SERGIU RUDEANU

LECȚII DE CALCULUL PREDICATELOR ȘI CALCULUL PROPOZIȚIILOR

EDITURA UNIVERSITĂȚII DIN BUCUREȘTI
1997

SERGIU RUDEANU

LECȚII DE CALCULUL PREDICATELOR ȘI CALCULUL PROPOZIȚIILOR

EDITURA UNIVERSITĂȚII DIN BUCUREȘTI
1997

Referenți stiințifici: Prof. Dr. VIRGIL CĂZĂNESCU
Lector Dr. ANDREI BARANGA

Tehnoredactare computerizată *Iacob Victoria.*

ISBN - 973 - 575 - 138-0

TABLA DE MATERII

PREFAȚĂ

Calculul propozițiilor și calculul predicatelor pot fi considerate ca primele capitole, fundamentale, ale logicii matematice și ca atare ele trebuie să facă parte din cultura generală (matematică) a oricărui matematician.

Calculul propozițiilor și calculul predicatelor se constituie într-o teorie matematică având drept scop construcția unui model matematic al ideii de valoare de adevăr („adevărat", „fals") și a unui model matematic care să surprindă trăsăturile comune oricărei demonstrații matematice. Astfel, atât calculul propozițiilor cât și calculul predicatelor prezintă două părți sau aspecte corespunzătoare celor două probleme arătate mai sus: semantica și respectiv sintaxa. Legătura între cele două aspecte este sintetizată de o teoremă a lui Gödel care poate fi parafrazată spunând că semantica este echivalentă cu sintaxa; aceasta este o reflectare, în teoria construită, a convingerii, acceptate tacit în practica matematică, potrivit căreia ceea ce este adevărat coincide cu ceea ce se poate demonstra.

Raportul dintre calculul propozițiilor și calculul predicatelor constă în aceea că primul studiază numai propozițiile construite cu ajutorul conectorilor „și", „sau", „nu", „implică" etc., în timp ce al doilea este o structură mai complexă care introduce în plus variabile individuale, operații, relații și cuantificatori („oricare", „există").

Este important să precizăm că logica matematică trebuie înțeleasă ca un model matematic al unor procese de gândire și nu ca o fundamentare a logicii sau a matematicii: logica matematică folosește o logică și o matematică deja constituite. De exemplu, principalul instrument folosit în acest volum este teoria algebrelor multisortate.

Calculul predicatelor operează cu termeni și formule. Ele sunt anumite expresii formale, definite prin recurență și constituie ***limbajul*** *calculului predicatelor. Intuitiv, termenii reprezintă nume pentru elementele unei mulțimi înzestrate cu o amumită structură, iar predicatele reprezintă afirmații despre aceste elemente.* ***Semantica*** *asociată calculului cu predicate este în esență tocmai trecerea de la aspectul formal la cel intuitiv.* ***Sintaxa*** *calculului predicatelor este o formalizare a demonstrațiilor din matematică.*

Volumul de față este o versiune mult revizuită a capitolului de logică matematică din Rudeanu [1991]. Propunem o construcție în două etape a calculului predicatelor și a calculului propozițiilor.

Prima etapă constă dintr-o abordare axiomatică a limbajului și a semanticii calculului predicatelor. Cadrul axiomatic este furnizat de algebra universală multisortată. În acest cadru definim termeni de diverse sorturi, precum și formule. În continuare distingem două noțiuni semantice principale, pe care le numim interpretare și realizare. Prima noțiune revine la faptul că termenii și formulele sunt interpretate ca operații și respectiv relații ale unui domeniu de interpretare (o relație este o funcție cu argumentele în domeniul de interpretare și cu *valori 0,1 sau, mai general, cu valori în mulțimea valorilor de adevăr ale unei logice polivalente). O realizare înseamnă că în operațiile care interpretează termenii și formulele, variabile sunt înlocuite cu valori din domeniul de interpretare, ceea ce în final transformă termenii și formulele în elemente ale domeniului și respectiv valori de adevăr. Teoria astfel construită poate fi aplicată oricărei logici, bivalente sau polivalente (i.e., cu două valori de adevăr sau mai multe), monosortate sau multisortate (i.e., cu un singur sort de termeni sau cu mai multe; pentru logici multisortate cf. de exemplu, Monk [1976], cap. 29, și Căzănescu [1991]).*

Semnalăm aici faptul că definind realizările ca homomorfisme față de structuri algebrice convenabil alese, obținem o rezolvare foarte simplă a unei dificultăți care apare în abordarea curentă din literatură și care constă în faptul că una din proprietăți, anume comporatea unei realizări față de o formulă de forma $\forall x\alpha$ și care apare în definiția clasică a realizărilor, are un caracter circular, în sensul că se referă la mulțimea tuturor realizărilor. Pentru a se legitima o definiție care cuprinde o astfel de proprietate autoreferențială, în literatură se recurge la diverse metode oarecum anevoioase; cf. de exemplu Lyndon [1966] sau Barnes și Mack[1975].

Menționăm de asemenea că la nivelul axiomatic am tratat unitar simbolurile de operații și simbolurile de predicate. Mai precizăm că am stratificat nivelul axiomatic, introducând axiomele în mai multe etape, după modelul analizelor făcute de Dan Barbilian.

În partea a doua a construcției noastre definim calculul clasic al predicatelor prin particularizarea construcției axiomatice din prima parte. Mai exact, sunt definite în acest mod limbajul și semantica, după care construim sintaxa. Principalele rezultate obținute sunt: teorema deducției, teoremele privind mulțimile consistente de formule și în particular, consistența calculului predicatelor și teorema de completitudine a lui Gödel. În final obținem calculul propozițiilor ca o particularizare a calculului predicatelor și în plus demonstrăm decidabilitatea calculului propozițiilor.

Modul de abordare descris mai sus datorează mult volumelor Lyndon [1966] și Căzănescu [1981]. Primul începe cu calculul predicatelor și abordează calculul propozițiilor ca un caz particular. Tot lui R.C. Lyndon îi datorăm calea care conduce la teorema lui Gödel și pe care am detaliat-o mult în volumul de față. Ideea de a organiza termenii și formulele într-o algebră cu două sorturi este a lui V.E. Căzănescu.

Cele două etape descrise mai sus corespund capitolelor 1 și 2 ale volumului. Capitolul introductiv 0 este alcătuit din două paragrafe având caracterul unor rezumate fără demonstrații. Primul paragraf suplinește capitolul de algebră universală din Rudeanu [1991], trecând în revistă toate rezultatele acelui capitol de care avem nevoie în volumul de față. Pragraful al doilea are un caracter anticipativ, schițând principalele construcții din calculul predicatelor și modul cum acestea vor fi axiomatizate în capitolul 1, în speranța de a ușura misiunea cititorului.

Unele greșeli apărute în versiunea precedentă au fost corectate.

Lectura acestui volum nu presupune din partea cititorului decât unele cunoștințe despre algebra booleană cu două elemente și lema lui Zorn și mai ales o anumită familiarizare cu spiritul matematic.

Notațiile de tipul (m.n), (I.m.n), (II.m.n) înseamnă formula (n) din paragraful m și respectiv din capitolul prezent, capitolul 1, capitolul 2.

Mulțumesc doamnei Victoria Iacob și domnului Florin Mihalcea pentru atenția și răbdarea cu care au cules și tehnoredactat acest volum.

S.R.

CAPITOLUL 0

INTRODUCERE

§ 1. Rapel de algebră multisortată

Fie $S \neq \phi$ o mulţime de elemente numite *sorturi*. Prin *mulţime S - sortată* sau *S - mulţime* înţelegem o familie S - indexată de mulţimi

(1.1) $$\underline{A} = (A_s)_{s \in S};$$

pentru fiecare $s \in S$, mulţimea A_s se numeşte *componenta de sort s* a S - mulţimii $\underline{A}$.

Se numeşte *S - aplicaţie* sau *S - funcţie*

(1.2) $$\underline{\varphi} : \underline{A} \to \underline{B}$$

de la S - mulţimea $\underline{A}$ la S - mulţimea $\underline{B}$, orice element

(1.3) $$\underline{\varphi} = (\varphi_s)_{s \in S} \in \prod_{s \in S} B_s^{A_s};$$

pentru fiecare $s \in S$, funcţia

(1.4) $$\varphi_s : A_s \to B_s$$

se numeşte *componenta de sort s* a S - funcţiei $\underline{\varphi}$. Spunem că $\underline{\varphi}$ este *injecţie (surjecţie, bijecţie)*, dacă fiecare componentă φ_s de sort s este injecţie (surjecţie, bijecţie). *Compunerea* a două S - funcţii $\underline{\varphi} : \underline{A} \to \underline{B}$ şi $\underline{\psi} : \underline{B} \to \underline{C}$ este S - funcţia $\underline{\psi} \circ \underline{\varphi} : \underline{A} \to \underline{C}$ definită prin

(1.5) $$\underline{\psi} \circ \underline{\varphi} = (\psi_s \circ \varphi_s)_{s \in S}.$$

Amintim aici şi o noţiune de teoria obişnuită a mulţimilor. Pentru fiecare mulţime Y, *funcţia vidă* $\perp = (\phi, \phi, Y)$ este unica funcţie $\perp : \phi \to Y$. Ea este o injecţie şi satisface $f \circ \perp = \perp$ pentru orice $f : Y \to Z$.

Incluziunea $\underline{A} \subseteq \underline{B}$ se defineşte prin $A_s \subseteq B_s$ pentru orice $s \in S$; spunem că $\underline{A}$ este o *S - submulţime* a lui $\underline{B}$. Definim *aplicaţia de incluziune*

(1.6) $$\underline{\iota} : \underline{A} \to \underline{B}$$

prin $\iota = (\iota_s)_{s \in S}$, unde ι_s sunt incluziunile $\iota_s : A_s \to B_s$.

Aplicând aceeaşi idee, o *S - relaţie* binară $\underline{r}$ pe o *S - mulţime* $\underline{A}$ se defineşte ca o familie $\underline{r} = (r_s)_{s \in S}$ de relaţii binare r_s pe A_s. Vom spune că o *S - relaţie* $\underline{r}$ este *reflexivă* (*simetrică, antisimetrică, tranzitivă, relaţie de echivalenţă, relaţie de ordine parţială*) dacă fiecare componentă r_s are proprietatea respectivă.

Fie o mulţime $I \neq \phi$. Un *tip de I - algebre S - sortate* este o funcţie

(1.7) $$ar : I \to S^* x\, S,$$

unde S* este monoidul cuvintelor peste alfabetul S. Vom folosi notaţia

(1.8) $$ar(i) = (\sigma_i, s_i),\ \sigma_i = s_{i_1} s_{i_2} \ldots s_{i_{n(i)}},\ i \in I$$

O *I - algebră S - sortată de tip ar* este o pereche

(1.9) $$\mathbf{A} = (\underline{A}, (f_i)_{i \in I}),$$

unde *suportul* $\underline{A}$ al algebrei este o S - mulțime, iar

(1.10) $$f_i : A^{\sigma_i} = A_{s_{i_1}} x \ldots x A_{s_{i_{n(i)}}} \to A_{s_i}, i \in I,$$

sunt *operațiile* algebrei. În particular dacă $\sigma_i = \lambda$ (cuvântul vid), atunci (1.10) se reduce la $f_i \in A_{s_i}$. Prin abuz de notație algebra **A** poate fi desemnată prin suportul său $\underline{A}$.

O S - *submulțime închisă* a algebrei (1.9) este o S - mulțime $\underline{X} \subseteq \underline{A}$ astfel încât

(1.11) $$f_i(X^{\sigma_i}) \subseteq X_{s_i},\ i \in I;$$

prin abuz de terminologie, $\underline{X}$ se identifică cu subalgebra

(1.12) $$\mathbf{X} = \left(\underline{X}, \left(f_i\big|_{X^{\sigma_i}}\right)_{i \in I}\right).$$

Pentru $\underline{X} \subseteq \underline{A}$, *subalgebra* algebrei (1.9) *generată de* $\underline{X}$ este S - submulțimea $\overline{\underline{X}} \subseteq \underline{A}$ care satisface (i) $\overline{\underline{X}}$ este subalgebră, (ii) $\underline{X} \subseteq \overline{\underline{X}}$ și (iii) $\overline{\underline{X}} \subseteq \underline{Y}$ pentru orice subalgebră $\underline{Y} \subseteq \underline{A}$, cu proprietatea $\underline{X} \subseteq \underline{Y}$. Se știe că pentru orice $\underline{X} \subseteq \underline{A}$, subalgebra $\overline{\underline{X}}$ există și este unic determinată de $\underline{X}$. Subalgebra $\overline{\underline{X}}$ se obține printr-o construcție recurentă, anume

(1.13) $$\overline{\underline{X}} = \bigcup_{n \in \mathrm{N}} \underline{X}_n,$$

unde

(1.14.1) $$\underline{X}_0 = \underline{X}$$

și pentru orice $n \in \mathbf{N}$ și $s \in S$,

(1.14.2) $$X_{n+1,s} = X_{ns} \bigcup \{f_i(x) \mid x \in X_n^{\sigma_i}, i \in I \text{ cu } s_i = s\}.$$

Un mod echivalent de a exprima construcția (1.13) - (1.14) a subalgebrei generate de $\underline{X}$ este următorul. Numim *construcție* $\underline{X}$ *- formativă* orice șir $(x_1,\ldots,x_n)$ de elemente din $\bigcup_{s \in S} \underline{A}_s$ cu proprietatea că pentru orice $k \in \{1,\ldots,n\}$ are loc una din următoarele situații: 1) $x_k \in \bigcup_{s \in S} X_s$ sau 2) există $i \in I$ și $i_1, i_2,\ldots,i_{n(i)} < k$ astfel încât $x_k = f_i(x_{i_1},\ldots,x_{i_{n(i)}})$. Spunem că x_n *are* construcția $\underline{X}$ - formativă $(x_1,\ldots,x_n)$, iar n se numește *lungimea* construcției. Se demonstrază că un element $a \in A_s$ unde $s \in S$, aparține componentei $\overline{X}_s$ a subalgebrei $\overline{\underline{X}}$ generate de $\underline{X}$ dacă și numai dacă a are o construcție $\underline{X}$ - formativă. Această teoremă se poate parafraza prin următoarea definiție recurentă a mulțimii $\bigcup_{s \in S} \overline{X}_s$:

1) dacă $s \in S$ și $x \in X_s$, atunci $x \in \overline{X}_s$;

2) dacă $i \in I$ și $x_1 \in \overline{X}_{s_{i_1}}$, $x_2 \in \overline{X}_{s_{i_2}}, \ldots, x_{n(i)} \in \overline{X}_{s_{i_{n(i)}}}$, atunci $f_i(x_1,\ldots,x_{n(i)}) \in \overline{X}_{s_i}$;

3) orice element din $\bigcup_{s \in S} \overline{X}_s$ se obține aplicând regulile 1) și 2) de un număr finit de ori.

O consecință importantă a caracterizării elementelor subalgebrei generate prin construcții formative este că pentru fiecare $a \in \bigcup_{s \in S} \overline{X}_s$ există o S - submulțime finită $\underline{Y} \subseteq \underline{X}$ (adică toate componentele $Y_s \subseteq X_s$ sunt finite) astfel încât $a \in \bigcup_{s \in S} \overline{Y}_s$.

O consecinţă importantă a definiţiei recurente a mulţimii $\bigcup_{s\in S}\overline{X}_s$ este *metoda inducţiei algebrice* (sau *stucturate*) pentru a demonstra o proprietate a acestei mulţimi:

1) se demonstrează proprietatea pentru elementele din $\bigcup_{s\in S} X_s$;

2) pentru orice $i \in I$ şi orice $x_1 \in A_{s_{i_1}}$, $x_2 \in A_{s_{i_2}}, \ldots, x_{n(i)} \in A_{s_{i_{n(i)}}}$, se arată că dacă x_1, $x_2, \ldots, x_{n(i)}$ satisfac proprietatea, atunci $f_i(x_1,\ldots,x_{n(i)})$ satisface de asemenea proprietatea.

Trecerea de la o S - submulţime $\underline{X} \subseteq \underline{A}$ la subalgebra generată $\overline{\underline{X}}$ este un *operator de închidere*, adică: 1) $\underline{X} \subseteq \overline{\underline{X}}$; 2) $\overline{\overline{\underline{X}}} = \overline{\underline{X}}$; 3) dacă $\underline{X} \subseteq \underline{Y}$, atunci $\overline{\underline{X}} \subseteq \overline{\underline{Y}}$.

În particular, dacă $\overline{\underline{X}} = \underline{A}$, spunem că $\underline{X}$ este un *sistem de generatori* ai algebrei **A**, sau că $\underline{X}$ *generează* **A**.

Se numeşte *homomorfism* $\underline{\varphi}$: **A** $\to$ **B** între două algebre de acelaşi tip, **A** $= (\underline{A}, (f_i)_{i\in I})$ şi **B** $= (\underline{B}, (g_i)_{i\in I})$, o S - aplicaţie $\underline{\varphi} : \underline{A} \to \underline{B}$ care satisface următoarea proprietate:

(1.15) $$\varphi_{s_i}(f_i(a_1,\ldots,a_{n(i)})) = g_i(\varphi_{s_{i_1}} a_1,\ldots,\varphi_{s_{i_{n(i)}}} a_{n(i)}) \text{ pentru orice } a_1,\ldots,a_{n(i)} \in A^{\sigma_i} \text{ şi orice } i \in I.$$

(în cele ce urmează omitem adesea parantezele care cuprind argumentul unei funcţii).

Se numeşte *isomorfism*, orice homomorfism bijectiv $\underline{\varphi}$: **A** $\to$ **B**. În acest caz S - funcţia

(1.16) $$\underline{\varphi}^{-1} = \left(\varphi_s^{-1}\right)_{s\in S}: \mathbf{B} \to \mathbf{A}$$

este de asemenea un homomorfism, iar algebrele **A** şi **B** se zic *isomorfe*.

Pentru orice S - mulţime $\underline{X}$, se numeşte *algebra Peano* (de tipul *ar* considerat) *liber generată de* $\underline{X}$, o algebră

(1.17) $$\mathbf{E} = (\underline{E}, (F_i)_{i\in I})$$

de acel tip, având următoarele proprietăţi: 1) $\overline{\underline{X}} = \underline{E}$ şi 2) (*proprietatea de universalitate*) pentru orice algebră $(\underline{A}, (f_i)_{i\in I})$ de tipul considerat şi orice S - funcţie $\underline{\varphi} : \underline{X} \to \underline{A}$, există un unic homomorfism $\overline{\underline{\varphi}} : \underline{E} \to \underline{A}$ astfel încât $\overline{\underline{\varphi}}|_{\underline{X}} = \underline{\varphi}$ (adică $\overline{\varphi}_s\big|_{X_s} = \varphi_s$ pentru orice $s \in S$).

Algebra Peano (1.17) este unic determinată, abstracţie făcând de un isomorfism, şi se construieşte în felul următor. Fie

(1.18) $$Z = \bigcup_{s\in S} X_s \cup \{F_i \mid i \in I\},$$

unde mulţimile din (1.18) sunt disjuncte două câte două şi $F_i \neq F_j$ pentru $i \neq j$. Fie $\underline{Z} = (\underline{Z}, (F_i)_{i\in I})$ algebra definită în modul următor: $\underline{Z} = (Z^*)_{s\in S}$, unde Z^* este monoidul cuvintelor peste alfabetul Z dat de (1.18); pentru fiecare $i \in I$ şi orice $z_1, z_2, \ldots, z_{n(i)} \in Z^*$, se defineşte $F_i\left(z_1, z_2, \ldots, z_{n(i)}\right)$ ca fiind cuvântul $F_i z_1 z_2 \ldots z_{n(i)}$.

Evident, elementele mulţimii $\bigcup_{s\in S} E_s$ se pot defini prin recurenţă după modelul general dat mai înainte. De asemenea, prelungirea homomorfă $\overline{\underline{\varphi}}$ din proprietatea de universalitate 2 din definiţia algebrei Peano, se poate construi prin recurenţă astfel: 1) $\overline{\varphi}_s(x) = \varphi_s(x)$ pentru orice $x \in X_s$ şi orice $s \in S$; 2) pentru orice $i \in I$ şi orice $z_1 \in E_{s_{i_1}}, z_2 \in E_{s_{i_2}}, \ldots, z_n \in E_{s_{i_{n(i)}}}$, dacă $\overline{\varphi}_{s_{i_1}}(z_1), \overline{\varphi}_{s_{i_2}}(z_2), \ldots, \overline{\varphi}_{s_{i_{n(i)}}}(z_{n(i)})$ au fost definite, atunci

(1.19) $$\overline{\varphi}_{s_i}\left(F_i z_1 z_2 \ldots z_{(i)}\right) = f_i\left(\overline{\varphi}_{s_{i_1}}(z_1), \ldots, \overline{\varphi}_{s_{i_{n(i)}}}(z_{n(i)})\right).$$

Cele precedente sunt elemente de algebră universală *multisortată*, care este o generaliz a algebrei universale clasice. Această din urmă este *monosortată,* adică se obține din algeb universală multisortată particularizând pe S la o mulțime cu un singur element. Practic, acea revine la faptul că mulțimea S și indicii s dispar; în particular dispare simbolul $\bigcup_{s\in S}$. De asemen dispar sublinierile care disting S - mulțimile de mulțimile în sens obișnuit. Formula (1.7) transformă în $ar : I \to \mathbf{N}$ (deoarece $\{s\}^* \times \{s\}$ este o mulțime numerabilă), iar $ar(i)$ și σ_i se red la $n(i)$. Astfel, tipul se exprimă prin familia de numere naturale $(n(i))_{i\in I}$. Când mulțimea I e finită, se obișnuiește să se indice tipul printr-un șir al arităților; de exemplu un grup $(G;\bullet,^{-1}$, este o algebră de tipul (2,1,0), un inel unitar $(R;+,-,0,\bullet,1)$ este o algebră de tipul (2,1,0,2,0) e

Mai atragem atenția că anumite construcții în cadrul algebrei multisortate pot conduce mulțimi în sensul obișnuit (monosortat). De exemplu, dacă $\underline{A}$ și $\underline{B}$ sunt S - mulțimi, atunci

(1.20) $$\underline{A}^{\underline{B}} = \{\sigma | \sigma : \underline{B} \to \underline{A}\}$$

este o mulțime. În schimb, pentru orice mulțime X,

(1.21) $$\underline{A}^X = \left(A_s^X\right)_{s\in S} = \left(\{\varphi_s \mid \varphi_s : X \to A_s\}\right)_{s\in S}$$

este o S - mulțime.

