; \quad \psi_0(x, 1) = -1 \\ \psi_0(x, z) &= -z, \quad x \rightarrow -\infty \\ \max \left\{ |\psi_0|, \left| \frac{\partial \psi_0}{\partial x} \right|, \left| \frac{\partial \psi_0}{\partial z} \right| \right\} &< M, \quad x \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (5.33)$$

În fine, forma finală a problemei (5.32), (5.33) se obține făcând schimbarea de scară $x = \epsilon\xi$ și schimbarea de funcție necunoscută

$$\tilde{\psi}_0(\xi, z) = e^{\frac{B_0}{2\gamma}z} \psi_0(\epsilon\xi, z) \quad (5.34)$$

care în urma unor calcule directe conduc la următoarea problemă

$$\Delta \tilde{\psi}_0 + \frac{B_0}{\gamma} \left(S - \frac{B_0}{4\gamma} \right) \tilde{\psi}_0 = -\frac{B_0}{\gamma} (1 + Sz) e^{\frac{B_0}{2\gamma}z} \quad (5.35)$$

și

$$\tilde{\psi}_o(\xi, 0) = 0$$

$$\tilde{\psi}_o(\xi, 1) = -e^{\frac{B_o}{2\gamma}}$$

$$\tilde{\psi}_o(\xi, z) = -ze^{\frac{B_o}{2\gamma}z}, \quad \psi \rightarrow -\infty \quad (5.36)$$

$$\max\{|\tilde{\psi}_o|, \left|\frac{\partial\tilde{\psi}_o}{\partial\xi}\right|, \left|\frac{\partial\tilde{\psi}_o}{\partial z}\right|\} < M', \quad \psi \rightarrow \infty$$

Să observăm în final că problema (5.35), (5.36) se integrează numeric obținându-se funcția de curent. Cu aceasta, relațiile (5.14) conduc la determinarea câmpului de viteze, rămânând apoi de integrat (tot numeric) ecuațiile (5.12)_{3,4} pentru obținerea temperaturii θ_2 și presiunii π_2 (cu condițiile la limită corespunzătoare obținute din (5.22) și (5.23)). Din (5.12)₅ se determină, în cele din urmă câmpul densității de masă.

Câteva rezultate numerice privind integrarea numerică a problemei, determinarea funcției de curent și apoi a câmpurilor de interes sunt prezentate în Anexa 4.

5.4 Model pentru mișcarea aerului în prezența unui obstacol izolat

Se urmărește obținerea sistemului de ecuații care descriu mișcarea aerului (la scară locală) în prezența unui obstacol izolat ² și rezolvarea sa în condiții la limită bine definite. Obstacolul poate modela un masiv muntos, un oraș mare, etc. El este aproximat prin forme geometrice simple. În aplicarea modelului se alege pentru aproximarea obstacolului un paraboloid de rotație. Datorită faptului că ecuația ce descrie mișcarea verticală este liniară, pentru aproximarea unor obstacole de forme mai complicate se poate lua o reuniune de paraboloizi.

A. Pentru obținerea ecuației se va dezvolta modelul cunoscut al lui Boussinesq. Se consideră deci aerul ca un fluid ideal, perfect conducător de căldură. Prin urmare mișcarea sa este descrisă (așa cum am văzut) de sistemul de ecuații (5.6). Având în vedere observația făcută, după formula (5.7), privind coeficientul $\frac{1}{RePr}$, rezultă că în ecuația (5.6)₅, care descrie propagarea temperaturii vom neglija termenii din membrul drept.

²Subiectul este prezentat după cartea lui Zeytounian[1977], și articolul lui H.I. Ene și V.Țigoiu [1980]

Remarcăm, ca și la începutul paragrafului precedent, că $Mr \simeq 0.03$. Dezvoltarea asimptotică ce va fi considerată este diferită de cea din cazul convecției intense și anume, se consideră că variația perturbațiilor temperaturii și densității datorată prezenței obstacolului este mai importantă decât variația perturbației presiunii. Aceasta conduce la a căuta dezvoltări (5.8) cu $a = 0$, $b = 2$, $c = d = 1$, adică

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{v}_o + \dots \\ \pi &= M_r^2 \pi_2 + \dots \\ \theta &= M_r \theta_1 + \dots \\ \eta &= M_r \eta_1 + \dots \end{aligned} \tag{5.37}$$

Pentru a nu decupla complet ecuațiile de mișcare de ecuația temperaturii se introduc doi parametri de similitudine (a se vedea și Anexa 3)

$$S_1 \equiv B_o/M_r, \quad S_2 \equiv \alpha_o/B_o$$

pentru care vom impune să rămână finiți (în procesul de trecere la limită cu $M_r \rightarrow 0$), ceea ce conduce la $B_o \ll 1$ și $\alpha_o \ll 1$ (sau $B_o \rightarrow 0$, $\alpha_o \rightarrow 0$ îndată ce $M_r \rightarrow 0$). Introducând dezvoltările (5.37) în (5.6) și ținând cont de observațiile de mai sus avem, în primă aproximație, următorul sistem de ecuații

$$\begin{aligned} \eta_1 &= -\theta_1 \\ \frac{\partial u_o}{\partial x_1} + \frac{\partial v_o}{\partial x_2} + \frac{\partial w_o}{\partial x_3} &= 0 \\ \beta_o \frac{\partial u_o}{\partial t} + u_o \frac{\partial u_o}{\partial x_1} + v_o \frac{\partial u_o}{\partial x_2} + w_o \frac{\partial u_o}{\partial x_3} + \frac{1}{R_o} (\epsilon w_o \cos \varphi - v_o \sin \varphi) &= -\frac{1}{\gamma} \frac{\partial \pi_2}{\partial x_1} \\ \beta_o \frac{\partial v_o}{\partial t} + u_o \frac{\partial v_o}{\partial x_1} + v_o \frac{\partial v_o}{\partial x_2} + w_o \frac{\partial v_o}{\partial x_3} + \frac{1}{R_o} u_o \sin \varphi &= -\frac{1}{\gamma} \frac{\partial \pi_2}{\partial x_2} \\ \beta_o \frac{\partial w_o}{\partial t} + u_o \frac{\partial w_o}{\partial x_1} + v_o \frac{\partial w_o}{\partial x_2} + w_o \frac{\partial w_o}{\partial x_3} - \frac{1}{R_o \epsilon} u_o \cos \varphi &= -\frac{1}{\gamma} \frac{\partial \pi_2}{\partial x_3} + \frac{1}{\gamma \epsilon^2} S_1 \theta_1 \\ \beta_o \frac{\partial \theta_1}{\partial t} + u_o \frac{\partial \theta_1}{\partial x_1} + v_o \frac{\partial \theta_1}{\partial x_2} + w_o \frac{\partial \theta_1}{\partial x_3} + S_1 \left[\frac{\gamma - 1}{\gamma} - S_2 \right] w_o &= 0 \end{aligned} \tag{5.38}$$

Sistemul (5.38) poartă denumirea de sistemul lui Boussinesq. Se poate observa că sistemul se obține în procesul (asimptotic) de trecere la limită cu $RePr \rightarrow 0$, $M_r \rightarrow 0$, $B_o \rightarrow 0$, $\alpha_o \rightarrow 0$ păstrând parametrii S_1 , și S_2 finiți și pozitivi³.

Ca și în cazul analizat în paragraful precedent, vom considera în continuare procese cuasistaționare ($Sh \equiv 0$) și locale, adică se neglijează efectele de scară mare ($R_o \rightarrow \infty$).

Cu acestea, introducând o nouă dezvoltare asimptotică în raport cu $\mu_o \equiv \frac{1}{R_o} \ll 1$ prin

$$\begin{aligned}
 u_o &= 1 + \mu_o v_1 + \dots \\
 v_o &= \mu_o v_2 + \dots \\
 w_o &= \mu_o v_3 + \dots \\
 \pi_2 &= \mu_o \pi_{21} + \dots \\
 \theta_2 &= \mu_o \theta_{21} + \dots \\
 \eta_2 &= \mu_o \eta_{21} + \dots
 \end{aligned}
 \tag{5.39}$$

sistemul (5.38) devine

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial v_i}{\partial x_i} &= 0 \\
 \gamma \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \pi_{21}}{\partial x_1} &= 0 \\
 \gamma \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \pi_{21}}{\partial x_2} &= 0 \\
 \epsilon^2 \gamma \frac{\partial v_3}{\partial x_1} + \frac{\partial \pi_{21}}{\partial x_3} &= S_1 \theta_{21} \\
 \frac{\partial \theta_{21}}{\partial x_1} + \lambda_o v_3 &= 0 \\
 \eta_{21} &= -\theta_{21}
 \end{aligned}
 \tag{5.40}$$

³In fapt se consideră un proces ceva mai complex de trecere la limită, aceasta făcându-se după numărul lui Mach local $M_r^2 = \frac{l^2}{R\gamma T_r^o(z)}$

Să observăm că în dezvoltările (5.39) s-a presupus că mișcarea se face în prezența unui curent uniform și omogen de la infinit cauzat de mișcarea la scară mare, pe direcția x_1 , care este perturbat de obstacolul ce va fi prezent în calea sa. Este motivul pentru care în dezvoltarea componentei u_o apare termenul constant independent de μ_o . În sistemul (5.40) s-a notat cu $\lambda_o \equiv S_1[\frac{\gamma-1}{\gamma} - S_2]$. Un număr de derivări succesive ale ecuațiilor sistemului (5.40) și combinări ale noilor ecuații astfel obținute, conduc la eliminarea necunoscutelor θ_{21} , π_{21} , v_1 , v_2 și obținerea unei ecuații în v_3 . Aceasta este

$$[\epsilon^2(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}) + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}] \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_1^2} + A(\frac{\partial^2 v_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_2^2}) = 0 \quad (5.41)$$

În ecuația (5.41) s-a notat cu $A \equiv \lambda_o S_1 / \gamma$. Astfel am obținut ecuația (5.41) care descrie repartiția vitezelor verticale în domeniul considerat. Ecuației (5.41) trebuie să-i atașăm un set de condiții pe frontieră. Acestea trebuie pe de o parte să țină cont de datele specifice ce se întâlnesc în practica meteorologică și, pe de altă parte, de corectitudinea formulării problemei din punct de vedere matematic. Pentru aceasta, să precizăm că în interiorul domeniului paralelipipedic

$$\mathcal{D} \equiv \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 \in (-\infty, \infty), x_2 \in [-1, 1], x_3 \in [0, 1]\}$$

avem un obstacol așezat pe planul $x_3 = 0$, a cărui suprafață presupusă suficient de regulată are ecuația $x_3 = h(x_1, x_2)$. Să notăm cu D urma obstacolului pe planul $x_3 = 0$, adică interiorul curbei $h(x_1, x_2) = 0$. Câmpul vitezelor, conform cu cele arătate în Capitolul 1, trebuie să verifice condiția de alunecare $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$. Urmare a relațiilor (5.37) avem $\mathbf{v}_o \cdot \mathbf{n} = 0$ și urmare a dezvoltărilor (5.39) și a definiției normalei la o suprafață obținem

$$v_3 = \frac{\partial h}{\partial x_1} + \mu_o(v_1 \frac{\partial h}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial h}{\partial x_2}) + \dots \quad (5.42)$$

Impunând condiția de periodicitate (a domeniului mișcării) în raport cu x_2 și ca prin suprafața $z = 1$ să nu intre și să nu iasă fluid, iar la infinit amonte și aval perturbația să se anuleze (împreună cu derivatele sale) îndeplinim atât cerințele matematice ale problemei cât și proprietățile fizice și geometrice ale ei. Aceste condiții se transformă în

$$v_3(x_1, x_2, 1) = 0$$

$$v_3(x_1, x_2, 0) = \frac{\partial h}{\partial x_2}, \text{ dacă } (x_1, x_2) \in D$$

$$v_3(x_1, x_2, 0) = 0, \text{ dacă } (x_1, x_2) \in CD \quad (5.43)$$

$$\frac{\partial v_3}{\partial x_2} \Big|_{|x_2|=1} = 0$$

$$\lim_{|x_2| \rightarrow \infty} (|v_3|, \left| \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right|, \left| \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_1^2} \right|, \left| \frac{\partial^3 v_3}{\partial x_1^3} \right|) = 0$$

Să mai remarcăm că, condiția (5.43)₂, pusă pe $x_3 = 0$ și $(x_1, x_2) \in D$ (zonă în care curgerea de fapt nu are loc), nu face decât să transforme domeniul efectiv de curgere din $\mathcal{D} \setminus (D, x_3)$ în întreg domeniul \mathcal{D} , cu modificarea corespunzătoare a datei pe frontieră.

B. Pentru rezolvarea problemei (5.41)- (5.43) în domeniul \mathcal{D} considerat, presupunând funcția h suficient de regulată în vecinătatea punctului de contact cu planul $x_3 = 0$, vom face mai întâi următoarea schimbare de funcție

$$W(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} v_3 - (1 - x_3) \frac{\partial h}{\partial x_1} & \text{în } (D, x_3) \\ v_3 & \text{în exteriorul lui } (D, x_3) \end{cases} \quad (5.44)$$

obținând o ecuație neomogenă pentru W , dar cu condiții la limită omogene. Prin urmare problema ((5.41), (5.43)) devine

$$\begin{aligned} & \left[\epsilon^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right] \frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} + A \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) W = \\ & = \begin{cases} -(1 - x_3) \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) \left(\epsilon^2 \frac{\partial^3}{\partial x_1^3} + A \frac{\partial}{\partial x_1} \right) h & \text{în } (D, x_3) \\ 0 & \text{în exteriorul lui } (D, x_3) \end{cases} \quad (5.45) \end{aligned}$$

$$W(x_1, x_2, 0) = W(x_1, x_2, 1), \quad \frac{\partial W}{\partial x_2} \Big|_{|x_2|=1} = 0, \quad (5.46)$$

$$\lim_{|x_2| \rightarrow \infty} (|W|, \left| \frac{\partial W}{\partial x_3} \right|, \left| \frac{\partial^2 W}{\partial x_3^2} \right|, \left| \frac{\partial^3 W}{\partial x_3^3} \right|) = 0$$

Având în vedere forma condițiilor pe $x_3 = 0$, și $x_3 = 1$, vom căuta soluția problemei (5.45)-(5.46) de forma

$$W(x_1, x_2, x_3) = \sum_{n=1}^{\infty} W_n(x_1, x_2) \sin n\pi x_3 \quad (5.47)$$

adică o serie sinus- Fourier. Introducând (5.47) în (5.45)- (5.46) obținem imediat pentru coeficienții W_n ai dezvoltării următoarea problemă ⁴

$$\begin{aligned} \epsilon^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) \frac{\partial^2 W_n}{\partial x_1^2} + (A - n^2 \pi^2) \left(\frac{\partial^2 W_n}{\partial x_1^2} + A \frac{\partial^2 W_n}{\partial x_2^2} \right) = \\ - \frac{2}{n\pi} F(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (5.48)$$

$$\frac{\partial W_n}{\partial x_2} \Big|_{|x_2|=1} = 0, \quad \lim_{|x_2| \rightarrow \infty} (|W_n|, \left| \frac{\partial W_n}{\partial x_1} \right|, \left| \frac{\partial^2 W_n}{\partial x_1^2} \right|, \left| \frac{\partial^3 W_n}{\partial x_1^3} \right|) = 0 \quad (5.49)$$

În (5.48) s-a notat

$$F'(x_1, x_2) = \begin{cases} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) \left(\epsilon^2 \frac{\partial^3}{\partial x_1^3} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) h & \text{în } D \\ 0 & \text{în exteriorul lui } D \end{cases} \quad (5.50)$$

Remarcând acum forma condițiilor (5.46)₃ pentru $|x_1| \rightarrow \infty$ se poate aplica transformata Fourier integrală în raport cu x_1 . Atunci, dacă notăm cu \mathcal{F} operatorul de transformare Fourier avem următoarele notații și definiții

⁴Practic se înmulțește ecuația cu $\sin n\pi x_3$ și se integrează între 0 și 1, ținând cont că (5.47) conduce la $W_n(x_1, x_2) = 2 \int_0^1 W(x_1, x_2, x_3) \sin n\pi x_3 dx_3$.

$$\mathcal{U}_n(\omega, x_2) = \mathcal{F}(W_n(x_1, x_2)) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} W_n(x_1, x_2) e^{-i\omega x_1} dx_1 \quad (5.51)$$

$$\tilde{F}(\omega, x_2) \equiv \mathcal{F}(F(x_1, x_2)) = \frac{\sqrt{2}}{n\pi^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} F(x_1, x_2) e^{-i\omega x_1} dx_1$$

unde evident am ținut seama de definiția (5.50) a lui $F(x_1, x_2)$, care împreună cu proprietățile lui h conduce la $\int_{-\infty}^{\infty} |F(x_1, x_2)| dx_1 < \infty$. În aceste condiții, problema (5.48)-(5.49) se transformă, în urma unor calcule directe, în problema

$$(A - \epsilon^2 \omega^2) \ddot{\mathcal{U}}_n + \omega^2 (\epsilon^2 \omega^2 - A + n^2 \pi^2) \mathcal{U}_n = -\frac{2}{n\pi} \tilde{F}(\omega, x_2) \quad (5.52)$$

$$\dot{\mathcal{U}}_n |_{|x_2|=1} = 0; \quad \mathcal{U}_n(\omega, 1) - \mathcal{U}_n(\omega, -1) = 0 \quad (5.53)$$

Desigur în obținerea ecuațiilor (5.52) (pentru $n \in N^*$) trebuie obținute relațiile de transformare Fourier a derivatelor în raport cu x_1 , ceea ce conduce la utilizarea condițiilor la limită (5.49)₂. Pentru obținerea condițiilor (5.53) se transformă Fourier (5.49)₁ și se adaugă condiția de simetrie în raport cu axa Ox_1 (simetrie impusă de simetria obstacolului).

În plus se vede clar că membrul drept al ecuației (5.52) este imaginar (datorită simetriei obstacolului). Atunci, utilizând notația $\mathcal{U}_n(\omega, x_2) \equiv U_n(\omega, x_2) + iV_n(\omega, x_2)$, funcția U_n rezultă identic nulă și, pentru funcția V_n suntem conduși la următoarea problemă (din (5.52)- (5.53))

$$(A - \epsilon^2 \omega^2) \ddot{V}_n + \omega^2 (\epsilon^2 \omega^2 - A + n^2 \pi^2) V_n = \frac{2}{n\pi} \tilde{F}(\omega, x_2) \quad (5.54)$$

$$\dot{V}_n(\omega, 1) = \dot{V}_n(\omega, -1) = 0; \quad V_n(\omega, 1) - V_n(\omega, -1) = 0 \quad (5.55)$$

Pentru aflarea soluției problemei (5.54)- (5.55) constatăm că, funcție de semnul lui A (în legătură cu semnul coeficientului lui V_n și \ddot{V}_n din (5.54)) avem două situații posibile ($A > 0, A < 0$), ce vor fi analizate separat.

B1. Fie $A > 0$. Să facem următoarele notații

$$\begin{aligned}
 B_{n\omega} &= n\pi\beta_{n\omega}(\epsilon^2\omega^2 - A), & \beta_{n\omega} &= \omega\sqrt{1 + \frac{n^2\pi^2}{\epsilon^2\omega^2 - A}} \\
 C_{n\omega} &= n\pi\gamma_{n\omega}(A - \epsilon^2\omega^2), & \gamma_{n\omega} &= \omega\sqrt{\frac{n^2\pi^2}{\epsilon^2\omega^2 - A} - 1} \\
 D_{n\omega} &= n\pi\alpha_{n\omega}(A - \epsilon^2\omega^2), & \alpha_{n\omega} &= \omega\sqrt{1 - \frac{n^2\pi^2}{\epsilon^2\omega^2 - A}}
 \end{aligned} \tag{5.56}$$

Cu notațiile (5.56) avem (în urma unor calcule standard privind soluția problemei (5.54)- (5.55)) următoarele două posibilități

a) Dacă $n \in (0, \frac{\sqrt{A}}{\pi})$

$$\begin{aligned}
 V_n(\omega, x_2) &= -\frac{1}{B_{n\omega}} \left\{ \frac{e^{-\beta_{n\omega}x_2}}{\operatorname{sh}(\beta_{n\omega}x_2)} \operatorname{ch}(\beta_{n\omega}x_2) \int_{-1}^1 e^{\beta_{n\omega}t} \tilde{F}(\omega, t) dt \right. \\
 &\quad \left. + e^{\beta_{n\omega}x_2} \int_{x_2}^1 e^{-\beta_{n\omega}t} \tilde{F}(\omega, t) dt + e^{-\beta_{n\omega}x_2} \int_{-1}^{x_2} e^{\beta_{n\omega}t} \tilde{F}(\omega, t) dt \right\},
 \end{aligned}$$

$$\text{dacă } \omega \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{A}}{\epsilon}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{A}}{\epsilon}, \infty\right)$$

sau

$$\begin{aligned}
 V_n(\omega, x_2) &= -\frac{2}{C_{n\omega}} \left\{ \frac{\cos\gamma_{n\omega}(x_2 - 1)}{\sin(\gamma_{n\omega})} \int_0^1 \cos(\gamma_{n\omega}t) \tilde{F}(\omega, t) dt - \right. \\
 &\quad \left. - \int_{x_2}^1 \sin\gamma_{n\omega}(x_2 - t) \tilde{F}(\omega, t) dt \right\}
 \end{aligned} \tag{5.57}$$

$$\text{dacă } \omega \in \left(-\frac{\sqrt{A}}{\epsilon}, -\frac{\sqrt{A - n^2\pi^2}}{\epsilon}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{A - n^2\pi^2}}{\epsilon}, \frac{\sqrt{A}}{\epsilon}\right)$$

sau

$$V_n(\omega, x_2) = -\frac{1}{D_{n\omega}} \left\{ \frac{e^{-\alpha_{n\omega}}}{\text{sh}(\alpha_{n\omega})} \text{ch}(\alpha_{n\omega} x_2) \int_{-1}^1 e^{\alpha_{n\omega} t} \tilde{F}(\omega, t) dt \right. \\ \left. + e^{\alpha_{n\omega} x_2} \int_{x_2}^1 e^{-\alpha_{n\omega} t} \tilde{F}(\omega, t) dt + e^{-\alpha_{n\omega} x_2} \int_{-1}^{x_2} e^{\alpha_{n\omega} t} \tilde{F}(\omega, t) dt \right\},$$

dacă $\omega \in \left(-\frac{\sqrt{A - n^2 \pi^2}}{c}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\sqrt{A - n^2 \pi^2}}{c}\right)$

b) Dacă $n \in \left(\frac{\sqrt{A}}{\pi}, \infty\right)$

$$V_n(\omega, x_2) = -\frac{1}{B_{n\omega}} \left\{ \frac{e^{-\beta_{n\omega}}}{\text{sh}(\beta_{n\omega})} \text{ch}(\beta_{n\omega} x_2) \int_{-1}^1 e^{\beta_{n\omega} t} \tilde{F}(\omega, t) dt \right. \\ \left. + e^{\beta_{n\omega} x_2} \int_{x_2}^1 e^{-\beta_{n\omega} t} \tilde{F}(\omega, t) dt + e^{-\beta_{n\omega} x_2} \int_{-1}^{x_2} e^{\beta_{n\omega} t} \tilde{F}(\omega, t) dt \right\} \quad (5.58)$$

dacă $\omega \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{A}}{c}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{A}}{c}, \infty\right)$

sau

$$V_n(\omega, x_2) = -\frac{1}{C_{n\omega}} \left\{ \frac{\cos -\gamma_{n\omega}(x_2 - 1)}{\sin(\gamma_{n\omega})} \int_0^1 \cos(\gamma_{n\omega} t) \tilde{F}(\omega, t) dt - \right. \\ \left. - \int_{x_2}^1 \sin \gamma_{n\omega}(x_2 - t) \tilde{F}(\omega, t) dt \right\}$$

dacă $\omega \in \left(-\frac{\sqrt{A}}{c}, \frac{\sqrt{A}}{c}\right)$

În fine, a doua familie de soluții se obține pentru

B2. Fie $A < 0$. Atunci, notând cu

$$E_{n\omega} = n\pi\delta_{n\omega}(A + \epsilon^2\omega^2), \quad \delta_{n\omega} = \omega \sqrt{1 + \frac{n^2\pi^2}{A + \epsilon^2\omega^2}}, \quad \omega \neq 0 \quad (5.59)$$

soluția problemei (5.54)- (5.55) este dată de

$$V_n(\omega, x_2) = -\frac{1}{E_{n\omega}} \left\{ \frac{e^{-\delta_{n\omega}}}{\text{sh}(\delta_{n\omega})} \text{ch}(\delta_{n\omega} x_2) \int_{-1}^1 e^{\delta_{n\omega} t} \tilde{F}(\omega, t) dt \right. \\ \left. + e^{\delta_{n\omega} x_2} \int_{x_2}^1 e^{-\delta_{n\omega} t} \tilde{F}(\omega, t) dt + e^{-\delta_{n\omega} x_2} \int_{-1}^1 e^{\delta_{n\omega} t} \tilde{F}(\omega, t) dt \right\} \quad (5.60)$$

pentru orice n .

Se observă imediat că subcazurile prezentate (a, b) țin de tehnica de rezolvare. Cele două cazuri mari B1 și B2 însă, depind de parametrul A care, conform definițiilor din prima parte a acestui paragraf, este un parametru de stare al atmosferei. Într-adevăr semnul său depinde esențial de numărul lui Boussinesq, de α_0 și de γ , indicând apriori (funcție de mărimile de referință) tipul soluției.

Se observă cu ușurință că dacă V_n este obținut ca mai sus, atunci soluția W_n a problemei (5.48)-(5.49) este transformata Fourier inversă a lui V_n , adică

$$W_n(x_1, x_2) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty V_n(\omega, x_2) \sin \omega x_1 d\omega \quad (5.61)$$

și prin urmare componenta v_3 a mișcării verticale se obține din (5.44) și (5.47) ca

$$v_3(x_1, x_2, x_3) = (1 - x_3) \frac{\partial h}{\partial x_1} - \\ -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty (V_n(\omega, x_2) \sin(\omega x_1) d\omega) \sin(n\pi x_3) \quad (5.62)$$

Câteva observații se impun. În primul rând, odată soluția (5.62) obținută, sistemul (5.40) se rezolvă imediat cu condiții la frontieră și la limită convenabil alese. (Lăsăm în seama cititorului ca, pe baza condițiilor formulate în paragraful 3 al acestui capitol să scrie problema la limită completă.)

