GHEORGHE POTCOVARU

Matematici Superioare

❖ Ecuaţii diferenţiale

Editura Universităţii din Bucureşti

GHEORGHE POTCOVARU

Matematici Superioare

❖ Ecuaţii diferenţiale

Editura Universităţii din Bucureşti

2001

Referenţi ştiinţifici: **Conf. dr. Paraschiv BALEA**
Lector dr. Maria JOIŢA

Şos. Panduri 90-92, Bucureşti - 76235; Tel./Fax: 410.23.84
E-mail: editura@unibuc.ro
Internet: www.editura.unibuc.ro

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale
POTCOVARU, GHEORGHE
Matematici superioare / Potcovaru Gheorghe - Bucureşti, Editura Universităţii din Bucureşti, 2001
p. ; cm.
Bibliogr.
ISBN 973-575-515-7

517

Tiparul s-a executat sub cda 771/2001
la Tipografia Editurii Universităţii din Bucureşti

Cuprins

Capitolul 1

Ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi

1.1 Definiţii

DEFINIŢIA 1.1.1 *Se numeşte ecuaţie diferenţială de ordinul întâi orice relaţie de forma*

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \tag{1.1}$$

unde $F : D \subset \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ *este o funcţie care depinde efectiv de* $\dfrac{dy}{dx}$ *,şi se cere determinarea funcţiilor de forma*

$$\phi : I \to \mathbf{R} \tag{1.2}$$

unde $I \subset \mathbf{R}$ *este interval, cu proprietatea*

$$F\left(x, \phi(x), \frac{d\phi}{dx}(x)\right) = 0,\ (\forall)\, x \in I \tag{1.3}$$

O funcţie de forma (1.2) care verifică relaţia (1.3) se numeşte soluţie pe I *a ecuaţiei diferenţiale (1.1).*

Observaţii. 1)În ecuaţia diferenţială (1.1) litera y este numită funcţie necunoscută, iar x este numită variabilă independentă. Expresia $\dfrac{dy}{dx}$ se înlocuieşte adesea prin y'. Într-o ecuaţie diferenţială, funcţia necunoscută şi variabila independentă pot fi desemnate prin orice simboluri, dacă nu se crează confuzii. În cazuri concrete litera y este "eticheta" unei mărimi fizice sau de altă natură cum ar fi:

masa, spaţiu, viteza, acceleraţia, intensitatea, tensiunea, concentraţia, etc. Variabila independentă este adesea timpul, desemnat prin t.

2) Din definiţie rezultă că soluţia $\phi : I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ este derivabilă pe I şi că $\left(x, \phi(x), \frac{d\phi}{dx}(x)\right) \in D$ pentru orice $x \in I$. Dacă J este un interval inclus în I atunci restricţia lui ϕ la J este soluţie pe J a ecuaţiei (1.1).

3) Soluţia din definiţie se indică uneori prin: $y = \phi(x)$, $x \in I$. O soluţie neprecizată se indică adesea sub forma: $y = y(x)$, $x \in I$. Pentru exprimarea unor proprietăţi în care intervin soluţii, uneori, prin abuz de limbaj, o soluţie se desemnează sub forma " $y(x)$ " înţelegând că este vorba de funcţia $x \to y(x)$ şi nu de valoarea acestei funcţii în punctul x.

4)Determinarea soluţiilor unei ecuaţii diferenţiale este un proces complex, numit rezolvarea (sau integrarea) ecuaţiei diferenţiale respective. Mulţimea de definiţie a unei soluţii se determină, de regulă, în procesul rezolvării.

Exemplu O soluţie pentru ecuaţia diferenţială de ordinul întâi

$$xy + \frac{dy}{dx} - x^3 - 2x = 0$$

este $y = x^2$, pentru orice $x \in \mathbf{R}$. Într-adevăr, înlocuind pe y cu x^2 obţinem

$$x \cdot x^2 + \frac{d}{dx}x^2 - x^3 - 2x = x \cdot x^2 + 2x - x^3 - 2x = 0, \ \forall x \in \mathbf{R}$$

DEFINIŢIA 1.1.2 *Graficul unei soluţii a unei ecuaţii diferenţiale se numeşte curbă integrală a acelei ecuaţii diferenţiale.*

Observaţii. 1) Dacă o curbă $\gamma \subset \mathbf{R}^2$, definită parametric prin

$$\gamma : \begin{cases} x &= \alpha(t) \\ y &= \beta(t), \quad t \in I \subset \mathbf{R} \end{cases}$$

unde $\alpha, \beta : I \to \mathbf{R}$, este curbă integrală a unei ecuaţii diferenţiale, adică este graficul unei soluţii, atunci se spune că sistemul

$$\begin{cases} x &= \alpha(t) \\ y &= \beta(t), \quad t \in I \subset \mathbf{R} \end{cases}$$

este reprezentarea parametrică a acelei soluţii.

Dacă $\alpha, \beta \in C^1(I)$, $\alpha(I) = J$ şi $\alpha'(t) \neq 0$ pentru orice $t \in I$, atunci curba γ se poate defini explicit sub forma

$$\gamma : y = \beta\left(\alpha^{-1}(x)\right), \ x \in J$$

Rezultă,

$$y'(x) = \beta'\left(\alpha^{-1}(x)\right) \cdot \frac{1}{\alpha'(t)} = \frac{\beta'(t)}{\alpha'(t)},$$

pentru orice $x \in J$ şi $t \in I$ pentru care $x = \alpha(t)$. Condiţia ca γ să fie curbă integrală a ecuaţiei (1.1), adică $y = \beta\left(\alpha^{-1}(x)\right)$ să fie soluţie a ecuaţiei (1.1), devine

$$F\left(\alpha(t), \beta(t), \frac{\beta'(t)}{\alpha'(t)}\right) = 0, \ (\forall)\, t \in I$$

2) Dacă γ este o curbă definită implicit sub forma

$$\gamma : g(x, y) = 0,$$

unde $g : E \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ este o funcţie de clasă C^1 în E şi $\dfrac{\partial g(x,y)}{\partial y} \neq 0$ pentru orice $(x, y) \in E$, atunci, pentru orice punct $M_0(x_0, y_0) \in \gamma$, există un interval deschis I_0, care conţine pe x_0, şi o funcţie unică $\phi : I_0 \to \mathbf{R}$ cu proprietăţile:

$$\begin{aligned}
\phi(x_0) &= y_0 \\
g(x, \phi(x)) &= 0, \ (\forall)\, x \in I_0 \\
\phi'(x) &= -\frac{\dfrac{\partial g(x, \phi(x))}{\partial x}}{\dfrac{\partial g(x, \phi(x))}{\partial y}}, \ (\forall)\, x \in I_0
\end{aligned}$$

Graficul $\{(x, \phi(x)) \mid x \in I_0\}$ al funcţiei ϕ este inclus în γ; de aceea, în condiţiile de mai sus, curba γ va fi curbă integrală a ecuaţiei diferenţiale (1.1) dacă

$$F(x, \phi(x), \phi'(x)) = F\left(x, \phi(x), -\frac{\dfrac{\partial g(x, \phi(x))}{\partial x}}{\dfrac{\partial g(x, \phi(x))}{\partial y}}\right) = 0$$

pentru orice $M_0(x_0, y_0) \in \gamma$, şi $x \in I_0$. În particular, pentru $x = x_0$, egalitatea devine

$$F\left(x_0, y_0, -\frac{\dfrac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial x}}{\dfrac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial y}}\right) = 0$$

pentru orice (x_0, y_0)cu proprietatea $g(x_0, y_0) = 0$.

1.2 Forme de ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi.

Definiţia 1.2.1 *1. Relaţia (1.1) este numită forma generală a unei ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi.*

2. O relaţie de forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1.4}$$

unde $f : E \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ este o funcţie dată, este numită forma normală a unei ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi.

3. O relaţie de forma

$$P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = 0 \tag{1.5}$$

unde $P, Q : E \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ sunt funcţi date, este numită forma Pfaff a unei ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi.

Observaţie. Ecuaţia diferenţială (1.5) se poate scrie sub forma normală

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$$

dacă funcţia Q nu se anulează în E.

Dacă funcţia P nu se anulează în E, atunci ecuaţia diferenţială (1.5) se poate scrie sub forma normală

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{Q(x, y)}{P(x, y)}$$

în care x este considerată funcţie necunoscută, iar y este variabila independentă.

1.3 Problema Cauchy

Principala problemă pentru o ecuaţie diferenţială este rezolvarea sau integrarea sa, adică determinarea soluţiilor sale. Problemele concrete care conduc la ecuaţii diferenţiale nu cer cunoaşterea tuturor soluţiilor, ci doar a unor soluţii care îndeplinesc anumite condiţii. O problemă practică importantă şi frecvent întâlnită este problema, numită problemă Cauchy, care constă în determinarea unei curbe integrale, a unei ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi, care trece printr-un punct dat. Mai precis:

DEFINIŢIA 1.3.1 *Problema Cauchy pentru ecuaţia diferenţială (1.1) este problema care constă în determinarea unei soluţii $y = y(x)$, $x \in I$, a ecuaţiei (1.1), care verifică condiţia*

$$y(x_0) = y_0 \tag{1.6}$$

unde $x_0 \in I$ şi $y_0 \in \mathbf{R}$ sunt numere date. Condiţia (1.6) se numeşte condiţie iniţială sau condiţie Cauchy.

Problema Cauchy descrisă mai sus se menţionează de obicei sub forma:

$$\text{problema Cauchy } (1.1 + 1.6)$$

sau

$$\text{problema Cauchy } \begin{cases} F(x, y, y') = 0 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

în care se specifică ecuaţia diferenţială şi condiţia iniţială. Soluţia problemei Cauchy $(1.1 + 1.6)$ este notată, de obicei, prin: $y = y(x; x_0, y_0)$, $x \in I$.

1.4 Soluţii

1.4.1 Soluţia generală.

DEFINIŢIA 1.4.1 *Se numeşte soluţie generală a unei ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi, pe mulţimea $E \subset \mathbf{R}^2$, o familie S de soluţii ale acelei ecuaţii diferenţiale cu proprietatea că pentru orice punct $(x_0, y_0) \in E$ există o singură soluţie $\phi \in S$ astfel încât $\phi(x_0) = y_0$.*

Observaţie. Soluţia generală se indică de obicei printr-o soluţie de forma

$$y = \phi(x, c), \ x \in I_c$$

care depinde de un parametru $c \in J$, unde J şi I_c, pentru fiecare $c \in J$, sunt intervale reale. Această soluţie trebuie să aibă proprietatea: pentru orice $(x_0, y_0) \in E$ există un singur $c_0 \in J$ astfel încât soluţia $y = \phi(x, c_0)$, $x \in I_{c_0}$, verifică condiţia $\phi(x_0, c_0) = y_0$.

Exemplu. Pentru ecuaţia diferenţială

$$\frac{dy}{dx} - y + x^2 - 2x = 0$$

funcţia

$$y = ce^x + x^2, \ x \in \mathbf{R}$$

unde $c \in \mathbf{R}$ este o constantă arbitrară, este soluţie generală pe $\mathbf{R}^2$. Într-adevăr, înlocuind în ecuaţie obţinem

$$\begin{aligned} \frac{dy(x)}{dx} - y(x) + x^2 - 2x &= ce^x + 2x - \left[ce^x + x^2\right] + \\ +x^2 - 2x &= 0, \ \forall x \in \mathbf{R} \end{aligned}$$

pentru fiecare $c \in \mathbf{R}$. Pe de altă parte, pentru orice $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$, punând condiţia

$$y_0 = c_0 e^{x_0} + x_0^2$$

deducem

$$c_0 = \left(y_0 - x_0^2\right) e^{-x_0}$$

Rezultă că

$$y = c_0 e^x + x^2, \ x \in \mathbf{R}$$

este soluţia care verifică condiţia Cauchy $y(x_0) = y_0$.

1.4.2 Soluţie particulară.

DEFINIŢIA 1.4.2 *O soluţie a unei ecuaţii diferenţiale, care aparţine unei soluţii generale a acelei ecuaţii diferenţiale, se numeşte soluţie particulară.*

Observaţie. O soluţie particulară se obţine din soluţia generală pentru o valoare particulară a parametrului.

Exemplu. În exemplu precedent, funcţia

$$y = y(x, 0) = x^2, \ x \in \mathbf{R}$$

este o soluţie particulară obţinută, din soluţia generală menţionată, pentru $c = 0$.

1.4.3 Soluţie singulară.

DEFINIŢIA 1.4.3 *O soluţie a unei ecuaţii diferenţiale care nu este soluţie particulară se numeşte soluţie singulară.*

1.4.4 Integrala unei ecuaţii diferenţiale

DEFINIŢIA 1.4.4 *O relaţie de forma*

$$g(x, y) = 0$$

unde $g : E \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ este o funcţie dată, se numeşte integrală a unei ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi dacă această relaţie defineşte implicit pe y ca funcţie de x, pe o mulţime $I \subset \mathbf{R}$, şi această funcţie este soluţie pe I a acelei ecuaţii diferenţiale.

DEFINIŢIA 1.4.5 *Se numeşte integrală generală a unei ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi o relaţie de forma*

$$g(x,y) = c, \tag{1.7}$$

unde $g : E \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ *este o funcţie dată, cu proprietatea că pentru fiecare* $(x_0, y_0) \in E$ *relaţia*

$$g(x,y) = c_0$$

unde $c_0 = g(x_0, y_0)$, *defineşte implicit pe* y *ca funcţie de* x, *pe o vecinătate* $I_0 \subset \mathbf{R}$ *a lui* x_0, *şi această funcţie este soluţie pe* I_0 *a acelei ecuaţii diferenţiale.*

Observaţie. Notând prin

$$y = y(x; x_0, y_0), \ x \in I_0$$

soluţia definită implicit de ecuaţia $g(x,y) = c_0$, rezultă $y(x_0; x_0, y_0) = y_0$.

Exemplu. Pentru ecuaţia diferenţială

$$y'\left(3y^2 + x\right) + y = 0$$

relaţia

$$xy + y^3 = c$$

unde $c \in \mathbf{R}$ este o constantă arbitrară, este integrală generală. Într-adevăr, considerând funcţia

$$\alpha(y) = xy + y^3 - c, \ y \in \mathbf{R}$$

pentru un număr $c \in \mathbf{R}$ şi un număr $x \in (0, \infty)$, avem tabloul de variaţie

y	$-\infty$					$+\infty$
$\alpha'(y) = x + 3y^2$		$+$	$+$	$+$	$+$	
$\alpha(y)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$+\infty$

din care rezultă că există un singur număr $y(x,c) \in \mathbf{R}$ astfel încât $\alpha(y(x,c)) = 0$. Aşadar, ecuaţia $xy + y^3 = c$ defineşte implicit funcţia

$$x \to y(x,c), \ x \in (0, \infty)$$

Derivând identitatea

$$xy(x,c) + y^3(x,c) = c, \ x \in (0, \infty)$$

obţinem

$$y(x,c) + xy'(x,c) + 3y^2(x,c)\,y'(x,c) = 0$$

din care rezultă

$$y'(x,c) = -\frac{y(x,c)}{x + 3y^2(x,c)},\ x \in (0,\infty)$$

Înlocuind în ecuaţia diferenţială considerată obţinem

$$y'(x,c)\left[3y^2(x,c) + x\right] + y(x,c) = -\frac{y(x,c)}{x + 3y^2(x,c)}\left[3y^2(x,c) + x\right] + y(x,c) = 0$$

pentru orice $x \in (0,\infty)$, ceea ce trebuia demonstrat. Pe de altă parte, pentru orice $x_0 \in (0,\infty)$ şi $y_0 \in \mathbf{R}$ luând $c_0 = x_0 y_0 + y_0^3$ rezultă că soluţia $y = y(x, c_0)$ verifică condiţia iniţială $y(x_0, c_0) = y_0$.

1.5 Tipuri elementare de ecuaţii

1.5.1 Ecuaţia diferenţială $\frac{dy}{dx} = f(x)$

Fie $f : E \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ este o funcţie continuă definită pe un interval E. Ecuaţia diferenţială

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

este cel mai simplu model de ecuaţie diferenţială. Dacă

$$y = y(x),\ x \in I \subset E,$$

este o soluţie care verifică condiţia $y(x_0) = y_0$, unde $x_0 \in I$ şi $y_0 \in \mathbf{R}$, atunci avem

$$y'(z) = f(z),\ (\forall)\, z \in I$$

din care deducem

$$\int_{x_0}^{x} y'(z)\, dz = \int_{x_0}^{x} f(z)\, dz,\ (\forall)\, x \in I$$

deci

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(z)\, dz,\ (\forall)\, x \in I$$

Dacă F este o primitivă a lui f, atunci

$$y(x) = y_0 + F(x) - F(x_0),\ (\forall)\, x \in I$$

Notând $y_0 - F(x_0)$ cu c, rezultă că forma soluţiei generale este

$$y = F(x) + c;\ x \in I$$

c fiind o constantă oarecare.

Exemplu. Ecuaţia diferenţială

$$y' = x + \sin x$$

are soluţia generală

$$y = \int (x + \sin x)\, dx = \frac{1}{2}x^2 - \cos x + c;\ x \in \mathbf{R}$$

unde $c \in \mathbf{R}$ este o constantă arbitrară.

1.5.2 Ecuaţii diferenţiale exacte

Ecuaţiile diferenţiale exacte sunt ecuaţiile de forma

$$P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = 0$$

unde $P, Q : E \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ sunt funcţii continue care nu se anulează în acelaşi punct din E, iar $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ şi $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ există, sunt continue şi egale pe E. Noi vom presupune, în cele ce urmează, că E este un interval bidimensional deschis de forma

$$E = (a, b) \times (c, d)$$

şi că funcţia Q nu se anulează în E. În această ipoteză ecuaţia considerată se poate scrie sub forma

$$y' = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$$

1) Vom arăta că funcţia $u : E \to \mathbf{R}$ definită prin

$$u(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(t, y)\, dt + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, s)\, ds,\ (x, y) \in E$$

unde $(x_0, y_0) \in E$ este un punct oarecare, fixat, verifică relaţiile

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P \text{ şi } \frac{\partial u}{\partial y} = Q$$

Într-adevăr, folosind regulile de derivare ale integralelor care depind de parametri, avem

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} &= P(x, y) \text{ şi} \\
\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} &= \int_{x_0}^{x} \frac{\partial}{\partial y} P(t, y)\, dt + Q(x_0, y) = \\
&= \int_{x_0}^{x} \frac{\partial}{\partial x} Q(t, y)\, dt + Q(x_0, y) = \\
&= Q(t, y)\big|_{t=x_0}^{t=x} + Q(x_0, y) = Q(x, y)
\end{aligned}$$

pentru orice $(x, y) \in E$, ceea ce trebuia demonstrat. Să observăm şi că $u(x_0, y_0) = 0$.

2) Să presupunem că

$$y = y(x),\ x \in I \subset (a, b)$$

este o soluţie a ecuaţiei diferenţiale considerate pe intervalul I, care verifică condiţia iniţială $y(x_0) = y_0$. Deci

$$y'(x) = -\frac{P(x, y(x))}{Q(x, y(x))},\ \forall x \in I$$

Pe de altă parte, derivând, obţinem

$$\begin{aligned}
[u(x, y(x))]' &= \frac{\partial u(x, y(x))}{\partial x} + \frac{\partial u(x, y(x))}{\partial y} \cdot y'(x) = \\
&= P(x, y(x)) + Q(x, y(x)) \cdot \left[-\frac{P(x, y(x))}{Q(x, y(x))}\right] = 0
\end{aligned}$$

pentru orice $x \in I$, din care deducem că $u(x, y(x))$ are o valoare constantă. Deoarece

$$u(x_0, y(x_0)) = u(x_0, y_0) = 0$$

rezultă că $u(x, y(x)) = 0$ pentru orice $x \in I$.

3) Vom arăta că relaţia

$$u(x, y) = 0$$

defineşte implicit, în jurul punctului (x_0, y_0), o soluţie a ecuaţiei diferenţiale considerate, de forma

$$y = y(x),\ x \in I$$

unde I este un interval deschis, inclus în (a, b) şi care conţine pe x_0. Într-adevăr, condiţiile cerute de teorema funcţiilor implicite sunt îndeplinite:

1. $u(x_0, y_0) = 0$,
2. $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ şi $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ există şi sunt continue pe E,
3. $\dfrac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y} \neq 0$, căci $\dfrac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y} = Q(x_0, y_0) \neq 0$.

În consecinţă, rezultă existenţa unui interval I, care conţine pe x_0, şi a unei funcţii

$$y : I \to \mathbf{R}$$

derivabilă pe I, astfel încât $y(x_0) = y_0$ şi $u(x, y(x)) = 0$ pentru orice $x \in I$. Derivând ultima egalitate obţinem

$$0 = [u(x, y(x))]' = \frac{\partial u(x, y(x))}{\partial x} + \frac{\partial u(x, y(x))}{\partial y} \cdot y'(x) =$$
$$= P(x, y(x)) + Q(x, y(x)) \cdot y'(x), \ \forall x \in I$$

din care deducem

$$y'(x) = -\frac{P(x, y(x))}{Q(x, y(x))}, \ x \in I$$

ceea ce dovedeşte că

$$y = y(x), \ x \in I$$

este soluţie a ecuaţiei diferenţiale considerate şi verifică condiţia iniţială $y(x_0) = y_0$. Din analiza făcută, ţinând cont că $(x_0, y_0) \in E$ este arbitrar, rezultă că relaţia

$$u(x, y) = 0$$

este integrala generală a ecuaţiei diferenţiale exacte considerate.

Observaţie. Este de reţinut că ecuaţia diferenţială

$$P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = 0$$

care verifică condiţia de exactitate $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, are integrala generală

$$\int_{x_0}^{x} P(x, y)\, dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)\, dy = 0$$

unde x_0 şi y_0 sunt numere reale arbitrare.

Exemplu. Determinaţi integrala generală a ecuaţiei diferenţiale

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{y}\right) dx + \frac{x}{2\sqrt{y}} dy = 0$$

Rezolvare: Avem $P(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{y}$, $Q(x, y) = \dfrac{x}{2\sqrt{y}}$, iar domeniul de definiţie al funcţiilor P şi Q este $E = (0, \infty) \times (0, \infty)$. Avem

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{y}}, \quad \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

deci $\dfrac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \dfrac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$, $\forall (x, y) \in E$, adică ecuaţia considerată este exactă. Integrala ei generală este

$$\int_{x_0}^{x} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{y}\right) dx + \int_{y_0}^{y} \frac{x_0}{2\sqrt{y}} dy = 0$$

unde x_0 şi y_0 sunt numere pozitive arbitrare. Efectuând calculele obţinem

$$2\sqrt{x} + x\sqrt{y} = 2\sqrt{x_0} + x_0\sqrt{y_0}$$

Dacă notăm $2\sqrt{x_0} + x_0\sqrt{y_0}$ cu c rezultă forma

$$2\sqrt{x} + x\sqrt{y} = c$$

a integralei generale, unde c este o constantă pozitivă oarecare. Observăm că putem explicita pe y :

$$y = \frac{(c - 2\sqrt{x})^2}{x^2}, \ x \in (0, \infty)$$

1.5.3 Metoda factorului integrant

Considerăm ecuaţia diferenţială de ordinul întâi sub forma Pfaff

$$P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = 0$$

unde $P, Q : E \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$. Presupunem că E este un interval bidimensional de forma

$$E = (a, b) \times (c, d)$$

Deasemenea presupunem că $P, Q, \dfrac{\partial P}{\partial y}$ şi $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ sunt funcţii continue pe E şi $\dfrac{\partial P}{\partial y} \neq \dfrac{\partial Q}{\partial x}$. Fie

$$\mu : E \to \mathbf{R}$$

o funcţie de clasă C^1 pe E, care nu se anulează în E. Înmulţind cu μ ecuaţia dată obţinem ecuaţia echivalentă

$$\mu(x, y)\, P(x, y)\, dx + \mu(x, y)\, Q(x, y)\, dy = 0$$

Căutăm funcţia μ astfel încât

$$\frac{\partial}{\partial y}[\mu P] = \frac{\partial}{\partial x}[\mu Q]$$

Funcţia μ cu această proprietate se numeşte factor integrant pentru ecuaţia dată. Condiţia impusă lui μ se scrie detaliat sub forma

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} P + \mu \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial x} Q + \mu \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Dacă μ verifică această condiţie atunci integrala generală a ecuaţiei date este

$$\int_{x_0}^{x} \mu(x, y)\, P(x, y)\, dx + \int_{y_0}^{y} \mu(x_0, y)\, Q(x_0, y)\, dy = 0$$

Mai precis, această relaţie defineşte implicit o soluţie de forma

$$y = y(x),\ x \in I \subset (a, b)$$

care verifică condiţia $y(x_0) = y_0$. În general determinarea funcţiei μ este la fel de dificilă ca şi rezolvarea ecuaţiei diferenţiale considerate, dar se pot identifica unele cazuri particulare în care se pot determina factori integranţi.

Cazul I. Factor integrant care depinde numai de x. Presupunem că există un factor integrant care depinde numai de x, adică de forma $\mu = \mu(x)$. Condiţia îndeplinită de μ se scrie, înlocuind $\dfrac{\partial \mu}{\partial y} = 0$ şi $\dfrac{\partial \mu}{\partial x} = \mu'$, sub forma

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q}$$

Deoarece $\dfrac{\mu'}{\mu}$ depinde numai de x rezultă că egalitatea este posibilă numai dacă expresia

$$\frac{\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q}$$

depinde numai de x. În acest caz rezultă

$$\mu(x) = \exp\left(\int_{x_0}^{x} \frac{\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q} dx\right)$$

Să mai observăm că $\mu(x_0) = 1$. Integrala generală este în acest caz

$$\int_{x_0}^{x} \mu(x) P(x, y)\, dx + \int_{y_0}^{y} \mu(x_0) Q(x_0, y)\, dy = 0$$

Cazul II. Factor integrant care depinde numai de y. Presupunem că există un factor integrant care depinde numai de y, adică de forma $\mu = \mu(y)$. Condiţia îndeplinită de μ se scrie, înlocuind $\dfrac{\partial \mu}{\partial x} = 0$ şi $\dfrac{\partial \mu}{\partial y} = \mu'$, sub forma

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}}{P}$$

Deoarece $\dfrac{\mu'}{\mu}$ depinde numai de y rezultă că egalitatea este posibilă numai dacă expresia

$$\frac{\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}}{P}$$

depinde numai de y. În acest caz rezultă

$$\mu(y) = \exp\left(\int_{y_0}^{y} \frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P} dy\right)$$

Să mai observăm că $\mu(y_0) = 1$. Integrala generală este în acest caz

$$\int_{x_0}^{x} \mu(y) P(x,y)\, dx + \int_{y_0}^{y} \mu(y) Q(x_0,y)\, dy = 0$$

Exemplu. Determinaţi soluţia ecuaţiei diferenţiale

$$-y dx + \left(x + \frac{x^2}{y^2}\right) dy = 0$$

care verifică condiţia iniţială $y(1) = 2$.

Rezolvare: Avem $P = -y$ şi $Q = x + \frac{x^2}{y^2}$. Considerăm funcţiile P şi Q definite pe $(0,\infty) \times (0,\infty)$. Deoarece

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -1 \text{ şi } \frac{\partial Q}{\partial x} = 1 + \frac{2x}{y^2}$$

rezultă că $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$, deci ecuaţia diferenţială nu este exactă. Cercetăm dacă ecuaţia admite factor integrant care să depindă numai de o variabilă. Avem

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = \frac{-1 - 1 - \frac{2x}{y^2}}{x + \frac{x^2}{y^2}} = \frac{-2\left(1 + \frac{x}{y^2}\right)}{x\left(1 + \frac{x}{y^2}\right)} = -\frac{2}{x}$$

din care deducem că ecuaţia admite un factor integrant care depinde numai de x, şi anume

$$\mu = \exp\left(\int_1^x \left(-\frac{2}{x}\right) dx\right) = \exp(-2\ln x + 2\ln 1) = \frac{1}{x^2}$$

Înmulţind ecuaţia cu $\mu = \frac{1}{x^2}$ obţinem ecuaţia diferenţială exactă

$$-\frac{y}{x^2} dx + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y^2}\right) dy = 0$$

a cărei integrală este

$$\int_1^x -\frac{y}{x^2} dx + \int_2^y \left(1 + \frac{1}{y^2}\right) dy = 0$$

Efectuând calculele obţinem

$$\frac{y}{x} - y + y - 2 - \frac{1}{y} + \frac{1}{2} = 0$$

adică

$$\frac{y}{x} - \frac{1}{y} = \frac{3}{2}$$

1.5.4 Ecuaţia diferenţială cu variabile separabile

Forma Pfaff a ecuaţiilor diferenţiale cu variabile separabile este

$$f(x)\,g(y)\,dx + h(x)\,k(y)\,dy = 0$$

unde $f, h : E \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ şi $g, k : F \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ sunt funcţii continue, E şi F sunt intervale, g nu se anulează în F, iar h nu se anulează în E. În aceste condiţii ecuaţia admite factorul integrant

$$\mu = \frac{1}{g(y)\,h(x)}$$

Înmulţind cu μ ecuaţia dată, obţinem ecuaţia echivalentă

$$\frac{f(x)}{h(x)}dx + \frac{k(y)}{g(y)}dy = 0$$

Se spune, în acest caz, că am separat variabilele în ecuaţia dată. Am obţinut o ecuaţie diferenţială exactă. Soluţia sa generală este

$$\int_{x_0}^{x} \frac{f(x)}{h(x)}dx + \int_{y_0}^{y} \frac{k(y)}{g(y)}dy = 0$$

unde $x_0 \in E$ şi $y_0 \in F$ sunt numere arbitrare.

Exemplu. Determinaţi soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale

$$x\sqrt{1+y^2}dx + y\sqrt{1+x^2}dy = 0$$

Rezolvare: Separând variabilele obţinem

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx + \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}dy = 0$$

care este o ecuaţie diferenţială exactă. Soluţia generală a acestei ecuaţii este

$$\int_{x_0}^{x} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx + \int_{y_0}^{y} \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}dy = 0$$

unde x_0 şi y_0 sunt numere arbitrare. Făcând calculele obţinem

$$\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} = c$$

unde $c = \sqrt{1+x_0^2} + \sqrt{1+y_0^2}$ este un număr oarecare mai mare sau egal cu 2.

1.5.5 Ecuaţia diferenţială de tip omogen

Prin ecuaţie diferenţială de tip omogen se înţelege o ecuaţie diferenţială de forma

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

unde $f : E \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ este o funcţie continuă dată. Pentru rezolvarea acestei ecuaţii diferenţiale se face schimbarea de funcţie

$$u = \frac{y}{x},\ x \neq 0$$

Presupunem că

$$y = y(x),\ x \in I \subset \mathbf{R}$$

este o soluţie pe intervalul I care verifică condiţia iniţială

$$y(x_0) = y_0$$

unde $x_0 \in I$ şi $y_0 \in \mathbf{R}$. Este evident că I nu poate conţine pe 0. Vom presupune $I \subset (0, \infty)$. Rezultă

$$\begin{aligned} xu &= y,\ u + xu' = y', \\ y' &= f\left(\frac{y}{x}\right) = f(u),\ \text{deci } u + xu' = f(u) \end{aligned}$$

Dacă $f(u) = u$ pentru orice u, adică f este funcţia identică, atunci deducem $u' = 0$, din care rezultă că u are o valoare constantă

$$c = u(x_0) = \frac{y(x_0)}{x_0} = \frac{y_0}{x_0}$$

Aşadar soluţia ecuaţiei este

$$y = \frac{y_0}{x_0}x,\ x \in I$$

Notând pe $\dfrac{y_0}{x_0}$ cu c obţinem soluţia generală

$$y = cx,\ x \in I$$

unde $c \in \mathbf{R}$ este o constantă arbitrară.

Dacă f nu este funcţia identică, deci $f(u) \neq u$ pentru orice u, atunci rezultă

$$\frac{u'}{u - f(u)} + \frac{1}{x} = 0$$

Integrând obţinem

$$\int_{x_0}^{x} \frac{u'}{u - f(u)}dx + \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x} = 0$$

Dacă $G(u)$ este o primitivă a funcţiei $\dfrac{1}{u - f(u)}$ atunci obţinem

$$G(u) - G(u_0) + \ln x - \ln x_0 = 0$$

unde $u_0 = \dfrac{y_0}{x_0}$, adică

$$G\left(\frac{y}{x}\right) - G\left(\frac{y_0}{x_0}\right) + \ln x - \ln x_0 = 0$$

Considerând pe x_0 şi pe y_0 numere arbitrare, obţinem integrala generală

$$G\left(\frac{y}{x}\right) + \ln x = c$$

unde $c = G\left(\dfrac{y_0}{x_0}\right) + \ln x_0$ este o constantă arbitrară.

Exemplu. Determinaţi soluţia ecuaţiei diferenţiale

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x^2} + \frac{y}{x}$$

care verifică condiţia iniţială $y(x_0) = y_0$, unde $x_0 \neq 0$ şi y_0 sunt numere arbitrare.

Rezolvare: Fie

$$y = y(x),\ x \in I \subset \mathbf{R}$$

soluţia căutată. Rezultă

$$\frac{dy(x)}{dx} = \frac{y^2(x)}{x^2} + \frac{y(x)}{x},\ x \in I$$

din care este evident că intervalul I nu poate conţine pe 0. Vom considera cazul $I \subset (0, \infty)$. Notăm $u = \dfrac{y}{x}$. Avem

$$y = ux\ ,\ \frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx},$$
$$\frac{dy}{dx} = u^2 + u,\ \text{deci}\ u + x\frac{du}{dx} = u^2 + u$$

Deducem că

$$x\frac{du}{dx} = u^2$$

şi deci

$$\int_{x_0}^{x} \frac{u'}{u^2}dx = \int_{x_0}^{x} \frac{1}{x}dx$$

Rezultă

$$-\frac{1}{u(x)} + \frac{1}{u(x_0)} = \ln x - \ln x_0$$

adică

$$\frac{x}{y(x)} - \frac{x_0}{y_0} = -\ln x + \ln x_0$$

din care deducem

$$y(x) = \frac{x}{-\ln x + \ln x_0 + \dfrac{x_0}{y_0}}$$

Din calculele făcute rezultă că numărul y_0 nu poate fi egal cu 0. Notând $\ln x_0 + \frac{x_0}{y_0}$ cu c rezultă

$$y(x) = \frac{x}{-\ln x + c}$$

adică am obţinut soluţia generală.

Observaţie. Se verifică imediat că funcţia nulă

$$y = y(x) = 0,\ x \in I$$

unde I este un interval arbitrar care nu conţine pe 0, este soluţie a ecuaţiei considerate. Această soluţie, care verifică evident condiţia $y(x_0) = 0$, este soluţie singulară a ecuaţiei considerate.

1.5.6 Ecuaţia diferenţială liniară

Ecuaţia diferenţială liniară de ordinul întâi are forma

$$\frac{dy}{dx} + p(x)\,y = q(x)$$

unde $p, q : E \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ sunt funcţii continue date. Considerăm că E este un interval de forma (a, b). Forma Pfaff a acestei ecuaţii este

$$(p(x)\,y - q(x))\,dx + dy = 0$$

Să verificăm dacă această ecuaţie diferenţială este exactă sau admite factor integrant depinzând numai de o variabilă. Avem

$$\frac{\frac{\partial}{\partial y}[p(x)\,y - q(x)] - \frac{\partial}{\partial x}[1]}{1} = p(x),\ x \in E$$

din care deducem că ecuaţia admite factorul integrant

$$\mu = \mu(x) = \exp\left(\int_{x_0}^{x} p(x)\,dx\right)$$

unde $x_0 \in E$ este un număr oarecare. Această formă a lui μ rezultă din relaţia $\frac{\mu'}{\mu} = p(x)$. Observăm că $\mu(x_0) = 1$. Înmulţind cu μ forma Pfaff a ecuaţiei considerate, obţinem ecuaţia echivalentă

$$\mu(x)\,[p(x)\,y - q(x)]\,dx + \mu(x)\,dy = 0$$

Integrala generală a ecuaţiei considerate este

$$\int_{x_0}^{x} \mu(x)\left[p(x)y - q(x)\right]dx + \int_{y_0}^{y} \mu(x_0)\,dy = 0$$

unde x_0 şi y_0 sunt numere arbitrare, dar fixate, din E. Calculând obţinem

$$y\int_{x_0}^{x} \mu'(x)\,dx - \int_{x_0}^{x} \mu(x)q(x)\,dx + y - y_0 = 0$$

sau

$$y\mu(x) - y - \int_{x_0}^{x} \mu(x)q(x)\,dx + y - y_0 = 0$$

din care rezultă

$$y = \frac{1}{\mu(x)}\left[y_0 + \int_{x_0}^{x} \mu(x)q(x)\,dx\right]$$

Această soluţie verifică condiţia iniţială $y(x_0) = y_0$.

Observatie. Considerăm o primitivă $\alpha(x)$ a lui $p(x)$. Atunci rezultă

$$\mu(x) = \exp(\alpha(x) - \alpha(x_0)) = \exp\alpha(x)\cdot\exp(-\alpha(x_0))$$

Notând

$$m(x) = \exp\alpha(x)$$

forma soluţiei obţinute devine

$$y = \frac{1}{m(x)}\left[y_0\exp\alpha(x_0) + \int_{x_0}^{x} m(x)q(x)\,dx\right]$$

Dacă notăm cu $G(x)$ o primitivă a funcţiei $m(x)q(x)$ atunci forma soluţiei devine

$$y = \frac{1}{m(x)}\left[y_0\exp\alpha(x_0) + G(x) - G(x_0)\right]$$

Notând cu c numărul $y_0\exp\alpha(x_0) - G(x_0)$ obţinem pentru soluţie, forma

$$y = \frac{1}{m(x)}\left[c + G(x)\right]$$

care este forma soluţiei generale a ecuaţiei diferenţiale considerate.

De obicei soluţia generală este reprezentată sub forma

$$y = \frac{1}{\exp\left(\int p(x)\,dx\right)}\left[c + \int q(x)\exp\left(\int p(x)\,dx\right)dx\right]$$

unde c este o constantă arbitrară, iar integralele nedefinite care intervin sunt primitive fixate ale funcţiilor respective.

Exemplu. Determinaţi soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale

$$y' + \frac{1}{x}y = x^2$$

Rezolvare: Ecuaţia diferenţială considerată este liniară. Faţă de modelul general avem $p(x) = \frac{1}{x}$ şi $q(x) = x^2$. Aceste funcţii sunt definite şi continue pentru orice $x \neq 0$. Vom determina soluţia generală pe $E = (0, \infty)$. Conform metodei de rezolvare expuse mai sus, soluţia generală este

$$y = \frac{1}{\exp\left(\int \frac{1}{x}dx\right)}\left[c + \int x^2 \exp\left(\int \frac{1}{x}dx\right)dx\right] =$$
$$= \frac{1}{x}\left[c + \int x^2 \cdot x dx\right] = \frac{1}{x}\left[c + \frac{x^4}{4}\right] = \frac{c}{x} + \frac{x^3}{4}$$

adică

$$y = \frac{c}{x} + \frac{x^3}{4}$$

unde c este o constantă arbitrară.