§.2. **Calculul predicatelor (schiță anticipativă)**

Calculul predicatelor pornește de la o mulțime X de variabile individuale, o mulțime O simboluri de operații (sau funcții), o mulțime P de simboluri de predicate, o mulțime B conectori booleeni (sau propoziționali), precum și cuantificatorii $\forall$, $\exists$. Fiecare $o \in O$ are aritate $n(o)$ și fiecare $p \in P$ are o aritate $n(p)$. Conectorii booleeni sunt $\wedge$, $\vee$, N, $\to$, $\leftrightarrow$ „propoziția contradictorie" c, dar mulțimea B poate să conțină numai o parte din ei, ceila conectori booleeni definindu-se cu ajutorul conectorilor din B; în abordarea din acest volu luăm $B = \{\to, c\}$.

Deasemenea, vom lucra numai cu cuantificatorul $\forall$, cuantificatorul $\exists$ definindu-se c ajutorul lui $\forall$.

În mulțimea cuvintelor formate prin concaternarea literelor din alfabet $X \cup O \cup P \cup B \cup \{\forall\}$ distingem anumite cuvinte pe care le numim *termeni* și *formule* care se definesc prin recurență astfel:

(T0) variabilele individuale sunt termeni;

(T1) dacă $o \in O$ și $\tau_1,\ldots,\tau_{n(o)}$ sunt termeni, atunci $o\ \tau_1\ldots\tau_{n(o)}$ este termen;

(T2) orice termen se obține aplicând regulile (T0) și (T1) de un număr finit de ori;

(F0) dacă $p \in$ P și $\tau_1,\ldots,\tau_{n(p)}$ sunt termeni, atunci $p\ \tau_1\ldots\tau_{n(p)}$ este formulă;

(F1) c este formulă și dacă α, β sunt formule, atunci $\to \alpha\ \beta$ este formulă, iar dacă $x \in$ atunci $\forall x\alpha$ este formulă;

(F2) orice formulă se obține aplicând regulile (F0) și (F1) de un număr finit de ori.

Termenii și formulele alcătuiesc *limbajul* calculului predicatelor. Aici se introdu și prescurtările

$N\alpha \equiv \to \alpha c$,

$\vee\alpha\beta \equiv \to N\alpha\beta \equiv \to \to \alpha c\beta$,

$\wedge\alpha\beta \equiv N \to \alpha N\beta \equiv \to \to \alpha \to \beta cc,$

$\exists x\alpha \equiv N \forall\, x\, N\alpha \equiv \forall x\alpha \to cc;$

de asemenea, sunt admise derogări de la scrierea prefixată de mai sus, în sensul că în loc de $\to \alpha\beta$, $\vee\alpha\beta$, $\wedge\alpha\beta$ putem folosi scrierea infixată $\alpha \to \beta$, $\alpha \vee \beta$, $\alpha \wedge \beta$.

Calculul multisortat al predicatelor înlocuieşte mulţimea X a variabilelor individuale cu o familie $(X_t)_{t\in T}$ de variabile individuale de diverse sorturi $t \in T$ (idee care poate fi uşor înţeleasă dacă ne gândim că în analiza matematică, de exemplu, apar sorturile „real", „natural", „pozitiv" etc.). Aşa vom proceda şi în abordarea axiomatică din cap. 1. Vom lucra cu sorturile „termen" $t \in T$ şi cu un sort „formulă" f, adică $S = T \cup \{f\}$. În tratarea axiomatică nu vom face distincţie între funcţii şi predicate, acestea fiind reprezentate printr-o singură mulţime Q (care abia în cap. 2 se va despărţi în $Q = O \cup P$). Vom construi un tip de alegebre S - sortate luând ca mulţime de operaţii $I = X \cup J$, unde $X = \bigcup_{t\in T} X_t$, mulţimea J rămâne arbritară în § 1 şi începând din § 2 se descompune în $J = B \cup Q$. Aşadar operaţiile din B vor abstractiza conectorii booleeni, operaţiile din Q vor generaliza funcţiile şi predicatele, iar fiecare operaţie $x \in X$ va modela trecerea de la o formulă α la formula $\forall x\alpha$. De aceea vom introduce o axiomă (I.1.7) specificând că aritatea fiecărei operaţii x este (f, f). De asemenea, ţinând seama de definiţiile (T) - (F) de mai sus, vom adopta încă o axiomă (I.1.6) potrivit căreia un termen nu se poate obţine decât din alţii.

Generalizarea la nivelul axiomatic a termenilor şi formulelor calculului predicatelor este dată de alegebra Peano $\underline{E}$ de tipul de mai sus, liber generată de $\underline{X} = (X_s)_{s\in S}$, unde $X_t (t \in T)$ sunt mulţimile deja introduse, iar $X_f = \phi$: fiecare componentă E_t reprezintă mulţimea termenilor de sort t ($t \in T$), iar E_f reprezintă mulţimea formulelor.

Apectul semantic al calculului clasic al predicatelor constă în următoarele. Se consideră o mulţime $D \neq \phi$ numită *domeniu de interpretare*. Fiecărui simbol de operaţie $o \in O$ i se asociază o operaţie $o_D : D^{n(o)} \to D$ şi fiecărui predicat $p \in P$ i se asociază o relaţie $p_D : D^{n(o)} \to \{0,1\}$. Fie $V = \{v | v{:}X \to D\}$; elementele mulţimii V sunt numite *valuările* mulţimii X în domeniul D. Vom asocia fiecărui termen τ o funcţie $\tau_D : V \to D$ şi fiecărei formule α o funcţie $\alpha_D : V \to \{0,1\}$ conform următoarei definiţii recurente: pentru orice $v \in V$,

(2.0) $$x_D(v) = v(x),$$

(2.1) $$\left(o\tau_1 \ldots \tau_{n(o)}\right)_D (v) = o_D\, ((\tau_1)_D(v), \ldots, (\tau_{n(o)})_D(v)),$$

(2.2) $$(p\tau_1 \ldots \tau_{n(p)})_D(v) = p_D\, ((\tau_1)_D(v), \ldots, (\tau_{n(p)})_D(v)),$$

(2.3) $$(\alpha \to \beta)_D(v) = \alpha_D(v) \to \beta_D(v),$$

(2.4) $$(c)_D(v) = 0,$$

(2.5) $$(\forall x\alpha)_D\, (v) = 1 \Leftrightarrow \alpha_D(w) = 1 \text{ pentru orice } w \in V \text{ cu } w(y) = v(y), \text{ pentru orice } y \in X, y \neq x,$$

unde $\to$, 0,1 din membrii drepţi ai relaţiilor (2.3) - (2.5) sunt din algebra boolenă $\{0,1\}$; cf. (II.2.6) - (II.2.15).

Construcţia de mai sus poartă numele de *interpretare* a calculului predicatelor în domeniul D. *Realizarea* generată de această interpretare şi de o valuare $v_0 \in V$ este transformarea fiecărui termen τ în elementul $\tau_D(v_0) \in D$ şi a fiecărei formule α în valoarea de adevăr $\alpha_D(v_0) \in \{0,1\}$.

În abordarea axiomatică lucrăm cu o S - mulțime $\underline{A} = (A_s)_{s\in S}$, în care componentele $A_t (t \in T)$ joacă rolul lui D, iar componenta A_f joacă rolul mulțimii $\{0,1\}$. Valuările vor fi S - aplicațiile $v : \underline{X} \to \underline{A}$. Formula (2.0) va fi înlocuită cu generalizarea (I.2.16), în care S - aplicația $\underline{\pi}$ este dată de definiția (I.2.11). Relația (I.2.17) reprezintă la nivel axiomatic toate relațiile (2.1) - (2.4) de mai sus. În sfârșit relația (2.5) este reflectată la nivelul axiomatic de relația (I.2.18). Pentru a înțelege această ultimă afirmație, să observăm că deoarece interpretările formulelor iau valori în algebra booleană $\{0,1\}$ unde $0 < 1$, relația (2.5) se poate scrie sub forma

(2.5′) $$(\forall x\alpha)_D(v) = \inf\{\alpha_D(w) \mid w \in V, w\sim_x v\},$$

unde am notat

(2.6) $$w\sim_x v \Leftrightarrow w(y) = v(y) \text{ pentru } y \in X, y \neq x,$$

și unde putem gândi inf ca o operație inf : $\mathcal{P}(\{0,1\}) \to \{0,1\}$. Să mai observăm, în sfârșit, că relația (2.5′) este adecvată și pentru un calcul al predicatelor într-o logică polivalentă, operația inf luându-se atunci în mulțimea total ordonată a valorilor acelei logici. Suntem conduși astfel la formularea axiomatică (I.2.18), unde $\bigwedge$ este o operație oarecare (I.2.2.3).

În aliniatul precedent am expus ideile principale ale abordării axiomatice a semanticii. Nu insistăm aici asupra faptului remarcabil că o interpretare apare ca un homomorfism de algebre S - sortate; avem astfel două definiții echivalente (cf propoziția I.2.2 și teoria care o precede). Cititorul va mai observa că în § 2 din cap. 1 axiomatizarea este ceva mai generală decât în continuare, mulțimea V și relațiile $\sim_x$ nefiind încă precizate.

CAPITOLUL 1

AXIOMATICA MULTISORTATĂ A CALCULELOR CU PREDICATE

§ 1. Termeni și formule; substituții

Axioma 1.1. Fie

(1.1) $$S = T \cup \{f\}, f \notin T \neq \phi,$$

o mulțime de sorturi conținând un sort privilegiat f (sort *formulă*), sorturile $t \in T$ numindu-se sorturi *termeni*.

Fie $\underline{X} = (X_s)_{s \in S}$ o S - mulțime satisfăcând

(1.2) $$X_f = \phi, X_t \cap X_u = \phi \ (t,u \in T, t \neq u);$$

pentru fiecare $t \in T$, elementele mulțimii X_t se numesc *variabile individuale* (sau simplu *variabile*) *de sort t*. Mulțimea tuturor variabilelor individuale va fi notată

(1.3) $$X = \bigcup_{t \in T} X_t \cdot$$

Fie J, I două mulțimi satisfăcând

(1.4) $$I = J \cup X, J \cap X = \phi, J \neq \phi.$$

Fie

(1.5) $$ar(i) = (\sigma_i, s_i) \in S^* \text{x } S, \ (i \in I)$$

un tip de algebre S - sortate satisfăcând

(1.6) $$s_j \in T \Rightarrow \sigma_j \in T^* \ \ (j \in J),$$

(1.7) $$ar(x) = (f,f) \ \ (x \in X).$$

Definiția 1.1. Fie

(1.8) $$\mathbf{E} = \left(\underline{E}, (F_i)_{i \in I}\right)$$

algebra Peano de tip (1.5) liber generată de $\underline{X}$. Pentru fiecarte $t \in T$, elementele mulțimii E_t se numesc *termeni de sort t*, iar elementele mulțimii E_f se numesc *formule*. Vom mai nota

(1.9) $$E_T = \bigcup_{t \in T} E_t ; E = \bigcup_{s \in S} E_s = E_T \cup E_f$$

și vom numi *expresii*, elementele mulțimii E.

Pentru a merge mai departe, amintim că un *cuvânt* w de lungime n ($|w| = n$) peste un alfabet A poate fi definit ca o funcție $w : \{1,...,n\} \to A$, chiar dacă obișnuim să sciem cuvântul prin concatenarea valorilor funcției w, adică $w(1)\ w(2)...w(n)$; în particular *cuvântul vid* $\lambda : \phi \to A$, nu conține nici o literă și este de lungime zero. Pentru orice $a \in A$, spunem că *a apare* în cuvântul w dacă există $j \in \{1,...,n\}$ astfel încât $w(j) = a$, în care caz perechea (j,a) se nun *apariție* a literei a în cuvântul w. Dacă $w' = w(h)w(h+1)...w(k)$ ($1 \leq h < k \leq |w|$) este subcuvânt al lui w și $h \leq j \leq k$, vom identifica apariția (j,a) a literei a în w cu apariția ($j - h +$) a literei a în w'.

Definiția 1.2. *Aparițiile libere* de variabile într-o expresie $\alpha \in E$ sunt definite p recurență astfel:

1° Apariția variabilei x în expresia $x \in X$ este liberă.

2° Apariția unei variabile x este liberă în $\alpha = F_i \alpha_1 ... \alpha_{n(i)}$ dacă și numai dacă $x \neq i$ ș expresia α_h care conține apariția, aceasta din urmă este liberă.

Aparițiile de variabile care nu sunt libere într-o expresie se zic *legate* în acea expresie

Prin abuz de limbaj spunem adesea *variabile libere (legate)* într-o expresie, în loc apariții libere (legate) ale variabilei.

Observația 1.1. Orice termen $\tau \in E_T$ conține numai variabile libere (demonstrația p inducție algebrică folosește definiția 1.2 și axioma (1.6)).

Observația 1.2. Într-o formulă $\alpha \in E_f$, o variabilă poate avea atât apariții lib cât și apariții legate.

Noțiunile de variabilă care apare într-o expresie, variabilă liberă și variabilă legată se p defini exclusiv în termenii algebrei Peano (1.8); cf. V.E. Căzănescu [1981].

Vom introduce acum noțiunea de substituție pentru expresii, încadrând-o într-un conce mai general care se definește pentru cuvinte. Anume, dacă w și w_1 sunt cuvinte peste acela alfabet iar (j, a) este o apariție a literei a în cuvântul w, înlocuind în cuvântul w apariția j a liter a cu w_1, se obține un nou cuvânt w_0 peste același alfabet. În termeni tehnici, dacă m și n su lungimile cuvintelor w și w_1, atunci w_0 este cuvântul de lungime $m + n - 1$ definit prin

$$(1.10)\qquad w_0(h) = \begin{cases} w(h), & \text{dacă } 1 \leq h < j \\ w_1(h-j+1), & \text{dacă } j \leq h < j+n \\ w(h-n+1), & \text{dacă } j+n \leq h < m+n\ . \end{cases}$$

Cuvântul w_0 obținut din w prin înlocuirea apariției (j,a) a literei a în w cu w_1, se definește ș pentru cazul când litera a nu apare în w: în acest caz $w_0 = w$. De asemenea, dacă $w, w_1,...,w$ sunt cuvinte peste același alfabet de lungime respectiv $m, n_1,...,n_k$, iar $(j_1,a),...,(j_k,a)$ und $1 \leq j_1 < j_2 ... < j_k \leq m$, sunt apariții ale literei a în w, atunci cuvântul w_0 obținut prin înlocuire acestor apariții respectiv cu $w_1,...,w_k$, se definește ca fiind cuvântul w_0 de lungime $m - k + \sum_{r=1}^{k} n_r$ dat de relațiile următoare, în care am notat $j_0 = n_0 = 0,\ j_{k+1} = m+1$:

$$(1.11)\qquad w_0(h) = w\left(h - \sum_{s=0}^{r} n_s + r\right);\ j_r + \sum_{s=0}^{r} n_s - r < h < j_{r+1} + \sum_{s=0}^{r} n_s - r;\ r = 0,1,\ldots,k;$$

$$(1.12)\qquad w_0(h) = w_r\left(h - j_r - \sum_{s=0}^{r-1} n_s + r\right)\ j_r + \sum_{s=0}^{r-1} n_s - r < h \leq j_r + \sum_{s=0}^{r} n_s - r;\ r = 1,\ldots k;$$

dacă litera a nu apare în w, atunci definim $w_0 = w$.

Mai avem nevoie de încă o pregătire înainte de introducerea noțiunii de substituție.

Lema 1.1. *Fie $s \in S$, $\alpha \in E_s$, $t \in T$, $x \in X_t$, $\tau \in E_t$ și fie β cuvântul obținut din α prin înlocuirea tuturor aparițiilor libere ale lui x cu τ. Atunci $\beta \in E_s$.*

Demonstrație prin inducție algebrică asupra expresiei α.

Dacă $\alpha = y \in X_s$, atunci dacă $y \neq x$ rezultă $\beta = y \in X_s$ iar dacă $y = x$ atunci $\beta = \tau \in E_t$ și cum (1.2) implică $s = t$, rezultă $\beta \in E_s$.

La pasul inductiv, fie

$\alpha = F_i\alpha_1 \ldots \alpha_{n(i)}$, $\alpha_k \in E_{s_{ik}}\left(k = 1, \ldots, n(i)\right)$, $s_i = s$, $i \in I$.

Dacă $i = x$, atunci toate aparițiile variabilei x în α sunt legate, deci $\beta = \alpha \in E_s$. Dacă $i \neq x$, atunci o apariție a variabilei x în β este liberă dacă și numai dacă este liberă în expresia β_h care o conține, deci $\beta = F_i\beta_1 \ldots \beta_{n(i)}$ unde β_k se obține din α_k înlocuind toate aparițiile libere ale variabilei x cu τ ($k = 1,\ldots,n(i)$). În virtutea ipotezei inductive, $\beta_k \in E_{s_{ik}}$ ($k = 1,\ldots,n(i)$), deci $\beta \in E_s$.

Definiția 1.3. Fie $\alpha \in E$, $t \in T$, $x \in X_t$ și $\tau \in E_s$.

Atunci prin expresia $\alpha(x/\tau)$ obținută din α prin *substituirea variabilei x cu termenul* τ, înțelegem cuvântul β obținut din α prin înlocuirea fiecăreia din aparițiile libere ale variabilei x în α cu termenul τ dacă, pentru fiecare subcuvânt τ al lui β, obținut printr-o înlocuire a unei apariții a lui x în α, toate variabilele din τ rămân libere în β. Dacă această condiție nu este îndeplinită, $\alpha(x/\tau)$ nu se definește.

Cuvântul β din definiția 1.3 este în orice caz expresie, conform lemei 1.1; în consecință are sens vorbim de apariții de variabile libere sau legate în β; cf. definiția 1.2. Variabilele din τ sunt libere în τ, conform observației 1.1, ceea ce explică verbul „rămân" din definiția 1.3. Condiția din definiția 1.3 nu se referă la eventualele subcuvinte existente în α anterior substituției.

Propoziția 1.1. *Fie $s \in S$, $\alpha \in E_s$, $t \in T$, $x \in X_t$ și $\tau \in E_t$. Dacă $\alpha(x/\tau)$ există, atunci $\alpha(x/\tau) \in E_s$.*

Demonstrație. Rezultă imediat din lema 1.1.

Observația 1.3. *Pentru orice $t \in T$, $x \in X_t$, $\tau \in E_s$:*

(1.13) $\qquad x(x/\tau) = \tau,$

(1.14) $\qquad \alpha(x/\tau) = \alpha$ dacă x nu apare liber în $\alpha \in E$; în particular

(1.15) $\qquad y(x/\tau) = y, \qquad y \in X \setminus \{x\},$

(1.16) $\qquad (F_x\alpha)(x/\tau) = F_x\alpha, \qquad \alpha \in E_f.$

Propoziția 1.2. *Fie $t \in T$, $x \in X_t$, $\tau \in E_s$ și $F_i\alpha_1 \ldots \alpha_{n(i)} \in E$, cu $i \in I \setminus \{x\}$. Atunci*

(1.17) $\qquad (F_i\alpha_1 \ldots \alpha_{n(i)})(x/\tau) = F_i\alpha_1(x/\tau) \ldots \alpha_{n(i)}(x/\tau)$

în sensul că fiecare din membrii relației (1.17) există dacă și numai dacă există celălalt membru, în care caz are loc egalitatea.

Demonstrație. Să reluăm notația și egalitatea

(1.18) $\qquad \beta = F_i\beta_1 \ldots \beta_{n(i)}$

din demonstrația lemei 1.1. Conform definiției 1.2, o apariție de variabilă este liberă în β dacă și numai dacă ea este liberă în cuvântul β_h care o conține. Prin urmare $\alpha(x/\tau)$ există dacă și numai dacă există $\alpha_k(x/\tau)$ ($k = 1,\ldots n(i)$), în care caz $\beta_k = \alpha_k(x/\tau)$ ($k = 1,\ldots n(i)$), $\beta = \alpha(x/\tau)$ și (1.18) devine (1.17).

Propoziția 1.3. *Fie $t \in T$, $x \in X_t$, $\tau \in E_t$, $y \in X - \{x\}$ și $\alpha \in E_f$. Atunci $(F_y\alpha)(x/\tau)$ există dacă și numai dacă $\alpha(x/\tau)$ există și y nu apare în τ, în care caz*

(1.19) $\qquad (F_y\alpha)(x/\tau) = F_y(\alpha(x/\tau)).$

Demonstrație evidentă.

Propoziția 1.4. *Fie* $\alpha \in E$, $t \in T$ *și* $x, y \in X_t$. *Dacă* y *și* F_y *nu apar în* α, *atunci*

(1.19) $$\alpha(x/y)\,(y/x) = \alpha.$$

Demonstrație. Fie β rezultatul înlocuirii în α a aparițiilor libere ale lui x cu y. Din ipo făcută rezultă că toate aparițiile lui y în β sunt libere, deci $\beta = \alpha(x/y)$. Deoarece y nu apare î înlocuind în β fiecare apariție a lui y cu x, se obține din nou α. În plus, fiecare din literele y sunt situate pe locurile unde x avea apariții libere în α. Rezultă că $\alpha = \beta(y/x)$.

Propoziția 1.5. *Fie* $\alpha \in E$, $t \in T$; $u, x, y \in X_t$; $x \neq u \neq y$, $\tau \in E_t$. *Dacă expresiile de mai există, atunci*

(1.20) $$\alpha(u/\tau)\,(x/y) = \alpha(x/y)\,(u/\tau(x/y)).$$

Demonstrație. Fiecare din cei doi membri ai egalității (1.20) se obține din α înlocu aparițiile libere ale lui u cu $\tau\,(x/y)$ și aparițiile libere ale lui x cu y.