Toate considerațiile acestui paragraf au fost făcute în ipoteza că suprafața $x_3 = h(x_1, x_2)$ este regulată. O formă simplă (din punct de vedere matematic) pentru ecuația suprafeței este de preferat. Totuși în alegerea sa trebuie ținut cont pe de o parte de faptul că aceasta trebuie să aproximeze diverse obstacole reale.

iar pe de altă parte că în formula (5.50) de calcul al lui F apar derivatele de ordin cinci ale lui h (paraboloid de revoluție) de forma

$$h(x_1, x_2) = C_o(1 - R^2(x_1^2 + x_2^2))^6 \quad (5.63)$$

unde $C_o \equiv h/H$ înălțimea adimensională a obstacolului și $R = L/r$, r fiind raza cercului de bază (din planul $x_3 = 0$). Atunci se vede ușor că F este continuă în banda $R \times [-1, 1]$, este pară în x_2 și impară în x_1 . Prin urmare, transformata sa Fourier \bar{F} coincide cu transformata sinus-Fourier a lui F . Aceste observații și o serie de calcule elementare conduc la

$$\begin{aligned} \bar{F}(\omega, x_2) = & i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{46.080}{\omega^2} \left(\epsilon^2 - \frac{A}{\omega^2}\right) \left\{ \frac{\sqrt{1 - R^2 x_2^2}}{R\omega} \cos\left(\frac{\omega}{R} \sqrt{1 - R^2 x_2^2}\right) \times \right. \\ & \times [2R^2(R^2 x_2^2 - 1)(6R^2 x_2^2 - 11) + \frac{105R^4}{\omega^2}(12R^2 x_2^2 - 13) + \frac{11.340}{\omega^4}R^6] + \\ & + \sin\left(\frac{\omega}{R} \sqrt{1 - R^2 x_2^2}\right) [(R^2 x_2^2 - 1)^2 \frac{45R^4}{\omega^2}(R^2 x_2^2 - 1)(4R^2 x_2^2 - 5) - \\ & \left. - \frac{105R^4}{\omega^4}(48R^2 x_2^2 - 49) - \frac{11.340R^6}{\omega^6}] \right\} \end{aligned} \quad (5.64)$$

Evident se pune problema convergenței integralelor ce vor apare în formulele (5.61), (5.62). Acestea sunt integrale din funcții de tipul

$$g(\omega)/\omega^{2k+1}$$

unde g sunt funcții infinit diferentiabile, deci lipschitziene împreună cu derivatele lor. Prin urmare integralele vor avea singularități tari în $\omega = 0$. Cu aceste observații, constatăm că ne încadrăm în ipotezele teoremelor demonstrate de Ch. Fox [1957] privind generalizarea valorii principale în sensul lui Cauchy. În cazul nostru, $\omega = 0$ este un punct singular de multiplicitate impară și atunci restul formulei lui Fox este nul și prin urmare integralele au sens.

5.5 Modelul de briză

Problema circulației aerului la "scară mică" are, printre alte multiple aplicații de un deosebit interes, și pe acelea legate de brizele marine, brizele pe văi, diferite

probleme de poluare, etc. Problematika sus amintită a fost abordată din diferite puncte de vedere atât în privința modelării matematice a fenomenului fizic respectiv, cât și în privința metodelor de integrare numerică folosite (vezi Estoque [1961], Saito [1976], Chorin [1968],[1969]).

În cele ce urmează vom urmări prezentarea făcută în Pescaru, Romanof, Țigoiu [1985] ca și în Estoque [1961]. În modelarea mișcării vom folosi aproximațiile permise de "teoria K" (vezi Monin, Iaglom [1965]; Mohammadi, Pironneau [1994] și Anexa 3), dar nu vom apela la aproximația hidrostatică și nici nu vom elimina ecuația mișcării verticale pentru a o înlocui cu derivata ecuației de conservare a masei. Modelul obținut descrie mișcarea unui fluid (gaz) cu gradient termic propriu. În schema numerică vom introduce un prim pas distinct, în aproximații, pentru a putea calcula funcția constitutivă $K(x,z,t)$ la pasul următor. În rest schema numerică folosește rezultatele lui Chorin [1968].

Deși tehnica directă de obținere a modelului și de analiză a sa, pare a fi una de "mici perturbații" totuși, având în vedere modul în care sunt obținute ecuațiile de bază (5.65), (5.68) din ecuațiile (1.38) sau (1.46), ca și observațiile făcute în introducerea la acest capitol, am găsit de cuviință că această tratare "hibridă" a unui model își găsește locul în această parte a cărții.

Vom începe studiul prin a prezenta pe scurt *descrierea modelului*. Atmosfera este presupusă ca fiind un fluid vâcos, incompresibil. Urmând cele arătate de Estoque vom împărți atmosfera în două straturi. Unul adiacent Pământului cu o grosime de aproximativ 50 m, în care se presupune constanța cu înălțimea a fluxului de căldură și a fluxului vertical al momentelor orizontale.

Mecanismul mișcării se datorează încălzirii diurne, diferențiate a solului și a mării. În plus presupunem că, coasta este o linie dreaptă și că variațiile mărimilor câmpurilor de interes sunt nule în direcția y (direcția coastei). Ținând cont de aproximațiile "teoriei K", vom introduce funcțiile constitutive $K_1(x,z,t)$, $K_2(x,z,t)$ corespunzătoare celor două componente orizontale ale impulsului, și atunci avem, în stratul limită considerat (se face atât ipoteza egalității celor două funcții constitutive, ceea ce revine la a presupune omogenitatea orizontală a stratului limită, cât și egalitatea lor cu conductibilitatea termică, funcția respectivă fiind notată cu $K(x,z,t)$),

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z}(K_1 \frac{\partial u'}{\partial z}) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial z}(K_2 \frac{\partial v'}{\partial z}) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial z}(K \frac{\partial \theta'}{\partial z}) &= 0\end{aligned}\tag{5.65}$$

unde avem

$$\begin{aligned}
K_1 &= K_1(x, z, t) = [k_o(z + z_o)(1 + \alpha Ri)]^2 \frac{\partial u'}{\partial z} \\
K_2 &= K_2(x, z, t) = [k_o(z + z_o)(1 + \alpha Ri)]^2 \frac{\partial v'}{\partial z} \\
K &= \frac{K_1 + K_2}{2} (= K_1 = K_2 \quad \text{în ipoteza făcută})
\end{aligned}
\tag{5.66}$$

pentru $Ri > Ri_c \simeq -0.03$ și

$$K_1 = K_2 = K = \lambda z^2 \left(\frac{g}{\theta'} \left| \frac{\partial \theta'}{\partial z} \right| \right)^{1/2}
\tag{5.67}$$

pentru $Ri \leq Ri_c$. Mai sus s - au folosit notațiile clasice

$$Ri = \frac{g}{T} \frac{\partial \bar{T} / \partial z + \Gamma}{\partial \bar{u} / \partial z} = \frac{g \partial \theta' / \partial z}{\theta' (\partial \bar{u} / \partial z)^2}$$

și

$$\theta' = T (p_o/p)^\chi, \quad \chi = R/c_p$$

pentru numărul lui Richardson (Ri) și temperatura echipotențială (θ) și unde $p_o =$ presiunea de 1000 mb, $k_o, z_o, \alpha, \lambda$ constante de material și problemă.

În stratul superior, în care nu se fac nici un fel de ipoteze de natura constanței fluxurilor (dar se păstrează ipoteza de constanță a cantităților de interes în raport cu direcția y), se scrie sistemul complet al ecuațiilor de conservare a masei, impulsului și energiei, care cu aproximația "teoriei K", devine (vezi și (1.38))

$$\text{div } \mathbf{v} = 0$$

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + fv + \frac{\partial}{\partial z} \left(K \frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - fu + \frac{\partial}{\partial z} \left(K \frac{\partial v}{\partial z} \right)
\tag{5.68}$$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial}{\partial z} \left(K \frac{\partial \theta}{\partial z} \right)$$

unde $p = \rho RT = \rho(p/p_0)^{\gamma} \theta R$, f este parametrul Coriolis, pentru fluxul de căldură s- a considerat aproximația lui Fourier, iar pentru această parte a lucrării vom lua

$$K(z) = K(h) \frac{H - z}{H - h} \quad (5.69)$$

Considerând, în mod obișnuit, că fiecare funcție necunoscută a procesului termodinamic este formată dintr- o parte datorată mișcării la scară mare (sinoptică) și dintr-o altă parte datorată perturbației induse de încălzirea diferențiată de la nivelul solului, avem

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{v}_s + \mathbf{v}' \\ \theta &= \theta_s + \theta' \\ p &= p_s + p' \\ \rho &= \rho_s + \rho' \end{aligned} \quad (5.70)$$

mărimile neperturbate verificând ecuațiile de bilanț

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{v}_s &= 0 \\ \frac{du_s}{dt} &= -\frac{RT_s}{p_s} \frac{\partial p_s}{\partial x} + f v_s \\ \frac{dv_s}{dt} &= -\frac{RT_s}{p_s} \frac{\partial p_s}{\partial y} - f u_s \\ \frac{dw_s}{dt} &= -\frac{1}{RT_s} p_s \frac{\partial p_s}{\partial z} - g \\ \frac{d\theta_s}{dt} &= 0 \end{aligned} \quad (5.71)$$

Șcãzãnd ecuațiile (5.71) din (5.68) și ținãnd cont de notațiile (5.70), ca și de ipoteza de constanță a funcțiilor necunoscute pe direcția y , obținem următorul sistem diferențial pentru perturbații

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + bf v' \cdot \text{grad}_{x,z} u' + bf v' \cdot \text{grad} u_s + bf v_s \cdot \text{grad}_{x,z} u' =$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x} + \frac{\rho'}{\rho \rho_s} \frac{\partial p_s}{\partial x} + f v' + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_1 \frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + bf v' \cdot \text{grad}_{x,z} v' + bf v' \cdot \text{grad} v_s + bf v_s \cdot \text{grad}_{x,z} v' =$$

$$\frac{\rho'}{\rho \rho_s} \frac{\partial p_s}{\partial z} - f u' + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_2 \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (5.72)$$

$$\frac{\partial w'}{\partial t} + bf v' \cdot \text{grad}_{x,z} w' + bf v' \cdot \text{grad} w_s + bf v_s \cdot \text{grad}_{x,z} w' =$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial z} + \frac{\rho'}{\rho \rho_s} \frac{\partial p_s}{\partial z}$$

$$\frac{\partial \theta'}{\partial t} + bf v' \cdot \text{grad}_{x,z} \theta' + bf v' \cdot \text{grad} \theta_s + bf v_s \cdot \text{grad}_{x,z} \theta' =$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(K \frac{\partial \theta}{\partial z} \right)$$

Sistemul (5.72) este cel ce descrie evoluția în timp a perturbațiilor procesului termodinamic, în dată ce s-a precizat comportamentul masei de aer, la scară mare.

Pentru aceasta trebuie să formulăm problema cu date inițiale și la limită. Considerând domeniul mișcării ca fiind un dreptunghi cu lungimea (în direcția x) $L = 100$ Km și înălțimea $H = 2$ km (în direcția z) vom atașa sistemului (5.72) următoarele date inițiale (considerând că la momentul $t = 0$ avem lipsa oricărei perturbații)

$$p = p_s$$

$$\theta = \theta_s (T = T_s) \quad (5.73)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_s$$

Datele la frontieră ($t > 0$) trebuie introduse la nivelul solului, la nivelul frontierei libere și pe frontierele laterale. La nivelul solului vom considera anularea perturbațiilor vitezei

$$u' = v' = w' = 0, \quad z = 0 \quad (5.74)$$

iar pentru profilul de temperatură avem

$$T'(x, t) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ T'(x, t) & \text{funcție de încălzire diurnă} \\ & \text{cunoscută pentru } 0 < x \leq 20km \\ T'(x, t) = T'(20km, t), & x > 20km \\ T'(0, t) = \frac{1}{2}[T'(-0, t) + T'(0, t)] \end{cases} \quad (5.75)$$

unde am presupus că pentru $x > 0$ avem solul, iar pentru $x < 0$ suntem deasupra mării.

La nivel superior vom impune anularea tuturor perturbațiilor

$$u' = v' = w' = \theta' = 0, \quad z = H \quad (5.76)$$

Pentru perturbația presiunii, p' , se poate lua fie condiția $p' = 0$ (fluid cu suprafață liberă), fie nu se impun condiții, ceea ce revine la a considera că la $z = H$ presiunea este cea calculată prin integrare numerică și deci perturbația de presiune se propagă și peste acest nivel.

Pe frontierele laterale $x = L/2$, $x = -L/2$ avem

$$p^* = w' = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x}(u', v', \theta') = 0 \quad (5.77)$$

unde p^* este cel considerat spre exemplu în Saito [1976], ca urmare a metodei lui Chorin.

În locul condiției folosite de Estoque $\frac{\partial p'}{\partial z} |_{x=\pm L/2} = 0$ vom introduce o condiție complet diferită, și anume, vom presupune o distribuție hidrostatică de presiune pe aceste frontiere, adică

$$\frac{\partial p'}{\partial z} \Big|_{z=\pm L/2} = g \left(\frac{p_s}{RT_s} - \frac{p}{RT_s} \right) \quad (5.78)$$

Este clar că ipoteza existenței nivelului h care separă cele două zone de fluid, în sensul precizat la început, presupune introducerea unor **condiții de racordare** pentru soluțiile celor două probleme.

Este evident că sunt necesare două tipuri distincte de condiții de racordare, după cum $Ri > -0.03$ sau $Ri \leq -0.03$.

a) În primul caz, mișcarea fiind mai apropiată de cea laminară, vom cere continuitatea vitezelor, temperaturii și a derivatelor lor verticale la trecerea frontierei $z = h$. Ținând cont de (5.65) și (5.66), se calculează soluția la nivelul h și se impun condițiile de continuitate cerute. De aici, notând cu $C(u') = 2z_0 \frac{\partial u'}{\partial z} \Big|_{z=z_0}$ avem, pentru $z > h$

$$\lim_{z \rightarrow h} u'(x, y, z, t) = u'(x, y, h, t) = u'(x, y, z_0, t) + \ln\left(\frac{h + z_0}{2z_0}\right) C(u') \quad (5.79)$$

$$\lim_{z \rightarrow h} \frac{\partial u'}{\partial z} = \frac{C(u')}{h + z_0}$$

și notînd $C(v') = 2z_0 \frac{\partial v'}{\partial z} \Big|_{z=z_0}$

$$\lim_{z \rightarrow h} v'(x, y, z, t) = v'(x, y, h, t) = v'(x, y, z_0, t) + \ln\left(\frac{h + z_0}{2z_0}\right) C(v') \quad (5.80)$$

$$\lim_{z \rightarrow h} \frac{\partial v'}{\partial z} = \frac{C(v')}{h + z_0}$$

Absolut analog pentru θ' avem

$$\lim_{z \rightarrow h} \theta'(x, y, z, t) = \theta'(x, y, h, t) = \theta'(z_0) + \ln\left(\frac{h + z_0}{2z_0}\right) C(\theta') \quad (5.81)$$

$$\lim_{z \rightarrow h} \frac{\partial \theta'}{\partial z} = \frac{C(\theta')}{h + z_0}$$

unde $C(\theta') = 2z_0 \frac{\partial \theta'}{\partial z} \Big|_{z=z_0}$.

b) În al doilea caz se folosește o schemă de racordare ce presupune extrapolarea ipotezelor de lucru din stratul $0 \leq z \leq h$ până la primul pas din domeniul superior, adică $h + \Delta z$. Se aproximează componenta verticală a gradientului de temperatură la $z = h$ prin

$$\frac{\partial \theta'}{\partial z} \Big|_{z=h} = \beta \frac{\theta'(x, h + \Delta z, t) - \theta'(x, 0, t)}{h + \Delta z} \quad (5.82)$$

β fiind o constantă empirică de proporționalitate (în calcule vom lua $\beta \simeq 1$). Folosind, ca și în cazul a), ecuațiile (5.65) și (5.67) obținem următoarele relații aproximative

$$\begin{aligned} \theta'(x, h, t) &= \frac{3\beta h^{4/3} [\theta'(x, h + \Delta z, t) - \theta'(x, 0, t)] [(h + \Delta z)^{-1/3} - h^{-1/3}]}{h + \Delta z} + \\ &\quad + \theta'(x, h + \Delta z, t) \\ (u', v')(x, h, t) &= \frac{3\beta h^{4/3} [(u', v')(x, h + \Delta z, t)] [(h + \Delta z)^{-1/3} - h^{-1/3}]}{h + \Delta z} + \\ &\quad + (u', v')(x, h + \Delta z, t) \\ K(x, h, t) &= \lambda \left(\frac{g\beta}{\bar{\theta}} \right)^{1/2} \left| \frac{\theta'(x, h + \Delta z, t) - \theta'(x, 0, t)}{h + \Delta z} \right|^{1/2} h^2 \end{aligned} \quad (5.83)$$

$\bar{\theta}$ este valoarea medie a lui θ' în stratul inferior.

Calcululele numerice vor fi făcute, în primul rând, considerând că atmosfera exterioară domeniului de interes este în repaos termodinamic, adică

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_s &= \mathbf{0}, \quad p_s = p_s(z), \\ \frac{dp_s}{dz} &= -\rho_s g = -\frac{p_s g}{RT_s} \\ \frac{dT_s}{dz} &= -\Gamma_s \end{aligned} \quad (5.84)$$

adică, practic, avem o atmosferă politropă dată de (vezi (1.11))

$$v_s = 0$$

$$T_s = T_s(0) - \Gamma z \simeq T_s(0) - 6.510 \cdot 10^{-3} z$$

$$p_s(z) = p_s(0) \left(1 - \frac{\Gamma}{T_s(0)} z\right)^{g/\Gamma R} \quad (5.85)$$

$$\rho_s(z) = \rho_s(0) \left(1 - \frac{\Gamma}{T_s(0)} z\right)^{(g/\Gamma R - 1)}$$

În aceste condiții sistemul (5.72) devine:

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + u' \frac{\partial u'}{\partial x} + w' \frac{\partial u'}{\partial z} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x} + f v' + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_1 \frac{\partial u'}{\partial z} \right)$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + u' \frac{\partial v'}{\partial x} + w' \frac{\partial v'}{\partial z} = -f v' + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_2 \frac{\partial v'}{\partial z} \right) \quad (5.86)$$

$$\frac{\partial w'}{\partial t} + u' \frac{\partial w'}{\partial x} + w' \frac{\partial w'}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_s}{\partial z} - g$$

$$\frac{\partial \theta'}{\partial t} + u' \frac{\partial \theta'}{\partial x} + w' \frac{\partial \theta'}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(K \frac{\partial \theta'}{\partial z} \right)$$

iar condițiile inițiale se precizează în raport cu (5.85).

Vom descrie pe scurt în cele ce urmează schema numerică și algoritmul atașat. Vom urmări tehnica folosită de Chorin [1968] cu precizarea făcută în introducerea la acest paragraf, privind calcul funcției $K(x, z, t)$.

Pentru prezentarea schemei numerice și a schemei logice, vom observa mai întâi că în transcrierea derivatelor în diferențe finite, derivatele de timp sunt înlocuite prin diferențe înainte, iar termenii de advecție prin diferențe înainte când viteza de advecție este negativă, și prin diferențe înapoi când este pozitivă.

Schema numerică pentru calculul lui v' și θ' este descrisă mai jos

$$\begin{aligned}
v'(t+1) &= v'(t) - \delta t \left(u' \frac{\partial v'}{\partial x} + w' \frac{\partial w'}{\partial z} + f u' + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{h-H} K(h) \frac{\partial v'}{\partial z} - \frac{H-z}{H-h} K(h) \frac{\partial^2 v'}{\partial z^2} \right) \\
\theta'(t+1) &= \theta'(t) - \delta t \left(u' \frac{\partial \theta'}{\partial x} + w' \frac{\partial \theta'}{\partial z} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{h-H} K(h) \frac{\partial \theta'}{\partial z} - \frac{H-z}{H-h} K(h) \frac{\partial^2 \theta'}{\partial z^2} \right)
\end{aligned} \tag{5.87}$$

Calculul lui u' și w' este efectuat în doi pași. Mai întâi se omit termenii care conțin $\nabla p'$ și se calculează vitezele fictive u^* și w^* după formulele

$$\begin{aligned}
u^*(t+1) &= u^*(t) - \delta t \left(u' \frac{\partial u'}{\partial x} + w' \frac{\partial u'}{\partial z} - f v' + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{h-H} K(h) \frac{\partial u'}{\partial z} - \frac{H-z}{H-h} K(h) \frac{\partial^2 u'}{\partial z^2} \right) \\
w^*(t+1) &= w^*(t) - \delta t \left(u' \frac{\partial w'}{\partial x} + w' \frac{\partial w'}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_s}{\partial z} + g \right)
\end{aligned} \tag{5.88}$$

Evident relațiile de mai sus se obțin din sistemul (5.86).

În continuare se reintroduc termenii $\nabla p'$ și utilizând și u^* , w^* se calculează u' și w'

$$\begin{aligned}
u'(t+1) &= u^*(t+1) - \frac{\delta t}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial z} \Big|_{t+1} \\
w'(t+1) &= w^*(t+1) - \frac{\delta t}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial z} \Big|_{t+1}
\end{aligned} \tag{5.89}$$

Acest mod de rezolvare permite utilizarea unui pas de timp, $\delta t = 3$ minute, în condițiile în care soluția rămâne stabilă.

Apare însă problema determinării câmpului de presiune p' la pasul de timp $t+1$. Aceasta se rezolvă, derivînd ecuațiile (5.89) în raport cu x și respectiv z și eliminând u' și w' cu ajutorul ecuației de continuitate. Rezultă ecuația de tip Poisson

$$\left(\frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p'}{\partial z^2}\right)_{t+1} = \frac{\rho}{\delta t} \left(\frac{\partial u''}{\partial x} + \frac{\partial w'}{\partial z}\right)_{t+1} \quad (5.90)$$

care este o ecuație de diagnoză pentru perturbația de presiune p' și se rezolvă cu condițiile pe frontieră date anterior.

Schemele logice ale programului principal și subrutinei de racordare a soluțiilor sunt prezentate în Anexa 4.

6. METODE NUMERICE PENTRU MODELE LA SCARĂ MARE

6.1 Noțiuni introductive

Utilizarea modelelor numerice pentru prognoza numerică a vremii implică rezolvarea unui sistem de ecuații cu derivate parțiale, nelinear. În general aceste ecuații descriu trei procese dinamice importante: advecția, ajustarea (modul cum câmpul vântului și câmpul masei se ajustează unul pe celălalt) și difuzia. Ne vom referi la rezolvarea ecuațiilor lineare, unidimensionale, care descriu aceste procese, prezentând abordările lui Riddaway [1990]. Folosim ecuațiile "shallow water" în care:

- a)-se ignoră rotația pământului;
- b)-nu avem mișcare în direcția y ;
- c)-nu avem variații în direcția y

Linearizând ecuațiile față de o stare de bază (u_0, H) constantă în spațiu și timp obținem:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u}{\partial x} = -g \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u_0 \frac{\partial h}{\partial x} = -H \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial h}{\partial x} \right)$$

unde u și h sunt perturbațiile pentru componenta vitezei în direcția x , și înălțimea suprafeței libere. Vom pune în evidență cele trei procese amintite mai sus.

Advecția

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial h}{\partial t} + u_0 \frac{\partial h}{\partial x} = 0$$

În general, ecuația de advecție linearizată unidimensională, poate fi scrisă astfel:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + u_0 \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

Ecuatia de advecție nelineară este:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + u \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$$

Ajustarea

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial h}{\partial t} + H \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

care se mai numește și ecuația undelor de gravitație linearizată și unidimensională.

Difuzia

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial h}{\partial x} \right)$$

Forma generală pentru ecuația de difuzie unidimensională (cu coeficient de difuzie constant K) este:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = K \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$$

Multe idei și tehnici folosite pentru rezolvarea acestor ecuații simplificate pot fi extinse pentru rezolvarea ecuațiilor primitive complete.

Cele mai utilizate metode sunt cele cu diferențe, dar și metodele spectrale sau cu element finit sunt de interes.

Problemele de meteorologie sunt cuprinse în una din cele trei categorii: *probleme cu valori pe frontieră*, *probleme cu valori inițiale* și *probleme cu valori proprii*.

a) Probleme cu valori pe frontieră

Problema este să determinăm F într-un domeniu D unde avem ecuație $L(F) = f$ și $B(F) = g$ pe frontieră. (L și B sunt operatori diferențiali).

$$L(F) = f \quad \text{în domeniul } D \quad B(F) = g \quad \text{pe frontieră}$$

Exemple tipice pentru această problemă, conduc la rezolvarea unor ecuații de tip *Helmholtz* sau *Poisson*.

b) Probleme cu valori inițiale

Acestea sunt probleme de prognoză, în care dorim să prognozăm comportarea unui sistem, cunoscând starea inițială. Aceasta se face rezolvând sistemul diferențial $L(F) = f$ în domeniul D cunoscând condițiile inițiale $I(F) = h$ și considerând că pe frontieră avem condițiile $B(F) = g$. În această

categorice sunt ecuația de advecție, ecuațiile undelor de gravitație și ecuația de difuzie.

c) Probleme cu valori proprii

Problema este să determinăm λ și F astfel încât $L(F) = \lambda M(F)$ să fie satisfăcută în domeniul D cu $B(F) = \lambda E(F)$ pe frontieră. Problema apare în studiile de instabilitate baroclină.

O altă variantă de clasificare derivă din forma ecuației lineare cu derivate parțiale de ordinul al doilea:

$$a \frac{\partial^2 F}{\partial \zeta^2} + 2b \frac{\partial^2 F}{\partial \zeta \partial \eta} + c \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} + 2d \frac{\partial F}{\partial \eta} + 2e \frac{\partial F}{\partial \eta} + fF = 0$$

Clasificarea se bazează pe proprietățile caracteristicilor ecuației. Vom găsi trei tipuri de ecuații:

| Tip | Caracteristici | Condiții | Exemple |
|------------|----------------|----------------|--------------------|
| hiperbolic | reale | $b^2 - ac > 0$ | ecuația undelor |
| parabolic | imaginare | $b^2 - ac < 0$ | ecuația de difuzie |
| eliptic | nu există | $b^2 - ac = 0$ | ecuația Poisson |

Tabelul 6.1 - Clasificarea ecuațiilor

Ecuațiile hiperbolice și parabolice sunt probleme cu valori inițiale, iar ecuația eliptică este o problemă cu condiții pe frontieră.

Vom considera un exemplu simplu pentru o problemă de evoluție unidimensională:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = H(F) \tag{6.1}$$

unde H este un operator spațial diferențial linear. Vom presupune că F este dat în $N+1$ puncte de grilă din domeniul nostru $0 \leq x \leq L$ și că există o condiție la frontieră corespunzătoare pentru F . dorim să vedem cum putem găsi numeric $\partial F / \partial t$ având date valorile F_j .

Calea cea mai uzuală este să exprimăm derivatele care apar în membrul drept al relației (6.1) ca diferențe între valorile în puncte de grilă ale lui F . Aceasta este tehnica cu diferențe, pe care o vom analiza mai târziu. Notăm că atunci când utilizăm această tehnică, nu se face nici o ipoteză asupra modului în care F variază între punctele de grilă.