Observatie. Soluţia ecuaţiei diferenţiale precedente, care verifică condiţia $y(x_0) = y_0$, se poate obţine din forma soluţiei generale. Înlocuind pe x cu x_0 şi pe y cu y_0, obţinem

$$y_0 = \frac{c}{x_0} + \frac{x_0^3}{4}$$

din care rezultă

$$c = x_0 y_0 - \frac{x_0^4}{4}$$

Soluţia căutată este

$$y = \frac{x_0 y_0 - \frac{x_0^4}{4}}{x} + \frac{x^3}{4}$$

1.5.7 Ecuaţia diferenţială a lui Bernoulli

Ecuaţiile diferenţiale de tip Bernoulii au forma generală

$$y' + p(x)y = q(x)y^m$$

unde $p, q : E \to \mathbf{R}$ sunt funcţii continue definite pe un interval E, iar m este un număr real diferit de 0 şi de 1. Când m este 0 sau 1, ecuaţia este liniară sau cu variabile separabile. Această ecuaţie diferenţială se transformă într-o ecuaţie liniară prin schimbarea de funcţie

$$z = y^{1-m}$$

Într-adevăr, dacă

$$y = y(x), \ x \in I \subset E$$

este o soluţie a ecuaţiei diferenţiale considerate, atunci avem

$$z' = (1-m)\, y^{-m} y'$$

Înmulţind în ecuaţia dată cu $(1-m)\, y^{-m}$ şi făcând înlocuirile obţinem relaţia

$$z' + (1-m)\, p(x)\, z = (1-m)\, q(x)$$

care ne arată că z este soluţie a unei ecuaţii diferenţiale liniare. Din această relaţie rezultă

$$z = \frac{1}{\exp\left(\int p_1(x)\, dx\right)} \left[c + \int q_1(x) \exp\left(\int p_1(x)\, dx \right) dx \right]$$

unde $p_1(x) = (1-m)\, p(x)$ şi $q_1(x) = (1-m)\, q(x)$, iar c este o constantă reală. Cunoscând pe z, deducem

$$y = z^{\frac{1}{1-m}}$$

Exemplu. Determinaţi soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale

$$y' + \frac{1}{x} y = x^2 y^2$$

Rezolvare: Ecuaţia este de tip Bernoulii, cu $m = 2$. Vom reduce ecuaţia aceasta la o ecuaţie liniară făcând schimbarea de funcţie

$$z = y^{-1}$$

Considerând că y este soluţie a ecuaţiei date, obţinem

$$z' = -y^{-2} y'$$

Înmulţind ecuaţia dată cu $-y^{-2}$ obţinem

$$-y^{-2} y' - \frac{1}{x} y^{-1} = -x^2$$

Făcând înlocuirile obţinem

$$z' - \frac{1}{x} z = -x^2$$

De aici deducem că

$$z = \frac{1}{\exp\left(\int -\frac{1}{x} dx\right)} \left[c + \int -x^2 \exp\left(\int -\frac{1}{x} dx \right) dx \right] =$$

$$= x \left[c - \int x^2 \cdot \frac{1}{x} dx \right] = x \left[c - \frac{x^2}{2} \right] = \frac{x\left(2c - x^2\right)}{2}.$$

unde c este o constantă. Deoarece $z = y^{-1}$ rezultă că $y = z^{-1}$, deci soluţia generală a ecuaţiei date este

$$y = \frac{2}{x\left(2c - x^2\right)}$$

1.5.8 Ecuaţia diferenţială a lui Riccati

Ecuaţia diferenţială

$$y' = p(x)\, y^2 + q(x)\, y + r(x) \tag{1.8}$$

unde $p, q, r : I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ sunt funcţii continue, se numeşte ecuaţia diferenţială a lui Riccati. Funcţiile p, q şi r se numesc coeficienţii ecuaţiei. S-a constatat că această ecuaţie nu este rezolvabilă, în toate cazurile, prin metode elementare. Vom arăta că dacă se cunoaşte o soluţie a ecuaţiei 1.8, atunci rezolvarea ei se reduce la rezolvarea unei ecuaţii diferenţiale Bernoulli. Să presupunem că

$$y = y_1(x)\,,\ x \in (a, b) \subset I$$

este o soluţie a ecuaţiei 1.8. Vom face schimbarea de funcţie

$$z = y - y_1(x) \tag{1.9}$$

Avem

$$y' = z' + y_1'(x)$$

Înlocuind în ecuaţia 1.8 obţinem

$$\begin{aligned} z' + y_1'(x) &= p(x)\left[z + y_1(x)\right]^2 + q(x)\left[z + y_1(x)\right] + r(x) = \\ &= p(x)\, z^2 + \left[2p(x)\, y_1(x) + q(x)\right] z + \\ &\quad + \left[p(x)\, y_1^2(x) + q(x)\, y_1(x) + r(x)\right] \end{aligned}$$

Deoarece y_1 este soluţie pentru ecuaţia 1.8, rezultă că

$$y_1'(x) = p(x)\, y_1^2(x) + q(x)\, y_1(x) + r(x)$$

Aşadar

$$z' = p(x)\, z^2 + \left[2p(x)\, y_1(x) + q(x)\right] z \tag{1.10}$$

De aici rezultă că

$$y = y(x)\,,\ x \in (a, b)$$

este soluţie a ecuaţiei 1.8 dacă şi numai dacă

$$z = z(x),\ x \in (a, b)$$

este soluţie a ecuaţiei diferenţiale Bernoulli 1.10, unde

$$z(x) = y(x) - y_1(x)$$

Exemplu. Determainaţi soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale

$$y' + 2xy^2 - y - \frac{x-1}{x^2} = 0$$

Rezolvare: Constatăm că ecuaţia dată este de tip Riccati. Într-adevăr ecuaţia are forma

$$y' = -2xy^2 + y + \frac{x-1}{x^2}$$

Coeficienţii ecuaţiei sunt: $p(x) = -2x$, $q(x) = 1$ şi $r(x) = \frac{x-1}{x^2}$, definiţi pe un interval I care nu conţine pe 0. Vom considera $I = (0, \infty)$. Observăm că

$$y = y_1(x) = \frac{1}{x},\ x \in I$$

este soluţie a ecuaţiei date. Pentru a determina soluţia generală a ecuaţiei date, facem schimbarea de funcţie

$$z = y - y_1(x) = y - \frac{1}{x},\ x \in I$$

Rezultă

$$y' = z' - \frac{1}{x^2}$$

Înlocuind în ecuaţie obţinem

$$z' - \frac{1}{x^2} = -2x\left[z + \frac{1}{x}\right]^2 + \left[z + \frac{1}{x}\right] + \frac{x-1}{x^2}$$

Făcând calculele obţinem

$$z' = -2xz^2 - 3z$$

Această ecuaţie Bernoulli se reduce la o ecuaţie liniară prin schimbarea de funcţie

$$u = z^{-1}$$

Înmulţind cu z^{-2}, ecuaţia devine

$$z^{-2} \cdot z' = -2x - 3 \cdot z^{-1}$$

Avem

$$u' = -z^{-2} \cdot z'$$

Înlocuind obţinem

$$-u' = -2x - 3u, \text{ adică}$$
$$u' - 3u = 2x$$

Soluţia generală a acestei ecuaţii este

$$u = \frac{1}{\exp\left[\int -3dx\right]}\left(c + \int 2x \cdot \exp\left[\int -3dx\right] dx\right) =$$
$$= \exp(3x) \cdot \left(c - \frac{2}{9}(3x+1)\exp(-3x)\right) =$$
$$= c \cdot \exp(3x) - \frac{2}{9}(3x+1)$$

unde c este o constantă oarecare. Rezultă

$$z = \frac{1}{c \cdot \exp(3x) - \frac{2}{9}(3x+1)}$$

Soluţia generală a ecuaţiei date este

$$y = z + \frac{1}{x} = \frac{1}{c \cdot \exp(3x) - \frac{2}{9}(3x+1)} + \frac{1}{x}$$

1.5.9 Ecuaţia diferenţială a lui Lagrange

Considerăm ecuaţia diferenţială

$$y = xf(y') + g(y') \tag{1.11}$$

unde $f, g : E \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, sunt funcţii de clasă C^1. Facem schimbarea de funcţie

$$p = y' \tag{1.12}$$

Derivând relaţia 1.11 obţinem

$$y' = f(y') + xf'(y')y'' + g'(y')y'' \tag{1.13}$$

Înlocuind y' cu p şi y'' cu p' obţinem ecuaţia diferenţială

$$p = f(p) + xf'(p)p' + g'(p)p' \tag{1.14}$$

TEOREMA 1.5.1 . *1) Dacă*

$$y = y(x), \ x \in I, \tag{1.15}$$

este o soluţie a ecuaţiei 1.11 pe un interval real I, atunci

$$p = y'(x), \ x \in I, \tag{1.16}$$

este soluţie à ecuaţiei 1.14.

2) Dacă

$$p = p(x), \ x \in I, \tag{1.17}$$

este soluţie a ecuaţiei 1.14, pe un interval real I, atunci

$$y = xf(p(x)) + g(p(x)), \ x \in I, \tag{1.18}$$

este soluţie a ecuaţiei 1.11.

Demonstraţie. 1) Avem, prin ipoteză,

$$y(x) = xf(y'(x)) + g(y'(x)), \ x \in I \tag{1.19}$$

Derivând, rezultă

$$y'(x) = f(y'(x)) + xf'(y'(x))\,y''(x) + g'(y'(x))\,y''(x), \ x \in I, \tag{1.20}$$

ceea ce înseamnă că $p = y'(x), \ x \in I$, este soluţie a ecuaţiei 1.14.

2) Avem, prin ipoteză,

$$p(x) = f(p(x)) + xf'(p(x))\,p'(x) + g'(p(x))\,p'(x), \ x \in I \tag{1.21}$$

Derivând funcţia y definită prin

$$y(x) = xf(p(x)) + g(p(x)), \ x \in I \tag{1.22}$$

obţinem

$$y'(x) = f(p(x)) + xf'(p(x))\,p'(x) + g'(p(x))\,p'(x) \tag{1.23}$$

deci $y'(x) == p(x)$ pentru fiecare $x \in I$. Aşadar

$$y(x) = xf(p(x)) + g(p(x)) = xf(y'(x)) + g(y'(x)) \tag{1.24}$$

adică

$$y(x) = xf(y'(x)) + g(y'(x)) \tag{1.25}$$

pentru orice $x \in I$, deci $y = xf(p(x)) + g(p(x)), \ x \in I$, este soluţie pentru 1.11, ceea ce trebuia demonstrat. ■

Consecinţă. Conform teoremei rezultă că pentru a obţine soluţiile ecuaţiei 1.11 este suficient să obţinem soluţiile ecuaţiei 1.14. Rezolvarea ecuaţiei 1.14, în care funcţia necunoscută este p, iar variabila independentă este x, este dificilă, dar dacă scriem ecuaţia 1.14 sub forma Pfaff

$$[f(p) - p]\,dx + [xf'(p) + g'(p)]\,dp = 0, \tag{1.26}$$

observăm că ea poate fi tratată ca ecuaţie liniară, considerând pe x ca funcţie necunoscută şi pe p ca variabilă independentă, şi rezolvarea devine simplă. Această ecuaţie se poate obţine din ecuaţia 1.11 prin înlocuirea lui y' cu p şi diferenţiere.

Dacă pentru un număr $p_0 \in E$ are loc relaţia $f(p_0) = p_0$, atunci funcţia constantă

$$p = p_0,\ x \in \mathbf{R}, \tag{1.27}$$

este soluţie a ecuaţiei 1.26. Rezultă că funcţia

$$y = xp_0 + g(p_0),\ x \in \mathbf{R}, \tag{1.28}$$

este soluţie a ecuaţiei 1.11.

Dacă $f(p) \neq p$, pentru orice $p \in E$, atunci ecuaţia 1.26 se scrie sub forma

$$\frac{dx}{dp} + \frac{f'(p)}{f(p) - p}x = -\frac{g'(p)}{f(p) - p} \tag{1.29}$$

Să presupunem că soluţia generală a acestei ecuaţiei are forma

$$x = x(p, c),\ p \in I_c, \tag{1.30}$$

unde $I_c \subset E$ este un interval, iar c este o constantă arbitrară dintr-un interval $J \subset \mathbf{R}$.

Fie

$$K_c = \{x(p, c) \mid p \in I_c\} \tag{1.31}$$

Presupunem că pentru fiecare $x \in K_c$ există un singur număr $p \in I_c$ astfel încât $x = x(p, c)$; notăm acest număr prin $p(x, c)$. Atunci soluţia generală a ecuaţiei 1.11 va fi

$$y = xf(p(x, c)) + g(p(x, c)),\ x \in K_c, \tag{1.32}$$

unde $c \in J$. Deoarece, în general, explicitarea lui p nu este posibilă, vom avea în vedere curba integrală γ_c a ecuaţiei 1.14, definită în planul xOp prin

$$\gamma_c : x = x(p, c),\ p \in I_c \tag{1.33}$$

pentru $c \in J$. Atunci curba integrală a ecuaţiei 1.11, în planul xOy, corespunzătoare curbei γ_c, este curba Γ_c definită explicit prin

$$\Gamma_c : y = xf\left(p\left(x, c\right)\right) + g\left(p\left(x, c\right)\right), \ x \in K_c, \tag{1.34}$$

sau parametric prin

$$\Gamma_c : \begin{cases} x = x\left(p, c\right) \\ y = x\left(p, c\right) f\left(p\right) + g\left(p\right) \end{cases}, \ p \in I_c \tag{1.35}$$

De obicei se spune că

$$\begin{cases} x = x\left(p, c\right) \\ y = x\left(p, c\right) f\left(p\right) + g\left(p\right) \end{cases}, \ p \in I_c$$

este reprezentarea parametrică a soluţiei generale a ecuaţiei 1.11

1.5.10 Ecuaţia diferenţială a lui Clairaut

Ecuaţia diferenţială a lui Clairaut este ecuaţia lui Lagrange în cazul $f\left(p\right) = p$, pentru orice $p \in E$. Deci forma ecuaţiei lui Clairaut este

$$y = xy' + g\left(y'\right) \tag{1.36}$$

Ecuaţia 1.14 devine, în acest caz,

$$\left(x + g'\left(p\right)\right) p' = 0 \tag{1.37}$$

Conform consecinţei teoremei 1.5.1 rezultă că soluţiile ecuaţiei (1.36) se obţin din soluţiile ecuaţiei (1.37). Mai precis, soluţiei

$$p = p\left(x\right), \ x \in I$$

a ecuaţiei (1.37) îi corespunde soluţia

$$y = xp\left(x\right) + g\left(p\left(x\right)\right), \ x \in I$$

a ecuaţiei (1.36). Concret, ecuaţia (1.37) are soluţia generală dată de funcţia constantă

$$p = c, \ (\forall)\, x \in \mathbf{R}$$

unde $c \in E$ este o constantă arbitrară. Rezultă că ecuaţia (1.36) are soluţia generală

$$y = xc + g\left(c\right), \ x \in \mathbf{R}$$

Pe de altă parte, curba

$$\gamma : x = -g'(p)\,,\ p \in E$$

este o curbă integrală a ecuaţiei (1.37). Dacă $g' : E \to K \subset \mathbf{R}$ este inversabilă, atunci rezultă că curba Γ, definită prin

$$\Gamma : \begin{cases} x = & -g'(p) \\ y = & -pg'(p) + g(p) \end{cases},\ p \in E,$$

este curbă integrală, definită parametric, a ecuaţiei (1.36). Această curbă integrală corespunde unei soluţii singulare a ecuaţiei (1.36). Se mai spune că

$$\begin{cases} x = & -g'(p) \\ y = & -pg'(p) + g(p) \end{cases},\ p \in E,$$

este reprezentarea parametrică a acestei soluţii singulare.

Exemplu. 1) Determinaţi soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale

$$y = 2xy' + y'^2$$

Rezolvare: Ecuaţia considerată este de tip Lagrange. Punem $y' = p$ şi obţinem

$$y = 2xp + p^2 \tag{1.38}$$

Diferenţiind obţinem

$$pdx = 2pdx + 2xdp + 2pdp,$$

deci

$$pdx + (2x + 2p)\,dp = 0,\ \text{sau}\ \frac{dx}{dp} + \frac{2}{p}x = -2$$

Soluţia generală a acestei ecuaţii este

$$x = \frac{c}{p} - \frac{2}{3}p,\ p \in I \subset \mathbf{R}$$

unde I este un interval care nu conţine pe 0, iar c este o constantă reală arbitrară. Din relaţia (1.38) deducem reprezentarea parametrică a soluţiei generale a ecuaţiei date:

$$\begin{cases} x = \dfrac{c}{p} - \dfrac{2}{3}p \\ y = \dfrac{2c}{p} - \dfrac{1}{3}p \end{cases},p \in I$$

unde c este o constantă reală arbitrară.

2) Determinaţi soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale

$$y = xy' + \frac{1}{y'}$$

Rezolvare: Ecuaţia considerată este de tip Clairaut. Punem $y' = p$ şi obţinem

$$y = xp + \frac{1}{p} \tag{1.39}$$

pentru orice $x \in \mathbf{R}$ şi $p \in I \subset \mathbf{R}$, I fiind un interval care nu conţine pe 0. Vom considera $I = (0, \infty)$. Diferenţiind obţinem

$$pdx = pdx + xdp - \frac{1}{p^2}dp$$

sau, ordonând,

$$\left(x - \frac{1}{p^2}\right) dp = 0$$

O posibilitate este $x = \frac{1}{p^2}$, din care deducem reprezentarea parametrică a soluţiei singulare:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{p^2} \\ y = \frac{2}{p} \end{cases}, \ p \in I$$

În acest caz putem obţine forma explicită a soluţiei singulare, eliminând parametrul p,

$$y = 2\sqrt{x}, \ x \in (0, \infty)$$

Altă posibilitate este $dp = 0$, din care deducem $p = c$, unde c este o constantă arbitrară. Soluţia generală a ecuaţiei considerate este, ţinând cont de relaţia (1.39),

$$y = xc + \frac{1}{c}$$

unde $c \in (0, \infty)$ este o constantă arbitrară.

1.5.11 Ecuaţii algebrice în y'

Considerăm un domeniu E din $\mathbf{R}^2$ şi funcţiile continue $a_i : E \to \mathbf{R}$, $0 \leq i \leq n$.

Notăm

$$P(x, y, t) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x, y)\, t^{n-k}$$

Ecuaţia $P(x, y, y') = 0$ se numeşte ecuaţie diferenţială de ordinul întâi, de gradul n în raport cu y'. Pentru a găsi soluţii ale acestei ecuaţii procedăm astfel: determinăm mai întâi rădăcinile ecuaţiei algebrice

$$P(x, y, t) = 0; \ t \in \mathbf{C}$$

şi apoi rezolvăm fiecare ecuaţie diferenţială $y' = t(x,y)$, $t(x,y)$ fiind o rădăcină a ecuaţiei menţionate.

Arătăm că fiecare soluţie $y = u(x)$ a ecuaţiei $y' = t(x,y)$ este soluţie a ecuaţiei $P(x,y,y') = 0$.

Avem succesiv

$$\begin{aligned} P(x,y,t(x,y)) &= 0,\ u'(x) = t(x,u(x)), \\ P(x,u(x),u'(x)) &= P(x,u(x),t(x,u(x))) = P(x,y,t(x,y)) = 0 \end{aligned}$$

Deci $P(x,u(x),u'(x)) = 0$, ceea ce trebuia să verificăm.

1.6 Inegalităţi integrale

TEOREMA 1.6.1 (INEGALITATEA LUI GRONWALL) *Dacă funcţia continuă*

$$x : [a,b] \to \mathbf{R}$$

verifică inegalitatea

$$x(t) \le \alpha(t) + \int_a^t \beta(s)\, x(s)\, ds,\ \textit{pentru } t \in [a,b],$$

unde funcţiile $\alpha, \beta : [a,b] \to \mathbf{R}$ sunt continue, iar $\beta(t) \geq 0$ pentru orice $t \in [a,b]$, atunci funcţia x verifică şi inegalitatea

$$x(t) \le \alpha(t) + \int_a^t \alpha(s)\, \beta(s) \exp\left(\int_s^t \beta(\tau)\, d\tau\right) ds,\ \textit{pentru } t \in [a,b]$$

Demonstraţie. Notăm

$$y(t) = \int_a^t \beta(s)\, x(s)\, ds,\ \text{pentru } t \in [a,b]$$

Rezultă $y(a) = 0$,

$$x(t) \le \alpha(t) + y(t) \tag{1.40}$$

şi $y'(t) = \beta(t)\, x(t)$ pentru $t \in [a,b]$. Înmulţind cu $\beta(t)$ relaţia (1.40) obţinem

$$y'(t) = \beta(t)\, x(t) \le \beta(t)\, \alpha(t) + \beta(t)\, y(t),\ \text{pentru } t \in [a,b] \tag{1.41}$$

Notăm

$$u(t) = \exp\left(-\int_a^t \beta(\tau)\, d\tau\right),\ \text{pentru } t \in [a,b]$$

Rezultă $u(a) = 1$ şi $u'(t) = -\beta(t)u(t)$, pentru $t \in [a,b]$. Înmulţind cu $u(t)$ în relaţia (1.41) rezultă

$$y'(t)u(t) \leq u(t)\beta(t)\alpha(t) + u(t)\beta(t)y(t)$$

care se poate scrie sub forma

$$\frac{d}{dt}[y(t)u(t)] \leq u(t)\beta(t)\alpha(t)$$

Prin integrare obţinem

$$y(t)u(t) - y(a)u(a) \leq \int_a^t \alpha(s)\beta(s)u(s)\,ds$$

adică

$$y(t) \leq \int_a^t \alpha(s)\beta(s)u(s)\,ds \cdot \frac{1}{u(t)} = \int_a^t \alpha(s)\beta(s)\exp\left(\int_s^t \beta(\tau)\,d\tau\right)ds$$

De aici şi din (1.40) rezultă tocmai inegalitatea ce trebuia demonstrată. ■

Luând funcţia α egală cu o constantă M se obţine enunţul de mai jos.

Consecinţă. Fie $x : [a,b] \to \mathbf{R}$ o funcţie continuă care verifică inegalitatea

$$x(t) \leq M + \int_a^t \beta(s)x(s)\,ds,\ t \in [a,b]$$

unde M este o constantă, iar $\beta : [a,b] \to \mathbf{R}$ este o funcţie continuă şi pozitivă. Atunci are loc şi inegalitatea

$$x(t) \leq M \cdot \exp\int_a^t \beta(\tau)\,d\tau,\ t \in [a,b]$$

1.7 Existenţa şi unicitatea soluţiilor

Fie t_0 şi x_0 două numere reale oarecare, a şi b două numere reale pozitive,

$$I = [t_0 - a, t_0 + a],\ J = [x_0 - b, x_0 + b],\ \Delta = I \times J,$$

iar $f : \Delta \to \mathbf{R}$, o funcţie dată. Mulţimea Δ este numită dreptunghi închis cu centrul în (t_0, x_0), de laturi $2a$ şi $2b$. Considerăm ecuaţia

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) \tag{1.42}$$

şi condiţia iniţială

$$x(t_0) = x_0 \tag{1.43}$$

TEOREMA 1.7.1 *Dacă:*

1. f *este continuă pe* Δ,

2. f *este lipschitziană pe* Δ *în raport cu* x, *adică există o constantă pozitivă* L *astfel încât*

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq L|x-y|,\ (\forall)\ (t,x),(t,y) \in \Delta,$$

atunci problema Cauchy (1.42+1.43) admite o soluţie unică pe intervalul $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$, *unde* $\delta = \min\left\{a, \dfrac{b}{M}\right\}$ *şi* $M = \sup\{|f(t,x)| \mid (t,x) \in \Delta\}$.

Demonstraţie. Arătăm mai întâi că problema Cauchy (1.42+1.43) este echivalentă cu determinarea unei funcţii continue $x : I \to \mathbf{R}$, care să verifice egalitatea

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\,ds,\ t \in I \tag{1.44}$$

Relaţia (1.44) este numită, de obicei, ecuaţie integrală. Într-adevăr, dacă funcţia continuă x verifică (1.44), pe un interval I, atunci rezultă că ea este de clasă C^1 pe I, $x'(t) = f(t, x(t))$ şi $x(t_0) = x_0$, adică x este soluţie a problemei Cauchy (1.42+1.43). Reciproc, orice soluţie a problemei Cauchy (1.42+1.43), pe un interval I, verifică relaţiile $x(t_0) = x_0$ şi $x'(s) = f(s, x(s))$, pentru orice $s \in I$. Integrând ultima egalitate pe intervalul $[t_0, t] \subset I$ obţinem

$$\int_{t_0}^{t} x'(s)\,ds = x(t) - x(t_0) = x(t) - x_0 = \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\,ds$$

ceea ce arată că x verifică (1.44). Rezultă, aşadar, că pentru a demonstra teorema este suficient să demonstrăm că ecuaţia integrală (1.44) admite o soluţie continuă unică pe intervalul $I_0 = [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$. Vom folosi o metodă, numită metoda aproximaţiilor succesive. Definim un şir de funcţii $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ astfel:

$$\begin{array}{ll} x_0 & I_0 \to J,\ x_0(t) = x_0, \\ x_n & I_0 \to J,\ x_n(t) = x_0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(s, x_{n-1}(s))\,ds, \end{array} \tag{1.45}$$

$(\forall)\ t \in I_0,\ n \in \mathbf{N}^*$. Funcţia constantă $x_0 : I_0 \to J$ este, evident, continuă. Presupunem că pentru un număr n din $\mathbf{N}^*$ funcţia x_{n-1} este continuă pe I_0 şi avem $x_{n-1}(t) \in J$ pentru orice $t \in I_0$. Atunci funcţia x_n este corect definită şi

$$|x_n(t) - x_0| \leq \left|\int_{t_0}^{t} |f(s, x_{n-1}(s))|\,ds\right| \leq M|t - t_0| \leq M\delta \leq b$$

Deci $x_n(t) \in J$ pentru orice $t \in I_0$. Din continuitatea funcţiei f pe Δ şi a funcţiei x_{n-1} pe I_0 rezultă continuitatea pe I_0 a funcţiei compuse $s \to f(s, x_{n-1}(s))$. În consecinţă, ţinând cont de proprietăţile integralei, rezultă că funcţia

$$t \to \int_{t_0}^{t} f(s, x_{n-1}(s))\, ds$$

este continuă pe I_0 şi deci funcţia x_n este continuă pe I_0. Conform principiului inducţiei matematice, rezultă că şirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este corect definit şi funcţiile x_n sunt continue pe I_0, pentru orice $n \in \mathbf{N}$.

Vom demonstra că şirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este uniform convergent pe I_0. Avem

$$\begin{aligned}
|x_1(t) - x_0(t)| &\leq \left|\int_{t_0}^{t} |f(s, x_0(s))|\, ds\right| \leq M|t - t_0| \leq M\delta, \\
|x_2(t) - x_1(t)| &\leq \left|\int_{t_0}^{t} |f(s, x_1(s)) - f(s, x_0(s))|\, ds\right| \leq \\
&\leq L\left|\int_{t_0}^{t} |x_1(s) - x_0(s)|\, ds\right| \leq ML\frac{|t - t_0|^2}{2!}
\end{aligned}$$

pentru orice $t \in I_0$. Presupunem că pentru un număr $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$, este îndeplinită inegalitatea

$$|x_n(t) - x_{n-1}(t)| \leq ML^{n-1}\frac{|t - t_0|^n}{n!}$$

pentru orice $t \in I_0$. Avem

$$\begin{aligned}
|x_{n+1}(t) - x_n(t)| &\leq \left|\int_{t_0}^{t} |f(s, x_n(s)) - f(s, x_{n-1}(s))|\, ds\right| \leq \\
&\leq L\left|\int_{t_0}^{t} |x_n(s) - x_{n-1}(s)|\, ds\right| \leq \\
&\leq L\left|\int_{t_0}^{t} ML^{n-1}\frac{|s - t_0|^n}{n!}\, ds\right| \leq ML^n\frac{|t - t_0|^{n+1}}{(n+1)!}
\end{aligned}$$

Conform principiului inducţiei matematice, rezultă că are loc inegalitatea

$$|x_n(t) - x_{n-1}(t)| \leq ML^{n-1}\frac{|t - t_0|^n}{n!}$$

pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$ şi pentru orice $t \in I_0$. Deasemenea, are loc, ca o consecinţă, inegalitatea

$$|x_n(t) - x_{n-1}(t)| \leq ML^{n-1}\frac{\delta^n}{n!}$$

pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$ şi pentru orice $t \in I_0$. Din această inegalitate, pe baza convergenţei seriei

$$\sum_{n=1}^{\infty} ML^{n-1}\frac{\delta^n}{n!}$$

şi conform criteriului lui Weierstrass rezultă că seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(x_n(t) - x_{n-1}(t)\right)$$

este uniform convergentă pe I_0. Prin urmare, şirul sumelor parţiale $(S_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ ale acestei serii este uniform convergent pe I_0. Deoarece

$$S_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \left(x_k(t) - x_{k-1}(t)\right) = x_n(t) - x_0(t)$$

rezultă că şirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este uniform convergent pe I_0. Fie

$$x(t) = \lim_{n\to\infty} x_n(t)$$

Datorită convergenţei uniforme a şirului $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ şi a continuităţii funcţiilor x_n rezultă continuitatea funcţiei x. Deasemenea, deoarece

$$|f(t, x_n(t)) - f(t, x(t))| \leq L\,|x_n(t) - x(t)|$$

pentru orice $t \in I_0$ şi orice $n \in \mathbf{N}$, rezultă că

$$f(t, x_n(t)) \to f(t, x(t))$$

când $n \to \infty$, uniform pe I_0. Trecând la limită sub semnul integrală în relaţia (1.45), rezultă

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds$$

pentru fiecare $t \in I_0$, adică x este soluţie a ecuaţiei (1.44).

Unicitatea soluţiei. Să presupunem că ar mai exista o soluţie $y : I_0 \to J$, a ecuaţiei (1.44), deci

$$y(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\, ds \tag{1.46}$$

Scăzând relaţiile (1.44) şi (1.46) obţinem

$$\begin{aligned} |x(t) - y(t)| &= \left|\int_{t_0}^{t} \left(f(s, x(s)) - f(s, y(s))\right) ds\right| \leq \\ &\leq \left|\int_{t_0}^{t} L\,|x(s) - y(s)|\, ds\right| \end{aligned}$$

Din consecinţa lemei lui Gronwall rezultă $|x(t) - y(t)| = 0$, pentru orice $t \in I_0$, adică $x(t) = y(t)$, pentru orice $t \in I_0$, ceea ce trebuia demonstrat. ■

Observaţii 1) Funcţia

$$x_n : I_0 \to J,\ x_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_{n-1}(s))\, ds,$$

$\forall\, t \in I_0,\ n \in \mathbf{N}^*$, se numeşte aproximarea de ordinul n a soluţiei problemei Cauchy $(1.42 + 1.43)$.

2) Dacă $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ există şi este continuă pe Δ, atunci $f(t,x)$ este lipschitziană pe Δ în raport cu x. Într-adevăr, în condiţiile menţionate, există

$$L = \sup\left\{ \left| \frac{\partial f(t,x)}{\partial x} \right| \mid (t,x) \in \Delta \right\}$$

Pe de altă parte, din teorema creşterilor finite, rezultă că pentru fiecare $(t,x) \in \Delta$ şi $(t,y) \in \Delta$ există ξ, cuprins între x şi y, astfel încât

$$|f(t,x) - f(t,y)| = \left| \frac{\partial f(t,\xi)}{\partial x} \right| \cdot |x - y| \le L \cdot |x - y|$$

Exemple. 1) Folosind metoda aproximaţiilor succesive, determinaţi aproximarea de ordinul 3 a soluţiei ecuaţiei diferenţiale

$$y' = x^2 + y^2$$

care verifică condiţia iniţială $y(0) = 0$.

Rezolvare: Şirul de funcţii $(y_n)_{n \in \mathbf{N}}$, care converge către soluţia problemei Cauchy menţionate, este definit de metoda aproximaţiilor succesive astfel:

$$\begin{cases} y_0(x) = 0 \\ y_n(x) = \int\limits_0^x \left[s^2 + y_{n-1}^2(s) \right] ds,\ n \in \mathbf{N}^* \end{cases}$$

pentru orice $x \in I = [-\delta, \delta]$, δ fiind un număr suficient de mic încât şirul să fie uniform convergent pe I. Deci

$$\bullet \quad \begin{cases} y_1(x) = \int\limits_0^x \left[s^2 + 0^2 \right] ds = \frac{1}{3}x^3, \\ y_2(x) = \int\limits_0^x \left[s^2 + \frac{1}{9}s^6 \right] ds = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{63}x^7, \\ y_3(x) = \int\limits_0^x \left[s^2 + \frac{1}{9}s^6 + \frac{2}{189}s^{10} + \frac{1}{3969}s^{14} \right] ds = \\ = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{63}x^7 + \frac{2}{2079}x^{11} + \frac{1}{59535}x^{15} \end{cases}$$

2) Determinaţi soluţia problemei Cauchy

$$y' = x^2 + y,$$

$$y(0) = 0$$

folosind metoda aproximaţiilor succesive.

Rezolvare: Şirul de funcţii $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$, care converge către soluţia problemei Cauchy menţionate, este definit de metoda aproximaţiilor succesive astfel:

$$\begin{cases} y_0(x) = 0 \\ y_n(x) = \int\limits_0^x \left[s^2 + y_{n-1}(s)\right] ds, \; n \in \mathbf{N}^* \end{cases}$$

pentru orice $x \in I = [-\delta, \delta]$, δ fiind un număr suficient de mic încât şirul să fie uniform convergent pe I. Deci

$$\begin{cases} y_1(x) = \int\limits_0^x \left[s^2 + 0\right] ds = \frac{1}{3}x^3, \\ y_2(x) = \int\limits_0^x \left[s^2 + \frac{1}{3}s^3\right] ds = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3\cdot 4}x^4 = 2!\left(\frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4\right), \\ y_3(x) = \int\limits_0^x \left[s^2 + \frac{1}{3}s^3 + \frac{1}{3\cdot 4}s^4\right] ds = 2!\left(\frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5\right) \end{cases}$$

Presupunem că, pentru un $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 1$, avem

$$y_n(x) = 2!\left(\frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots + \frac{1}{(n+2)!}x^{n+2}\right)$$

Deducem

$$\begin{aligned} y_{n+1}(x) &= \int\limits_0^x \left[s^2 + 2!\left(\frac{1}{3!}s^3 + \frac{1}{4!}s^4 + \cdots + \frac{1}{(n+2)!}s^{n+2}\right)\right] ds = \\ &= \frac{1}{3}x^3 + 2!\left(\frac{1}{4!}x^4 + \cdots + \frac{1}{(n+3)!}x^{n+3}\right) = \\ &= 2!\left(\frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots + \frac{1}{(n+3)!}x^{n+3}\right) \end{aligned}$$

ceea ce arată că formula

$$y_n(x) = 2!\left(\frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots + \frac{1}{(n+2)!}x^{n+2}\right)$$

este valabilă pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$. Rezultă

$$\begin{aligned} y(x) &= \lim y_n(x) = 2!\left(\frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots + \frac{1}{(n+2)!}x^{n+2} + \cdots\right) = \\ &= 2!\left(e^x - 1 - x - \frac{1}{2}x^2\right) = 2e^x - 2 - 2x - x^2 \end{aligned}$$

Deci soluţia problemei Cauchy considerate este $y = 2e^x - 2 - 2x - x^2$. Observăm că soluţia găsită este valabilă pentru $x \in \mathbf{R}$. •

1.8 Existenţa şi unicitatea globală a soluţiilor

DEFINIŢIA 1.8.1 *Fie $D \subset \mathbf{R}^2$ o mulţime deschisă. Spunem că funcţia*

$$f(t, x) : D \to \mathbf{R},$$

este local lipschitziană în raport cu x dacă pentru orice mulţime compactă $K \subset D$ există un număr pozitiv L_k astfel încât

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq L_k |x-y|$$

pentru oricare $(t,x) \in K$ şi $(t,y) \in K$.

TEOREMA 1.8.1 *Dacă funcţia $f(t,x) : D \to \mathbf{R}$, unde $D \subset \mathbf{R}^2$ este o mulţime deschisă, este continuă pe D şi local lipschitziană în raport cu x, atunci pentru orice punct $(t_0, x_0) \in D$ există o vecinătate $U \subset \mathbf{R}$ a lui t_0 pe care ecuaţia diferenţială*

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) \tag{1.47}$$

admite o soluţie unică

$$x = x(t), \ t \in U$$

care verifică condiţia iniţială $x(t_0) = x_0$.

`Demonstraţie.` Deoarece D este o mulţime deschisă rezultă că există două numere pozitive a şi b astfel încât

$$\Delta = [t_0 - a, t_0 + a] \times [x_0 - b, x_0 + b] \subset D$$

Deoarece ipotezele teoremei 1.7.1 sunt îndeplinite pe Δ, notând

$$\begin{aligned} M &= \sup\{|f(t,x)| \mid (t,x) \in \Delta\} \\ \delta &= \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\} \text{ şi } U = [t_0 - \delta, t_0 + \delta], \end{aligned}$$

rezultă că există o soluţie unică

$$x = x(t), \ t \in U$$

a ecuaţiei

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x)$$

care verifică condiţia iniţială $x(t_0) = x_0$. ■

Consecinţă Considerăm funcţia $f : D \to \mathbf{R}$, unde $D \subset \mathbf{R}^2$ este o mulţime deschisă. Se ştie că dacă f şi $\frac{\partial f}{\partial x}$ sunt continue pe D, atunci f este local lipschitziană pe D în raport cu x. Prin urmare, pentru orice punct $(t_0, x_0) \in D$ există o vecinătate $U \subset \mathbf{R}$ a lui t_0 pe care ecuaţia diferenţială $\frac{dx}{dt} = f(t,x)$ admite o soluţie unică $x = x(t)$, $t \in U$, care verifică condiţia iniţială $x(t_0) = x_0$.

Teorema 1.8.1 afirmă existenţa şi unicitatea soluţiei problemei Cauchy într-o vecinătate a punctului t_0, adică existenţa şi unicitatea locală a soluţiei problemei Cauchy. Vom arăta acum că, în ipotezele acestei teoreme, unicitatea are caracter global, adică dacă două soluţii coincid într-un punct, atunci ele coincid pe tot intervalul comun de definiţie.

TEOREMA 1.8.2 *Considerăm două soluţii*

$$x = u(t)\,,\ t \in I \text{ şi } y = v(t)\,,\ t \in I'$$

ale ecuaţiei diferenţiale (1.47), definite pe intervalele I şi respectiv I'. Dacă există $t_0 \in I \cap I'$ astfel încât $u(t_0) = v(t_0)$, atunci $u(t) = v(t)$ pentru orice $t \in I \cap I'$.

Demonstraţie. 1)Presupunem la început că I şi I' sunt intervale deschise. Notăm $(t_1, t_2) = I \cap I'$. Vom arăta egalitatea celor două soluţii pe $[t_0, t_2)$. Facem observaţia că dacă soluţiile u şi v coincid pe un interval de forma $[t_0, \tau)$, cu $t_0 \le \tau < t_2$, atunci ele coincid şi în τ. Într-adevăr, datorită continuităţii soluţiilor u şi v, avem

$$u(\tau) = \lim_{t \to \tau} u(t) = \lim_{t \to \tau} v(t) = v(\tau)$$

Fie $[t_0, \tau]$, unde $t_0 \le \tau < t_2$, un interval pe care cele două soluţii coincid. Din teorema 1.8.1, care afirmă unicitatea locală, şi deoarece $u(\tau) = v(\tau)$, rezultă că există $\varepsilon(\tau) > 0$, suficient de mic, astfel încât

$$u(t) = v(t)\,,\ (\forall)\ t \in [\tau, \tau + \varepsilon(\tau)]$$

Deducem că soluţiile considerate coincid pe intervalul $[t_0, \tau + \varepsilon(\tau)]$, care include strict pe $[t_0, \tau]$. Aşadar, reuniunea tuturor intervalelor de forma $[t_0, \tau]$, pe care soluţiile u şi v coincid, este un interval J pe care aceste soluţii coincid. Nu se poate ca J să aibă forma $J = [t_0, T]$ deoarece $[t_0, T + \varepsilon(T)]$, care include strict pe J, ar fi un interval pe care soluţiile u şi v ar coincide, deci ar fi inclus în J şi suntem conduşi la o contradicţie. Rezultă că J are forma $J = [t_0, T)$. Dacă am avea $T < t_2$, atunci, conform observaţiei făcute la începutul demonstraţiei, ar rezulta că soluţiile u şi v ar coincide pe $[t_0, T]$, deci $[t_0, T]$ ar fi inclus în J, adică în $[t_0, T)$, ceea ce este imposibil. Deci singura posibilitate este $T = t_2$, adică soluţiile u şi v coincid pe $[t_0, t_2)$, ceea ce trebuia demonstrat. Analog se demonstrează egalitatea soluţiilor pe intervalul $(t_1, t_0]$. În concluzie rezultă egalitatea soluţiilor u şi v pe $I \cap I'$.

2) Considerăm cazul când I şi I' sunt intervale arbitrare, nu neapărat deschise. Să presupunem, de exemplu, că $I \cap I' = (t_1, t_2]$. După ce demonstrăm că u şi v coincid pe (t_1, t_2), ca în primul caz, deducem, ca în observaţia de la începutul demonstraţiei, că

$$u(t_2) = \lim_{t \to t_2} u(t) = \lim_{t \to t_2} v(t) = v(t_2)$$

adică tocmai concluzia că soluţiile u şi v coincid pe $(t_1, t_2] = I \cap I'$. ■

DEFINIŢIA 1.8.2 *Soluţia*

$$x = x(t),\ t \in I$$

a ecuaţiei diferenţiale (1.47), se numeşte prelungibilă, dacă există o soluţie

$$x = \tilde{x}(t),\ t \in I'$$

a acestei ecuaţii, numită prelungirea soluţiei $x = x(t)$, *astfel încât* $I \subset I'$, $I \neq I'$ *şi*

$$x(t) = \tilde{x}(t),\ (\forall)\, t \in I$$

Observaţie. Dacă în definiţia precedentă avem $I \subset I'$ şi există $t_0 \in I'$ astfel încât $t < t_0$ $(t > t_0)$, $\forall t \in I$, atunci soluţia $x = x(t)$ se numeşte prelungibilă la dreapta (la stânga), iar soluţia $x = \tilde{x}(t)$ se numeşte prelungirea la dreapta (la stânga) a soluţiei $x = x(t)$.