Scolie. *Dacă, în plus,* τ *nu conține variabila* x, *atunci*

(1.21) $$\alpha(u/\tau)\,(x/y) = \alpha(x/y)\,(u/\tau).$$

§ 2. Interpretări

Axioma 2.1. În continuare vom presupune că mulțimea J se descompune în forma

(2.1) $$J = B \cup Q,\ B \cap Q = \phi,\ B \neq \phi,$$

elementele din B și cele din Q numindu-se *conectori booleeni* sau *propoziționali* și respect *operatori*.

Axioma 2.2. Presupunem de asemena dată o S - mulțime $\underline{A} = \left(A_s\right)_{s \in S}$, pe care o vom nun S - *domeniu de interpretare* sau S - *mulțime standard*, precum și o B - algebră S - sortată

(2.2.1) $$\mathbf{A}_0 = \left(\underline{A}, (\bar{b})_{b \in B}, \wedge\right),$$

(2.2.2) $$\bar{b}: A^{\sigma_b} \to A_{s_b} \quad (b \in B),$$

(2.2.3) $$\wedge: \mathcal{P}\left(A_f\right) \to A_f,$$

pe care o vom numi S - *algebra standard*. Spunem că aritatea familiei de operații $\left(\bar{b}\right)_{b \in B}$ est restricția la B a arității (1.6).

Definiția 2.1. Numim *asignare*, orice element

(2.3) $$\varphi = \left(\varphi_q\right)_{q \in Q} \in \prod_{q \in Q} \left(A_{s_q}\right)^{A^{\sigma_q}};$$

cu alte cuvinte (2.3) este o familie de operații având ca aritate restricția la Q a arității (1.5):

(2.4) $$\varphi_q: A^{\sigma_q} \to A_{s_q}\,(q \in Q).$$

Definiția 2.2. Orice asignare $\varphi = (\varphi_q)_{q \in Q}$ se prelungește la o familie $(\varphi_j)_{j \in J}$ luând

(2.5.1) $$\varphi_b = \bar{b}\ (b \in B),$$

iar J - *algebra asociată* asignării este

(2.5.2) $$\mathbf{A}_\varphi = (\underline{A}, (\varphi_j)_{j \in J}, \wedge);$$

astfel spus, $\mathbf{A}_\varphi$ este algebra $\mathbf{A}_0$ îmbogățită cu operațiile φ_q, $q \in Q$.

Axioma 2.3. Vom mai considera o mulțime $V \neq \phi$ de elemente numite *valuări* și o familie de relații binare pe V,

(2.6) $$\{\sim_x \mid x \in X\}.$$

Definiția 2.3. *Algebra funcțională asociată* unei asignări φ este algebra de tipul (1.5)

$$(2.7) \qquad \mathbf{A}_\varphi^V = \left(\underline{A}^V = (A_s^V)_{s \in S}, (\underline{\underline{\varphi}}_i)_{i \in I} \right)$$

definită astfel: pentru orice $j \in J$,

$$\underline{\underline{\varphi}}_j : \left(\underline{A}^V\right)^{\sigma_j} \to A_{s_j}^V$$

este definită astfel: pentru orice $z_k \in \left(A_{s_{jk}}\right)^V \left(k = 1, \ldots, n(j)\right)$,

$$\underline{\underline{\varphi}}_j \left(z_1, \ldots, z_{n(j)}\right) : V \to A_{s_j}$$

este definită astfel: pentru orice $v \in V$,

$$(2.8) \qquad \underline{\underline{\varphi}}_j \left(z_1, \ldots, z_{n(j)}\right)(v) = \varphi_j\left(z_1(v), \ldots, z_{n(j)}(v)\right);$$

iar pentru orice $x \in X$,

$$\underline{\underline{\varphi}}_x : A_f^V \to A_f^V$$

se definește astfel: pentru orice $z \in A_f^V$,

$$\underline{\underline{\varphi}}_x (z) : V \to A_f$$

se definește astfel: pentru orice $v \in V$,

$$(2.9) \qquad \underline{\underline{\varphi}}_x (z)(v) = \wedge\left\{z(w) \mid w \in V,\ w \sim_x v\right\}.$$

Axioma 2.4. Vom considera acum o S - aplicație

$$(2.10) \qquad \underline{\pi} : \underline{X} \to \underline{A}^V$$

pe care o numim *proiecție canonică*. Astfel spus, $\underline{\pi} = \left(\pi_s\right)_{s \in S}$, unde

(2.11.1) $\qquad \pi_s : X_s \to A_s^V \quad (s \in S)$,

(2.11.2) $\qquad \pi_t(x) : V \to A_t \quad (x \in X_t,\ t \in T)$,

(2.11.3) $\qquad \pi_f = \perp$ (funcția vidă)

Definiția 2.4. Pentru orice asigurare φ, fie

$$(2.12) \qquad \pi^\varphi : \mathbf{E} \to \mathbf{A}_\varphi^V$$

unicul homomorfism de algebre de tipul (1.5) care prelungește proiecția canonică (2.10). Pentru simplitate vom nota cu φ_s componentele π_s^φ ale morfismului π^φ.

Definiția 2.5. *Interpretarea generată de o asignare* φ este perechea

$$(2.13) \qquad \overline{\varphi} = \left(\varphi, \pi^\varphi\right) = \left(\left(\varphi_q\right)_{q \in Q}, \left(\varphi_s\right)_{s \in S} \right);$$

În general, numim *interpretare* orice familie $(Q \cup S)$ – indexată obținută în acest fel. În cele ce urmează vom nota interpretarea generată de o asigurare φ tot cu φ în loc de $\overline{\varphi}$.

Definiția 2.6. *Restricțiile* unei familii $(Q \cup S)$ – indexate $\chi = (\chi_m)_{m \in Q \cup S}$ sunt

$$(2.14) \qquad \chi\big|_Q = \left(\chi_q\right)_{q \in Q},\ \chi\big|_S = \left(\chi_s\right)_{s \in S}.$$

Observația 2.1. Asignarea care generează o interpretare φ este restricția $\varphi|_Q$.

Propoziția 2.1. *Există o bijecție între asignări și interpretări, obținută asociind fiecare asignare cu interpretarea pe care o generează.*

Demonstrație. Orice asignare $\varphi = (\varphi_q)_{q \in Q}$ determină în mod unic algebra funcțională $\mathbf{A}_\varphi^V$ deci și homomorfismul $\pi^\varphi = (\varphi_s)_{s \in S}$ care prelungește proiecția canonică $\pi : \underline{X} \to \underline{A}^V$. Rezultă că asocierea din enunț este o funcție. Această funcție este surjectivă conform definiției 2.5 și injectivă în virtutea observației 2.1.

Corolarul 2.1. *Orice interpretare* φ *este unic determinată de restricția* $\varphi|_Q$.

Demonstrație. Rezultă imediat din propoziția 2.1. și observația 2.1.

Propoziția 2.2. *O familie* $(\varphi_m)_{m \in Q \cup S}$ *este interpretare dacă și numai dacă satisface condițiile*

(2.4) $\varphi_q : A^{\sigma_q} \to A_{s_q} \quad (q \in Q),$

(2.15) $\varphi_s : E_s \to (A_s)^V \quad (s \in S),$

(2.16) $\varphi_s|_{X_s} = \pi_s, \quad (s \in S),$

(2.17)
$$\left(\varphi_{s_j} F_j \alpha_1 \ldots \alpha_{n(j)}\right)(v) = \varphi_j\left(\left(\varphi_{s_{j1}} \alpha_1\right), \ldots, \left(\varphi_{s_{jn(j)}} \alpha_{n(j)}\right)(v)\right),$$
$$v \in V,\ \alpha_1 \ldots \alpha_{n(j)} \in E^{\sigma_j}\left(j \in J\right)\ \left(\text{cf.}(2.5.1)\right),$$

(2.18)
$$\left(\varphi_f F_x \alpha\right)(v) = \bigwedge\left\{\left(\varphi_f \alpha\right)(w) \mid w \in V, w \sim_x v\right\},$$
$$v \in V,\ \alpha \in E_f,\ x \in X.$$

Demonstrația se reduce la a arăta că relațiile (2.17), (2.18) exprimă condițiile de homomorfism. Într-adevăr, ținând seama de (2.8) și (2.9) relațiile (2.17), (2.18) devin respectiv
$$\left(\varphi_{s_j} F_j \alpha_1 \ldots \alpha_{n(j)}\right)(v) = \underline{\underline{\varphi}}_{s_j}\left(\varphi_{s_{j1}}\left(\alpha_1\right), \ldots, \varphi_{s_{jn(j)}}\left(\alpha_{n(j)}\right)\right)(v) \quad \left(j \in J\right),$$
$$\left(\varphi_f F_x \alpha\right)(v) = \underline{\underline{\varphi}}_x\left(\varphi_f \alpha\right)(v),\ x \in X,$$
adică
$$\varphi_{s_i} F_i \alpha_1 \ldots \alpha_{n(i)} = \underline{\underline{\varphi}}_i\left(\varphi_{s_{i1}} \alpha_1, \ldots, \varphi_{s_{in(i)}} \alpha_{n(i)}\right) \quad (i \in I).$$

Convenție. În cele ce urmează, pentru orice $j \in J$ și orice $\alpha \in E$, prin „*j apare în* α" vom înțelege faptul că F_j apare în α.

Propoziția 2.3. *Fie* $s \in S$ *și* $\alpha \in E_s$. *Dacă* φ *și* φ' *sunt interpretări astfel încât* $\varphi_q = \varphi'_q$ *pentru orice* $q \in Q$ *care apare în* α, *atunci* $\varphi_s\alpha = \varphi'_s\alpha$.

Demonstrație prin inducție algebrică.

Dacă $\alpha = x \in X_s$, atunci ($s \in T$ și) $\varphi_s x = \pi_s x = \varphi'_s x$. La pasul inductiv există două cazuri.

Dacă $\alpha = F_j\alpha_1 \ldots \alpha_{n(j)}$, unde $\alpha_1 \ldots \alpha_{n(j)} \in E^{\sigma_j}$, $s_j = s$ și $j \in J$, atunci $\varphi_q = \varphi'_q$ pentru orice $q \in Q$ care apare în α_k ($k = 1,\ldots,n(j)$), deci în virtutea ipotezei inductive rezultă
$$\varphi_{s_{jk}} \alpha_k = \varphi'_{s_{jk}} \alpha_k \quad \left(k = 1, \ldots, n(j)\right),$$
de unde $\varphi_s\alpha = \varphi'_s\alpha$ se obține aplicând (2.17).

Dacă $\alpha = F_x\alpha_1$ unde $x \in X$ și $\alpha_1 \in E_f$, atunci $s = f$ și $\varphi_q = \varphi'_q$ pentru orice $q \in Q$ care apare în α_1, deci în virtutea ipotezei inductive rezultă $\varphi_f\alpha_1 = \varphi'_f\alpha_1$, de unde $\varphi_f\alpha = \varphi'_f\alpha$ se obține aplicând (2.18).

§ 3. **Realizări**

În cele ce urmează, mulțimea V a valuărilor, relațiile $\sim_x$ pe mulțimea V și proiecția canonică π, postulate în axiomele 2.3 și 2.4, vor fi construite în mod concret după cum urmează:

Definiția 3.1. Fie

(3.1) $$V = \underline{A}^{\underline{X}} = \{v = (v_s)_{s \in S} \mid v\colon \underline{X} \to \underline{A}\},$$

(3.2) $$v \sim_x w \Leftrightarrow (v_t y = w_t y, \text{ orice } y \in X_t - \{x\}, \text{ orice } t \in T) \quad (x \in X),$$

(3.3) $$(\pi_t x)(v) = v_t x, \quad v \in V \quad (x \in X_t,\ t \in T).$$

Observația 3.1. Orice valuare v satisface $v_f = \perp$ (funcția vidă), deci v este unic determinată de componentele v_t, $t \in T$.

Observația 3.2. Din (2.16) și (3.3) rezultă că pentru orice interpretare φ,

(3.4) $$(\varphi_t x)(v) = v_t x, \quad v \in V, x \in X_t, t \in T.$$

Definiția 3.2. *Realizarea generată de o pereche* (φ, v), unde φ este interpretare iar v valuare, este familia $(Q \cup S)$ – indexată $\psi = (\psi_m)_{m \in Q \cup S}$ definită prin

(3.5) $$\psi_q = \varphi_q : A^{\sigma_q} \to A_{s_q}, \ (q \in Q),$$

(3.6.1) $$\psi_s\colon E_s \to A_s, \ (s \in S),$$

(3.6.2) $$\psi_s \alpha = (\varphi_s \alpha)(v); \ \alpha \in E_s \ (s \in S).$$

În general numim *realizare*, orice familie $(Q \cup S)$ – indexată obținută în acest mod.

Propoziția 3.1. *Perechea* (φ, v) *care generează o realizare* ψ *este dată de relațiile*

(3.7) $$\varphi|_Q = \psi|_Q, \text{ adică } \varphi_q = \psi_q \text{ pentru orice } q \in Q,$$

(3.8) $$v_t x = \psi_t x, \quad x \in X_t, t \in T.$$

Demonstrația rezultă imediat din relațiile (3.5), (3.6.2) și (3.4):

$$\psi_t = (\varphi_t x)(v) = v_t x.$$

Propoziția 3.2. *Există o bijecție între realizări și perechile formate dintr-o interpretare și o valuare, obținută asociind fiecare asemenea pereche cu realizarea pe care o generează.*

Demonstrație. Asocierea din enunț este evident o funcție, surjectivă în virtutea definiției 3.2 și injectivă conform propoziției 3.1.

Propoziția 3.3. *Există o bijecție între realizări și perechile formate dintr-o asignare și o valuare, obținută asociind fiecare asemenea pereche* (φ, v) *cu realizarea generată de perechea* $(\overline{\varphi}, v)$*, unde* $\overline{\varphi}$ *este interpretarea generată de* φ.

Demonstrație. Rezultă imediat din propozițiile 2.1 și 3.2.

Vom extinde acum relațiile binare $\sim_x$ definite de formula (3.2) pe mulțimea $\underline{A}^{\underline{X}}$ la relații $\sim_x$ definite pe mulțimea $\underline{A}^{\underline{E}}$.

Definiția 3.3. Pentru orice $\omega, \omega' : \underline{E} \to \underline{A}$ și orice $x \in X$,

(3.9) $$\omega \sim_x \omega' \Leftrightarrow (\omega_t y = \omega'_t y, \text{ orice } y \in X_t - \{x\}, \text{ orice } t \in T).$$

Lema 3.1. *Fie* ψ *o realizare și* (φ, v) *perechea ei generatoare. Atunci pentru orice* $\alpha \in E_f$ *și* $x \in X$,

(3.10) $$\left\{(\varphi_f \alpha)(w) \mid w \in \underline{A}^{\underline{X}}, w \sim_x v\right\} = \{\chi_f \alpha \mid \chi \text{ realizare}, \chi|_Q = \psi|_Q, \chi|_T \sim_x \psi|_T\}.$$

Demonstrație. Fie $(\varphi_f \alpha)(w)$ din prima mulțime. Fie χ realizarea generată de perechea (φ, w).

Atunci din (3.7) rezultă $\chi|_Q = \varphi|_Q = \psi|_Q$ și pentru orice $y \in X_t \setminus \{x\}$, $t \in T$, relațiile (3.8.) și (3.9) implică

$$\chi_t y = w_t y = v_t y = \psi_t y,$$

deci $\chi_f \alpha$ este în a doua mulțime. Dar $\chi_f \alpha = (\varphi_f \alpha)(w)$ cf. (3.6.2.).

Reciproc, fie $\chi_f \alpha$ în a doua mulțime și fie (φ', w) perechea generatoare a lui χ. Atunci

$$\varphi'|_Q = \chi|_Q = \psi|_Q = \varphi|_Q,$$

deci $\varphi' = \varphi$ în virtutea corolarului 2.1. Apoi pentru orice $y \in X_t \setminus \{x\}$, $t \in T$, avem, aplicând (3.8) și (3.9),

$$w_t y = \chi_t y = \psi_t y = v_t y,$$

deci $w \sim_x v$, prin urmare $(\varphi_f \alpha)(w')$ este în prima mulțime. Dar $(\varphi_f \alpha)(w) = (\varphi_f' \alpha)(w) = \chi_f \alpha$ cf. (3.6.2).

Definiția 3.4. Orice $\psi = (\psi_m)_{m \in Q \cup S}$ se se prelungește la o familie $(\psi_h)_{h \in J \cup S}$ luând

(3.11) $$\psi_b = \overline{b} \quad (b \in B).$$

Propoziția 3.4. *O familie* $\psi = (\varphi_m)_{m \in Q \cup S}$ *este realizare dacă și numai dacă satisface*

(3.12) $$\psi_q : A^{\sigma_q} \to A_{s_q} \quad (q \in Q),$$

(3.6.1) $$\psi_s : E_s \to A_s \quad (s \in S),$$

(3.13) $$\psi_{s_j} F_j \alpha_1 \ldots \alpha_{n(j)} = \psi_j \left(\psi_{s_{j1}} \alpha_1, \ldots, \psi_{s_{jn(j)}} \alpha_{n(j)} \right)$$

$$\alpha_1 \ldots \alpha_{n(j)} \in E^{\sigma_j} \quad (j \in J) \quad (\text{cf. } 3.11),$$

(3.14) $$\psi_f F_x \alpha = \wedge \left\{ \chi_f \alpha \mid \chi \text{ realizare, } \chi|_Q = \psi|_{Q}, \chi|_T \sim_x \psi|_T \right\},$$

$$\left(x \in X, \alpha \in E_f \right).$$

Demonstrație. Dacă ψ este o realizare, atunci relațiile (3.12) și (3.6.1) rezultă direct din definiția 3.2. Pentru a demonstra (3.13), notăm cu (φ, v) perechea generatoare a lui ψ și folosim (3.6.2) și (3.17), obținând:

$$\psi_{s_j} F_j \alpha_1 \ldots \alpha_{n(j)} = \left(\varphi_{s_j} F_j \alpha_1 \ldots \alpha_{n(j)} \right)(v) = \varphi_j \left((\varphi_{s_1} \alpha_1)(v), \ldots, (\varphi_{s_{jn(j)}} \alpha_{n(j)})(v) \right) =$$

$$= \varphi_j \left(\psi_{s_{j1}} \alpha_1, \ldots, \psi_{s_{jn(j)}} \alpha_{n(j)} \right);$$

dar din (2.5.1) și (3.11) rezultă $\varphi_b = \overline{b} = \psi_b$, iar din (2.19) și (3.7) deducem $\varphi_q = \psi_q$, $q \in Q$. Identitatea (3.14) rezultă aplicând (3.6.2), (2.18) și lema 3.1:

$$\psi_f \left(F_x \alpha \right) = \left(\varphi_f F_x \alpha \right)(v) = \wedge \left\{ \left(\varphi_f \alpha \right)(w) \mid w \in V, w \sim_x v \right\} =$$

$$= \wedge \left\{ \chi_f \alpha \mid \chi \text{ realizare, } \chi|_Q = \psi|_Q, \chi|_T \sim_x \psi|_T \right\}.$$

Reciproc, fie $\psi = (\psi_m)_{m \in Q \cup S}$ o familie satisfăcând (3.6.1) și (3.12) - (3.14). Relația (3.12) arată că $\psi|_Q = (\psi_q)_{q \in Q}$ este o asignare; fie φ interpretarea generată de $\psi/_Q$. Conform observației 2.1, avem $\psi_q = \varphi_q, q \in Q$. Folosind (2.5.1) și (3.11) avem de asemenea $\psi_b = \overline{b} = \varphi_b, b \in B$. În definitiv $\psi_j = \varphi_j$, pentru $j \in J$. Definim acum $v = \left(v_t\right)_{t \in T}$ prin relația (3.8), adică $v_t y = \psi_t y \, (t \in T)$; din relația (3.6.1) se vede că v este o valuare. Pentru a arăta că ψ este realizarea generată de perechea (φ,v) (cf. definiția 3.2), rămâne să demonstrăm (3.6.2), adică $\psi_s\alpha=(\varphi_s\alpha)(v)$, pentru $\alpha\in E_s$ și $s\in S$. Procedăm prin inducție.

Pentru $\alpha=x\in X_t$, $t\in T$, ținând seama de observația 3.2 și (3.8), obținem $(\varphi_t x)(v)=v_t x=\psi_t x$. La pasul inductiv distingem două cazuri.

Dacă $\alpha=F_j\alpha_1\ldots\alpha_{n(j)}$, $\alpha_1\ldots\alpha_{n(j)}\in E^{\sigma_j}$, $j\in J$, **atunci din** (2.17), ipoteza inductivă, proprietatea $\varphi|_J=\psi|_J$ și (3.13) obținem

$$\left(\varphi_{s_j}F_j\alpha_1\ldots\alpha_{n(j)}\right)(v)=\varphi_j\left(\left(\varphi_{s_{j1}}\alpha_1\right)(v),\ldots,\left(\varphi_{s_{jn(j)}}\alpha_{n(j)}\right)(v)\right)=$$
$$=\psi_j\left(\psi_{s_{j1}}\alpha_1,\ldots,\psi_{s_{jn(j)}}\alpha_{n(j)}\right)=\psi_{s_j}F_j\alpha_1\ldots\alpha_{n(j)}.$$

Dacă $\alpha=F_x\alpha_1$, $\alpha_1\in E_f, x\in X_t$, $t\in T$, fie ψ' realizarea generată de $(\varphi,\ v)$. Atunci din (3.6.2), (3.4) și definiția lui v, obținem $\psi'_t y=(\varphi_t y)(v)=v_t y=\psi_t y$, $y\in X_t, t\in T$, adică $\psi'\big|_T=\psi\big|_T$. În plus, $\psi'\big|_Q=\varphi\big|_Q=\psi\big|_Q$. Prin urmare, ținând seama de (2.18), lema 3.1 și (3.14), deducem

$$\left(\varphi_f F_x\alpha_1\right)(v)=\wedge\left\{\left(\varphi_f\alpha_1\right)(w)\,\middle|\,w\in A^X, w\sim_x v\right\}=\wedge\left\{\chi_f\alpha_1\,\middle|\,\chi_{\text{realizare}},\chi\big|_Q=\psi'\big|_Q,\chi\big|_T\sim_x\psi'\big|_T\right\}=$$
$$=\wedge\left\{\chi_f\alpha_1\,\middle|\,\chi_{\text{realizare,}}\chi\big|_Q=\psi\big|_Q,\chi\big|_T\sim_x\psi\big|_T\right\}=\psi_x F_x\alpha_1\ .$$

§ 4. **Auxiliare tehnice**

În continuare vom presupune

Axioma 4.1. Mulțimea A_f este înzestrată cu o relație de ordine parțială $\leq$ cu proprietatea că $\wedge Z$=inf Z pentru orice $Z\in\mathcal{P}(A_f)-\{\phi\}$.