O altă variantă de aproximare, este să dezvoltăm F într-o serie finită de $(N+1)$ funcții linear independente $e_m, m = m_1 \dots m_2$, unde $m_2 - m_1 = N$, astfel încât:

$$F = \sum_{m=m_1}^{m_2} F_m(t) e_m(x) \tag{6.2}$$

Această serie nu este o soluție exactă a sistemului de ecuații cu derivate parțiale. Deci când înlocuim (6.2) în (6.1) apare un reziduu R :

$$R = \sum_m \frac{dF_m}{dt} e_m - \sum_m F_m H(e_m)$$

Vom alege derivatele de timp $\frac{dF_m}{dt}$ minimizând R . O metodă este aproximația celor mai mici pătrate, pentru care trebuie să minimizăm:

$$I = \int R^2 dx$$

în raport cu derivatele de timp. Efectuând aceasta și rearanjând, rezultă:

$$\sum_l \frac{dF_l}{dt} \int e_m e_l dx = \sum_l F_l \int e_m H(e_l) dx, \quad m = m_1, \dots, m_2 \quad (6.3)$$

Această ecuație poate fi de asemenea obținută utilizând *metoda Galerkin* în care punem:

$$\int R \psi_i dx = 0 \quad i = 1, 2, \dots, N+1$$

unde ψ_i poate fi orice mulțime de funcții test linear independente. Dacă funcțiile pe care le-am folosit pentru dezvoltarea în serie le folosim ca funcții test, obținem (6.3). Întrucât funcțiile dezvoltării sunt cunoscute (6.2) acestea pot fi utilizate pentru a obține coeficienții dezvoltării F_m având date valorile în puncte de grilă F_j .

De asemenea integralele:

$$\int e_m e_l dx \quad \text{și} \quad \int e_m H(e_l) dx$$

din (6.3) pot fi calculate exact pentru toate valorile posibile ale lui m și l .

Deci (6.3) se reduce la un set de ecuații diferențiale ordinare cuplate, care poate fi rezolvat pentru $\frac{dF_m}{dt}$ cunoscând F_m .

Soluția completă este deci:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \sum_m \frac{dF_m}{dt} e_m$$

Această abordare se numește *tehnica Galerkin*. Pentru cazul când funcțiile dezvoltării sunt ortogonale, se ajunge la $(N+1)$ ecuații diferențiale ordinare necuplate, pentru coeficienții dezvoltării:

$$\frac{dF_m}{dt} = \sum_l F_l \int e_m H(e_l) dx \quad m = m_1, \dots, m_2$$

Un exemplu de astfel de abordare este *metoda spectrală* în care se utilizează o serie Fourier. În acest caz (6.2) devine:

$$F = \sum_{m=-M}^M F_m(t) e^{i \frac{2\pi}{L} m}$$

unde F_m sunt coeficienții Fourier complecși și $M = N/2$. În geometria sferică, este natural să folosim armonicile sferice.

Pentru metoda spectrală funcțiile dezvoltării sunt globale. O altă variantă este utilizarea unui set de funcții de dezvoltare care sunt numai local nenule, acestea fiind ideea de bază a metodei cu element finit. Cu această metodă, având încă un set de noduri (puncte de grilă) în care cunoaștem F_j , dar presupunem că variația lui F într-un element (o mulțime de noduri) poate fi descrisă de un polinom de grad mic, cu condiția ca să existe continuitate pentru F între elementele adiacente. Cel mai simplu caz este să presupunem o variație liniară a lui F pe un element care are numai două noduri (puncte finale), deci o fitare liniară. Atunci (6.2) devine:

$$F = \sum_{j=1}^{N+1} F_j(t) e_j(x)$$

unde F_j sunt valorile nodale și $e_j(x)$ sunt funcții "pălărie", vezi figura)

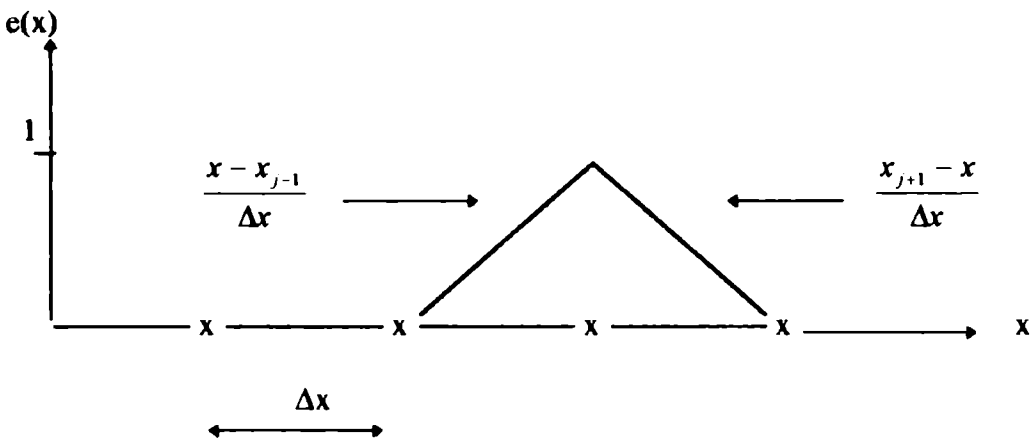


Fig.6.1 - Funcții "pălărie"

Funcțiile dezvoltării nu sunt ortogonale, dar sunt apropiate de cele ortogonale, deci integralele care apar în (6.3) pot fi evaluate cu ușurință. Rezultatul unui astfel de proces este un set de ecuații cuplate din care derivatele de timp pot fi determinate.

O caracteristică interesantă a *tehnicii Galerkin* este că dacă ecuația inițială (6.1) are un invariant pătratic (ex.energia):

$$\frac{\partial E}{\partial t} = 0 \quad \text{cu} \quad E = \int_0^L \frac{F^2}{2} dx$$

atunci această proprietate este păstrată când se face o *aproximație Galerkin* pentru variațiile spațiale (pe când diferențele finite nu garantează acest lucru).

Pentru a defini metodele cu diferențe finite, presupunem că avem un interval L care este acoperit cu $N + 1$ puncte de grilă echidistante.

Pasul de grilă este deci $\Delta x = L/N$ și punctele de grilă sunt $x_j = (j - 1)\Delta x$, $j = 1, 2, \dots, N + 1$. Notăm valoarea lui F în punctul x_j cu F_j .

Vom încerca să aproximăm valoarea derivatei într-un punct de grilă în funcție de valorile în puncte de grilă. Pentru aceasta vom folosi dezvoltările în serie Taylor:

$$F_{j+1} = F(x_j + \Delta x) = F_j + F'_j \Delta x + F''_j \frac{\Delta x^2}{2!} + F'''_{j, \theta_1} \frac{\Delta x^3}{3!} \quad (6.4)$$

$$F_{j-1} = F(x_j - \Delta x) = F_j - F'_j \Delta x + F''_j \frac{\Delta x^2}{2!} - F'''_{j, \theta_2} \frac{\Delta x^3}{3!} \quad (6.5)$$

Rezolvând (6.4) și (6.5) pentru F'_j obținem:

$$F'_j = \frac{F_{j+1} - F_j}{\Delta x} + E; \quad E = -F''_j \frac{\Delta x}{2!} - F'''_{j, \theta_1} \frac{\Delta x^2}{3!} \quad (6.6)$$

$$F'_j = \frac{F_j - F_{j-1}}{\Delta x} + E; \quad E = F''_j \frac{\Delta x}{2!} - F'''_{j, \theta_2} \frac{\Delta x^2}{3!} \quad (6.7)$$

Scăzând (6.5) din (6.4) rezultă:

$$F'_j = \frac{F_{j+1} - F_{j-1}}{2\Delta x} + E; \quad E = -\frac{\Delta x^2}{3!2} (F'''_{j, \theta_1} + F'''_{j, \theta_2}) \quad (6.8)$$

Neglijând E , aceste expresii dau aproximațiile înainte (6.6), înapoi (6.7) și centrate (6.8) pentru prima derivată.

Erroarea de trunchiere este dată de E și ordinul de aproximare este definit prin cea mai mică putere a lui Δx din E . Deci schemele înainte și înapoi sunt de ordinul întâi, iar schema centrată este de ordinul doi. Cu cât ordinul schemei este mai mare, cu atât precizia aproximației cu diferențe finite este mai mare.

Se poate dezvolta o schemă de ordinul patru, utilizând (6.4) și (6.5) cu dezvoltări pentru $F(x_j + 2\Delta x)$ și $F(x_j - 2\Delta x)$. Rezultă:

$$F'_j = \frac{4}{3} \left(\frac{F_{j+1} - F_{j-1}}{2\Delta x} \right) - \frac{1}{3} \left(\frac{F_{j+2} - F_{j-2}}{4\Delta x} \right) + O(\Delta x^4) \quad (6.9)$$

Aproximația uzuală pentru derivata a doua, din (6.4) și (6.5) este:

$$F_j'' = \frac{F_{j+1} - 2F_j + F_{j-1}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2) \quad (6.10)$$

Se poate ilustra precizia cu care aproximația cu diferențe finite reprezintă derivata unei funcții cunoscute. Presupunem $F(x) = R(e^{ikx})$ unde $k = 2\pi/L$ este numărul de undă și L este lungimea de undă.

Inlocuind F în (6.8) rezultă neglijând E :

$$F_j = \frac{e^{ik(x+\Delta x)} - e^{ik(x-\Delta x)}}{2\Delta x} = \frac{e^{ikx}}{2\Delta x} (e^{ik\Delta x} - e^{-ik\Delta x}) = ike^{ikx} \left(\frac{\sin k\Delta x}{k\Delta x} \right)$$

Deci aproximația cu diferențe finite este egală cu valoarea exactă multiplicată cu un factor de corecție C . Dacă lungimea de undă constă în l pași de grilă, avem $k = 2\pi/l\Delta x$ și factorul de corecție devine:

$$C = \frac{\sin q}{q} \quad q = \frac{2\pi}{l}$$

Calcululele similare pentru schema de ordinul patru arată ca:

$$C = \frac{4 \sin q}{3 q} - \frac{1 \sin 2q}{3 q}$$

Reprezentând C în funcție de l pentru aceste scheme se observă că sunt necesare aproape 10 puncte de grilă pentru a descrie cu precizie comportarea unei unde, iar undele mai scurte vor fi tratate prost. De asemenea se va vedea că schema de ordinul patru este mult mai precisă decât schema de ordinul doi. Acest lucru se poate ilustra examinând comportarea lui C pentru lungimi de undă mari (l mare, q mic). Utilizând dezvoltări în serie se obține:

$$\text{-ordinul doi} \quad C = 1 - \frac{q^2}{6} = 1 + O(q^2)$$

$$\text{-ordinul patru} \quad C = 1 - \frac{q^4}{30} = 1 + O(q^4)$$

Intrucât valoarea corectă a lui C este 1, aceasta arată că schemele de ordinul 2 și 4 au respectiv erori de ordinul 2 și 4. În general, dacă $C = 1 + O(q^n)$ se spune că schema este de ordinul n .

În final este de interes introducerea notației care este adesea utilizată pentru diferențe finite:

$$\delta_{mx} F_j = \frac{F_{j+m/2} - F_{j-m/2}}{m\Delta x}, \quad \overline{F}_j^{mx} = \frac{F_{j+m/2} + F_{j-m/2}}{2}$$

utilizând această notație (6.8) și (6.10) devin:

$$F_j' = \overline{\delta_x F_j}^x = \delta_{2x} F_j, \quad F_j'' = \delta_x^2 F_j$$

Diferențele finite pot fi utilizate pentru derivatele temporale, la fel ca și pentru derivatele spațiale, ceea ce înseamnă că vom reprezenta derivatele temporale în funcție de valorile la intervale discrete de timp. Dacă Δt este intervalul de timp (pasul de timp) atunci nivelurile de timp sunt date de $t_n = n\Delta t$ cu $n = 0, 1, \dots$. Acum valoarea lui F în punctul de grilă x_j la timpul t_n este dată de F_j^n .

Se utilizează diferențe înainte sau centrate:

$$(i) \quad \text{înainte} \quad \left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_j^n \rightarrow \frac{F_j^{n+1} - F_j^n}{\Delta t} + O(\Delta t)$$

$$(ii) \quad \text{centrate} \quad \left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_j^n \rightarrow \frac{F_j^{n+1} - F_j^{n-1}}{2\Delta t} + O(\Delta t^2)$$

Pentru a rezolva o problemă cu valori inițiale trebuie să transcriem ecuațiile cu derivate parțiale în forma cu diferențe finite. Vom construi un algoritm care să permită calculul valorilor lui F la nivelul de timp $(n+1)$ în funcție de valorile la niveluri de timp anterioare.

Ca exemplu vom considera ecuația de advecție cu diferențe în timp înainte și diferențe înapoi (upstream) spațiale.

$$\frac{F_j^{n+1} - F_j^n}{\Delta t} + u_0 \left(\frac{F_j^n - F_{j-1}^n}{\Delta x} \right) = 0; \quad u_0 > 0$$

Schema este de ordinul întâi în spațiu și timp.

Rezultă următorul algoritm de rezolvare:

$$F_j^{n+1} = F_j^n - \alpha (F_j^n - F_{j-1}^n); \quad \alpha = \frac{u_0 \Delta t}{\Delta x}$$

care este o schemă explicită.

Numai pentru că putem produce un algoritm pentru rezolvarea unei ecuații, nu înseamnă că utilizarea acestuia va produce soluții realiste. De exemplu, dacă utilizăm diferențe înainte în timp și diferențe centrate în spațiu pentru ecuația de advecție, obținem:

$$F_j^{n+1} = F_j^n - \frac{\alpha}{2} (F_{j+1}^n - F_{j-1}^n)$$

Accasta este o schemă explicită cu două niveluri, de ordinul întâi în timp și de ordinul doi în spațiu, care pare a fi rezonabilă pentru rezolvarea ecuației. Se poate arăta că acest algoritm are proprietatea ca diferența între soluția exactă și soluția numerică crește exponențial cu timpul și deci schema este instabilă.

Vom defini în continuare noțiunile de *convergență*, *consistență* și *stabilitate* și vom enunța o teoremă de legătură.

Convergența -o soluție a unei ecuații cu diferențe este convergentă, dacă aceasta tinde către soluția ecuației cu derivate parțiale corespunzătoare, când pasul de grilă și pasul de timp tind la zero. Dorim să asigurăm convergența, dar aceasta este dificil de făcut. Există o teoremă pentru aceasta, dar mai întâi trebuie să introducem două noi definiții.

Consistența -o schemă cu diferențe finite este consistentă cu o ecuație cu derivate parțiale dacă eroarea de trunchiere a ecuației cu diferențe finite tinde la zero când pasul de grilă și pasul de timp tind la zero.

Consistența este ușor de testat. Presupunând \bar{F}_j^n soluția adevărată a ecuației (6.1) în punctul x_j și timpul t_n . Această soluție este înlocuită în ecuația cu *diferențe finite și dezvoltările Taylor* utilizate pentru a exprima totul în funcție de comportarea lui \bar{F} la poziția x_j și timpul t_n . Rearanjând ecuația, rezultă:

$$\left. \frac{\partial \bar{F}}{\partial t} \right|_j^n = H(F)_j^n + E$$

Dacă eroarea de trunchiere E tinde la zero când pasul de grilă și pasul de timp tind la zero, schema este consistentă. În continuare, consistența va fi presupusă fără alte comentarii.

Stabilitatea -o schemă este stabilă dacă diferența dintre soluția exactă și soluția numerică a ecuației cu diferențe nu crește exponențial cu creșterea nivelului de timp.

Există mai multe tehnici pentru testarea stabilității.

Consistența și stabilitatea schemelor cu diferențe finite pot fi investigate, deci putem testa dacă schema este convergentă utilizând următoarea teoremă:

Teorema Lax-Richtmeyer

Dacă o schemă cu diferențe finite este consistentă și stabilă, atunci această schemă este convergentă. Reciproca este de asemenea adevărată.

6.2. Ecuația de advecție lineară

Ne vom ocupa mai întâi de ecuația de advecție lineară unidimensională:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + u_0 \frac{\partial F}{\partial x} = 0; \quad F = F(x, t), u_0 = \text{const.} \quad (6.11)$$

cu condițiile de frontieră ciclice:

$$F(0,t) = F(L,t)$$

și condițiile inițiale

$$F(x,0) = f(x)$$

Soluția analitică a ecuației (6.11) este cunoscută:

$$F(x,t) = f(x - u_0 t) \quad (6.12)$$

și exprimă faptul că perturbația inițială se translatează în direcția Ox (dacă $u_0 > 0$).

Considerând "energia" perturbației definită prin:

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L F^2 dx \quad (6.13)$$

vom deduce din ecuația (6.11) înmulțind cu F și integrând în raport cu x :

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -\frac{u_0}{2} \int_0^L \frac{\partial F^2}{\partial x} dx = -\frac{u_0}{2} (F^2) \Big|_0^L = 0 \quad \text{deci energia se conservă în timp.}$$

Vom reprezenta derivatele în funcție de valorile lui F în punctele de grilă x_j și la nivelurile de timp t_n , unde:

$$x_j = (j-1) \Delta x; \quad j = 1, 2, \dots, N+1; \quad \Delta x = L/N; \quad t_n = n\Delta t; \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

adică F_j^n reprezintă valoarea lui F în punctul x_j și la timpul t_n .

Vom folosi aproximația cu diferențe înainte pentru derivata temporală și cu diferențe înapoi (upstream) pentru derivata spațială:

$$F_j^{n+1} = F_j^n - \alpha \left(F_j^n - F_{j-1}^n \right); \quad \alpha = \frac{u_0 \Delta t}{\Delta x} \quad (6.14)$$

Rezultă deci că dispunând de datele lui F la nivelul de timp n , împreună cu condițiile de frontieră ciclice ($F_1^n = F_{N+1}^n$), ecuația (6.14) permite estimarea lui F la următorul nivel de timp.

Fracția α este numită numărul C.F.L. (după Courant, Freidrics și Levy) utilizat în analiza de stabilitate.

Vom încerca să demonstrăm convergența schemei, utilizând *teorema Lax-Richtmeyer*.

Întrucât schemele cu diferențe utilizate au fost construite astfel încât să fie consistente, rămâne să mai demonstrăm numai stabilitatea acestora. Pentru aceasta trebuie să considerăm comportarea erorilor inițiale și să examinăm dacă acestea cresc exponențial. Vom lua în considerare 2 metode:

a) *Metoda energiei*, în care schema este considerată instabilă dacă "energia" definită de (6.13) crește în timp;

b) *Metoda seriilor Fourier*, în care se studiază comportarea unei singure armonici. Stabilitatea tuturor armonicilor admisibile este o condiție necesară pentru stabilitatea schemei.

Am arătat mai înainte că, pentru ecuația de advecție lineară, energia $E(t)$ se conservă. Vom studia o cantitate analogă E^n definită:

$$E^n = \frac{1}{2} \sum_{j=2}^{N+1} (F_j^n)^2 \cdot \Delta x$$

Să studiem de exemplu stabilitatea schemei cu diferențe (6.14). Înmulțind cu $(F_j^{n+1} - F_j^n)$, substituind în membrul drept F_j^{n+1} și rearanjând termenii, rezultă:

$$(F_j^{n+1})^2 - (F_j^n)^2 = -\alpha \left[(F_j^n)^2 - (F_{j-1}^n)^2 \right] - \alpha(1-\alpha) (F_j^n - F_{j-1}^n)^2$$

Făcând suma pentru toate punctele de grilă și utilizând condiția de frontieră $F_1^n = F_{N+1}^n$, rezultă:

$$E^{n+1} - E^n = -\alpha(1-\alpha) \sum_{j=2}^{N+1} (F_j^n - F_{j-1}^n)^2 \Delta x$$

Pentru a preveni creșterea energiei, vom pune condițiile:

(i) $\alpha \geq 0$, ceea ce implică $u_0 \geq 0$

(ii) $(1-\alpha) \geq 0$, ceea ce conduce la $\alpha = \frac{u_0 \Delta t}{\Delta x} \leq 1$

Aceasta înseamnă că, având fixat un pas de grilă Δx , soluția este stabilă numai dacă alegem pasul de timp $\Delta t \leq \Delta x/u_0$.

Metoda seriilor Fourier a fost introdusă de John Neumann și în comparație cu metoda energiei este simplu de aplicat și permite o evaluare considerabilă a performanțelor diferitelor scheme.

Vom relua ecuația de advecție (6.11) cu condițiile inițiale de forma:

$$F(x,0) = f(x) = C_k e^{ikx}; \quad k = \frac{2\pi}{L} \cdot m$$

unde m este numărul de undă.

Soluția analitică este:

$$F(x,t) = C_k e^{ik(x - u_0 t)} \tag{6.15}$$

În continuare vom considera ecuația cu diferențe (6.14), cu condiția inițială de forma:

$$F_j^0 = C_k e^{ikx_j}$$

Soluția este dată de:

$$F_j^n = (\lambda_k)^n C_k e^{ikx_j} \quad (6.16)$$

unde λ_k este o cantitate complexă ce depinde de schema cu diferențe și numărul de undă k .

Considerând $\lambda_k = |\lambda_k| e^{i\theta}$ rezultă:

$$F_j^n = C_k |\lambda_k|^n e^{ik(x_j + \frac{n\theta}{k})} \quad (6.17)$$

Deci $|\lambda_k|$ dă partea de schimbare a amplitudinii pe pasul de timp și θ furnizează informații despre fază.

Comparând soluția schemei cu diferențe (6.17) cu soluția analitică (6.15) se pot pune în evidență următoarele:

(i) Stabilitatea schemei cu diferențe este asigurată dacă $|\lambda_k| \leq 1$ pentru toți k .

(ii) Schema numerică introduce o applatizare fictivă $D = |\lambda_k|$ la fiecare pas de timp; dacă $D = 1$ schema este neutră.

(iii) Viteza de fază a soluției numerice este $c = -\theta/k\Delta t$ și de regulă este diferită de u_0 . O măsură convenabilă pentru eroarea de fază este viteza de fază relativă $r = c/u_0$.

(iv) Întrucât viteza perturbației depinde de numărul de undă, apare o dispersie de calcul, ceea ce înseamnă că perturbația care are mai multe componente Fourier, nu își menține forma. Astfel spus viteza de grup

$$c_g = \frac{\partial}{\partial k}(kc) \text{ nu este identică cu viteza de fază.}$$

Pentru ecuații diferențiale cu coeficienți constanți, criteriul (i) de stabilitate este prea tare, deoarece sunt posibile creșteri exponențiale a soluțiilor realiste fizic. Ca urmare, criteriul de stabilitate poate fi scris:

$$|\lambda_k| \leq 1 + O(\Delta t)$$

ceea ce permite o creștere exponențială, dar nu rapidă a soluției. Dacă însă se cunoaște că soluția adevărată nu crește (ca în cazul ecuației de advecție), este necesar să ne asigurăm că $|\lambda_k| \leq 1$.

Revenind la ecuația cu diferențe (6.14), vom substitui conform relației (6.16), ceea ce conduce la evaluarea:

$$\lambda_k = 1 - \alpha(1 - \cos k\Delta x + i \sin k\Delta x)$$

și utilizând faptul că $\lambda_k \in \mathbb{C}$, rezultă:

$$|\lambda_1|^2 = 1 + 2\alpha(\alpha - 1)(1 - \cos k\Delta x)$$

Intrucât $1 - \cos k\Delta x \geq 0$, criteriul de stabilitate $|\lambda_1| \leq 1$ este satisfăcut numai dacă $\alpha(\alpha - 1) \leq 0$, ceea ce conduce la $u_0 \geq 0$ și $u_0\Delta t/\Delta x \leq 1$, același rezultat ca în cazul metodei energiei.

Se spune că schema cu diferențe analizată (6.14) este condițional stabilă.

Pentru a studia aplatizarea amplitudinii și erorile de fază, este convenabil să punem în evidență lungimile de undă de l pași de grilă. Numărul de undă k va fi înlocuit cu $2\pi/l\Delta x$. Se poate arăta că aplatizarea pe pasul de timp (D) și eroarea relativă de fază (r) au expresiile:

$$D = \sqrt{1 + 2\alpha(\alpha - 1)(1 - \cos q)}; \quad q = \frac{2\pi}{l} \quad (6.18)$$

$$r = -\frac{1}{\alpha q} \operatorname{arctg} \frac{\alpha \sin q}{\alpha(1 - \cos q) - 1} \quad (6.19)$$

În tabelul următor sunt prezentate valorile lui D și r pentru $l = 2, 3, 4, 6$ și 10

| Parametrii | l | 2 | 3 | 4 | 6 | 10 |
|---------------------------------|---|------|------|------|------|------|
| Aplatizarea (D) | | 0.00 | 0.50 | 0.71 | 0.87 | 0.95 |
| Eroare de fază relativă (r) | | 1.0 | 1.0 | 1.0 | 1.0 | 1.0 |

Tabelul 6.2 - Parametrii schemei cu diferențe "upstream", funcție de l .

Se remarcă acuratețea cu care schema reproduce viteza de fază (menționăm că $r < 1$ pentru $0 < \alpha < 0,5$ și $r > 1$ pentru $0,5 < \alpha < 1$), dar aplatizarea undelor cu lungime mică de undă este importantă.

Pentru ecuația de advecție (6.11) se pot folosi și alte scheme cu diferențe. Vom folosi aproximația cu diferențe înainte pentru derivata temporală și aproximația cu diferențe centrate pentru derivata spațială:

$$\frac{F_j^{n+1} - F_j^n}{\Delta t} + u_0 \frac{F_{j+1}^n - F_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0 \quad (6.20)$$

Folosind metoda scriilor Fourier se arată cu ușurință că:

$$|\lambda_k|^2 = 1 + \alpha^2 \sin^2 k\Delta x$$

Rezultă că $|\lambda_k| > 1$ întotdeauna și deci că schema este instabilă pentru toate valorile lui α și k , o astfel de schemă este absolut instabilă.

O altă schemă, care este extrem de mult folosită în problemele de meteorologie este schema "leap-frog". denumirea provine de la utilizarea

diferențelor centrate pentru derivatele de timp, împreună cu diferențele centrate pentru derivatele spațiale:

$$F_j^{n+1} = F_j^{n-1} - \alpha (F_{j+1}^n - F_{j-1}^n) \quad (6.21)$$

Aceasta este o schemă explicită cu trei niveluri, care este de ordinul al doilea în spațiu și timp.

Folosind tehnica seriilor Fourier pentru a testa stabilitatea schemei, se obține ecuația:

$$\lambda^2 + 2ip\lambda - 1 = 0 \quad , \text{ cu } p = -\alpha \sin k\Delta x$$

cu soluțiile:

$$\lambda = ip \pm \sqrt{1 - p^2}$$

Există deci două soluții pentru λ , ca o consecință a schemei cu 3 niveluri. În general o schemă cu m niveluri va avea $m-1$ soluții pentru λ , fiecare soluție este considerată un mod.

Se poate arăta că pentru unul din moduri $\lambda \rightarrow 1$ dacă $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$, acesta fiind considerat modul fizic. Celălalt mod nu are o semnificație fizică și este numit mod de calcul ($\lambda \rightarrow -1$ dacă $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$).

Dacă $|\alpha| \leq 1$, rezultă $|p| \leq 1$ și deci $\sqrt{1 - p^2}$ este real. În consecință $|\lambda| = 1$ pentru ambele moduri și deci schema este condițional stabilă și neutră.

Continuând analiza, se arată că pentru modul fizic rezultă:

$$r = -\frac{1}{\alpha q} \operatorname{arctg} \frac{-p}{\sqrt{1 - p^2}}; \quad p = -\alpha \sin q; \quad q = \frac{2\pi}{l}$$

în timp ce pentru modul de calcul viteza de fază este în direcție opusă cu u_0 ($r = -1$) și amplitudinea se schimbă la fiecare pas de timp.

În general soluția ecuației cu diferențe finite este o combinație a celor două moduri.