O soluţie care nu este prelungibilă (prelungibilă la dreapta, prelungibilă la stânga) se numeşte saturată (saturată la dreapta, saturată la stânga).

TEOREMA 1.8.3 *Intervalul de definiţie al unei soluţii saturate (saturate la dreapta, saturate la stânga) este deschis (deschis la dreapta, deschis la stânga).*

Demonstraţie. Într-adevăr, să presupunem că

$$x = \phi(t),\ t \in (a, b]$$

ar fi o soluţie a ecuaţiei diferenţiale (1.47), saturată la dreapta, definită pe un interval care nu este deschis la dreapta. Din teorema 1.8.1 rezultă existenţa unei soluţii a acestei ecuaţii, de forma

$$x = \phi_d(t),\ t \in [b - \varepsilon, b + \varepsilon]$$

unde $\varepsilon > 0$ este suficient de mic, care verifică condiţia

$$\phi_d(b) = \phi(b)$$

Din teorema 1.8.2 rezultă egalitatea soluţiilor ϕ şi ϕ_d pe intervalul comun de definiţie:

$$\phi(t) = \phi_d(t), \ (\forall)\, t \in [b-\varepsilon, b]$$

Acum, $x = \tilde{\phi}(t)$, definită prin

$$\tilde{\phi}(t) = \begin{cases} \phi(t), \ t \in (a, b] \\ \phi_d(t), \ t \in [b, b+\varepsilon] \end{cases}$$

este, evident, o prelungire la dreapta a soluţiei $x = \phi(t)$, ceea ce contrazice faptul că ϕ este saturată la dreapta. ■

TEOREMA 1.8.4 *Soluţia*

$$x = x(t), \ t \in [t_0, t_1)$$

a ecuaţiei diferenţiale (1.47) este prelungibilă la dreapta dacă şi numai dacă graficul său

$$G_x = \{(t, x(t)) \mid t \in [t_0, t_1)\}$$

este inclus într-o submulţime compactă a lui D.

`Demonstraţie.` Presupunem că soluţia considerată este prelungibilă la dreapta şi fie

$$x = \tilde{x}(t), \ t \in [t_0, t_1 + \varepsilon]$$

unde $\varepsilon > 0$ este un număr suficient de mic, o soluţie a ecuaţiei diferenţiale (1.47) astfel încât

$$x(t) = \tilde{x}(t), \ t \in [t_0, t_1)$$

Rezultă că există

$$\lim_{t \to t_1} x(t) = \lim_{t \to t_1} \tilde{x}(t) = \tilde{x}(t_1)$$

ceea ce înseamnă că funcţia x se poate prelungi prin continuitate la intervalul $[t_0, t_1\}$. Graficul G_x este inclus în închiderea sa

$$\bar{G}_x = \{(t, x(t)) \mid t \in [t_0, t_1]\}$$

care este o mulţime compactă inclusă în D, fiind imaginea intervalului compact $[t_0, t_1]$ prin funcţia continuă $t \to (t, x(t))$.

Reciproc. Să presupunem că există o mulţime compactă $K \subset D$ care să includă graficul soluţiei considerate. Rezultă că

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds, \ t \in [t_0, t_1)$$

De aici deducem

$$|x(t) - x(t')| \leq \left| \int_{t'}^{t} |f(s, x(s))| \, ds \right| \leq M_k |t - t'|, \; (\forall) \; t, t' \in [t_0, t_1)$$

unde

$$M_k = \sup_{(s,x) \in K} |f(s, x)|$$

Rezultă de aici, conform criteriului Cauchy-Bolzano, că există $\lim\limits_{t \to t_1} x(t)$, şi deci funcţia x se poate prelungi prin continuitate la intervalul $[t_0, t_1]$. Vom nota această prelungire tot cu x. Deci vom avea $\lim\limits_{t \to t_1} x(t) = x(t_1)$. Din continuitatea lui f şi din ipoteza $G_x \subset K$ rezultă existenţa limitei

$$f(t_1, x(t_1)) = \lim_{t \to t_1, t < t_1} f(t, x(t)) = \lim_{t \to t_1, t < t_1} x'(t) = x'(t_1 - 0)$$

şi $(t_1, x(t_1)) \in K$. Conform teoremei 1.8.1, există o soluţie

$$x = \tilde{x}(t), \; t \in [t_1 - \varepsilon, t_1 + \varepsilon]$$

unde $\varepsilon > 0$ este un număr suficient de mic, a ecuaţiei 1.47, care verifică condiţia $\tilde{x}(t_1) = x(t_1)$. Considerăm funcţia

$$\begin{aligned} \bar{x} & \quad [t_0, t_1 + \varepsilon] \to \mathbf{R} \\ \bar{x}(t) &= \begin{cases} x(t), \; t \in [t_0, t_1] \\ \tilde{x}(t), \; t \in (t_1, t_1 + \varepsilon] \end{cases} \end{aligned}$$

Avem

$$\begin{aligned} \bar{x}'(t_1 + 0) &= \tilde{x}'(t_1) = f(t_1, \tilde{x}(t_1)) = f(t_1, x(t_1)) \\ \bar{x}'(t_1 - 0) &= x'(t_1 - 0) = f(t_1, x(t_1)) \end{aligned}$$

Deci derivata $\bar{x}'(t_1)$ există şi este egală cu $f(t_1, x(t_1))$, deci şi cu $f(t_1, \bar{x}(t_1))$, adică

$$\bar{x}'(t_1) = f(t_1, \bar{x}(t_1))$$

Aceasta arată că $\bar{x}$ este soluţie pe întregul interval $[t_0, t_1 + \varepsilon]$, prelungire a soluţiei considerate, şi teorema este demonstrată. ■

TEOREMA 1.8.5 *Pentru orice soluţie a ecuaţiei diferenţiale (1.47) există o prelungire saturată unică.*

Demonstraţie. Unicitatea prelungirii rezultă din teorema 1.8.2. Este suficient să arătăm că orice soluţie este prelungibilă la dreapta până la o soluţie saturată la dreapta. Fie

$$x = x(t), \ t \in [t_1, t_2]$$

o soluţie fixată a ecuaţiei (1.47), iar $\mathcal{D}$ mulţimea tuturor soluţiilor $\tilde{x}$, ale ecuaţiei (1.47), care prelungesc la dreapta soluţia x. Mulţimea $\mathcal{D}$, ordonată după relaţia de incluziune a intervalelor de definiţie a elementelor sale, admite o margine superioară

$$x = \bar{x}(t), \ t \in [t_1, T)$$

care este o soluţie saturată la dreapta şi care prelungeşte la dreapta soluţia dată. ■

1.9 Exerciţii

1. Arătaţi că $y = \frac{1}{3} + Ce^{-3x}$, c fiind constantă, este soluţia generală a ecuaţiei $y' + 3y = 1$.

2. Arătaţi că $\left(y - \frac{1}{3}\right)e^{3x} = c$, c fiind constantă arbitrară, reprezintă integrala generală a ecuaţiei $y' + 3y = 1$.

3. Să se arate că ecuaţia $y' = x + y$ are soluţia $y = ce^x - x - 1$, pentru orice constantă c. Să se determine soluţia care verifică condiţia iniţială $y(x_0) = y_0$, unde x_0 şi y_0 sunt numere reale.

4. Să se integreze ecuaţiile diferenţiale de mai jos folosind metoda aproximaţiilor succesive:

   (a) $y' = y$, $y(0) = 1$; $y' = x + \sin y$;

   (b) $y' = y^2$; $y' = y^2 + 1$, $y(0) = 0$;

5. Determinaţi soluţia generală a ecuaţiei Riccati cunoscînd o soluţie y_1 a ei:

   (a) $y' + 2xy^2 - y - \dfrac{x-1}{x^2} = 0$, $y_1 = \dfrac{1}{x}$;

   (b) $y' + y^2 - (\sin x + \cos x)\, y - 2\cos x = 0$, $y_1 = \sin x + \cos x$;

   (c) $y' - \frac{1}{3}y^2 - \dfrac{2}{3x^2} = 0$, $y_1 = \lambda x$ unde λ este o constantă;

6. Să se integreze ecuaţiile diferenţiale de forma $y' = f(x)$ şi să se traseze curbele lor integrale: $y' = \dfrac{1}{x}$, $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $y' = \dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$, $y' = \dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$;

7. Să se integreze ecuaţiile diferenţiale

   (a) $y' = 2y$, $y' = 2\sqrt{y}$,

   (b) $y' = y^2$, $y' = 3y^{\frac{2}{3}}$ şi să se traseze curbele lor integrale;

8. Să se integreze ecuaţiile diferenţiale:

   (a) $x\left(y^2-1\right)dx + y\left(x^2-1\right)dy = 0$, $\sqrt{1-x^2}dy - \sqrt{1-y^2}dx = 0$,

   (b) $x\sqrt{1-y^2}dx + y\sqrt{1-x^2}dy = 0$, $\dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \dfrac{dy}{\sqrt{b^2-x^2}}$.

9. Să se integreze ecuaţiile diferenţiale:

   (a) $y' = \dfrac{y-x}{y+x}$, $y' = \sqrt{\dfrac{y}{x}}$,

   (b) $y' = \sqrt{\dfrac{y}{x}} + \dfrac{x}{y}$, $y' = \dfrac{2xy}{x^2-y^2}$.

10. Să se integreze ecuaţiile diferenţiale:

   (a) $y' - \dfrac{1+2x}{x+x^2}y = \dfrac{1+2x}{x+x^2}$; $y' - \dfrac{2}{x}y = x^3$;

   (b) $y' - \dfrac{1}{x}y = \dfrac{x^3}{y^4}$; $y' - \dfrac{4}{x}y = x\sqrt{y}$; $y' + xy = -\dfrac{x}{y}$;

   (c) $y' - \dfrac{1}{3}y^2 - \dfrac{2}{3x^2} = 0$ ştiind că are soluţia $y_1 = -\dfrac{1}{x}$;

   (d) $\left(x^2-y\right)dx + \left(y^2-x\right)dy = 0$;

   (e) $y = 2xy' + y'^2$, $y = xy' - \dfrac{1}{4}y'^2$.

11. Să se integreze ecuaţiile diferenţiale cu variabile separabile:

   (a) $x'\cos^2 t \cot x + \tan t \sin^2 x = 0$; $tx' = x + x^2$;

   (b) $tx'x = 1 - t^2$; $x' = (t+x)^2$;

   (c) $x' = (8t+2x+1)^{2;}$ $x'(4t+6x-5) = -(2t+3x+1)$;

   (d) $x'(4t-2x+3) = -(2t-x)$; $x'\left(t^2x - x\right) + tx^2 + t = 0$.

12. Să se integreze ecuaţiile diferenţiale omogene sau reductibile la acestea:

   (a) $tx' = x - t$; $tx' = -(t+x)$;

   (b) $t^2x' = x(t-x)$; $2txx' = t^2 + x^2$;

   (c) $\left(2\sqrt{tx} - t\right)x' = -x$; $tx' = x + \sqrt{t^2+x^2}$;

   (d) $\left(4x^2+3tx+t^2\right)x' = -\left(x^2+3tx+4t^2\right)$; $2txx' = 3x^2 - t^2$.

13. Să se integreze ecuaţiile diferenţiale liniare sau reductibile la acestea:

   (a) $tx' = x + tx$; $tx' = -2x + t^4$;

   (b) $tx' = -x + e^t$; $\left(x^2 - 3t^2\right) x' + 2tx = 0$;

   (c) $tx' = -x - tx^2$; $2txx' = x^2 - t$;

   (d) $\left(2t - t^2 x\right) x' = -x$; $tx' = -2x\,(1 - tx)$.

14. Să se integreze ecuaţiile diferenţiale exacte sau reductibile prin metoda factorului integrant:

   (a) $(t + 2x)\, x' + t + x = 0$; $2tx' + t^2 + 2x + 2t = 0$;

   (b) $\left(3t^2 x - x^2\right) x' - t^2 + 3tx^2 - 2 = 0$; $\left(t^2 x + x^3 + t\right) x' - t^3 + tx^2 + x = 0$;

   (c) $\left(x^2 - 3t^2\right) x' + 2tx = 0$; $2txx' - \left(t + x^2\right) = 0$;

   (d) $tx' - x\,(1 + tx) = 0$; $t\left(x^3 + \ln t\right) x' + x = 0$;

15. Să se integreze ecuaţiile diferenţiale de tip Lagrange sau Clairaut:

   (a) $x = \frac{1}{2} tx' + x'^{\,3}$; $x = x' + \sqrt{1 - x'^{\,2}}$;

   (b) $x = (1 + x')\, t + x'^{\,2}$; $x = -\frac{1}{2} x' \left(2t + x'\right)$;

   (c) $x = tx' + x'^{\,2}$; $x = tx' + x'$;

   (d) $x = tx' + \sqrt{1 + x'^{\,2}}$; $x = tx' + \dfrac{1}{x'}$.

Capitolul 2

Sisteme diferenţiale de ordinul întâi

2.1 Definiţii

DEFINIŢIA 2.1.1 *Se numeşte sistem diferenţial de ordinul întâi, cu n funcţii necunoscute* $(n \in \mathbf{N}^*)$, *un sistem de relaţii de forma*

$$\begin{cases} F_1\left(x, y_1, \cdots, y_n, \dfrac{dy_1}{dx}, \cdots, \dfrac{dy_n}{dx}\right) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ F_n\left(x, y_1, \cdots, y_n, \dfrac{dy_1}{dx}, \cdots, \dfrac{dy_n}{dx}\right) = 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

în care $F_i : D \subset \mathbf{R}^{2n+1} \to \mathbf{R}$, *pentru* $1 \leq i \leq n$, *sunt funcţii date, şi:*

1) fiecare dintre variabilele $\dfrac{dy_1}{dx}, \cdots, \dfrac{dy_n}{dx}$ *apare efectiv în cel puţin una din relaţiile (2.1);*

2) fiecare dintre funcţiile F_i *depinde efectiv de cel puţin una dintre variabilele* $\dfrac{dy_1}{dx}, \cdots, \dfrac{dy_n}{dx}$; ,

3)se cere determinarea funcţiilor de forma

$$(\phi_1, \ldots, \phi_n) : I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n \tag{2.2}$$

astfel încât

$$\begin{cases} F_1\left(x, \phi_1(x), \cdots, \phi_n(x), \dfrac{d\phi_1}{dx}(x), \cdots, \dfrac{d\phi_n}{dx}(x)\right) = 0 \\ \\ F_n\left(x, \phi_1(x), \cdots, \phi_n(x), \dfrac{d\phi_1}{dx}(x), \cdots, \dfrac{d\phi_n}{dx}(x)\right) = 0 \end{cases}, (\forall)\ x \in I. \tag{2.3}$$

O funcţie de forma (2.2) cu proprietatea (2.3), se numeşte soluţie pe I a sistemului diferenţial (2.1).

Exemplu Sistemul diferenţial

$$\begin{cases} x + y_1 \cdot y_2 + y_1' \cdot y_3 - x^3 - 3x - 1 = 0 \\ y_1' + y_2' + y_3' + x \cdot y_1 - x^2 - 2x - 3 = 0 \\ y_2' - x \cdot y_3 + y_2' \cdot y_3' + 2x^2 - 5x = 0 \end{cases}$$

admite soluţia (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3), unde

$$\phi_i : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ 1 \leq i \leq 3, \text{şi}$$
$$\phi_1(x) = x, \phi_2(x) = x^2, \phi_3(x) = 2x + 1, \quad x \in \mathbf{R}$$

deoarece înlocuind

$$\begin{aligned} y_1 &= \phi_1(x) = x, \\ y_2 &= \phi_2(x) = x^2, \\ y_3 &= \phi_3(x) = 2x + 1 \text{ şi} \\ y_1' &= 1,\ y_2' = 2x,\ y_3' = 2, \end{aligned}$$

în sistem, se obţin egalităţi adevărate.

Observaţii.

1. Se spune că relaţiile (2.1) definesc forma generală a unui sistem diferenţial de ordinul întâi. Sistemul diferenţial mai este numit şi sistem de ecuaţii diferenţiale.

2. Literele y_i desemnează funcţiile necunoscute ale sistemului diferenţial, iar litera x desemnează variabila independentă a acestor funcţii. În locul expresiei $\dfrac{dy_i}{dx}$ se foloseşte adesea expresia y_i'. Funcţiile necunoscute şi variabila independentă pot fi desemnate prin orice fel de simboluri, dacă nu se crează confuzii.

3. Spunem că sistemul diferenţial

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, \cdots, y_n) \\ \vdots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, \cdots, y_n) \end{cases} \tag{2.4}$$

unde $f_i : E \subset \mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}$, pentru $1 \leq i \leq n$, este dat sub forma normală, sau că relaţiile (2.4) reprezintă forma normală a unui sistem diferenţial de ordinul întâi, cu n funcţii necunoscute. Dacă funcţiile $f_1, \cdots, f_n$ nu depind de x, atunci sistemul (2.4) se numeşte autonom.

4. Determinarea soluţiilor unui sistem diferenţial este un proces numit rezolvarea (sau integrarea) sistemului diferenţial respectiv. Mulţimea de definiţie a soluţiei se determină, de regulă, odată cu soluţia.

DEFINIŢIA 2.1.2 *Fie* $(\phi_1, \cdots, \phi_n) : I \to \mathbf{R}^n$ *o soluţie a sistemului diferenţial (2.1). Curba* $\gamma \subset \mathbf{R}^n$, *definită parametric prin*

$$\gamma : \begin{cases} y_1 = \phi_1(x) \\ \vdots \\ y_n = \phi_n(x) \end{cases}, \ x \in I,$$

se numeşte traiectorie a acestui sistem diferenţial. Curba $\Gamma \subset E$ *definită prin*

$$\Gamma = \{(x, \phi_1(x), \cdots, \phi_n(x) \mid x \in I\}$$

se numeşte curbă integrală a sistemului diferenţial.

Observaţie Soluţia $(\phi_1, \cdots, \phi_n) : I \to \mathbf{R}^n$ se poate indica sub forma

$$y_1 = \phi_1(x), \cdots, y_n = \phi_n(x), \ x \in I$$

Uneori această soluţie se indică sub forma

$$y = (\phi_1(x), \ldots, \phi_n(x)), \ x \in I$$

sau sub forma

$$y(x) = \begin{bmatrix} \phi_1(x) \\ \vdots \\ \phi_n(x) \end{bmatrix}, \ x \in I$$

2.2 Problema Cauchy

O problemă concretă importantă şi frecvent întâlnită este problema care constă în determinarea unei curbe integrale (unei traiectorii) a unui sistem diferenţial de ordinul întâi, care trece printr-un punct dat. Mai precis, problema Cauchy pentru sistemul diferenţial (2.1) constă în determinarea unei soluţii a acestui sistem,

$$y_1 = \phi_1(x), \cdots, y_n = \phi_n(x), \ x \in I,$$

care să verifice condiţiile

$$\phi_1(x_0) = y_{10}, \ldots, \phi_n(x_0) = y_{n0}, \tag{2.5}$$

unde $x_0 \in I$ şi $y_{10}, \cdots, y_{n0} \in \mathbf{R}$ sunt numere date. Condiţiile (2.5) se numesc condiţii iniţiale sau condiţii Cauchy. Problema Cauchy descrisă mai sus se menţionează prin: "problema Cauchy (2.1)+(2.5)" sau

$$\text{problemaCauchy:} \quad \begin{cases} F_1\left(x, y_1, \cdots, y_n, \dfrac{dy_1}{dx}, \cdots, \dfrac{dy_n}{dx}\right) = 0 \\ \vdots \\ F_n\left(x, y_1, \cdots, y_n, \dfrac{dy_1}{dx}, \cdots, \dfrac{dy_n}{dx}\right) = 0 \end{cases},$$
$$y_1(x_0) = y_{10}, \cdots, y_n(x_0) = y_{n0},$$

în care se specifică sistemul diferenţial şi condiţiile iniţiale.

2.3 Soluţii

2.3.1 Soluţie generală

DEFINIŢIA 2.3.1 *Se numeşte soluţie generală a sistemului diferenţial (2.4), în mulţimea $E' \subset E$, o mulţime S de soluţii ale acestui sistem cu proprietatea că pentru fiecare punct $(x_0, y_{10}, \ldots, y_{n0}) \in E'$ există o singură soluţie $(\phi_1, \ldots, \phi_n) \in S$, care să verifice condiţiile iniţiale*

$$\phi_1(x_0) = y_{10}, \ldots, \phi_n(x_0) = y_{n0}$$

Exemplu Se verifică uşor că sistemul diferenţial

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} + \dfrac{dy_2}{dx} - y_1 - y_2 = 0 \\ 3\dfrac{dy_2}{dx} - 3\dfrac{dy_1}{dx} + y_2 - 5y_1 = 0 \end{cases}$$

admite soluţia generală

$$\left\{y_1 = c_1 e^x + c_2 e^{-x},\ y_2 = 2c_1 e^x - c_2 e^{-x}\right\},\ x \in \mathbf{R}$$

unde c_1 şi c_2 sunt numere reale arbitrare.

2.3.2 Soluţie particulară

DEFINIŢIA 2.3.2 *O soluţie a unui sistem diferenţial, care aparţine unei soluţii generale a acelui sistem se numeşte soluţie particulară.*

Exemplu. Pentru sistemul diferenţial

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} + \dfrac{dy_2}{dx} - y_1 - y_2 = 0 \\ 3\dfrac{dy_2}{dx} - 3\dfrac{dy_1}{dx} + y_2 - 5y_1 = 0 \end{cases}$$

soluţia generală este

$$\left\{y_1 = c_1 e^x + c_2 e^{-x},\ y_2 = 2c_1 e^x - c_2 e^{-x}\right\},\ x \in \mathbf{R}$$

Luînd $c_1 = 2$ şi $c_2 = -5$ se obţine o soluţie particulară

$$y_1 = 2e^x - 5e^{-x},\ y_2 = 4e^x + 5e^{-x},\ x \in \mathbf{R}$$

2.3.3 Integrala unui sistem diferenţial

DEFINIŢIA 2.3.3 *Un sistem de relaţii de forma*

$$\begin{cases} G_1(x, y_1, \cdots, y_n) = 0 \\ \vdots \\ G_n(x, y_1, \cdots, y_n) = 0 \end{cases}$$

unde $G_i : E \subset \mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}$, *pentru* $1 \leq i \leq n$, *este numit integrală (soluţie definită implicit) a sistemului diferenţial (2.1), dacă el defineşte implicit pe* $y_1, \cdots, y_n$ *ca funcţii de* x, *pe o mulţime* $I \subset \mathbf{R}$, *şi setul* $\{y_1, \cdots, y_n\}$ *format din aceste funcţii este soluţie pe* I *a sistemului diferenţial (2.1).*

DEFINIŢIA 2.3.4 *Prin integrală generală a sistemului (2.1) se înţelege un sistem de relaţii de forma*

$$\begin{cases} G_1(x, y_1, \cdots, y_n) = c_1 \\ \vdots \\ G_n(x, y_1, \cdots, y_n) = c_n \end{cases}, \tag{2.6}$$

unde $G_i : E \subset \mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}$, *pentru* $1 \leq i \leq n$, *cu proprietatea că pentru fiecare* $(x_0, y_{10}, \cdots, y_{n0}) \in E$, *sistemul*

$$\begin{cases} G_1(x, y_1, \cdots, y_n) = c_{10} \\ \\ G_n(x, y_1, \cdots, y_n) = c_{n0} \end{cases}$$

unde $c_{i0} = G_i(x_0, y_{10}, \cdots, y_{n0})$, *pentru* $1 \leq i \leq n$, *defineşte implicit pe* $y_1, \cdots, y_n$ *ca funcţii de* x, *pe o vecinătate* $I_0 \subset \mathbf{R}$ *a lui* x_0, *iar setul* $\{y_1, \cdots, y_n\}$ *format din aceste funcţii este soluţie pe* I_0 *a sistemului diferenţial (2.1).*

Observaţie. Dacă notăm prin

$$\begin{cases} y_1 = y_1(x, c_{10}, \cdots, c_{n0}) \\ \vdots \\ y_n = y_n(x, c_{10}, \cdots, c_{n0}) \end{cases}, \ x \in I_0$$

soluţia definită de sistemul

$$\begin{cases} G_1(x, y_1, \cdots, y_n) = c_{10} \\ \vdots \\ G_n(x, y_1, \cdots, y_n) = c_{n0} \end{cases}$$

atunci ea verifică condiţiile iniţiale

$$\begin{cases} y_1(x_0, c_{10}, \cdots, c_{n0}) = y_{10} \\ \vdots \\ y_n(x_0, c_{10}, \cdots, c_{n0}) = y_{n0} \end{cases}$$

2.4 Forma vectorială a unui sistem diferenţial

1) Fie

$$F = (F_1, \cdots, F_n) : D \subset \mathbf{R}^{2n+1} \to \mathbf{R}^n$$

o funcţie vectorială cu componentele F_i, $1 \le i \le n$. Vom nota

$$y = (y_1, \cdots, y_n) \text{ şi } \frac{dy}{dx} = \left(\frac{dy_1}{dx}, \cdots, \frac{dy_n}{dx}\right)$$

Considerăm că relaţia

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \tag{2.7}$$

unde 0 este vectorul nul al spaţiului $\mathbf{R}^n$, este echivalentă cu sistemul de relaţii

$$\begin{cases} F_1\left(x, y_1, \cdots, y_n, \dfrac{dy_1}{dx}, \cdots, \dfrac{dy_n}{dx}\right) = 0 \\ \vdots \\ F_n\left(x, y_1, \cdots, y_n, \dfrac{dy_1}{dx}, \cdots, \dfrac{dy_n}{dx}\right) = 0 \end{cases}$$

adică cu sistemul diferenţial (2.1). Rezultă că un sistem diferenţial de ordinul întâi are forma unei ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi, pe care o vom numi ecuaţie diferenţială vectorială de ordinul întâi.

2) Fie $f = (f_1, \cdots, f_n) : E \subset \mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}^n$, o funcţie vectorială cu componentele f_i, $1 \le i \le n$. Cu notaţiile de la punctul precedent deducem uşor că relaţia vectorială

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{2.8}$$

este echivalentă cu sistemul diferenţial normal

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, \cdots, y_n) \\ \vdots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, \cdots, y_n) \end{cases}$$

3) O soluţie a sistemului diferenţial (2.7), sau (2.8), de forma

$$y_1 = \phi_1(x), \cdots, y_n = \phi_n(x), \quad x \in I,$$

va fi reprezentată vectorial sub forma

$$y = (\phi_1(x), \ldots, \phi_n(x)), \ x \in I$$

4) Condiţiile iniţiale (2.5) se exprimă sub forma vectorială

$$y(x_0) = y_0$$

unde $x_0 \in I$ şi $y_0 = (y_{10}, \cdots, y_{n0}) \in \mathbf{R}^n$.

Observaţie. În cazul $n = 1$, sistemele diferenţiale de ordinul întâi devin ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi. Rezultatele obţinute în legătură cu soluţiile şi problema Cauchy pentru sisteme diferenţiale de ordinul întâi se transpun în cazul ecuaţiilor diferenţiale de ordinul întâi.

2.5 Existenţa şi unicitatea soluţiilor

2.5.1 Cazul general

Fie $x_0, y_{10}, \cdots, y_{n0}$ numere reale date, $a, b_1, \cdots, b_n$ numere reale pozitive date,

$$\begin{aligned} U &= [x_0 - a,\ x_0 + a], J_i = [y_{i0} - b_i,\ y_{i0} + b_i],\ 1 \le i \le n, \\ \Delta &= U \times J_1 \times \cdots \times J_n, \end{aligned}$$

iar $f_i : \Delta \to \mathbf{R}$, $1 \le i \le n$, funcţii date. Mulţimea Δ este numită paralelipiped închis cu centrul în punctul $(x_0, y_{10}, \cdots, y_{n0})$ de laturi $2a$, $2b_1, \cdots, 2b_n$.Considerăm sistemul diferenţial normal, (2.4),

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, \cdots, y_n) \\ \vdots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, \cdots, y_n) \end{cases}$$

şi condiţiile Cauchy, (2.5),

$$y_1(x_0) = y_{10}, \cdots, y_n(x_0) = y_{n0}$$

Vom prezenta în continuare o teoremă de existenţă şi unicitate a soluţiei problemei Cauchy.

TEOREMA 2.5.1 *Dacă*

1. *funcţiile* $f_1, \cdots, f_n$ *sunt continue pe* Δ;

2. *funcţiile* $f_1, \cdots, f_n$ *verifică condiţiile lui Lipschitz pe* Δ, *adică există numerele pozitive* A_j, $1 \leq j \leq n$, *astfel încât*

$$|f_i(x, Y_1, \cdots, Y_n) - f_i(x, y_1, \cdots, y_n)| \leq \sum_{j=1}^{n} A_j |Y_j - y_j|$$

pentru $1 \leq i \leq n$, *şi orice* $(x, Y_1, \cdots, Y_n)$ *şi* $(x, y_1, \cdots, y_n)$ *din* Δ, *atunci problema Cauchy (2.4,2.5) are o soluţie unică pe intervalul* $[x_0 - h, x_0 + h]$, *unde* ,

$$h = \min\left\{a, \frac{b_1}{M}, \cdots, \frac{b_n}{M}\right\}, \tag{2.9}$$

iar

$$M = \max_{1 \leq i \leq n} \sup_{(x, y_1, \cdots, y_n) \in \Delta} |f_i(x, y_1, \cdots, y_n)| \tag{2.10}$$

Demonstraţie. Vom arăta că problema Cauchy din enunţul teoremei se reduce la un sistem de ecuaţii integrale. Fie

$$\{y_1 = y_1(x), \cdots, y_n = y_n(x)\}, \ x \in I$$

o soluţie a problemei Cauchy menţionate, unde I este un interval anumit de numere reale, care conţine pe x_0. Rezultă că y_i este derivabilă pe I, şi

$$\frac{dy_i(x)}{dx} = f_i\left(x, \frac{dy_1(x)}{dx}, \cdots, \frac{dy_n(x)}{dx}\right) \tag{2.11}$$

pentru orice $x \in I$ şi pentru $1 \leq i \leq n$. Integrând între x_0 şi x rezultă că

$$y_i(x) = y_{i0} + \int_{x_0}^{x} f_i\left(s, \frac{dy_1(s)}{dx}, \cdots, \frac{dy_n(s)}{dx}\right) ds, \tag{2.12}$$

Reciproc, dacă $y_i(x)$, $1 \leq i \leq n$, sunt nişte funcţii continue care verifică relaţiile (2.12) pe I, atunci deducem că ele sunt derivabile pe I şi, derivând, rezultă

$$\frac{dy_i(x)}{dx} = f_i\left(x, \frac{dy_1(x)}{dx}, \cdots, \frac{dy_n(x)}{dx}\right)$$

pentru orice $x \in I$ şi pentru $1 \leq i \leq n$. Deasemenea, înlocuind x cu x_0 în aceleaşi relaţii (2.12), rezultă $y_i(x_0) = y_{i0}$, pentru $1 \leq i \leq n$. Deci, problema Cauchy din enunţ se reduce la sistemul de relaţii (2.12), numit sistem de ecuaţii integrale.

Vom construi, în continuare, o soluţie a sistemului de ecuaţii integrale (2.12), folosind metoda aproximaţiilor succesive. Vom considera că $I = [x_0 - h, x_0 + h]$ este intervalul din enunţul teoremei. Considerăm nişte funcţii continue arbitrare

$$\alpha_i : I \to R$$

pentru $1 \leq i \leq n$, astfel încât

$$(x, \alpha_1(x), \cdots, \alpha_n(x)) \in \Delta$$

pentru orice $x \in I$, pe care le vom numi aproximaţiile de ordinul 0 ale componentelor soluţiei $(y_1, \cdots, y_n)$ căutate. Putem lua, de exemplu, funcţiile constante definite prin

$$\alpha_i(x) = y_{i0}, \ (\forall)\, x \in I,$$

pentru $1 \leq i \leq n$. Rezultă că au sens integralele

$$\int_{x_0}^{x} f_i(s, \alpha_1(s), \cdots, \alpha_n(s))\, ds$$

pentru orice $x \in I$ şi $1 \leq i \leq n$. Deci putem defini funcţiile

$$y_i^1 : I \to R, \ y_i^1(x) = y_{i0} + \int_{x_0}^{x} f_i(s, \alpha_1(s), \cdots, \alpha_n(s))\, ds$$

pentru orice $x \in I$ şi $1 \leq i \leq n$, numite aproximaţiile de ordinul 1 ale componentelor soluţiei $(y_1, \cdots, y_n)$ căutate. Din relaţiile de definiţie rezultă că funcţiile y_i^1 sunt derivabile pe I şi $y_i^1(x_0) = y_{i0}$ pentru $1 \leq i \leq n$.

Deoarece

$$\begin{aligned} \left|y_i^1(x) - y_{i0}\right| &= \left|\int_{x_0}^{x} f_i(s, \alpha_1(s), \cdots, \alpha_n(s))\, ds\right| \leq \\ &\leq \left|\int_{x_0}^{x} \left|f_i(s, \alpha_1(s), \cdots, \alpha_n(s))\right| ds\right| \leq M\,|x - x_0| \leq Mh \leq b_i \end{aligned}$$

rezultă că

$$\left(x, y_1^1(x), \cdots, y_n^1(x)\right) \in \Delta$$

pentru orice $x \in I$. Deducem că au sens integralele

$$\int_{x_0}^{x} f_i\left(s, y_1^1(s), \cdots, y_n^1(s)\right) ds$$

pentru orice $x \in I$ şi $1 \leq i \leq n$. Putem deci defini funcţiile

$$y_i^2 : I \to \mathbf{R},\ y_i^2(x) = y_{i0} + \int_{x_0}^{x} f_i\left(s, y_1^1(s), \cdots, y_n^1(s)\right) ds$$

pentru orice $x \in I$ şi $1 \leq i \leq n$, numite aproximaţiile de ordinul 2 ale componentelor soluţiei $(y_1, \cdots, y_n)$ căutate. Din relaţiile de definiţie rezultă că funcţiile y_i^2 sunt derivabile pe I şi $y_i^2(x_0) = y_{i0}$, pentru $1 \leq i \leq n$. Urmând aceeaşi cale ca în pasul anterior, deducem că

$$\left(x, y_1^2(x), \cdots, y_n^2(x)\right) \in \Delta$$

pentru orice $x \in I$. Putem construi în acelaşi mod aproximaţiile de ordinul $3, 4, \ldots$ ale componentelor soluţiei $(y_1, \cdots, y_n)$ căutate. În general, aproximaţiile de ordinul p, $(p \in N^*)$, se definesc cu ajutorul aproximaţiilor de ordinul $p-1$, prin

$$y_i^p : I \to \mathbf{R},\ y_i^p(x) = y_{i0} + \int_{x_0}^{x} f_i\left(s, y_1^{p-1}(s), \cdots, y_n^{p-1}(s)\right) ds \tag{2.13}$$

pentru orice $x \in I$ şi $1 \leq i \leq n$. Se verifică uşor că y_i^p sunt derivabile pe I şi $y_i^p(x_0) = y_{i0}$, pentru $1 \leq i \leq n$. Deasemenea rezultă că

$$\left(x, y_1^p(x), \cdots, y_n^p(x)\right) \in \Delta$$

pentru orice $x \in I$.

Am obţinut astfel şirurile

$$(y_1^p)_p, \cdots, (y_n^p)_p$$

şi vom demonstra că ele sunt uniform convergente pe I. Pentru a demonstra convergenţa uniformă a şirului $(y_i^p)_p$ vom considera seria ajutătoare

$$\alpha_i(x) + \left(y_i^1(x) - \alpha_i(x)\right) + \left(y_i^2(x) - y_i^1(x)\right) + \cdots \tag{2.14}$$

Suma parţială de ordinul $p+1$ a acestei serii este tocmai $y_i^p(x)$, deci convergenţa seriei este echivalentă cu convergenţa şirului $(y_i^p(x))$. Folosind condiţiile lui Lipschitz obţinem

$$y_i^p(x) - y_i^{p-1}(x) =$$
$$= \int_{x_0}^{x} \left[f_i\left(s, y_1^{p-1}(s), \cdots, y_n^{p-1}(s)\right) - f_i\left(s, y_1^{p-2}(s), \cdots, y_n^{p-2}(s)\right)\right] ds$$

Trecând la valoarea absolută şi ţinând cont de condiţia lui Lipschitz, obţinem

$$\left|y_i^p(x) - y_i^{p-1}(x)\right| \leq \sum_{j=1}^{n} A_j \left|\int_{x_0}^{x} \left|y_j^{p-1}(s) - y_j^{p-2}(s)\right| ds\right| \tag{2.15}$$

Pentru $p = 2$, avem

$$\left|y_i^2(x) - y_i^1(x)\right| \le \sum_{j=1}^{n} A_j \left|\int_{x_0}^{x} \left|y_j^1(s) - \alpha_j(s)\right| ds\right|$$

Funcţiile $y_j^1 - \alpha_j$ sunt mărginite deoarece sunt continue pe I. Fie $K > 0$ astfel încât

$$\left|y_j^1(x) - \alpha_j(x)\right| \le K$$

pentru orice $x \in I$ şi $1 \le j \le n$. Deducem că

$$\left|y_i^2(x) - y_i^1(x)\right| \le KA\left|x - x_0\right|$$

pentru orice $x \in I$ şi $1 \le i \le n$, unde am notat $A = A_1 + \cdots + A_n$.

Vom demonstra acum că

$$\left|y_i^p(x) - y_i^{p-1}(x)\right| \le KA^{p-1}\frac{\left|x - x_0\right|^{p-1}}{(p-1)!} \tag{2.16}$$

pentru orice $x \in I$, $1 \le i \le n$ şi $p \in N$, $p \ge 2$. Folosim metoda inducţiei matematice. Pentru $p = 2$ inegalitatea este demonstrată mai sus. Presupunem că inegalitatea este adevărată pentru un număr natural $p - 1 \ge 2$. Deci

$$\left|y_i^{p-1}(x) - y_i^{p-2}(x)\right| \le KA^{p-2}\frac{\left|x - x_0\right|^{p-2}}{(p-2)!}$$

pentru orice $x \in I, 1 \le i \le n$. Vom arăta că inegalitatea este adevărată şi pentru numărul p. Din inegalitatea (2.15) avem

$$\begin{aligned}\left|y_i^p(x) - y_i^{p-1}(x)\right| &\le \sum_{j=1}^{n} A_j \left|\int_{x_0}^{x} KA^{p-2}\frac{\left|s - x_0\right|^{p-2}}{(p-2)!} ds\right| \le \\ &\le KA^{p-2}\sum_{j=1}^{n} A_j \left|\int_{x_0}^{x} \frac{\left|s - x_0\right|^{p-2}}{(p-2)!} ds\right| \le KA^{p-1}\frac{\left|x - x_0\right|^{p-1}}{(p-1)!}\end{aligned}$$

pentru orice $x \in I$, $1 \le i \le n$, ceea ce trebuia demonstrat.

Conform criteriului lui Weierstrass, seria

$$\sum_{p=1}^{\infty} KA^{p-1}\frac{\left|x - x_0\right|^{p-1}}{(p-1)!}$$

este uniform convergentă pe I, deoarece este majorată pe I de seria de numere pozitive convergentă

$$\sum_{p=1}^{\infty} KA^{p-1}\frac{h^{p-1}}{(p-1)!} = K\exp(Ah)$$

Din inegalitatea (2.16), demonstrată mai sus, rezultă că şi seria

$$\alpha_i(x) + \left(y_i^1(x) - \alpha_i(x)\right) + \left(y_i^2(x) - y_i^1(x)\right) + \cdots$$

este uniform convergentă pe I, şi prin urmare şirul $(y_i^p(x))$ este uniform convergent pe I.