Observația 4.1. Relațiile $\sim_x$ (definiția 3.1 și 3.3) fiind echivalențe și în particular reflexive, mulțimile din membrii drepți ai formulelor (2.9), (2.18) și (3.14) sunt nevide, deci $\wedge$ din aceste formule are înțelesul de inf. În particular, pentru orice $\alpha\in E_f$, orice $x\in X$ și orice valuare v, formula (2.18) implică, din nou via $v\sim_x v$ și definiția infimumului,

(4.1) $$\left(\varphi_f F_x\alpha\right)(v)\leq\left(\varphi_f\alpha\right)(v),$$

deci pentru orice realizare y avem

(4.2) $$\psi_f F_x\alpha\leq\psi_f\alpha.$$

Propoziția 4.1. Fie $s\in S$, $\alpha\in E_s$, ψ *o interpretare, iar v și v' două valuări care coincid în toate variabilele care apar liber în* α. *Atunci*

(4.3) $$\left(\varphi_s\alpha\right)(v)=\left(\varphi_s\alpha\right)(v').$$

Demonstrație. Pentru $\alpha = x \in X_s$, avem $s \in T$ și observația 3.2 implică $(\varphi_s x)(v) = v_s x = v'_s x = (\varphi_s x)(v')$. La pasul inductiv distingem două cazuri.

Dacă $\alpha = F_j \alpha_1 \ldots \alpha_{n(j)}$, concluzia rezultă din (2.17) și ipoteza inductivă.

Rămâne cazul când $\alpha = F_x \alpha_1 \in E_f$, unde $x \in X_t$, $t \in T$ și $\alpha_1 \in E_f$ satisface ipoteza inductivă. Fie w, $w' \in \underline{A}^X$ cu

(4.4) $$w \sim_x v, \quad w' \sim_x v', \quad w_t x = w'_t x.$$

Fie $y \in X_r$, $r \in T$, o variabilă $\neq x$ care apare liber în α_1. Atunci y apare liber în α, deci folosind ipotezele obținem

(4.5) $$w_r y = v_r y = v'_r y = w'_r y.$$

Din (4.4) și (4.5) se vede că w și w' coincid în toate variabilele care apar liber în α_1, prin urmare ipoteza inductivă implică

(4.6) $$(\varphi_f \alpha_1)(w) = (\varphi_f \alpha_1)(w').$$

Pe de altă parte, din relația (2.18) și definiția infimumului rezultă

$$(\varphi_f F_x \alpha_1)(v') \leq (\varphi_f \alpha_1)(w')$$

de unde, folosind (4.6), obținem

$$(\varphi_f F_x \alpha_1)(v') \leq (\varphi_f \alpha_1)(w)$$

pentru orice $w \in \underline{A}^X$ cu $w \sim_x v$, prin urmare

$$(\varphi_f F_x \alpha_1)(v') \leq \wedge \left\{ (\varphi_f \alpha_1)(w) \,\middle|\, w \in \underline{A}^X, w \sim_x v \right\} = (\varphi_f F_x \alpha_1)(v)$$

și în mod analog se obține inegalitatea contrară.

Propoziția 4.2. *Fie $s \in S$, $\alpha \in E_s$ iar ψ și ψ' două realizări care coincid în simbolurile din Q care apar în α și în variabilele libere din α. Atunci $\psi_s \alpha = \psi'_s \alpha$.*

Demonstrație. Fie (φ, v) și (φ', v') perechile generatoare ale realizărilor ψ și respectiv ψ'. Atunci $\varphi|_Q = \psi|_Q$ și $\varphi'|_Q = \psi'|_Q$ coincid în simbolurile din Q care apar în α, deci $\varphi_s \alpha = \varphi'_s \alpha$ conform propoziției 2.3. Prin urmare

(4.7) $$\psi_s \alpha = (\varphi_s \alpha)(v) = (\varphi'_s \alpha)(v).$$

Pe de altă parte, dacă $y \in X_r$, $r \in T$, este o variabilă care apare liber în α, atunci din (3.8) rezultă

$$v_r y = \psi_r y = \psi'_r y = v'_r y,$$

deci propoziția 4.1. implică

$$(\varphi'_s \alpha)(v) = (\varphi'_s \alpha)(v') = \psi'_s \alpha,$$

de unde, ținând seama de (4.7), obținem $\psi_s \alpha = \psi'_s \alpha$.

Propoziția 4.3. *Fie $s \in S$, $\alpha \in E_s$, $t \in T$, $x \in X_t$ și $\tau \in E_t$. Fie φ, φ' interpretări, iar v, v' valuări. Dacă:*

(i) *φ, φ' coincid în toate simbolurile din Q care apar în α,*

(ii) *v, v' coincid în toate variabilele $\neq x$ care apar liber în α,*

(iii) $(\varphi_t x)(v) = (\varphi'_t \tau)(v')$,

(iv) $\alpha(x/\tau)$ *există,*

atunci

(4.8) $$(\varphi_s \alpha)(v) = (\varphi'_s \alpha(x/\tau))(v').$$

Demonstrația prin inducție asupra expresiei α care satisface (i)-(iv) va fi împărțită în cazuri.

1. $\alpha = y \in X_s$, deci $s \in T$. Dacă $y \neq x$, atunci folosind (1.16), (3.4) și (ii), obținem

$$(\varphi'_s y(x/\tau))(v') = (\varphi'_s y)(v') = v'_s y = v_s y = (\varphi_s y)(v),$$

iar dacă $y = x$, atunci $s = t$ cf. (1.2), iar relațiile (1.14) și (iii) implică

$$(\varphi'_s x(x/\tau))(v') = (\varphi'_t \tau)(v') = (\varphi_t x)(v).$$

2. $s = s_j$, $j \in J$, $\alpha = F_j\, \alpha_1 \ldots \alpha_{n(j)}$, unde $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n(j)}$ satisfac enunțul propoziției. Deoarece α satisface (i)-(iv) (unde (iii) este independentă de α), rezultă, ținând seama de propoziția 1.2, că fiecare din expresiile $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n(j)}$ satisface (i)-(iv). Folosind de asemenea (2.19), ipoteza inductivă și observația că $\varphi_j = \varphi'_j$ (din (i) dacă $j \in Q$, altfel $\varphi_b = \overline{b} = \varphi'_b$), obținem

$$\left(\varphi'_s\left(F_j \alpha_1 \ldots \alpha_{n(j)}\right)(x/\tau)\right)(v') = \left(\varphi'_{s_j}\left(F_j \alpha_1(x/\tau) \ldots \alpha_{n(j)}(x/\tau)\right)\right)(v') =$$

$$= \varphi'_j\left((\varphi'_{s_{j_1}} \alpha_1(x/\tau))(v'), \ldots, \left(\varphi'_{s_{j_{n(j)}}} \alpha_{n(j)}(x/\tau)\right)(v')\right) = \varphi_j\left((\varphi_{s_{j_1}} \alpha_1)(v), \ldots, \left(\varphi_{s_{j_{n(j)}}} \alpha_{n(j)}\right)(v)\right) =$$

$$= \left(\varphi_s F_j \alpha_1 \ldots \alpha_{n(j)}\right)(v).$$

3. $s = f$, $\alpha = F_y \alpha_1$, unde $y \in X_r$, $r \in T$, iar $\alpha_1 \in E_f$ satisface enunțul propoziției.

Dacă $y = x$, atunci variabila x nu apare liber în α, deci din (ii) rezultă că v, v' coincid în toate variabilele care apar liber în α, așa încât aplicând (1.15) și propozițiile 4.1 și 2.3 (cf. (ii)), obținem

$$(\varphi'_f(F_x \alpha_1)(x/\tau))(v') = (\varphi'_f F_x \alpha_1)(v') = (\varphi'_f F_x \alpha_1)(v) = (\varphi_f F_x \alpha_1)(v).$$

Rămâne să terminăm demonstrația pentru cazul $y \neq x$. Din propoziția 1.3 rezultă că $\alpha_1(x/\tau)$ există, y nu apare în τ și are loc relația (1.20) pentru $\alpha := \alpha_1$. Folosind de asemenea (2.18), obținem

(4.9) $$\left(\varphi'_f\left(F_y \alpha_1\right)(x/\tau)\right)(v') = \left(\varphi'_f F_y(\alpha_1(x/\tau))\right)(v') = \bigwedge\left\{\varphi'_f \alpha_1(x/\tau)(w') \,\middle|\, w' \in \underline{A}^X, w' \sim_y v'\right\}.$$

Stabilim acum o bijecție

(4.10.1) $$W := \left\{w \in \underline{A}^X \,\middle|\, w \sim_y v\right\} \cong W' := \left\{w' \in \underline{A}^X \,\middle|\, w' \sim_y v'\right\}$$ asociind fiecare $w \in W$ cu acel $w' \in W'$ pentru care

(4.10.2) $$w_r y = w'_r y.$$

Vom arăta acum că proprietățile (i)-(iv) sunt verificate relativ la f, α_1, t, x, τ, φ, φ' și orice valuări $w \in W$, $w' \in W'$ satisfăcând (4.10.2).

Proprietatea (iv) a fost deja stabilită, iar (i) rezultă din proprietatea (i) pentru α, deoarece α și α_1 conțin aceleași simboluri din Q.

(ii) Fie $z \in X_q - \{x\}$, $q \in T$, o variabilă care apare liber în α_1; trebuie să demonstrăm că $w_q z = w'_q z$. Dacă $z = y$, atunci $q = r$ și egalitatea se reduce la (4.10.2). Dacă $z \neq y$, atunci z apare liber în α, deci din $w \in W$, proprietatea (ii) pentru α și $w' \in W'$ deducem $w_q z = v_q z = v'_q z = w'_q z$.

(iii) Din observația 3.2, $w \in W$ și (iii) relativă la v, v', obținem

$$(\varphi_t x)(w) = w_t x = v_t x = (\varphi_t x)(v) = (\varphi'_t \tau)(v')$$

și mai trebuie să demonstrăm că

$$(\varphi'_t \tau)(v') = (\varphi'_t \tau)(w'),$$

ceea ce rezultă din propoziția 4.1, dacă arătăm că v' și w' coincid în toate variabilele (libere!) din τ. Aceasta rezultă din faptul că $w' \sim_y v'$ și y nu este variabilă din τ.

Deoarece am demonstrat (i)-(iv) pentru α_1, suntem în măsură să aplicăm ipoteza inductivă; rezultă

$$(4.11) \qquad (\varphi_f \alpha_1)(w) = (\varphi'_f \alpha_1(x/\tau))(w').$$

Din relația (4.11) scrisă pentru toate perechile (w, w') în corespondența (4.10), obținem

$$\wedge\left\{(\varphi_1\alpha_1)(w) \middle| w \in W\right\} = \wedge\left\{(\varphi'_f\alpha_1(x/\tau))(w') \middle| w' \in W'\right\},$$

ceea ce, în virtutea relațiilor (4.10.1), (2.18) și (4.9), înseamnă

$$(\varphi_f F_y \alpha_1)(v) = \left(\varphi'_f (F_y \alpha_1)(x/\tau)\right)(v').$$

Coloralul 4.1. *Fie* $s\in S$, $\alpha\in E_s$, $t\in T$, $x\in X_t$, $\tau\in E_t$ *iar* φ, φ' *interpretări. Dacă:*

(i) φ, φ' *coincid în toate simbolurile din* Q *care apar în* α,

(ii) $\varphi_t x = \varphi'_t \tau$,

(iii) $\alpha(x/\tau)$ *există,*

atunci

$$(4.12) \qquad \varphi_s \alpha = \varphi'_s \alpha(x/\tau).$$

Demonstrație. Se aplică propoziția 4.3 cu $v = v'$.

Corolarul 4.2. *Fie* $s\in S$, $\alpha\in E_s$, $t\in T$, $x\in X_t$, $\tau\in E_t$ *iar* ψ, ψ' *realizări. Dacă:*

(i) ψ, ψ' *coincid în toate simbolurile din* Q *care apar în* α *și în toate variabilele* $\neq x$ *care apar liber în* α,

(ii) $\psi_t \tau = \psi'_t \tau$,

(iii) $\alpha(x/t)$ *există,*

atunci

$$(4.13) \qquad \psi_s \alpha = \psi'_s \alpha(x/t).$$

Demonstrație. Fie (φ, v) și (φ', v') perechile care generează ψ și respectiv ψ'. Folosind propoziția 3.1, obținem:

1) $\psi|_Q = \varphi|_Q$ și $\psi'|_Q = \varphi'|_Q$, deci interpretările φ, φ' coincid în toate simbolurile din Q care apar în α;

2) Fie $y\in X_r$, $r\in T$, o variabilă $\neq x$ care apare liber în α. Atunci $v_r y = \psi_r y = \psi'_r y = v'_r y$;

3) $(\varphi_t x)(v) = \psi_t x = \psi'_t \tau = (\varphi'_t \tau)(v')$.

Din 1)-3) și (iii) rezultă că putem aplica propoziția 4.3 și deci

$$\psi_s \alpha = (\varphi_s \alpha)(v) = (\varphi'_s \alpha(x/\tau))(v') = \varphi'_s \alpha(x/\tau).$$

Corolarul 4.3. *Fie* $\alpha\in E_f$, $t\in T$, $x\in X_t$, $\tau\in E_t$ *iar* ψ *realizare. Dacă* $\alpha(x/\tau)$ *există, atunci*

$$(4.14) \qquad \psi_f F_x \alpha \leq \psi_f \alpha(x/\tau).$$

Demonstrație. Fie (φ, v) perechea care generează ψ. Fie v' valuarea dată de $v' \sim_x v$ și $v'_t x = (\varphi_t \tau)(v)$. Fie ψ' realizarea generată de perechea (φ, v').

Din propoziția 3.1 rezultă

$$(4.15) \qquad \psi'|_Q = \varphi|_Q = \psi|_Q$$

iar observația 3.2 arată că pentru orice $y\in X_r - \{x\}$, $r\in T$, avem

(4.16) $$\psi'_t y = (\varphi_t y)(v') = v'_t y = v_t y = (\varphi_t y)(v) = \psi_t y.$$

Din relațiile (4.15), (4.16) și (3.14) rezultă

(4.17) $$\psi_f F_x \alpha \le \psi'_f \alpha.$$

Pe de altă parte, vom observa că ipotezele (i)-(iii) ale colorarului 4.2 sunt verificate pentru f, α, t, x, τ și realizările ψ', ψ. Într-adevăr, din (4.15) și (4.16) rezultă în particular (i), condiția (iii) este verificată prin ipoteză iar (iii) se deduce ținând seama de observația 3.2:

$$\psi'_t x = (\varphi_t x)(v') = v'_t x = (\varphi_t \tau)(v) = \psi_t \tau.$$

Aplicând corolarul 4.2, obținem

$$\psi'_f \alpha = \psi_f \alpha(x/\tau)$$

ceea ce, împreună cu (4.17), conduce la (4.14).

Corolarul 4.4. *Fie* $\alpha \in E_f$, $t \in T$, *iar* $x, y \in X_t$ *astfel încât* y *nu apare în* α. *Atunci* $\alpha\ (x/y)$ *există și pentru orice realizare* ψ *avem*

(4.18) $$\psi_f F_x \alpha = \psi_f F_y \alpha(x/y).$$

Demonstrație. Existența expresiei $\alpha(x/y)$ este evidentă. Fie ψ o realizare. Stabilim acum o bijecție

(4.19.1) $$R := \left\{ \chi \middle| \chi|_Q = \psi|_Q, \chi|_T \sim_x \psi|_T \right\} \cong R' := \left\{ \chi' \middle| \chi'|_Q = \psi|_Q, \chi'|_T \sim_y \psi|_T \right\}$$

asociind fiecare $\chi \in R$ cu acel $\chi' \in R'$ pentru care

(4.19.2) $$\chi_t x = \chi'_t y.$$

Să observăm că fiecare pereche de realizări χ, χ' astfel asociată satisface ipotezele (i)-(iii) ale corolarului 4.2 pentru f, α, t, x și $\tau := y$. Într-adevăr, $\chi|_Q = \psi|_Q = \chi'|_Q$ și pentru orice variabilă $z \ne x$ care apare liber în a avem $z \ne y$, deci notând cu $r \in T$ sortul pentru care $z \in X_r$ avem $\chi_r z = \psi_r z = \chi'_r z$. Prin urmare condiția (i) este satisfăcută, ipoteza (ii) se reduce la (4.19.2), iar (iii) a fost stabilită la început.

Din corolarul 4.2 rezultă atunci

$$\chi_f \alpha = \chi'_f \alpha(x/y)$$

și folosind această egalitate pentru fiecare pereche de realizări (χ, χ') în corespondența (4.19), precum și (3.14), obținem

$$\psi_f F_x \alpha = \wedge\left\{ \chi_f \alpha \middle| \chi \in R \right\} = \wedge\left\{ \chi'_f \alpha(x/y) \middle| \chi' \in R' \right\} = \psi_f F_y \alpha(x/y).$$

Lema 4.1. *Fie* $s \in S$ *și* $\alpha \in E_s$. *Fie* $F_x\beta$ *un subcuvânt al lui* α *astfel încât* $\beta \in E_f$ *și* $x \in X$ *nu are apariții legate în* β. *Fie* α^+ *cuvântul obținut din* α *prin înlocuirea subcuvântului* $F_x\beta$ *cu* $F_y\beta(x/y)$, *unde* $y \in X$ *este o variabilă de același sort cu* x *și care nu apare în* α. *Atunci* $\alpha^+ \in E_s$ *și* $\psi_s\alpha = \psi_s\alpha^+$ *pentru orice realizare* ψ.

Demonstrație prin inducție asupra lui α.

1) Pentru $\alpha = z \in X$, concluzia rezultă din $\alpha^+ = \alpha$.

2) Fie $\alpha = F_j\ \alpha_1 \ldots \alpha_{n(j)}$, unde $j \in J$, $s_j = s$ și $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n(j)}$ satisfac ipoteza de inducție. Fie $k \in \{1, \ldots, n(j)\}$ astfel α^+ se obține din α efectuând transformarea indicată asupra subexpresiei α_k. Fie $\alpha^*_h = \alpha_h$ pentru $h \in \{1, \ldots, n(j)\} - \{k\}$ și $\alpha^*_k = \alpha^+_k$. Ținând seama de ipoteza inductivă și de (3.13), obținem

$$\psi_s\left(F_j\alpha_1\ldots\alpha_{n(j)}\right)^{+}=\psi_sF_j\alpha_1^{+}\ldots\alpha_{n(j)}^{+}=\psi_j\left(\psi_{s_{j_1}}\alpha_1^{*},\ldots,\psi_{s_{n(j)}}\alpha_{n(j)}^{+}\right)=$$

$$=\psi_j\left(\psi_{s_{j_1}}\alpha_1,\ldots,\psi_{s_{j_{n(j)}}}\alpha_{n(j)}\right)=\psi_sF_j\alpha_1\ldots\alpha_{n(j)}.$$

3) Fie $s=f$ și $\alpha=F_z\alpha_1$, unde $z\in X$ și $\alpha_1\in E_T$ satisface ipoteza inductivă. Trecerea $\alpha\mapsto$ este obținută printr-o înlocuire de forma $F_x\beta\mapsto F_y\beta(x/y)$ satisfăcând condițiile din enunț.

Dacă $F_x\beta=\alpha_1$, adică $z=x$ și $\alpha_1=\beta$, atunci $\alpha^+=F_y\alpha_1(x/y)\in E_f$ și $\psi_f\alpha=\psi_f\alpha^+$ rezultă corolarul 4.4.

Dacă $F_y\beta$ este subcuvânt al lui α_1, atunci

$$\psi_f\alpha^+=\psi_fF_z\alpha_1^+=\bigwedge\left\{\chi_f\alpha_1^+ \middle| \chi \text{ realizare, } \chi\big|_Q=\psi\big|_Q,\ \chi\big|_T\sim_z\psi\big|_T\right\}=$$

$$=\bigwedge\left\{\chi_f\alpha_1 \middle| \chi \text{ realizare, } \chi\big|_Q=\psi\big|_Q,\ \chi\big|_T\sim_z\psi\big|_T\right\}=\psi_fF_z\alpha_1=\psi_f\alpha.$$

Propoziția 4.4 *Fie $x\in X$. Dacă mulțimea X este infinită, atunci pentru orice $s\in S$ și $\alpha\in$ există $\alpha^+\in E_s$ astfel încât α^+ nu conține apariții legate ale variabilei x și*

(4.20) $\alpha=\alpha^+\Leftrightarrow$ variabila x nu are apariții legate în α,

(4.21) $\left(F_j\alpha_1\ldots\alpha_{n(j)}\right)^+=F_j\alpha_1^+\ldots\alpha_{n(j)}^+,\alpha_1\ldots\alpha_{n(j)}\in E^{\sigma_j},j\in J,$

(4.22) $\left(F_x\alpha\right)^+=F_y\alpha^+(x/y)$, unde $y\in X$ nu apare în α,

(4.23) $\left(F_z\alpha\right)^+=F_z\alpha^+,z\in X\setminus\{x\},$

(4.24) $\psi_s\alpha=\psi_s\alpha^+$ pentru orice realizare ψ.

Demonstrația rezultă imediat aplicând de mai multe ori lema 4.1.

CAPITOLUL 2

CALCULUL CLASIC AL PREDICATELOR DE ORDINUL I

În acest capitol plecăm de la o particularizare a sistemului axiomatic din capitolul precedent, pentru a construi calculul clasic al predicatelor de ordinul I. Punctul culminant al acestei construcții va fi teorema de completitudine a lui Gödel. În ultimul paragraf obținem prin încă o particularizare, calculul clasic al propozițiilor.