Schema leap-frog este foarte populară, deoarece este simplă, este de ordinul al doilea și este neutră, oricum există erori de fază și dispersie de calcul.

Pentru a starta o schemă leap-frog se obișnuiește să se folosească un pas de timp înainte și pentru a suprima separarea soluțiilor la pașii de timp pari și impari, se obișnuiește fie folosirea din când în când a unui pas de timp înainte, sau un filtru de timp.

O altă variantă a schemei leap-frog este aproximația semi-momentului. Pentru aceasta câmpul de vânt este netezit înainte de a înmulți derivata. Folosind notația din paragraful precedent, schema devine:

$$\overline{\delta_t F^i} = -\overline{u^x} \delta_x F^i$$

Pentru $u = u_0$ constantă, schema se reduce la (6.11).

Pentru a alege o schemă cu diferențe finite, să punem în evidență factorii care trebuie luați în considerare:

a) Este de dorit ca erorile de trunchiere să fie mici în spațiu și timp;

- b) Ideal se dorește ca erorile de fază și aplatizarea să fie mici, de regulă se face un compromis rezonabil;
- c) Avantajul schemelor explicite constă în ușurința de programare, dar ele sunt condițional stabile;
- d) Dacă schema are mai mult de 2 niveluri, apar moduri de calcul și posibila separare a soluțiilor, și de asemenea ocupă mai multă memorie de calculator.

6.3 Ecuația de advecție neliniară

În sistemul de ecuații primitive al dinamicii aerului, termenul de advecție este neliniar. Vom considera ecuația de advecție neliniară:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (6.22)$$

Soluția acestei ecuații cu condiția inițială, $u = f(x)$ este $u = f(x - ut)$ și reprezintă o ecuație implicită pentru variabila dependentă, u . Soluția reprezintă perturbația inițială, care se deplasează cu viteza u , fără să-și schimbe forma.

Proprietățile schemelor cu diferențe pentru ecuația de advecție neliniară, nu pot fi studiate cu tehnicile introduse în paragraful precedent pentru investigarea stabilității, a erorilor de fază și aplatizarea soluției pentru ecuația lineară. De aceea se vor folosi proprietățile integrale ale ecuației de advecției neliniară pentru a furniza indicații privind scheme cu diferențe finite.

Înmulțind (6.22) cu u și integrând pe întreg domeniul, cu condiții de frontieră ciclice, se obține:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = 0$$

unde E este energia cinetică totală. Rezultă deci că ar fi de dorit ca schema cu diferențe să conserve energia.

În continuare se va considera o formă a ecuației (6.22) în care este discretizat numai termenul de advecție. Pentru diferite scheme, se va examina:

$$\frac{\partial E'}{\partial t} \quad \text{unde} \quad E' = \frac{1}{2} \sum_j u_j^2 \cdot \Delta x$$

Pentru schema cu diferențe centrate:

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} = -u_j \cdot \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2\Delta x}$$

Înmulțind cu u_j și făcând suma pentru toate punctele, rezultă:

$$\frac{\partial E'}{\partial t} = -\frac{1}{2} \sum_j (u_j^2 \cdot u_{j+1} - u_j^2 \cdot u_{j-1})$$

În general suma nu se anulează, deci energia E' nu este conservată.

O altă schemă cu diferențe poate fi considerată, pornind de la ecuația (6.22) scrisă sub forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{c^2}{c^2} \left(\frac{u^2}{2} \right)$$

Discretizând operatorul de derivare în raport cu x :

$$\frac{\partial u_j}{\partial x} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{u_{j+1}^2 - u_{j-1}^2}{2\Delta x} = -\frac{u_{j+1} + u_{j-1}}{2} \cdot \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2}$$

Analiza acestei scheme arată încă odată că energia nu este conservativă. Se poate arăta însă că următoarea schemă conservă energia:

$$\frac{\partial u_j}{\partial x} = -\frac{u_{j+1} + u_j + u_{j-1}}{3} \cdot \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2\Delta x}$$

Aceasta sugerează că medierea poate furniza scheme care să conserve energia.

Interacțiunile neliniare în termenul de advecție pot produce o undă cu o lungime de undă prea mică pentru a fi reprezentată pe grila dată, astfel va fi reprezentată eronat ca o undă cu o lungime de undă mai mare.

Se consideră un domeniu de lungime care conține $N+1$ puncte de grilă echidistante $\Delta x (L = N \cdot \Delta x)$. Pe această grilă, cea mai scurtă undă ce poate fi pusă în evidență are o lungime de undă $\lambda_{\min} = 2\Delta x$, deci numărul de undă maxim l_{\max} este dat de:

$$l_{\max} = \frac{L}{\lambda_{\min}} = \frac{N}{2}$$

Se va arăta cum poate fi reprezentat pe această grilă produsul neliniar:

$$A = u(x) \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x} \tag{6.23}$$

Pentru aceasta, se va considera că u și Φ conțin numai componentele Fourier cu numerele de undă l_1 și l_2 , respectiv:

$$u(x) = \sin\left(\frac{2\pi}{L} l_1 x\right); \quad \Phi(x) = \sin\left(\frac{2\pi}{L} l_2 x\right); \quad x_j = (j-1)\Delta x$$

Inlocuind în (6.23) se obține:

$$A = \frac{\pi}{L} l_2 \left[\sin\frac{2\pi(l_1 + l_2)x}{L} + \sin\frac{2\pi(l_1 - l_2)x}{L} \right]$$

deci în evaluarea lui A apar contribuții ale numerelor de undă $l_1 + l_2$ și $l_1 - l_2$. Dacă aceste noi numere de undă sunt mai mici decât l_{\max} , reprezentarea lui A este corectă, dacă nu, produsul neliniar nu va fi bine reprezentat pe grilă.

Vom considera o undă cu numărul de undă $l > l_{\max}$ și vom studia reprezentarea pe grilă. Se observă că:

$$\sin\left(\frac{2\pi}{L} l x_j\right) = \sin\frac{2\pi(2l_{\max} - l)x_j}{L}$$

Deci nu este posibil să deosebim numerele de undă l și $l^* = 2l_{\max} - l$, adică dacă interacția neliniară conduce la un număr de undă $l > l_{\max}$, atunci acesta este reprezentat eronat.

După cum s-a arătat mai înainte, când două numere de undă l_1 și l_2 interacționează rezultând $l_1 + l_2$ care este mai mare decât l_{\max} , unda rezultată este reprezentată eronat ca având numărul de undă $l^* = 2l_{\max} - (l_1 + l_2)$. Dacă l^* este una din undele originare (de ex. l_1), rezultă:

$$2l_1 = 2l_{\max} - l_2 \quad (6.24)$$

Pentru a obține intervalul valorilor posibile pentru l_1 care satisfac (6.24), vom introduce valoarea maximă și valoarea minimă pe care le poate avea l_2 .

- (i) Valoarea maximă a lui l_2 este l_{\max} , deci $l_1 = l_{\max} / 2$ și $\lambda_1 = 4\Delta x$;
- (ii) Valoarea minimă a lui l_2 este 0, deci $l_1 = l_{\max}$, și $\lambda_1 = 2\Delta x$;

Deci dacă una din undele implicate în interacțiunea neliniară are o lungime de undă $2\Delta x \leq \lambda_1 \leq 4\Delta x$, se produce o canalizare a energiei către undele cu lungime mică de undă. Aceasta conduce la o creștere catastrofală a energiei cinetice a undelor de lungime de undă $2\Delta x$ față de cele de $4\Delta x$, acest proces este referit ca instabilitate neliniară. Notăm că și în situația în care undele cu lungimi de undă mai mici decât $4\Delta x$ nu sunt inițial prezente, interacțiunea neliniară le poate produce.

Vom evidenția o condiție necesară pentru instabilitate. În acest scop considerăm cazul semi-discretizat:

$$\frac{\partial \Phi_j}{\partial t} = -u(x_j) \frac{\Phi_{j+1} - \Phi_{j-1}}{2\Delta x} \quad (6.25)$$

Dacă $u(x_j) > 0$, aceasta se poate scrie:

$$\frac{1}{u_j} \frac{\partial \Phi_j}{\partial t} = - \frac{\Phi_{j+1} - \Phi_{j-1}}{2\Delta x}$$

Se definește energia ponderată E_w

$$E_w = \sum_j \frac{1}{u_j} \cdot \frac{\Phi_j^2}{2}$$

rezultă că:

$$\frac{\partial E_w}{\partial t} = - \frac{1}{2\Delta x} \left[\sum_j \Phi_j \Phi_{j+1} - \sum_j \Phi_j \Phi_{j-1} \right]$$

Dacă condițiile de frontieră sunt ciclice, avem:

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = 0$$

deci energia ponderată se conservă, adică la orice moment de timp t avem:

$$\sum_j \frac{1}{u_j} \frac{\Phi_j^2(t)}{2} = E \quad \text{energia inițială}$$

$$\sum_j \Phi_j^2(t) \leq \frac{2E}{M}$$

unde $M = \min(1/u_j)$ și deci soluția este mărginită.

Pentru a controla instabilitatea neliniară se elimină prin analiză Fourier undele cu o lungime de undă mai mică decât $4\Delta x$ și se utilizează operatori de aplatizare care reduc amplitudinea undelor de lungime de undă scurtă care au un efect mai mic față de undele meteorologice importante.

6.4 Ecuația de ajustare

Primele abordări în prognoza numerică utilizau aproximația geostrofică în ecuația turbionului, aceasta conducând la eliminarea undelor de gravitație. Pentru ecuațiile primitive ale dinamicii aerului, care sunt utilizate acum în mod curent, tratarea undelor de gravitație este extrem de importantă.

Vom relua ecuațiile unidimensionale lineare ale undelor de gravitație:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0 ; \quad \frac{\partial h}{\partial t} + H \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (6.26)$$

Căutăm soluții de forma:

$$u = \bar{u} e^{ik(x-ct)} ; \quad h = \bar{h} e^{ik(x-ct)} \quad (6.27)$$

și se obține viteza de fază pentru aceste unde:

$$c = \pm \sqrt{gH}$$

Rezultă deci 2 unde care se deplasează în direcții opuse pe axa Ox.

Vom arăta câteva moduri de rezolvare a sistemului de ecuații hiperbolice (6.26) utilizând scheme cu diferențe finite.

Folosind diferențele centrate în spațiu și timp vom obține schema explicită:

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} &= -g\delta h_j^n \\ \frac{h_j^{n+1} - h_j^{n-1}}{2\Delta t} &= -H\delta u_j^n \end{aligned} \quad (6.28)$$

unde δ reprezintă operatorul cu diferențe centrate spațial. Pentru a determina stabilitatea vom introduce:

$$u_j^n = \bar{u} \lambda^n e^{ikx} ; \quad h_j^n = \bar{h} \lambda^n e^{ikx}$$

și vom pune condiția ca $|\lambda| \leq 1$. Rezultă

$$\lambda^2 + 2ip\lambda - 1 = 0, \quad p = \sqrt{gH} \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin k\Delta x$$

și deci pentru a se asigura stabilitatea lineară de calcul:

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{\sqrt{gH}}$$

Dacă se folosesc diferențele înainte în timp și centrate în spațiu, se obțin:

$$|\lambda|^2 = 1 + gH \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \sin^2 k\Delta x$$

și deci schema este instabilă.

Se poate aborda o schemă implicită:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} = -g \frac{h_j^{n+1} - h_j^{n-1}}{2} \quad (6.29)$$

$$\frac{h_j^{n+1} - h_j^{n-1}}{2\Delta t} = -H \cdot \frac{\delta u_j^{n+1} - \delta u_j^{n-1}}{2} \quad (6.30)$$

Aplicând operatorul δ relației (6.29) și introducând: δu_j^{n+1} în (6.30) obținem:

$$gH\Delta t^2 \delta^2 h_j^{n+1} - h_j^{n-1} = F(h_j^{n-1}, u_j^{n-1}) \quad (6.31)$$

Intrucât membrul drept este o funcție cunoscută, (6.31) este o ecuație eliptică care poate fi rezolvată cu condiții de frontieră, iar u_j^{n+1} poate fi obținut similar.

Se poate arăta că schema este absolut stabilă și deci poate fi folosită la orice pas de timp.

Vom introduce și termenul de advecție pentru ca ecuațiile să exprime un fenomen mai realist.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial h}{\partial t} + u_0 \frac{\partial h}{\partial x} + H \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (6.32)$$

Inlocuind (6.27) în (6.32) obținem viteza de fază:

$$c = u_0 \pm \sqrt{gH}$$

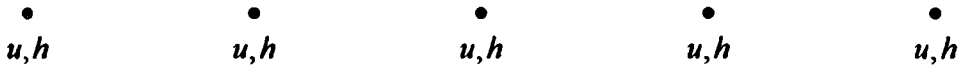
Dacă se utilizează schema leapfrog împreună cu diferențele centrate spațiale, criteriul de stabilitate devine:

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{u_0 + \sqrt{gH}}$$

Observăm că alegerea pasului de timp este în principal condiționată de viteza undelor de gravitație ($u_0 + \sqrt{gH}$).

Ne vom ocupa acum de modul cel mai avantajos în care sunt distribuite variabilele u și h pe grilă.

La început ne așteptăm ca u și h să fie distribuite în fiecare punct de grilă



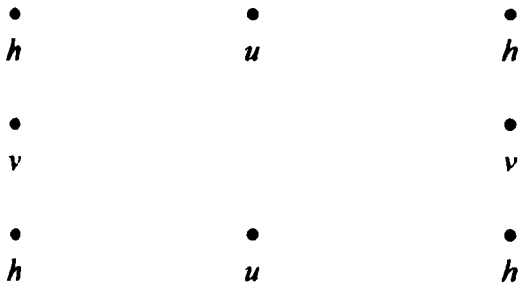
Examinând cu mai multă atenție, se remarcă faptul că, utilizând diferențele centrate, trebuie să separăm 2 grile. Aceasta înseamnă că soluțiile pe fiecare subgrilă devin decuplate. În consecință este necesar să calculăm una din soluții luând în considerare variabilele din cealaltă grilă.



Aceste idei pot fi extinse pentru problema bidimensională.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0 ; \quad \frac{\partial v}{\partial t} + g \frac{\partial h}{\partial y} = 0 ; \quad \frac{\partial h}{\partial t} + H \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0$$

Se pot folosi mai multe grile, dar cea mai convenabilă este grila Arakawa C.



La fel se poate raționa și pentru discretizarea în timp, un exemplu de astfel de grilă este grila Eliassen.

6.5 Metode spectrale

Vom prezenta o metodă spectrală pentru rezolvarea sistemului de ecuații ce caracterizează modelul barotrop (4.45).

Se lucrează într-un domeniu rectangular de dimensiuni L_x și L_y , punând în evidență numerele de undă:

$$k = \frac{2\pi}{L_x} \quad \text{și} \quad l = \frac{2\pi}{L_y}$$

Fie $Q(x, y, p, t) \in R$ o funcție care poate să reprezinte una din cele 3 funcții necunoscute din sistemul (4.45). Vom dezvolta această funcție în serie Fourier trunchiată atât în direcția x cât și în direcția y :

$$Q(x, y) = \sum_{m=-M}^M \sum_{n=-N}^N Q_m^n e^{imkx} e^{imly} \quad (6.33)$$

Trebuie remarcat faptul că în relația de mai sus s-a neglijat dependența mărimii Q de presiune și timp.

Obținerea transformatei Fourier bidimensionale (a coeficienților Fourier Q_m^n) se face prin aplicarea succesivă a transformatei după x , urmată de o transformată după y .

Astfel, aplicarea transformatei Fourier pe direcția x duce la reprezentarea:

$$Q(x, y) = \sum_{m=-M}^M Q_m(y) e^{imkx}$$

unde

$$Q_m(y) \in \mathbf{C},$$

$$\text{și } Q_m(y) = Q_{mr}(y) + iQ_{mi}(y), \quad Q_{mr}, \quad Q_{mi} \in \mathbf{R}$$

Deoarece $Q(x, y) \in R$, este valabilă egalitatea:

$$Q_m = Q_m^*$$

unde am notat cu $*$ conjugata.

Dezvoltarea ulterioară după y , duce la relația:

$$Q(x, y) = \sum_{m=-M}^M \sum_{n=-N}^N (Q_{mr}'' + Q_{mi}'') e^{imkx} e^{imly}$$

$$\text{unde } Q_{mr}'', Q_{mi}'' \in \mathbf{C},$$

ceea ce implică următoarea formă a coeficienților Fourier Q_{mr}'' , Q_{mi}''

$$Q_{mr}'' = Q_{mr}'' + iQ_{mi}''$$

$$Q_{mi}'' = Q_{mi}'' + iQ_{mr}''$$

Cu acestea, dezvoltarea (6.33) se scrie:

$$Q(x,y) = \sum_{m=-M}^M \sum_{n=-N}^N \left[Q_{mrr}^n + Q_{mri}^n + i (Q_{mri}^n + Q_{mrr}^n) \right] e^{imkx} e^{inly}$$

Vom indica modul de calcul al derivatelor în spațiul Fourier.

Dezvoltarea în serie dublă Fourier a derivatei $Q(x,y)$ în funcție de x este dată de relația formală:

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = \sum_{m=-M}^M \sum_{n=-N}^N \frac{\partial Q_m^n}{\partial x} e^{imkx} e^{inly}$$

unde coeficienții $\frac{\partial Q_m^n}{\partial x}$ ai dezvoltării derivatei $\frac{\partial Q}{\partial x}$ sunt mărimi complexe, având în consecință forma:

$$\frac{\partial Q_m^n}{\partial x} = \frac{\partial Q_{mrr}^n}{\partial x} - \frac{\partial Q_{mri}^n}{\partial x} + i \left(\frac{\partial Q_{mri}^n}{\partial x} + \frac{\partial Q_{mrr}^n}{\partial x} \right)$$

Coeficienții transformatei Fourier a $\frac{\partial Q}{\partial x}$ sunt dați de relațiile:

$$\frac{\partial Q_{mrr}^n}{\partial x} = -mkQ_{mrr}^n$$

$$\frac{\partial Q_{mri}^n}{\partial x} = -mkQ_{mri}^n$$

$$\frac{\partial Q_{mir}^n}{\partial x} = mkQ_{mir}^n$$

$$\frac{\partial Q_{mri}^n}{\partial x} = mkQ_{mri}^n$$

respectiv, pentru coeficienții transformatei Fourier a lui $\frac{\partial Q}{\partial y}$

$$\frac{\partial Q_{mri}^n}{\partial y} = -nlQ_{mri}^n$$

$$\frac{\partial Q_{mrr}^n}{\partial y} = nlQ_{mrr}^n$$

$$\frac{\partial Q_{mir}^n}{\partial y} = -nlQ_{mir}^n$$

$$\frac{\partial Q_{mri}^n}{\partial y} = nlQ_{mri}^n$$

Se remarcă faptul că există diferențe în calculul derivatelor pe direcția x sau y . Avantajul folosirii metodei spectrale este că aceste derivate sunt calculate exact.

Vom face, în continuare, câteva considerații asupra modului în care se poate face avansul temporal în spațiul bi-Fourier.

Considerăm $[E]$ vectorul de stare al modelului, unde:

$$[E] \in \{u, v, H\}, \quad \text{sau} \quad [E] \in \{u_m^n, v_m^n, H_m^n\}$$

Modelul poate fi scris astfel:

$$\frac{[E]' - [E]}{2\delta t} = D([E]) = L([E]) + R([E])$$

unde D este un operator complet neliniar, care poate fi împărțit în două părți: o parte liniară L (care este o matrice) și un rest neliniar R . Principiul schemelor semi-implicite este de a face:

$$\frac{[E]' - [E]}{2\delta t} = L\left(\frac{\gamma}{2}([E]' + [E]) - (1-\gamma)[E]\right) + R([E])$$

și notând cu I matricea unitate obținem:

$$\underbrace{\left(I - \frac{\gamma}{2}2\delta t L\right)}_{(1)} = \underbrace{[E]}_{(2)} + \underbrace{2\delta t L\left(\frac{1}{2}[E]' - [E]\right)}_{(3)}$$

- -termenul (1) este o matrice, pentru care este necesară inversa;
- -termenul (2) este o schemă explicită;
- -termenul (3) conține partea explicită a corecției semi-implicite;

Pentru $\gamma = 0$ obținem o schemă explicită, pentru $\gamma = 1$ una implicită. L descrie undele rapide (undele de gravitație).

Vom aplica rezultatele pentru modelul barotrop descris de ecuațiile (4.45).

$$\begin{aligned} \bar{u}_m^{n+1} &= u_m^n + 2\delta t S_{um}^n \\ \bar{v}_m^{n+1} &= v_m^n + 2\delta t S_{vm}^n \\ \bar{H}_m^{n+1} &= H_m^n + 2\delta t S_{Hm}^n \end{aligned}$$

După linearizare, sistemul de ecuații L poate fi scris:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial H}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial H}{\partial y}$$

$$\frac{\partial H}{\partial z} = -\bar{H}D$$

Următoarea schemă implicită:

$$u_m^{n+1} = \bar{u}_m^{n+1} - 2\delta t \gamma i m k \left[\frac{1}{2} (H_m^{n+1} + H_m^n) - H_m^n \right]$$

$$v_m^{n+1} = \bar{v}_m^{n+1} - 2\delta t \gamma i n l \left[\frac{1}{2} (H_m^{n+1} + H_m^n) - H_m^n \right]$$

$$H_m^{n+1} = \bar{H}_m^{n+1} - 2\delta t \gamma \bar{H} \left[\frac{1}{2} (D_m^{n+1} + D_m^n) - D_m^n \right]$$

Aceasta poate fi făcută în două etape:

- în prima etapă calculăm:

$$\bar{u}_m^{n+1*} = \bar{u}_m^{n+1} - 2\delta t \gamma i m k \left(\frac{1}{2} H_m^n - H_m^n \right)$$

$$\bar{v}_m^{n+1*} = \bar{v}_m^{n+1} - 2\delta t \gamma i n l \left(\frac{1}{2} H_m^n - H_m^n \right)$$

$$\bar{H}_m^{n+1*} = \bar{H}_m^{n+1} - 2\delta t \gamma \bar{H} \left[i m k \left(\frac{1}{2} u_m^n - u_m^n \right) + i n l \left(\frac{1}{2} v_m^n - v_m^n \right) \right]$$

- și în final, în a doua etapă:

$$u_m^{n+1} = \bar{u}_m^{n+1*} - 2\delta t \gamma i m k \frac{1}{2} H_m^{n+1}$$

$$v_m^{n+1} = \bar{v}_m^{n+1*} - 2\delta t \gamma i n l \frac{1}{2} H_m^{n+1}$$

$$H_m^{n+1} = \bar{H}_m^{n+1*} - 2\delta t \gamma \bar{H} \frac{1}{2} D_m^{n+1}$$

Din ultimele 3 relații rezultă:

$$H_m^{n+1} = \frac{\bar{H}_m^{n+1*} - 2\delta t \gamma \bar{H} \frac{1}{2} \bar{D}_m^{n+1*}}{1 + (2\delta t)^2 \gamma^2 \bar{H} (m^2 k^2 + n^2 l^2) \frac{1}{4}}$$

După calculul lui H_m^{n+1} , u_m^{n+1} și v_m^{n+1} valorile pot fi ușor estimate din ecuațiile precedente.

6.6 Ecuații eliptice

Modelele cu ecuații filtrate, conduc la rezolvarea unor ecuații cu derivate parțiale de ordinul al doilea de tip eliptic. Ne vom ocupa de rezolvarea ecuațiilor de tip Poisson și Helmholtz cu metoda Jacobi optimă Pescaru [1978].

Considerăm ecuația Poisson pe un domeniu D cu frontiera C discretizată pentru o rețea pătratică de puncte de grilă de forma:

$$\nabla^2 u_{ij} = -f_{ij} \quad (x_i, y_j) \in D \quad (6.34)$$

și condiția de frontieră

$$u_{ij} = g_{ij} \quad (x_i, y_j) \in C$$

În mod analog ecuația Helmholtz este de forma:

$$(\nabla^2 - q)u_{ij} = -f_{ij} \quad (x_i, y_j) \in D \quad (6.35)$$

cu aceeași condiție de frontieră.

Vom rescrie sistemul de $m = I \times J$ ecuații lineare (6.34) sub forma:

$$AU = B$$

Presupunem că A este o matrice reală nesingulară de dimensiune $m \times m$, având valori proprii strict pozitive. Propunem următoarea schemă de iterație:

$$U^{(\nu)} = U^{(\nu-1)} + p_\nu R^{(\nu-1)}; \quad \nu = 1, 2, \dots, n \quad (6.36)$$

în care am notat reziduul:

$$R^{(\nu-1)} = AU^{(\nu-1)} - B$$

iar valorile p_ν sunt constante în timpul unei iterații.

Notăm vectorul de eroare, după cea de-a $(\nu - 1)$ -a iterație:

$$\varepsilon^{\nu-1} = U - U^{(\nu-1)}$$

Din (6.36) rezultă:

$$\varepsilon^\nu = (I + p_\nu A)\varepsilon^{\nu-1}$$

Vom calcula pătratul vectorului de eroare:

$$(\varepsilon^v)' \varepsilon^v = (\varepsilon^{v-1})' (I + p_v A') (I + p_v A) \varepsilon^{v-1} = \frac{(\varepsilon^{v-1})' (I + p_v A') (I + p_v A) \varepsilon^{v-1}}{(\varepsilon^{v-1})' \varepsilon^{v-1}}$$

Această expresie are ca maxim valoarea proprie maximă a matricei simetrice $(I + p_v A') (I + p_v A)$, deci:

$$(\varepsilon^v)' \varepsilon^v \leq \lambda_{\max} \left[(I + p_v A') (I + p_v A) \right] (\varepsilon^{v-1})' \varepsilon^{v-1}$$

iar după n iterații:

$$\frac{(\varepsilon^n)' \varepsilon^n}{(\varepsilon^0)' \varepsilon^0} \leq \prod_{v=1}^n \lambda_{\max} \left[(I + p_v A') (I + p_v A) \right]$$

În membrul stâng al acestei relații avem pătratul erorii medii pătratice a vectorului soluției la iterația n , raportat la aproximația inițială. Printr-o alegere corespunzătoare a valorilor p_v , acest raport va fi minimizat.

Considerând matricea A simetrică rezultă:

$$(\varepsilon^v)' \varepsilon^v \leq \lambda_{\max} \left[(I + p_v A)^2 \right] (\varepsilon^{v-1})' \varepsilon^{v-1} = \lambda_{\max} \left[I + p_v A \right] (\varepsilon^{v-1})' \varepsilon^{v-1}$$

adică

$$(\varepsilon^v)' \varepsilon^v \leq \text{Max} \left(1 + p_v \lambda [A] \right)^2 (\varepsilon^{v-1})' \varepsilon^{v-1}$$

pentru toate valorile proprii $\lambda [A]$ ale matricii A , sau:

$$\frac{(RMS)_n}{(RMS)_0} \leq \text{Max} \left[\prod_{v=1}^n \left(1 + p_v \lambda [A] \right) \right] \text{ pentru toți } \lambda [A].$$

Prin minimizarea membrului drept al relației de mai sus, rezultatul devine optim.