Notând

$$y_1(x) = \lim_{p\to\infty} y_1^p(x), \cdots, y_n(x) = \lim_{p\to\infty} y_n^p(x)$$

pentru orice $x \in I$, vom demonstra că

$$\{y_1 = y_1(x), \cdots, y_n = y_n(x)\}, \ x \in I$$

este soluţia unică din enunţul teoremei. Din convergenţa uniformă a şirurilor $(y_i^p(x))$ pe I şi din continuitatea funcţiilor y_i^p pe I, rezultă continuitatea funcţiilor y_i pe I. Vom trece la limită, făcând $p \to \infty$, în relaţiile (2.13). Mai întâi, din

$$|y_i^p(x) - y_{i0}| \le b_i$$

valabilă pentru orice $x \in I$ şi $1 \le i \le n$, obţinem, pentru $p \to \infty$,

$$|y_i(x) - y_{i0}| \le b_i$$

ceea ce înseamnă că

$$(x, y_1(x), \cdots, y_n(x)) \in \Delta$$

pentru orice $x \in I$. Pe de altă parte, avem

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{x_0}^x f_i(s, y_1(s), \cdots, y_n(s))\,ds - \int_{x_0}^x f_i(s, y_1^p(s), \cdots, y_n^p(s))\,ds\right| = \\
&= \left|\int_{x_0}^x [f_i(s, y_1(s), \cdots, y_n(s)) - f_i(s, y_1^p(s), \cdots, y_n^p(s))]\,ds\right| \le \\
&\le \left|\int_{x_0}^x |f_i(s, y_1(s), \cdots, y_n(s)) - f_i(s, y_1^p(s), \cdots, y_n^p(s))|\,ds\right| \le \\
&\le \sum_{j=1}^n A_j \left|\int_{x_0}^x \left|y_j(s) - y_j^p(s)\right| ds\right|
\end{aligned}$$

Deci

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{x_0}^x f_i(s, y_1(s), \cdots, y_n(s))\,ds - \int_{x_0}^x f_i(s, y_1^p(s), \cdots, y_n^p(s))\,ds\right| \le \\
&\le \sum_{j=1}^n A_j \left|\int_{x_0}^x \left|y_j(s) - y_j^p(s)\right| ds\right|
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Din convergenţa uniformă a şirului $\left(y_j^p\right)$ către y_j, pe I, rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$ există un număr natural N astfel încât

$$\left|y_j(x) - y_j^p(x)\right| < \frac{\varepsilon}{Ah}$$

pentru orice $x \in I$, $1 \le j \le n$ şi $p \ge N$. Din inegalitatea (2.17) deducem

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{x_0}^x f_i(s, y_1(s), \cdots, y_n(s))\,ds - \int_{x_0}^x f_i(s, y_1^p(s), \cdots, y_n^p(s))\,ds\right| \le \\
&\le \frac{\varepsilon}{Ah} A\,|x - x_0| < \varepsilon
\end{aligned}$$

pentru $p \geq N$ şi $1 \leq i \leq n$, ceea ce înseamnă că

$$\lim_{p \to \infty} \int_{x_0}^{x} f_i\left(s, y_1^p(s), \cdots, y_n^p(s)\right) ds = \int_{x_0}^{x} f_i\left(s, y_1(s), \cdots, y_n(s)\right) ds$$

pentru fiecare $x \in I$, şi $1 \leq i \leq n$, adică, ţinând cont de relaţiile (2.13),

$$y_i(x) = y_{i0} + \int_{x_0}^{x} f_i\left(s, y_1(s), \cdots, y_n(s)\right) ds$$

pentru fiecare $x \in I$, şi $1 \leq i \leq n$. Am demonstrat că

$$\{y_1 = y_1(x), \cdots, y_n = y_n(x)\}, \ x \in I$$

este soluţia sistemului de ecuaţii integrale (2.12), adică soluţia problemei Cauchy considerate.

Vom arăta că soluţia sistemului de ecuaţii integrale (2.12), obţinută mai sus, nu depinde de aproximaţiile de ordinul 0, adică de $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$. Alegem ca aproximaţii de ordinul 0 funcţiile continue $\beta_1, \cdots, \beta_n$. Suntem conduşi la următoarele aproximaţii succesive

$$Y_i^1 : I \to \mathbf{R}, \ Y_i^1(x) = y_{i0} + \int_{x_0}^{x} f_i\left(s, \beta_1(s), \cdots, \beta_n(s)\right) ds$$

şi

$$Y_i^p : I \to \mathbf{R}, \ Y_i^p(x) = y_{i0} + \int_{x_0}^{x} f\left(s, Y_1^{p-1}(s), \cdots, Y_n^{p-1}(s)\right) ds$$

pentru orice $x \in I$, $1 \leq i \leq n$ şi $p \in N$, $p \geq 2$. Se deduce, ca şi în cazul precedent, că şirurile de funcţii (Y_i^p) sunt uniform convergente pe I şi

$$\{Y_1 = Y_1(x), \cdots, Y_n = Y_n(x)\}, \ x \in I$$

este o soluţie a sistemului de ecuaţii integrale (2.12). Ţinând cont de definiţiile funcţiilor y_i^p şi Y_i^p avem

$$\begin{aligned}
&Y_i^1(x) - y_i^1(x) = \\
&= \int_{x_0}^{x} \left[f_i\left(s, \beta_1(s), \cdots, \beta_n(s)\right) - f_i\left(s, \alpha_1(s), \cdots, \alpha_n(s)\right)\right] ds \\
&Y_i^p(x) - y_i^p(x) = \\
&= \int_{x_0}^{x} \left[f_i\left(s, Y_1^{p-1}(s), \cdots, Y_n^{p-1}(s)\right) - f_i\left(s, y_1^{p-1}(s), \cdots, y_n^{p-1}(s)\right)\right] ds
\end{aligned}$$

Ţinând cont de inegalităţile lui Lipschitz, obţinem

$$\begin{aligned}
\left|Y_i^1(x) - y_i^1(x)\right| &\leq \sum_{k=1}^{n} A_k \left|\int_{x_0}^{x} \left|\beta_k(s) - \alpha_k(s)\right| ds\right| \\
\left|Y_i^p(x) - y_i^p(x)\right| &\leq \sum_{k=1}^{n} A_k \left|\int_{x_0}^{x} \left|Y_k^{p-1}(s) - y_k^{p-1}(s)\right| ds\right|
\end{aligned}$$

pentru orice $x \in I$, $1 \leq i \leq n$ şi $p \in N$, $p \geq 2$. Funcţiile $\beta_k(x) - \alpha_k(x)$ sunt mărginite deoarece sunt continue pe intervalul închis I. Fie K' un majorant pentru

$$\{|\beta_k(x) - \alpha_k(x)| \mid x \in I,\ 1 \leq k \leq n\}$$

Din inegalităţile precedente obţinem

$$|Y_i^p(x) - y_i^p(x)| \leq K'A^p \frac{|x-x_0|^p}{p!} \leq K'A^p \frac{h^p}{p!}$$

pentru $1 \leq i \leq n$ şi $p \in N^*$. Făcând $p \to \infty$, obţinem

$$\lim_{p\to\infty} Y_i^p(x) = \lim_{p\to\infty} y_i^p(x)$$

adică

$$Y_i(x) = y_i(x)$$

pentru orice $x \in I$, $1 \leq i \leq n$, ceea ce trebuia demonstrat.

Vom arăta, în fine, unicitatea soluţiei obţinute. Să presupunem că în afară de soluţia obţinută prin metoda aproximaţiilor succesive, sistemul de ecuaţii integrale (2.12) are şi soluţia

$$\{z_1 = z_1(x), \cdots, z_n = z_n(x)\},\ x \in I$$

Deci

$$z_i(x) = y_{i0} + \int_{x_0}^{x} f_i(s, z_1(s), \cdots, z_n(s))\, ds$$

În continuare aplicăm metoda aproximaţiilor succesive luând ca aproximaţii de ordinul 0 funcţiile $z_1, \cdots, z_n$. Aproximaţiile de ordinul întâi sunt date de relaţiile

$$y_i^1(x) = y_{i0} + \int_{x_0}^{x} f_i(s, z_1(s), \cdots, z_n(s))\, ds$$

Din relaţiile precedente rezultă, evident, $y_i^1(x) = z_i(x)$, pentru orice $x \in I$ şi $1 \leq i \leq n$. În mod analog rezultă că aproximaţiile de ordinul doi sunt $y_i^2(x) = z_i(x)$, pentru orice $x \in I$ şi $1 \leq i \leq n$. Prin inducţie matemetică se deduce că aproximaţiile de ordinul p, oricare ar fi $p \in N^*$, sunt $y_i^p(x) = z_i(x)$, pentru orice $x \in I$ şi $1 \leq i \leq n$. Deci

$$y_i(x) = \lim_{p\to\infty} y_i^p(x) = z_i(x)$$

pentru orice $x \in I$ şi $1 \leq i \leq n$, ceea ce arată unicitatea soluţiei sistemului de ecuaţii integrale (2.12), deci unicitatea soluţiei problemei Cauchy din enunţul teoremei. ■

2.5.2 Prelungirea soluţiei

Soluţia

$$\{y_1 = y_1(x), \cdots, y_n = y_n(x)\}, \ x \in I,$$

construită în ipotezele teoremei Cauchy-Lipschitz este definită doar pe intervalul $I = [x_0 - h, x_0 + h]$, unde numărul $h \in (0, a]$ este bine determinat. Dacă $h < a$, atunci se poate pune problema prelungirii soluţiei. Notăm

$$\bar{x}_0 = x_0 + h, \ \bar{y}_{i0} = y_i(\bar{x}_0)$$

pentru $1 \leq i \leq n$. Dacă $(\bar{x}_0, \bar{y}_{10}, \cdots, \bar{y}_{n0})$ este punct interior paralelipipedului Δ atunci există un paralelipiped închis $\bar{\Delta} \subset \Delta$, cu centrul în punctul $(\bar{x}_0, \bar{y}_{10}, \cdots, \bar{y}_{n0})$ de laturi $2\bar{a}, 2\bar{b}_1, \cdots, 2\bar{b}_n$ convenabil alese, strict pozitive. În $\bar{\Delta}$ sunt îndeplinite ipotezele teoremei Cauchy-Lipschitz. Prin urmare există o soluţie unică de forma

$$\{y_1 = \bar{y}_1(x), \cdots, y_n = \bar{y}_n(x)\}, \ x \in \bar{I},$$

unde $\bar{I} = [x_0 + h - \varepsilon, x_0 + h + \varepsilon]$, pentru $\varepsilon > 0$ bine determinat, care verifică condiţiile iniţiale

$$\bar{y}_1(\bar{x}_0) = \bar{y}_{10}, \cdots, \bar{y}_n(\bar{x}_0) = \bar{y}_{n0}$$

Pe intervalul $J = I \cap \bar{I} = [x_0 + h - \varepsilon, x_0 + h]$ sistemul diferenţial are două soluţii:

$$\{y_1 = y_1(x), \cdots, y_n = y_n(x)\}, \ x \in J$$

şi

$$\{y_1 = \bar{y}_1(x), \cdots, y_n = \bar{y}_n(x)\}, \ x \in J$$

care verifică aceleaşi condiţii iniţiale în $\bar{x}_0$:

$$y_1(\bar{x}_0) = \bar{y}_1(\bar{x}_0) = \bar{y}_{10}, \cdots, y_n(\bar{x}_0) = \bar{y}_n(\bar{x}_0) = \bar{y}_{n0}$$

Datorită unicităţii soluţiilor rezultă egalitatea lor pe J.

Putem considera funcţiile

$$\tilde{y}_i : [x_0 - h, x_0 + h + \varepsilon] \to \mathbf{R}$$

$$\tilde{y}_i(x) = \begin{cases} y_i(x), \ x \in [x_0 - h, x_0 + h] \\ \bar{y}_i(x), \ x \in [x_0 + h, x_0 + h + \varepsilon] \end{cases}$$

pentru $1 \leq i \leq n$, care definesc soluţia

$$\{y_1 = \tilde{y}_1(x), \cdots, y_n = \tilde{y}_n(x)\}, \ x \in [x_0 - h, x_0 + h + \varepsilon],$$

unică pe intervalul $[x_0 - h, x_0 + h + \varepsilon]$ şi care verifică condiţiile iniţiale

$$y_1(x_0) = y_{10}, \cdots, y_n(x_0) = y_{n0}$$

Evident, soluţia

$$\{y_1 = \tilde{y}_1(x), \cdots, y_n = \tilde{y}_n(x)\}, \ x \in [x_0 - h, x_0 + h + \varepsilon],$$

este o prelungire a soluţiei

$$\{y_1 = y_1(x), \cdots, y_n = y_n(x)\}, \ x \in [x_0 - h, x_0 + h]$$

În mod analog, dacă $(y_1(x_0 - h), \cdots, y_n(x_0 - h))$ este punct interior paralelipipedului Δ, atunci putem prelungi soluţia construită în teorema Cauchy-Lipschitz pe un interval de forma $[x_0 - h - \eta, x_0 + h]$, unde $\eta > 0$ este bine determinat. Dacă ambele puncte, $(y_1(x_0 + h), \cdots, y_n(x_0 + h))$ şi $(y_1(x_0 - h), \cdots, y_n(x_0 - h))$, sunt puncte interioare paralelipipedului Δ, atunci soluţia construită în teorema Cauchy-Lipschitz se poate prelungi pe un interval de forma $[x_0 - h - \eta, x_0 + h + \varepsilon]$, unde $\varepsilon > 0$ şi $\eta > 0$ sunt bine determinate.

Procedeul descris mai sus se poate aplica până când condiţiile de prelungire nu se mai îndeplinesc. Se ajunge la o soluţie, a problemei Cauchy considerate, care nu mai poate fi prelungită. Această soluţie este numită saturată.

2.5.3 Regularitatea soluţiilor

Considerăm sistemul diferenţial de ordinul întâi, sub forma vectorială (2.8),

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

unde $f : E \subset \mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}^n$.

TEOREMA 2.5.2 *Dacă $f \in C^k(E)$ şi $y : I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$ este o soluţie a sistemului (2.8) pe intervalul I, atunci $y \in C^{k+1}(I)$.*

Demonstraţie. Din $\dfrac{dy(x)}{dx} = f(x, y(x))$, pentru orice $x \in I$, din ipoteza că $f \in C^k(E)$ şi din proprietăţile compunerii funcţiilor derivabile rezultă că $y \in C^{k+1}(I)$. ■

Observaţie. Dacă f are derivate parţiale de orice ordin atunci şi y are derivate de orice ordin. Într-adevăr,

$$f \in C^\infty(E) = \bigcap_{k \in \mathbf{N}} C^k(E) \Rightarrow y \in \bigcap_{k \in \mathbf{N}} C^k(I) = C^\infty(I)$$

2.6 Sisteme diferenţiale liniare

2.6.1 Existenţa soluţiilor

Un sistem diferenţial liniar cu n funcţii necunoscute este un sistem diferenţial de forma

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}(x)\,y_1 + a_{12}(x)\,y_2 + \cdots + a_{1n}(x)\,y_n + l_1(x) \\ \vdots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = a_{n1}(x)\,y_1 + a_{n2}(x)\,y_2 + \cdots + a_{nn}(x)\,y_n + l_n(x) \end{cases} \tag{2.18}$$

unde funcţiile $a_{ij} : [a, b] \to \mathbf{R}$,$1 \leq i, j \leq n$, se numesc coeficienţii sistemului, iar funcţiile $l_i : [a, b] \to \mathbf{R}$, $1 \leq i \leq n$, se numesc termenii liberi ai sistemului.

Observaţie

1. Sistemul diferenţial liniar (2.18) este un caz particular al sistemului diferenţial normal (2.4), unde funcţiile f_i sunt definite pe $E = [a, b] \times \mathbf{R}^n$ şi sunt de forma

$$f_i(x, y_1, \cdots, y_n) = a_{i1}(x)\,y_1 + a_{i2}(x)\,y_2 + \cdots + a_{in}(x)\,y_n + l_i(x)$$

pentru orice $(x, y_1, \cdots, y_n) \in E$ şi $1 \leq i \leq n$.

2. Dacă $l_i(x) = 0$, pentru orice $x \in [a, b]$ şi orice $1 \leq i \leq n$, adică dacă toţi termenii liberi sunt identic nuli, atunci sistemul diferenţial liniar este numit omogen. Sistemul este numit neomogen dacă nu este omogen.

3. Dacă presupunem că toate funcţiile a_{ij} şi l_i sunt continue pe $[a, b]$, atunci rezultă că toate funcţiile f_i sunt continue pe E.

4. Notăm $A = \max\limits_{1 \leq i,j \leq n} \sup\limits_{x \in [a,b]} |a_{ij}(x)|$. Rezultă

$$|f_i(x, Y_1, \cdots, Y_n) - f_i(x, y_1, \cdots, y_n)| = \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)\,[Y_j - y_j] \right|$$

din care deducem

$$|f_i(x, Y_1, \cdots, Y_n) - f_i(x, y_1, \cdots, y_n)| \leq \sum_{j=1}^{n} A\,|Y_j - y_j|$$

pentru orice $(x, Y_1, \cdots, Y_n)$, $(x, y_1, \cdots, y_n) \in E$ şi $1 \leq i \leq n$, adică se îndeplinesc condiţiile lui Lipschitz.

În urma acestor observaţii, putem reformula teorema 1 pentru sistemul liniar (2.18) astfel:

TEOREMA 2.6.1 *Dacă a_{ij} şi l_i sunt funcţii continue pe $[a,b]$, pentru orice $1 \leq i \leq n$ şi $1 \leq j \leq n$, atunci, pentru orice $x_0 \in [a,b]$ şi pentru orice numere $y_{10}, \cdots, y_{n0}$, sistemul diferenţial liniar (2.18) admite o soluţie unică de forma*

$$\{y_1 = y_1(x), \cdots, y_n = y_n(x)\}, \ x \in [a,b]$$

care verifică condiţiile iniţiale

$$y_1(x_0) = y_{10}, \cdots, y_n(x_0) = y_{n0} \tag{2.19}$$

Demonstraţie. Se procedează ca în cazul unui sistem oarecare. Mai întâi remarcăm echivalenţa dintre problema Cauchy considerată şi sistemul de ecuaţii integrale

$$\begin{cases} y_1(x) = y_{10} + \int_{x_0}^{x} (a_{11}(s)\, y_1(s) + \cdots + a_{1n}(s)\, y_n(s) + l_1(s))\, ds \\ \vdots \\ y_n(x) = y_{n0} + \int_{x_0}^{x} (a_{n1}(s)\, y_1(s) + \cdots + a_{nn}(s)\, y_n(s) + l_n(s))\, ds \end{cases}$$

Pentru rezolvarea acestui sistem de ecuaţii integrale folosim metoda aproximaţiilor succesive. Vom lua ca aproximaţii de ordinul 0 nişte funcţii arbitrare continue

$$\alpha_i : [a,b] \to \mathbf{R}$$

pentru $1 \leq i \leq n$. Aproximaţiile de ordinul întâi sunt

$$y_i^1 : [a,b] \to \mathbf{R}$$

definite prin

$$y_i^1(x) = y_{i0} + \int_{x_0}^{x} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(s)\, \alpha_j(s) + l_i(s) \right) ds$$

pentru $1 \leq i \leq n$ şi $x \in [a,b]$. Aproximaţiile de un ordin oarecare $p \in \mathbf{N}$, $p \geq 2$, sunt

$$y_i^p : [a,b] \to \mathbf{R}$$

definite prin

$$y_i^p(x) = y_{i0} + \int_{x_0}^{x} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(s)\, y_j^{p-1}(s) + l_i(s) \right) ds$$

pentru $1 \leq i \leq n$ şi $x \in [a,b]$. Urmează să se cerceteze convergenţa şirurilor $\left(y_i^p(x)\right)_{p\in\mathbb{N}}$ pentru $x \in [a,b]$ şi $1 \leq i \leq n$. Pentru aceasta este suficient să se cerceteze convergenţa seriei

$$\alpha_i(x) + \left(y_i^1(x) - \alpha_i(x)\right) + \left(y_i^2(x) - y_i^1(x)\right) + \cdots$$

a cărei sumă parţială de ordinul $p+1$ este tocmai $y_i^p(x)$.

Avem

$$y_i^2(x) - y_i^1(x) = \int_{x_0}^{x} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(s)\left(y_j^1(s) - \alpha_j(s)\right) ds \tag{2.20}$$

şi în general

$$y_i^p(x) - y_i^{p-1}(x) = \int_{x_0}^{x} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(s)\left(y_j^{p-1}(s) - y_j^{p-2}(s)\right) ds \tag{2.21}$$

pentru $1 \leq i \leq n$, $x \in [a,b]$ şi $p \geq 3$.

Din definiţiile aproximaţiilor y_i^p rezultă că ele sunt derivabile pe $[a,b]$ şi $y_i^p(x_0) = y_{i0}$.

Deoarece funcţiile $y_j^1 - \alpha_j$, $1 \leq j \leq n$, sunt continue pe $[a,b]$ rezultă că ele sunt mărginite pe $[a,b]$. Notăm cu K un majorant pentru toate aceste funcţii, pe $[a,b]$.

Din (2.20) rezultă

$$\left|y_i^2(x) - y_i^1(x)\right| \leq nKA\,|x - x_0|$$

pentru $1 \leq i \leq n$ şi $x \in [a,b]$.

Din (2.21) deducem, prin inducţie matematică,

$$\left|y_i^p(x) - y_i^{p-1}(x)\right| \leq n^{p-1}KA^{p-1}\frac{|x-x_0|^{p-1}}{(p-1)!}$$

pentru $1 \leq i \leq n$, $x \in [a,b]$ şi $p \geq 3$.

Deoarece

$$|x - x_0| \leq b - a =: h$$

rezultă

$$\left|y_i^p(x) - y_i^{p-1}(x)\right| \leq K\frac{(nAh)^{p-1}}{(p-1)!}$$

pentru $1 \leq i \leq n$, $x \in [a,b]$ şi $p \geq 2$.

Deoarece seria numerică

$$\sum_{p=1}^{\infty} K\frac{(nAh)^{p-1}}{(p-1)!} = K\exp(nAh)$$

este convergentă, rezultă că seria

$$\sum_{p=1}^{\infty}\left(y_i^p(x)-y_i^{p-1}(x)\right)$$

unde $y_i^0 =: \alpha_i$, este absolut şi uniform convergentă pe $[a,b]$. Din definiţia convergenţei seriilor deducem că şirul sumelor sale parţiale este uniform convergent pe $[a,b]$, adică şirul $(y_i^p)_{p\in\mathbf{N}}$ este uniform convergent pe $[a,b]$, pentru fiecare $1\le i\le n$. În plus, datorită convergenţei uniforme, funcţiile limită, $y_i:[a,b]\to\mathbf{R}$,

$$y_i(x)=\lim_{p\to\infty}y_i^p(x)$$

pentru orice $x\in[a,b]$, sunt funcţii continue pe $[a,b]$. Mai departe se demonstrează, ca în cazul general, că:

1. Soluţia sistemului (2.18), care verifică condiţiile iniţiale (2.19) este

$$\{y_1=y_1(x),\cdots,y_n=y_n(x)\},\ x\in[a,b]$$

2. Soluţia obţinută nu depinde de aproximaţiile de ordinul 0 alese.

3. Soluţia obţinută cu metoda aproximaţiilor succesive este unica soluţie a sistemului (2.18) pe $[a,b]$, care verifică condiţiile iniţiale (2.19).

4. Are loc evaluarea

$$|y_i(x)-y_i^m(x)|\le K\left(\exp(nAh)-1-\frac{nAh}{1!}-\cdots-\frac{(nAh)^{m-1}}{(m-1)!}\right)$$

pentru $1\le i\le n$, $x\in[a,b]$, $m\in\mathbf{N}^*$. Deoarece

$$\lim_{m\to\infty}\left(\exp(nAh)-1-\frac{nAh}{1!}-\cdots-\frac{(nAh)^{m-1}}{(m-1)!}\right)=0$$

deducem că pentru orice $\varepsilon>0$ există $m\in\mathbf{N}^*$ astfel încât

$$|y_i(x)-y_i^m(x)|<\varepsilon$$

pentru orice $x\in[a,b]$ şi orice $1\le i\le n$. ■

Observaţie Dacă coeficienţii a_{ij} şi termenii liberi l_i, $1\le i,j\le n$, ai sistemului diferenţial liniar sunt funcţii continue pe un interval deschis $I=(\alpha,\beta)$, unde α poate fi $-\infty$, iar β poate fi $+\infty$, atunci teorema rămâne în vigoare pe orice interval închis $[a,b]$, inclus în (α,β) . Putem calcula soluţia, care are date condiţiile iniţiale într-un punct $x_0 \in I$, în orice punct x din I. Pentru aceasta alegem un interval $[a,b]$ inclus în I astfel încât acesta să conţină pe x_0 şi pe x, şi folosim soluţia corespunzătoare intervalului $[a,b]$. Dacă alegem intervalul $[a',b']$ care include pe $[a,b]$, atunci soluţia corespunzătoare lui $[a',b']$, care este o prelungire a soluţiei corespunzătoare lui $[a,b]$, ne va conduce la aceeaşi valoare în x.

2.6.2 Sisteme omogene

Considerăm sistemul diferenţial omogen

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = & a_{11}(x)\,y_1 + a_{12}(x)\,y_2 + \cdots + a_{1n}(x)\,y_n \\ \quad\vdots & \\ \dfrac{dy_n}{dx} = & a_{n1}(x)\,y_1 + a_{n2}(x)\,y_2 + \cdots + a_{nn}(x)\,y_n \end{cases} \tag{2.22}$$

în care coeficienţii sistemului sunt funcţiile continue $a_{ij} : I \to \mathbf{R}$, I fiind un interval de numere reale, iar $1 \le i \le n, 1 \le j \le n$.

Pentru scurtarea scrierii vom folosi scrierea matricează a unui sistem diferenţial liniar. Vom face următoarele notaţii.

1) Pentru funcţiile $y_i : I \to \mathbf{R}$, $1 \le i \le n$, vom considera funcţia vectorială y, de componente $y_1, \ldots, y_n$,

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} : I \to M_{n,1}[\mathbf{R}],$$

Vom nota

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\begin{bmatrix} y_1 \\ \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{dy_1}{dx} \\ \vdots \\ \dfrac{dy_n}{dx} \end{bmatrix}$$

$$\int_\alpha^\beta y(x)\,dx = \int_\alpha^\beta \begin{bmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{bmatrix} dx = \begin{bmatrix} \int_\alpha^\beta y_1(x)\,dx \\ \\ \int_\alpha^\beta y_n(x)\,dx \end{bmatrix}$$

2) Matricea

$$A(x) = \begin{bmatrix} a_{11}(x) & a_{1n}(x) \\ \\ a_{n1}(x) & a_{nn}(x) \end{bmatrix},$$

este numită matricea coeficienţilor sistemului diferenţial considerat.

Cu aceste notaţii sistemul diferenţial liniar omogen considerat se scrie sub forma ecuaţiei matriceale

$$\begin{bmatrix} \frac{dy_1}{dx} \\ \vdots \\ \frac{dy_n}{dx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}(x) & a_{1n}(x) \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1}(x) & a_{nn}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \\ y_n \end{bmatrix}$$

sau, pe scurt,

$$\frac{dy}{dx} = A(x)\, y \text{ sau } y' = A(x)\, y$$

O soluţie pe I a sistemului omogen, cu notaţiile de mai sus, va fi o funcţie de forma

$$\phi = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_n \end{bmatrix} : I \to M_{n,1}[\mathbf{R}]$$

care verifică relaţia $\phi'(x) = A(x)\,\phi(x)$ pentru orice $x \in I$. Se spune că ϕ este soluţia de componente $\phi_1, \ldots, \phi_n$ şi va fi notată uneori prin $(\phi_1, \ldots, \phi_n)$.

Conform teoremei (2.6.1),de existenţă şi unicitate a soluţiei sistemelor diferenţiale liniare, rezultă că pentru orice $x_0 \in I$ şi $y_0 \in M_{n,1}[\mathbf{R}]$, există o soluţie unică a sistemului omogen considerat,

$$y = y(x),\ x \in I,$$

care verifică condiţia iniţială $y(x_0) = y_0$. În particular, unica soluţie care verifică condiţia iniţială $y(x_0) = 0 \in M_{n,1}[\mathbf{R}]$ este soluţia $y : I \to M_{n,1}[\mathbf{R}]$ definită prin $y(x) = 0$ pentru orice $x \in I$, numită soluţia nulă sau soluţia banală.

TEOREMA 2.6.2 *Mulţimea S_0, a soluţiilor pe I ale sistemului diferenţial omogen (2.22), este spaţiu vectorial real $n-$dimensional.*

`Demonstraţie.` Deoarece S_0 este o submulţime a mulţimii V a tuturor funcţiilor definite pe I cu valori în $M_{n,1}[\mathbf{R}]$, iar V este spaţiu vectorial real faţă de operaţiile obişnuite de adunare a două funcţii şi de înmulţire cu un scalar a unei funcţii, pentru a demonstra că S_0 este spaţiu vectorial real, (subspaţiu vectorial al lui V), este suficient să demonstrăm că $\lambda u + \mu v \in S_0$ pentru orice $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ şi $u, v \in S_0$. Într-adevăr, din $u'(x) = A(x)\,u(x)$ şi $v'(x) = A(x)\,v(x)$, pentru orice $x \in I$, deducem

$$\begin{aligned} & (\lambda u + \mu v)'(x) = \lambda u'(x) + \mu v'(x) = \lambda A(x)\,u(x) + \mu A(x)\,v(x) = \\ = \ & A(x)[\lambda u(x) + \mu v(x)] = A(x)(\lambda u + \mu v)(x),\ (\forall)\, x \in I, \end{aligned}$$

adică $\lambda u + \mu v \in S_0$. Vom demonstra în continuare că S_0.este $n-$ dimensional. Fie $x_0 \in I$, un punct oarecare. Notăm cu

$$y^{(i)} = \begin{bmatrix} y_1^{(i)} \\ \vdots \\ y_n^{(i)} \end{bmatrix}, 1 \leq i \leq n,$$

soluţia sistemului omogen, care verifică condiţia iniţială

$$y^{(i)}(x_0) = \begin{bmatrix} y_1^{(i)}(x_0) \\ \vdots \\ y_n^{(i)}(x_0) \end{bmatrix} = E_i,$$

unde $E_i \in M_{n,1}[\mathbf{R}]$ are toate componentele nule afară de componenta din linia i, care este egală cu 1. Din ecuaţia

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i y^{(i)} = 0;\ \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbf{R},$$

unde $0 \in M_{n,1}[\mathbf{R}]$, deducem

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \\ \lambda_n \end{bmatrix} = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i E_i = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i y^{(i)}(x_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

deci $\lambda_i = 0$, pentru $1 \leq i \leq n$, ceea ce înseamnă că mulţimea de soluţii

$$\left\{y^{(1)}, \ldots, y^{(n)}\right\}$$

este liniar independentă. Considerăm o soluţie oarecare $y \in S_0$, de componente $y_1, \ldots, y_n$. Rezultă că

$$y(x_0) = \begin{bmatrix} y_1(x_0) \\ \\ y_n(x_0) \end{bmatrix} = \sum_{i=0}^{n} y_i(x_0) E_i$$

Funcţia

$$z = \sum_{i=0}^{n} y_i(x_0) y^{(i)},$$

este soluţie a sistemului omogen, conform primei părţi a teoremei, şi verifică condiţia iniţială

$$z(x_0) = \sum_{i=0}^{n} y_i(x_0) y^{(i)}(x_0) = \sum_{i=0}^{n} y_i(x_0) E_i = y(x_0)$$

Deoarece y şi z sunt soluţii care verifică aceeaşi condiţie iniţială rezultă că ele coincid, deci

$$y = \sum_{i=0}^{n} y_i(x_0)\, y^{(i)},$$

din care se deduce că $\{y^{(1)}, \ldots, y^{(n)}\}$ generează spaţiul S_0 şi deci este o bază a sa. ∎

Observaţie. Fie $x_0 \in I$ şi y soluţia sistemului diferenţial liniar omogen care verifică condiţia iniţială $y(x_0) = 0$. Atunci $y(x) = 0$, pentru orice $x \in I$. Într-adevăr, din $y_i(x_0) = 0$, pentru orice i, rezultă

$$y(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i(x_0)\, y^{(i)}(x) = 0$$

pentru orice $x \in I$.

DEFINIŢIA 2.6.1 *Fie $\{y^{(1)}, \ldots, y^{(n)}\}$ o mulţime formată din n soluţii ale sistemului diferenţial liniar şi omogen (2.22), iar $y_1^{(i)}, \ldots, y_n^{(i)}$ componentele soluţiei $y^{(i)}$, pentru $1 \leq i \leq n$. Funcţia $W : I \to \mathbf{R}$, definită prin*

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1^{(1)}(x) & y_1^{(2)}(x) & & y_1^{(n)}(x) \\ y_2^{(1)}(x) & y_2^{(2)}(x) & & y_2^{(n)}(x) \\ & \vdots & & \\ y_n^{(1)}(x) & y_n^{(2)}(x) & & y_n^{(n)}(x) \end{vmatrix}$$

pentru orice $x \in I$, se numeşte wronskianul sistemului de soluţii $\{y^{(1)}, \ldots, y^{(n)}\}$.

TEOREMA 2.6.3 *Dacă $\{y^{(1)}, \ldots, y^{(n)}\}$ este o mulţime formată din n soluţii ale sistemului diferenţial liniar şi omogen (2.22), iar $x_0 \in I$ este un număr oarecare, atunci are loc relaţia*

$$W(x) = W(x_0) \exp\left(\int_{x_0}^{x} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{kk}(z) \right) dz \right)$$

pentru orice $x \in I$.

Demonstraţie. Notăm componentele soluţiei $y^{(i)}$ prin $y_1^{(i)}, \ldots, y_n^{(i)}$. Din ipoteză rezultă $\left(y^{(i)}(x)\right)' = A(x)\, y^{(i)}(x)$, deci

$$\left(y_k^{(i)}(x)\right)' = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}(x)\, y_j^{(i)}(x)$$

pentru orice $x \in I$, $1 \le i \le n$ şi $1 \le k \le n$. Ţinând cont de regula de derivare a determinanţilor, avem

$$W' = \sum_{k=1}^{n} \begin{vmatrix} y_1^{(1)} & y_1^{(2)} & & y_1^{(n)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \left(y_k^{(1)}\right)' & \left(y_k^{(2)}\right)' & & \left(y_k^{(n)}\right)' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_n^{(1)} & y_n^{(2)} & & y_n^{(n)} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{kj} \begin{vmatrix} y_1^{(1)} & y_1^{(2)} & & y_1^{(n)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_j^{(1)} & y_j^{(2)} & & y_j^{(n)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_n^{(1)} & y_n^{(2)} & & y_n^{(n)} \end{vmatrix} = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{kk} \right) W$$

adică

$$W'(x) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{kk}(x) \right) W(x)$$

Înmulţind în ambii membrii cu $\exp\left(-\int_{x_0}^{x} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{kk}(z)\right) dz\right)$ obţinem

$$\left[W(x) \exp\left(-\int_{x_0}^{x} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{kk}(z) \right) dz \right) \right]' = 0$$

din care deducem că expresia $W(x)\exp\left(-\int_{x_0}^{x} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{kk}(z)\right) dz\right)$ are o valoare independentă de x. Valoarea acestei expresii pentru $x = x_0$ este $W(x_0)$, deci

$$W(x) \exp\left(-\int_{x_0}^{x} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{kk}(z) \right) dz \right) = W(x_0)$$

din care deducem

$$W(x) = W(x_0) \exp\left(\int_{x_0}^{x} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{kk}(z) \right) dz \right)$$

ceea ce trebuia demonstrat. ■

Observaţie. Wronskianul unui set format din n soluţii ale sistemului diferenţial liniar şi omogen (2.22) poate fi numai în una din situaţiile: 1) nul în toate punctele intervalului I; 2) nenul în toate punctele intervalului I.

DEFINIŢIA 2.6.2 *Un set ordonat format din n soluţii ale sistemului diferenţial liniar şi omogen (2.22), al cărui wronskian nu se anulează, se numeşte set (sistem) fundamental de soluţii. Dacă $\{y^{(1)}, \ldots, y^{(n)}\}$ este un set fundamental de soluţii, iar* *componentele soluţiei $y^{(i)}$ sunt $y_1^{(i)}, \ldots, y_n^{(i)}$, atunci matricea*

$$Y = \begin{bmatrix} y_1^{(1)} & y_1^{(2)} & & y_1^{(n)} \\ y_2^{(1)} & y_2^{(2)} & & y_2^{(n)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_n^{(1)} & y_n^{(2)} & & y_n^{(n)} \end{bmatrix} : I \to M_n[\mathbf{R}]$$

se numeşte matrice fundamentală de soluţii.

TEOREMA 2.6.4 *Dacă $\{y^{(1)}, \ldots, y^{(n)}\}$ este un set fundamental de soluţii ale sistemului diferenţial liniar şi omogen (2.22), atunci orice soluţie a acestui sistem diferenţial are forma*

$$y = c_1 y^{(1)} + \cdots + c_n y^{(n)}$$

unde $c_1, \ldots, c_n$ sunt constante arbitrare.

Demonstraţie. Vom arăta că mulţimea $\{y^{(1)}, \ldots, y^{(n)}\}$ este bază a spaţiului S_0. Fie $y_1^{(i)}, \ldots, y_n^{(i)}$ componentele soluţiei $y^{(i)}$. Deoarece S_0 are dimensiunea n, rezultă că pentru a demonstra că mulţimea $\{y^{(1)}, \ldots, y^{(n)}\}$ este bază a spaţiului S_0, este suficient să demonstrăm că mulţimea $\{y^{(1)}, \ldots, y^{(n)}\}$ este liniar independentă. Pentru aceasta cercetăm ecuaţia

$$c_1 y^{(1)} + \cdots + c_n y^{(n)} = 0;\ c_1, \ldots, c_n \in \mathbf{R}$$

adică sistemul

$$\begin{cases} c_1 y_1^{(1)}(x) + \cdots + c_n y_1^{(n)}(x) = 0 \\ c_1 y_2^{(1)}(x) + \cdots + c_n y_2^{(n)}(x) = 0 \\ \\ c_1 y_n^{(1)}(x) + \cdots + c_n y_n^{(n)}(x) = 0 \end{cases} ;\ c_1, \ldots, c_n \in \mathbf{R}$$

pentru orice $x \in I$. Determinantul matricei acestui sistem algebric, liniar şi omogen, este tocmai wronskianul unui set fundamental de soluţii, deci este nenul. Rezultă că singura soluţie a sistemului este: $c_1 = 0, \ldots, c_n = 0$, ceea ce înseamnă că mulţimea $\{y^{(1)}, \ldots, y^{(n)}\}$ este liniar independentă. ■

Observaţie. 1)Expresia

$$y = c_1 y^{(1)} + \cdots + c_n y^{(n)}$$

unde c_i sunt constante arbitrare, reprezintă soluţia generală a sistemului diferenţial (2.22). Într-adevăr, se ştie că pentru orice $x_0 \in I$ şi $y_0 = (y_{10}, \ldots, y_{n0}) \in \mathbf{R}^n$, există o soluţie unică $y = (\phi_1, \ldots, \phi_n)$, care verifică condiţia iniţială

$$y(x_0) = (\phi_1(x_0), \ldots, \phi_n(x_0)) = y_0$$

adică $\phi_i(x_0) = y_{i0}$, $1 \le i \le n$. Această soluţie are forma $y = c_1 y^{(1)} + \cdots + c_n y^{(n)}$ şi se obţine determinând constantele $c_1, \ldots, c_n$ din sistemul compatibil şi determinat

$$\begin{cases} c_1 y_1^{(1)}(x_0) + \cdots + c_n y_1^{(n)}(x_0) = y_{10} \\ c_1 y_2^{(1)}(x_0) + \cdots + c_n y_2^{(n)}(x_0) = y_{20} \\ \\ c_1 y_n^{(1)}(x_0) + \cdots + c_n y_n^{(n)}(x_0) = y_{n0} \end{cases} ; \ c_1, \ldots, c_n \in \mathbf{R}$$

2)Soluţia generală are forma $y = Y \cdot c$, adică

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1^{(1)} & y_1^{(2)} & & y_1^{(n)} \\ y_2^{(1)} & y_2^{(2)} & & y_2^{(n)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_n^{(1)} & y_n^{(2)} & & y_n^{(n)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

unde Y este o matrice fundamentală de soluţii, iar

$$c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \in M_{n,1}[\mathbf{R}]$$

2.6.3 Sisteme neomogene

Considerăm sistemul diferenţial liniar neomogen

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}(x) y_1 + a_{12}(x) y_2 + \cdots + a_{1n}(x) y_n + l_1(x) \\ \vdots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = a_{n1}(x) y_1 + a_{n2}(x) y_2 + \cdots + a_{nn}(x) y_n + l_n(x) \end{cases} \tag{2.23}$$

unde coeficienţii sistemului sunt funcţiile continue $a_{ij} : I \to \mathbf{R}$, iar termenii liberi ai sistemului sunt funcţiile continue $l_i : I \to \mathbf{R}$, I fiind un interval de numere reale, $1 \le i \le n$ şi $1 \le j \le n$.