§ 1. Limbajul

Fie $T = \{t\}$, adică există un singur sort termen, notat t. Așadar $S = \{t, f\}$.

Fie, ca în (I.1.2), $X = (X_t, X_f)$, unde $X_f = \phi$. Notația (I.1.3) revine la a nota cu X în loc de X_t mulțimea variabilelor individuale (toate fiind de sortul t).

Pentru fiecare indice de operație $j \in J$, simbolul de operație F_j din construcția algebrei Peano $\underline{E}$ va fi înlocuit cu simbolul j. Mulțimea J este dată de descompunerea (I.2.1), adică $J = B \cup Q$, în care mulțimea B este concretizată astfel:

(1.1) $\quad B = \{\rightarrow, c\}$,

unde $\rightarrow$ se numește *implicație* și *c formula contradictorie* sau *contradicție*, iar mulțimea Q se descompune sub forma

(1.2) $\quad Q = O \cup P, \quad O \cap P = \phi$,

unde elementele din O se numesc *funcții* sau *operații*, iar elementele din P se numesc *predicate*.

Pentru fiecare $x \in X$, simbolul de operație F_x din construcția algebrei Peano $\underline{E}$ va fi înlocuit cu simbolul $\forall x$.

Pentru fiecare simbol de operație $i \in I = J \cup X$, dacă $s_{i_1} = \ldots = s_{i_{n(i)}} = s$, atunci produsul

$$A^{\sigma_i} = A_{s_{i_1}} x \ldots x A_{s_{i_{n(i)}}}$$

va fi notat simplu cu $A_s^{n(i)}$, iar aritatea (σ_i, s_i) va fi notată $(s^{n(i)}, s_i)$.

Presupunem că aritatea ar satisface condițiile

(1.3) $\quad ar(o) = (t^{n(o)}, t)$ pentru orice $o \in O$;

(1.4) $\quad ar(p) = (t^{n(p)}, f)$ pentru orice $p \in P$;

(1.5) $\quad ar(\rightarrow) = (f^2, f)$, $ar(c) = (\lambda, f)$ (λ = cuvântul vid);

(1.6) $\quad ar(x) = (f, f)$ pentru orice $x \in X$;

observăm că axiomele (I.1.7) și (I.1.8) sunt satisfăcute.

În cap. 0, în legătură cu subalgebra $\underline{\overline{X}}$ generată de o submulțime $\underline{X}$ a unei algebre $\underline{A}$ am amintit definiția recurentă a elementelor mulțimii $\bigcup_{s \in S} \overline{X}_s$. Această construcție este valabilă în particular pentru reuniunea $\bigcup_{s\in S} E_s$ a componentelor algebrei Peano $\underline{E}$ liber generate de $\underline{X}$. În cazul mai particular în care ne aflăm, obținem următoarea definiție recurentă a mulțimii $E_t \cup E_f$:

(T0) variabilele individuale sunt termeni (adică $X \subset E_t$);

(T1) dacă $o \in O$ și $\tau_1,...,\tau_{n(o)}$ sunt termeni, atunci $o\tau_1...\tau_{n(o)}$ este termen (cf. (1.3));

(T2) orice termen se obține aplicând regulile T0, T1 de un număr finit de ori (cf. (1.4) – (1.6);

(F0) dacă $p \in P$ și $\tau_1,...,\tau_{n(p)}$ sunt termeni, atunci $p\tau_1...\tau_{n(o)}$ este formulă (cf. (1.4));

(F1) c este formulă și dacă α, β sunt formule atunci $\rightarrow \alpha\beta$ este formulă iar dacă $x \in X$ atunci $\forall x\alpha$ este formulă (cf. (1.5), (1.6));

(F2) orice formulă se obține aplicând regulile (F0), (F1) de un număr finit de ori (cf. (1.3), (1.4)).

Am regăsit astfel definițiile clasice (T0) – (T1) a termenilor și (F0) – (F2) a formulelor.

Introducem acum definițiile

(1.7) $\qquad N\alpha \equiv \rightarrow\alpha c,$

(1.8) $\qquad \vee\alpha\beta \equiv \rightarrow N\alpha\beta \equiv \rightarrow \rightarrow\alpha c\beta,$

(1.9) $\qquad \wedge\alpha\beta \equiv N\rightarrow\alpha N\beta \equiv \rightarrow\rightarrow\alpha\rightarrow\beta cc,$

(1.10) $\qquad \exists x\alpha \equiv N\forall xN\alpha \equiv \rightarrow\forall x\rightarrow\alpha cc,$

pentru α, $\beta \in E_f$ și $x \in X$, unde $\equiv$ înseamnă că scrierea din stânga acestui semn se folosește ca o prescurtare pentru expresia din dreapta.

Pentru a nu contrazice obișnuințele noastre de scriere, în continuare nu vom respecta scrierile prefixate $\rightarrow ab$, $\vee ab$, $\wedge ab$, ci le vom înlocui cu scrierile infixate $a \rightarrow b$, $a \vee b$, $a \wedge b$. De exemplu, relațiile (1.7) – (1.10) le scriem sub forma

(1.7′) $\qquad N\alpha \equiv \alpha\rightarrow c,$

(1.8′) $\qquad \alpha\vee\beta \equiv N\alpha\rightarrow\beta \equiv (\alpha\rightarrow c)\rightarrow\beta,$

(1.9′) $\qquad \alpha\wedge\beta \equiv N(\alpha\rightarrow N\beta) \equiv (\alpha\rightarrow(\beta\rightarrow c))\rightarrow c,$

(1.10′) $\qquad \exists x\alpha \equiv N\forall xN\alpha \equiv (\forall x(\alpha\rightarrow c))\rightarrow c.$

În scrierea infixată folosim paranteze, precum și următoarele convenții de suprimare a unor paranteze (asemănătoare cu convenția din algebra obișnuită, „• leagă mai tare decât +", datorită căreia $a \bullet b + c$ se citește $((a \bullet b) + c)$: conectorii $\forall x$ și $\exists x$ leagă la fel de tare și mai tare decât N, acesta leagă mai tare decât $\wedge$, care la rândul său leagă mai tare decât $\vee$, iar $\rightarrow$ leagă cel mai slab. Astfel, formula $\forall xN\alpha\vee\beta\vee\gamma\rightarrow\delta$ se citește $(((\forall x(N\alpha))\vee\beta)\vee\gamma)\rightarrow\delta$, în (1.10′) putem scrie $\forall x(\alpha\rightarrow c)\rightarrow c$ etc.

Folosirea scrierii infixate este un abuz de notație care ușurează atât procesul euristic, cât și memorizarea diferitelor formule de calcul. Pe de altă parte, revenirea la scrierea prefixată se poate face oricând dorim, fără nici o dificultate. De altfel trecerile de la scrierea prefixată la cea infixată și invers se pot programa la calculator.

În acest moment putem înțelege motivul pentru care în definiția I.1.3 s-a adoptat restricția conform căreia expresia $\alpha(x/\tau)$ este definită numai dacă înlocuirea aparițiilor libere ale variabilei x cu termenul τ nu creează apariții ale unor variabile din τ care să fie legate în cuvântul rezultat. Dacă α este termen, această condiție este împlinită. Dacă α este formulă, ideea este că $\alpha(x/\tau)$ reprezintă o condiție mai particulară decât aceea exprimată de α. Dacă însă prin substituirea lui x cu α este încălcată restricția amintită, atunci formula rezultată poate altera sensul afirmației α. De exemplu, fie $p(x,y)$ un predicat cu $n(p) = 2$ și fie $\alpha = \exists yp(x, y) \equiv N\forall yNp(x, y)$. Atunci definiția I.1.3 interzice să substituim variabila x cu termenul y; dacă de exemplu, $p(x, y)$ este predicatul $x \neq y$,atunci α este predicatul în x, $\alpha \equiv \exists y\, x \neq y$, pe când rezultatul substituirii lui x cu y este propoziția falsă $\exists y\, y \neq y$.

De asemenea subliniem faptul că $\alpha(x/\tau)$, atunci când este definită, se obține înlocuind toate aparițiile libere ale lui x cu τ, dar lăsând neschimbate toate aparițiile legate ale lui x.

De exemplu, dacă $o\in O$, $n(o) = 1$, iar $p,, q\in P$, $n(p) = 2$, $n(q) = 3$ și dacă $x, y, z\in X$, atunci

$$\left(\forall x p(x,z) \vee q(x,o(x))\right)(x/y) = \forall x p(x,z) \vee q(y,o(y)).$$

Definiția 1.1. Tripletul $L = (X, E_t, E_f)$ (unic determinat de X!) va fi numit *limbajul calculului cu predicate* considerat. Un limbaj $L' = (X', E_t', E_f')$ se numește *extensie* a limbajului L dacă $X \subseteq X'$(și prin urmare $E_s \subseteq E_s'$ $(s = t, f)$).

§ 2. Semantica

Fie $D \neq \phi$ o mulțime numită *domeniu de interpretare.*

Pentru realizarea axiomei I.2.2, alegem mai întâi

(2.1) $\underline{A} = (A_t, A_f),\ A_t = D,\ A_f = \{0,1\},$

ca S – *mulțime standard.* Ținând seama de aritățile (1.5) ale operațiilor $\bar{b} \in B$, se vede că în acest cadru A_t nu joacă nici un rol în S – *algebra standard* (cf. (I.2.2)); vom asimila această algebră cu algebra booleană

(2.2) $\mathbf{A}_o = (\{0,1\}, \rightarrow, 0, \wedge),$

adică $1 \rightarrow 0 = 0$, altfel $x \rightarrow y = 1$, iar $x \wedge y = \min(x, y)$ (față de ordinea $0 < 1$), așa încât axioma I.4.1 este satisfăcută.

Definiția I.3.1 se particularizează după cum urmează. Deoarece $\underline{X} = (X, f)$, componenta A_f^{ϕ} a S – *mulțimii* $\underline{A}^{\underline{X}}$ se reduce la funcția vidă $\perp$, așa încât vom identifica pe $\underline{A}^{\underline{X}}$ cu componenta A_t^X. Astfel spus, vom lua ca mulțime a *valuărilor,*

(2.3) $V = D^X.$

Apoi, pentru $v, w\in V$ și $x\in X$, punem

(2.4) $v \sim_x w \Leftrightarrow (vy = wy, \text{ orice } y\in X - \{x\});$

mai general, pentru orice $\omega, \omega' : \underline{E} \rightarrow \underline{A}$ punem

(2.4′) $\omega \sim_x \omega' \Leftrightarrow \left(\omega_t y = \omega_t' y,\ \text{orice } y \in X - \{x\}\right).$

În sfârșit, ținând seama și de (I.2.11), luăm

(2.5) $\pi: X \rightarrow D^V;\ (\pi x)(v) = vx,\ v \in V,\ x \in X.$

Va fi comod să gândim caracterizarea interpretărilor dată de propoziția I.2.2, pur și simplu ca o definiție a lor. Așadar, ținând seam și de cele precedente, vedem că o *interpretare* este o familie $Q \cup S$– indexată $(\varphi_m)_{m\in Q\cup S}$ astfel încât:

(2.6) $\varphi_0 : D^{n(o)} \rightarrow D\ (o\in O),$

(2.7) $\varphi_p : D^{n(p)} \rightarrow \{0,1\}\ (p\in P),$

(2.8) $\varphi_t : E_t \rightarrow D^V,$

(2.9) $\varphi_f : E_f \rightarrow \{0,1\}^V,$

(2.10) $(\varphi_t x)(v) = vx,\ v\in V,\ (x\in X),$

(2.11) $\left(\varphi_t o \tau_1 \ldots \tau_{n(o)}\right)(v) = \varphi_o\left(\left(\varphi_t \tau_1\right)(v), \ldots, \left(\varphi_t \tau_{n(o)}\right)(v)\right),$

$v \in V,\ \tau_1, \ldots, \tau_{o(n)} \in E_t\ (o \in O),$

(2.12) $$\left(\varphi_f p\tau_1\ldots\tau_{n(p)}\right)(\nu)=\varphi_p\left(\left(\varphi_t\tau_1\right)(\nu),\ldots,\left(\varphi_t\tau_{n(p)}\right)(\nu)\right),$$

$$\nu\in V,\ \tau_1,\ldots,\tau_{o(p)}\in E_t\ \left(p\in P\right),$$

(2.13) $$\left(\varphi_f\rightarrow\alpha\beta\right)(\nu)=\left(\varphi_f\alpha\right)(\nu)\rightarrow\left(\varphi_f\beta\right)(\nu),$$

$$\nu\in V,\ \alpha,\beta\in E_f,$$

(2.14) $$\left(\varphi_f c\right)(\nu)=0,\ \nu\in V,$$

(2.15) $$\left(\varphi_f\forall x\alpha\right)(\nu)=1\Leftrightarrow\left(\varphi_f\alpha\right)(w)=1 \text{ pentru orice } w\in V \text{ cu } w\sim_x \nu,$$

$$\nu\in V,\ \alpha\in E_f,\ x\in X.$$

În transcrierea (2.15) a condiției (I.2.18) am ținut seama de faptul că în algebra booleană $\{0,1\}$, $a=b$ dacă și numai dacă ($a=1\Leftrightarrow b=1$); de asemenea, am utilizat proprietatea $a_1\wedge\ldots\wedge a_n=1\Leftrightarrow a_1=\ldots=a_n=1$.

Urmărind relațiile (2.10)-(2.15), ne dăm seama că de fapt ele descriu construcția recurentă a homomorfismului

$$\varphi=\left(\varphi_t,\varphi_f\right):\ \underline{E}\rightarrow\underline{A}_\varphi^V$$

care prelungește aplicația π dată de (2.5) (cf. definiția I.2.4 și cap. 0). Așa s-a demonstrat, de altfel, propoziția I.2.2, particularizează mai sus în forma (2.6)-(2.16).

Amintim că interpretarea $\varphi=(\varphi_m)_{m\in Q\cup S}$ dată de relația (2.6)-(2.16) este prelungirea asignării $(\varphi_q)_{q\in Q}$ date de relațiile (2.6), (2.7). Cititorul este îndemnat să reconstitue și algebrele din definițiile I.2.2 și I.2.3, care au constituit trepte către propoziția I.2.2.

Realizarea $\psi=(\psi_m)_{m\in Q\cup S}$ generată de o interpretare $\varphi=(\varphi_m)_{m\in Q\cup S}$ și o valuare ν a fost introdusă în definiția I.3.2. Conform propoziției I.3.4 aplicate în cadrul de față, o familie $Q\cup S$ – indexată $\psi=(\psi_m)_{m\in Q\cup S}$ este realizare dacă și numai dacă

(2.16) $$\psi_o{:}D^{n(o)}\rightarrow D\quad\left(o\in O\right),$$

(2.17) $$\psi_p{:}D^{n(p)}\rightarrow\{0,1\}\quad\left(p\in P\right),$$

(2.18) $$\psi_t{:}E_t\rightarrow D,$$

(2.19) $$\psi_f{:}E_f\rightarrow\{0,1\},$$

(2.20) $$\psi_t o\tau_1\ldots\tau_{n(o)}=\psi_o\left(\psi_t\tau_1,\ldots,\psi_t\tau_{n(o)}\right),$$

$$\tau_1,\ldots,\tau_{n(o)}\in E_t\ \left(o\in O\right),$$

(2.21) $$\psi_f p\tau_1\ldots\tau_{n(p)}=\psi_p\left(\psi_t\tau_1,\ldots,\psi_t\tau_{n(p)}\right),$$

$$\tau_1,\ldots,\tau_{n(p)}\in E_t\ \left(p\in P\right),$$

(2.22) $$\psi_f\rightarrow\alpha\beta=\psi_f\alpha\rightarrow\psi_f\beta,\ \alpha,\ \beta\in E_f,$$

(2.23) $$\psi_f c=0,$$

(2.24) $\psi_f \forall x\alpha = 1 \Leftrightarrow \chi_f\alpha = 1$ pentru orice realizare χ cu $\chi\big|_Q = \psi\big|_Q$ și $\chi_t \sim_x \psi_t$, $\alpha \in E_f$, $x \in X$.

Observația 2.1. În particular $\psi_f N\alpha = (\psi_f\alpha)'$, unde $0' = 1$ și $1' = 0$ (deoarece $\psi_f N\alpha = \psi_f(\alpha \to c) = \psi_f\alpha \to 0$).

Introducem acum două concepte fundamentale ale semanticii.

Definiția 2.1. Spunem că o realizare ψ *validează* o formulă $\alpha \in E_f$ (o mulțime $H \subset E_f$) sau că este un *model* pentru α (pentru H), dacă $\psi_f \alpha = 1$ (dacă $\psi_f(H) = 1$, adică $\psi_f\gamma = 1$ pentru orice $\gamma \in H$). O mulțime $H \subset E_f$ se zice *consistentă semantic,* dacă există un model pentru H; altfel H se zice *inconsistentă semantic.*

Noțiunea de consistență semantică modelează următoarea situație din matematică (și, mutatis mutandis, din orice domeniu de activitate): când întemeiem un capitol de matematică pe o mulțime H de axiome, se cere ca această mulțime de axiome să aibă măcar un model, adică să existe măcar o structură în care toate axiomele să fie verificate (adevărate).

Definiția 2.2. Fie $H \subseteq E_f$ și $\alpha \in E_f$. Spunem că H *implică semantic* α și scriem

(2.26) $H \models \alpha$

dacă pentru orice realizare ψ avem

(2.27) $\psi_f(H) = 1 \Rightarrow \psi_f\alpha = 1,$

adică orice model pentru H este model pentru α. În particular dacă $\phi \models \alpha$ vom scrie mai simplu

(2.28) $\models \alpha$

și vom spune că α este o *formulă validă* sau *tautologie.*

Observația 2.2. O formulă α este validă atunci și numai atunci când $\psi_f\alpha = 1$ pentru orice realizare (Intr-adevăr, $\psi_f(\phi) = 1$ înseamnă $(\gamma \in \phi \Rightarrow \psi_f\gamma = 1)$ și este o propoziție adevărată deoarece premisa $\gamma \in \phi$ este falsă; prin urmare implicația $\psi_f(\phi) = 1 \Rightarrow \psi_f\alpha = 1$ este adevărată dacă și numai dacă $\psi_f\alpha = 1$).

Noțiunea de implicație semantică este un model matematic al următoarei situații: dacă toate afirmațiile din H sunt adevărate, atunci și α este adevărată.

În § 4 vom studia implicația semantică și consistența semantică în legătură cu noțiunile sintactice din § 3.

§ 3. Implicația sintactică

Aspectul sintactic al calculului predicatelor constă din limbajul acestui calcul și implicația sintactică, pe care o studiem în acest paragraf.

Este ușor de văzut că, oricare ar fi α, β, $\gamma \in E_f$, $x \in X$ și $\tau \in E_t$ un termen astfel încât există $\alpha(x/\tau)$, următoarele cuvinte sunt formule:

(A1) $\alpha \to (\beta \to \alpha)$,

(A2) $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$,

(A3) $((\alpha \to c) \to c) \to \alpha$,

(A4) $\forall x(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \forall x\beta)$, unde x nu apare liber în α,

(A5) $\forall x\alpha \to \alpha(x/\tau)$.

Să observăm că (A3) se mai scrie

(A3′) $NN\alpha \to \alpha$

și că expresiile de forma $\forall x(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \forall x\beta)$ sunt formule chiar dacă x apare liber în α; dar spunem că aceste expresii sunt de forma (A4) numai dacă x nu apare liber în α.

Definiția 3.1. Formulele având una din formele (A1) – (A5) se numesc *axiomele calculului predicatelor;* se mai spune că formele (A1) – (A5) înseși sunt *schemele de axiome* ale calculului predicatelor.

Ideea intuitivă care stă la baza acestei definiții este că formulele (A1) – (A5) sunt adevărate oricare ar fi α, β, $\gamma \in E_f$, $x \in X$ și $\tau \in E_t$ *care nu conține variabila x*. Într-adevăr, mai întâi se constată ușor că formulele propoziționale (A1) – (A3) sunt adevărate oricare ar fi valorile de adevăr ale lui α, β, γ. Apoi, ideea intuitivă a expresiei $\forall x\alpha$ este că formula α este adevărată oricare ar fi valoarea pe care o ia variabila x în universul discursului, deci în particular este adevărată și în cazul când x se înlocuiește cu termenul τ; obținem astfel sensul intuitiv al formulei (A5). Pentru a argumenta intuitiv afirmația (A4) să presupunem adevărată $\forall x(\alpha \to \beta)$ să „demonstrăm" $\alpha \to \forall x\beta$. Pentru aceasta mai presupunem adevărată α și urmează să „demonstrăm" $\forall x\beta$. Pentru un x oarecare din universul discursului, este adevărată implicația $\alpha \to \beta$; cum este adevărată α, prin modus ponens rezultă β. Dar x fiind arbitrar, concluzia β este valabilă pentru orice x, adică avem $\forall x\beta$. Ipoteza că x nu apare liber în α, reprezintă faptul că α nu depinde de x; această ipoteză a fost esențială, astfel concluzia β nu ar fi fost valabilă decât pentru acei x pentru care α ar fi fost adevărată.