În cazul în care toate valorile proprii $\lambda_{\mu} [A]$, $\mu = 1, 2, \dots, n \leq m$ ar fi cunoscute, putem considera $(RMS)_n$ nul luând:

$$p_{\mu} = -\frac{1}{\lambda_{\mu} [A]}$$

pentru toate valorile proprii $\lambda_{\mu} [A]$ diferite între ele.

De regulă se cunoaște doar intervalul în care aceste valori se găsesc:

$$0 < a \leq \lambda_{\mu} \leq b$$

De aceea se pune problema să se determine n constante p_ν în așa fel încât maximul valorii polinomului:

$$P_n(x) = \prod_{\nu=1}^n (1 + p_\nu x)$$

să fie cât mai mic în intervalul $[a, b]$.

Aceasta se realizează când valorile $-\frac{1}{p_\nu}$ sunt cele n zerouri ale polinomului lui Cebîșev:

$$P_n(x) = T_n \left[\frac{2x - (b+a)}{b-a} \right]$$

unde am făcut o transformare afină pentru a aplica intervalul $[-1, 1]$ în intervalul $[a, b]$. Notând cu y_ν zerourile polinomului lui Cebîșev $T_n(y)$, obținem:

$$-\frac{1}{p_\nu} = \frac{1}{2} \left[(b+a) + y_\nu (b-a) \right]$$

Această relație nu permite estimarea constantelor p_ν pentru schema de iterație (6.36). În cazul în care matricea A nu este simetrică problema poate fi rezolvată multiplicând A cu matrice convenabil alese, astfel încât rezultatul să fie o matrice simetrică.

Reluăm sistemul de ecuații asociat ecuației Poisson scris sub forma (6.34). Considerăm reziduul la pasul de iterație ν .

$$\nabla^2 u^{(\nu)} + f = R^{(\nu)}$$

și la pasul $\nu + 1$:

$$\nabla^2 u^{(\nu+1)} + f = R^{(\nu+1)}$$

Folosind o schemă de iterație de forma (6.36) rezultă:

$$\nabla^2 u^{(\nu)} + p_\nu \nabla^2 R^{(\nu)} + f = R^{(\nu+1)}$$

și (ținând cont și de definiția valorilor proprii λ_ν pentru operatorul lui Laplace:

$$\nabla^2 R^{(\nu)} = -\lambda_\nu R^{(\nu)}$$

rezultă:

$$R^{(\nu+1)} = R^{(\nu)} (1 - p_\nu \lambda_\nu)$$

Pentru ca reziduul să tindă la zero, trebuie să alegem:

$$p_\nu = \frac{1}{\lambda_\nu}$$

Vom face aceleași considerații și pentru ecuația Helmholtz scrisă sub forma (6.35). Scriem reziduul la pasul de iterație ν :

$$\nabla^2 u^{(\nu)} - qu^{(\nu)} + f = R^{(\nu)}$$

și la pasul de iterație $\nu + 1$.

$$\nabla^2 u^{(\nu+1)} - qu^{(\nu+1)} + f = R^{(\nu+1)}$$

Vom utiliza schema de iterație (6.36):

$$\nabla^2 u^{(\nu)} + p_\nu \nabla^2 R^{(\nu)} - qu^{(\nu)} - qp_\nu R^{(\nu)} + f = R^{(\nu+1)}$$

Rezultă:

$$R^{(\nu+1)} = R^{(\nu)} \left[1 - p_\nu (\lambda_\nu + q) \right]$$

Pentru ca reziduul să tindă la zero, vom alege:

$$p_\nu = \frac{1}{\lambda_\nu + q}$$

Cu aceste scheme se pot realiza rutine de rezolvare a ecuațiilor de tip Poisson și Helmholtz extrem de eficiente.

Rezultatele se pot extinde pentru rezolvarea unor sisteme cuplate de ecuații de tip Helmholtz Pescaru [1978].

Aceste metode, alături de metodele clasice de tip Jacobi, Gauss-Seidel etc. Isaacson E., Keller H.B.[1967] pot fi utilizate în rezolvarea problemelor de prognoză numerică.

A. ANEXE

A1. Câteva complemente de termodinamică

Inegalitatea disipării și Principiul determinismului termodinamic

Încă din secolul al XIX - lea (Clausius 1822- 1888) lumea științifică a " simțit " că ar trebui să existe corpuri (și anumite procese termocinetice pentru ele) care să sufere în timp " deformări " termomecanice ireversibile. Ireversibile, în sensul de a nu exista alte procese în timpul cărora corpul să poată reveni la starea sa inițială. Desigur aceste fapte, la început mai mult intuitive, au căpătat, în timp, forme matematice dintre cele mai variate. Faptul care , odată cu adâncirea studiului experimental și cu aprofundarea justificărilor matematice, a devenit o certitudine, era acela că în afara principiilor de bilanț trebuie introdus și un principiu al disipării (al pierderilor irecuperabile). Această " certitudine " empirică a căpătat un suport deosebit odată cu teoria lui Gibbs (1839-1903) care a demonstrat afirmația celebră privitoare la stările unui sistem mare de puncte materiale (în "Elementary Principles of Statistical Mechanics developed with special references to the Rational Foundations of Thermodynamics"- 1901): " Dacă o mulțime de sisteme este canonic distribuită în fază, indexul mediu al probabilităților este mai mic decât în orice altă distribuție a mulțimii, având aceeași medie a energiei " .

Același principiu al lui Gibbs capătă în cadrul Teoriei Cinetice a Gazelor (a lui Boltzmann și Maxwell) forma neașteptatei H- teoreme (" Dintre toate densitățile moleculare ce au același moment principal, densitatea Maxwelliană realizează pentru entropia h, cea mai mică valoare ").

Dacă toate aceste teoreme provenite din teorii discrete susțineau axiomatic și matematic adevărul privitor la " acele pierderi irecuperabile ", totuși la nivelul Termodinamicii Continuumului, asemenea rezultate nu puteau fi demonstrate.

Atunci, vechea afirmație a lui Clausius, privind energia și entropia Universului (" Energia Universului este constantă; entropia sa tinde la un maximum " , 1865) a început să capete valențe noi. Reluată și completată sub forma așa- zisei " inegalități Clausius- Planck" (Planck 1858- 1947)

$$T(t)\dot{\mathcal{H}}(B, t) \geq Q(B, t) \quad (A.1)$$

ea a fost multă vreme exprimarea matematică globală a Axiomei de ireversibilitate (sau a doua Lege a termodinamicii). La o privire mai atentă, inegalitatea C- P nu rezistă criticilor, căci dacă în privința entropiei H și încălzirii Q lucrurile sunt clare (ele sunt niște mărimi atașate corpului B la momentul t), totuși în privința temperaturii T apare o ambiguitate. Ea este în mod firesc atașată particulei și nu corpului. Deci undeva ar trebui să se presupună că, eventual, câmpul de temperatură este omogen în corp (!). Urmare, ea (inegalitatea) este neaplicabilă sistemelor neomogene (proceselor neomogene). Cu suport în Teoria Cinetică, s-a introdus ca formă alternativă a acestui principiu, așa zisa ” inegalitate a băii de căldură ”

$$\dot{\mathcal{H}}(B, t) \geq - \int_{\partial B} \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}}{T_f(t)} dA$$

unde se presupune ca T_f este temperatura frontierei corpului și că aceasta este uniformă (în punctele frontierei).

Este momentul să observăm că această formă a axiomei redă matematic o remarcă (vezi Truesdell [1969]) universal acceptată ” lucrul și energia pot totdeauna să fie transformate în căldură (prima axiomă a Termodinamicii) dar există o limită pentru viteza de transformare a energiei în căldură, fără producere de lucru ”

$$\dot{U} - W \equiv Q \leq \mathcal{L} \tag{A.2}$$

unde \mathcal{L} este limita menționată mai sus. Definind entropia produsă în procesul de la t_0 la t prin

$$\mathcal{H}(t_0, t) \equiv \int_{t_0}^t \frac{\mathcal{L}(t)}{T(t)} dt \tag{A.3}$$

inegalitatea lui Clausius- Planck devine evidentă.

Trebuie spus în același timp că faimoasa inegalitate a lui Clausius $\dot{\mathcal{H}}(t) \geq 0$, care este echivalentă cu o formă a H- teoremei (numită H- teorema redusă) nu este valabilă decât în cazul sistemelor (continue sau nu) care sunt astfel încât

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} \leq 0 \text{ pe } \partial B_t$$

sau

$$\int_{\partial B_t} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dA \leq 0$$

și T_f uniformă pe $\partial\mathcal{B}_t$ (spre exemplu când sistemul este închis). Se poate spune că ea este perfect adevărată în cazul Universului (sistem închis) dar ridică mari probleme când dorim s-o aplicăm unor corpuri oarecari din Universul însuși.

Cu observațiile de mai sus, acest mod global de a privi lucrurile cât și remarca privind temperatura (făcută în legătură cu inegalitatea (A.1)) conduc la ceea ce se poate numi o Termodinamică a proceselor ireversibile, omogene.

În aceasta, procesul termocinetic este definit ca perechea de funcții (T, \mathbf{r}) care asociază unui corp dat o temperatură T și un ansamblu de "parametrii de stare" $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n)$ la fiecare moment de timp dat

$$T = T(t) > 0, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}(t) \tag{A.4}$$

(în construcție se mai poate presupune că (T, \mathbf{r}) este neted pe porțiuni).

Nu comentăm aici diverse aspecte legate de regularitatea proceselor. Pentru aceasta trimitem la literatura citată. Am amintit în paragraful 1.1. că starea corpului este descrisă de cunoașterea, la fiecare moment de timp, a puterii \mathcal{W} , a încălzirii \mathcal{Q} , energiei interne \mathcal{U} și a entropiei \mathcal{H} . Ca urmare a observațiilor făcute mai sus, nu orice set de astfel de funcții de timp descriu (din punct de vedere Termodinamic) un corp \mathcal{B} . Conținutul acestei observații este transcris matematic prin ceea ce se numește **Axioma Constitutivă**. Ea arată pe de o parte, că funcțiile mai sus amintite sunt determinate de cunoașterea valorilor unor funcționale pe istoria procesului termocinetic la care a fost supus corpul până la momentul t și, pe de altă parte, că aceste funcționale trebuie să verifice axiomele termodinamicii, adică $(2)_1$ și (1) pe orice proces termocinetic. Un corp pentru care s-au definit funcționalele respective și care verifică $(2)_1$ și (1) se va numi un corp termodinamic.

Axioma constitutivă. Pentru un corp \mathcal{B} , există funcționalele $\overline{\mathcal{W}}, \overline{\mathcal{Q}}, \overline{\mathcal{U}}, \overline{\mathcal{H}}$, astfel încât la fiecare moment t

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(t) &= \overline{\mathcal{W}}(T^t, \mathbf{r}^t) \\ \mathcal{Q}(t) &= \overline{\mathcal{Q}}(T^t, \mathbf{r}^t) \\ \mathcal{U}(t) &= \overline{\mathcal{U}}(T^t, \mathbf{r}^t) \\ \mathcal{H}(t) &= \overline{\mathcal{H}}(T^t, \mathbf{r}^t) \end{aligned} \tag{A.5}$$

iar relațiile $(A.2)_1, (A.1)$ sunt satisfăcute pe orice proces termocinetic.

Din necesități ce sunt mai clare (poate) odată cu introducerea proceselor neomogene, dar care sunt complet justificate, de fapt, prin teoremele de potențialitate

ale lui Reech, din termodinamica proceselor reversibile și omogene (vezi Truesdell și Bharatha [1978]) se introduce energia liberă a lui Hemholtz (în locul energiei interne U) Ψ prin

$$\Psi(t) \equiv \mathcal{U}(t) - T(t)\mathcal{H}(t) \quad (\text{A.6})$$

Dacă vom da entropiei \mathcal{H} interpretarea (din teoriile microscopice) de măsură a "dezordinii interne" a corpului atunci energia liberă poate fi interpretată ca dând acea parte a energiei interne ce nu este datorată dezordinii proprii sistemului (ea este interpretată și ca aceea parte a energiei interne consumată pentru învingerea frecărilor interne).

Cu (A.6) și ținând cont de (A.2)₁, inegalitatea disipării se scrie

$$\dot{\Psi}(t) - \mathcal{W}(t) + \dot{T}(t)\mathcal{H}(t) \leq 0 \quad (\text{A.7})$$

formă sub care se numește "inegalitatea redusă a disipării".

În acest fel **Axioma constitutivă** capătă o nouă formă, cunoscută ca "**Principiul Efectiv al Determinismului Termodinamic**" și anume

Pentru un corp dat \mathcal{B} , există funcționalele \overline{W} , $\overline{\Psi}$, \overline{H} , astfel încât pentru orice moment de timp t

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(t) &= \overline{W}(T^t, \mathbf{r}^t) \\ \Psi(t) &= \overline{\Psi}(T^t, \mathbf{r}^t) \\ \mathcal{H}(t) &= \overline{H}(T^t, \mathbf{r}^t) \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

iar inegalitatea (A.7) este satisfăcută pe istoriile oricărui proces termocinetic, cu condiția ca \dot{T} și $\dot{\Psi}$ să existe.

Funcționalele \overline{W} , $\overline{\Psi}$, \overline{H} ce satisfac PEDT se vor numi **funcționalele constitutive** ale corpului termodinamic \mathcal{B} .

Deci un corp termodinamic definește o regulă prin care se determină puterea (prezentă), energia liberă (prezentă) și entropia (prezentă) din istoria procesului termocinetic la care a fost supus corpul, astfel încât inegalitatea redusă a disipării este satisfăcută pe orice proces. Reciproc, orice astfel de regulă definește un corp termodinamic.

Acum vedem că este ceva mai explicit contextul în care este descrisă **Termodinamica Proceselor Ireversibile, Neomogene** din Capitolul 1.1. Se va vedea

clar că dacă toate mărimile constitutive \mathcal{U} , \mathcal{W} , \mathcal{Q} , \mathcal{H} pot fi interpretate local prin relații de tipul (1.1), localizarea inegalității lui Clausius-Planck nu mai este posibilă (în contextul Termodinamicii proceselor neomogene temperatura este un câmp și deci observația făcută după relația (5.1) se justifică complet).

Totuși având în vedere definițiile lui \mathcal{Q} (a se vedea (1.1)₃) se postulează că **inegalitatea globală a disipării are**, în acest caz, forma

$$\dot{\mathcal{H}}(\mathcal{B}, t) \geq \int_{\partial\mathcal{B}_t} \rho \frac{s}{T} dA - \int_{\partial\mathcal{B}_t} \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}}{T} dA \quad (\text{A.9})$$

formă cunoscută ca **inegalitatea lui Clausius și Duhem (globală)**.

Aceasta se poate scrie imediat, local, în forma (1.7) sau (cu introducerea energiei libere a lui Helmholtz și utilizarea ecuației (1.6) în forma redusă (1.9).

Obținem astfel ceea ce se numește în literatură **Principiul Efectiv al Determinismului Termodinamic** (care este de fapt Axioma fundamentală a termodinamicii mediilor continue) și care acum se enunță simplu

Pentru un corp dat \mathcal{B} , există funcționalele \bar{T} , $\bar{\psi}$, \bar{w} , $\bar{\eta}$, astfel încât pentru orice particulă \mathbf{X} și la orice moment de timp t

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) &= \bar{\mathbf{T}}(\chi^t, T^t) \\ \psi(\mathbf{x}, t) &= \bar{\psi}(\chi^t, T^t) \\ \mathbf{q}(\mathbf{x}, t) &= \bar{\mathbf{q}}(\chi^t, T^t) \\ \eta(\mathbf{x}, t) &= \bar{\eta}(\chi^t, T^t) \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

iar inegalitatea redusă (1.9) este satisfăcută pe istoriile oricărui proces termocinetice, cu condiția ca $\bar{\psi}$ și \bar{T} să existe.

Să observăm că aici s-a utilizat deja faptul (menționat și în Capitolul (1.1)) că ecuațiile de bilanț ale impulsului și energiei se presupun satisfăcute prin alegerea corespunzătoare a câmpurilor de "surse" din cele două (adică forțele volumice $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$ și sursele volumice de căldură $s(\mathbf{x}, t)$). Se pot face o seamă de comentarii asupra posibilității unor asemenea alegeri (vezi Truesdell [1969] și Müller [1985] spre exemplu). Am menționat deja alte variante posibile. Ele nu conduc la rezultate diferite.

Probabil că acest ultim pas făcut în organizarea rațională a Termodinamicii Mediilor Continue este și cel mai important prin consecințe. Definitivată în anii 1950- 1960 de Coleman, Gurtin, Owen, Serrin, etc. această formă logică de prezentare a condus (vezi literatura citată) la obținerea unor rezultate deosebit

de importante, în caracterizarea unor clase largi de materiale (din punct de vedere termodinamic) și la obținerea unor legi constitutive noi, etc.

Acestea ar face obiectul unei **Prime Probleme**(fundamentale) a **Termodinamicii**: *Pentru o clasă dată de procese și o clasă dată de funcționale să se determine toate funcționalele constitutive.* Aceasta revine la utilizarea unor tehnici matematice dintre cele mai variate pentru obținerea (din inegalitatea lui Clausius și Duhem) restricțiilor constitutive (și deci descrierea clasei-funcționalelor constitutive).

O a doua problemă importantă este: *descrierea echilibrului termodinamic și a trecerii la echilibru.* O dată cu aceasta, ca un corolar este problema deducerii principiilor termostaticii pentru o clasă dată de corpuri termodinamice.

Intr-adevar, obținerea teoremelor de potențialitate de care am amintit reprezintă suportul legăturii între T.P.I.N. și Termodinamica proceselor omogene reversibile (acestea din urmă dând suportul teoretic al majorității experimentelor (controlabile) de laborator).

Subliniem că abia după ce primele două probleme își găsesc răspuns, poate fi abordată cea de-a treia problemă importantă (aplicarea): *dată acțiunea lumii înconjurătoare asupra unui corp specificat, să se determine procesul pe care trebuie să-l efectueze corpul pentru a suporta acțiunea.* Aceasta revine deci la scrierea și rezolvarea unor probleme cu date inițiale și la limită, analiza stabilității soluțiilor,etc. Se dovedește că restricțiile constitutive obținute, produc informații extrem de utile în abordarea matematică a acestor probleme. Este exact ceea ce cursul prezent își propune să facă.

Incheiem prin a observa că inegalitatea lui Clausius și Duhem intră într-o contra - dicție flagrantă cu H- Teorema lui Boltzmann (pentru anumite clase de materiale). Aceasta a condus la modificarea inegalității (vezi I. Müller [1967] pentru modificarea fluxului de entropie) pe de o parte, și la introducerea unor așa numite **termodinamici extinse**, pe de altă parte (introducerea lor fiind sugerată tot de teoriile microscopice).

A2. Complemente de calcul vectorial și tensorial

În cuprinsul lucrării se notează cu \mathcal{E} - spațiul euclidian punctual (afin) tridimensional, cu \mathcal{V} spațiul vectorial al translațiilor lui \mathcal{E} (vectori liberi). Astfel un punct $x \in \mathcal{E}$ (în care s-a fixat o origine O și un reper) se identifică cu vectorul legat \mathbf{x} , care ca element în \mathcal{V} este $\mathbf{x} = x - O$. Se folosesc în mod curent, în special în Capitolul 1 notațiile

$$\text{Lin} \equiv \text{Lin}(\mathcal{V}, \mathcal{V}) \equiv \{\mathbf{T} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V} \mid \text{liniară}\}$$

$SLin \equiv \{T \in Lin \mid \text{simetric}\}$ – mulțimea transformărilor simetrice

$ALin \equiv \{T \in Lin \mid \text{antisimetric}\}$ – mulțimea transformărilor antisimetrice

$Ort \equiv \{Q \in Lin \mid Qu \cdot Qv = u \cdot v, \quad u, v \in \mathcal{V}\}$ – transformări ortogonale

Elementele din Lin , notate cu litere mari, groase se numesc tensori (de ordinul 2).

A. Amintim o serie de definiții și proprietăți de algebră vectorială și tensorială care sunt utilizate în cadrul lucrării. Pentru expuneri complete, trimitem cititorul la Eringen [1967], Iacob [1971], Beju, Sóos, Teodorescu [1976],[1977], [1983], Dragoș [1976], Gurtin [1981].

Presupunem că cititorul este familiarizat cu reprezentarea vectorilor într-o bază. Vom reaminti doar câteva definiții și proprietăți ce sunt utilizate adesea în cuprinsul cărții.

Prin **produs scalar** în \mathcal{V} înțelegem o aplicație biliniară " \cdot " : $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{R}$ așa încât $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_i y_i$. Peste tot în această parte considerăm un reper cartezian $\{O, \mathbf{e}_i\}$, în raport cu care $\mathbf{x} = x_i \mathbf{e}_i$.

Produsul vectorial este o aplicație biliniară

$$\begin{aligned} \times : \mathcal{V} \times \mathcal{V} &\rightarrow \mathcal{V} && \text{definită prin} \\ \mathbf{x} \times \mathbf{y} &= \delta_{ijk} x_i y_j \mathbf{e}_k \end{aligned} \tag{A.11}$$

unde δ_{ijk} este simbolul lui Levi- Civita.

Produsul mixt este o aplicație triliniară

$$\begin{aligned} (\cdot, \cdot, \cdot) : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \times \mathcal{V} &\rightarrow \mathcal{V} && \text{definită prin} \\ (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) &= (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} = \delta_{ijk} x_i y_j z_k \end{aligned} \tag{A.12}$$

iar **produsul dublu vectorial** este o aplicație triliniară definită pe $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ prin

$$\mathbf{x} \times (\mathbf{y} \times \mathbf{z}) = \mathbf{y}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{z}) - \mathbf{z}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) \tag{A.13}$$

Reamintind că transformările $Q \in Ort$ descriu o schimbare de reper cartezian, iar $\det Q = \pm 1$. Este ușor de observat că notând, în sens de aplicații, $Q\mathbf{e}_k = \mathbf{e}'_k$

(unde \mathbf{e}'_k este cealaltă bază) și considerând vectorii \mathbf{x} atât în baza $\{\mathbf{e}_i\}$ cât și în baza $\{\mathbf{e}'_i\}$, adică

$$\mathbf{x} = x_i \mathbf{e}_i = x'_j \mathbf{e}'_j \quad (\text{A.14})$$

avem imediat următoarele proprietăți

- (i) produsul scalar este o operație intrinsecă $x'_j y'_j = x_i y_i$,
- (ii) produsul vectorial este un pseudovector

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = (\mathbf{x}' \cdot \mathbf{y}')(\det \mathbf{Q}) \quad (\text{A.15})$$

- (iii) produsul mixt este un pseudosclar

$$(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} = (\mathbf{x}' \times \mathbf{y}') \cdot \mathbf{z}'(\det \mathbf{Q}), \quad (\text{A.16})$$

unde am notat tot cu \mathbf{Q} matricea corespunzătoare transformării $\mathbf{Q} \in \text{Lin}$.

După opinia noastră proprietățile devin mai clare imediat ce vom defini reprezentarea transformărilor liniare.

B. Fie $\mathcal{B} \equiv \{A : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{R} \mid \text{biliniare}\}$ spațiu vectorial real. O teoremă cunoscută arată imediat că Lin este izomorf cu \mathcal{B} prin relația $\mathbf{T}\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = A(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{V}$. Această proprietate conduce la definirea transpusului tensorului $\mathbf{T} \in \text{Lin}$. El este elementul din Lin (unic) cu proprietatea că

$$\mathbf{T}^T \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{T}\mathbf{y}, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{V} \quad (\text{A.17})$$

Produsul tensorial a doi vectori $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{V}$ se definește ca o aplicație liniară

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \otimes \mathbf{y} : \mathcal{V} &\rightarrow \mathcal{V} \quad \text{prin} \\ (\mathbf{x} \otimes \mathbf{y})\mathbf{v} &= \mathbf{x}(\mathbf{y} \cdot \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}. \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Cu aceasta să reamintim că dacă $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1,3}$ este o bază (nu neapărat carteziană) în \mathcal{V} atunci $(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)_{i,j}$ este o bază în \mathcal{B} și urmare a teoremei de izomorfism de mai sus, aplicația $T \in \text{Lin}$ este unic determinată de cunoașterea valorilor sale pe elementele bazei, adică

$$T = T^{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad (\text{A.19})$$

Nu insistăm asupra proprietăților geometrice și algebrice legate de bazele directe și reciproce, componentele covariante, contravariante, etc. ale vectorilor și tensorilor, pentru care trimitem la referințele date la începutul Anexei sau, pentru o reamintire compactă a formulelor de calcul necesare, la Cleja- Țigoiu, Cristescu [1985].

Suntem acum însă în poziția de a reveni la problema schimbărilor de bază (carteziană) și a proprietăților i) - iii), enunțate la A. Observând că o caracterizare echivalentă a transformărilor $\mathbf{Q} \in Ort$ se face prin

$$\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^T\mathbf{Q} = \mathbf{I}, \quad (\text{A.20})$$

unde $\mathbf{I} \in Lin$ este transformarea identică, este ușor să constatăm că dacă $\{\mathbf{e}_i\}_{i=\overline{1,3}}$ este o bază ortonormată în \mathcal{V} , atunci $\mathbf{Q}\mathbf{e}_i \equiv \mathbf{e}'_i, i = \overline{1,3}$ este o bază ortonormată și cum

$$\mathbf{Q} = q_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j, \quad q_{ij}q_{ik} = \delta_{jk}, \quad (\text{A.21})$$

atunci, cu definiția produsului tensorial a doi vectori, avem imediat

$$q_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}'_j. \quad (\text{A.22})$$

Aceasta arată imediat și reciprocă. Pe de altă parte putem obține imediat legătura între elementele bazelor (scrise explicit)

$$\mathbf{e}'_k = q_{ki} \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{e}_i = q_{ik} \mathbf{e}'_k \quad (\text{A.23})$$

În plus, dacă $\mathbf{x} = x_i \mathbf{e}_i = x'_j \mathbf{e}'_j$ (cele două reprezentări ale vectorului \mathbf{x} în cele două baze) atunci avem

$$x'_i = q_{ki} x_k, \quad x_k = q_{ki} x'_i \quad (\text{A.24})$$

Prin urmare, dacă notăm cu \mathbf{x} și \mathbf{x}' matricile coloană cu componentele x_1, x_2, x_3 , respectiv x'_1, x'_2, x'_3 , formulele de mai sus se scriu

$$\mathbf{x}' = \mathbf{Q}^T \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} = \mathbf{Q} \mathbf{x}' \quad (\text{A.25})$$

Cu aceste notații ii) (spre exemplu) se demonstrează imediat. Într-adevăr dacă notăm cu $z_k = (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \cdot \mathbf{e}_k$ atunci constatăm (în conformitate cu definiția produsului vectorial) că

$$q_{kt} z_k = \delta_{ijk} q_{is} q_{ju} q_{kt} x'_s y'_u = \delta_{sut} (\det \mathbf{Q}) x'_s y'_u \quad (\text{A.26})$$

Și deci, cum $\mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{I}$ și $q_{kt} z_k = z'_t$ rezultă $z_k = (\det \mathbf{Q}) q_{ki} z'_i$ și deci $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ este un pseudovector.