Notând

$$l = \begin{bmatrix} l_1 \\ \ldots \\ l_n \end{bmatrix} : I \to M_{n,1}[\mathbf{R}]$$

şi folosind notaţiile de la punctul precedent, sistemul diferenţial liniar neomogen se scrie

$$y' = A(x)\,y + l(x)$$

TEOREMA 2.6.5 *Fie* $\{y^{(1)}, \ldots, y^{(n)}\}$ *un set fundamental de soluţii ale sistemului diferenţial liniar şi omogen (2.22), unde soluţia* $y^{(i)}$ *are componentele* $y_1^{(i)}, \ldots, y_n^{(i)}$, *iar funcţiile* $c_i : I \to \mathbf{R}$, *pentru* $1 \le i \le n$, *astfel încât să verifice relaţiile*

$$\begin{cases} c_1'(x)\,y_1^{(1)}(x) + \cdots + c_n'(x)\,y_1^{(n)}(x) = l_1(x) \\ \\ c_1'(x)\,y_n^{(1)}(x) + \cdots + c_n'(x)\,y_n^{(n)}(x) = l_n(x) \end{cases} \tag{2.24}$$

pentru orice $x \in I$. *În aceste condiţii, funcţia*

$$y_{part} = c_1 y^{(1)} + \cdots + c_n y^{(n)}$$

definită pe I, *este soluţie pentru sistemul diferenţial neomogen (2.23).*

Demonstraţie. Avem

$$\begin{aligned} \left(y^{(i)}(x)\right)' &= A(x)\,y^{(i)}(x), \\ l(x) &= \sum_{i=1}^{n} c_i'(x)\,y^{(i)}(x), \end{aligned}$$

pentru orice $x \in I$ şi $1 \le i \le n$. Pe de altă parte

$$\begin{aligned} & y_{part}'(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i(x)\left(y^{(i)}(x)\right)' + \sum_{i=1}^{n} c_i'(x)\,y^{(i)}(x) = \\ & = \sum_{i=1}^{n} c_i(x)\,A(x)\,y^{(i)}(x) + l(x) = A(x)\left(\sum_{i=1}^{n} c_i(x)\,y^{(i)}(x)\right) + l(x) = \\ & = A(x)\,y_{part}(x) + l(x) \end{aligned}$$

adică $y_{part}'(x) = A(x)\,y_{part}(x) + l(x)$, pentru orice $x \in I$, ceea ce înseamnă că y_{part} este soluţie pentru sistemul diferenţial neomogen (2.23). ■

Observaţie. 1)Soluţia y_{part} menţionată în teoremă este o soluţie particulară a sistemului neomogen. Această soluţie are aceeaşi formă ca soluţia sistemului omogen, $c_1 y^{(1)} + \cdots + c_n y^{(n)}$, cu deosebirea că c_i nu sunt constante ci funcţii. Metoda menţionată în teoremă, pentru obţinerea unei soluţii particulare a sistemului neomogen, este numită metoda variaţiei constantelor.

2)Soluţia particulară y_{part} se poate scrie sub forma matriceală

$$y_{part}(x) = Y(x) \cdot c(x)$$

unde

$$c(x) = \begin{bmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \\ \vdots \\ c_n(x) \end{bmatrix}$$

Pe de altă parte, sistemul (2.24) se poate scrie sub forma matriceală

$$\begin{bmatrix} y_1^{(1)}(x) & y_1^{(2)}(x) & & y_1^{(n)}(x) \\ y_2^{(1)}(x) & y_2^{(2)}(x) & & y_2^{(n)}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_n^{(1)}(x) & y_n^{(2)}(x) & \cdots & y_n^{(n)}(x) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \\ \vdots \\ c_n'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1(x) \\ l_2(x) \\ \vdots \\ l_n(x) \end{bmatrix}$$

sau, cu notaţiile cunoscute,

$$Y(x) \cdot c'(x) = l(x)$$

Deoarece determinantul matricei $Y(x)$ este nenul, fiind wronskianul unui sistem fundamental de soluţii, rezultă că $Y(x)$ este inversabilă şi

$$c'(x) = Y^{-1}(x)\, l(x)$$

din care rezultă

$$c(x) = c(x_0) + \int_{x_0}^{x} Y^{-1}(z)\, l(z)\, dz$$

pentru orice $x \in I$, unde $x_0 \in I$ este un număr fixat, iar $c(x_0) \in M_{n,1}[\mathbf{R}]$ este arbitrar, şi deci

$$y_{part}(x) = Y(x) \cdot \left[c(x_0) + \int_{x_0}^{x} Y^{-1}(z)\, l(z)\, dz \right]$$

Deducem

$$y_{part}(x_0) = Y(x_0) \cdot c(x_0)$$

din care rezultă $c(x_0) = Y^{-1}(x_0) \cdot y_{part}(x_0)$ şi deci

$$y_{part}(x) = Y(x) \cdot \left[Y^{-1}(x_0) \cdot y_{part}(x_0) + \int_{x_0}^{x} Y^{-1}(z)\, l(z)\, dz \right]$$

TEOREMA 2.6.6 *Fie y_{part} o soluţie particulară a sistemului diferenţial liniar neomogen (2.23). Mulţimea S, a soluţiilor sistemului diferenţial liniar neomogen (2.23), este egală cu mulţimea $\{y_h + y_{part} \mid y_h \in S_0\}$.*

`Demonstraţie.` Dacă $y_h \in S_0$, adică y_h este soluţie a sistemului diferenţial liniar omogen 2.22, atunci

$$\begin{aligned}(y_h + y_{part})' &= y_h' + y_{part}' = A(x)\, y_h + A(x)\, y_{part} + l(x) = \\ &= A(x)\,(y_h + y_{part}) + l(x)\end{aligned}$$

ceea ce înseamnă că $y_h + y_{part}$ este soluţie a sistemului diferenţial liniar neomogen, adică

$$\{y_h + y_{part} \mid y_h \in S_0\} \subset S$$

Dacă $y \in S$, adică y este o soluţie a sistemului diferenţial liniar neomogen (2.23), atunci

$$\begin{aligned}(y - y_{part})' &= y' - y_{part}' = A(x)\, y + l(x) - [A(x)\, y_{part} + l(x)] = \\ &= A(x)\,(y - y_{part})\end{aligned}$$

ceea ce înseamnă că $y - y_{part} \in S_0$, adică $y - y_{part}$ este o soluţie a sistemului omogen. Notând cu y_h această soluţie, rezultă că $y = y_h + y_{part}$, deci

$$S \subset \{y_h + y_{part} \mid y_h \in S_0\}$$

Din cele două incluziuni demonstrate rezultă egalitatea din enunţul teoremei. ■

Observaţie. Forma oricărei soluţii a sistemului diferenţial liniar neomogen (2.23) este

$$y = c_1 y^{(1)} + \cdots + c_n y^{(n)} + y_{part}$$

unde $\{y^{(1)}, \ldots, y^{(n)}\}$ este un sistem fundamental de soluţii al sistemului omogen (2.22), $c_1, \ldots, c_n$ sunt constante arbitrare, iar y_{part} este o soluţie particulară a sistemului neomogen (2.23).

2.7 Sisteme diferenţiale cu coeficienţi constanţi

Fie sistemul diferenţial liniar şi omogen cu coeficienţi constanţi

$$\begin{cases} y_1' = a_{11} y_1 + \cdots + a_{1n} y_n \\ \qquad\vdots \\ y_n' = a_{n1} y_1 + \cdots + a_{nn} y_n \end{cases} \tag{2.25}$$

unde $a_{ij} \in \mathbf{R}$, pentru $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$. Pentru aceste sisteme vom arăta cum se poate construi un sistem fundamental de soluţii.

Folosind notaţiile

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ & \vdots \\ a_{n1} & a_{nn} \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \text{ şi } y' = \begin{bmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{bmatrix}$$

sistemul se scrie sub forma $y' = Ay$.

Observaţii 1)Din teorema de existenţă şi unicitate a soluţiei problemei Cauchy pentru sisteme liniare rezultă că sistemul diferenţial $y' = Ay$ admite o soluţie unică definită pe toată mulţimea numerelor reale

$$y : \mathbf{R} \to \mathbf{M}_{n,1}[\mathbf{R}],$$

care verifică condiţia iniţială $y(x_0) = y_0$, pentru fiecare $x_0 \in \mathbf{R}$ şi $y_0 \in M_{n,1}[\mathbf{R}]$.

2)Fie $u \in \mathbf{M}_{n,1}[\mathbf{R}]$, $v \in \mathbf{M}_{n,1}[\mathbf{R}]$ şi i unitatea imaginară. Se constată uşor că

$$u + iv = 0 \in M_{n,1}[\mathbf{C}] \Longleftrightarrow u = 0 \text{ şi } v = 0$$

Dacă $u : \mathbf{R} \to \mathbf{M}_{n,1}[\mathbf{R}]$ şi $v : \mathbf{R} \to \mathbf{M}_{n,1}[\mathbf{R}]$ atunci

$$u' = Au \text{ şi } v' = Av \Longleftrightarrow (u + iv)' = A(u + iv)$$

Se spune în acest caz că $u + iv$ este o soluţie complexă a sistemului (2.25). Deci, $u + iv$ este o soluţie complexă a sistemului (2.25) dacă şi numai dacă partea reală şi partea imaginară a ei sunt soluţii ale acestui sistem.

3)Notăm cu S_0 mulţimea soluţiilor sistemului $y' = Ay$. Deducem uşor că dacă $y \in S_0$ atunci $y' \in S_0$. Într-adevăr, mai întâi deducem că $Ay(x)$ este funcţie derivabilă, deci $y'(x)$ este derivabilă. Apoi, derivând egalitatea $y'(x) = Ay(x)$ şi ţinând cont că matricea A are elementele constante, obţinem $(y'(x))' = Ay'(x)$, pentru orice $x \in \mathbf{R}$, ceea ce arată tocmai că $y' \in S_0$. De aici deducem că $S_0 \subset C^{\infty}(\mathbf{R})$ şi că dacă $y \in S_0$ atunci $y^{(k)} \in S_0$, pentru orice $k \in \mathbf{N}$.

TEOREMA 2.7.1 *Dacă λ este o valoare proprie a matricei A, iar $v \in M_{n,1}[\mathbf{C}]$ este un vector propriu al matricei A corespunzător valorii proprii λ, atunci sistemul diferenţial (2.25) admite soluţia*

$$y = ve^{\lambda x}, x \in \mathbf{R}$$

Demonstraţie. Prin ipoteză avem $Av = \lambda v$ şi $v \neq 0$. De aici deducem

$$\left(ve^{\lambda x}\right)' = \lambda ve^{\lambda x} = Ave^{\lambda x} = A\left(ve^{\lambda x}\right)$$

deci $\left(ve^{\lambda x}\right)' = A\left(ve^{\lambda x}\right)$, pentru orice $x \in \mathbf{R}$, ceea ce înseamnă că $y = ve^{\lambda x}, x \in \mathbf{R}$, este soluţie a sistemului diferenţial (2.25) ■

Observaţie. 1) Reamintim că un număr r, real sau complex, este numit valoare proprie a matricei $A \in M_n[\mathbf{C}]$ dacă există o matrice nenulă $v \in M_{n,1}[\mathbf{C}]$ astfel încât $Av = rv$. Mulţimea valorilor proprii ale lui A se notează cu σ_A şi este numită spectrul lui A. Pentru a determina valorile proprii şi vectorii proprii ai matricei A pornim de la ecuaţia

$$Av = rv, \ v \in M_{n,1}[\mathbf{C}]$$

pe care o scriem sub forma sistemului

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} (a_{11}-r)v_1 & + & a_{12}v_2 & +\cdots+ & a_{1n}v_n & = 0 \\ a_{21}v_1 & + & (a_{22}-r)v_2 & +\cdots+ & a_{2n}v_n & = 0 \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ a_{n1}v_1 & + & a_{n2}v_2 & +\cdots+ & (a_{nn}-r)v_n & = 0 \end{array}\right. \tag{2.26}$$

în care $v_1, \ldots, v_n$ reprezintă componentele lui v. Deoarece căutăm soluţii nenule, ţinând cont de teorema lui Rouche relativ la sistemele algebrice liniare, rezultă că determinantul sistemului trebuie să fie nul, adică

$$\Delta(r) = \begin{vmatrix} a_{11}-r & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-r & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn}-r \end{vmatrix} = 0$$

Matricea sistemului (2.26) este $A - rI$, unde $I = (\delta_{ij}) \in M_n[\mathbf{R}]$ este matricea unitate. Determinantul $\Delta(r) = \det(A - rI)$, este un polinom de gradul n numit polinomul caracteristic al matricei A, sau al sistemului $y' = Ay$. Ecuaţia

$$\Delta(r) = 0, \ r \in \mathbf{C}$$

este numită ecuaţia caracteristică a matricei A, sau a sistemului $y' = Ay$. Rădăcinile ecuaţiei caracteristice sunt tocmai valorile proprii ale matricei A. Pentru a determina vectorii proprii corespunzători unei valori proprii $\lambda \in \sigma_A$ trebuie să rezolvăm sistemul liniar şi omogen (2.26) pentru $r = \lambda$. Orice soluţie nenulă a acestui sistem este vector propriu al matricei A corespunzător lui λ. Se ştie că o soluţie a acestui sistem poate fi $v \in M_{n,1}[\mathbf{C}]$ de componente $v_1, \ldots, v_n$, unde v_i este complementul algebric al elementului $a_{1i} - r\delta_{1i}$ din prima linie a matricei $A - \lambda I$. Dacă numerele v_i nu sunt toate nule atunci v este vector propriu al matricei A.

2) Se verifică uşor că la valori proprii distincte corespund vectori proprii liniar independenţi. Arătăm aceasta în cazul a două valori proprii. Fie $\lambda, \mu \in \sigma_A$, $\lambda \neq \mu$, şi $u, v \in M_{n,1}[\mathbf{C}]$, $u \neq 0, v \neq 0$, astfel încât $Au = \lambda u$ şi $Av = \mu v$. Din relaţia

$$\alpha u + \beta v = 0,\ \alpha, \beta \in \mathbf{C}$$

deducem

$$\begin{cases} \alpha\lambda u + \beta\lambda v = 0 \\ \alpha A u + \beta A v = 0 \end{cases}$$

deci

$$\begin{aligned} \alpha\lambda u + \beta\lambda v &= 0 \\ \alpha\lambda u + \beta\mu v &= 0 \end{aligned}$$

Scăzând aceste relaţii rezultă $\beta(\lambda - \mu) v = 0$, din care deducem $\beta = 0$. Revenind la relaţia $\alpha u + \beta v = 0$ deducem şi $\alpha = 0$. Deci u şi v sunt liniar independenţi.

3) Dacă matricea A are elementele reale, iar $\lambda \in \sigma_A$ este o valoare proprie complexă a lui A, atunci soluţia nenulă v a sistemului (2.26), în care $r = \lambda$, are componentele complexe. Din relaţia $Av = \lambda v$ rezultă, prin conjugare, $A\overline{v} = \overline{\lambda}\overline{v}$ din care deducem că $\overline{\lambda} \in \sigma_A$ şi $\overline{v}$ este vector propriu al matricei A corespunzător valorii proprii $\overline{\lambda}$. În acest caz, soluţiile $y^1 = ve^{\lambda x}$ şi $y^2 = \bar{v}e^{\bar{\lambda} x}$, ale sistemului (2.25), sunt liniar independente, complexe şi conjugate. Funcţiile

$$\begin{aligned} \tilde{y}^1 &= \frac{1}{2}y^1 + \frac{1}{2}y^2 = \mathrm{Re}\left(ve^{\lambda x}\right) \\ \tilde{y}^2 &= \frac{1}{2i}y^1 - \frac{1}{2i}y^2 = \mathrm{Im}\left(ve^{\lambda x}\right) \end{aligned}$$

sunt soluţii cu valori reale şi liniar independente ale sistemului (2.25).

4) Dacă valorile proprii $r_1, \ldots, r_n$ ale matricei A sunt distincte, iar $v^1, \ldots, v^n$ sunt vectori proprii corespunzători, atunci setul de funcţii

$$y^1 = v^1 e^{r_1 x}, \ldots, y^n = v^n e^{r_n x}$$

este un sistem fundamental de soluţii al sistemului $y' = Ay$. Într-adevăr, din relaţia $\lambda_1 y^1 + \cdots + \lambda_n y^n = 0$, adică din $\lambda_1 v^1 e^{r_1 x} + \cdots + \lambda_n v^n e^{r_n x} = 0$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$, deducem, pentru $x = 0$, $\lambda_1 v^1 + \cdots + \lambda_n v^n = 0$. Deoarece vectorii proprii $v^1, \ldots, v^n$ sunt liniar independenţi rezultă că $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$, din care deducem că soluţiile $y^1, \ldots, y^n$ sunt liniar independente, deci $\{y^1, \ldots, y^n\}$ este sistem fundamental de soluţii. În consecinţă soluţia generală a sistemului diferenţial $y' = Ay$ este în acest caz

$$y = c_1 v^1 e^{r_1 x} + \cdots + c_n v^n e^{r_n x},\ x \in \mathbf{R}$$

unde $c_1, \ldots, c_n$ sunt constante arbitrare.

Dacă matricea A are coeficienţii reali şi două dintre valorile proprii sunt complex-conjugate, atunci soluţiile corespunzătoare acestor valori proprii se pot înlocui cu două soluţii reale, ca la punctul 3), astfel încât noul set de soluţii să rămână fundamental. Acest procedeu va fi folosit dacă într-o problemă concretă este nevoie numai de soluţii reale.

TEOREMA 2.7.2 *Dacă ecuaţia caracteristică a sistemului diferenţial (2.25) admite o rădăcină λ, multiplă de ordinul m, atunci acest sistem diferenţial admite soluţii de forma*

$$y = \left(P_1(x)\, e^{\lambda x}, P_2(x)\, e^{\lambda x}, \ldots, P_n(x)\, e^{\lambda x}\right),\ x \in \mathbf{R}$$

în care $P_i(x)$ sunt funcţii polinomiale de grad cel mult $m-1$ de forma

$$P_i(x) = c_1 P_{i,0}(x) + c_2 P_{i,1}(x) + \cdots + c_m P_{i,m-1}(x)$$

$c_1, \ldots, c_m$ fiind m constante arbitrare, $P_{ij}(x)$ fiind funcţii polinomiale de grad cel mult j şi

$$P_1(x) = 0, \ldots, P_n(x) = 0,\ (\forall)\, x \in \mathbf{R} \Rightarrow c_1 = \cdots = c_m = 0$$

Demonstraţie. 1)Dacă $\lambda \neq 0$ atunci vom înlocui sistemul (2.25) cu un sistem a cărui ecuaţie caracteristică admite rădăcina 0 cu ordinul de multiplicitate egal cu m. Pentru aceasta vom căuta funcţiile $z_i : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, pentru $1 \leq i \leq n$, astfel încât $\left(e^{\lambda x} z_1, \ldots, e^{\lambda x} z_n\right)$ să fie soluţie a sistemului (2.25). Cu alte cuvinte facem o schimbare a funcţiilor necunoscute definită prin relaţiile

$$y_i = e^{\lambda x} z_i$$

pentru $1 \leq i \leq n$. Avem

$$y_i' = \lambda e^{\lambda x} z_i + e^{\lambda x} z_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e^{\lambda x} z_j$$

pentru $1 \leq i \leq n$. Simplificând cu $e^{\lambda x}$ şi ordonând obţinem

$$z_i' = \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} - \lambda\delta_{ij}) z_j$$

pentru $1 \leq i \leq n$, adică am fost conduşi la un sistem diferenţial de aceeaşi formă. Polinomul caracteristic corespunzător acestui sistem este

$$\Delta_1(r) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda - r & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda - r & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} - \lambda - r \end{vmatrix} = \Delta(r + \lambda)$$

Deoarece λ este rădăcină multiplă de ordinul m a lui $\Delta(r)$ rezultă că $\Delta(r)$ are forma $\Delta(r) = (r - \lambda)^m \Delta_0(r)$, unde $\Delta_0(r)$ este o funcţie polinomială de gradul $n - m$ şi $\Delta_0(\lambda) \neq 0$. Aşadar $\Delta_1(r) = r^m \Delta_0(r + \lambda)$, din care deducem că polinomul caracteristic al sistemului diferenţial la care am fost conduşi are pe 0 ca rădăcină multiplă de ordinul m. Dacă vom demonstra că sistemul diferenţial obţinut admite soluţii de forma $(P_1(x), P_2(x), \ldots, P_n(x))$, atunci va rezulta că sistemul diferenţial (2.25) admite soluţii de forma $\left(P_1(x) e^{\lambda x}, P_2(x) e^{\lambda x}, \ldots, P_n(x) e^{\lambda x}\right)$, ceea ce ar însemna că teorema este demonstrată. Deducem că demonstraţia teoremei s-a redus la cazul când polinomul caracteristic al sistemului diferenţial are pe $r = 0$ ca rădăcină multiplă de ordinul m.

2)Vom presupune în continuare că polinomul caracteristic al sistemului diferenţial (2.25) are pe $r = 0$ ca rădăcină multiplă de ordinul m şi vom demonstra că sistemul admite soluţii de forma $(P_1(x), P_2(x), \ldots, P_n(x))$. Vom demonstra aceasta prin recurenţă. Pentru $m = 1$ afirmaţia din teoremă este adevărată. Într-adevăr, din teorema ?? deducem că sistemul diferenţial (2.25) admite o soluţie nenulă de forma $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, corespunzătoare valorii proprii $r = 0$. Pe de altă parte, conform teoremei 2.6.2, sistemul admite şi soluţia $(c_1\alpha_1, c_1\alpha_2, \ldots, c_1\alpha_n)$, pentru orice constantă c_1. Această soluţie are forma din enunţul teoremei, pentru

$$P_1(x) = c_1\alpha_1, P_2(x) = c_1\alpha_2, \ldots, P_n(x) = c_1\alpha_n$$

Să presupunem că afirmaţia din teoremă este adevărată când multiplicitatea rădăcinii $r = 0$ este $m - 1$ şi să demonstrăm că afirmaţia rămâne adevărată când această multiplicitate este m. Pornim de la soluţia menţionată mai sus, $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, în care numerele $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ nu sunt toate nule. Pentru simplificarea expunerii să presupunem că $\alpha_1 \neq 0$. Luând $c_1 = \dfrac{1}{\alpha_1}$ şi notând $c_1\alpha_i = \beta_i$ pentru $2 \leq i \leq n$, soluţia $(c_1\alpha_1, c_1\alpha_2, \ldots, c_1\alpha_n)$ devine $(1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$. Înlocuind această soluţie în sistemul (2.25) obţinem egalităţile

$$a_{i1} + a_{i2}\beta_2 + \cdots + a_{in}\beta_n = 0 \tag{2.27}$$

pentru $1 \leq i \leq n$. Căutăm nişte funcţii $u_i : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, pentru $1 \leq i \leq n$, astfel încât sistemul (2.25) să admită soluţia $(u_1, \beta_2 u_1 + u_2, \ldots, \beta_n u_1 + u_n)$. Pentru aceasta, în sistemul (2.25), înlocuim:

$$y_1 = u_1, y_2 = \beta_2 u_1 + u_2, \ldots, y_n = \beta_n u_1 + u_n \tag{2.28}$$

Obţinem

$$\begin{cases} u_1' = a_{11}u_1 + a_{12}(\beta_2 u_1 + u_2) + \cdots + a_{1n}(\beta_n u_1 + u_n) \\ \beta_2 u_1' + u_2' = a_{21}u_1 + a_{22}(\beta_2 u_1 + u_2) + \cdots + a_{2n}(\beta_n u_1 + u_n) \\ \vdots \\ \beta_n u_1' + u_n' = a_{n1}u_1 + a_{n2}(\beta_2 u_1 + u_2) + \cdots + a_{nn}(\beta_n u_1 + u_n) \end{cases}$$

sau, ţinând cont de relaţiile (2.27),

$$\begin{cases} u_1' = a_{12}u_2 + \cdots + a_{1n}u_n \\ u_2' = (a_{22} - \beta_2 a_{12})u_2 + \cdots + (a_{2n} - \beta_2 a_{1n})u_n \\ \\ u_n' = (a_{n2} - \beta_n a_{12})u_2 + \cdots + (a_{nn} - \beta_n a_{1n})u_n \end{cases} \tag{2.29}$$

Remarcăm sistemul

$$\begin{cases} u_2' = (a_{22} - \beta_2 a_{12})u_2 + \cdots + (a_{2n} - \beta_2 a_{1n})u_n \\ \\ u_n' = (a_{n2} - \beta_n a_{12})u_2 + \cdots + (a_{nn} - \beta_n a_{1n})u_n \end{cases} \tag{2.30}$$

care are $n-1$ funcţii necunoscute. Rezolvarea sistemului (2.25) s-a redus la rezolvarea sistemului (2.30) din care determinăm funcţiile $u_2, \ldots, u_n$. Determinarea lui u_1 se face din relaţia $u_1' = a_{12}u_2 + \cdots + a_{1n}u_n$ prin găsirea unei primitive a lui $a_{12}u_2 + \cdots + a_{1n}u_n$. Vom arăta că $r = 0$ este rădăcină multiplă de ordinul $m-1$ pentru polinomul caracteristic al sistemului (2.30). Notăm cu $f(r)$ polinomul caracteristic al sistemului (2.29), iar cu $f_1(r)$ polinomul caracteristic al sistemului

(2.30). Avem

$$f(r)=\begin{vmatrix} -r & a_{12} & a_{13} & a_{1n} \\ 0 & a_{22}-\beta_2 a_{12}-r & a_{23}-\beta_2 a_{13} & a_{2n}-\beta_2 a_{1n} \\ 0 & a_{32}-\beta_3 a_{12} & a_{33}-\beta_3 a_{13}-r & a_{3n}-\beta_3 a_{1n} \\ & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2}-\beta_n a_{12} & a_{n3}-\beta_n a_{13} & a_{nn}-\beta_n a_{1n}-r \end{vmatrix}$$

Rezultă, dezvoltând după elementele din prima coloană, $f(r)=-rf_1(r)$. Pe de altă parte, înmulţind elementele primei linii cu β_i şi adunându-le la elementele liniei i, pentru $1\le i\le n$, obţinem

$$f(r)=\begin{vmatrix} -r & a_{12} & a_{13} & a_{1n} \\ -r\beta_2 & a_{22}-r & a_{23} & a_{2n} \\ -r\beta_3 & a_{32} & a_{33}-r & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -r\beta_n & a_{n2} & a_{n3} & a_{nn}-r \end{vmatrix}$$

Înmulţind elementele coloanei j cu $-\beta_j$, pentru $2\le j\le n$, şi adunându-le la elementele primei coloane, obţinem, ţinând cont de relaţiile (2.27),

$$f(r)=\begin{vmatrix} a_{11}-r & a_{12} & a_{13} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-r & a_{23} & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-r & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{nn}-r \end{vmatrix}$$

Deci $f(r)=\Delta(r)$. Din $f(r)=-rf_1(r)$ rezultă $-rf_1(r)=\Delta(r)$. Din această egalitate deducem, ţinând cont de faptul că $r=0$ este rădăcină multiplă de ordinul m pentru $\Delta(r)$, că $r=0$ este rădăcină multiplă de ordinul $m-1$ pentru $f_1(r)$.

Din presupunerea că afirmaţia teoremei este adevărată când multiplicitatea rădăcinii $r=0$ este $m-1$ deducem că sistemul (2.30) admite o soluţie de forma $(R_2(x), R_3(x), \ldots, R_n(x))$ în care

$$\begin{aligned} R_2(x) &= c_2R_{20}(x)+c_3R_{21}(x)+\cdots+c_mR_{2,m-2}(x) \\ \\ R_n(x) &= c_2R_{n0}(x)+c_3R_{n1}(x)+\cdots+c_mR_{n,m-2}(x), \end{aligned}$$

$R_{ij}(x)$, pentru $2 \leq i \leq n$ şi $0 \leq j \leq m-2$, sunt funcţii polinomiale de grad cel mult j, $c_2, \ldots, c_m$, sunt constante arbitrare şi

$$R_2(x) = 0, \ldots, R_n(x) = 0, (\forall)\, x \in \mathbf{R} \Rightarrow c_2 = \cdots = c_m = 0$$

Pentru a determina o soluţie a sistemului (2.29) trebuie să utilizăm prima ecuaţie a acestui sistem,

$$u_1' = a_{12}u_2 + \cdots + a_{1n}u_n,$$

unde $u_2 = R_2(x), \ldots, u_n = R_n(x)$. Rezultă că u_1 este o primitivă arbitrară a funcţiei polinomiale $a_{12}R_2(x) + \cdots + a_{1n}R_n(x)$. Deci

$$\begin{aligned} u_1 &= \int \left(a_{12}R_2(x) + \cdots + a_{1n}R_n(x)\right) dx = \\ &= c_2 \int Q_{10}(x)\, dx + \cdots + c_m \int Q_{1,m-2}(x)\, dx \end{aligned}$$

unde

$$Q_{1j}(x) = a_{12}R_{2j}(x) + \cdots + a_{1n}R_{nj}(x)$$

pentru $0 \leq j \leq m-2$, este funcţie polinomială de grad cel mult j. Rezultă că

$$u_1 = c_2P_{11}(x) + \cdots + c_mP_{1,m-1}(x) + c_1$$

unde c_1 este o constantă arbitrară, iar $P_{1j}(x)$, pentru $1 \leq j \leq m-1$, este primitiva lui $Q_{1,j-1}(x)$ pentru care $P_{1j}(0) = 0$. Deci $P_{1j}(x)$ este o funcţie polinomială de grad cel mult j. Notând cu $P_{10}(x)$ funcţia egală cu 1 pentru orice $x \in \mathbf{R}$, şi

$$P_1(x) =: c_1P_{10}(x) + c_2P_{11}(x) + \cdots + c_mP_{1,m-1}(x)$$

rezultă că $P_1(x)$ este o funcţie polinomială de grad cel mult $m-1$ şi $u_1 = P_1(x)$. Revenind la relaţiile (2.28) obţinem o soluţie a sistemului (2.25):

$$\begin{aligned} y_1 &= u_1 = P_1(x) \\ y_2 &= \beta_2u_1 + u_2 = \beta_2P_1(x) + R_2(x) =: P_2(x) \\ & \\ y_n &= \beta_nu_1 + u_n = \beta_nP_1(x) + R_n(x) =: P_n(x) \end{aligned}$$

Verificăm proprietăţile polinoamelor $P_2(x), \ldots, P_n(x)$. Pentru $2 \leq i \leq n$ avem

$$P_i(x) = \beta_i\left(c_1P_{10}(x) + c_2P_{11}(x) + \cdots + c_mP_{1,m-1}(x)\right) +$$

$$+\left(c_2 R_{i0}(x)+c_3 R_{i1}(x)+\cdots+c_m R_{i,m-2}(x)\right)=$$

$$=c_1 P_{i0}(x)+c_1 P_{i1}(x)+\cdots+c_m P_{i,m-1}(x)$$

unde am notat

$$\begin{aligned} P_{i0}(x) &= \beta_i P_{10}(x) \\ P_{i1}(x) &= \beta_i P_{11}(x)+R_{i0}(x) \\ \\ P_{i,m-1}(x) &= \beta_i P_{1,m-1}(x)+R_{i,m-2}(x) \end{aligned}$$

Rezultă că $P_{ij}(x)$, pentru $2\leq i\leq n$ şi $0\leq j\leq m-1$, sunt funcţii polinomiale de grad cel mult j.

Să presupunem că

$$P_1(x)=0,\ldots,P_n(x)=0,(\forall)\,x\in\mathbf{R}$$

Din expresia lui $P_1(x)$ şi din ipoteza că $P_1(x)$ este identic nul deducem că $c_1=0$, c_1 fiind termenul liber al lui $P_1(x)$. Ţinând cont de ipoteza că $P_2(x),\ldots,P_n(x)$ sunt funcţii polinomiale identic nule şi de forma lor luată prin definiţie obţinem

$$R_2(x)=0,\ldots,R_n(x)=0,(\forall)\,x\in\mathbf{R}$$

din care rezultă că $c_2=\cdots=c_m=0$. Aşadar

$$P_1(x)=0,\ldots,P_n(x)=0,(\forall)\,x\in\mathbf{R}\Rightarrow c_1=c_2=\cdots=c_m=0$$

ceea ce mai aveam de demonstrat. ■

Observaţie 1) Soluţia sistemului (2.25), a cărei existenţă a fost demonstrată în teoremă, este o combinaţie liniară a m soluţii liniar independente ale acestui sistem. Într-adevăr, ţinând cont de forma funcţiilor polinomiale $P_1(x),\ldots,P_n(x)$, avem

$$y=\left(P_1(x),\ldots,P_n(x)\right)e^{\lambda x}=\sum_{j=1}^{m}c_j\left(P_{1,j-1}(x),\ldots,P_{n,j-1}(x)\right)e^{\lambda x}=\sum_{j=1}^{m}c_j y^{(j)}$$

unde am notat

$$y^{(j)}=\left(P_{1,j-1}(x),\ldots,P_{n,j-1}(x)\right)e^{\lambda x}$$

pentru $1 \leq j \leq m$. Soluţia $y^{(j)}$ se obţine din soluţia y pentru $c_j = 1$ şi $c_i = 0$ pentru oricare $i \neq j$. Liniar-independenţa soluţiilor $y^{(1)}, \dots, y^{(m)}$ rezultă imediat. Relaţia

$$c_1 y^{(1)} + \cdots + c_m y^{(m)} = 0$$

revine la $y = 0$, adică $(P_1(x), \dots, P_n(x)) e^{\lambda x} = 0$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$. De aici rezultă

$$P_1(x) = 0, \dots, P_n(x) = 0, (\forall)\, x \in \mathbf{R}$$

din care deducem, ţinând cont de proprietăţile funcţiilor polinomiale $P_1, \dots, P_n$, că $c_1 = \cdots = c_m = 0$, ceea ce trebuia demonstrat.

Deci, unei rădăcini multiple de ordinul m a ecuaţiei caracteristice îi corespund m soluţii liniar independente pentru sistemul diferenţial. Vom folosi scriere soluţiilor ca matrice-coloane, pentru a economisi spaţiul orizontal al paginii.

2) Determinarea practică a polinoamelor $P_1, \cdots, P_n$ se face prin metoda identificării coeficienţilor.

Exemplu. Considerăm sistemul de ecuaţii diferenţiale, liniar şi omogen cu coeficienţi constanţi:

$$\begin{cases} y_1' = -9y_1 - 12y_2 - 5y_3 \\ y_2' = 5y_1 + 6y_2 + 3y_3 \\ y_3' = y_1 + 4y_2 + y_3 \end{cases}$$

Notând

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \text{ şi } A = \begin{bmatrix} -9 & -12 & -5 \\ 5 & 6 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix},$$

sistemul se scrie sub forma matriceală

$$y' = Ay$$

Ecuaţia caracteristică este

$$\begin{vmatrix} -9-r & -12 & -5 \\ 5 & 6-r & 3 \\ 1 & 4 & 1-r \end{vmatrix} = (r+2)^2 (2-r) = 0;\ r \in \mathbf{C}$$

din care deducem că $r_1 = 2$ este rădăcină simplă şi $r_2 = -2$ este rădăcină simplă.

Pentru valoarea proprie simplă $r_1 = 2$ corespunde o soluţie a sistemului de forma $y = ve^{2x}$, unde v este un vector propriu de componente v_1, v_2 şi respectiv v_3, definit prin $Av = 2v$, sau $(A - 2I)\,v = 0$. Deci

$$\begin{bmatrix} -11 & -12 & -5 \\ 5 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Deducem uşor o soluţie nenulă: $v_1 = -2$, $v_2 = 1$ şi $v_3 = 2$. Aşadar soluţia care corespunde valorii proprii simple $r_1 = 2$ este

$$y^{(1)} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{2x}$$

Pentru valoarea proprie $r_2 = -2$, dublă, corespunde o soluţie de forma

$$\tilde{y} = \begin{bmatrix} \alpha_1 + \beta_1 x \\ \alpha_2 + \beta_2 x \\ \alpha_3 + \beta_3 x \end{bmatrix} e^{-2x}$$

unde α_i şi β_i, pentru $i = 1, 2, 3$, sunt numere ce urmează a fi determinate prin înlocuirea lui $\tilde{y}$ în $y' = Ay$. Avem

$$\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} e^{-2x} - 2 \begin{bmatrix} \alpha_1 + \beta_1 x \\ \alpha_2 + \beta_2 x \\ \alpha_3 + \beta_3 x \end{bmatrix} e^{-2x} =$$

$$= \begin{bmatrix} -9 & -12 & -5 \\ 5 & 6 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 + \beta_1 x \\ \alpha_2 + \beta_2 x \\ \alpha_3 + \beta_3 x \end{bmatrix} e^{-2x}$$

Deducem

$$\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & -12 & -5 \\ 5 & 6 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}$$

$$-2 \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & -12 & -5 \\ 5 & 6 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}$$

Din a doua ecuaţie deducem

$$\begin{bmatrix} -7 & -12 & -5 \\ 5 & 8 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Rezolvînd, obţinem soluţia generală $\beta_1 = c_2$, $\beta_2 = -c_2$, $\beta_3 = c_2$.

Din prima ecuaţie deducem:

$$\begin{bmatrix} -7 & -12 & -5 \\ 5 & 8 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}.$$

din care deducem soluţia generală: $\alpha_1 = c_3 - c_2$, $\alpha_2 = -c_3 + \frac{1}{2}c_2$ şi $\alpha_3 = c_3$, unde c_2 şi c_3 sunt constante arbitrare. Rezultă soluţia

$$\tilde{y} = \begin{bmatrix} c_3 + c_2(-1+x) \\ -c_3 + c_2\left(\frac{1}{2} - x\right) \\ c_3 + c_2 x \end{bmatrix} e^{-2x} =$$

Pentru $c_2 = 1$ şi $c_3 = 0$, respectiv pentru $c_2 = 0$ şi $c_3 = 1$ rezultă două soluţii liniar independente

$$y^{(2)} = \begin{bmatrix} -1+x \\ \frac{1}{2} - x \\ x \end{bmatrix} e^{-2x}, \; y^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2x}$$

Soluţia generală este

$$y = c_1 y^{(1)} + c_2 y^{(2)} + c_3 y^{(3)}$$

unde c_1, c_2 şi c_3 sunt constante arbitrare. În reprezentare scalară soluţia este

$$\begin{aligned} y_1 &= -2c_1 e^{2x} + c_2(-1+x)e^{-2x} + c_3 e^{-2x}, \\ y_2 &= c_1 e^{2x} + c_2\left(\frac{1}{2} - x\right)e^{-2x} - c_3 x e^{-2x}, \\ y_3 &= 2c_1 e^{2x} + c_2 x e^{-2x} + c_3 e^{-2x} \end{aligned}$$

Determinarea soluţiei generale Presupunem că matricea A are valorile proprii $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ de multiplicităţi algebrice $m_1, \cdots, m_p$. Aşadar $m_1 + \cdots + m_p = n$. Pentru fiecare valoare proprie λ_i vom deduce m_i soluţii liniar independente pentru sistemul diferenţial. În final dispunem de n soluţii, despre care se demonstrează uşor că sunt liniar independente. Deci dispunem de un sistem fundamental de soluţii. Conform teoriei generale a sistemelor liniare, deducem soluţia generală a sistemului omogen, ca o combinaţie liniară arbitrară a sistemului fundamental. Folosind sistemul fundamental, deducem o soluţie particulară a sistemului neomogen, indiferent de forma membrului perturbator. Adunînd cele două soluţii menţionate obţinem soluţia generală a sistemului neomogen.

O problemă mai deosebită este cazul când matricea sistemului are coeficienţii reali, dar se obţin valori proprii complexe. Deoarece aceste valori proprii vor fi două câte două conjugate rezultă, din cele arătate mai sus, că putem înlocui cele două soluţii complexe ale sistemului diferenţial, corespunzătoare celor două valori proprii, prin două soluţii reale ale sistemului respectiv. Setul de soluţii astfel obţinut este, de data aceasta, format din n soluţii reale liniar independente. Deci se poate obţine un set fundamental format numai din soluţii reale.

2.8 Exerciţii.

1. Se consideră sistemul

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2 \\ y_2' = y_1 - y_2 \end{cases}$$

Arătaţi că

$$\begin{aligned} y_1 &= c_1\left(\sqrt{2}+1\right)e^{\sqrt{2}x} + c_2\left(\sqrt{2}-1\right)e^{-\sqrt{2}x}, \\ y_2 &= c_1 e^{\sqrt{2}x} - c_2 e^{-\sqrt{2}x} \end{aligned}$$

este o soluţie a sistemului, oricare ar fi constantele c_1 şi c_2. Pentru acest sistem, relaţiile

$$\begin{aligned} y_1 + \left(\sqrt{2}-1\right)y_2 &= 2\sqrt{2}c_1 e^{\sqrt{2}x} \\ y_1 - \left(\sqrt{2}+1\right)y_2 &= -2\sqrt{2}c_2 e^{-\sqrt{2}x} \end{aligned}$$

reprezintă integrala generală.