Definiția 3.2. Se numește *modus ponens* operația parțial definită $MP: E_f x E_f \xrightarrow{\circ} E_f$ dată de

(3.1) $$MP(\alpha, \alpha \to \beta) = \beta, \text{ unde } \alpha, \beta \in E_f$$

iar $MP(\alpha, \gamma)$ nu este definită dacă γ nu este de forma $\gamma = \alpha \to \beta$. Se numește *regula generalizării* operația externă $GN: E_f x X \to E_f$ dată de

(3.2) $$GN(\alpha, x) = \forall x\alpha, \text{ unde } \alpha \in E_f,\ x \in X.$$

Se obișnuiește ca în loc de (3.1) și (3.2) să se scrie respectiv

(3.1′) $$MP\frac{\alpha, \alpha \to \beta}{\beta};$$

(3.2′) $$GN\frac{\alpha}{\forall x\alpha}.$$

Definiția 3.3. Fie $H \subseteq E_f$. Se numește *text H – demonstrativ* orice șir finit $(\alpha_1,...,\alpha_n)$ de formule astfel încât pentru orice $k \in \{1,...,n\}$ are loc una din următoarele situații: (0) $\alpha_k \in H$; sau (1) α_k este axiomă (cf. definiția 3.1); sau (2) există $i, j \in \{1,...,k\text{-}1\}$ astfel încât $\alpha_k = MP(\alpha_i, \alpha_j)$, adică $\alpha_j = \alpha_i \to \alpha_k$; sau (3) există $j \in \{1,...,k\text{-}1\}$ și $x \in X$, astfel încât x nu apare liber în nici una din formulele din $\{\alpha_1,...,\alpha_{k-1}\} \cap H$ și $x_k = GN(\alpha_j, x)$, adică $\alpha_k = \forall x\alpha_j$. Numărul $n \geq 1$ se numește *lungimea* textului H-demonstrativ. Vom spune că acest text H-demonstrativ este *propriu* dacă α_n se află în situația (2) sau (3). Spunem că $(\alpha_1,...,\alpha_n)$ este un *text H*-demonstrativ al formulei $\alpha = \alpha_n$ sau că α *are un text H-demonstrativ* sau că α este *deductibilă din H* sau că *H implică sintactic* α și notăm acest fapt scriind

(3.3) $$H \vdash \alpha;$$

de asemenea, vom folosi notația

(3.4) $$Ded\ H = \left\{\alpha \in F \middle| H \vdash \alpha\right\}.$$

Dacă $\{\gamma\} \vdash \alpha$ notăm mai simplu $\gamma \vdash \alpha$.

Matematica, în organizarea ei formală, este alcătuită din definiții, enunțuri de teoreme, demonstrații (într-un sens mai larg, la acestea treduie adăugate motivările și aplicațiile). Noțiunea de text H–demonstrativ este un model matematic al demonstrațiilor din matematică și în general aspectul sintactic al calculului predicatelor are scopul ambițios de a se constitui într-un studiu matematic al demonstrațiilor din matematică. Mulțimea H joacă rolul axiomelor de la care pleacă o anumită teorie matematică, textele H–demonstrativ modelează demonstrațiile din cadrul acelei teorii, iar $Ded\, H$ reprezintă mulțimea teoremelor care se pot obține din respectivele axiome din H. Trebuie însă făcută precizarea că, deși foarte interesant, calculul predicatelor nu este suficient de bogat pentru a descrie toată matematica sau măcar toată aritmetica.

Conceptul de text H-demonstrativ seamănă foarte mult cu noțiunea de construcție X-formativă din algebra universală (cf. Cap. 0), totuși se deosebește de aceasta prin clauza impusă asupra lui x în situația (3) din definiția 3.3. Această clauză își găsește explicația plecând de la comentariul din paragraful anterior: dacă o formulă α conținând variabila liberă x are un text H-demonstrativ care utilizează o formulă $\alpha_j \in H$ conținând la rândul ei variabila liberă x, atunci proprietatea exprimată de formula α a fost stabilită numai pentru acei x care satisfac condiția (axioma!) α_j și nu pentru orice x, deci *nu* este întemeiată afirmația „α are loc pentru orice x" (adică $\forall x\alpha$).

Totuși, asemănarea cu construcțiile X-formative este puternică și se vede ușor că unele proprietăți ale acestora se păstrează și pentru textele H-demonstrative. Astfel:

Observația 3.1. Dacă $H \vdash \alpha$, atunci există o submulțime finită $H_0 \subseteq H$ astfel încât $H_0 \vdash \alpha$ (luăm drept H_0 mulțimea formulelor din H care apar într-un text H-demonstrativ pentru α).

Observația 3.2. (i) Dacă $\alpha \in H$, atunci $H \vdash \alpha$. (ii) Dacă $H \vdash \alpha$ și $H \subseteq H_1$, atunci $H_1 \vdash \alpha$.

Observația 3.3. O proprietate a formulelor $\alpha \in Ded\, H$ se poate demonstra prin inducție algebrică asupra definiției 3.3, adică se demonstrează mai întâi pentru formulele din H, apoi se arată că dacă proprietatea este valabilă pentru formulele α și $\alpha \to \beta$, ea este valabilă și pentru formula β.

Definiția 3.4. Numim *teze*, formulele din mulțimea $Ded\ \phi$. Faptul că $\alpha \in E_f$ este teză, adică $\phi \vdash \alpha$, se notează mai simplu

(3.5) $\qquad \vdash \alpha,$

iar orice text ϕ-demonstrativ va fi numit mai simplu, *text demonstrativ*.

Observația 3.4. Definiția noțiunii de text demonstrativ se deosebește de definiția 3.3 prin dispariția mulțimii H, a situației (0) și a clauzei restrictive asupra lui x în aplicarea regulii GN (situația(3)).

Să demonstrăm teza

$$(T1) \vdash \alpha \to \alpha$$

construind efectiv un text demonstrativ, scriind fiecare formulă a textului pe câte un singur rând în care marcăm care din situațiile (1) – (3) are lc:

(3.6) $\qquad \vdash \alpha \to (\alpha \to \alpha) \qquad$ (A1 cu $\beta := \alpha$),

(3.7) $\qquad \vdash \alpha \to ((\alpha \to \alpha) \to \alpha) \qquad$ (A1 cu $\beta := \alpha \to \alpha$),

(3.8) $\qquad \vdash (\alpha \to ((\alpha \to \alpha) \to \alpha)) \to ((\alpha \to (\alpha \to \alpha)) \to (\alpha \to \alpha))$

(A2 cu $\beta := \alpha \to \alpha,\ \gamma := \alpha$),

(3.9) $\qquad \vdash (\alpha \to (\alpha \to \alpha)) \to (\alpha \to \alpha) \qquad$ (MP(3.7, 3.8)),

(3.10) $\qquad \vdash \alpha \to \alpha \qquad$ (MP(3.6, 3.9)).

Stabilirea de teze și de formule deductibile din diverse mulțimi devine anevoioasă dacă folosim în exclusivitate definițiile. În continuare dăm diverse procedee care permit scurtarea acestui proces.

Observația 3.5. Într-un text H-demonstrativ putem insera și o teză anterior stabilită, fără a mai reproduce textul ei demonstrativ. Mai exact, să numim *text H-demonstrativ generalizat* orice șir finit $(\alpha_1,...,\alpha_p)$ de formule astfel încât pentru orice $k \in \{1,...,p\}$, α_k se găsește într-una din situațiile (0) – (3) din definiția 3.3 sau în situația (4) α_k este teză (alta decât una din axiome) în care nu apar variabile din H. Atunci $H \vdash \alpha$ pentru orice α din textul H-demonstrativ generalizat. (Într-adevăr, se vede imediat că inserând la începutul textului H-demonsrtativ generalizat, textele demonstrative care lipsesc din acesta, se obține un text H-demonstrativ). În particular $\vdash \alpha$ pentru orice α dintr-un text demonstrativ generalizat.

Teorema 3.1 (a deducției). *Fie* $H \subseteq E_f$ *și* $\alpha, \beta \in E_f$. *Atunci*

(3.11) $$H \vdash \alpha \to \beta \Leftrightarrow H \cup \{\alpha\} \vdash \beta.$$

Demonstrație. $\Rightarrow$: Fie $H \vdash \alpha \to \beta$. Fie $(\gamma_1,...,\gamma_n = \alpha \to \beta)$ un text H-demonstrativ pentru $\alpha \to \beta$. Atunci $(\gamma_1,...,\gamma_n, \alpha, \beta)$ este un text $(H \cup \{\alpha\})$-demonstrativ pentru β, deoarece pentru orice $k \in \{1,...,n\}$, α_k se găsește într-una din situațiile (0), în care caz rezultă $\alpha_k \in H \cup \{\alpha\}$, sau (1), sau (2), sau (3); apoi $\alpha \in H \cup \{\alpha\}$, iar $\beta = MP(\alpha, \gamma_n)$. Deci $H \cup \{\alpha\} \vdash \beta$.

$\Leftarrow$: Reciproc, fie $H \cup \{\alpha\} \vdash \beta$. Demonstrăm $H \vdash \alpha \to \beta$ prin inducție asupra lungimii n a unui text $(H \cup \{\alpha\})$-demonstrativ pentru β.

Dacă $n = 1$, sunt posibile cazurile (0) $\beta \in H \cup \{\alpha\}$ sau (1) β este axiomă. Cazul (0) se subîmparte în (0.1) $\beta \in H$ sau (0.2) $\alpha = \beta$. În cazurile (1) și (0.1) șirul $(\beta, \beta \to (\alpha \to \beta), \alpha \to \beta)$ este un text H-demonstrativ deoarece β este în situația (1), respectiv (0) din definiția 3.3, $\beta \to (\alpha \to \beta)$ este (A1) cu $\alpha := \beta$ și $\beta := \alpha$, iar $\alpha \to \beta$ se obține prin MP. Dacă $\beta = \alpha$, atunci $\phi \vdash \alpha \to \beta$ (teza (T1)), deci $H \vdash \alpha \to \beta$ conform observației 3.2.

Presupunem acum proprietatea stabilită în cazul textelor $(H \cup \{\alpha\})$-demonstrative de lungime $n - 1$ și fie $(\gamma_1,...,\gamma_n = \beta)$ un text $(H \cup \{\alpha\})$-demonstrativ de lungime n.

a) Dacă $\beta \in H \cup \{\alpha\}$ sau β este axiomă, atunci $H \vdash \alpha \to \beta$ rezultă ca în cazul $n = 1$.

b) Dacă există $i, j, < n$ cu $\gamma_j = \gamma_i \to \beta$, atunci $(\gamma_1,...,\gamma_i)$ și $(\gamma_1,...,\gamma_j)$ sunt evident texte $(H \cup \{\alpha\})$-demonstrative, deci $H \vdash \alpha \to \gamma_i$ și $H \vdash \alpha \to (\gamma_i \to \beta)$ conform ipotezei inductive. Fie textele H-demonstrative $(\delta_1,...,\delta_p)$ și $(\varepsilon_1,...,\varepsilon_q)$, unde $\delta_p = \alpha \to \gamma_i$ și $\varepsilon_q = \alpha \to (\gamma_i \to \beta)$. Atunci

$$\left(\delta_1,\ldots,\delta_p,\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_q, \varepsilon_q \to \left(\delta_p \to (\alpha \to \beta)\right), \delta_p \to (\alpha \to \beta), \alpha \to \beta\right)$$

este un text H-demonstrativ. Într-adevăr, fiecare din elementele $\delta_1,...,\delta_p$, $\varepsilon_1,...,\varepsilon_q$, este într-una din situațiile descrise în definiția 3.3, elementul al $(p + q + 1)$-lea este axioma (A2) cu $\beta := \gamma_i$ și $\gamma := \beta$, iar ultimele două elemente se obțin prin MP.

c) Dacă există $j < n$ și $x \in X$ astfel încât $\beta = GN(\gamma_j, x)$, atunci $\beta = \forall x \gamma_j$ și notând cu $H_0 (\subseteq H \cup \{\alpha\})$ mulțimea formulelor din $H \cup \{\alpha\}$ care apar în $(\gamma_1,...,\gamma_n)$, rezultă că acest șir este un text H_0-demonstrativ, iar variabila x nu apare liber în nici una din formulele din H_0. Considerăm două subcazuri: c1) Dacă $\alpha \notin H_0$ atunci $H_0 \subseteq H$, deci șirul $\left(\gamma_1,\ldots,\gamma_j,\beta,\beta \to (\alpha \to \beta),\alpha \to \beta\right)$ este un text H_0-demonstrativ. Cum $H_0 \subseteq H$, urmează $H \vdash \alpha \to \beta$. c2). Dacă $\alpha \in H_0$, fie $H_1 = H_0 - \{\alpha\}$. Atunci $H_0 = H_1 \cup \{\alpha\}$ și $(\gamma_1,...,\gamma_j)$ este un text $(H_1 \cup \{\alpha\})$-demonstrativ, deci $H_1 \vdash \alpha \to \gamma_j$ conform ipotezei inductive. Fie $\left(\delta_1,\ldots,\delta_p = \alpha \to \gamma_j\right)$ un text H_1-demonstrativ. Ținând seama că x nu apare liber nici în H_1, nici în α, obținem textul H_1-demonstrativ $\left(\delta_1,\ldots,\delta_p, \forall x(\alpha \to \gamma_j), \forall x(\alpha \to \gamma_j) \to (\alpha \to \beta), \alpha \to \beta\right)$, unde $\forall x(\alpha \to \gamma_j) = GN(\delta_p, x)$, formula următoare este (A4) cu $\beta := \gamma_j$, iar $\alpha \to \beta$ se obține prin MP. Astfel $H_1 \vdash \alpha \to \beta$ și cum $H_1 = H_0 - \{\alpha\} \subseteq (H \cup \{\alpha\}) - \{\alpha\} = H$, rezultă $H \vdash \alpha \to \beta$.

Colorar. $\vdash \alpha \to \beta \Leftrightarrow \alpha \vdash \beta$.

În continuare vom folosi mereu teorema deducției. De exemplu, demonstrăm teza

$$(T2) \vdash \alpha \to NN\alpha$$

arătând că $\{\alpha\} \vdash NN\alpha$, iar pentru aceasta ținem seama de observația 3.5, construind un text $\{\alpha\}$-demonstrativ generalizat:

(3.12) $\vdash N\alpha \to (\alpha \to c)$ (T1 cu $\alpha := N\alpha$),

(3.13) $\vdash (N\alpha \to (\alpha \to c)) \to ((N\alpha \to \alpha) \to (N\alpha \to c))$
(A2 cu $\alpha := N\alpha$, $\beta := \alpha$, $\gamma := c$),

(3.14) $\vdash (N\alpha \to \alpha) \to (N\alpha \to c)$ (MP(3.12, 3.13)),

(3.15) α ($\alpha \in \{\alpha\}$),

(3.16) $\vdash \alpha \to (N\alpha \to \alpha)$ (A1 cu $\beta := N\alpha$),

(3.17) $N\alpha \to \alpha$ (MP(3.15, 3.16)),

(3.18) $N\alpha \to c\ (\equiv NN\alpha)$ (MP(3.17, 3.14)).

Lema 3.1. $\alpha \to \beta \vdash (\gamma \to \alpha) \to (\gamma \to \beta)$.

Demonstrație. Folosind respectiv ipoteza $\alpha \to \beta$, (A1) cu $\alpha := \alpha \to \beta$ și $\beta := \gamma$, MP, (A2) cu $\alpha := \gamma$, $\beta := \alpha$ și $\gamma := \beta$, apoi MP, obținem textul $(\alpha \to \beta)$-demonstrativ

$$\alpha \to \beta, (\alpha \to \beta) \to (\gamma \to (\alpha \to \beta)), \gamma \to (\alpha \to \beta),$$
$$(\gamma \to (\alpha \to \beta)) \to ((\gamma \to \alpha) \to (\gamma \to \beta)), (\gamma \to \alpha) \to (\gamma \to \beta).$$

$$(T3) \vdash (\alpha \to \beta) \to ((\gamma \to \alpha) \to (\gamma \to \beta))$$

rezultă din lema 3.1 și teorema deducției.

$$(T4) \vdash (\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma))$$

se demonstrează scriind lema 3.1 sub forma $\beta \to \gamma \vdash ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$, de unde aplicând de trei ori teorema deducției obținem $\{\beta \to \gamma, \alpha \to \beta\} \vdash \alpha \to \gamma$, apoi $\alpha \to \beta \vdash ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma))$ și în sfârșit (T4).

Propoziția 3.1 (regula silogismului).
a) *Dacă* $\alpha \vdash \beta$ *și* $\beta \vdash \gamma$ *atunci* $\alpha \vdash \gamma$.
b) *Dacă* $\vdash \alpha \to \beta$ și $\vdash \beta \to \gamma$ *atunci* $\vdash \alpha \to \gamma$.

Demonstrație. În virtutea teoremei deducției este suficient să demonstrăm b) Fie $\vdash \alpha \to \beta$ și $\vdash \beta \to \gamma$. Folosind (T4) și aplicând MP de două ori obținem $\vdash \alpha \to \gamma$.
Introducem acum un alt concept important.

Definiția 3.5. Spunem că formulele α, β sunt *echivalente* și scriem $\alpha \dashv\vdash \beta$, dacă $\alpha \vdash \beta$ și $\beta \vdash \alpha$.

Observația 3.6 (i) $\alpha \dashv\vdash \beta \Leftrightarrow \vdash \alpha \to \beta$ și $\vdash \beta \to \alpha$ (folosind corolarul teoremei 3.1).
(ii) Relația $\dashv\vdash$ este într-adevăr o echivalență pe E_f(aceasta se vede imediat cu ajutorul teoremei deducției, din (T1), forma simetrică a definiției 3.5 și regula silogismului).

Propoziția 3.2. *Dacă* $\alpha \dashv\vdash \alpha_1$ *și* $\beta \dashv\vdash \beta_1$, *atunci*
(i) $\alpha \to \beta \dashv\vdash \alpha_1 \to \beta_1$,
(ii) $N\alpha \dashv\vdash N\alpha_1$,
(iii) $\forall x\alpha \dashv\vdash \forall x\alpha_1$.

Demonstrație. (i) Din observația 3.6 rezultă $\vdash \alpha_1 \to \alpha$, iar teza (T4) se poate scrie

$$\vdash (\alpha_1 \to \alpha) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha_1 \to \beta)),$$

deci cu MP obținem

(3.19) $\vdash (\alpha \to \beta) \to (\alpha_1 \to \beta)$.

Avem de asemenea $\vdash \beta \to \beta_1$, iar teza (T3) se poare scrie

$$\vdash (\beta \to \beta_1) \to ((\alpha_1 \to \beta) \to (\alpha_1 \to \beta_1)),$$

deci cu *MP* obținem

(3.20) $\vdash (\alpha_1 \to \beta) \to (\alpha_1 \to \beta_1)$.

Aplicând regula silogismului, din (3.19) și (3.20) deducem

$$\vdash (\alpha \to \beta) \to (\alpha_1 \to \beta_1),$$

adică $\alpha \to \beta \vdash \alpha_1 \to \beta_1$ și în mod analog $\alpha_1 \to \beta_1 \vdash \alpha \to \beta$.

(ii) Proprietatea (i) și $c \dashv\vdash c$ implică $\alpha \to c \dashv\vdash \beta \to c$.

(iii) Șirul

$$\forall x\alpha, \forall x\alpha \to \alpha, \alpha, \alpha \to \alpha_1, \alpha_1, \forall x\alpha_1$$

este un text $\forall x\alpha$-demonstrativ, argumentele fiind respectiv: premisă, (A5) cu $\tau := x$, *MP*, tez (cf. (i)), *MP*, *GN* (aplicabilă deoarece x nu apare liber în $\forall x\alpha$).

Așadar $\forall x\alpha \vdash \forall x\alpha_1$ și analog $\forall x\alpha_1 \vdash \forall x\alpha$.

Lema 3.2. *Fie $\alpha \in E_f$ și $x, y \in X$. Dacă y nu apare în α, atunci*

$$\forall x\alpha \dashv\vdash \forall y\alpha(x/y).$$

Demonstrație. Din ipoteză rezultă că $\alpha(x/y)$ există, iar din (A5) obținer $\vdash \forall x\alpha \to \forall y\alpha(x/y)$. Conform propoziției I.1.4, există $\alpha(x/y)(y/x) = \alpha$, deci șirul

$$\forall y\alpha(x/y), \forall y\alpha(x/y) \to \alpha, \alpha, \forall x\alpha$$

este un text $\forall y\alpha(x/y)$-demonstrativ: ipoteză, A5, *MP*, *GN* (x nu apare liber în $\forall y\alpha(x/y)$).

Lema 3.3. *Fie δ o axiomă și $x, y \in X$. Dacă y nu apare în δ, atunci $\delta(x/y)$ este o axiomă d aceeași formă.*

Demonstrație. Observăm mai întâi că $\delta(x/y)$ există.

Este clar că dacă $\delta \in \{A1, A2, A3\}$, atunci $\delta(x/y)$ este de aceeași formă.

Dacă $\delta = A4$, atunci $\delta(x/y) = \delta$. Dacă

$$\delta = \forall z(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \forall z\beta)$$

unde z nu apare liber în α și $z \neq x$, atunci

$$\delta(x/y) = \forall z(\alpha(x/y) \to \beta(x/y)) \to (\alpha(x/y) \to \forall z\beta(x/y))$$

și cum y nu apare în δ, rezultă $z \neq x$, deci z nu apare nici în $\alpha(x/y)$.

Dacă $\delta = A5$, atunci $\delta(x/y) = \delta$ deoarece x nu apare liber în δ. Dacă

$$\delta = \forall z\alpha \to \alpha(z/\tau),$$

unde $z \neq x$, atunci

$$\delta(x/y) = \forall z(\alpha(x/y) \to \alpha(x/y)(z/\tau)$$

deoarece din faptul că y nu apare în δ rezultă în particular că y nu apare în τ, deci $\alpha(z/\tau)(x/y) = \alpha(x/y)(z/\tau)$ conform scoliei propoziției I.1.5.

Lema 3.4. *Fie $H \subset E_f$; $x, y \in X$,; $(\alpha_1,...,\alpha_n)$ un text H-demonstrativ în care nu se aplică GN asupra lui x. Dacă x nu apare liber în $H \cap \{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ iar y nu apare în $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$, atunci $(\alpha_1(x/y), ..., \alpha_n(x/y))$ este un text H-demonstrativ.*

Demonstrație. Fie $i \in \{1,...,n\}$.

Dacă α_i este axiomă, atunci lema 3.3 arată că $\alpha_i(x/y)$ este axiomă de aceeași formă.

Dacă $\alpha_i \in H$ atunci $\alpha_i(x/y) = \alpha_i \in H$.

Dacă există $k, j < i$ cu $\alpha_k = \alpha_j \to \alpha_i$, atunci $\alpha_k(x/y) = \alpha_j(x/y) \to \alpha_i(x/y)$.