Urma este aplicația liniară $tr : Lin \rightarrow \mathbf{R}$ definită prin

$$tr(\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{V} \quad (\text{A.27})$$

Această definiție, împreună cu formulele de reprezentare ale unui tensor conduc la a concluziona că pentru orice $\mathbf{T} \in Lin$ urma sa este dată (spre exemplu) de

$$tr \mathbf{T} = T^{ij} \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j, \quad (\text{A.28})$$

într-o bază oarecare $\{\mathbf{e}_i\}$, iar dacă baza este carteziană

$$tr \mathbf{T} = T_{ii} \quad (\text{A.29})$$

Se definește **produsul scalar** a doi tensori ca fiind aplicația biliniară $\cdot : Lin \times Lin \rightarrow \mathbf{R}$ prin

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{U} = tr(\mathbf{TU}^T) \quad (\text{A.30})$$

Ea definește în mod evident un produs scalar pe Lin .

Un tensor se numește simetric ($\mathbf{T} \in SLin$) dacă $\mathbf{T} = \mathbf{T}^T$ și antisimetric ($\mathbf{T} \in ALin$) dacă $\mathbf{T} = -\mathbf{T}^T$.

Următoarele proprietăți sunt evidente

$$i) \mathbf{T} \cdot \mathbf{S} = 0, \quad \forall \mathbf{S} \in SLin \iff \mathbf{T} \in ALin$$

$$ii) \mathbf{T} \cdot \mathbf{W} = 0, \quad \forall \mathbf{W} \in ALin \iff \mathbf{T} \in SLin$$

$$iii) \text{Dacă } \mathbf{S} \in SLin, \mathbf{W} \in ALin \text{ atunci } \mathbf{S} \cdot \mathbf{W} = 0.$$

În Capitolul 1 al lucrării am folosit în unele demonstrații proprietățile spectrale ale tensorilor. Amintim aici definiția și teorema de descompunere spectrală. Pentru orice $\mathbf{T} \in Lin$, $\lambda \in \mathbf{R}$ se numește **valoare proprie** dacă există $\mathbf{e} \in \mathcal{V}$ numit **vector propriu** așa încât $\mathbf{T}\mathbf{e} = \lambda \mathbf{e}$.

Dacă $\mathbf{T} \in SLin$ atunci există $\lambda_j \in \mathbf{R}$, **valori proprii** și $\mathbf{e}_j \in \mathcal{V}$ **vectori proprii ortonormați** cu $j = \overline{1,3}$ așa încât

$$\mathbf{T} = \sum_{j=1}^3 \lambda_j \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_j \quad (\text{A.31})$$

În plus, dacă \mathbf{T} este pozitiv definit, adică $\mathbf{T}\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \geq 0, \forall \mathbf{x} \in \mathcal{V}$ și $\mathbf{T}\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 0$, dacă și numai dacă $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, atunci oricare ar fi $j = \overline{1,3}$, $\lambda_j > 0$ (λ_j valoare proprie a lui \mathbf{T}).

Observând acum că λ este valoare proprie pentru $\mathbf{T} \in Lin$ dacă și numai dacă

$$\det(\mathbf{T} - \lambda \mathbf{I}) = 0$$

numită **ecuația caracteristică** (sau **seculară**) putem constata că aceasta se scrie și

$$-\lambda^3 + I_1 \lambda^2 + I_2 \lambda + I_3 = 0$$

Scalarii $I_j, j = \overline{1,3}$ se numesc **invariantii tensorului \mathbf{T}** și sunt dați de

$$I_1 = \text{tr} \mathbf{T}, \quad I_2 = 1/2[\text{tr}(\mathbf{T}^2) - (\text{tr} \mathbf{T})^2], \quad I_3 = \det \mathbf{T} \quad (\text{A.32})$$

În fapt invariabile sunt mărimile $\text{tr} \mathbf{T}$, $\text{tr} \mathbf{T}^2$, $\text{tr} \mathbf{T}^3$, și așa cum rezultă din teorema lui Hamilton și Cayley cele două seturi sunt alternative (și sunt singurii invarianti). Într-adevăr, teorema amintită afirmă că pentru orice $\mathbf{T} \in Lin$ este adevărată ecuația

$$-\mathbf{T}^3 + I_1 \mathbf{T}^2 + I_2 \mathbf{T} + I_3 \mathbf{I} = 0 \quad (\text{A.33})$$

ceea ce conduce la

$$I_1 = \text{tr} \mathbf{T}, \quad I_2 = 1/2[\text{tr}(\mathbf{T}^2) - (\text{tr} \mathbf{T})^2], \quad I_3 = \det \mathbf{T} \quad (\text{A.34})$$

și deci seturile sunt alternative. Pe de altă parte teorema arată că orice putere mai mare ca 3 a lui \mathbf{T} se reprezintă ca o combinație a tensorilor \mathbf{I} , \mathbf{T} și \mathbf{T}^2 cu coeficienții depinzând de invarianți. Prin urmare nu mai există alți invarianți independenți de cei de mai sus. Evident invarianța se referă la independența mărimilor respective de baza în care lucrăm.

C. În această parte vom reaminti o serie de proprietăți și definiții de analiză vectorială și tensorială folosite pe parcursul lucrării.

Fie $\mathcal{D} \subseteq \mathbf{R}^3$ o mulțime deschisă, nevidă și conexă. Aplicația $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{V}$ se numește **diferențiabilă** în $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$ dacă există aplicația $df(\mathbf{x}) \in \text{Lin}$ și $\omega(\mathbf{x}, \cdot) : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{V}$ așa încât

$$f(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + df(\mathbf{x})[\mathbf{v}] + \omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \mathbf{v} = \mathbf{y} - \mathbf{x} \in \mathcal{V} \quad \text{și} \quad (\text{A.35})$$

$$\lim_{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}} \frac{\omega(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|} = 0$$

Se notează în mod curent cu $\nabla f(\mathbf{x}) \equiv df(\mathbf{x}) \in \text{Lin}$ și se numește **gradientul funcției f în \mathbf{x}** (în raport cu \mathbf{x}). În cele ce urmează vom preciza această definiție pentru cazurile în care f este o funcție cu valori reale, vectoriale și tensoriale. Astfel, împreună cu proprietățile ce rezultă de aici formulele utilizate în Capitolul 1, capătă sens.

Dacă $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{R}$ este un câmp scalar atunci $df(\mathbf{x}) \in \text{Lin}(\mathcal{V}, \mathbf{R})$ și urmare a teoremei lui Riesz există $\nabla f(\mathbf{x}) \in \mathcal{V}$ așa încât $df(\mathbf{x})[\mathbf{v}] \equiv \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}$ și ∇f se numește gradientul lui f .

Fie și $(0, \mathbf{e}_i)$ un reper cartezian. Fie $\mathbf{v} = s \mathbf{e}_k$ atunci

$$\nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}_k = \frac{\partial f}{\partial x_k}$$

și deci

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_k} \mathbf{e}_k \quad (\text{A.36})$$

prima relație definind derivata în raport cu direcția \mathbf{e}_k .

Obținerea relațiilor de mai sus se face direct cu definiția diferențialei (ținând cont că limita se face acum pentru $s \rightarrow 0$).

Fie acum $\mathbf{v} : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{V}$ un câmp vectorial. Observăm că atunci $d\mathbf{v}(\mathbf{x}) \in \text{Lin}(\mathcal{V}, \mathcal{V})$. Prin urmare notînd

$$\nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}) = d\mathbf{v}(\mathbf{x})$$

acesta este un tensor. Un calcul analog cu cel de mai sus conduce la reprezentarea sa într-o bază carteziană

$$\nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad (\text{A.37})$$

Dacă f are valori tensoriale, să considerăm $\mathbf{T} : \mathcal{D} \rightarrow \text{Lin}$ un câmp tensorial. Atunci $d\mathbf{T}(\mathbf{x}) \in \text{Lin}(\mathcal{V}, \text{Lin}(\mathcal{V}, \mathcal{V}))$, iar notația gradientului se păstrează,

$$\nabla \mathbf{T}(\mathbf{x}) \equiv d\mathbf{T}(\mathbf{x}) \in \text{Lin}(\mathcal{V}, \text{Lin}(\mathcal{V}, \mathcal{V})).$$

În plus aceasta conduce, într-o bază carteziană la

$$\nabla \mathbf{T}(\mathbf{x}) = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_k} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k, \quad (\text{A.38})$$

unde adesea se notează $\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_k} = T_{ij,k}$ pentru a păstra legătura cu reprezentările aceluiași formule în baze arbitrare (pentru acestea trimitem cititorul la literatura citată deja).¹

O serie de operatori diferențiali, derivă din operatorul gradient. Ei sunt deosebit de importanți în mecanică, fiind legați de noțiunile de flux al unui vector printr-o suprafață, circulația unui vector (de-a lungul unei curbe), proprietăți de potențialitate (câmpuri conservative). Acești operatori sunt divergența și rotorul.

Divergența unui câmp vectorial $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ este aplicația liniară dată prin

$$\text{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \text{tr}(\nabla \mathbf{v}(\mathbf{x})) = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \quad (\text{A.39})$$

în reperul cartezian considerat. În același timp se poate defini divergența unui câmp tensorial $\mathbf{T}(\mathbf{x})$ ca vectorul

¹O definiție a dublului produs tensorial este $\mathbf{x} \otimes \mathbf{y} \otimes \mathbf{z} : \mathcal{V} \rightarrow \text{Lin}$, dată prin $(\mathbf{x} \otimes \mathbf{y} \otimes \mathbf{z})\mathbf{v} = (\mathbf{x} \otimes \mathbf{y})(\mathbf{z} \cdot \mathbf{v})$ pentru orice $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$

$$\operatorname{div} \mathbf{T}(\mathbf{x}) = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \mathbf{e}_i \quad (\text{A.40})$$

Se observă cu ușurință că dacă prin ∇ , sau gard vom nota vectorul $\nabla \equiv \operatorname{grad} \equiv \frac{\partial}{\partial x_j} \mathbf{e}_j$, atunci gradientul unui câmp vectorial, divergența sa și divergența unui câmp tensorial capătă semnificațiile

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} \mathbf{v}(\mathbf{x}) &\equiv \nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \nabla \otimes \mathbf{v}(\mathbf{x}); & \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}) &= \nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \\ \operatorname{div} \mathbf{T}(\mathbf{x}) &= \mathbf{T}(\mathbf{x})[\nabla] = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \mathbf{e}_i \end{aligned} \quad (\text{A.41})$$

Rotorul unui câmp vectorial este vectorul definit prin

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{v}(\mathbf{x}) &= \nabla \times \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \\ & \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) \mathbf{e}_1 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) \mathbf{e}_2 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) \mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (\text{A.42})$$

Formula ar părea dependentă de reper, dar după cum se va vedea (urmare a aplicării formulei lui Stokes), proiecția vectorului $\nabla \times \mathbf{v}(\mathbf{x})$ pe o direcție oarecare este independentă de reper. Înainte de aceasta dăm o serie de proprietăți elementare ale operatorilor sus amintiți (ce sunt de altfel, utilizate în lungul acestei lucrări).

- i) Operatorii grad, div, rot sunt liniari.
- ii) Următoarele proprietăți sunt imediate

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(f(\mathbf{x})\mathbf{v}(\mathbf{x})) &= \operatorname{grad} f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) + f(\mathbf{x})\operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}) \\ \operatorname{div} \operatorname{grad} f(\mathbf{x}) &= \Delta f(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (\text{A.43})$$

unde Δ este operatorul lui Laplace ($\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i}$).

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{v}(\mathbf{x}) &= 0 \\ \operatorname{div}(\mathbf{v}_1(\mathbf{x}) \times \mathbf{v}_2(\mathbf{x})) &= \mathbf{v}_2(\mathbf{x}) \cdot \operatorname{rot} \mathbf{v}_1(\mathbf{x}) - \mathbf{v}_1(\mathbf{x}) \cdot \operatorname{rot} \mathbf{v}_2(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (\text{A.44})$$

iii) următoarele proprietăți ale operatorului rot sunt imediate

$$\text{rot}(f(\mathbf{x})\mathbf{v}(\mathbf{x})) = \mathbf{v}(\mathbf{x}) \times \text{grad}f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{x})\text{rot}\mathbf{v}(\mathbf{x})$$

$$\text{rot rot}(\mathbf{v}(\mathbf{x})) = \text{grad div}\mathbf{v}(\mathbf{x}) - \Delta\mathbf{v}(\mathbf{x})$$

$$\begin{aligned} \text{rot}(\mathbf{v}_1(\mathbf{x}) \times \mathbf{v}_2(\mathbf{x})) &= (\mathbf{v}_2(\mathbf{x}) \cdot \nabla)\mathbf{v}_1(\mathbf{x}) - (\mathbf{v}_1(\mathbf{x}) \cdot \nabla)\mathbf{v}_2(\mathbf{x}) + \\ &\quad + \mathbf{v}_1(\mathbf{x})\text{div}\mathbf{v}_2(\mathbf{x}) - \mathbf{v}_2(\mathbf{x})\text{div}\mathbf{v}_1(\mathbf{x}) \\ \text{grad}(\mathbf{v}_1(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_2(\mathbf{x})) &= (\mathbf{v}_2(\mathbf{x}) \cdot \nabla)\mathbf{v}_1(\mathbf{x}) + (\mathbf{v}_1(\mathbf{x}) \cdot \nabla)\mathbf{v}_2(\mathbf{x}) + \\ &\quad + \mathbf{v}_1(\mathbf{x}) \times \text{rot}\mathbf{v}_2(\mathbf{x}) + \mathbf{v}_2(\mathbf{x}) \times \text{rot}\mathbf{v}_1(\mathbf{x}) \end{aligned} \tag{A.45}$$

$$\frac{1}{2}\text{grad}(\mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x})) = (\mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \nabla)\mathbf{v}(\mathbf{x}) + \mathbf{v}(\mathbf{x}) \times \text{rot}\mathbf{v}(\mathbf{x})$$

$$\text{rotgrad}f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

Revenim acum la semnificația operatorilor. Să reamintim că dacă Σ este o suprafață (în \mathcal{E}) pe care am definit o față pozitivă (și una negativă) și dacă $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ este versorul normalei la Σ orientat în sensul pozitiv atunci integrala

$$\varphi(\Sigma) = \int_{\Sigma} \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) da \tag{A.46}$$

definește fluxul vectorului \mathbf{v} prin Σ . Pentru precizare, dacă $\rho(\mathbf{x})$ este densitatea de masă (a unui fluid) iar $\mathbf{v}(\mathbf{x})$, câmpul vitezelor, atunci $\rho\varphi(\Sigma)$ este cantitatea de fluid ce traversează suprafața Σ în sensul lui \mathbf{n} în unitatea de timp. În plus dacă \mathcal{D} este un domeniu (eventual ocupat de un fluid), iar Σ este suprafața sau (frontiera sa) atunci (cu formula lui Gauss- Ostrogradski) se obține relația flux-divergență

$$\int_{\Sigma} \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) da = \int_{\mathcal{D}} \text{div}\mathbf{v}(\mathbf{x}) dv \tag{A.47}$$

Fie $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$ o curbă închisă, pe care s-a definit un sens pozitiv de parcurs. Se definește atunci circulația vectorului $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ (în lungul curbei \mathcal{C}) prin

$$\Gamma(\mathcal{C}) = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} \tag{A.48}$$

Fie acum C un arc simplu, neted pe porțiuni și Σ o suprafață netedă pe porțiuni, ce se sprijină pe C . Fie $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ vectorul normalei la Σ , orientat pozitiv în raport cu sensul de pe curba C și $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ un câmp de clasă C^1 . Atunci avem următoarea formulă (a lui Stokes)

$$\int_C \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \int_{\Sigma} (\text{rot} \mathbf{v}(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) da \quad (\text{A.49})$$

Această formulă permite, prin alegerea convenabilă a curbei C și a suprafeței Σ (cu aria sa tinzând la zero) să obținem o interpretare simplă pentru proiecția lui $\text{rot } \mathbf{v}$ pe direcția \mathbf{n} (arbitrară) și anume

$$\text{rot}_{\mathbf{n}} \mathbf{v} = \lim_{\text{Aria} \Sigma \rightarrow 0} \left(\int_C \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} / \text{Aria} \Sigma \right) \quad (\text{A.50})$$

ceea ce dovedește că proiecția vectorului $\text{rot } \mathbf{v}$ pe o direcție oarecare se obține independent de reperul considerat.

Se știe (din tratatele de Analiză matematică) că dacă $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{R}$ este de clasă C^1 și dacă $\partial \mathcal{D}$ este suficient de netedă atunci

$$\int_{\mathcal{D}} \text{grad } f(\mathbf{x}) dv = \int_{\partial \mathcal{D}} \mathbf{n}(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) da \quad (\text{A.51})$$

de unde avem imediat

$$\int_{\mathcal{D}} \text{rot } \mathbf{v}(\mathbf{x}) dv = \int_{\partial \mathcal{D}} \mathbf{n}(\mathbf{x}) \times \mathbf{v}(\mathbf{x}) da \quad (\text{A.52})$$

În încheierea acestei anexe mai reamintim câteva rezultate utile din teoria câmpurilor potențiale. Amintim mai întâi că un câmp vectorial $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ se numește **câmp potențial** (conservativ) dacă există un câmp scalar $P(\mathbf{x})$ (definit tot pe \mathcal{D}) de clasă C^1 și uniform astfel încât $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \text{grad } P(\mathbf{x})$ pentru orice $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$. Această condiție, într-un reper cartezian, este echivalentă cu condiția ca $v_i(\mathbf{x}) dx_i$ să fie diferențiala totală a funcției P în \mathbf{x}

$$v_i(\mathbf{x}) dx_i = dP(\mathbf{x}) \quad (\text{A.53})$$

Funcția P se numește **potențial**. Observând acum că relația de mai sus exprimă condiția necesară și suficientă ca integrala curbilinie $\int_{A_1 A_2} \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}$ să

nu depindă de drum putem enunța proprietatea **fundamentală a câmpurilor potențiale**-

Condiția necesară și suficientă ca un câmp $v : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{V}$, cu \mathcal{D} domeniu simplu conex, să fie conservativ este ca

$$\operatorname{rot}v(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (\text{A.54})$$

oricare ar fi $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$ (adică câmpul $v(\mathbf{x})$ este irotațional).

Formula **flux- divergență** (A.47) aplicată unui câmp de vectori conservativi ($v(\mathbf{x}) = \operatorname{grad} P(\mathbf{x})$) conduce la formula

$$\int_{\partial\mathcal{D}} \frac{\partial P}{\partial n} da = \int_{\mathcal{D}} \Delta P dx \quad (\text{A.55})$$

care este cunoscută și ca **prima formulă a lui Green**.

Dacă alegem pe rând $v(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \operatorname{grad} g(\mathbf{x})$ și $v(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) \operatorname{grad} f(\mathbf{x})$, scriem formulele flux- divergență (A.47) și scădem relațiile, obținem **formulele lui Green**

$$\begin{aligned} \int_{\partial\mathcal{D}} f \frac{\partial g}{\partial n} da &= \int_{\mathcal{D}} (f \Delta g + \operatorname{grad} f \cdot \operatorname{grad} g) dx \\ \int_{\partial\mathcal{D}} (f \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial f}{\partial n}) da &= \int_{\mathcal{D}} (f \Delta g - g \Delta f) dx \end{aligned} \quad (\text{A.56})$$

În fine, un câmp $v : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{V}$ se zice **solenoidal** dacă există un câmp $P : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{V}$ astfel încât

$$v(\mathbf{x}) = \operatorname{rot}P(\mathbf{x}) \quad (\text{A.57})$$

Ținând cont de proprietățile enunțate mai sus pentru operatorii div și rot rezultă imediat **proprietatea de caracterizare a câmpurilor solenoidale** -

Condiția necesară și suficientă ca un câmp vectorial $v : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{V}$, cu \mathcal{D} domeniu simplu conex să fie solenoidal este ca

$$\operatorname{div}v(\mathbf{x}) = 0 \quad (\text{A.58})$$

oricare ar fi $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$ (dacă $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ este un câmp de viteze, (A.58) cere ca mișcarea să fie incompresibilă).

Comentarii extrem de utile și proprietăți suplimentare se găsesc în Dragoș [1976].

D. Teorema lui Wang. In cele ce urmează vom enunța teorema lui Wang de reprezentare a funcțiilor izotrope în cazul de interes în lucrare.

În Capitolul 1 am utilizat-o pentru reprezentarea tensorului \mathbf{T} corespunzător fluidului liniar, vâscos (al lui Navier și Stokes) cât și în reprezentarea fluxului de căldură \mathbf{q} . În primul caz este vorba deci despre o funcție tensorială izotropă de variabile tensor simetric $\mathbf{D} \in SLin$ și vector $\mathbf{g} \equiv \nabla T \in \mathcal{V}$, iar în al doilea caz de o funcție vectorială izotropă (\mathbf{q}) de aceleași variabile.

Fie spațiul euclidian tridimensional. Fie $f(\mathbf{D}, \mathbf{g})$ o funcție tensorială simetrică și izotropă, atunci reprezentarea sa completă și ireductibilă este dată de

$$f(\mathbf{D}, \mathbf{g}) = \varphi_0(\mathcal{I})\mathbf{I} + \varphi_1(\mathcal{I})\mathbf{D} + \varphi_2(\mathcal{I})\mathbf{D}^2 + \varphi_3(\mathcal{I})\mathbf{g} \otimes \mathbf{g} + \varphi_4(\mathcal{I})[\mathbf{g} \otimes \mathbf{D}\mathbf{g} + \mathbf{D}\mathbf{g} \otimes \mathbf{g}] + \varphi_5(\mathcal{I})[\mathbf{g} \otimes \mathbf{D}^2\mathbf{g} + \mathbf{D}^2\mathbf{g} \otimes \mathbf{g}] \quad (\text{A.59})$$

unde φ_i , cu $i \in \{0, 1, \dots, 5\}$ sunt funcții scalare, izotrope și unde \mathcal{I} este mulțimea invarianților corespunzători setului $\{\mathbf{D}, \mathbf{g}\}$, adică

$$\mathcal{I} = \{tr\mathbf{D}, tr\mathbf{D}^2, tr\mathbf{D}^3, \mathbf{g} \cdot \mathbf{g}, \mathbf{g} \cdot \mathbf{D}\mathbf{g}, \mathbf{g} \cdot \mathbf{D}^2\mathbf{g}\}$$

Aplicând condiția de liniaritate se obține imediat formula (1.10). Precizăm că mulțimea generatorilor este, în cazul relației de mai sus

$$\{\mathbf{I}, \mathbf{D}, \mathbf{D}^2, \mathbf{g} \otimes \mathbf{g}, \mathbf{g} \otimes \mathbf{D}\mathbf{g} + \mathbf{D}\mathbf{g} \otimes \mathbf{g}, \mathbf{g} \otimes \mathbf{D}^2\mathbf{g} + \mathbf{D}^2\mathbf{g} \otimes \mathbf{g}\}$$

Cu această precizare și cu indicațiile date înainte de (1.20), reprezentarea (1.20) este evidentă, iar particularizarea enunțului teoremei de reprezentare a funcțiilor vectoriale izotrope devine un exercițiu util dar evident. Pentru cei ce doresc să aprofundeze subiectul recomandăm încă odată articolul original al lui Wang[1970].

E. Sisteme de coordonate echivalente. Când este valabilă aproximația hidrostatică este avantajos să introducem presiunea ca o coordonată verticală deoarece unii termeni din ecuațiile principale iau o formă mai simplă. În acest scop considerăm variabilele arbitrare $b(x, y, z, t)$ și $\sigma(x, y, z, t)$ care reprezintă o nouă coordonată verticală. Fie $b(x, y, \sigma, t)$ forma funcțională a lui b în sistemul σ și $b'(x, y, z, t)$ în sistemul cartezian ordinar.

$$b'(x, y, z(x, y, \sigma, t), t) = b(x, y, \sigma, t)$$

Așadar:

$$\left(\frac{\partial b}{\partial x}\right)_{y, \sigma, t} = \left(\frac{\partial b'}{\partial x}\right)_{y, z, t} + \left(\frac{\partial b'}{\partial z}\right)_{x, y, t} \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{y, \sigma, t}$$

și similar pentru derivatele în raport cu y și t , iar pentru derivata în raport cu σ :

$$\left(\frac{\partial b}{\partial \sigma}\right)_{x, y, \sigma} = \left(\frac{\partial b'}{\partial z}\right)_{x, y, z} \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial \sigma}\right)$$

Rezultă:

$$\nabla_{\sigma} b = \nabla b + \frac{\partial b}{\partial z} \nabla_{\sigma} z$$

De unde:

$$\nabla_{\sigma} v = \nabla v + \frac{\partial v}{\partial z} \nabla_{\sigma} z$$

Pentru început considerăm cazul $b = \sigma = p$, pentru a obține expresia forței de presiune orizontală:

$$\nabla_p \cdot p = \nabla \cdot p + \frac{\partial p}{\partial z} \cdot \nabla_p \cdot z; \nabla_p \cdot p = 0; \nabla \cdot p = -\frac{\partial p}{\partial z} \cdot \nabla_p \cdot z;$$

Din ipoteza hidrostatică și folosind definiția geopotentialului $\Phi = gz$, avem:

$$\alpha \cdot \frac{\partial p}{\partial z} = -g$$

și deci:

$$-\alpha \cdot \frac{\partial p}{\partial z} \cdot \nabla_p z = g \cdot \nabla_p z = \nabla_p (gz) = \nabla_p \Phi$$

rezultă:

$$\alpha \nabla_p \cdot p = \nabla_p \Phi$$

Forma echivalentă pentru ecuația de continuitate în sistemul (x, y, p, t) este:

$$\nabla_p \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0$$

Forma rezultantă a ecuațiilor hidrodinamicii este:

$$\dot{\mathbf{v}} = -\nabla\Phi - \mathbf{f} \times \mathbf{v} + \mathbf{F}_H$$

$$\nabla \mathbf{v} + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p} = -\frac{R \cdot T}{p}$$

$$Q = c_p \cdot \dot{T} - \frac{R \cdot T}{p} \cdot \omega$$

sistem în necunoscutele $v(u, v), \omega, T, \Phi$. Am notat cu $\omega = \dot{p}$ viteza verticală generalizată în sistemul de coordonate (x, y, p, t) .

Coordonate sferice curbilinii

Notând longitudinea cu λ , latitudinea cu φ și cu r distanța măsurată de la centrul pământului, vitezele considerate în lungul cercurilor de latitudine, a meridianelor și pe verticala locului sunt date de:

$$u = r \cos \varphi \dot{\lambda}; v = r \dot{\varphi}; w = \dot{r} = \dot{z}$$

unde z este altitudinea măsurată de la nivelul mării. Vectorul viteză are componentele:

$$\mathbf{v} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}$$

unde am pus în evidență versorii direcțiilor coordonatelor curbilinii x, y și z . Sistemul de ecuații de mișcare se scrie:

$$\dot{u} - \frac{uv \operatorname{tg} \varphi}{r} + \frac{uw}{r} = -\alpha \frac{\partial \Phi}{\partial x} + fv - 2w\Omega \cos \varphi$$

$$\dot{v} + \frac{u^2 \operatorname{tg} \varphi}{r} + \frac{vw}{r} = -\alpha \frac{\partial \Phi}{\partial y} - fu$$

$$\dot{w} - \frac{u^2 + v^2}{r} = -\alpha \frac{\partial \Phi}{\partial z} - g + 2u\Omega \cos \varphi$$

Neglijând termenii mici din sistemul de mai sus, se obține Haltiner [1971]:

$$\dot{u} - \frac{uv \sin \varphi}{r} = -\alpha \frac{\partial p}{\partial x} + fv$$

$$\dot{v} + \frac{u^2 \sin \varphi}{r} = -\alpha \frac{\partial p}{\partial y} - fu$$

$$\dot{w} = -\alpha \frac{\partial p}{\partial z} - g$$

Notăm că relațiile diferențiale pentru sistemul de coordonate sferice sunt cele obișnuite:

$$\delta x = r \cos \varphi \delta \lambda; \delta y = r \delta \varphi; \delta z = \delta r$$

Ecuția de continuitate ia forma:

$$\frac{1}{\rho} \dot{\rho} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{v \sin \varphi}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{2w}{r} = 0$$

iar ecuația de stare și ecuația termodinamicii rămân neschimbate.