2. Să se arate că sistemul

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2 + x \\ y_2' = y_1 + y_2 + 1 \end{cases}$$

are soluţia

$$\begin{aligned} y_1 &= e^x\left(c_1\cos x - c_2\sin x\right) - \frac{x+1}{2} \\ y_2 &= e^x\left(c_1\sin x + c_2\cos x\right) + \frac{x}{2} \end{aligned}$$

oricare ar fi constantele c_1 şi c_2. Să se determine soluţia astfel încât $y_1(x_0) = y_1^0$, $y_2(x_0) = y_2^0$, unde x_0, y_1^0 şi y_2^0 sunt numere date.

3. Să se integreze sistemul diferenţial

$$y' - 2y - z = 0,\ z' - y - 2z = 0,$$

cu condiţiile $y(0) = 1, z(0) = 1$ şi apoi $y(0) = 0, z(0) = 1$, folosind metoda aproximaţiilor succesive.

4. Determinaţi sistemele fundamentale de soluţii pentru sistemul diferenţial liniar şi omogen:

$$\begin{cases} y_1' + 9y_1 + 12y_2 + 5y_3 = 0 \\ y_2' - 5y_1 - 6y_2 - 3y_3 = 0 \\ y_3' - y_1 - 4y_2 - y_3 = 0 \end{cases}$$

5. Determinaţi soluţia generală pentru sistemele diferenţiale liniare de mai jos:

   (a) $y' - y + z = \lambda e^{2x}$, $z' + 4y + 2z = \mu e^{2x}$;

   (b) $y_1' + y_1 - y_2 = 4x + 1$, $y_2' - y_1 - y_2 = -2x^2 + 2x - 1$;

   (c) $y_1' - 5y_1 - 4y_2 = 0$, $y_2' - 4y_1 - 5y_2 = 0$;

   (d) $y_1' - 2y_1 + y_2 = 0$, $y_2' - y_1 - 2y_2$;

   (e) $y_1' - 3y_1 + y_2 - y_3 = 0$, $y_2' + y_1 - 5y_2 + y_3 = 0$, $y_3' - y_1 + y_2 - 3y_3 = 0$;

   (f) $y_1' - y_1 + y_2 + y_3 = 0$, $y_2' - 3y_1 - y_2 + 3y_3 = 0$, $y_3' + 4y_1 + 2y_2 - y_3 = 0$.

   (g) $y_1' - 4y_1 + y_2 = 0$, $y_2' - y_1 - 2y_2 = 0$.

   (h) $y_1' - y_2 - y_3 = 0$, $y_2' - y_1 - y_2 + y_3 = 0$, $y_3' - y_2 - y_3 = 0$.

   (i) $y_1' + y_2 + 2y_3 = 0$, $y_2' - y_1 - y_2 = 0$, $5y_3' + 6y_1 - 8y_2 = 0$.

6. Să se rezolve următoarele sisteme de ecuaţii diferenţiale liniare:

   (a) $x_1' = x_1 + 2x_2$, $x_2' = 4x_1 + 3x_2$;

   (b) $x_1' = x_2$, $x_2' = -x_1$;

   (c) $x_1' = x_1 + 5x_2$, $x_2' = -x_1 - 3x_2$;

   (d) $x_1' = x_1 + x_2$, $x_2' = x_1 + x_2 + t$;

   (e) $x_1' + 2x_1 + x_2 = \sin t$, $x_2' - 4x_1 - 2x_2 = \cos t$;

   (f) $x_1' + 2x_1 + 4x_2 = 1 + 4t$, $x_2' + x_1 - x_2 = \frac{3}{2}t^2$;

(g) $x'_1 = x_2$, $x'_2 = x_3$, $x'_3 = x_1$;

(h) $x'_1 = x_2 + x_3$, $x'_2 = x_3 + x_1$, $x'_3 = x_1 + x_2$;

Capitolul 3

Ecuaţii diferenţiale de ordin superior

3.1 Definiţii

DEFINIŢIA 3.1.1 *Se numeşte ecuaţie diferenţială de ordinul* n, *unde* $n \in \mathbf{N}^*$, *orice relaţie de forma*

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \cdots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0 \tag{3.1}$$

unde $F : D \subset \mathbf{R}^{n+2} \to \mathbf{R}$ *este o funcţie care depinde efectiv de* $\dfrac{d^n y}{dx^n}$ *şi în care se cere determinarea funcţiilor de forma*

$$\phi : I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R} \tag{3.2}$$

cu proprietatea

$$F\left(x, \phi(x), \frac{d\phi}{dx}(x), \cdots, \frac{d^n \phi}{dx^n}(x)\right) = 0, (\forall)\, x \in I \tag{3.3}$$

O funcţie de forma (3.2) care verifică relaţia (3.3) se numeşte soluţie pe I *a ecuaţiei diferenţiale (3.1).*

Observaţii. 1) În ecuaţia diferenţială (3.1) litera y este numită funcţie necunoscută, iar x este numită variabilă independentă. Expresiile $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}, \cdots, \dfrac{d^n y}{dx^n}$ se înlocuiesc adesea prin y' (sau $y^{(1)}$), y'' (sau $y^{(2)}$),$\cdots, y^{(n)}$, dacă nu se crează confuzii. Într-o ecuaţie diferenţială, funcţia necunoscută şi variabila independentă pot fi desemnate prin orice simboluri, dacă nu se crează confuzii. În cazuri concrete litera y este "eticheta" unei mărimi fizice sau de altă natură cum ar fi: masa, spaţiu, viteza, acceleraţia, intensitatea, tensiunea, concentraţia, etc. Variabila independentă este adesea timpul, desemnat prin t.

2) Pentru $n = 1$ se obţine definiţia ecuaţiei diferenţiale de ordinul întâi. Ecuaţiile diferenţiale de ordinul $n \geq 2$ se mai numesc şi ecuaţii diferenţiale de ordin superior.

3) Din definiţie rezultă că funcţia $\phi : I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ este de n ori derivabilă pe I şi $(x, \phi(x), \frac{d\phi}{dx}(x), \cdots, \frac{d^n\phi}{dx^n}(x)) \in D$ pentru orice $x \in I$.

4) Soluţia din definiţie se indică uneori prin: " $y = \phi(x)$, $x \in I$ ". O soluţie neprecizată se indică adesea sub forma: " $y = y(x)$, $x \in I$ ". Pentru exprimarea unor proprietăţi în care intervin soluţii, uneori, prin abuz de limbaj, o soluţie se desemnează sub forma " $y(x)$ " înţelegând că este vorba de funcţia $x \to y(x)$ şi nu de valoarea acestei funcţii în punctul x.

Exemplu. Pentru ecuaţia diferenţială de ordinul 2

$$\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + xy - 2e^x = 0,$$

funcţia $y = xe^x$, $x \in \mathbf{R}$, este o soluţie. Într-adevăr, făcând calculele rezultă

$$\frac{d^2}{dx^2}(xe^x) - x\frac{d}{dx}(xe^x) + x(xe^x) - 2e^x = 0,\ (\forall)\ x \in R$$

Observaţie. Determinarea soluţiilor unei ecuaţii diferenţiale este un proces complex, numit rezolvarea (sau integrarea) ecuaţiei diferenţiale respective. Mulţimea de definiţie a unei soluţii se determină, de regulă, în procesul rezolvării.

DEFINIŢIA 3.1.2 *Graficul unei soluţii a unei ecuaţii diferenţiale se numeşte curbă integrală a acelei ecuaţii diferenţiale.*

Forma normală a ecuaţiilor diferenţiale de ordinul n.

Relaţia (3.1) se numeşte forma generală a ecuaţiilor diferenţiale de ordinul n.

Relaţia

$$\frac{d^ny}{dx^n} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \cdots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right) \tag{3.4}$$

unde $f : E \subset \mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}$, reprezintă forma normală a ecuaţiilor diferenţiale de ordinul n.

3.2 Problema Cauchy

Problema Cauchy pentru o ecuaţie diferenţială de ordinul n (3.4) constă în determinarea unei soluţii a acelei ecuaţii diferenţiale, $y = y(x)$, $x \in I$, care să verifice condiţiile

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0^0 \\ \dfrac{dy}{dx}(x_0) = y_0^1 \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}(x_0) = y_0^{n-1} \end{cases}, \tag{3.5}$$

unde $x_0 \in I$ şi $y_0^0, y_0^1, \cdots, y_0^{n-1} \in \mathbf{R}$ sunt numere date, astfel încât $\left(x_0, y_0^0, y_0^1, \cdots, y_0^{n-1}\right) \in E$. Condiţiile (3.5) se numesc condiţii iniţiale sau condiţii Cauchy. Problema Cauchy descrisă mai sus, pentru ecuaţia (3.4), se menţionează prin: " problema Cauchy:(3.4 + 3.5) ", sau

$$\text{problema Cauchy:} \begin{cases} \dfrac{d^n y}{dx^n} = f\left(x, y, \dfrac{dy}{dx}, \cdots, \dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right) \\ y(x_0) = y_0^0 \\ y'(x_0) = y_0^1 \\ \\ y^{(n-1}(x_0) = y_0^{n-1} \end{cases},$$

în care se specifică ecuaţia diferenţială şi condiţiile iniţiale.

3.3 Soluţii

3.3.1 Soluţia generală.

DEFINIŢIA 3.3.1 *Se numeşte soluţie generală a unei ecuaţii diferenţiale de ordinul n, pe mulţimea $E \subset \mathbf{R}^{n+1}$, o familie S de soluţii ale acelei ecuaţii diferenţiale cu proprietatea că pentru orice punct $\left(x_0, y_0^0, y_1^0, \ldots, y_{n-1}^0\right) \in E$ există o singură soluţie $\phi \in S$ astfel încât*

$$\begin{aligned} \phi(x_0) &= y_0^0, \\ \frac{d\phi}{dx}(x_0) &= y_1^0, \\ \\ \frac{d^{n-1}\phi}{dx^{n-1}}(x_0) &= y_{n-1}^0 \end{aligned}$$

Observaţie. Soluţia generală se indică de obicei sub forma

$$y = \phi(x, c_1, \dots c_n), \ x \in I_{c_1,\dots,c_n} \subset \mathbf{R}, \ (c_1, \dots c_n) \in J \subset \mathbf{R}^n$$

unde $c_1, \dots, c_n$ sunt parametri. Această soluţie trebuie să aibă proprietatea: pentru orice $(x_0, y_0^0, y_1^0, \dots, y_{n-1}^0) \in E$ există un set unic de numere $(c_{1\,0}, \dots, c_{n\,0}) \in J$ astfel încât soluţia

$$y = \phi(x, c_{1\,0}, \dots, c_{n\,0}), \ x \in I_{c_{1\,0},\dots,c_{n\,0}}$$

verifică condiţiile

$$\begin{aligned} \phi(x_0, c_{1\,0}, \dots c_{n\,0}) &= y_0^0, \\ \frac{d\phi}{dx}(x_0, c_{1\,0}, \dots c_{n\,0}) &= y_1^0, \\ \\ \frac{d^{n-1}\phi}{dx^{n-1}}(x_0, c_{1\,0}, \dots c_{n\,0}) &= y_{n-1}^0 \end{aligned}$$

3.3.2 Soluţie particulară.

DEFINIŢIA 3.3.2 *O soluţie a unei ecuaţii diferenţiale, care aparţine unei soluţii generale a acelei ecuaţii diferenţiale, se numeşte soluţie particulară.*

Observaţie. O soluţie particulară se obţine din soluţia generală pentru valoari particulare ale parametrilor.

3.3.3 Soluţie singulară.

DEFINIŢIA 3.3.3 *O soluţie a unei ecuaţii diferenţiale de ordin superior, care nu este soluţie particulară, se numeşte soluţie singulară.*

3.3.4 Integrală generală

DEFINIŢIA 3.3.4 *O relaţie de forma*

$$g(x, y) = 0, \ (x, y) \in \Omega \subset \mathbf{R}^2$$

unde $g : \Omega \to \mathbf{R}$ este o funcţie dată, se numeşte integrală a unei ecuaţii diferenţiale de ordin superior, dacă această relaţie defineşte implicit pe y ca funcţie de x, pe un interval $I \subset \mathbf{R}$, şi această funcţie este soluţie pe I a acelei ecuaţii diferenţiale de ordin superior.

DEFINIŢIA 3.3.5 *Prin integrală generală a unei ecuaţii diferenţiale de ordinul n se înţelege un sistem de n relaţii de forma*

$$\left\{\begin{array}{l} G_1\left(x,y,\dfrac{dy}{dx},\cdots,\dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)=c_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ G_n\left(x,y,\dfrac{dy}{dx},\cdots,\dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)=c_n \end{array}\right., \quad G_i : E\subset \mathbf{R}^{n+1}\to\mathbf{R}, \tag{3.6}$$

pentru $1\le i\le n$, cu următoarele proprietăţi: pentru fiecare punct $\left(x_0,y_0^0,y_1^0,\cdots,y_{n-1}^0\right)\in E$ sistemul

$$\left\{\begin{array}{l} G_1\left(x,y,\dfrac{dy}{dx},\cdots,\dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)=c_{10} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ G_n\left(x,y,\dfrac{dy}{dx},\cdots,\dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)=c_{n0} \end{array}\right., \quad c_{i0}=G_i\left(x_0,y_0^0,y_1^0,\cdots,y_{n-1}^0\right)$$

pentru $1\le i\le n$, defineşte implicit pe y, $\dfrac{dy}{dx}$, $\cdots$, $\dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$ ca funcţii de x, pe o vecinătate I_0 a lui x_0 sub forma

$$\begin{aligned} y &= \phi(x), \\ \frac{dy}{dx} &= \alpha_1(x), \\ & \\ \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} &= \alpha_{n-1}(x) \end{aligned}$$

astfel încât $y=\phi(x)$, să fie soluţie pe I_0 a ecuaţiei diferenţiale considerate şi

$$\begin{aligned} \phi(x_0) &= y_0^0 \\ \phi'(x_0) &= \alpha_1(x_0) \\ & \\ \phi^{(n-1)}(x_0) &= \alpha_{n-1}(x_0) \end{aligned}$$

3.4 Exemple

Ecuaţii de forma $y^{(n)}=f(x)$. Presupunem că $f: E\subset\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, este o funcţie continuă. Atunci, pentru orice $x_0\in E$ funcţia reală

$$\phi(x)=\frac{1}{(n-1)!}\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)^{n-1}f(t)\,dt+P_{n-1}(x)$$

definită pe E, unde

$$P_{n-1}(x) = y_{n-1}^0 \frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots + y_1^0 \frac{x-x_0}{1!} + y_0^0$$

este soluţie şi verifică condiţiile iniţiale

$$\begin{aligned} \phi(x_0) &= y_0^0 \\ \phi'(x_0) &= y_1^0 \\ \\ \phi^{(n-1)}(x_0) &= y_{n-1}^0 \end{aligned}$$

oricare ar fi numerele $y_0^0, y_1^0, \cdots, y_{n-1}^0$.

Observăm că dacă $f(a) = 0$, pentru un număr a, atunci ecuaţia admite soluţia constantă $y = a$.

Ecuaţiile de forma $F\left(x, y^{(k)}, \cdots, y^{(k+p)}\right) = 0$, în care lipsec funcţia necunoscută şi derivatele sale până la ordinul $k-1$, se rezolvă prin schimbarea de funcţie $y^{(k)} = z$. Derivînd obţinem imediat $y^{(k+1)} = z^{(1)}, \cdots, y^{(k+p)} = z^{(p)}$. Ecuaţia devine

$$F\left(x, z, z^{(1)}, \cdots, z^{(p)}\right) = 0$$

Deci avem de rezolvat o ecuaţie de ordin p, adică cu k unităţi mai mic. Legătura dintre cele două ecuaţii este următoarea: dacă $z = u(x)$ este soluţie pentru ecuaţia $F\left(x, z, z^{(1)}, \cdots, z^{(p)}\right) = 0$, pe un interval I, iar $y = v(x)$ este soluţie pentru ecuaţia $y^{(k)} = u(x)$, pe acelaşi interval, atunci $y = v(x)$ este soluţie pentru ecuaţia dată.

Într-adevăr, avem

$$\begin{aligned} F\left(x, u(x), u^{(1)}(x), \cdots, u^{(p)}(x)\right) &= 0,\ [v(x)]^{(k)} = u(x),\ \text{deci} \\ F\left(x, v^{(k)}(x), \cdots, v^{(k+p)}(x)\right) &= F\left(x, u(x), u^{(1)}(x), \cdots, u^{(p)}(x)\right) = 0 \end{aligned}$$

deci

$$F\left(x, v^{(k)}(x), \cdots, v^{(k+p)}(x)\right) = 0$$

ceea ce trebuia verificat.

Ecuaţiile de forma $F\left(x, \dfrac{y'}{y}, \cdots, \dfrac{y^{(n)}}{y}\right) = 0$ se reduc la ecuaţii de ordinul $n-1$ prin substituţia $\dfrac{y'}{y} = z$. Pentru simplificarea expunerii vom considera cazul $n = 2$, adică vom cerceta ecuaţiile de forma $F\left(x, \dfrac{y'}{y}, \dfrac{y''}{y}\right) = 0$.

Deducem succesiv

$$y' = yz,\ y'' = y'z + yz',\ \frac{y''}{y} = z^2 + z'$$

Ecuaţia devine

$$F\left(x, z, z^2 + z'\right) = 0$$

Deci pornind de la o ecuaţie de ordinul 2 am ajuns la o ecuaţie de ordinul 1. Legătura dintre cele două ecuaţii este următoarea: dacă $z = u\left(x\right)$ este soluţie pentru $F\left(x, z, z^2 + z'\right) = 0$, iar $y = v\left(x\right)$ este soluţie pentru $\frac{y'}{y} = u\left(x\right)$, atunci $y = v\left(x\right)$ este soluţie pentru ecuaţia $F\left(x, \frac{y'}{y}, \frac{y''}{y}\right) = 0$.

Într-adevăr, avem succesiv

$$F\left(x, u\left(x\right), u^2\left(x\right) + u'\left(x\right)\right) = 0,\ \frac{v'\left(x\right)}{v\left(x\right)} = u\left(x\right),\ v'\left(x\right) = v\left(x\right) \cdot u\left(x\right)$$
$$v''\left(x\right) = v'\left(x\right) \cdot u\left(x\right) + v\left(x\right) \cdot u'\left(x\right),\ \frac{v''\left(x\right)}{v\left(x\right)} = u^2\left(x\right) + u'\left(x\right)$$
$$F\left(x, \frac{v'\left(x\right)}{v\left(x\right)}, \frac{v''\left(x\right)}{v\left(x\right)}\right) = F\left(x, u\left(x\right), u^2\left(x\right) + u'\left(x\right)\right) = 0$$

deci

$$F\left(x, \frac{v'\left(x\right)}{v\left(x\right)}, \frac{v''\left(x\right)}{v\left(x\right)}\right) = 0$$

ceea ce trebuia verificat.

Ecuaţiile de forma $F\left(y, y^{(1)}, \cdots, y^{(n)}\right) = 0$ sunt ecuaţii în care lipseşte variabila independentă. Se poate reduce ordinul ecuaţiei prin schimbarea de funcţie şi de variabilă $y' = p\left(y\right)$, în care p va fi noua funcţie necunoscută, iar y va fi noua variabilă independentă. Pentru simplificarea expunerii vom considera cazul $n = 2$, adică vom cerceta ecuaţia

$$F\left(y, y', y''\right) = 0$$

Avem

$$y'' = \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p'p$$

Ecuaţia dată se reduce la ecuaţia

$$F\left(y, p, p'p\right) = 0,$$

deci este o ecuaţie diferenţială de ordinul 1. Legătura dintre cele două ecuaţii este următoarea: dacă $p = u\left(y\right)$ este soluţie pentru ecuaţia $F\left(y, p, p'p\right) = 0$, iar $y = v\left(x\right)$

este soluţie pentru ecuaţia $y' = u(y)$, atunci $y = v(x)$ este soluţie pentru ecuaţia $F(y, y', y'') = 0$.

Într-adevăr, avem succesiv

$$F(y, u(y), u'(y)u(y)) = 0, v'(x) = u(v(x)),$$
$$v''(x) = u'(v(x))v'(x) = u'(v(x))u(v(x)),$$

Apoi

$$\begin{aligned} F(v(x), v'(x), v''(x)) &= F(v(x), u(v(x)), u'(v(x))u(v(x))) = \\ &= F(y, u(y), u'(y)u(y)) = 0 \end{aligned}$$

deci

$$F(v(x), v'(x), v''(x)) = 0$$

ceea ce trebuia verificat.

3.5 Reducerea unei ecuaţii diferenţiale la un sistem diferenţial.

Considerăm ecuaţia diferenţială (3.4), scrisă sub forma normală

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \cdots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)$$

şi o soluţie oarecare a acestei ecuaţii $y = \phi(x)$, $x \in I$, unde $I \subset \mathbf{R}$ este un interval. Notăm

$$\begin{cases} y_1(x) = \phi(x) \\ y_2(x) = \dfrac{dy_1(x)}{dx} = \dfrac{d\phi(x)}{dx} \\ y_3(x) = \dfrac{dy_2(x)}{dx} = \dfrac{d^2\phi(x)}{dx^2} \\ \vdots \\ y_n(x) = \dfrac{dy_{n-1}(x)}{dx} = \dfrac{d^{n-1}\phi(x)}{dx^{n-1}} \end{cases}$$

Deci

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1(x)}{dx} = y_2(x) \\ \dfrac{dy_2(x)}{dx} = y_3(x) \\ \vdots \\ \dfrac{dy_{n-1}(x)}{dx} = y_n(x) \\ \dfrac{dy_n(x)}{dx} = f(x, y_1(x), \cdots, y_n(x)) \end{cases}$$

Aşadar

$$\left\{y_1 = \phi(x), y_2 = \frac{d\phi(x)}{dx}, \cdots, y_n = \frac{d^{n-1}\phi(x)}{dx^{n-1}}\right\}, \ x \in I$$

este soluţie a sistemului diferenţial normal

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dx} = y_3 \\ \vdots \\ \dfrac{dy_{n-1}}{dx} = y_n \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f(x, y_1, \cdots, y_n) \end{cases} \tag{3.7}$$

Reciproc, dacă

$$\{y_1 = y_1(x), \cdots, y_n = y_n(x)\}, \ x \in I$$

este o soluţie oarecare a sistemului (3.7), atunci

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1(x)}{dx} = y_2(x) \\ \dfrac{dy_2(x)}{dx} = y_3(x) = \dfrac{d^2y_1(x)}{dx^2} \\ \vdots \\ \dfrac{dy_{n-1}(x)}{dx} = y_n(x) = \dfrac{d^{n-1}y_1(x)}{dx^{n-1}} \\ \dfrac{dy_n(x)}{dx} = f(x, y_1(x), \cdots, y_n(x)) = \dfrac{d^ny_1(x)}{dx^n} \end{cases}$$

pentru orice $x \in I$. Deci

$$\frac{d^ny_1(x)}{dx^n} = f\left(x, y_1(x), \cdots, \frac{d^{n-1}y_1(x)}{dx^{n-1}}\right)$$

ceea ce arată că $y = y_1(x)$, $x \in I$, este soluţie a ecuaţiei (3.4). Am demonstrat astfel că ecuaţia diferenţială (3.4) este echivalentă cu sistemul diferenţial normal (3.7).

3.6 Reducerea unui sistem diferenţial la o ecuaţie diferenţială.

Considerăm sistemul diferenţial normal, (2.4),

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, \cdots, y_n) \\ \vdots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, \cdots, y_n) \end{cases}$$

unde $f_i : E \subset \mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}$, $1 \leq i \leq n$, şi o soluţie oarecare a sa

$$\{y_1 = y_1(x), \cdots, y_n = y_n(x)\}, \ x \in I$$

unde $I \subset \mathbf{R}$ este un interval. Avem identităţile

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1(x)}{dx} = f_1(x, y_1(x), \cdots, y_n(x)) \\ \vdots \\ \dfrac{dy_n(x)}{dx} = f_n(x, y_1(x), \cdots, y_n(x)) \end{cases}$$

pentru orice $x \in I$. Vom deriva succesiv una din aceste identităţi, de exemplu pe prima, de $n-1$ ori, şi din relaţiile obţinute vom elimina, dacă se poate, pe $y_2(x), \cdots, y_n(x)$. Vom obţine o relaţie care arată că $y_1(x)$ este soluţie a unei ecuaţii diferenţiale de ordinul n. Aşadar, după prima derivare a primei identităţi obţinem

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y_1(x)}{dx^2} &= \frac{\partial f_1(z)}{\partial x} + \frac{\partial f_1(z)}{\partial y_1}\frac{dy_1(x)}{dx} + \cdots + \frac{\partial f_1(z)}{\partial y_n}\frac{dy_n(x)}{dx} = \\ &= \frac{\partial f_1(z)}{\partial x} + \frac{\partial f_1(z)}{\partial y_1} f_1(z) + \cdots + \frac{\partial f_1(z)}{\partial y_n} f_n(z) = F_2(z) \end{aligned}$$

unde am notat pentru prescurtare $z = (x, y_1(x), \cdots, y_n(x))$ şi

$$F_2(z) = \frac{\partial f_1(z)}{\partial x} + \frac{\partial f_1(z)}{\partial y_1} f_1(z) + \cdots + \frac{\partial f_1(z)}{\partial y_n} f_n(z)$$

Deci

$$\frac{d^2 y_1(x)}{dx^2} = F_2(z)$$

Continuând procedeul de mai sus, obţinem un sistem de relaţii de forma

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1(x)}{dx} = f_1(x, y_1(x), \cdots, y_n(x)) \\ \dfrac{d^2 y_1(x)}{dx^2} = F_2(x, y_1(x), \cdots, y_n(x)) \\ \vdots \\ \dfrac{d^n y_1(x)}{dx^n} = F_n(x, y_1(x), \cdots, y_n(x)) \end{cases}$$

Dacă din primele $n-1$ relaţii ale acestui sistem putem deduce pe $y_2(x), \cdots, y_n(x)$ sub forma

$$\begin{cases} y_2(x) = \alpha_2\left(x, y_1(x), \dfrac{dy_1(x)}{dx}, \cdots, \dfrac{d^{n-1} y_1(x)}{dx^{n-1}}\right) \\ \vdots \\ y_n(x) = \alpha_n\left(x, y_1(x), \dfrac{dy_1(x)}{dx}, \cdots, \dfrac{d^{n-1} y_1(x)}{dx^{n-1}}\right) \end{cases} \tag{3.8}$$

atunci, înlocuind în ultima relaţie a sistemului obţinem o relaţie de forma

$$\frac{d^n y_1(x)}{dx^n} = F\left(x, y_1(x), \frac{dy_1(x)}{dx}, \cdots, \frac{d^{n-1} y_1(x)}{dx^{n-1}}\right)$$

pentru orice $x \in I$, ceea ce arată că

$$y_1 = y_1(x), \ x \in I$$

este soluţie a ecuaţiei diferenţiale

$$\frac{d^n y_1}{dx^n} = F\left(x, y_1, \frac{dy_1}{dx}, \cdots, \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}\right) \tag{3.9}$$

unde $F : E \to \mathbf{R}$ este definită prin compuneri corespunzătoare. Să presupunem că putem găsi soluţia generală

$$y_1 = y_1(x, c_1, \cdots, c_n), \ x \in I'_{c_1 \dots c_n}$$

a acestei ecuaţii. Înlocuind în relaţiile (3.8) obţinem relaţii de forma

$$\begin{cases} y_2(x) = \beta_2(x, c_1, \cdots, c_n), \\ \vdots & ; \ x \in I'_{c_1 \dots c_n} \\ y_n(x) = \beta_n(x, c_1, \cdots, c_n), \end{cases}$$

Rezultă că soluţiile sistemului diferenţial (2.4) se obţin din soluţiile ecuaţiei diferenţiale de ordinul n (3.9).

3.7 Existenţa şi unicitatea soluţiilor

3.7.1 Cazul general

Considerăm ecuaţia diferenţială (3.4)

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}\right)$$

unde $f : E \subset \mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}$. Am văzut mai sus că această ecuaţie este echivalentă cu sistemul diferenţial normal (3.7)

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = y_2 \\ \frac{dy_2}{dx} = y_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{dy_{n-1}}{dx} = y_n \\ \frac{dy_n}{dx} = f(x, y_1, \cdots, y_n) \end{cases}$$

unde $y_1 = y$. Vom reformula teorema Cauchy-Lipschitz , de existenţă a soluţiei problemei Cauchy pentru sisteme diferenţiale normale de ordinul întâi, în acest caz.

TEOREMA 3.7.1 *Considerăm numerele reale* $x_0, y_0^0, y_0^1, \cdots, y_0^{n-1}$, *şi numerele pozitive* $a, b^0, b^1, \cdots, b^{n-1}$. *Notăm*

$$\begin{aligned} J_i &= \left[y_0^i - b^i,\ y_0^i + b^i\right],\ 0 \leq i \leq n-1, \\ E &= [x_0 - a,\ x_0 + a] \times J_0 \times \cdots \times J_{n-1} \end{aligned}$$

Dacă $f : E \to \mathbf{R}$ *are proprietăţile:*

1. f *este continuă pe* E;

2. f *este lipschitziană, adică există numerele pozitive* A_i, *pentru* $1 \leq i \leq n$, *astfel încât*

$$|f(x, Y_1, \cdots, Y_n) - f(x, y_1, \cdots, y_n)| \leq \sum_{i=1}^{n} A_i |Y_i - y_i|$$

pentru orice $(x, Y_1, \cdots, Y_n), (x, y_1, \cdots, y_n) \in E$, *atunci există* $h \in (0, a]$ *astfel încât ecuaţia diferenţială (3.4) să aibă o soluţie unică de forma* $y = y(x)$, $x \in I$, *unde* $I = [x_0 - h, x_0 + h]$, *care verifică condiţiile iniţiale*

$$\begin{cases} y(x_0) &= y_0^0 \\ y'(x_0) &= y_0^1 \\ & \\ y^{(n-1)}(x_0) &= y_0^{n-1} \end{cases}$$

3.7.2 Cazul ecuaţiilor diferenţiale liniare

DEFINIŢIA 3.7.1 *Prin ecuaţie diferenţială liniară de ordinul* n ($n \in \mathbf{N}^*$), *se înţelege o ecuaţie diferenţială de forma*

$$a_0(x) y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x) y' + a_n(x) y = l(x), \tag{3.10}$$

în care funcţiile $a_i : I = [a, b] \to \mathbf{R}$, $0 \leq i \leq n$, *se numesc coeficienţii ecuaţiei, iar funcţia* $l : I \to \mathbf{R}$ *este numită termenul liber (sau perturbator) al ecuaţiei. Dacă* $l(x) = 0$ *pentru orice* $x \in [a, b]$, *atunci ecuaţia se numeşte omogenă. Ecuaţia se numeşte neomogenă dacă nu este omogenă.*

Observaţie 1) Presupunem că $a_0(x) \neq 0$ pentru orice $x \in I$. Ecuaţia (3.10) este echivalentă cu sistemul diferenţial liniar

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ \\ y_{n-1}' = y_n \\ y_n' = \dfrac{1}{a_0(x)} \left(l(x) - a_1(x) y_n - \cdots - a_n(x) y_1 \right) \end{cases}$$

unde $y_1 = y$.

2) Forma generală a ecuaţiei liniare omogene de ordinul n este

$$a_0(x) y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x) y' + a_n(x) y = 0 \tag{3.11}$$

Se spune că (3.11) este ecuaţia diferenţială omogenă asociată ecuaţiei diferenţiale neomogene (3.10).

Putem reformula teorema de existenţă relativă la sistemele diferenţiale liniare de ordinul întâi pentru acest caz.

TEOREMA 3.7.2 *Dacă coeficienţii a_i, $0 \leq i \leq n$, şi termenul liber l sunt funcţii continue pe intervalul $I = [a, b]$, iar $a_0(x) \neq 0$ pentru orice $x \in I$, atunci ecuaţia diferenţială liniară (3.10) admite o soluţie unică de forma*

$$y = y(x), \ x \in I$$

care verifică condiţiile iniţiale

$$y(x_0) = y_0^0, \ y'(x_0) = y_0^1, \ \cdots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1},$$

unde $x_0 \in I$ şi y_0^0, y_0^1, $\cdots, y_0^{n-1}$ sunt numere reale arbitrare.

3.8 Ecuaţii diferenţiale liniare omogene

3.8.1 Spaţiul soluţiilor

TEOREMA 3.8.1 *Funcţia $L_n : C^n[a, b] \to C^0[a, b]$ definită prin*

$$L_n[y] = a_0(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x) \frac{dy}{dx} + a_n(x) y \tag{3.12}$$

pentru orice $y \in C^n[a, b]$, este o transformare liniară.

Demonstraţie. Avem

$$L_n[y] = \sum_{i=0}^{n} a_i(x) \frac{d^{n-i}y}{dx^i}$$

deci

$$\begin{aligned} L_n[\alpha y + \beta z] &= \sum_{i=0}^{n} a_i(x) \frac{d^{n-i}(\alpha y + \beta z)}{dx^i} = \sum_{i=0}^{n} a_i(x) \left(\alpha \frac{d^{n-i}y}{dx^i} + \beta \frac{d^{n-i}z}{dx^i} \right) = \\ &= \alpha \sum_{i=0}^{n} a_i(x) \frac{d^{n-i}y}{dx^i} + \beta \sum_{i=0}^{n} a_i(x) \frac{d^{n-i}z}{dx^i} = \alpha L_n[y] + \beta L_n[z] \end{aligned}$$

pentru orice numere α, β şi $y, z \in C^n[a,b]$. ■

Observaţie Ecuaţia (3.10) se poate scrie sub forma $L_n[y] = l(x)$. Ecuaţia liniară omogenă (3.11) are forma $L_n[y] = 0$.

TEOREMA 3.8.2 *Mulţimea soluţiilor ecuaţiei omogene (3.11) este un subspaţiu vectorial $n-$ dimensional al spaţiului vectorial $C^n[a,b]$.*

Demonstraţie. Într-adevăr, această mulţime este tocmai nucleul lui L_n :

$$N(L_n) = \{y \mid y \in C^n[a,b],\ L_n[y] = 0\}, \tag{3.13}$$

despre care se ştie că este subspaţiu vectorial. Fie $x_0 \in I$. Considerăm soluţiile $y_1, \cdots, y_n$ ale ecuaţiei omogene, care verifică condiţiile iniţiale:

$$y_i^{(j-1)}(x_0) = \delta_{ij},\ 1 \le i \le n,\ 1 \le j \le n$$

Pentru a demonstra că $N(L_n)$ este $n-$ dimensional, vom arăta că mulţimea de soluţii $\{y_1, \cdots, y_n\}$ este o bază a spaţiului $N(L_n)$. Va trebui să demonstrăm că $\{y_1, \cdots, y_n\}$ este liniar independentă şi că generează spaţiul $N(L_n)$.

Considerăm ecuaţia

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i = 0;\ \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbf{R}$$

Derivând succesiv, obţinem:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^{(j-1)} = 0;\ \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbf{R}$$

pentru $1 \le j \le n$. Pentru $x = x_0$ obţinem

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^{(j-1)}(x_0) = 0$$

adică

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta_{ij} = 0$$

Deci $\lambda_j = 0$ pentru $1 \leq j \leq n$, ceea ce înseamnă că $(y_1, \cdots, y_n)$ este liniar independentă.

Vom arăta că mulţimea $\{y_1, \cdots, y_n\}$ generează spaţiul soluţiilor $N(L_n)$. Fie

$$y = y(x), \ x \in I$$

o soluţie oarecare a ecuaţiei omogene, adică un element oarecare din $N(L_n)$. Determinăm numerele c_i, $1 \leq i \leq n$, astfel încât soluţia

$$z = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i$$

să verifice condiţiile iniţiale

$$z^{(j-1)}(x_0) = y^{(j-1)}(x_0)$$

pentru $1 \leq j \leq n$. Aşadar

$$\sum_{i=1}^{n} c_i y_i^{(j-1)}(x_0) = y^{(j-1)}(x_0),$$

adică

$$c_j = y^{(j-1)}(x_0)$$

pentru $1 \leq j \leq n$. Deoarece soluţia z îndeplineşte aceleaşi condiţii iniţiale ca soluţia y, ţinând cont de unicitatea soluţiei problemei Cauchy, rezultă că $z = y$. Deci orice soluţie a ecuaţiei omogene este o combinaţie liniară a soluţiilor $y_1, \cdots, y_n$, ceea ce înseamnă că $\{y_1, \cdots, y_n\}$ generează spaţiul $N(L_n)$, şi teorema este demonstrată.

■

Observaţie Orice mulţime formată din n soluţii liniar independente ale ecuaţiei omogene (3.11) formează o bază a spaţiului $N(L_n)$. Aşadar, orice soluţie a ecuaţiei omogene este o combinaţie liniară a acestor n soluţii.

DEFINIŢIA 3.8.1 *Fie I un interval real, $m \in \mathbf{N}^*$ şi $y_i \in C^{m-1}(I)$, $1 \leq i \leq m$. Prin wronskian al funcţiilor $y_1, \cdots, y_m$ se înţelege funcţia*

$$W[y_1, \cdots, y_m] : I \to \mathbf{R}$$

definită prin determinantul

$$W[y_1,\cdots,y_m](x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & & y_m(x)\\ y_1'(x) & y_2'(x) & & y_m'(x)\\ & & & \vdots\\ y_1^{(m-1)}(x) & y_2^{(m-1)}(x) & & y_m^{(m-1)}(x)\end{vmatrix}$$

pentru orice $x\in I$.

TEOREMA 3.8.3 (LIOUVILLE) *Dacă* $y_1,\cdots,y_n$ *sunt soluţii ale ecuaţiei omogene (3.11), atunci*

$$W[y_1,\cdots,y_n](x)=W[y_1,\cdots,y_n](x_0)\exp\left(-\int_{x_0}^{x}\frac{a_1(t)}{a_0(t)}dt\right)$$

pentru orice $x,x_0\in I$.

Demonstraţie. Notăm, pentru scurtarea scrierii, $W[y_1,\cdots,y_n](x)=W(x)$, pentru orice $x\in I$. Ţinând cont de regula de derivare a unui determinant şi de egalităţile

$$y_j^{(n)}=-\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i(x)}{a_0(x)}y_j^{(n-i)}$$

pentru $1\leq j\leq n$, avem

$$\begin{aligned}W'(x)&=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & & y_n(x)\\ y_1'(x) & y_2'(x) & & y_n'(x)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ y_1^{(n-2)}(x) & y_2^{(n-2)}(x) & & y_n^{(n-2)}(x)\\ y_1^{(n)}(x) & y_2^{(n)}(x) & & y_n^{(n)}(x)\end{vmatrix}=\\ &=-\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i(x)}{a_0(x)}\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & & y_n(x)\\ y_1'(x) & y_2'(x) & & y_n'(x)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ y_1^{(n-2)}(x) & y_2^{(n-2)}(x) & & y_n^{(n-2)}(x)\\ y_1^{(n-i)}(x) & y_2^{(n-i)}(x) & & y_n^{(n-i)}(x)\end{vmatrix}=\\ &=-\frac{a_1(x)}{a_0(x)}W(x)\end{aligned}$$

adică

$$W'(x)=-\frac{a_1(x)}{a_0(x)}W(x)$$

Înmulţind cu $\exp\left(\int_{x_0}^{x}\frac{a_1(t)}{a_0(t)}dt\right)$ obţinem

$$\left[W(x)\exp\left(\int_{x_0}^{x}\frac{a_1(t)}{a_0(t)}dt\right)\right]'=0$$

din care deducem că $W(x)\exp\left(\int_{x_0}^{x}\frac{a_1(t)}{a_0(t)}dt\right)$ are o valoare constantă, adică independentă de x. Aşadar

$$W(x)\exp\left(\int_{x_0}^{x}\frac{a_1(t)}{a_0(t)}dt\right)=W(x_0)\exp\left(\int_{x_0}^{x_0}\frac{a_1(t)}{a_0(t)}dt\right)=W(x_0)$$

din care rezultă

$$W(x)=W(x_0)\exp\left(-\int_{x_0}^{x}\frac{a_1(t)}{a_0(t)}dt\right)$$

pentru orice $x,x_0\in I$, ceea ce trebuia demonstrat. ■

TEOREMA 3.8.4 *Soluţiile $y_1,\cdots,y_n$, ale ecuaţiei omogene (3.11), sunt liniar independente dacă şi numai dacă wronskianul $W[y_1,\cdots y_n]$ nu se anulează în I.*

Demonstraţie. Considerăm ecuaţia

$$\lambda_1y_1+\cdots+\lambda_ny_n=0;\ \lambda_1,\cdots,\lambda_n\in\mathbf{R} \tag{3.14}$$

Putem constata uşor că $(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$ este o soluţie a acestei ecuaţii dacă şi numai dacă $(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$ este soluţie a sistemului liniar

$$\left\{\begin{array}{lcl}\lambda_1y_1(x)+\cdots+\lambda_ny_n(x)&=&0\\ \lambda_1y_1'(x)+\cdots+\lambda_ny_n'(x)&=&0\\ \\ \lambda_1y_1^{(n-1)}(x)+\cdots+\lambda_ny_n^{(n-1)}(x)&=&0\end{array}\right.;\ \lambda_1,\cdots,\lambda_n\in\mathbf{R} \tag{3.15}$$

pentru orice $x\in I$. Observăm că determinantul sistemului este tocmai wronskianul $W[y_1,\cdots,y_n](x)$.