Dacă $\alpha_i = \forall z\alpha_j$, unde $j < i$ și z nu apare liber în $H \cap \{\alpha_1,...,\alpha_{i-1}\}$, atunci din ipoteze rezultă $z \neq x$ și $z \neq$ y, deci $\alpha_i(x/y) = \forall z\alpha_j(x/y)$ și z nu apare liber în $\alpha_i(x/y), ..., \alpha_{i-1}(x/y)$.

Noţiunea care urmează este analogul sintactic al conceptului de consecinţă din definiţia 2.1.

Definiţia 3.6. Spunem că o mulţime $H \subseteq E_f$ este *inconsistentă sintactic* dacă $H \vdash c$; în cazul contrar se spune că H este *consistentă sintactic.*

Sensul acestei noţiuni apare clar dacă avem în vedere că orice sistem H de axiome cu care lucrăm în matematică trebuie să *nu* verifice proprietăţile echivalente din propoziţia urmăroare.

Propoziţia 3.3. *Următoarele condiţii sunt echivalente pentru o submulţime* $H \subseteq E_f$:
(i) *H este inconsistentă sintactic;*
(ii) *există o teză α astfel încât $H \vdash N\alpha$;*
(iii) *există $\alpha \in E_f$ astfel încât $H \vdash \alpha$ şi $H \vdash N\alpha$;*
(iv) *$H \vdash \alpha$ pentru orice $\alpha \in E_f$.*

Demonstraţie. (i) $\Rightarrow$ (iv): Avem $H \vdash c$, deci există un text H-demonstrativ $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n = c)$. Fie $\alpha \in E_f$. Atunci şirul

$$\alpha_1,\ldots,\alpha_n = c,\ c \to (N\alpha \to c),\ N\alpha \to c = NN\alpha,\ NN\alpha \to \alpha,\ \alpha$$

este de asemenea un text H-demonstrativ, argumentele pentru ultimii 4 termeni fiind respectiv (A1), *MP,* (A3), (*MP*). Aşadar $H \vdash \alpha$.

(iv) $\Rightarrow$ (iii): banală,
(iii) $\Rightarrow$ (i): din textul H-demonstrativ generalizat $N\alpha$, (3,12), $\alpha \to c$, α, c,
(iv) $\Rightarrow$ (ii): banală,
(ii) $\Rightarrow$ (iii): din $\vdash \alpha$ rezultă $H \vdash \alpha$.

Ca aplicaţie să demonstrăm

$$\text{(T5)} \vdash N\alpha \to (\alpha \to \beta):$$

într-adevăr, mulţimea $\{c\}$ este inconsistentă sintactic din însăşi definiţia 3.6 via (T1), prin urmare, ţinând seama de propoziţia 3.3, condiţia (iv), obţinem $c \vdash \beta$, adică $\vdash c \to \beta$; dar (T3) arată că

$$\vdash (c \to \beta) \to ((\alpha \to c) \to (\alpha \to \beta)),$$

deci aplicând *MP,* rezultă $\vdash (\alpha \to c) \to (\alpha \to \beta)$, adică (T5).

Definiţia 3.7. Printr-o mulţime *consistentă maximală* înţelegem o mulţime consistentă sintactic H astfel încât pentru orice mulţime consistentă sintactic H', din $H \subseteq H'$ rezultă $H = H'$.

Propoziţia 3.4. *Orice mulţime consistentă sintactic este inclusă într-o mulţime consistentă maximală.*

Demonstraţie. Fie $H \subseteq E_f$ consistentă sintactic. Fie $\mathcal{H}$ familia mulţimilor consistente sintactic care includ pe H. Atunci $\mathcal{H} \neq \phi$ deoarece $H \in \mathcal{H}$. Fie $(G_k)_{k \in K}$ o familie de mulţimi $G_k \in \mathcal{H}$, total ordonată faţă de $\subseteq$ şi fie $G = \bigcup_{k \in K} G_k$. Atunci $H \subseteq G \subseteq E_f$ şi G este consistentă sintactic, altfel am avea $G' \vdash c$ pentru o submulţime finită $G' \subseteq G$ şi deci, conform totalei ordonări ar rezulta $G' \subseteq G_k$ pentru un anumit $k \in K$, prin urmare $G_k \vdash c$, adică G_k ar fi inconsistentă sintactic.

Familia $\mathcal{H}$ fiind inductiv ordonată, conform lemei lui Zorn există o mulţime G_0 maximală în $(\mathcal{H}, \subseteq)$. Urmează că $G_0 \in \mathcal{H}$, adică G_0 este consistentă sintactic şi $H \subseteq G_0$; în plus, dacă H' este consistentă sintactic şi $G \subseteq H'$, atunci $H \subseteq H'$, deci $H' \in \mathcal{H}$, de unde rezultă $G = H'$.

Propoziţia 3.4 poate fi demonstrată şi fără a face apel la lema lui Zorn; cf. Calude şi Căzănescu [1984].

Propoziţia 3.5. *Următoarele condiţii sunt echivalente pentru o mulţime* $H \subset E_f$:
(i) *H este consistentă maximală;*
(ii) *pentru orice $\alpha \in E_f$ una şi numai una din formulele α, $N\alpha$ este în H.*

Demonstrație. (i) $\Rightarrow$ (ii): Dacă H este consistentă maximală, atunci propoziția 3.. observația 3.2 arată că nu putem avea $\alpha \in H$ și $N\alpha \in H$. Să presupunem prin absurd că ar ex $\alpha \in E_f$ astfel încât $\alpha \notin H$ *și* $N\alpha \notin H$. Atunci din maximalitatea lui H ar rezulta că mulțin $H \cup \{\alpha\}$ și $H \cup \{N\alpha\}$ sunt inconsistente, adică $H \cup \{\alpha\} \vdash c$ și $H \cup \{N\alpha\} \vdash c$, c $H \vdash \alpha \to c$ și $H \vdash N\alpha \to c$, adică $H \vdash N\alpha$ și $H \vdash NN\alpha$, în contradicție cu propoziția 3.3.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Presupunem (ii). Consistența sintactică a mulțimii H rezultă din propoziția : Fie H' o mulțime consistentă sintactic astfel încât $H \subseteq H'$. Dacă am avea $H \neq H'$, atunci ar e· $\alpha \in H' - H$. Conform ipotezei, din $\alpha \notin H$ deducem $N\alpha \in H$, deci $H \vdash N\alpha$, prin urm $H' \vdash N\alpha$; pe de altă parte, din $\alpha \in H'$ rezultă $H' \vdash \alpha$, contrazicând consistența mulțimii H

Corolar. *Fie* $H \subset E_f$ *o mulțime consistentă maximală și* $\alpha, \beta \in E_f$. *Atunci:*

(i) *Dacă* $H \vdash \alpha$ (în particular dacă $\vdash \alpha$), *atunci* $\alpha \in H$;

(ii) *Dacă* $\alpha \in H$ *și* $\alpha \to \beta \in H$, *atunci* $\beta \in H$.

Demonstrație. (i) Presupunând prin absurd că $\alpha \notin H$, din propoziția 3.5 rezult $N\alpha \in H$, deci $H \vdash N\alpha$, contrazicând consistența mulțimii H.

(ii) Șirul $(\alpha, \alpha \to \beta, \beta)$ este un text H-demonstrativ, deci $H \vdash \beta$, prin urmare $\beta \in H$ cf.

Propoziția 3.6. *Fie* $X = \phi$ *sau* X *infinită. Fie* $H_1, H_2 \subseteq E_f$ *și* $\alpha, \beta \in E_f$. *Dacă* $H_1 \vdash$, $H_2 \cup \{\alpha\} \vdash \beta$, atunci $H_1 \cup H_2 \vdash \beta$.

Demonstrație. Fie textul H_1-demonstrativ $\Gamma = (\gamma_1,...,\gamma_n = \alpha)$ și textul $(H_2 \cup \{$o demonstrativ $\Delta = (\delta_1,...,\delta_p = \beta)$.

Dacă $X = \phi$, atunci $(\gamma_1,...,\gamma_n, \delta_1,...,\delta_p)$ este evident un text $(H_1 \cup H_2)$-demonstrativ.

Fie acum X infinită. Fie mulțimile finite $H_1^0 = H_1 \cap \{\gamma_1,...,\gamma_p\}$ și $H_2^0 = H_2 \cap \{\delta_1,...,$

Atunci $H_1^0 \vdash \alpha$ și $H_2^0 \cup \{\alpha\} \vdash \beta$.

Fie X_0 mulțimea finită (eventual vidă!) a variabilelor x care apar în măcar o formulă H_1^0 și sunt folosite într-o regulă GN aplicată în Δ.

Folosind axioma 3.1, fie $X_0' \subset X$ o mulțime în bijecție cu X_0 și disjunctă de mulțir finită a variabilelor care apar în formulele din mulțimea $H_1^0 \cup H_2^0 \cup \{\alpha\}$. Pentru fiecare $x \in$ să notăm cu x' imaginea sa din X_0'.

Fie $\delta_i = \forall x \delta_j$, $j < i$, prima formulă din Δ obținută aplicând GN cu o variabulă $x \in$ Atunci $\Delta_1 = (\delta_1,...,\delta_{i-1})$ este un text $(H_2^0 \cup \{\alpha\})$-demonstrativ în care nu se aplică GN asu variabilei x, iar x nu apare liber în $(H_2^0 \cup \{\alpha\}) \cap \{\delta_1,...,\delta_{i-1}\}$; în sfârșit, x' nu apare în ace formule. Conform lemei 3.4, rezultă că $\Delta_2 = (\delta_1(x/x'),...,\delta_{i-1}(x/x'))$ este un text $(H_2^0 \cup \{\alpha$ demonstrativ. Atunci concatenarea

$$\Delta_3 = \left(\Delta_2, \forall x' \delta_j(x/x'), \forall x' \delta_j(x/x') \to \forall x \delta_j, \delta_i\right)$$

este un text $(H_2^0 \cup \{\alpha\})$-demonstrativ, argumentele fiind: GN asupra variabilei x' (care nu ap în $H_2^0 \cup \{\alpha\}$), teză (conform lemei 3.2), MP. Astfel, în Δ_3 regula GN asupra lui x a fost înlocı *cu* GN asupra lui x'. Repetând procedeul, după un număr finit de pași obținem un t $(H_0 \cup \{\alpha\})$-demonstrativ Δ' pentru β, în care GN nu se aplică asupra niciunei variabile din Urmează că juxtapunerea (Γ, Δ') este un text $\left(H_1^0 \cup H_2^0\right)$-demonstrativ pentru β, d $H_1 \cup H_2 \vdash \beta$ conform observației 3.2.

Corolar. *Dacă* $H \vdash \alpha$ și $H \vdash \alpha \rightarrow \beta$, *atunci* $H \vdash \beta$.

Demonstrație. Conform teoremei deducției avem $H \cup \{\alpha\} \vdash \beta$, deci $H \cup H \vdash \beta$ în virtutea propoziției precedente.

Propoziția 3.7. *Fie X infinită și $x \in X$. Pentru fiecare $\alpha \in E_f$ fie $\alpha^+ \in E_f$ formula fără apariții legate ale variabilei x, construită în propoziția* I.4.4. *Atunci:*

(3.21) $\alpha = \alpha^+ \Leftrightarrow$ variabila x nu are apariții legate în α,

(3.22) $(\alpha \rightarrow \beta)^+ = \alpha^+ \rightarrow \beta^+$,

(3.23) $(\forall x\alpha)^+ = \forall y\alpha^+(x/y)$, unde $y \in X$ nu apare în α,

(3.24) $(\forall z\alpha)^+ = \forall z\alpha^+$, $z \in X - \{x\}$,

(3.25) $\psi_f\alpha = \psi_f\alpha^+$ pentru orice realizare ψ,

(3.26) $\alpha \dashv\vdash \alpha^+$.

Demonstrație. Proprietățile (3.21) – (3.25) au loc în virtutea propoziție I.4.4. Vom demonstra (3.26) prin inducție asupra definiției (F0) – (F2) a formulelor (cf. § 1).

Pentru $\alpha = p\tau_1...\tau_{n(p)}$, unde $p \in P$ iar $\tau_1,...,\tau_{n(p)} \in E_t$ și pentru $\alpha = c$, relația (3.21) arată că $\alpha = \alpha^+$.

Fie acum $\alpha, \beta \in E_f$ cu $\alpha \dashv\vdash \alpha^+$ și $\beta \dashv\vdash \beta^+$.

Propoziția 3.2 arată că $\alpha \rightarrow \beta \dashv\vdash \alpha^+ \rightarrow \beta^+$ și ținând seama de (3.22) obținem $\alpha \rightarrow \beta \dashv\vdash (\alpha \rightarrow \beta)^+$.

Propoziția 3.2 mai implică $\forall x\alpha \dashv\vdash \forall x\alpha^+$, iar $\forall x\alpha^+ \dashv\vdash \forall y\alpha^+(x/y)$ în virtutea lemei 3.2. Prin tranzitivitate și (3.23) rezultă $\forall x\alpha \dashv\vdash (\forall x\alpha)^+$.

În sfârșit, pentru $z \in X - \{x\}$ aplicăm din nou propoziția 3.2, obținând $\forall z\alpha \dashv\vdash \forall z\alpha^+$, de unde, ținând seama de (3.24), deducem $\forall z\alpha \dashv\vdash (\forall z\alpha)^+$.

Observația 3.7. Formulele α și α^+ au aceleași variabile libere (Pentru $\alpha = \alpha^+$ proprietatea este banală, iar la pasul inductiv se folosesc relațiile (3.22) – (3.24)).

Lema 3.5. *Cu ipotezele și notațiile din propoziția 3.7, fie $u \in X$ și $\tau \in E_f$ astfel încât $\alpha(u/\tau)$ există. Dacă $u = x$ sau τ nu conține variabila x, atunci*

(3.27) $(\alpha(u/\tau))^+ = \alpha^+(u/\tau)$.

Demonstrație. Observăm că $\alpha^+(u/\tau)$ există și demonstrăm (3.27) prin inducție. Dacă α nu conține apariții legate ale variabilei x, atunci nici $\alpha(u/\tau)$ nu conține astfel de apariții, deci

$$(\alpha(u/\tau))^+ = (\alpha(u/\tau) = \alpha^+(u/\tau).$$

Fie $\alpha, \beta \in E_f$ care satisfac proprietatea și $z \in X$: vom arăta că $\alpha \rightarrow \beta$ și $\forall z\alpha$ satisfac proprietatea.

Folosind propoziția I.1.2 și (3.22), obținem

$$\left((\alpha \rightarrow \beta)(u/\tau)\right)^+ = \left(\alpha(u/\tau) \rightarrow \beta(u/\tau)\right)^+ = \left(\alpha(u/\tau)\right)^+ \rightarrow \left(\beta(u/\tau)\right)^+ =$$
$$= \alpha^+(u/\tau) \rightarrow \beta^+(u/\tau) = \left(\alpha^+ \rightarrow \beta^+\right)(u/\tau) = \left(\alpha \rightarrow \beta\right)^+(u/\tau).$$

Dacă $z \notin \{x, u\}$, atunci din propoziția I.1.3 și (3.24) deducem

$$\left((\forall z\alpha)(u/\tau)\right)^+ = \left(\forall z\alpha(u/\tau)\right)^+ = \forall z\left(\alpha(u/\tau)\right)^+ = \forall z\alpha^+(u/\tau) = \left(\forall z\alpha^+\right)(u/\tau) = (\forall z\alpha)^+(u/\tau).$$

Pentry $z = u$ observăm că $\forall u\alpha$ și $(\forall u\alpha)^+$ nu conțin apariții libere ale variabilei u (indiferent dacă $u \neq x$ sau $u = x$), prin urmare

$$((\forall u\alpha)(u/\tau))^+ = (\forall u\alpha)^+ = (\forall u\alpha)^+(u/\tau).$$

Pentru $z = x$ observăm mai întâi că subcazul $x = u$ este cuprins în cazul precedent $z = u$. Dacă $x \neq u$, atunci din ipoteză rezultă că τ nu conține variabila x și aplicând succesiv propoziția I.1.3, (3.23), ipoteza inductivă, scolia propoziției I.1.5 și (3.23), obținem

$$((\forall x\alpha)(u/\tau))^+ = (\forall x\alpha(u/\tau))^+ = \forall y(\alpha(u/\tau))^+(x/y) = \forall y\alpha^+(u/\tau)(x/y) =$$
$$= \forall y\alpha^+(x/y)(u/\tau) = (\forall x\alpha)^+(u/\tau).$$

Lema 3.6. *Cu ipotezele și notațiile din propoziția 3.7, dacă δ este o axiomă de una din formele* A1 – A4 *sau* δ = A5, *atunci* δ^+ *este o axiomă de aceeași formă.*

Demonstrație. Pentru axiomele A1 – A3 afirmația rezultă imediat din (3.22) și $c^+ = c$.

Dacă δ = A4, atunci x nu apare liber în α, deci nici în α^+, de unde rezultă, folosind (3.22), (3.23), propoziția I.1.2 și (3.21), că

$$\delta^+ = \left(\forall x(\alpha \to \beta)\right)^+ \to \left(\alpha^+ \to (\forall x\beta)^+\right) = \left(\forall y(\alpha \to \beta)^+(x/y)\right) \to \left(\alpha^+ \to \forall y\beta^+(x/y)\right) =$$
$$= \forall y\left(\alpha^+ \to \beta^+(x/y)\right) \to \left(\alpha^+ \to \forall y\beta^+(x/y)\right).$$

Dacă $\delta = \forall z(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \forall z\beta)$, unde $z \in X - \{x\}$ și z nu apare liber în α, deci nici în α^+, atunci din (3.22) și (3.24) obținem

$$\delta^+ = \left(\forall x(\alpha \to \beta)\right)^+ \to \left(\alpha^+ \to (\forall x\beta)^+\right) = \forall z(\alpha^+ \to \beta^+) \to (\alpha^+ \to \forall z\beta^+).$$

Dacă δ = A5, atunci din (3.22), (3.23) și lema 3.5 obținem

$$\delta^+ = (\forall x\alpha)^+ \to \left(\alpha(x/\tau)\right)^+ = \forall y\alpha^+(x/y) \to \alpha^+(x/\tau);$$

cum variabila y nu apare în α, τ, deci nici în α^+, rezultă că $\alpha^+(x/\tau) = \alpha^+(x/y)(y/\tau)$, deci δ^+ este forma A5 cu $x := y$ și $\alpha := \alpha^+(x/y)$.

Lema 3.7. *Cu ipotezele și notațiile din propoziția 3.7, dacă δ este o axiomă iar y o variabilă care nu apare în δ sau δ^+, atunci $\delta^+(x/y)$ este o axiomă de aceeași formă.*

Demonstrație. Dacă δ este de una din formele A1 – A4 sau δ = A5, atunci afirmația rezultă din lemele 3.7 și 3.3. Fie acum $\delta = \forall z\alpha \to \alpha(z/\tau)$, unde $z \neq x$. Folosind (3.22) și propoziția I.1.2, apoi (3.24) și lema 3.5, la pasul următor propozițiile I.1.3 și I.1.5, iar la sfârșit lema 3.5 cu $u := x$ și $z := y$, deducem

$$\delta^+(x/y) = (\forall z\alpha)^+(x/y) \to \left(\alpha(z/\tau)\right)^+(x/y) = (\forall z\alpha^+)(x/y) \to \alpha^+(z/\tau)(x/y) =$$
$$= \forall z\alpha^+(x/y) \to \alpha^+(x/y)\left(z/\tau(x/y)\right) = \forall z\left(\alpha(x/y)\right)^+ \to \left(\alpha(x/y)\right)^+\left(z/\tau(x/y)\right).$$

Propoziția 3.8. *Fie X infinită. Fie $H \subset E_f$, $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ un text H-demonstrativ, x o variabilă care nu apare în H, iar y o variabilă care nu apare în $H \cup \{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$. Atunci $\left(\alpha_1^+(x/y),\dots,\alpha_n^+(x/y)\right)$ este un text H-demonstrativ, unde $^+$ este construcția din propoziția 3.7.*

Demonstrație. Dacă α_i este axiomă, atunci $\alpha_i^+(x/y)$ este axiomă de aceeași formă, conform lemei 3.6.

Dacă $\alpha_i \in H$, atunci $\alpha_i^+(x/y) = \alpha_i(x/y) = \alpha_i \in H$.

Dacă există $j, k < i$ cu $\alpha_k = \alpha_j \to \alpha_i$, atunci $\alpha_n^+(x/y) = \alpha_j^+(x/y) \to \alpha_i^+(x/y)$.

Fie $\alpha_i = \forall z\alpha_j$, unde $j < i$ și z nu apare liber în $H \cap \{\alpha_1,\dots,\alpha_{i-1}\}$. Dacă $z \neq$ x, atunci

$$\alpha_i^+(x/y) = \left(\forall z\alpha_j\right)^+(x/y) = \left(\forall z\alpha_j^+\right)(x/y) = \forall z\alpha_j^+(x/y)$$

și cum $z \neq y$, ținând seama și de observația 3.7, deducem că z nu apare liber în $H \cap \left\{\alpha_1^+(x/y), \ldots, \alpha_{i-1}^+(x/y)\right\}$. Dacă $z = x$, atunci

$$\alpha_i^+(x/y) = \left(\forall x \alpha_j\right)^+(x/y) = \left(\forall x \alpha_j\right)^+ = \forall z \alpha_j^+(x/y),$$

iar y nu apare în H.

Încheiem paragraful cu trei rezultate care vor fi utilizate în paragraful următor.

$$\text{(T6)} \vdash N\exists x N\alpha \to \forall x\alpha$$

se demonstrează sub forma $N\exists x N\alpha \vdash \forall x$a. Într-adevăr, din premisa $NN\forall xNN\alpha$ și axioma (A´3), prin MP se obține $\forall xNN\alpha$. Dar $\vdash \forall xNN\alpha \to NN\alpha$ din (A5) cu $\alpha := NN\alpha$ și $\tau := x$, prin urmare cu MP obținem $NN\alpha$, de unde, cu (A´3) și MP rezultă α. Cum variabila x nu apare liber în premisa $N\exists xN\alpha$, se aplică GN și rezultă $\forall x\alpha$.