A3. Complemente de dezvoltări asimptotice și calcul dimensional

A. Exemplu simplu de dezvoltare asimptotică. În cele ce urmează vom da un exemplu din lecțiile lui Zeytounian [1988] din care se vede că nu orice dezvoltare făcută în raport cu un parametru mic este asimptotică în sensul precizat în Capitolul 5. De aceea trebuie multă atenție când lucrăm cu aceste dezvoltări. "Traducerea" incorectă, în termenii dezvoltării, a condițiilor la limită poate afecta esențial soluția aproximativă obținută, conducând la soluții **foarte depărtate** de cea exactă.

Fie spre exemplu următoarea problemă. Să se afle soluția problemei următoare

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + 2\alpha \frac{df}{dx} + f = 0 \quad (\text{A.60})$$

cu

$$f(0) = C_0 \quad (\text{A.61})$$

$$f'(0) = C'_0 \quad (\text{A.62})$$

pentru $\alpha > 0$ și $\alpha \ll 1$.

Este ales, în mod evident, un model care permite obținerea unei soluții exacte. Astfel, dacă integrăm ecuația (A.60) și utilizăm condițiile (A.61), (A.62) pentru determinarea constantelor rezultă în urma unor calcule standard că soluția problemei propuse este

$$f(x; \alpha) = \exp(-\alpha x) \left[C_0 \cos(\sqrt{1 - \alpha^2} x) + \frac{C'_0 + \alpha C_0}{\sqrt{1 - \alpha^2}} \sin(\sqrt{1 - \alpha^2} x) \right]. \quad (\text{A.63})$$

Se observă cu ușurință că pentru α fixat, oricât de mic, avem

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x; \alpha) = 0. \quad (\text{A.64})$$

Să căutăm acum soluția sub forma dezvoltării asimptotice

$$f(x; \alpha) = f_0(x) + \alpha f_1(x) + \alpha^2 f_2(x) + \dots \quad (\text{A.65})$$

Se constată cu ușurință că setul de ecuații diferențiale ce rezultă din (A.60) și care trebuie satisfăcut de aproximațiile f_0, f_1, \dots este

$$\frac{d^2 f_0}{dx^2} + f_0 = 0 \tag{A.66}$$

$$\frac{d^2 f_i}{dx^2} + f_i = -2 \frac{df_{i-1}}{dx},$$

pentru $i = 1, 2, \dots$

Soluțiile generale ale ecuațiilor de mai sus sunt

$$\begin{aligned} f_0(x) &= F_0 \cos(x + \varphi_0) \\ f_1(x) &+ F_0 \cos(x + \varphi_0) [1 - \alpha x], \end{aligned} \tag{A.67}$$

ș.a.m.d.

În concluzie soluția aproximativă se scrie

$$f(x; \alpha) = F_0 \cos(x + \varphi_0) [1 + \alpha - \alpha x + O(\alpha^2)] \tag{A.68}$$

Se remarcă imediat că în timp ce aproximația de ordin zero este mărginită (dar nu are limită (!)) pentru $x \rightarrow \infty$, aproximațiile de ordin superior au un comportament "catastrofic", căci există termenul $\alpha x \rightarrow \infty$ când $x \rightarrow +\infty$ (termenii de acest tip se zic seculari). Cum am mai observat, faptul că aproximantele nu au toate proprietățile soluțiilor exacte (ba chiar au anumite comportamente "stranii") nu este singular. Asemenea rezultate se întâlnesc în teorii foarte complexe, cum ar fi în dezvoltările de tip Chapman - Enskog din Teoria Cinetică a Gazelor (vezi Truesdell și Muncaster [1980], Speziale [1981], Țigoiu [1983]) sau în comportamentul fluidelor de tip polinomial din Mecanica Fluidelor Nenevtoniene (vezi spre exemplu Joseph [1976]).

Cu toate acestea, dacă aproximațiile, chiar proaste (pe întreg domeniul problemei), au subdomenii pe care se regăsesc proprietățile soluțiilor exacte, ele pot fi folosite și adesea aduc informații deosebit de prețioase cel puțin pentru studiul calitativ.

Revenind la exemplul propus la început, iată o cale prin care, în acest caz se poate corecta eroarea (metoda dezvoltărilor asimtotice racordate). Ideea este de a elimina într-un fel termenii seculari. Aceasta se realizează prin introducerea a două scări (sugerate de problemă) și eliminarea termenilor seculari prin racordarea soluțiilor. Astfel, se observă că în soluția exactă (A.63) variabila x apare în două "combinații" distincte cu parametrul α și anume

- i) în termenul de amplitudine $\exp(-\alpha x)$ avem $\bar{x} \equiv \alpha x$,
- ii) în termenul de undă avem $\hat{x} \equiv \sqrt{1 - \alpha^2} x = (1 - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^4}{8} - \frac{\alpha^6}{32} \dots)x$, ultima egalitate având loc pentru $\alpha \ll 1$.

Prin urmare soluția depinde, pentru $\alpha \ll 1$, de două "variabile"

$$u = \alpha x \text{ și } v = g(\alpha)x \tag{A.69}$$

$$g(\alpha) = 1 + \mu_2\alpha^2 + \mu_3\alpha^3 + \dots,$$

unde $\mu_i, i = 2, 3, \dots$ sunt constante ce trebuie determinate în urma rezolvării. Prin introducerea acestor variabile (pentru $\alpha \ll 1$) facem ca soluției $f(x; \alpha)$ să-i corespundă o nouă funcție $\bar{f}(u, v; \alpha)$. Se observă că u este **variabilă lentă** ($\alpha \ll 1$), în timp ce v este o **variabilă scurtă** (sau rapidă), așa zis. Evident trebuie formulată problema (A.60) - (A.62) pentru \bar{f} . În particular observând că

$$\frac{df}{dx} = \alpha \frac{\partial \bar{f}}{\partial u} + g(\alpha) \frac{\partial \bar{f}}{\partial v} \tag{A.70}$$

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial u^2} + 2\alpha g(\alpha) \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial u \partial v} + g^2(\alpha) \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial v^2}$$

și presupunând că \bar{f} admite o dezvoltare asimptotică în raport cu α regulată (uniform valabilă)

$$\bar{f}(u, v; \alpha) = \bar{f}_0 + \alpha \bar{f}_1(u, v) + \alpha^2 \bar{f}_2(u, v) + \dots \tag{A.71}$$

obținem pentru \bar{f} următorul set de ecuații

$$\frac{\partial^2 \bar{f}_0}{\partial v^2} + \bar{f}_0 = 0$$

$$\frac{\partial^2 \bar{f}_1}{\partial v^2} + \bar{f}_1 = -2 \frac{\partial \bar{f}_0}{\partial v} - 2 \frac{\partial^2 \bar{f}_0}{\partial u \partial v} \tag{A.72}$$

$$\frac{\partial^2 \bar{f}_2}{\partial v^2} + \bar{f}_2 = -(2 \frac{\partial \bar{f}_1}{\partial v} + 2 \frac{\partial^2 \bar{f}_1}{\partial u \partial v}) - (\frac{\partial^2 \bar{f}_0}{\partial u^2} + 2\mu_2 \frac{\partial^2 \bar{f}_0}{\partial v^2} + 2 \frac{\partial \bar{f}_0}{\partial u})$$

.....

A spune că dezvoltarea este uniform valabilă revine la aceea că fiecare aproximație nu are singularități mai puternice ca precedenta (nu tinde mai repede la zero ca precedenta când $\alpha \rightarrow 0$) și același lucru se întâmplă și pentru derivatele aproximațiilor. În particular aceasta conduce la

$$\bar{f}_1/\bar{f}_0, \quad \bar{f}_2/\bar{f}_1, \dots \tag{A.73}$$

sunt uniform mărginite pentru $\alpha \rightarrow 0$ și pentru orice u și v . Condițiile (A.73) trebuie să conducă la eliminarea termenilor seculari din soluția (A.71) (aceia care în particular cresc nedefinit pentru $v \rightarrow \infty$).

Este ușor de constatat că ecuația (A.72)₁ are soluția

$$\bar{f}_0(u, v) = F_0(u) \cos[v + \varphi_0(u)]. \quad (\text{A.74})$$

Urmând cele spuse mai sus, vom elimina termenii seculari la nivelul soluției $\bar{f}_1(u, v)$ (pentru a avea (A.73) satisfăcută). Pentru aceasta, scriind soluția ecuației (A.72)₂, vom anula termenii respectivi. În acest scop se evaluează membrul drept al ecuației (A.72)₂, care se scrie

$$2[F'_0(u) + F_0(u)] \sin(v + \varphi_0(u)) + 2F_0(u)\varphi'_0(u) \cos(v + \varphi_0(u))$$

și deci condiția de anulare a termenilor seculari revine în mod evident la

$$F'_0(u) + F_0(u) = 0, \quad \varphi'_0(u) = 0. \quad (\text{A.75})$$

Cum aceste ecuații conduc la $F_0(u) = \bar{F}_0 \exp(-u)$ și $\varphi_0(u) = \bar{\varphi}_0$ rezultă că (A.74) este dată de

$$\bar{f}_0(u, v) = \bar{F}_0 \exp(-u) \cos[v + \bar{\varphi}_0] \quad (\text{A.76})$$

care în mod evident este o aproximație la ordinul zero în α ce respectă caracteristicile soluției (A.63)². Pentru a găsi dependența $v = g(\alpha)x$ trebuie să rezolvăm problema la ordinul 2 în α adică să aflăm soluția ecuației (A.72)₃. Să remarcăm că membrul drept (neomogeneitatea) al acestei ecuații (care va introduce termenii seculari în soluție) este scris în condițiile în care datele fiind independente de α , problema pentru \bar{f}_1 (A.72)₂ este omogenă cu date nule și deci soluția este $\bar{f}_1(u, v) \equiv 0$, și este

$$(1 + 2\mu_2)\bar{F}_0 \exp(-u) \cos[v + \bar{\varphi}_0]$$

Deci anularea sa conduce la

$$\mu_2 = -\frac{1}{2} \quad (\text{A.77})$$

prin urmare avem

$$f(x, \alpha) = \bar{F}_0 \exp(-\alpha x) \cos\left[\left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right)x\right] + O(\alpha^2) \quad (\text{A.78})$$

care este o bună aproximație a soluției exacte (A.63) până la ordinul α^2 .

²Pentru simplitate am renunțat la a considera forma completă (A.63) Se observă că la acest nivel $v = x$

B. Teorema II. În această parte a Anexei dăm câteva explicații și exemple în legătură cu **Teorema - II** a analizei dimensionale. Pentru clarificări suplimentare demonstrații și alte exemple recomandăm Brand [1957], Birkhoff [1955] și C. Jacob [1971]. Aceasta este cerută de analiza dimensională care se face pretutindeni în Capitolul 5. În particular pentru introducerea parametrilor de similitudine $S_1 = \frac{B_0}{Mr}$, $S_2 = \alpha_0/B_0$ și

$$S = \frac{\frac{\gamma-1}{\gamma} B_0 - \alpha_0}{Mr^2} = \frac{1}{B_0} \left[\frac{\gamma-1}{\gamma} - S_2 \right] S_1^2.$$

În abordarea problemelor de Termodinamică (în particular) **Teorema - II** se dovedește a fi un aparat matematic puternic. Ea se utilizează cu deosebit succes în probleme în care, spre exemplu, urmare a trecerii la variabile și funcții adimensionale, apar coeficienți (adimensionali) între definițiile cărora nu găsim (apriori) legături invariante (la schimbări de variabile). Aceste legături numite (de majoritatea autorilor) de similitudine dau informații importante asupra modului în care se pot face diverse evaluări asimptotice (în particular). Pentru a înțelege mai bine să zicem că o mărime fizică (derivată), viteza, se poate exprima în unitățile sale de bază, în raport cu o lungime și un timp, dar și cu o viteză de referință. Însă nu știm, schimbând-o pe aceasta (sau lungimea și timpul caracteristic), ce legătură există între ele!

Să considerăm deci că în problemele în discuție, mărimile fizice ce intervin F_i ($i = 1, \dots, n$) au măsuri pozitive f_i care depind de un sistem fundamental de unități $\{U_j\}_{j=1,l}$. Dacă se schimbă sistemul de unități

$$U_j = m_j U'_j, \quad m_j > 0,$$

măsurile pozitive f_i se schimbă de asemenea. Spunem că f_i (de fapt F_i) are dimensiunea fizică $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{il})$ în unitățile U_1, \dots, U_l dacă noile măsuri f'_i sunt legate de cele vechi prin

$$f'_i = m_1^{a_{i1}} m_2^{a_{i2}} \dots m_l^{a_{il}} f_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

Dacă toți $a_{ij} = 0$ se spune că f_i este adimensională. Vom exemplifica peste tot cu cazul modelului din Capitolul 5.4. În acesta (a se vedea ecuațiile (4)) intervin unitățile fundamentale L (lungimea), M (masă), T (timp), K (temperatură) și mărimile fizice derivate H : (înălțimea), v (viteza), g (acelerația gravitațională), Ω'_0 , ρ_r (densitate de masă), p_r (presiunea), T_r (distribuția de temperatură), Γ_r (gradientul temperaturii).

Dimensiunile celor n cantități se pot pune într-o matrice ($n \times l$)

| | U_1 | U_2 | ... | U_l |
|----------|----------|----------|----------|----------|
| f_1 | a_{11} | a_{12} | ... | a_{1l} |
| \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots |
| f_n | a_{n1} | a_{n2} | ... | a_{nl} |

In exemplul nostru aceasta va fi

| | L | T | M | K |
|------------|----|----|---|---|
| Ω_0 | 0 | -1 | 0 | 0 |
| ρ_r | -3 | 0 | 1 | 0 |
| P_r | -1 | -2 | 1 | 0 |
| T_r | 0 | 0 | 0 | 1 |
| H | 1 | 0 | 0 | 0 |
| v | 1 | -1 | 0 | 0 |
| g | 1 | -2 | 0 | 0 |
| Γ_r | -1 | 0 | 0 | 1 |

Să presupunem că măsura f a unei cantități fizice se exprimă ca

$$f = g(f_1, \dots, f_n).$$

Se spune că g este "omogenă dimensional" sau "izobarică", dacă pentru orice schimbare de unități de măsură $U_j = m_j U'_j (j = \overline{1, l})$ avem

$$f' = g(f'_1, \dots, f'_n).$$

Făcând înlocuirile, aceasta revine la

$$g(m_1^{a_{11}} m_2^{a_{12}} \dots m_l^{a_{1l}} f_1, \dots) = m_1^{a_{11}} m_2^{a_{12}} \dots m_l^{a_{1l}} g(f_1, f_2, \dots, f_n)$$

dacă (a_1, \dots, a_l) sunt dimensiunile lui f .

Câteva observații simple se impun.

i) Dacă suma

$$f = c_1 f_1 + \dots + c_n f_n$$

este izobarică (cu coeficienți c_i adimensionali) atunci toți termenii sumei au aceeași dimensiune

ii) Produsul

$$f = f_1^{p_1} f_2^{p_2} \dots f_n^{p_n}$$

este o funcție izobarică a cărei dimensiune a_j , în orice unitate U_j este

$$a_j = p_1 a_{1j} + \dots + p_n a_{nj}, \quad j = \overline{1, l}.$$

Putem enunța acum Teorema II.

Fie o funcție g izobarică în raport cu cele l unități fundamentale U_1, U_2, \dots, U_l . Fie matricea dimensională $n \times l$, a măsurilor f_1, \dots, f_n , de rang $p = n - k$, iar g verifică ecuația

$$g(f_1, \dots, f_n) = 0.$$

Atunci, ecuația de mai sus este echivalentă cu

$$g(1, \dots, 1, \Pi_1, \dots, \Pi_k) = 0$$

unde Π_i , $i = \overline{1, k}$, sunt $n - p$ produse independente și adimensionale formate cu f_1, \dots, f_n .

Este evident că schimbând numărul unităților fundamentale se modifică numărul relațiilor independente Π_i .

O demonstrație foarte frumoasă a teoremei se găsește în Brand [1957]. Demonstrația conduce la o reformulare a teoremei care dă în același timp și algoritmul de calcul necesar

Fie f_1, \dots, f_n . Fie

$$A = \begin{pmatrix} P & R \\ Q & QP^{-1}R \end{pmatrix}$$

matricea dimensională $n \times l$ de rang $p = n - k$ unde P este o matrice $p \times p$ nesingulară. Atunci, dacă $g(f_1, \dots, f_n)$ este o funcție izobarică în raport cu cele l unități fundamentale ecuația $g(f_1, \dots, f_n) = 0$ este echivalentă cu ecuația $g(1, \dots, 1, \Pi_1, \dots, \Pi_k) = 0$ unde

$$\Pi_i = f_1^{l_{i1}} f_2^{l_{i2}} \dots f_n^{l_{in}}, \quad i = \overline{1, k}$$

sunt $k = n - p$ cantități adimensionale independente cu matricea exponenților ($k \times n$)

$$L = (-QP^{-1}, I_k).$$

I_k este matricea ($k \times k$) unitate.

Se observă că teorema II conduce la

$$LA = 0.$$

Trebuie înțeles că teorema nu se poate substitui integral modelării. Conform cu observația de mai sus, dacă luăm un alt număr de unități fundamentale, atunci numărul relațiilor independente Π_i se modifică. Acestea conduc la rândul lor, la obținerea unor relații între variabilele f_1, \dots, f_n (de tipul $\Pi_s = g_s(\Pi_1, \dots, \Pi_r)$ și deci $f_s = g_s(\Pi_1, \dots, \Pi_r) f_{i_1}^{p_{i_1 s}} \dots f_{i_k}^{p_{i_k s}}$) numite **relații de similitudine**. Ele au un rol deosebit de important în construcția modelelor căci dau anumite restricții privind comportarea unor parametri în raport cu ceilalți. Cum aceste relații variază funcție de lista unităților fundamentale sau funcție de lista variabilelor f_i alese, este evident că teorema II nu poate impune unele sau altele, decât în contextul alegerii făcute de noi. Prin urmare numai experimentul poate decide care dintre aceste alegeri este corectă (experimentul sau impunerea apriorică în model a unui anumit comportament).

Să vedem ce concluzii se desprind în cazul exemplului nostru. Evident matricea P (4×4) este dată de (primele patru linii și cele patru coloane ale matricei A)

$$P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

iar matricea Q (4×4) este

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ i & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Prin urmare matricea exponenților L (4×8) este

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1/2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1/2 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1/2 & 1/2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aceasta conduce imediat la definirea relațiilor independente

$$\Pi_1 = \Omega_0 \rho^{1/2} p^{-1/2} H$$

$$\Pi_2 = \rho^{1/2} p^{-1/2} v$$

$$\Pi_3 = \Omega_0^{-1} \rho^{1/2} p^{-1/2} g$$

$$\Pi_4 = \Omega_0^{-1} \rho^{-1/2} p^{1/2} T^{-1} \Gamma_r$$

Cu definițiile introduse în Capitolul 5, se constată imediat că se obțin relațiile (între variabilele existente)

$$\Pi_4/\Pi_3 \equiv S_2 \text{ și } S_1 = \frac{\Pi_1 \Pi_3}{\Pi_2} \gamma^{1/2}.$$

Cum din definițiile cantităților Π_i avem

$$\Pi_4/\Pi_3 = \frac{\alpha_0}{B_0} \text{ și } \frac{\Pi_1 \Pi_3}{\Pi_2} \gamma^{1/2} = \frac{B_0}{M_r},$$

rezultă că am definit astfel parametri de similitudine S_1 și S_2 . Acum, observațiile ce urmează introducerii acestora în 5.4 căpătă mai multă substanțialitate.

C. Modele termodinamice stohastice. Vom da în cele ce urmează o schiță de obținere și unele comentarii privind ecuațiile (5.65), (5.68). Pentru o privire mai atentă asupra subiectului recomandăm cititorului lucrările, Monin, Iaglom [1965] și Mohammadi, Pironneau [1994], spre exemplu.

Pentru descrierea mișcării turbulente a unui fluid, diverse mărimi hidrodinamice (viteză, densitate, temperatură, etc.) sunt considerate funcții aleatoare de spațiu și timp.

Cum în ecuațiile de mișcare ale lui Navier și Stokes (sau în alte ecuații de conservare) apar produse de astfel de funcții, acestea vor introduce mărimi noi, necunoscute (vezi, spre exemplu, situații similare în teoria cinetică a gazelor Truesdell, Muncaster [1980], preluate în teoriile de termodinamici extinse Truesdell, Muncaster [1980], Müller [1985]). Trebuie să precizăm că măsurile microscopice nu au în aceste cazuri semnificație fizică măsurabilă aceasta se acordă doar

valorilor medii. In procesul de mediere al unei mărimi, vor apărea în ecuații și medii de produse. Prin urmare, trebuie să scriem ecuațiile de conservare pentru aceste produse. Aceasta însă conduce la apariția unor produse triple de funcții aleatoare ceea ce arată că procesul acesta este nemărginit. Această problemă (adică trunchierea lanțului de ecuații la un anumit nivel astfel ca atât semnificația fizică cât și corectitudinea matematică să nu fie alterate) este cunoscută sub numele de "problema închiderii". Ea are diverse soluții (modalități matematice de realizare), prima dintre acestea fiind atribuită lui Kolmogorov. Pentru obținerea ecuațiilor de tipul (5.65), (5.68) se folosește un model de închidere de ordinul I. Acesta presupune reprezentarea mediilor produselor de fluctuație ale parametrilor hidrodinamici (fluxurile turbulente) cu ajutorul unor funcții (constitutive, numite coeficienți de difuzie) și gradienti ai mărimilor medii. Evident relațiile (5.66) conduc la asemenea funcții.

Pentru definirea mediei unei funcții se consideră o densitate de probabilitate ω ,

$$\omega : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$$

integrabilă și cu

$$\int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}} \omega(\mathbf{y}, \tau) d\mathbf{y} d\tau = 1.$$

Evident, $\omega(\mathbf{y}, \tau) d\mathbf{y} d\tau$ este probabilitatea care dă numărul mediu (sperat) de particule ale sistemului ce se găsesc în vecinătatea $d\mathbf{y}$ a punctului \mathbf{y} , în intervalul de timp $d\tau$ din momentul τ . Mai exact dacă $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3$ deschis și $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}$ deschisă atunci

$$\int_{\mathcal{B}} \int_{\mathcal{V}} \omega(\mathbf{y}, \tau) d\mathbf{y} d\tau$$

este numărul mediu de particule cu poziția în \mathcal{B} , în intervalul de timp \mathcal{V} . Evident, dintre toate momentele lui ω , importanță, din punct de vedere termodinamic, au doar acelea ce pot avea o interpretare fizică. Fie $f(\mathbf{x}, t)$ o asemenea mărime. Atunci, se numește valoarea medie a lui f (sperată) în punctul \mathbf{x} la momentul t

$$\bar{f}(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^3} \int f(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - \tau) \omega d\mathbf{y} d\tau$$

Evident pentru fiecare mărime "microscopică" f , \bar{f} este un câmp (mărime macroscopică) în sensul termodinamicii mediilor continue. Sunt ușor de verificat următoarele proprietăți

$$\overline{f+g} = \bar{f} + \bar{g}; \quad \overline{\alpha f} = \alpha \bar{f} (\alpha \in \mathbb{R}); \quad \frac{\partial \bar{f}}{\partial s} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial s}$$

pentru orice $s = x_1, x_2, x_3, t$; $\overline{\bar{f}g} = \bar{f}\bar{g}$, dar $\overline{fg} \neq \bar{f}\bar{g}$.

Pentru orice mărime (microscopică) aleatoare f se notează cu \bar{f} media sa (mărime macroscopică, deterministă) și cu f' fluctuația sa (abaterea de la medie).

$$f = \bar{f} + f'.$$

Se observă imediat că $\overline{f'} = 0$. Scriind acum sistemul ecuațiilor lui Navier și Stokes în mișcarea turbulentă

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \Delta u_i + f_i,$$

unde f_i sunt forțele ce acționează asupra sistemului (putând fi incluse aici și forțele Coriolis), vom introduce în el descompunerea de mai sus pentru câmpul de viteze și presiune și avem

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{u}_i \bar{u}_j + \overline{u'_i u'_j}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \Delta \bar{u}_i + \bar{f}_i,$$

ecuații ce se numesc adesea, **ecuațiile lui Reynolds**. Fluxurile turbulente sunt termenii neliniari $\overline{u'_i u'_j}$ care fac ca problema determinării valorilor medii să nu fie închisă (acești termeni sunt cunoscuți în literatură sub numele de " tensiuni Reynolds "). În relațiile de mai sus s-a presupus că fluidul este incompresibil (sau că ρ este câmp macroscopic). Pentru exemplificare și o mai bună înțelegere, să considerăm cazul stratului limită orizontal omogen, caz în care funcțiile depind doar de x_3 (componenta verticală), iar $\bar{u}_3 = 0$. Sistemul de mai sus devine acum

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{u'_1 u'_3} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + f \bar{u}_2 \\ \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{u'_2 u'_3} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} - f \bar{u}_1. \end{aligned}$$

Mai sus, s-a presupus și că vâscozitatea " moleculară " ν este neglijabilă în raport cu vâscozitatea turbulentă dată de termenii $\overline{u'_1 u'_3}$ și $\overline{u'_2 u'_3}$. În aceste condiții, dacă vom închide sistemul la acest nivel (teoria K a lui Kolmogorov), avem evident (presupunând și faptul că, coeficienții de difuzie turbulentă coincid pentru cele două fluxuri)

$$\overline{u'_1 u'_3} = -K(z, t) \frac{\partial \overline{u_1}}{\partial z}$$

$$\overline{u'_2 u'_3} = -K(z, t) \frac{\partial \overline{u_2}}{\partial z}$$

(relațiile de mai sus sunt obținute prin analogie cu procesele de transfer din cadrul Teoriei Cinetice a Gazelor, pentru descrierea vâscozității). Acestea conduc împreună cu ecuațiile de mai sus la

$$\frac{\partial \overline{u_1}}{\partial t} - \frac{\partial K}{\partial z} \frac{\partial \overline{u_1}}{\partial z} = K \frac{\partial^2 \overline{u_1}}{\partial z^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x} + f \overline{u_2}$$

$$\frac{\partial \overline{u_2}}{\partial t} - \frac{\partial K}{\partial z} \frac{\partial \overline{u_2}}{\partial z} = K \frac{\partial^2 \overline{u_2}}{\partial z^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p}}{\partial y} - f \overline{u_1}$$

și se observă clar că, funcția K joacă rolul vâscozității ν din sistemul Navier - Stokes clasic.