Dacă $W[y_1,\cdots,y_n](x)\neq0$ pentru orice $x\in I$, atunci sistemul (3.15) admite doar soluţia $(0,\cdots,0)$ pentru orice $x\in I$, deci ecuaţia (3.14) admite doar soluţia $(0,\cdots,0)$. Rezultă că soluţiile $y_1,\cdots,y_n$ sunt liniar independente.

Dacă $W[y_1,\cdots,y_n](x_0)=0$, pentru un număr $x_0\in I$, rezultă că sistemul (3.15), pentru $x=x_0$, are o soluţie nenulă, $(\lambda_{10},\cdots,\lambda_{n0})$. Aceasta înseamnă că soluţia

$$y=\lambda_{10}y_1+\cdots+\lambda_{n0}y_n$$

a ecuaţiei (3.11), verifică condiţiile iniţiale

$$y(x_0)=y'(x_0)=\cdots=y^{(n-1)}(x_0)=0$$

Deoarece soluţia nulă verifică aceleaşi condiţii iniţiale, datorită unicităţii soluţiei problemei Cauchy, rezultă că

$$\lambda_{10}y_1+\cdots+\lambda_{n0}y_n=0$$

ceea ce înseamnă că soluţiile $y_1, \cdots, y_n$ sunt liniar dependente. De aici rezultă că dacă soluţiile $y_1, \cdots, y_n$ sunt liniar independente, atunci $W[y_1, \cdots, y_n](x) \neq 0$, pentru orice $x \in I$, şi teorema este complet demonstrată. ■

Observaţie Ţinând cont de teorema (3.8.3), teorema (3.8.4) se poate formula astfel: Soluţiile $y_1, \cdots, y_n$, ale ecuaţiei omogene (3.11), sunt liniar independente dacă şi numai dacă există $x_0 \in I$ astfel încât $W[y_1, \cdots y_n](x_0) \neq 0$.

3.8.2 Soluţia generală

DEFINIŢIA 3.8.2 *Mulţimea* $\{y_1, \cdots, y_n\}$, *de soluţii ale ecuaţiei omogene (3.11), se numeşte sistem fundamental de soluţii dacă wronskianul* $W[y_1, \cdots, y_n]$ *nu se anulează în nici un punct din* I.

Observaţii 1) Pentru ca mulţimea $\{y_1, \cdots, y_n\}$,de soluţii ale ecuaţiei (3.11), să fie sistem fundamental de soluţii este necesar şi suficient ca wronskianul $W[y_1, \cdots, y_n]$ să nu se anuleze într-un punct din I.

2) Un sistem fundamental de soluţii al ecuaţiei omogene este o bază a spaţiului soluţiilor acelei ecuaţii.

TEOREMA 3.8.5 *Dacă* $\{y_1, \cdots, y_n\}$ *este un sistem fundamental de soluţii al ecuaţiei (3.11), atunci soluţia generală a acestei ecuaţiei este*

$$y = c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n$$

unde c_i, *pentru* $1 \leq i \leq n$, *sunt numere arbitrare.*

Demonstraţie. Deoarece $\{y_1, \cdots, y_n\}$ este o bază a spaţiului soluţiilor rezultă că $y = c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n$ este soluţie pentru orice constante c_i, $1 \leq i \leq n$. Pe de altă parte, pentru orice $x_0 \in I$ şi pentru orice numere $y_0^0, y_0^1, \cdots, y_0^{n-1}$, putem determina valori potrivite ale constantelor $c_1, \cdots, c_n$ astfel încât soluţia $y = c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n$ să verifice condiţiile iniţiale

$$y(x_0) = y_0^0,\ y'(x_0) = y_0^1,\ \cdots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1}$$

Într-adevăr, aceasta revine la rezolvarea sistemului

$$\begin{cases} c_1 y_1(x_0) + \cdots + c_n y_n(x_0) = y_0^0 \\ c_1 y_1'(x_0) + \cdots + c_n y_n'(x_0) = y_0^1 \\ \\ c_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \cdots + c_n y_n^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1} \end{cases} ; \; c_1, \cdots, c_n \in \mathbf{R},$$

care are soluţie, şi aceasta este unică, deoarece determinantul sistemului este tocmai wronskianul $W[y_1, \cdots, y_n](x_0)$, care este nenul. ■

3.9 Ecuaţii diferenţiale liniare neomogene

3.9.1 Soluţia generală

TEOREMA 3.9.1 *Soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale neomogene (3.10) are forma*

$$y = y_h + y_{part}$$

unde y_h este soluţia generală a ecuaţiei omogene asociate, iar y_{part} este o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene (3.10).

Demonstraţie. Prin ipoteză avem

$$L_n[y_h] = 0, \; L_n[y_{part}] = l(x)$$

Rezultă că

$$\begin{aligned} L_n[y] &= L_n[y_h + y_{part}] = L_n[y_h] + L_n[y_{part}] = \\ &= 0 + l(x) = l(x) \end{aligned}$$

deci $y = y_h + y_{part}$ este soluţie a ecuaţiei (3.10). Reciproc, dacă y este o soluţie oarecare a ecuaţiei (3.10), avem $L_n[y] = l(x)$. Deducem că

$$L_n[y - y_{part}] = l(x) - l(x) = 0$$

ceea ce înseamnă că $y - y_{part}$ este soluţie a ecuaţiei diferenţiale omogene. Notând cu y_h această soluţie, deducem $y = y_h + y_{part}$. Aşadar, orice soluţie a ecuaţiei neomogene este de forma

$$y = c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n + y_{part}$$

unde c_i sunt numere arbitrare, iar $\{y_1, \cdots, y_n\}$ este un sistem fundamental de soluţii al ecuaţiei omogene. Vom arăta că orice problemă Cauchy pentru ecuaţia (3.10) are o soluţie de forma $y = c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n + y_{part}$. Fie $x_0 \in I$ şi numerele arbitrare $y_0^0, y_0^1, \cdots, y_0^{n-1}$. Sistemul liniar

$$\begin{cases} c_1 y_1(x_0) + \cdots + c_n y_n(x_0) = y_0^0 - y_{part}(x_0) \\ c_1 y_1'(x_0) + \cdots + c_n y_n'(x_0) = y_0^1 - y_{part}'(x_0) \\ \\ c_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \cdots + c_n y_n^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1} - y_{part}^{(n-1)}(x_0) \end{cases}$$

este compatibil şi soluţia este unică deoarece determinantul sistemului este nenul, fiind wronskianul sistemului fundamental de soluţii considerat. Dacă $(c_1, \cdots, c_n)$ este soluţia acestui sistem, atunci $y = c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n + y_{part}$ este soluţia ecuaţiei diferenţiale (3.10), care verifică condiţiile iniţiale

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0^0 \\ y'(x_0) = y_0^1 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1} \end{cases}$$

şi teorema este demonstrată. ■

3.9.2 Metoda variaţiei constantelor

TEOREMA 3.9.2 *Ecuaţia diferenţială liniară neomogenă (3.10) admite o soluţie particulară de forma*

$$y_{part} = c_1(x) y_1 + \cdots + c_n(x) y_n$$

unde $\{y_1, \cdots, y_n\}$ este un sistem fundamental de soluţii al ecuaţiei diferenţiale liniare omogene asociate, iar funcţiile $c_1(x), \cdots, c_n(x)$ verifică sistemul

$$\begin{cases} c_1' y_1(x) + \cdots + c_n' y_n(x) = 0 \\ c_1' y_1'(x) + \cdots + c_n' y_n'(x) = 0 \\ \\ c_1' y_1^{(n-2)}(x) + \cdots + c_n' y_n^{(n-2)}(x) = 0 \\ c_1' y_1^{(n-1)}(x) + \cdots + c_n' y_n^{(n-1)}(x) = \dfrac{l(x)}{a_0(x)} \end{cases} \tag{3.16}$$

Demonstraţie. Calculăm derivatele lui y_{part}. Avem

$$\begin{array}{lll} y_{part} = & \sum_{i=1}^{n} c_i y_i & \\ y'_{part} = & \sum_{i=1}^{n} c_i y'_i + \sum_{i=1}^{n} c'_i y_i & = \sum_{i=1}^{n} c_i y'_i \\ y^{(2)}_{part} = & \sum_{i=1}^{n} c_i y^{(2)}_i + \sum_{i=1}^{n} c'_i y'_i & = \sum_{i=1}^{n} c_i y^{(2)}_i \\ \vdots & & \\ y^{(n-1)}_{part} = & \sum_{i=1}^{n} c_i y^{(n-1)}_i + \sum_{i=1}^{n} c'_i y^{(n-2)}_i & = \sum_{i=1}^{n} c_i y^{(n-1)}_i \\ y^{(n)}_{part} = & \sum_{i=1}^{n} c_i y^{(n)}_i + \sum_{i=1}^{n} c'_i y^{(n-1)}_i & = \sum_{i=1}^{n} c_i y^{(n)}_i + \dfrac{l(x)}{a_0(x)} \end{array}$$

Deci

$$\begin{aligned} L_n[y_{part}] &= \sum_{j=0}^{n} a_j(x) y^{(n-j)}_{part} = \sum_{j=1}^{n} a_j(x) y^{(n-j)}_{part} + a_0(x) y^{(n)}_{part} = \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_j(x) \sum_{i=1}^{n} c_i y^{(n-j)}_i + a_0(x) \left[\sum_{i=1}^{n} c_i y^{(n)}_i + \frac{l(x)}{a_0(x)} \right] = \\ &= \sum_{j=0}^{n} a_j(x) \sum_{i=1}^{n} c_i y^{(n-j)}_i + l(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \sum_{j=0}^{n} a_j(x) y^{(n-j)}_i + l(x) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} c_i L_n[y_i] + l(x) = l(x) \end{aligned}$$

adică $L_n[y_{part}] = l(x)$, ceea ce trebuia demonstrat. ■

Observaţii 1) Soluţia particulară y_{part} a ecuaţiei neomogene, menţionată de teoremă, are aceeaşi formă ca soluţia generală a ecuaţiei omogene, şi anume

$$c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n$$

cu deosebirea că c_i, $1 \leq i \leq n$, sunt în acest caz funcţii, nu constante. Din acest motiv, metoda expusă în teoremă, prin care se determină o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene, este numită metoda variaţiei constantelor.

2) Sistemul (3.16) se rezolvă în două etape. În prima etapă sistemul (3.16) este considerat ca sistem algebric liniar cu necunoscutele c'_i, $1 \leq i \leq n$. Sistemul este compatibil deoarece determinantul sistemului este nenul, fiind tocmai wronskianul sistemului fundamental de soluţii $\{y_1, \cdots, y_n\}$. Rezolvând sistemul obţinem $c'_i = \phi_i(x)$, pentru $1 \leq i \leq n$, unde $\phi_i : [a, b] \to \mathbf{R}$ sunt funcţii continue, rezultate în urma unor operaţii algebrice cu funcţii continue, impuse de rezolvarea sistemului algebric. În etapa a doua se determină c_i ca primitivă particulară a funcţiei ϕ_i, $1 \leq i \leq n$.

3.9.3 Reducerea ordinului

TEOREMA 3.9.3 *Dacă* $u, v \in C^n[a,b]$ *atunci*

$$L_n[uv] = \sum_{k=0}^{n}\left[\sum_{j=k}^{n} a_{n-j} C_j^k u^{(j-k)}\right] v^{(k)}$$

Demonstraţie. *Avem, ţinând cont de formula de derivare a unui produs şi inversând ordinea de însumare,*

$$\begin{aligned} L_n[uv] &= \sum_{j=0}^{n} a_{n-j}(uv)^{(j)} = \sum_{j=0}^{n} a_{n-j} \sum_{k=0}^{j} C_j^k u^{(j-k)} v^{(k)} = \\ &= \sum_{k=0}^{n}\left[\sum_{j=k}^{n} a_{n-j} C_j^k u^{(j-k)}\right] v^{(k)} \end{aligned}$$

ceea ce trebuia demonstrat. Am ţinut cont că pentru o valoare fixată a lui k, *numărul* j *poate lua orice valori mai mari sau egale cu* k. ■

Observaţii 1) Dacă $u = e^{rx}$ atunci, deoarece $u^{(j-k)} = r^{j-k}e^{rx}$, are loc egalitatea

$$L_n[e^{rx}v] = \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{K_n^{(k)}[r]}{k!} v^{(k)}\right] e^{rx} \tag{3.17}$$

2) Dacă $v(x)$ este o funcţie polinomială de grad m, atunci

$$L_n[e^{rx}v(x)] = e^{rx}u(x),$$

unde $u(x)$ este funcţia polinomială

$$u(x) = \begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{K_n^{(k)}[r]}{k!} v^{(k)}(x) & m > n \\ \sum\limits_{k=0}^{m} \dfrac{K_n^{(k)}[r]}{k!} v^{(k)}(x) & m \le n \end{cases} \tag{3.18}$$

În particular, pentru $m \le n$ avem

$$L_n[e^{rx}x^m] = \left[K_n[r]x^m + C_m^1 K_n^{(1)}[r]x^{m-1} + \cdots + C_m^m K_n^{(m)}[r]\right] e^{rx}$$

iar pentru $m > n$ avem

$$L_n[e^{rx}x^m] = \left[K_n[r]x^m + C_m^1 K_n^{(1)}[r]x^{m-1} + \cdots + C_m^n K_n^{(n)}[r]x^{m-n}\right] e^{rx}$$

3) Dacă y_1 este o soluţie a ecuaţiei diferenţiale liniare omogene, adică are loc egalitatea $L_n[y_1] = 0$, atunci funcţia $y = y_1 v$ este soluţie a ecuaţiei diferenţiale

$$L_n[y] = l(x)$$

dacă şi numai dacă v este soluţie a ecuaţiei diferenţiale

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\sum_{j=k}^{n} a_{n-j} C_j^k y_1^{(j-k)}\right] v^{(k)} = l(x)$$

Notând $v^{(1)} = z$, ecuaţia de mai sus se transformă în ecuaţia de ordinul $n-1$

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\sum_{j=k}^{n} a_{n-j} C_j^k y_1^{(j-k)}\right] z^{(k-1)} = l(x)$$

Exemplu. Considerăm ecuaţia diferenţială de ordinul doi

$$y'' + a_1(x) y' + a_2(x) y = 0$$

unde coeficienţii a_1 şi a_2 sunt funcţii continue pe un interval $[a, b]$. Să presupunem că y_1 este o soluţie, care nu se anulează în $[a, b]$, a acestei ecuaţii. Făcând schimbarea $y = y_1(x) v$ deducem că y este soluţie a ecuaţiei considerate dacă şi numai dacă v este soluţie a ecuaţiei diferenţiale

$$[a_1(x) y_1(x) + 2y_1'(x)] v' + y_1(x) v'' = 0$$

Notând $v' = z$, deducem ecuaţia diferenţială

$$z' + \left(a_1(x) + 2\frac{y_1'(x)}{y_1(x)}\right) z = 0$$

care admite soluţia

$$z = \frac{1}{[y_1(x)]^2} \exp\left[-\int_{x_0}^{x} a_1(t)\, dt\right],\ x \in [a, b]$$

unde x_0 este un număr oarecare din $[a, b]$. Revenind la $v' = z$ deducem o soluţie

$$v = \int_{x_0}^{x} \frac{1}{[y_1(s)]^2} \exp\left[-\int_{x_0}^{s} a_1(t)\, dt\right] ds,\ x \in [a, b]$$

din care deducem soluţia

$$y_2 = y_1(x) \int_{x_0}^{x} \frac{1}{[y_1(s)]^2} \exp\left[-\int_{x_0}^{s} a_1(t)\, dt\right] ds$$

Verificăm liniar independenţa soluţiilor y_1 şi y_2. Avem

$$W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2$$

Deoarece $y_2 = y_1 v$, iar $v' = z$, rezultă

$$\begin{aligned} W[y_1, y_2] &= y_1(y_1' v + y_1 v') - y_1' y_1 v = y_1^2 z = \\ &= \exp\left[-\int_{x_0}^{x} a_1(t)\, dt\right] \neq 0 \end{aligned}$$

Deducem că soluţia generală a ecuaţiei considerate este

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

unde c_1 şi c_2 sunt numere reale arbitrare.

3.10 Ecuaţii diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi

3.10.1 Sistemul fundamental de soluţii

Considerăm ecuaţia diferenţială liniară omogenă

$$a_0 \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = 0 \tag{3.19}$$

unde coeficienţii a_i, $0 \leq i \leq n$, sunt constante reale. În acest caz, coeficienţii ecuaţiei fiind funcţii constante definite pe $\mathbf{R}$, soluţiile ecuaţiei vor fi definite pe $\mathbf{R}$. Pentru acest tip de ecuaţii diferenţiale vom indica un mod de a determina un sistem fundamental de soluţii.

Fie $L_n : C^n [a,b] \to C^0 [a,b]$ funcţia definită prin

$$L_n [y] = a_0 \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y$$

pentru orice $y \in C^n [a,b]$.

TEOREMA 3.10.1 *Are loc egalitatea*

$$L_n [e^{rx}] = e^{rx} K_n [r]$$

unde

$$K_n [r] = a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_{n-1} r + a_n$$

pentru orice $x \in \mathbf{R}$ *şi* $r \in \mathbf{C}$.

Demonstraţie. Deoarece $(e^{rx})_x^{(k)} = r^k e^{rx}$ deducem

$$L_n [e^{rx}] = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} (e^{rx})_x^{(k)} = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} r^k e^{rx} = e^{rx} K_n [r]$$

ceea ce trebuia demonstrat. ∎

TEOREMA 3.10.2 *Are loc egalitatea*

$$L_n [x^k e^{rx}] = \left(C_k^0 r^k K_n [r] + C_k^1 r^{k-1} K_n^{(1)} [r] + \cdots + C_k^k K_n^{(k)} [r] \right) e^{rx}$$

pentru orice $k \in \mathbf{N}^*$, $x \in \mathbf{R}$ *şi* $r \in \mathbf{C}$.

`Demonstraţie`. Deoarece funcţia de două variabile $u(r,x) = e^{rx}$ este indefinit derivabilă, rezultă că derivatele sale mixte, de orice ordin, coincid. Deci

$$\frac{d^k}{dr^k}\left(L_n\left[e^{rx}\right]\right) = L_n\left[\frac{d^k}{dr^k}\left(e^{rx}\right)\right]$$

şi deci

$$\frac{d^k}{dr^k}\left(e^{rx}K_n[r]\right) = L_n\left[x^k e^{rx}\right]$$

adică

$$\left(C_k^0 r^k K_n[r] + C_k^1 r^{k-1} K_n^{(1)}[r] + \cdots + C_k^k K_n^{(k)}[r]\right) e^{rx} = L_n\left[x^k e^{rx}\right]$$

ceea ce trebuia demonstrat. ∎

Observaţii 1)Funcţia polinomială $K_n[r]$ se numeşte polinomul caracteristic al ecuaţiei (3.19).

2)Ecuaţia

$$K_n[r] = 0;\ r \in \mathbf{C}$$

se numeşte ecuaţia caracteristică a ecuaţiei (3.19), iar rădăcinile ecuaţiei caracteristice se numesc rădăcini caracteristice.

3)Dacă r_0 este o rădăcină caracteristică atunci $y = e^{r_0 x}$ este o soluţie a ecuaţiei diferenţiale (3.19). Dacă rădăcina caracteristică r_0 este multiplă de ordinul m, adică anulează polinomul caracteristic şi derivatele sale până la ordinul $m-1$, deci

$$K_n[r_0] = K_n'[r_0] = \cdots = K_n^{(m-1)}[r_0] = 0,$$

atunci

$$y_1 = e^{r_0 x},\ y_2 = xe^{r_0 x},\ \ldots,\ y_m = x^{m-1}e^{r_0 x}$$

sunt soluţii ale ecuaţiei diferenţiale (3.19).

TEOREMA 3.10.3 *Dacă ecuaţia caracteristică a ecuaţiei diferenţiale (3.19) are rădăcinile distincte $r_1, \cdots, r_p$ cu ordinele de multiplicitate $m_1, \cdots, m_p$, unde $p \in \mathbf{N}^*$, $m_i \in \mathbf{N}^*$ pentru orice i şi $m_1 + \cdots + m_p = n$, atunci ecuaţia diferenţială (3.19) admite sistemul fundamental de soluţii*

$$\begin{array}{llll} e^{r_1 x}, & xe^{r_1 x}, & \cdots, & x^{m_1-1}e^{r_1 x} \\ e^{r_2 x}, & xe^{r_2 x}, & \cdots, & x^{m_2-1}e^{r_2 x} \\ & & & \\ e^{r_p x}, & xe^{r_p x}, & \cdots, & x^{m_p-1}e^{r_p x} \end{array}$$

Demonstraţie. Avem, prin ipoteză, egalităţile

$$K_n[r_i] = K_n^{(1)}[r_i] = \cdots = K_n^{(m_i-1)}[r_i] = 0$$

pentru $1 \leq i \leq p$. Aşadar, ţinând cont de teoremele (3.10.1) şi (3.10.2), avem

$$L_n[e^{r_i x}] = L_n[xe^{r_i x}] = \cdots = L_n\left[x^{m_i-1}e^{r_i x}\right] = 0$$

ceea ce înseamnă că cele n funcţii menţionate sunt soluţii pentru ecuaţia diferenţială (3.19). Mai avem de demonstrat liniar independenţa celor n soluţii. Dacă soluţiile din enunţul teoremei ar fi liniar dependente atunci ar exista un set de numere $\lambda_{i\,j}$, nu toate nule, care ar verifica relaţia

$$\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{m_j}\lambda_{i\,j}x^{i-1}e^{r_j x} = 0 \tag{3.20}$$

pentru orice $x \in \mathbf{R}$. Notând

$$P_j(x) = \sum_{i=1}^{m_j}\lambda_{i\,j}x^{i-1}$$

relaţia (3.20) se scrie

$$P_1(x).e^{r_1 x} + \cdots + P_p(x)e^{r_p x} = 0 \tag{3.21}$$

pentru orice $x \in \mathbf{R}$, unde cel puţin una din funcţiile polinomiale $P_j(x)$ nu este identic nulă. Presupunem, fără a afecta generalitatea, că funcţia polinomială $P_p(x)$ nu este identic nulă.

Ne vom folosi de faptul, uşor de verificat, că dacă $r \neq 0$ şi $P(x)$ este o funcţie polinomială neidentic nulă, atunci derivata de ordinul k, oricare ar fi $k \in \mathbf{N}$, are forma

$$\frac{d^k\left(P(x)e^{rx}\right)}{dx^k} = Q(x)e^{rx},$$

unde $Q(x)$ este o funcţie polinomială neidentic nulă, de acelaşi grad cu $P(x)$.

Relaţia (3.21) se poate scrie, înmulţind cu $e^{-r_1 x}$, sub forma

$$P_1(x) + P_2(x)e^{(r_2-r_1)x} + \cdots + P_p(x)e^{(r_p-r_1)x} = 0$$

pentru orice $x \in \mathbf{R}$. Derivând de m_1 ori obţinem o relaţie de forma

$$P_{21}(x)e^{(r_2-r_1)x} + P_{31}(x)e^{(r_3-r_1)x}\cdots + P_{p1}(x)e^{(r_p-r_1)x} = 0 \tag{3.22}$$

pentru orice $x \in \mathbf{R}$, unde $P_{p1}(x)$ este o funcţie polinomială neidentic nulă.

Relaţia (3.22) se poate scrie, înmulţind cu $e^{-(r_2-r_1)x}$, sub forma

$$P_{21}(x) + P_{31}(x)\,e^{(r_3-r_2)x} + \cdots + P_{p1}(x)\,e^{(r_p-r_2)x} = 0 \tag{3.23}$$

pentru orice $x \in \mathbf{R}$. Derivând de m_2 ori obţinem o relaţie de forma

$$P_{32}(x)\,e^{(r_3-r_2)x} + \cdots + P_{p2}(x)\,e^{(r_p-r_2)x} = 0,$$

pentru orice $x \in \mathbf{R}$, unde $P_{p2}(x)$ este o funcţie polinomială neidentic nulă. Continuând acest procedeu, ajungem la o relaţie de forma

$$P_{p,p-1}(x)\,e^{(r_p-r_{p-1})x} = 0$$

pentru orice $x \in \mathbf{R}$, unde $P_{p,p-1}(x)$ este o funcţie polinomială neidentic nulă. Înmulţind cu $e^{-(r_p-r_{p-1})x}$ obţinem relaţia

$$P_{p,p-1}(x) = 0,$$

pentru orice $x \in \mathbf{R}$, care arată că $P_{p,p-1}(x)$ este o funcţie polinomială identic nulă, ceea ce ne arată că am ajuns la o contradicţie. Aşadar cele n soluţii din enunţul teoremei sunt liniar independente. ■

TEOREMA 3.10.4 *Dacă* $\{y_1, \ldots, y_n\}$ *este un sistem fundamental de soluţii pentru ecuaţia (3.19), iar*

$$\begin{aligned} z_1 &= \alpha y_1 + \beta y_2 \\ z_2 &= \gamma y_1 + \delta y_2 \end{aligned}$$

unde $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbf{C}$, *atunci* $\{z_1, z_2, y_3, \ldots, y_n\}$ *este sistem fundamental de soluţii pentru ecuaţia (3.19) dacă şi numai dacă* $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$.

Demonstraţie. Ecuaţia

$$\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_3 y_3 + \cdots + \lambda_n y_n = 0; \ \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbf{C}$$

devine

$$\begin{aligned} &(\lambda_1\alpha + \lambda_2\gamma)\,y_1 + (\lambda_1\beta + \lambda_2\delta)\,y_2 + \\ &\quad + \lambda_3 y_3 + \cdots + \lambda_n y_n = 0; \qquad \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbf{C} \end{aligned}$$

din care rezultă

$$\begin{cases} \lambda_1\alpha + \lambda_2\gamma = 0 \\ \lambda_1\beta + \lambda_2\delta = 0 \\ \lambda_3 = \cdots = \lambda_n = 0 \end{cases}$$

Acest sistem admite numai soluţia banală, $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$, dacă şi numai dacă

$$\begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{vmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$$

Aşadar, mulţimea de soluţii $\{z_1, z_2, y_3, \ldots, y_n\}$ este liniar independentă, şi deci sistem fundamental de soluţii, dacă şi numai dacă $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$, ceea ce trebuia demonstrat. ■

TEOREMA 3.10.5 *Dacă $r_1 = \alpha + i\beta$ şi $r_2 = \alpha - i\beta$ sunt două rădăcini complexe conjugate ale ecuaţiei caracteristice ale ecuaţiei diferenţiale (3.19), cu ordinele de multiplicitate $m_1 = m_2 = m$, atunci, în sistemul fundamental de soluţii dat de teorema (3.10.3), putem înlocui soluţiile complexe*

$$e^{r_1 x},\ xe^{r_1 x},\ \ldots,\ x^{m-1}e^{r_1 x}$$

$$e^{r_2 x},\ xe^{r_2 x},\ \ldots,\ x^{m-1}e^{r_2 x}$$

cu soluţiile reale

$$e^{\alpha x}\cos\beta x,\ xe^{\alpha x}\cos\beta x,\ \ldots,\ x^{m-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$$

$$e^{\alpha x}\sin\beta x,\ xe^{\alpha x}\sin\beta x,\ \ldots,\ x^{m-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$$

şi setul astfel obţinut este deasemenea sistem fundamental de soluţii.

Demonstraţie. Putem înlocui perechea de soluţii

$$x^{j-1}e^{r_1 x},\ x^{j-1}e^{r_2 x}$$

cu perechea de soluţii

$$\frac{1}{2}x^{j-1}e^{r_1 x} + \frac{1}{2}x^{j-1}e^{r_2 x},\ \frac{1}{2i}x^{j-1}e^{r_1 x} - \frac{1}{2i}x^{j-1}e^{r_2 x}$$

pentru $1 \leq j \leq m$, fără a se modifica liniar independenţa sistemului de soluţii, deci fără modificarea caracterului de sistem fundamental de soluţii, deoarece se verifică condiţia din teorema precedentă: $\frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{2i} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2i} = -\frac{1}{2i} \neq 0$. Dar, ţinând cont de formula lui Euler

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

pentru orice număr θ, avem

$$e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)$$

$$e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x)$$

şi deci

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}x^{j-1}e^{r_1 x} + \frac{1}{2}x^{j-1}e^{r_2 x} &= \frac{1}{2}x^{j-1}\left(e^{(\alpha+i\beta)x} + e^{(\alpha-i\beta)x}\right) = \\ &= x^{j-1}e^{\alpha x}\cos\beta x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2i}x^{j-1}e^{r_1 x} - \frac{1}{2i}x^{j-1}e^{r_2 x} &= \frac{1}{2i}x^{j-1}\left(e^{(\alpha+i\beta)x} - e^{(\alpha-i\beta)x}\right) = \\ &= x^{j-1}e^{\alpha x}\sin\beta x\end{aligned}$$

pentru $1 \leq j \leq m$, ceea ce trebuia demonstrat. ■

3.10.2 Ecuaţia neomogenă

Putem determina soluţia generală a unei ecuaţii diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi, neomogenă, pornind de la sistemul fundamental de soluţii indicat de teorema (3.10.3) şi folosind metoda variaţiei constantelor pentru obţinerea unei soluţii particulare a ecuaţiei neomogene. Vom indica o altă metodă de găsire a unei soluţii particulare în cazul când termenul perturbator este un cvasipolinom.

TEOREMA 3.10.6 *Considerăm ecuaţia diferenţială liniară, cu coeficienţi constanţi reali, neomogenă*

$$L_n[y] = l(x)$$

în care termenul perturbator este cvasipolinomul

$$l(x) = e^{\alpha x}[P(x)\cos\beta x + Q(x)\sin\beta x],$$

unde α şi β sunt numere reale, iar $P(x)$ şi $Q(x)$ sunt funcţii polinomiale cu coeficienţi reali. În aceste condiţii ecuaţia considerată admite o soluţie particulară de forma

$$y_p = x^\rho e^{\alpha x}\left[\tilde{P}(x)\cos\beta x + \tilde{Q}(x)\sin\beta x\right]$$

unde $\tilde{P}(x)$ şi $\tilde{Q}(x)$ sunt funcţii polinomiale astfel încât

$$\deg\tilde{P}(x) = \deg\tilde{Q}(x) = \max\{\deg P(x), \deg Q(x)\},$$

iar ρ este un număr natural, numit indice de rezonanţă, definit astfel: $\rho = 0$ dacă $\alpha + i\beta$ nu este rădăcină a ecuaţiei caracteristice, şi $\rho = m$ dacă $\alpha + i\beta$ este rădăcină multiplă de ordinul m a ecuaţiei caracteristice.

Demonstraţie. Deoarece

$$\cos\beta x = \frac{1}{2}\left[e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}\right], \ \sin\beta x = \frac{1}{2i}\left[e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}\right]$$

rezultă că

$$y_p = x^\rho e^{(\alpha+i\beta)x} \cdot \frac{1}{2}\left[\tilde{P}(x) - i\tilde{Q}(x)\right] + x^\rho e^{(\alpha-i\beta)x} \cdot \frac{1}{2}\left[\tilde{P}(x) + i\tilde{Q}(x)\right]$$

şi

$$l(x) = e^{(\alpha+i\beta)x} \cdot \frac{1}{2}\left[P(x) - iQ(x)\right] + e^{(\alpha-i\beta)x} \cdot \frac{1}{2}\left[P(x) + iQ(x)\right]$$

Notăm

$$\begin{aligned} y_{p_1} &= x^\rho e^{(\alpha+i\beta)x} \cdot \frac{1}{2}\left[\tilde{P}(x) - i\tilde{Q}(x)\right] \\ y_{p_2} &= x^\rho e^{(\alpha-i\beta)x} \cdot \frac{1}{2}\left[\tilde{P}(x) + i\tilde{Q}(x)\right] \\ l_1(x) &= e^{(\alpha+i\beta)x} \cdot \frac{1}{2}\left[P(x) - iQ(x)\right] \\ l_2(x) &= e^{(\alpha-i\beta)x} \cdot \frac{1}{2}\left[P(x) + iQ(x)\right] \end{aligned}$$

Rezultă

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2} \text{ şi } l(x) = l_1(x) + l_2(x)$$

Observăm că

$$y_{p_2} = \bar{y}_{p_1} \text{ iar } l_2(x) = \overline{l_1(x)},$$

unde bararea superioară reprezintă conjugarea complexă. Dacă $L_n[y_{p_1}] = l_1(x)$ atunci

$$L_n[y_p] = L_n[y_{p_1} + y_{p_2}] = L_n[y_{p_1} + \bar{y}_{p_1}] =$$

$$= L_n[y_{p_1}] + L_n[\bar{y}_{p_1}] = L_n[y_{p_1}] + \overline{L_n[y_{p_1}]} =$$

$$= l_1(x) + \overline{l_1(x)} = l_1(x) + l_2(x) = l(x)$$

Deci este suficient să arătăm că se pot determina polinoamele $\tilde{P}(x)$ şi $\tilde{Q}(x)$ astfel încât $L_n[y_{p_1}] = l_1(x)$. Folosind formula (3.17) obţinem

$$L_n[y_{p_1}] = L_n\left[x^\rho e^{(\alpha+i\beta)x} \cdot \frac{1}{2}\left[\tilde{P}(x) - i\tilde{Q}(x)\right]\right] =$$

$$= \left\{ \sum_{k=0}^{n} \frac{K_n^{(k)} [\alpha + i\beta]}{k!} \left(x^\rho \cdot \frac{1}{2} \left[\tilde{P}(x) - i\tilde{Q}(x) \right] \right)^{(k)} \right\} e^{(\alpha+i\beta)x} =$$

$$= e^{(\alpha+i\beta)x} \cdot \frac{1}{2} [P(x) - iQ(x)]$$

adică

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{K_n^{(k)} [\alpha + i\beta]}{k!} \left(x^\rho \left[\tilde{P}(x) - i\tilde{Q}(x) \right] \right)^{(k)} = P(x) - iQ(x)$$

Dacă $\rho = 0$, adică dacă $\alpha + i\beta$ nu este rădăcină a polinomului caracteristic, atunci relaţia de mai sus devine

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{K_n^{(k)} [\alpha + i\beta]}{k!} \left(\tilde{P}(x) - i\tilde{Q}(x) \right)^{(k)} = P(x) - iQ(x)$$

şi reprezintă egalitatea a două funcţii polinomiale de acelaşi grad. Coeficienţii funcţiilor polinomiale $\tilde{P}(x)$ şi $\tilde{Q}(x)$ se obţin prin metoda identificării coeficienţilor. Dacă $\alpha + i\beta$ este rădăcină multiplă de ordinul m a polinomului caracteristic, adică $\rho = m$, atunci

$$K_n [\alpha + i\beta] = K_n^{(1)} [\alpha + i\beta] = \cdots = K_n^{(m-1)} [\alpha + i\beta] = 0,$$

iar $K_n^{(m)} [\alpha + i\beta] \neq 0$ şi rezultă

$$\sum_{k=m}^{n} \frac{K_n^{(k)} [\alpha + i\beta]}{k!} \left(x^m [\tilde{P}(x) - i\tilde{Q}(x)] \right)^{(k)} = P(x) - iQ(x),$$

care reprezintă egalitatea a două funcţii polinomiale de acelaşi grad. Ca şi în cazul precedent, coeficienţii funcţiilor polinomiale $\tilde{P}(x)$ şi $\tilde{Q}(x)$ se obţin prin metoda identificării coeficienţilor. ■

Remarcă Practic se procedează astfel:

1. Se determină elementele definitorii ale cvasipolinomului $l(x) : \alpha, \beta, P$ şi Q.

2. Se verifică dacă numărul $\alpha + i\beta$ este rădăcină a ecuaţiei caracteristice, determinându-se indicele de rezonanţă ρ.

3. Se compune forma soluţiei particulare, ca în teoremă:

$$y_p = x^\rho e^{\alpha x} \left[\tilde{P}(x) \cos \beta x + \tilde{Q}(x) \sin \beta x \right],$$

unde funcţiile polinomiale $\tilde{P}(x)$ şi $\tilde{Q}(x)$ au coeficienţii nedeterminaţi.

4. Se calculează derivatele până la ordinul n ale lui y_p şi se compune identitatea

$$L_n[y_p] = l(x)$$

Ţinând cont că un set de funcţii de forma

$$\left\{1, x, x^2, \cdots, e^{\alpha x}, xe^{\alpha x}, x^2 e^{\alpha x}, \cdots\right\}$$

este liniar independent, se identifică coeficienţii şi se obţine un sistem algebric din care se determină coeficienţii funcţiilor polinomiale $\tilde{P}(x)$ şi $\tilde{Q}(x)$.

3.11 Ecuaţia diferenţială a lui Euler

Ecuaţia diferenţială a lui Euler este o ecuaţie diferenţială liniară de forma

$$a_0 x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} x \frac{dy}{dx} + a_n y = l(x) \tag{3.24}$$

în care $n \in \mathbf{N}^*$, $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sunt numere reale, $a_0 \neq 0$, iar termenul perturbator l este o funcţie reală, continuă, definită pe un interval de numere reale pozitive.

TEOREMA 3.11.1 *Ecuaţia diferenţială a lui Euler se reduce la o ecuaţie diferenţială liniară cu coeficienţi constanţi prin schimbarea de variabilă $x = e^t$.*

`Demonstraţie.` Vom demonstra că pentru fiecare număr natural k, există numerele $\alpha_{k1}, \alpha_{k2}, \ldots, \alpha_{kk}$ astfel încât

$$\frac{d^k y}{dx^k} = \left(\alpha_{k1} \frac{dy}{dt} + \alpha_{k2} \frac{d^2 y}{dt^2} + \cdots + \alpha_{kk} \frac{d^k y}{dt^k}\right) e^{-kt}$$

Folosim principiul inducţiei matematice. Avem

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} e^{-t} = \alpha_{11} \frac{dy}{dt} e^{-t}$$

unde $\alpha_{11} = 1$. Deci pentru $k = 1$ proprietatea se adevereşte. Presupunem că proprietatea se adevereşte pentru un anumit număr $k \geq 1$ şi vom demonstra că proprietatea este adevărată pentru numărul $k + 1$. Avem

$$\begin{aligned}
\frac{d^{k+1} y}{dx^{k+1}} &= \frac{d}{dx}\left[\left(\alpha_{k1} \frac{dy}{dt} + \alpha_{k2} \frac{d^2 y}{dt^2} + \cdots + \alpha_{kk} \frac{d^k y}{dt^k}\right) e^{-kt}\right] = \\
&= \frac{d}{dt}\left[\left(\alpha_{k1} \frac{dy}{dt} + \alpha_{k2} \frac{d^2 y}{dt^2} + \cdots + \alpha_{kk} \frac{d^k y}{dt^k}\right) e^{-kt}\right] e^{-t} = \\
&= \left(\alpha_{k1} \frac{d^2 y}{dt^2} + \alpha_{k2} \frac{d^3 y}{dt^3} + \cdots + \alpha_{kk} \frac{d^{k+1} y}{dt^{k+1}}\right) e^{-(k+1)t} - \\
&\quad -k\left(\alpha_{k1} \frac{dy}{dt} + \alpha_{k2} \frac{d^2 y}{dt^2} + \cdots + \alpha_{kk} \frac{d^k y}{dt^k}\right) e^{-(k+1)t}
\end{aligned}$$

Notând

$$\begin{aligned}
\alpha_{k+1,1} &= -k\alpha_{k1}, \\
\alpha_{k+1,2} &= \alpha_{k1} - k\alpha_{k2}, \\
\\
\alpha_{k+1,k} &= \alpha_{k,k-1} - k\alpha_{kk}, \\
\alpha_{k+1,k+1} &= \alpha_{kk}
\end{aligned}$$

obţinem

$$\frac{d^{k+1}y}{dx^{k+1}} = \left(\alpha_{k+1,1}\frac{dy}{dt} + \alpha_{k+1,2}\frac{d^2y}{dt^2} + \cdots + \alpha_{k+1,k+1}\frac{d^{k+1}y}{dt^{k+1}}\right)e^{-(k+1)t}$$

ceea ce arată că proprietatea este adevărată pentru numărul $k+1$. Conform principiului inducţiei matematice, proprietatea este adevărată pentru orice număr natural $k \geq 1$. Folosind proprietatea demonstrată avem

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} a_{n-k}x^k\frac{d^ky}{dx^k} &= \sum_{k=1}^{n} a_{n-k}e^{kt}\left(\sum_{j=1}^{k}\alpha_{k,j}\frac{d^jy}{dt^j}\right)e^{-kt} + a_ny = \\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=j}^{n} a_{n-k}\cdot\alpha_{k,j}\right)\frac{d^jy}{dt^j} + a_ny
\end{aligned}$$

Notând $b_{n-j} = \sum_{k=j}^{n} a_{n-k}\cdot\alpha_{k,j}$, pentru $1 \leq j \leq n$, şi $b_n = a_n$, rezultă

$$\sum_{k=0}^{n} a_{n-k}x^k\frac{d^ky}{dx^k} = \sum_{j=0}^{n} b_{n-j}\frac{d^jy}{dt^j}$$

Ecuaţia lui Euler (3.24) devine o ecuaţie diferenţială cu coeficienţi constanţi

$$b_0\frac{d^ny}{dt^n} + b_1\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots + b_{n-1}\frac{dy}{dt} + b_ny = l\left(e^t\right) \tag{3.25}$$

■

Consecinţe A) Notăm

$$E_n[y] = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}x^k\frac{d^ky}{dx^k}$$

şi

$$L_n[y] = \sum_{j=0}^{n} b_{n-j}\frac{d^jy}{dt^j}$$

Am stabilit egalitatea

$$E_n[y(x)] = L_n\left[y\left(e^t\right)\right]$$

din care rezultă că soluţiei $y = u(x)$, a ecuaţiei lui Euler (3.24), îi corespunde soluţia $y = u(e^t)$, a ecuaţiei transformate (3.25). Reciproc, soluţiei $y = v(t)$, a ecuaţiei (3.25), îi corespunde soluţia $y = v(\ln x)$. În particular rezultă egalitatea

$$E_n[x^r] = L_n[e^{rt}]$$

pentru $x = e^t$.

B) Avem

$$E_n[x^r] = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} x^k \frac{d^k(x^r)}{dx^k} =$$

$$= \left[\sum_{k=1}^{n} a_{n-k} \cdot r(r-1)\cdots(r-k+1) + a_n\right] x^r$$

Funcţia polinomială

$$\phi_n[r] = \sum_{k=1}^{n} a_{n-k} \cdot r(r-1)\cdots(r-k+1) + a_n =$$

$$= a_n + a_{n-1}r + \cdots + a_0 r(r-1)\cdots(r-n+1)$$

se numeşte polinomul caracteristic al ecuaţiei lui Euler. Deci

$$E_n[x^r] = \phi_n[r]\, x^r$$

Ecuaţia

$$\phi_n[r] = 0;\ r \in \mathbf{C}$$

se numeşte ecuaţia caracteristică a ecuaţiei lui Euler, iar rădăcinile acestei ecuaţii se numesc rădăcini caracteristice ale ecuaţiei lui Euler. Se observă imediat că dacă r_0 este o rădăcină caracteristică a ecuaţiei lui Euler, atunci $y = x^{r_0}$ este o soluţie a ecuaţiei lui Euler. Pe de altă parte avem

$$L_n[e^{rt}] = K_n[r]\, e^{rt}$$

unde

$$K_n[r] = \sum_{j=0}^{n} b_{n-j} r^j = b_0 + b_1 r + \cdots + b_n r^n$$

este polinomul caracteristic al ecuaţiei diferenţiale $L_n[y] = 0$. Deci

$$\phi_n[r]\, x^r = K_n[r]\, e^{rt}$$

pentru $x = e^t$, din care deducem că $\phi_n[r] = K_n[r]$.

C) Rezolvarea ecuaţiei lui Euler (3.24) se face prin intermediul ecuaţiei diferenţiale cu coeficienţi constanţi (3.25), dar fără a face calculele efective prin care se obţine această ecuaţie. Determinarea sistemului fundamental de soluţii se face astfel:

Observaţie. 1. Formăm polinomul caracteristic $\phi_n[r]$ şi rezolvăm ecuaţia caracteristică.

2. Să presupunem că am obţinut rădăcinile caracteristice $r_1, \ldots, r_p$ cu ordinele respective de multiplicitate $m_1, \ldots, m_p$, ($m_1 + \cdots + m_p = n$). Deoarece aceleaşi rădăcini caracteristice are şi ecuaţia cu coeficienţi constanţi, rezultă că această ecuaţie are sistemul fundamental de soluţii

$$\begin{array}{lll} e^{r_1 t}, & te^{r_1 t}, & \quad , t^{m_1-1}e^{r_1 t}, \\ e^{r_2 t}, & te^{r_2 t}, & \quad , t^{m_2-1}e^{r_2 t}, \\ \vdots & & \\ e^{r_p t}, & te^{r_p t}, & \quad , t^{m_p-1}e^{r_p t} \end{array}$$

Sistemul fundamental de soluţii, corespunzător ecuaţiei lui Euler, se obţine înlocuind pe t cu $\ln x$:

$$\begin{array}{lll} x^{r_1}, & x^{r_1}\ln x, & \quad , x^{r_1}(\ln x)^{m_1-1}, \\ x^{r_2}, & x^{r_2}\ln x, & \quad , x^{r_2}(\ln x)^{m_2-1}, \\ & & \\ x^{r_p}, & x^{r_p}\ln x, & \quad ,, x^{r_p}(\ln x)^{m_p-1} \end{array}$$

3. Dacă toate rădăcinile caracteristice sunt simple, atunci sistemul fundamental de soluţii este

$$x^{r_1},\ x^{r_2},\ \ldots,\ x^{r_n}$$

4. Dacă $r_1 = \alpha + i\beta$ şi $r_2 = \alpha - i\beta$, şi $m_1 = m_2 = m$, atunci în locul soluţiilor complexe

$$\begin{array}{lll} x^{r_1}, & x^{r_1}\ln x, & \quad , x^{r_1}(\ln x)^{m_1-1}, \\ x^{r_2}, & x^{r_2}\ln x, & \quad , x^{r_2}(\ln x)^{m_2-1}, \end{array}$$

se consideră soluţiile reale

$$\begin{array}{lll} x^{\alpha}\cos(\beta\ln x), & (\ln x)x^{\alpha}\cos(\beta\ln x), & \quad , (\ln x)^{m-1}x^{\alpha}\cos(\beta\ln x), \\ x^{\alpha}\sin(\beta\ln x), & (\ln x)x^{\alpha}\sin(\beta\ln x), & \quad , (\ln x)^{m-1}x^{\alpha}\sin(\beta\ln x) \end{array}$$

Aceste soluţii corespund soluţiilor ecuaţiei cu coeficienţi constanţi:

$$\begin{array}{lll} e^{\alpha t}\cos(\beta t), & te^{\alpha t}\cos(\beta t), & \quad , t^{m-1}e^{\alpha t}\cos(\beta t), \\ e^{\alpha t}\sin(\beta t), & te^{\alpha t}\sin(\beta t), & \quad , t^{m-1}e^{\alpha t}\sin(\beta t) \end{array}$$

D) Pentru determinarea soluţiei generale a ecuaţiei neomogene ne bazăm pe sistemul fundamental de soluţii obţinut mai sus şi, în general, folosim metoda variaţiei constantelor pentru a găsi o soluţie particulară. Dacă termenul perturbator are forma

$$l(x) = l\left(e^t\right) = e^{\alpha t}\left(P(t)\cos\beta t + Q(t)\sin\beta t\right) =$$

$$= x^{\alpha}\left(P(\ln x)\cos(\beta\ln x) + Q(\ln x)\sin(\beta\ln x)\right)$$

unde α şi β sunt numere reale, iar $P(t)$ şi $Q(t)$ sunt funcţii polinomiale, atunci putem căuta o soluţie particulară y_p de aceeaşi formă cu termenul perturbator, adică

$$y_p = t^{\rho}e^{\alpha t}\left(\tilde{P}(t)\cos\beta t + \tilde{Q}(t)\sin\beta t\right) =$$

$$= (\ln x)^{\rho} x^{\alpha}\left[\tilde{P}(\ln x)\cos(\beta\ln x) + \tilde{Q}(\ln x)\sin(\beta\ln x)\right]$$

unde ρ este indicele de rezonanţă ($\rho = 0$ dacă $\alpha + i\beta$ nu este rădăcină caracteristică, şi $\rho = m$ dacă $\alpha + i\beta$ este rădăcină caracteristică multiplă de ordinul m), iar $\tilde{P}(t)$ şi $\tilde{Q}(t)$ sunt funcţii polinomiale de grade egale cu maximul dintre gradele lui $P(t)$ şi $Q(t)$.

3.12 Exerciţii

1. Arătaţi că ecuaţia $xy'' - (x+3)y' + y = 0$ are soluţiile $y_1 = x + 3$ şi $y_2 = e^x\left(x^2 - 4x + 6\right)$, care formează un sistem fundamental de soluţii pe orice interval care nu conţine pe 0.

2. Să se integreze ecuaţia neomogenă $y'' + y = x^3$, observînd că ecuaţia omogenă are soluţiile $\cos x$ şi $\sin x$, care formează sistem fundamental de soluţii.

3. Să se integreze ecuaţia $xy'' - (x+3)y' + y = 0$, definită pe orice interval care nu conţine pe 0, observînd că admite soluţia $y_1 = x + 3$.

4. Considerăm ecuaţia $xy'' - (x+3)y' + y = 0$.

   (a) Să se arate că ecuaţia are o soluţie polinom în x;

   (b) Să se determine soluţia generală;

(c) Să se determine soluţia cu condiţiile $y(2) = 17$, $y'(2) = 8$.

5. Să se integreze ecuaţia $x(x-1)y'' - (2x-1)y' + 2y = e^x(x^2 - 3x + 3)$, ştiind că ecuaţia omogenă admite o soluţie de forma $y = Ax + B$, unde A şi B sunt constante.

6. Să se integreze ecuaţiile diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi omogene:

   (a) $y''' - 7y'' + 14y' - 8y = 0;$

   (b) $y''' - 3y'' + 4y' - 2y = 0;$

   (c) $y^{IV} + y = 0;$

   (d) $y^{(6)} - y^{(5)} - 4y^{(4)} + 2y''' + 5y'' - y' - 2y = 0;$

   (e) $y^{(6)} - 4y^{(5)} + 10y^{(4)} - 8y''' + 17y'' - 4y' + 8y = 0;$

7. Să se integreze ecuaţiile diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi neomogene:

   (a) $y'' - 4y' + 8y = 8x^2 - 16x + 14;$

   (b) $y'' - 5y' + 6y = xe^x;$

   (c) $y''' - 4y'' = 8x^2 + 3;$

   (d) $y'' - 5y' + 6y = xe^{2x};$

   (e) $y'' - 5y' + 6y = x\sin 2x;\ y'' - 4y = x\sin x;$

8. Să se integreze următoarele ecuaţii diferenţiale de ordin superior:

   (a) $x'' - 5x' + 4x = 0;\ x'' + 2x' + x = 0; x'' + 4x = 0$

   (b) $x'' - 4x = t^2e^{2t};\ x'' + 9x = \cos 2t;\ x'' + x = \dfrac{1}{\sin t}$

   (c) $x'' + x = 2t\cos t\cos 2t;\ x'' - 4x' + 4x = te^{2t};\ x'' - 2x = 4t^2e^{t^2}$

   (d) $x''' - 13x'' + 12x' = 0;\ x''' - x' = 0;\ x''' + x = 0$

   (e) $x^{IV} + 4x = 0;\ x''' - 3x'' + 3x' - x = t;\ x^{IV} + 2x'' + x = 0$

   (f) $x^{IV} - 2x''' + x'' = e^t;\ x''' + x'' + x' + x = te^t;\ x''' + 6x'' + 9x' = t$

9. Să se integreze următoarele ecuaţii diferenţiale de tip Euler:

   (a) $t^2x'' + 3tx' + x = 0;\ t^2x'' - tx' - 3x = 0;$

   (b) $t^2x'' + tx' + 4x = 0;\ t^3x''' - 3t^2x'' + 6tx' - 6x = 0;$

(c) $(3t+2)\,x'' + 7x' = 0$; $x'' = \dfrac{2x}{t^2}$;

(d) $x'' + \dfrac{x'}{t} + \dfrac{x}{t^2} = 0$; $t^2x'' - 4tx' + 6x = t$;

(e) $(1+t)^2\,x'' - 3\,(1+t)\,x' + 4x = (1+t)^3$; $t^2x'' - tx' + x = 2t$;

(f) $x^2y'' - 3xy' + 3y = 0$;

(g) $x^3y''' - 3x^2y'' + 8xy' - 20y = 0$;

(h) $x^3y''' + \frac{1}{3}x^2y'' - 3xy' + \frac{16}{3}y = 0$;

(i) $x^4y^{(4)} + 14x^3y''' + 73x^2y'' + 155xy' + 169y = 0$;

(j) $x^3y''' - 9x^2y'' + 36xy' - 60y = 0$;

(k) Să se integreze, cu metoda aproximaţiilor succesive, ecuaţia diferenţială $y'' - xy = 0$, cu condiţiile $y\,(0) = 1$ şi $y'\,(0) = 0$;

Capitolul 4

Aplicaţii ale principiului contracţiei

4.0.1 Principiul contracţiei

DEFINIŢIA 4.0.1 *Fie R un spaţiu metric cu distanţa ρ. O aplicaţie $A : R \to R$ se numeşte comtracţie dacă există $\alpha \in (0,1)$ încât*

$$\rho(Ax, Ay) \leq \alpha\rho(x, y), \tag{4.1}$$

pentru orice $x, y \in R$.

Observaţie. Toate aplicaţiile contracţii sunt aplicaţii continue. Într-adevăr, din $x_n \to x$ şi din (4.1) rezultă $Ax_n \to Ax$.

DEFINIŢIA 4.0.2 *Spunem că $x \in R$ este un punct fix al aplicaţiei $A : R \to R$ dacă $Ax = x$.*

TEOREMA 4.0.1 *Orice contracţie definită pe un spaţiu metric complet admite un punct fix unic.*

Demonstraţie: Fie $x_0 \in R$ un punct arbitrar. Notăm

$$x_{n+1} = Ax_n, \text{ pentru orice } n \in \mathbf{N} \tag{4.2}$$

Vom arăta că şirul (x_n) este fundamental. Într-adevăr, pentru $m \geq n \geq 1$ avem

$$\rho(x_n, x_m) = \rho(Ax_{n-1}, Ax_{m-1}) \leq \alpha\rho(x_{n-1}, x_{m-1})$$

Prin urmare

$$\begin{cases} \rho(x_n, x_m) & \leq & \alpha\rho(x_{n-1}, x_{m-1}) \\ \rho(x_{n-1}, x_{m-1}) & \leq & \alpha\rho(x_{n-2}, x_{m-2}) \\ & & \\ \rho(x_1, x_{m-n+1}) & \leq & \alpha\rho(x_0, x_{m-n}) \end{cases}$$

Înmulţind aceste relaţii obţinem

$$\rho(x_n, x_m) \leq \alpha^n \rho(x_0, x_{m-n})$$

Pe de altă parte avem

$$\begin{aligned} \rho(x_0, x_{m-n}) & \leq \rho(x_0, x_1) + \rho(x_1, x_2) + \cdots + \rho(x_{m-n-1}, x_{m-n}) \leq \\ & \leq \rho(x_0, x_1) + \alpha\rho(x_0, x_1) + \cdots + \alpha^{m-n-1}\rho(x_0, x_1) = \\ & = \rho(x_0, x_1)\left[1 + \alpha + \cdots + \alpha^{m-n-1}\right] \leq \rho(x_0, x_1)\frac{1}{1-\alpha} \end{aligned}$$

Deci

$$\rho(x_n, x_m) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x_0, x_1) \tag{4.3}$$

Cum $\alpha < 1$ rezultă că $\alpha^n \to 0$. Mai precis, pentru orice $\varepsilon > 0$ există $N(\varepsilon) \in \mathbf{N}$ astfel încât

$$\frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x_0, x_1) < \varepsilon$$

adică $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$, pentru orice $m \geq n \geq N(\varepsilon)$. Deci şirul (x_n) este fundamental. Deoarece spaţiul R este complet rezultă că şirul (x_n) este convergent. Notăm

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n$$

În virtutea continuităţii lui A şi a relaţiei (4.2) rezultă că $Ax = x$. Unicitatea punctului x rezultă astfel: dacă ar mai exista un punct fix y, atunci

$$\rho(x, y) = \rho(Ax, Ay) \leq \alpha\rho(x, y)$$

din care ar rezulta $\alpha \geq 1$, contrar cu ipoteza $\alpha < 1$. ■

Observaţie. Se spune că şirul (x_n) definit prin (4.2) este şirul aproximaţiilor succesive ale lui x. Din relaţia (4.3), făcând $m \to \infty$, obţinem

$$\rho(x_n, x) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x_0, x_1)$$

care evaluează eroarea în aproximarea $x \simeq x_n$. Modul în care s-a obţinut punctul fix x se numeşte metoda aproximaţiilor succesive.

4.0.2 Problema Cauchy pentru ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi

TEOREMA 4.0.2 *Considerăm ecuaţia diferenţială*

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \tag{4.4}$$

şi condiţia iniţială

$$y(x_0) = y_0 \tag{4.5}$$

unde funcţia $f(x,y)$ *este definită într-un domeniu plan* G *care conţine punctul* (x_0, y_0) *şi verifică în acest domeniu condiţia*

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq M|y_1 - y_2| \tag{4.6}$$

pentru orice $(x,y_1) \in G$ *şi* $(x,y_2) \in G$, *numită condiţia lui Lipschitz în raport cu* y. *Atunci există o soluţie*

$$y = y(x), \ x \in I$$

unde I *este un interval real de forma* $[x_0 - d, x_0 + d]$, *a ecuaţiei (4.4), care verifică condiţia iniţială (4.5).*

Demonstraţie. Ecuaţia (4.4) cu condiţia iniţială (4.5) este echivalentă cu ecuaţia integrală

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt \tag{4.7}$$

Datorită continuităţii lui f vom avea $|f(x,y)| < K$ pentru un anumit K, într-un domeniu $G' \subset G$ care conţine pe (x_0, y_0). Alegem $d > 0$ cu proprietăţile:

(a) $(x,y) \in G'$ dacă $|x - x_0| \leq d$, $|y - y_0| \leq Kd$,

(b) $Md < 1$.

Notăm $I = [x_0 - d, x_0 + d]$. Desemnăm prin C^* spaţiul funcţiilor reale continue y, definite pe I şi astfel încât $|y(x) - y_0| \leq Kd$, dotat cu metrica

$$\rho(y_1, y_2) = \max_{x \in I} |y_1(x) - y_2(x)|$$

unde $y_1, y_2 \in C^*$. Spaţiul C^* este complet, ca subspaţiu închis al spaţiului complet al tuturor funcţiilor reale, definite şi continue pe I. Considerăm aplicaţia

$$A : C^* \to C^*$$

definită $Ay = z$, unde

$$z(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt$$

pentru $x \in I$. Aceasta este o contracţie a acestui spaţiu. Într-adevăr,

$$|z_1(x) - z_2(x)| \leq \left| \int_{x_0}^{x} [f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))]\, dt \right| \leq Md \max_{x \in I} |y_1(x) - y_2(x)|$$

Cum $Md < 1$ rezultă că A este contracţie. În concluzie putem spune că există o unică funcţie $y \in C^*$ încât $Ay = y$, deci care verifică ecuaţia (4.4) şi condiţia (4.5). ■

4.0.3 Problema Cauchy pentru sisteme diferenţiale de ordinul întâi

TEOREMA 4.0.3 *Considerăm sistemul de ecuaţii diferenţiale*

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1\left(x, \dfrac{dy_1}{dx}, \cdots, \dfrac{dy_n}{dx}\right) \\ \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n\left(x, \dfrac{dy_1}{dx}, \cdots, \dfrac{dy_n}{dx}\right) \end{cases} \tag{4.8}$$

şi condiţiile iniţiale

$$\begin{cases} y_1(x_0) = y_{10} \\ \\ y_n(x_0) = y_{n0} \end{cases} \tag{4.9}$$

unde funcţiile f_i, $1 \leq i \leq n$, sunt definite şi continue într-un domeniu G din $\mathbf{R}^{n+1}$ care conţine punctul $(x_0, y_{10}, ..., y_{n0})$, şi verifică condiţia lui Lipschitz

$$\left| f_i\left(x, y_1^1, ..., y_n^1\right) - f_i\left(x, y_1^2, ..., y_n^2\right) \right| \leq M \cdot \max_{1 \leq j \leq n} \left| y_j^1 - y_j^2 \right| \tag{4.10}$$

pentru orice $\left(x, y_1^1, ..., y_n^1\right), \left(x, y_1^2, ..., y_n^2\right) \in G$. În aceste condiţii există o singură soluţie a sistemului (4.8), definită pe un interval de forma $I = [x_0 - d, x_0 + d]$, şi care verifică condiţiile iniţiale (4.9).

Demonstraţie: Sistemul (4.8) şi condiţiile (4.9) sunt echivalente cu sistemul de relaţii, numit sistem de ecuaţii integrale

$$\begin{cases} y_1(x) = y_{10} + \int_{x_0}^{x} f_1(t, y_1(t), \cdots, y_n(t))\, dt \\ \\ y_n(x) = y_{n0} + \int_{x_0}^{x} f_n(t, y_1(t), \cdots, y_n(t))\, dt \end{cases} \tag{4.11}$$

În baza continuităţii, funcţiile f_i sunt mărginite într-un domeniu $G' \subset G$ ce conţine pe $(x_0, y_{10}, ..., y_{n0})$, adică există o constantă K astfel încât

$$|f_i(x, y_1, ..., y_n)| \leq K \tag{4.12}$$

pentru orice $(x, y_1, ..., y_n) \in G'$, şi $1 \leq i \leq n$. Alegem pe d astfel încât

(a) $(x, y_1, ..., y_n) \in G'$ dacă $|x - x_0| \leq d$, şi $|y_i - y_{i0}| \leq Kd$ pentru $1 \leq i \leq n$,

(b) $Md < 1$.

Considerăm spaţiul C_n^* având ca elemente sisteme de forma $y = (y_1, ..., y_n)$, unde y_i sunt funcţii reale, definite şi continue pe segmentul $I = [x_0 - d, x_0 + d]$ şi astfel încât

$$|y_i(x) - y_{i0}| \leq Kd \tag{4.13}$$

Vom defini o metrică pe C_n^* punând

$$\rho(y, z) = \max_{x \in I, 1 \leq i \leq n} |y_i(x) - z_i(x)|$$

pentru orice $y, z \in C_n^*$. Se ştie că spaţiul astfel definit este complet.

Considerăm aplicaţia $A : C_n^* \to C_n^*$, definită prin $Ay = z$, unde $z = (z_1, ..., z_n)$ şi

$$z_i(x) = y_{i0} + \int_{x_0}^{x} f_i(t, y_1(t), ..., y_n(t))\, dt,$$

pentru $y \in C_n^*$. Cu ajutorul lui A, sistemul de ecuaţii integrale (4.11) se poate scrie sub forma

$$Ay = y, \ y \in C_n^*$$

Vom arăta că A este o contracţie a spaţiului C_n^* în el însuşi. Într-adevăr, pentru

$$\begin{aligned} y^1 &= (y_1^1, \cdots, y_n^1) \in C_n^*, z^1 = (z_1^1, \cdots, z_n^1) = Ay^1, \\ y^2 &= (y_1^2, \cdots, y_n^2) \in C_n^*, z^2 = (z_1^2, \cdots, z_n^2) = Ay^2, \end{aligned}$$

avem

$$z_i^1(x) - z_i^2(x) = \int_{x_0}^{x} \left[f_i\left(t, y_1^1(t), ..., y_n^1(t)\right) - f_i\left(t, y_1^2(t), ..., y_n^2(t)\right) \right] dt$$

şi în consecinţă

$$\begin{aligned} \rho(Ay^1, Ay^2) &= \max_{x \in I, 1 \leq i \leq n} \left| z_i^1(x) - z_i^2(x) \right| \leq \\ &\leq Md \cdot \max_{x \in I, 1 \leq i \leq n} \left| y_i^1(x) - y_i^2(x) \right| = Md \cdot \rho(y^1, y^2) \cdot \end{aligned}$$

pentru orice $y^1, y^2 \in C_n^*$. Deoarece $Md < 1$ rezultă că aplicaţia A este o contracţie. Faptul că $A(C_n^*) \subset C_n^*$ rezultă din continuitatea funcţiei $z = Ay$ şi din evaluarea

$$|z_i(x) - y_{i0}| = \left| \int_{x_0}^{x} f_i(t, y_1(t), ..., y_n(t)) \right| \leq Kd$$

pentru orice $x \in I$ şi $1 \leq i \leq n$. În consecinţă ecuaţia operatorială $Ay = y$ admite o soluţie unică în C_n^*. Deci sistemul de ecuaţii integrale (4.11) admite soluţie unică, adică problema Cauchy (4.8, 4.9) admite soluţie unică. ■

Capitolul 5

Exemple de ecuaţii diferenţiale

5.1 Reguli generale pentru elaborarea modelelor matematice ale proceselor de evoluţie.

Considerăm un proces de evoluţie bine cunoscut prin legi cantitative şi calitative.

a) Să notăm variabilele (sau parametrii) de stare, care definesc evoluţia procesului (coordonatele poziţiei, vitezei, temperatura, volumul, etc.), prin $x_1, \cdots, x_n$. Vom nota

$$\vec{x}(t) = (x_1(t), \cdots, x_n(t))$$

vectorul de stare al sistemului la momentul $t \in \mathbf{R}$. Vectorul $\vec{x}(t)$ reprezintă modelul matematic al procesului considerat şi adesea este identificat cu procesul.

b) Diferenţa $\vec{x}(t+\tau) - \vec{x}(t)$, unde $\tau > 0$, se numeşte variaţia vectorului de stare pe intervalul $[t, t+\tau]$, iar raportul

$$\frac{\vec{x}(t+\tau) - \vec{x}(t)}{\tau}$$

se numeşte viteza medie de variaţie a vectorului de stare pe intervalul $[t, t+\tau]$. Presupunem în continuare că, utilizînd legile procesului, se poate evalua viteza medie menţionată sub forma

$$\frac{\vec{x}(t+\tau) - \vec{x}(t)}{\tau} = \vec{F}(t, \tau, x(t), x(t+\tau))$$

unde $\vec{F}$ este o funcţie vectorială determinată practic de cunoaşterea procesului. Dacă există $\lim_{\tau \to 0} \vec{F}(t, \tau, x(t), x(t+\tau))$, atunci această limită se numeşte viteza de variaţie a vectorului de stare (sau a procesului) la momentul t, iar procesul se numeşte diferenţiabil. Să notăm cu $\vec{f}(t, x(t))$ viteza de variaţie a vectorului de stare la momentul t, deci

$$\lim_{\tau \to 0} \vec{F}(t, \tau, \vec{x}(t), \vec{x}(t+\tau)) = \vec{f}(t, \vec{x}(t))$$

Atunci rezultă că există şi $\lim_{\tau \to 0} \dfrac{\vec{x}(t+\tau) - \vec{x}(t)}{\tau}$ care, după cum se ştie, se notează prin $\dfrac{d\vec{x}(t)}{dt}$. Aşadar ajungem la relaţia $\dfrac{d\vec{x}(t)}{dt} = \vec{f}(t, \vec{x}(t))$, ceea ce înseamnă că vectorul de stare verifică ecuaţia diferenţială

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(t, \vec{x})$$

numită ecuaţia diferenţială a procesului considerat. Această ecuaţie diferenţială poate fi interpretată astfel: dacă se cunoaşte viteza de variaţie a unui proces diferenţiabil şi starea procesului la un moment t_0 atunci se poate determina evoluţia procesului în momentele $t \geq t_0$.

Pe de altă parte, ecuaţia diferenţială a unui proces este, de fapt, un sistem de ecuaţii diferenţiale, dacă sistemul are mai multe variabile de stare. Dacă $\vec{f}$ are componentele reale $f_1, \cdots, f_n$ atunci sistemul diferenţial al procesului are forma

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, \cdots, x_n) \\ \\ \dfrac{dx_n}{dt} = f(t, x_1, \cdots, x_n) \end{cases}$$

5.2 Ecuaţii diferenţiale în mecanică.

Considerăm procesul care constă în mişcarea unui punct material M de masă m sub acţiunea unei forţe $\vec{F}$. Newton a introdus noţiunile de viteză momentană $\vec{v}$ şi de acceleraţie momentană $\vec{a}$ ale mişcării unui punct material. Modelul matematic propus de Newton pentru acest proces constă în ecuaţia

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

cunoscut sub numele de Principiul II al Mecanicii sau Legea a doua a lui Newton.

Variabilele de stare ale acestui proces sunt coordonatele x_1, x_2 şi x_3 ale poziţiei pe care o ocupă punctul M în spaţiul raportat la un sistem cartezian de coordonate.

Notăm $\vec{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ vectorul de poziţie al punctului M la momentul t. Vectorul $\vec{x}(t)$ se mai poate scrie şi sub forma

$$\vec{x}(t) = x_1(t)\vec{e}_1 + x_2(t)\vec{e}_2 + x_3(t)\vec{e}_3$$

unde $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ şi $\vec{e}_3$ sunt versorii axelor de coordonate. Presupunem că funcţiile $t \to x_i(t)$ sunt funcţii reale cu valori reale, derivabile ori de câte ori este necesar în expunere. Vectorul $\vec{v}(t) = (x_1'(t), x_2'(t), x_3'(t))$ a fost numit viteza la momentul t a punctului M, iar vectorul $\vec{a} = (x_1''(t), x_2''(t), x_3''(t))$ a fost numit acceleraţia punctului M la momentul t. Se constată imediat relaţiile

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= \vec{x}'(t) = \frac{d\vec{x}(t)}{dt}, \\ \vec{a}(t) &= \vec{v}'(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \vec{x}''(t) = \frac{d^2\vec{x}(t)}{dt^2} \end{aligned}$$

Despre forţa care acţionează asupra lui M se poate spune că este o mărime vectorială, $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$, care depinde de t, de $\vec{x}(t)$ şi de $\vec{x}'(t)$. Legea a doua a lui Newton se poate scrie

$$m\frac{d^2\vec{x}(t)}{dt^2} = \vec{F}\left(t, \vec{x}(t), \frac{d\vec{x}(t)}{dt}\right)$$

ceea ce înseamnă că mişcarea punctului M este descrisă de ecuaţia diferenţială de ordinul doi

$$m\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = \vec{F}\left(t, \vec{x}, \frac{d\vec{x}}{dt}\right)$$

Interpretarea fizică a acestei ecuaţii este că dacă se cunoaşte poziţia $\vec{x}(t_0)$ şi viteza $\vec{v}(t_0) = \vec{x}'(t_0)$ la un moment t_0, atunci poziţia $\vec{x}(t)$, a punctului M la momentul t, este determinată, pentru orice $t \geq t_0$.

Pe componente, această ecuaţie se scrie sub forma sistemului diferenţial

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x_1}{dt^2} = \dfrac{1}{m}F_1\left(t, \vec{x}, \dfrac{d\vec{x}}{dt}\right) \\ \dfrac{d^2x_2}{dt^2} = \dfrac{1}{m}F_2\left(t, \vec{x}, \dfrac{d\vec{x}}{dt}\right) \\ \dfrac{d^2x_3}{dt^2} = \dfrac{1}{m}F_3\left(t, \vec{x}, \dfrac{d\vec{x}}{dt}\right) \end{cases}$$

Dacă alegem ca variabile de stare coordonatele x_1, x_2, x_3 ale poziţiei şi componentele v_1, v_2, v_3 ale vitezei, atunci sistenul de mai sus se poate exprima sub forma

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = v_1 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = v_2 \\ \dfrac{dx_3}{dt} = v_3 \\ \dfrac{dv_1}{dt} = \dfrac{1}{m} F_1(t, x_1, x_2, x_3, v_1, v_2, v_3) \\ \dfrac{dv_2}{dt} = \dfrac{1}{m} F_2(t, x_1, x_2, x_3, v_1, v_2, v_3) \\ \dfrac{dv_3}{dt} = \dfrac{1}{m} F_3(t, x_1, x_2, x_3, v_1, v_2, v_3) \end{cases}$$

care reprezintă un sistem diferenţial de ordinul întâi cu 6 funcţii necunoscute.

5.3 Ecuaţii diferenţiale în Fizică.

5.3.1 Dezintegrarea substanţelor radioactive

S-a constatat că unele specii de atomi, de obicei cu un număr mare de ordine, sunt supuse unui fenomen, care se desfăşoară în timp, numit dezintegrare radioactivă, care constă în spargerea nucleelor lor în nuclee mai mici. Substanţele care sunt supuse acestui fenomen se numesc substanţe radioactive.

Notăm prin $x(t)$ cantitatea de atomi dintr-o substanţa radioactivă, existentă la momentul t. Pentru $\tau > 0$ dferenţa $x(t) - x(t+\tau)$ reprezintă cantitatea de atomi care s-a dezintegrat în intervalul de timp $[t, t+\tau]$. S-a constatat experimental că $x(t) - x(t+\tau)$ este direct proporţională cu $x(t)$ şi cu τ, lungimea intervalului considerat. Deci

$$x(t) - x(t+\tau) \approx kx(t)\tau$$

unde k este o constantă pozitivă care depinde de substanţa respectivă. Când $\tau \to 0$ egalitatea aproximativă se transformă în egalitate. Deducem

$$\lim_{\tau \to 0} \frac{x(t+\tau) - x(t)}{\tau} = -kx(t)$$

Deci $x'(t) = -kx(t)$, ceea ce înseamnă că $x(t)$ este soluţie a ecuaţiei diferenţiale

$$\frac{dx}{dt} = -kx$$

Soluţia generală a acestei ecuaţii diferenţiale cu variabile separabile este

$$x(t) = x(t_0)\, e^{-k(t-t_0)}$$

unde t_0 este un moment de referinţă, iar $x(t_0)$ este cantitatea de substanţă radioactivă ne dezintegrată la momentul t_0.

5.3.2 Oscilatorul armonic

Prin oscilator armonic se înţelege mişcarea pe o axă a unui punct material M, de masă m, sub acţiunea unei forţe elastice $F = -kx$, unde k este o constantă pozitivă, iar x este abscisa punctului M. Din Legea a doua a lui Newton deducem că

$$mx'' = -kx$$

Notînd $\frac{k}{m} = \omega^2$, rezultă ecuaţia oscilatorului armonic:

$$x'' + \omega^2 x = 0$$

Soluţia generală a acestei ecuaţii diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi este

$$x(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$$

unde C_1 şi C_2 sunt constante arbitrare.

5.3.3 Pendulul matematic

Pendulul matematic poate fi privit ca un dispozitiv format dintr-un cerc aşezat într-un plan vertical şi un punct material de masa m, care se mişca sub acţiunea greutaţii proprii pe acest cerc. Notăm cu O centrul cercului, cu M poziţia pe cerc a punctului material şi cu l raza cercului. Unghiul x dintre OM şi verticala locului se modifică în timp şi este determinat de ecuaţia

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin x = 0$$

Pentru oscilaţii mici putem aproxima pe $\sin x$ cu x şi ecuaţia devine

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g}{l} x = 0$$

Ea este numită ecuaţia pendulului matematic. Notînd $\frac{g}{l} = \omega^2$, ecuaţia pendulului matematic se scrie

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

şi este identică cu ecuaţia oscilatorului armonic.

5.3.4 Curgerea fluidelor

Se consideră un rezervor cilindric de rază R în care se află un lichid care se poate scurge printr-un orificiu de arie S aflat la baza cilindrului. Volumul de lichid $x(t)$, aflat în cilindru la momentul t, verifică ecuaţia diferenţială

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{0,6}{R} S \sqrt{\frac{2g}{\pi} x},$$

g fiind acceleraţia gravitatională.

5.3.5 Răcirea corpurilor

Conform unei legi a lui Newton, un corp cu temperatura mai mare decat a mediului înconjurator se răceşte. Fie $x(t)$ temperatura corpului la momentul t. Atunci diferenţa $x(t_1) - x(t_2)$ este proporţională cu $t_1 - t_2$ şi cu temperatura mediului ambiant $x_0, pre\sup us$ă constantă. Se deduce că $x(t)$ verifică ecuaţia diferenţială

$$\frac{dx}{dt} = k(x - x_0)$$

unde k este o constantă pozitivă. Soluţia acestei ecuaţii este

$$x(t) = (x(t_0) - x_0) e^{k(t-t_0)}, \; t \geq t_0$$

5.4 Ecuaţii diferenţiale în chimie

Reacţiile chimice, fiind procese de evoluţie, se pot modela, în cazurile cele mai simple, prin ecuaţii diferenţiale asemănătoare cu cele anterioare. Considerăm cazul unei reacţii bimoleculare

$$A + B \to C$$

în care a moli / litru din substanţa A şi b moli / litru din substanţa B reacţionează, dînd $a + b$ moli / litru din substanţa C, astfel încât să fie respectată legea acţiunii masei conform căreia numărul de moli / litru din substanţa C, format în unitatea de timp, să fie proporţional cu produsul cantităţilor substanţelor care intră în reacţie.

Presupunem că la momentul iniţial au existat a_0 moli / litru din substanţa A şi b moli / litru din substanţa B. Se pune problema evoluţiei concentraţiei substanţei C.

Notăm cu $x(t)$ numărul de moli / litru din substanţa C existenţi la un moment t. Rezultă că $x(t)$ moli / litru din substanţa C corespund la $\frac{a}{a+b} x(t)$ moli / litru din substanţa A şi la $\frac{b}{a+b} x(t)$ moli / litru din substanţa B. Prin urmare la momentul t au rămas $a_0 - \frac{a}{a+b} x(t)$ moli / litru din substanţa A şi $b_0 - \frac{b}{a+b} x(t)$ moli / litru din substanţa B, pentru a intra mai departe în reacţie. În baza acţiunii legii masei rezultă că există un număr k' astfel încât pentru $\tau > 0$ suficient de mic să avem

$$\frac{x(t+\tau)-x(t)}{\tau} = k'\left(a_0 - \frac{a}{a+b}x(t) + O_1(t,\tau)\right)\left(b_0 - \frac{b}{a+b}x(t) + O_2(t,\tau)\right)$$

unde $O_1(t,\tau)$ şi $O_2(t,\tau)$ tind către 0 când τ tinde către 0. Obţinem astfel relaţia

$$\frac{dx(t)}{dt} = k'\left(a_0 - \frac{a}{a+b}x(t)\right)\left(b_0 - \frac{b}{a+b}x(t)\right)$$

Notînd

$$k = k'\frac{ab}{(a+b)^2},\ \alpha = a_0\frac{a+b}{a},\ \beta = b_0\frac{a+b}{b}$$

rezultă că concentraţia substanţei C verifică ecuaţia diferenţială

$$\frac{dx}{dt} = k(\alpha - x)(\beta - x)$$

Index

Bibliografie

[1] V. I. Arnold, *Ecuaţii diferenţiale ordinare*, Editura ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1978.

[2] V. Barbu, *Ecuaţii diferenţiale*, Editura Junimea, Iaşi, 1985.

[3] A. Halanay, *Ecuaţii diferenţiale*, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1972.

[4] P. Hartman, *Ordinary Differential equation*, John Wiley & Sons, New York-London-Sydney, 1964.

[5] D. V. Ionescu, *Ecuaţii diferenţiale şi integrale*, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1972.

[6] Gh. Marinescu, *Teoria ecuaţiilor diferenţiale şi integrale,* Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1963.

[7] Şt. Mirică, *Ecuaţii diferenţiale şi integrale*, vol. I, Editura Universităţii din Bucureşti, 1999.

[8] M. Nicolescu, N. Dinculeanu, S. Marcus, *Analiză matematică*, vol. I, ediţia a patra, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1971.

[9] L. Pontriaguine, *Équations différentielles ordinaires*, Editions Mir-Moscou, 1969.

[10] E. Rogai, *Ecuaţii diferenţiale. Exerciţii şi probleme*, Universitatea din Bucureşti, 1984.

[11] A. Rus, P. Pavel, *Ecuaţii diferenţiale*, ediţia a doua, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1982.

[12] N. Teodorescu, V. Olariu, *Ecuaţii diferenţiale şi cu derivate parţiale*, vol. I, Bucureşti, Editura tehnică, 1978.

[13] C. Udrişte, C. Radu, C. Dicu, O. Mălăncioiu, *Algebră, geometrie şi ecuaţii diferenţiale*, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1982.

[14] I. Vrabie, *Ecuaţii diferenţiale*, Editura Matrix Rom, Bucureşti, 1999.

ISBN 973-575-515-7

Lei 61100