Așa cum am mai observat funcția K este funcție constitutivă (din punct de vedere macroscopic) și prin urmare, funcție de problemă, ea trebuie să fie dată. În 5.5 prin formulele (5.66), (5.67) și (5.68) sunt propuse diferite forme pentru aceasta.

O problemă similară se pune pentru ecuația de transfer a căldurii (5.65)₃, (5.68)₅. Cititorul va observa că, deși se pornește cu o ecuație în care se presupune că fluidul este neconducător de căldură (din punct de vedere macroscopic, $k = 0$) și nu avem surse volumice de căldură, totuși în urma procesului de mediere și de închidere se obține, spre exemplu, (5.68)₅ în care funcția K " joacă rolul " coeficientului conductibilității termice al lui Fourier. Se poate considera că fluidul conduce căldură (după o lege de tip Fourier) dar, ca și în cazul ecuațiilor de mișcare, se presupune că, conductibilitatea termică moleculară (k) este neglijabilă în raport cu conductibilitatea termică turbulentă dată de forma $\overline{u'_i \theta'}$. Adică, pornind cu o ecuație de transfer de căldură de forma

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (u_i \theta) = k \Delta \theta,$$

introducând valorile medii și fluctuațiile prin $\theta = \overline{\theta} + \theta'$, $u_i = \overline{u}_i + u'_i$ și mediiind ajungem la ecuația

$$\frac{\partial \overline{\theta}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\overline{u}_i \overline{\theta'} + \overline{u'_i \theta'}) = k \Delta \overline{\theta'}$$

În general, pentru închiderea termenului $\overline{u'_i \theta'}$ se folosește o metodă similară cu cea de mai sus, adică, apriori

$$\overline{u_i \theta'} = -K_{ij}(x_1, x_2, x_3, t) \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_j},$$

unde K_{ij} sunt coeficienții de difuzie turbulentă (sau tensorul conductibilității termice turbulente, prin analogie cu termodinamica mediilor continue). Presupunându-se K sferic (difuzia se face la fel în orice direcție), $K = KI$ avem

$$\overline{u_i \theta'} = -K(x_1, x_2, x_3, t) \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_i} \text{ și neglijând } k \text{ în prezența lui } K \text{ avem}$$

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\overline{u_i \theta}) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(K \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_i} \right),$$

ceea ce conduce la ecuațiile (5.65)₃ și (5.68)₅.

Ca mai sus este de observat în final că funcția K este constitutivă și deci (ca și coeficientul Fourier) trebuie să fie dată odată cu problema. Formulele (5.66), (5.67) și (5.69) propun asemenea modele. Ele sunt de natură empirică. Un număr de testări efectuate la IMH Laboratorul de Fizica Atmosferei au condus la verificarea mulțumitoare a acestor formule.

A. Program de calcul pentru problema din Capitolul 5.3

Program pentru calculul funcției de curent

1. START

↓

2. Se inițializează : n_x ; n_y ; $ep = 1/3$; eps ; dx ; dy ; π ; $\alpha = alf$; $C1$; $C2$; $\beta = bet$; $ind1 = 1$; $ind2 = n_x$.

↓

3. $s = 0 \rightarrow ro = C1 * (1 + s * (j - 1) * dy) * \exp(-C1/2 * (j - 1) * dy)$

↓

4. $j = 1$

↓

5. $\psi(1, 1, j) = 0$

$\psi(1, n_y, j) = - \exp(C2)$

↓

6. $j < n_x$; Dacă Da, atunci $j = j + 1$ și merge la 5.

↓ Nu

7. $k = 2$

↓

8. $\psi(1, k, 1) = -(k - 1) * dy * \exp(C2 * (k - 1) * dy)$

↓

9. $k < n_y$; Dacă Da, atunci $k = k + 1$ și merge la 8.

↓ Nu

10. $j = 2$

↓

11. $k = 2$

↓

12. $s1 = 0$; $s2 = 0$

↓

13. $i = 1$

↓

$$14. \quad d = 1 / \sqrt{((j - i) * dx) ** 2 + ((k - 1) * dy) ** 2}$$

$$s1 = s1 + d ; s2 = s2 + d * \psi(1, i, ny)$$

↓

15. $i < nx$; Dacă Da , atunci $i = i + 1$ și merge la 14.

↓ Nu

$$16. \quad i = 1$$

↓

$$17. \quad d = 1 / \sqrt{((j - i) * dx) ** 2 + ((k - ny) * dy) ** 2}$$

$$s1 = s1 + d ; s2 = s2 + d * \psi(1, i, ny)$$

↓

18. $i < nx$; Dacă Da , atunci $i = i + 1$ și merge la 17.

↓ Nu

$$19. \quad i = 1$$

↓

$$20. \quad d = 1 / \sqrt{((j - 1) * dx) ** 2 + ((k - i) * dy) ** 2}$$

$$s1 = s1 + d ; s2 = s2 + d * \psi(1, 1, i)$$

↓

21. $i < ny$; Dacă Da , atunci $i = i + 1$ și merge la 20.

↓ Nu

$$22. \quad \psi(1, k, j) = s2 / s1$$

↓

23. $k < ny - 1$; Dacă Da , atunci $k = k + 1$ și merge la 12.

↓ Nu

24. $j < nx$; Dacă Da , atunci $j = j + 1$ și merge la 11.

↓ Nu

$$25. \quad j = 2$$

↓

$$26. \quad k = 2$$

↓

$$27. \quad r(k, j) = (\psi(1, k, j - 1) + \psi(1, k, j + 1)) / (dx * dx) + \\ + (\psi(1, k - 1, j) + \psi(1, k + 1, j)) / (dy * dy) - \\ - (2 / (dx * dx) + 2 / (dy * dy)) * \psi(1, k, j) - ro(j, dy)$$

↓

28. $k < n_y - 1$; Dacă Da, atunci $k = k + 1$ și merge la 27.

↓ Nu

29. $j < n_x - 1$; Dacă Da, atunci $j = j + 1$ și merge la 26.

↓ Nu

30. $iter = 0$

↓

31. $j = 2$

↓

32. $k = 2$

↓

33. $\psi(1, k, j) = \psi(1, k, j) + bet * r(k, j) / (2 / (dx * dx) + 2 / (dy * dy) + alf)$

↓

34. $k < n_y - 1$; Dacă Da, atunci $k = k + 1$ și merge la 33.

↓ Nu

35. $j < n_x - 1$; Dacă Da, atunci $j = j + 1$ și merge la 32.

↓ Nu

36. $j = 1$

↓

37. $\psi(2, 1, j) = 0$; $\psi(2, n_y, j) = -exp(C2)$

↓

38. $j < n_x$; Dacă Da, atunci $j = j + 1$ și merge la 37.

↓ Nu

39. $k = 2$

↓

40. $\psi(2, k, 1) = -(k - 1) * dy * exp(C2 * (k - 1) * dy)$

$\psi(2, k, n_x) = \psi(1, k, n_x - 1)$

↓

41. $k < n_y - 1$; Dacă Da, atunci $k = k + 1$ și merge la 40.

↓ Nu

42. $j = 2$

↓

43. $k = 2$

↓

$$44. r(k,j) = (\psi(2, k, j - 1) + \psi(2, k, j + 1))/(dx * dx) + \\ + (\psi(2, k - 1, j) + \psi(2, k + 1, j))/(dy * dy) - \\ - (2/ (dx * dx) + 2/(dy * dy) + alf) * \psi(2, k, j) - ro(j, dy)$$

↓

45. $k < ny - 1$; Dacă Da, atunci $k = k + 1$ și merge la 44.

↓ Nu

46. $j < nx - 1$; Dacă Da, atunci $j = j + 1$ și merge la 43.

↓ Nu

47. $k = 2$

↓

48. $|\psi(2, k, nx)| > 2 * \exp(C2)$; Dacă Da, atunci

$\psi(2, k, nx) = 2 * \exp(C2) * \text{abs}(\psi(2, k, nx)) / \psi(2, k, nx)$ și merge la 49

↓ Nu

49. $k < ny - 1$; Dacă Da, atunci $k = k + 1$ și merge la 48.

↓ Nu

50. $j = 1$

↓

51. $k = 1$

↓

52. $\text{dif}(k,j) = \text{abs}(\psi(1, k, j) - \psi(2, k, j))$

↓

53. $k < ny$; Dacă Da, atunci $k = k + 1$ și merge la 52.

↓ Nu

54. $j < nx$; Dacă Da, atunci $j = j + 1$ și merge la 51.

↓ Nu

55. $j = 2$

↓

56. $k = 2$

↓

57. $\text{dif}(k,j) > \text{eps}$; Dacă Da merge la 67.

↓ Nu

58. $k < ny - 1$; Dacă Da, atunci $k = k + 1$ și merge la 57.

↓ Nu

59. $j < nx - 1$; Dacă Da, atunci $j = j + 1$ și merge la 56.

↓ Nu

60. $j = 1$

↓

61. $k = 1$

↓

62. $\psi(2, j, k) = \psi(2, j, k) / \exp(C2 * (j - 1) * dy)$

↓

63. $k < nx$; Dacă Da, atunci $k = k + 1$ și merge la 62.

↓ Nu

64. $j < ny$; Dacă Da, atunci $j = j + 1$ și merge la 61.

↓ Nu

65. SCRIE eps; $\psi(2, j, k)$; $j = 1, ny$; $k = ind1, ind2$

↓

66. STOP

67. $j = 1$

↓

68. $k = 1$

↓

69. $\psi(1, k, j) = \psi(2, k, j)$

↓

70. $k < ny$; Dacă Da, atunci $k = k + 1$ și merge la 69.

↓ Nu

71. $j < nx$; Dacă Da, atunci $j = j + 1$ și merge la 68.

↓ Nu

72. $iter > 50$; Dacă Da, atunci SCRIE dif(j,k) ; $j = 1, ny$; $k = ind1, ind2$ și merge la 65.

↓ Nu

73. Afîșează iter

↓

74. $iter = iter + 1$ și merge la 31.

Calculul perturbațiilor vitezelor, presiunii, temperaturii și densității

1. START

↓

2. Se inițializează: n_x ; n_y ; dx ; dy ; α ; π ; $ind1 = 1$; $ind2 = n_x$

↓

3. Citește $\psi(j, k)$, $j = 1, n_y$; $k = 1, n_x$

↓

4. $k = 1$

↓

5. $j = 2$

↓

6. $u(j, k) = -1/((1 - 0.28673 * (j - 1) * dx) * (1/0.402)) * (\psi(j + 1, k) - \psi(j - 1, k))/(2 * dy)$

↓

7. $j < n_y - 1$; Dacă Da, atunci $j = j + 1$ și merge la 6.

↓ Nu

8. $u(1, k) = -(\psi(2, k) - \psi(1, k))/dy$

↓

9. $u(n_y, k) = -1/((1 - 0.28673 * (n_y - 1) * dx) * (1/0.402)) * (\psi(n_y, k) - \psi(n_y - 1, k))/dy$

↓

10. $k < n_x$; Dacă Da, atunci $k = k + 1$ și merge la 5.

↓ Nu

11. $j = 1$

↓

12. $k = 2$

↓

13. $w(j, k) = ((1 - 0.28673 * (j - 1) * dx) * (-1/0.402)) * (\psi(j, k + 1) - \psi(j, k - 1))/(2 * dx)$

↓

14. $k < n_x - 1$; Dacă Da, atunci $k = k + 1$ și merge la 13.

↓ Nu

$$15. w(j,1) = ((1 - 0.28673 * (j - 1) * dx) * (-1/0.402)) * (\psi(j,2) - \psi(j,1))/dx$$

$$w(j,nx) = ((1 - 0.28673 * (j - 1) * dx) * (-1/0.402)) * (\psi(j,nx) - \psi(j,nx - 1))/dx$$

↓

16. $j < ny$; Dacă Da, atunci $j = j + 1$ și merge la 12.

↓ Nu

17. Scrie $u(j,k)$; $w(j,k)$; $j = 1, ny$; $k = ind1, ind2$

↓

18. $s = 0$; inițializează $a1$; $a2$; $gamr$; ep

↓

19. $k = 1$

↓

20. $j = 1$

↓

$$21. \psi_z(k,j) = (-s/a2) * \ln | 1 + a2 * \psi(k,j) |$$

↓

$$22. tr(k,j) = 273,15 - gamr * (k - 1) * dy$$

↓

23. $j < nx$; Dacă Da, atunci $j = j + 1$ și merge la 21.

↓ Nu

24. $k < ny$; Dacă Da, atunci $k = k + 1$ și merge la 20.

↓ Nu

25. $j = 2$

↓

26. $k = 2$

↓

$$27. \theta f(k,j) = ep * *2 * u(k,j) * (w(k,j + 1) - w(k,j - 1))/2/dx + \\ + ep * *2 * w(k,j) * (w(k + 1,j) - w(k - 1,j))/2/dy + \\ + tr(k,j) * (\psi_z(k + 1,j) - \psi_z(k - 1,j))/2/dy/0.402$$

↓

28. $k < ny - 1$; Dacă Da, atunci $k = k + 1$ și merge la 27.

↓ Nu

29. $j < nx - 1$; Dacă Da, atunci $j = j + 1$ și merge la 26.

↓ Nu

$$30. \text{tt} = 1/0.0009 * 15/273.15$$

↓

$$31. \theta(1, 1) = 0$$

↓

$$32. j = 2$$

↓

$$33. \theta(1, j) = \text{tt} * 0.0009$$

$$\begin{aligned} \theta f(1, j) = & \text{ep} * *2 * u(1, j) * (w(1, j) - w(1, j - 1))/dx + \\ & + \text{ep} * *2 * w(1, j) * (w(2, j) - w(1, j))/dy - \\ & - \text{tr}(1, j) * (\psi_z(2, j) - \psi_z(1, j))/dy/0.402 \end{aligned}$$

↓

34. $j < nx$; Dacă Da, atunci $j = j + 1$ și merge la 33.

↓ Nu

$$35. k = 2$$

↓

$$36. \theta(k, 1) = 0$$

$$\begin{aligned} \theta f(k, 1) = & \text{ep} * *2 * u(k, 1) * (w(k, 2) - w(k, 1))/dx + \\ & + \text{ep} * *2 * w(k, 1) * (w(k, 1) - w(k - 1, 1))/dy - \\ & - \text{tr}(k, 1) * (\psi_z(k, 1) - \psi_z(k - 1, 1))/dy/0.402 \end{aligned}$$

↓

37. $k < ny$; Dacă Da, atunci $k = k + 1$ și merge la 36.

↓ Nu

$$\begin{aligned} 38. \theta f(1, 1) = & \text{ep} * *2 * u(1, 1) * (w(1, 2) - w(1, 1))/dx + \\ & + \text{ep} * *2 * w(1, 1) * (w(2, 1) - w(1, 1))/dy - \\ & - \text{tr}(1, 1) * (\psi_z(2, 1) - \psi_z(1, 1))/dy/0.402 \end{aligned}$$

↓

$$39. j = 2$$

↓

$$40. k = 1$$

↓

$$41. \theta(k+1, j) = ((\theta(k, j) - a1 * \theta(k, j)) * 0.402 / (\text{tr}(k, j) + \theta(k, j)) * 0.0009$$

↓

42. $k < n_y - 1$; Dacă Da, atunci $k = k + 1$ și merge la 41.

↓ Nu

43. $j < n_x$; Dacă Da, atunci $j = j + 1$ și merge la 40.

↓ Nu

44. Scrie $\theta(k, j)$; $k = 1, n_y$; $j = 1, n_x$

↓

45. $j = 1$

↓

46. $k = 1$

↓

47. $p(j, k) = (1.402/0.402) * (-\psi(j, k) + \theta(j, k)/0.0009 -$

$$-a2 * \ln | 1 - a2 * (j - 1) * dy |)$$

$$\rho(j, k) = p(j, k) - \theta(j, k)$$

↓

48. $k < n_x$; Dacă Da, atunci $k = k + 1$ și merge la 47.

↓ Nu

49. $j < n_y$; Dacă Da, atunci $j = j + 1$ și merge la 46.

↓ Nu

50. Scrie $p(j, k)$; $\rho(j, k)$; $j = 1, n_y$; $k = 1, n_x$

↓

51. STOP

B. Schema logică a problemei brizelor, Capitolul 5.5

Schema logică a programului principal

1. START

↓

2. Citire date inițiale

↓

3. $i = 1$

- ↓
4. Citire condiții la frontiera $z = h$
- ↓
5. $v'(t + 1) = v'(t) - \Delta t * \text{ecuația (5.87)}$
 $\theta'(t + 1) = \theta'(t) - \Delta t * \text{ecuația (5.88)}$
- ↓
6. $u^*(t + 1) = u'(t) - \Delta t * \text{ecuația (5.89)}$
 $w^*(t + 1) = w'(t) - \Delta t * \text{ecuația (5.90)}$
- ↓
7. **REZOLVARE** Ecuație Poisson la $t + 1$. Ecuația (5.93)
- ↓
8. $u'(t + 1) = u^*(t + 1) - \frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x}$
 $w'(t + 1) = w^*(t + 1) - \frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial z}$
- ↓
9. $t = t_{\max}$; Dacă Nu, atunci $t = t + 1$ și merge la 4.
- ↓ Da
10. Scrie rezultatele
- ↓
11. STOP

Schema logică a subrutinei de racordare a condițiilor la limită

1. Intraire
- ↓
2. $\theta_o = \theta_o + \Delta\theta$
- ↓
3. $u'(h) = 0$; Dacă Nu, atunci merge la 7.
- ↓ Da
4. $Ri \simeq 0.14$
- ↓
5. $Ri \leq Ri_c$; Dacă Nu, atunci merge la 9.
- ↓ Da

$$6. K(h) = \lambda z^2 \left(\frac{g}{\theta'} \left| \frac{\partial \theta'}{\partial z} \right| \right)^{1/2}$$

↓

12. IEȘIRE

$$7. Ri = \frac{g \theta(h) - \theta_o}{\theta (u'(h)/h)^2 h}$$

↓

8. $Ri \geq 0.14$; Dacă Nu, atunci merge la 5.

↓ Da, atunci merge la 4.

9. $t = 1$; Dacă Nu, atunci merge la 11.

↓ Da

10. $K(h) =$ Formula (5.66)

$$u'(h) = u'_1 + \frac{h}{h + \Delta z} \Delta u$$

$$v'(h) = v'_1 + \frac{h}{h + \Delta z} \Delta v$$

$$\theta'(h) = \theta'_1 + \frac{\Delta z}{h + \Delta z} \Delta \theta$$

↓

Merge la 12.

11. $K(h) =$ Formula (5.66)

$$u'(h) = \text{Ecuația}(5.79)_1$$

$$v'(h) = \text{Ecuația}(5.80)_1$$

$$\theta'(h) = \text{Ecuația}(5.81)_1$$

↓

Merge la 12.

BIBLIOGRAFIE

- Beju I., Soós E., Teodorescu P.P.** - Tehnici de calcul vectorial cu aplicații. Editura Tehnică, București, 1976.
- Beju I., Soós E., Teodorescu P.P.** - Tehnici de calcul tensorial cu aplicații. Editura Tehnică, București, 1977.
- Beju I., Soós E., Teodorescu P.P.** - Euclidian tensor calculus with applications. Editura Tehnică - Abacus Press, 1983.
- Bengtsson L.** - Baroclinic Models, SHMI, Stockholm, 1969
- Beșleagă N.** - Elemente de meteorologie dinamică, I.M.H. București, 1972
- Beșleagă N., Doneaud A., Stoian R., Pescaru I.V., Rareș H., Drăghici I., Chertic E., Mihalea M.** - Analiza și prognoza numerică a câmpurilor de geopotențial, I.M.H., București, 1976.
- Birkhoff G.** - Hydrodynamics. Dover Pub.Inc., New - York, 1955.
- Brand L.** - The Pi Theorem of Dimensional Analysis. Arch.Rat.Mech.Anal. **1**, 1, 34 - 45, 1957.
- Chorin A.J.** - Numerical Solution of the Navier - Stokes Equations. Math. Comput, **22**, 745-762, 1968.
- Chorin A.J.** - On the Convergence of the Discrete Approximations to the Navier - Stokes Equations. Math. Comput., **23**, 341 - 353, 1969.
- Cipu C., Țigoiu V.** - A model and numerical algorithm for air flow with proper thermic gradient (în pregătire).
- Cleja-Țigoiu S., Cristescu N.** - Teoria plasticității cu aplicații în prelucrarea metalelor. Univ.București, 1985.
- Coleman B.D., Noll W.** - An Approximation Theorem for Functionals, with Applications in Continuum Mechanics. Arch.Rat.Mech.Anal., **6**, 5, 355-370, 1960.
- Coleman B.D.** - Thermodynamics of Materials with Memory. Arch.Rat.Mech. Anal., **17**, 1, 1-46, 1964.
- Curtis C.F., Bird R.B., Hassager O.** - Kinetic Theory and Rheology of Macromolecular Solutions. Advances in Chem.Phys., I.Prigogine and S.A.Rice, XXXV, 31-117, 1976.

- Doneaud A., Pescaru I.V.** - Numerical Forecasting Method Based on Baroclinic Model Including Orography. *Arbeiten aus der Zentralanstalt für Meteorologie und Geodynamic, Heft 32, Wien, 1978.*
- Doos B.O.** - Numerical Weather Forecasting with the Barotropic Model. Univ. of Stockholm, 1968.
- Dragoş L.** - Magnetofluid Dynamics. Ed. Academiei-Abacus Press, Bucureşti - Tunbridge Wells, Kent, 1975.
- Dragoş L.** - Principiile mecanicii analitice. Ed. Tehnică Bucureşti, 1976.
- Dragoş L.** - Principiile mecanicii mediilor continue. Ed. Tehnică, Bucureşti, 1983.
- Drăghici I.** - Dinamica atmosferei, Ed. Academiei, 1988.
- Ene H., Țigoiu V.** - Sur le problème du mouvement de l'air en présence d'un obstacle isolé. *Rev. Roum. Science Tec., Méc. Appliq.*, **25**, 1, 75-84, 1980.
- Eringen A.C.** - Mechanics of Continua. John Wiley and Sons Inc., New York-London-Sydney, 1967.
- Estoque M.A.** - A theoretical investigation of the sea breeze. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **87**, 136-146, 1961.
- Făciu C.** - On thermodynamics restrictions for the Navier-Stokes-Fourier fluids. *Studii Cerc. Mat.*, **37**, 447 - 456, 1985.
- Fox Ch.** - A generalization of the Cauchy principal value. *Can. J. Math.*, **IX**, 1, 110-118, 1957.
- Gibbs J.W.** - Elementary principles in statistical mechanics, developed with especial references to the rational foundation of thermodynamics. New York, 1902.
- Guiraud J.P., Zeytounian R.Kh.** - *J.F.M.*, **17**, 3, 337 - 402, 1979.
- Gurtin M.** - An Introduction to Continuum Mechanics. Acad. Press, 1981.
- Haltiner G.J., Martin F.** - Dynamical and Physical Meteorology, Mc. Graw-Hill, New York, 1957.
- Haltiner G.J.** - Numerical Weather Prediction, Wiley, New York, 1971.
- Holton J.** - An Introduction to Dynamic Meteorology, Acad. Press, N.Y., 1979.
- Iacob C.** - Mecanica Teoretică. E.D.P., Bucureşti, 1971.
- Isaacson E., Keller H.B.** - Analysis of Numerical Methods, Wiley & Sons, New York, 1967.
- Joseph D.D.** - Stability of Fluid Motions I, II, Springer Trac. in Mat. Phys., 1976.

- Lions J.L.** - Quelques methodes de résolution des problèmes aux limites non li aires. Dunod, Paris, 1967.
- Liu I Shih** - Method of Lagrange Multipliers for Exploitation of the Entropy Principle Arch.Rat.Mech.Anal., **46**, 131-148, 1972.
- Mesinger F., Arakawa A.** - Numerical Methods Used in Atmospheric Models, GARP Publ.Serv., **17**, 1 - 64, 1976.
- Mohammadi B., Pironneau O.** - Analysis of the K-Epsilon Turbulence Model. John Wiley and Sons, Masson, 1994.
- Monin A.S., Iaglom A.M.** - Statisticeskaia Ghidromecanica.Izd.Nauka, 1965 .
- Müller I.** -On the Entropy Inequality.Arch.Rat.Mech.Anal.,**26**,118-141,1967 .
- Müller I.** - Thermodynamics. Pitman, 1985.
- Ogura Y. - Phillips N.A.** - J.Atmosph.Sci., **19**, 173, 1962.
- Pescaru V.I.** - Metode numerice pentru ecuații cu derivate parțiale de tip eliptic, cu aplicații la un sistem informatic meteorologic.Teză de doctorat, Universitatea Bucure ti, 1978.
- Pescaru V.I., Romanof N.,  igoiu V.** - Studiul mi c rilor de briz .Contract ICREST - IMH., 1985.
- Riddaway R.W.** - An Introduction to Numerical Methods for Weather Prediction, ECMWF Lecture Note No.1.4, Reading, 1990.
- Saito N.** - Numerical Experiments of the Land and Sea Breeze Circulation.Rap. in Meteo and Geophys., Tokyo, 1976.
- Soos E., Teodosiu C.** - Calcul tensorial cu aplica ii  n mecanica solidelor. Ed. t.Enc., 1983.
- Speziale Ch.** - On Frame-Indifference and Iterative Procedures in the Kinetic Theory of Gases. Int.J.Eng.Sci., **19**, 63 - 73, 1981.
- Suliciu I.** - On the shape memory alloys and the rate type constitutive equations Eurom.Colloq.171, Ag. 25 - Sep. 3, Jablona, Polonia,1983 (nepublicat)
- Temam R.** - Navier - Stokes Equations (theory and numerical analysis).North-Holland Pub.Comp., 1979.
- Thompson P.D.** - Numerical Weather Analysis and Prediction,The Mac Millan Com.,N.Y.,1961.

- Truesdell C.** - Rational Thermodynamics, A Course of Lectures on Selected Topics. New York, 1969.
- Truesdell C.** - A First Course in Rational Continuum Mechanics. Acad.Press, 1977.
- Truesdell C., Bharatha S.** - Classical Thermodynamics as a Theory of Heat Engines. Springer Verlag, 1978.
- Truesdell C., Muncaster R.G.** - Fundamentals of Maxwell's Kinetic Theory of a Simple Monatomic Gas. Acad.Press, 1980.
- Țigoiu V.** - Procedee iterative în Teoria Cinetică.Legi constitutive macroscopice atașate.Contract 930 CNST - INCREST, 1983.
- Wang C.C.** - A New Representation Theorem for Isotropic Functions. Arch.Rat. Mech.Anal., **36**, 166-223, 1970.
- Zeytounian K.R.** - Singular Perturbations and Boundary Layer Theory. Lect. Notes in Math., Springer Verlag, 1977.
- Zeytounian K.R.** - Les Modèles Assymptotiques de la Mécanique des Fluides. Lect.Notes in Phys.,245, Springer Verlag, 1988.

VERIFICAT
2017



VERIFICAT
2007

Tiparul s-a executat sub c-da nr. 356/1997,
la Tipografia Editurii Universității din București

ISBN - 973 - 575 - 160 - 7

Lei 10500