În cele precedente limbajul $L = (X, E_t, E_f)$ (cf. definiția 1.1) a fost fixat. În propoziția 3.9 și scolia ei vom introduce unele extensii L' ale lui L (cf. definiția 1.1). Pentru fiecare limbaj L' se construiesc semantica și sintaxa corespunzătoare înlocuind X, E_t, E_f respectiv cu X', E_t', E_f' și lucrând cu aceleași mulțimi S, B, O, P.

Propoziția 3.9. *Fie X infinită. Fie $H \subset E_f$ o mulțime consistentă în limbajul $L = (X, E_t, E_f)$. Atunci există o extensie $L' = (X', E_t', E_f')$ a limbajului L și o mulțime $H' \subseteq E_f'$ cu proprietățile: 1) $H \subseteq H'$, 2) H' este consistentă sintactic în L' și 3) pentru orice $\alpha \in E_f$ și $x \in X$, dacă $\exists x\alpha \in H$ atunci există $z \in X' \setminus X$ astfel încât $\alpha(x/z) \in H'$.*

Demonstrație. Dacă nu există formule $\exists x\alpha \in H$, concluzia este banală. Altfel pentru fiecare formulă $\beta = \exists x\alpha \in H$ luăm un element $z_\beta \notin X$. Fie $X' = X \cup \{z_\beta \mid \beta = \exists x\alpha \in H\}$, unde $z_\beta \neq z_{\beta'}$ pentru $\beta \neq \beta'$. Fie $L' = (X', E_t', E_f')$ și $H' = H \cup \{\alpha(x/z_\beta) | \beta = \exists x$a $\in H\}$. Rămâne să demonstrăm consistența sintactică a mulțimii H' în L', ceea ce vom face în trei etape.

I) Cazul când există o singură formulă $\beta = \exists x\alpha \in H$. Atunci $X' = X \cup \{z\}$ și $H' = H \cup \{\alpha(x/z)\}$. Presupunem prin absurd că în L' am avea $H' \vdash c$, ceea ce vom nota $H' \overset{L'}{\vdash} c$. Atunci $H \overset{L'}{\vdash} \alpha(x/z) \to c$, adică $H \overset{L'}{\vdash} N\alpha(x/z)$, deci în L' există un text H-demonstrativ $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, N\alpha(x/z))$. Aplicând propoziția 3.8 pentru $x := z$, rezultă că șirul

$$\left(\alpha_1^+(z/y), \ldots, \alpha_{n-1}^+(z/y), \left(N\alpha(x/z)\right)^+(z/y)\right), \tag{3.28}$$

unde y este o nouă variabilă, este un text H-demonstrativ. Dar variabila z nu apare în (3.28), deci (3.28) este un text H-demonstrativ în L. Prin urmare

$$H \vdash (N\alpha(x/z))^+ (z/y). \tag{3.29}$$

Aplicând lema 3.5 cu $t := x$, $\tau := z$ și ținând seama că z nu apare în $N\alpha$, obținem

$$(N\alpha(x/z))^+ (z/y) = (N\alpha)^+(x/z)(z/y) = N\alpha(x/y),$$

deci (3.29) devine

$$H \vdash N\alpha(x/y).$$

Aplicând succesiv GN asupra lui y (care nu apare în H), lema 3.2, T2 și (1.10), obținem respectiv

$$H \vdash \forall y N\alpha(x/y),$$

$$H \vdash \forall x N\alpha,$$

$$H \vdash NN\forall x N\alpha,$$

$$H \vdash N\exists x\alpha. \tag{3.30}$$

Pe de altă parte, $\exists x\alpha \in H$, deci $H \vdash \exists x\alpha$, ceea ce, împreună cu (3.30), contrazice consistența mulțimii H.

II) Cazul când există un număr finit de formule $\exists x\alpha \in H$ se tratează iterând construcția de la cazul I.

III) Cazul general. Presupunând prin absurd că $H' \overset{L'}{\vdash} c$ rezultă că există o submulțime finită $H'_0 \subset H'$ astfel încât $H'_0 \overset{L'}{\vdash} c$, deci $H \cup H'_0 \overset{L'}{\vdash} c$ și cum $H \cup H'_0$ conține un număr finit de formule $\alpha(x/z_\beta)$ cu $\beta = \exists x\alpha \in H$, am contrazis concluzia de la cazul II.

Scolie. *În propoziția 3.9 condiția 2) se poate înlocui cu 2*) H' este consistentă maximală în L'.*

Demonstrație. Construim un șir de limbaje $L_0, L_1, \ldots, L_n = (X_n, E_{tn}, E_{fn}), \ldots$ și un șir de mulțimi de formule $H_1, G_1, H_2, G_2, \ldots, H_n, G_n, \ldots$, după cum urmează. Fie $L_0 = L$ și $H_0 = H$. La pasul inductiv presupunem că avem mulțimea consistentă sintactic H_n de formule în limbajul L_n. Fie, conform propoziției 3.4, o mulțime consistentă maximală $G_n \supseteq H_n$. Aplicând mulțimii G_n construcția din propoziția 3.9 obținem limbajul L_{n+1} și mulțimea consistentă sintactic H_{n+1} în limbajul L_{n+1}, cu $H_n \subseteq G_n \subseteq H_{n+1}$. Fie $L' = \left(X', E'_t, E'_f\right)$, unde $X' = \bigcup_{n \in N} X_n$. Din definițiile (T0) – (T2) și (F0) – (F2) (§1) este clar că $E'_s = \bigcup_{n \in N} E_{sn}$ $(s = t, f)$. Fie $H' = \bigcup_{n \in N} H_n$.

Notăm mai întâi că $H \subseteq H'$. Fie acum $\alpha \in E'_f$. Atunci există n astfel încât $\alpha \in E_{fn}$; conform propoziției 3.5, (exact) una din formulele α, $N\alpha$, este în G_n, deci este în H_{n+1}, deci în H'. Dacă am avea α, $N\alpha \in H'$ ar exista n, m cu $\alpha \in H_n$ și $N\alpha \in H_m$ și cum familia $(H_p)_{p \in N}$ este total ordonată față de $\subseteq$, avem de exemplu $H_n \subseteq H_m$ și $\alpha, N\alpha \in H_m \subseteq G_m$, ceea ce contrazice propoziția 3.5. Am demonstrat astfel că exact una din formulele α, $N\alpha$ este în H', deci H' este consistentă maximală în virtutea propoziției 3.5. În sfârșit, dacă $\exists x\alpha \in H'$, atunci există n astfel încât $\exists x\alpha \in H_n \subseteq G_n$, deci conform propoziției 3.9 există $y \in X_{n+1}$ astfel încât $\alpha(x/y) \in H_{n+1} \subseteq H'$.

§. 4 Consistența și completitudinea

Scopul acestui paragraf este demonstrarea echivalenței între aspectul semantic și aspectul sintactic al calculului predicatelor. Mai exact, acesta înseamnă echivalența între implicația semantică și implicația sintactică, în particular între consistența semantică și consistența sintactică. Astfel, calculul predicatelor devine un instrument puternic și care modelează adecvat aspectele formale ale gândirii, prezente mai ales în gândirea matematică.

Observația 4.1. În acest paragraf *vom omite indicele f* în scrierea diverselor realizări, adică vom folosi notația $\varphi, \psi, \chi, \ldots$ atât pentru realizări, cât și pentru componentele respective de sort „formulă".

Lema 4.1. *Fie $H \subseteq E_f$* și $\alpha \in E_f$ *Dacă $H \vdash \alpha$ atunci $H \models \alpha$.*

Demonstrație. Arătăm prin inducție că orice element $\alpha \in Ded\,H$ satisface $H \models \alpha$.

Dacă $\alpha \in H$ și ψ este o realizare satisfăcând $\psi(H) = 1$, atunci în particular $\psi(\alpha) = 1$; deci $H \models \alpha$.

Dacă α este axiomă, demonstrăm că satisface o proprietate mai tare decât $H \models \alpha$ şi anume că $\psi(\alpha) = 1$ pentru orice realizare ψ. Pentru axiomele (A1) – (A3) aceasta rezultă din faptul că ψ este un homomorfism boolean; de exemplu $\psi(\mathrm{A1}) = \psi(\beta \to (\gamma \to \beta)) = \psi\beta \to (\psi\gamma \to \psi\beta) = 1$ deoarece $\psi\beta \in \{0,1\}$ şi $0 \to y = x \to 1 = 1$.

Fie $\alpha = \mathrm{A4} = \forall x\ (\beta \to \gamma) \to (\beta \to \forall x\gamma)$, unde x nu apare liber în β. Atunci $\psi\alpha = \psi(\forall x\ (\beta \to \gamma)) \to (\psi\beta \to \psi(\forall x\gamma))$ şi rezultă, ca mai sus, că dacă $\psi(\forall x\ (\beta \to \gamma)) = 0$ sau $\psi\beta = 0$ atunci $\psi\alpha = 1$. Să presupunem acum $\psi(\forall x\ (\beta \to \gamma)) = \psi\beta = 1$ şi să demonstrăm $\psi(\forall x\gamma) = 1$, ceea ce va implica $\psi\alpha = 1$. Fie χ o realizare cu $\chi|_Q = \psi|_Q$ şi $\chi_t \sim_x \psi_t$; cf. (2.25), rămâne să demonstrăm că $\chi\gamma = 1$. Deoarece x nu apare liber în β, din propoziţia I.4.2 rezultă $\chi\beta = \psi\beta = 1$. Pe de altă parte, din $\psi(\forall x(\beta \to \gamma)) = 1$ deducem că $\chi(\beta \to \gamma) = 1$, deci $1 = \chi\beta \to \chi\gamma = 1 \to \chi\gamma = \chi\gamma$.

Fie $\alpha = \mathrm{A5} = \forall x\beta \to \beta(x/\tau)$, unde $\tau \in E_t$. Atunci $\psi\alpha = \psi(\forall x\gamma) \to \psi(\beta(x/\tau))$ şi $\psi(\forall x\beta) = 0$ implică $\psi\alpha = 1$, iar dacă $\psi(\forall x\beta) = 1$, atunci $\psi\alpha = 1$ rezultă din corolarul I.4.3.

Pasul de inducţie constă în a arăta că proprietatea $H \models \alpha$ se păstrează prin *MP* şi *GN*. Fie ψ o realizare cu $\psi(H) = 1$. Dacă $H \models \beta$ şi $H \models \beta \to \alpha$, atunci $\psi(\beta) = 1$ şi $1 = \psi(\beta \to \alpha) = \psi\beta \to \psi\alpha = 1 \to \psi\alpha = \psi\alpha$. Dacă α se obţine din β prin *GN* şi $H \models \beta$, atunci $\psi(B) = 1$, $\alpha = \forall x\beta$ şi există o submulţime finită $H_0 \subseteq H$ astfel încât $H_0 \vdash \beta$ iar variabila x nu apare liber în nici o formulă din H_0. Rezultă că pentru orice realizare χ astfel încât $\chi|_Q = \psi|_Q$ şi $\chi_t \sim_x \psi_t$, avem $\chi(H_0) = \psi(H_0) = 1$, deci $\chi(\beta) = 1$; prin urmare $\psi(\forall x\beta) = 1$.

Lema 4.2. *Dacă o mulţime $H \subset E_f$ este consistentă semantic, atunci ea este consistentă sintactic.*

Demonstraţie. Fie H inconsistentă sintactic, adică $H \vdash c$. Conform lemei 4.1 rezultă $H \models c$. Dacă ar exista o realizare ψ satisfăcând $\psi(H) = 1$, atunci am avea $\psi(c) = 1$, contrazicând relaţia (2.23). Deci H este inconsistentă semantic.

Suntem acum în măsură să demonstrăm rezultatele fundamentale pe care le-am vizat.

Teorema 4.1. *Calculul predicatelor este consistent,* în sensul că nu există nici o formulă α astfel încât α şi $N\alpha$ să fie amândouă teze.

Demonstraţie. Dacă ar exista $\alpha \in E_f$ cu proprietatea $\vdash \alpha$ şi $\vdash N\alpha$, atunci din lema 4.1 ar rezulta $\models \alpha$ şi $\models N\alpha$, deci conform observaţiilor 2.2 şi 2.1 ar trebui ca orice realizare ψ să verifice $\psi\alpha = 1 = \psi N\alpha = (\psi\alpha)' = 0$.

Lema 4.3 *Are loc implicaţia* (i) $\Rightarrow$ (ii) *unde*

(i) dacă o mulţime $H \subseteq E_f$ este consistentă sintactic, atunci ea este consistentă semantic;

(ii) pentru orice $H \subseteq E_f$ şi $\alpha \in E_f$: $(H \vdash \alpha \Leftrightarrow H \models \alpha)$.

Demonstraţie. Implicaţia $\Rightarrow$ din (ii) este lema 4.1.

Reciproc, fie $H \models \alpha$. Atunci mulţimea $H \cup \{N\alpha\}$ este inconsistentă semantic, deoarece dacă ar exista o realizare ψ cu $\psi(H \cup \{N\alpha\}) = 1$, atunci am avea $\psi(N\alpha) = 1$ şi $\psi(H) = 1$, deci $\psi\alpha = 1$, contrazicând observaţia 2.1.

Folosind ipoteza (i), rezultă că $H \cup \{N\alpha\}$ este inconsistentă sintactic, adică $H \cup \{N\alpha\} \vdash c$, deci $H \vdash N\alpha \to c$, adică $H \vdash NN\alpha$. Cum $\vdash NN\alpha \to \alpha$ (A3), rezultă $H \vdash \alpha$.

Propoziția 4.1. *Presupunem mulțimea X infinită. O mulțime $H \subseteq E_f$ este consi semantic dacă și numai dacă este consistentă sintactic.*

Demonstrație. Rămâne să demonstrăm reciproca lemei 4.2.

Fie H o mulțime consistentă sintactic. Fie, conform propoziției 3.9 și scoliei sale, ext L' a limbajului L și mulțimea consistentă maximală H' a limbajului L', cu $H \subseteq H'$. Vom con o realizare ψ a limbajului L' astfel încât $\psi(H') = 1$, de unde va rezulta în particular că $\psi(H$ deci restricția realizării ψ la limbajul L va fi un model și pentru H.

Luăm ca domeniu D mulțimea T' a termenilor. Pentru fiecare $o \in O$, de $\varphi_o:(T')^{n(o)} \to T'$ prin $\varphi_o\left(\tau_1,\ldots,\tau_{n(o)}\right) = o\tau_1\ldots\tau_{n(o)}$. Pentru fiecare $p \in P$ defi $\varphi_p:(T')^{n(p)} \to \{0,1\}$ prin $\varphi_p\left(\tau_1,\ldots,\tau_{n(p)}\right) = 1 \Leftrightarrow p\tau_1\ldots\tau_{n(p)} \in H'$. Fie φ interpretarea genera asignarea astfel definită, $\xi \in T'^{X'}$ valuarea definită prin $\xi x = x$ pentru orice $x \in X'$, iar ψ reali generată de perechea (φ, ξ).

Arătăm mai întâi prin inducție că $\psi_t\tau = \tau$ pentru orice $\tau \in T'$. Într-adevăr, $\psi_t x = \xi x =$

$$\psi_t\left(o\tau_1\ldots\tau_{n(o)}\right) = \varphi_t\left(o\tau_1\ldots\tau_{n(o)}\right)(\xi) = \varphi_o\left(\varphi_t\tau_1(\xi),\ldots,\varphi_t\tau_{n(o)}(\xi)\right) =$$
$$= \varphi_o\left(\psi_t\tau_1,\ldots,\psi_t\tau_{n(o)}\right) = \varphi_o\left(\tau_1,\ldots,\tau_{n(o)}\right) = o\tau_1\ldots\tau_{n(o)}.$$

În sfârșit, demonstrăm o proprietate mai puternică decât aceea că ψ este model pentr și anume: $\psi\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha \in H'$. Tehnica este inducția asupra numărului de conectori din α.

Pentru formulele atomice avem, folosind $\psi_t\tau = \tau$ și cu un calcul asemănător cel mai sus,

$$\psi_t\left(p\tau_1\ldots\tau_{n(p)}\right) = 1 \Leftrightarrow \varphi_p\left(\tau_1,\ldots,\tau_{n(p)}\right) = 1 \Leftrightarrow p\tau_1\ldots\tau_{n(p)} \in H'.$$

Proprietatea $\psi c = 1 \Leftrightarrow c \in H'$ este satisfăcută deoarece $\psi_c = 0 \neq 1$, iar $c \notin H'$ pentru c este consistentă.

Presupunem proprietatea adevărată pentru formulele având cel mult n conectori ș $\alpha \to \beta$ o formulă cu $n + 1$ conectori. În continuare vom folosi corolarul propoziției 3.6 pe H' precum și corolarul propoziției 3.5: $H' \vdash \gamma \Rightarrow \gamma \in H'$.

Dacă $\psi(\alpha \to \beta) = 1$, atunci $\psi\alpha \to \psi\beta = 1$, deci $\psi\alpha = 0$ sau $\psi\beta = 1$. a) Dacă $\psi\alpha = 0$, at $\alpha \notin H'$ deci $N\alpha \in H'$, adică $H' \vdash N\alpha$, de unde aplicând (T5) deducem $H' \vdash \alpha \to \beta$, $\alpha \to \beta \in H'$. b) Dacă $\psi\beta = 1$, atunci $\beta \in H'$, deci $H' \vdash \beta$ și cum (A1) arată că $\vdash \beta \to (\alpha \to$ obținem $H' \vdash \alpha \to \beta$, apoi $\alpha \to \beta \in H'$.

Reciproc, să presupunem $\alpha \to \beta \in H'$. Dacă $\psi\alpha = 0$, atunci $\psi(\alpha \to \beta) = 0 \to \psi\beta = 1$. D $\psi\alpha = 1$, atunci $\alpha \in H'$, deci $(\alpha, \alpha \to \beta, \beta)$ este un text H'-demonstrativ, prin urmare $H' \vdash$ deci $\beta \in H'$, prin urmare $\psi\beta = 1$ și $\psi(\alpha \to \beta) = \psi\alpha \to 1 = 1$.

În sfârșit, fie α o formulă cu n conectori și $x \in X$.

Dacă $\forall x\alpha \notin H'$, atunci $N\exists xN\alpha \notin H'$ (altfel din (T6) ar rezulta $H' \vdash \forall x\alpha$, deci $\forall x\alpha \in$ prin urmare $\exists xN\alpha \in H'$ de unde, conform lemei 3.8 rezultă că există $y \in X' \setminus X$ astfel în $N\alpha(x/y) \in H'$, deci $\alpha(x/y) \notin H'$. Ipoteza de inducție implică acum $\psi(\alpha(x/y)) = 0$, $\psi(\forall x\alpha) = 0$ în virtutea corolarului I.4.3.

Reciproc, să presupunem $\psi(\forall x\alpha) = 0$. Rezultă că există o realizare χ astfel încât $\chi\big|_Q = \psi\big|_Q$, $\chi_t \sim_x \psi_t$ și $\chi\alpha = 0$. Fie $\tau = \chi_t x \in T$; atunci $\chi_t x = \tau = \psi_t \tau$. Fie α^+ formula construită în propoziția 3.7; atunci α^+ nu conține apariții legate ale variabilei x, deci $\alpha^+(x/\tau)$ există. Constatăm astfel că f, α^+, t, x, τ, χ, ψ satisfac ipotezele corolarului I.4.2, prin urmare $\chi\alpha^+ = \psi(\alpha^+(x/\tau))$. Pe de altă parte, $\chi\alpha^+ = \chi\alpha$ conform propoziției 3.7, deci $\psi(\alpha^+(x/\tau)) = 0$, de unde

(4.1) $$\alpha^+(x/\tau) \notin H'$$

în virtutea ipotezei inductive. Pe de altă parte $\alpha \dashv\vdash \alpha^+$ conform propoziției 3.7, de unde, aplicând propoziția 3.2 rezultă $\forall x\alpha \dashv\vdash \forall x\alpha^+$ și cum axioma A5 implică $\forall x\alpha^+ \vdash \alpha^+(x/\tau)$, cu propoziția 3.1 deducem $\forall x\alpha \vdash \alpha^+(x/\tau)$, prin urmare $\forall x\alpha \notin H'$ (altfel $H' \vdash \alpha^+(x/\tau)$, și cum H' este maximală, am contrazice (4.1)).

Teorema 4.2 (a lui Gödel, de completitudine a calculului predicatelor). *Presupunem mulțimea X infinită. Pentru orice $H \subseteq E_f$ și $\alpha \in E_f$,*

(4.2) $$H \vdash \alpha \Leftrightarrow H \models \alpha.$$

Demonstrație. Din propoziția 4.1 și lema 4.3.

Corolar. *Tezele coincid cu tautologiile:*

(4.3) $$\vdash \alpha \Leftrightarrow \models \alpha.$$

§ 5. Calculul clasic al propozițiilor

În acest paragraf obținem calculul clasic al propozițiilor prin particularizarea calculului clasic al predicatelor. Singurul rezultat care va necesita un supliment de demonstrație va fi teorema de completitudine a lui Gödel. În plus vom demonstra decidabiliatea calculului propozițiilor.

Definiția 5.1. Numai *calculul clasic al propozițiilor,* particularizarea calculului clasic al predicatelor obținută luând $X = \phi$ și $O = \phi$.

Rezultă imediat (de exemplu folosind definiția (T0) – (T2) din § 1) că *nu exista termeni*: $E_t = \phi$. De aici urmează că relația (1.4) devine

(5.1) $$ar(p) = (\lambda, f) \text{ pentru orice } p \in P$$

și vom folosi denumirea de *variabile propoziționale* pentru predicatele $p \in P$.

Păstrăm mai departe relațiile

(1.1) $$B = \{\rightarrow, c\},$$

(1.5) $$ar(\rightarrow) = (f^2, f),\ ar(c) = (\lambda, f),$$

așa încât definiția (F0) – (F2) a *formulelor* (cf. § 1) devine

(F0′) orice variabilă propozițională $p \in P$ este formulă;

(F1′) c este formulă și dacă α, β sunt formule, atunci $\alpha \rightarrow \beta$ este formulă;

(F2′) orice formulă se obține aplicând regulile (F0′), (F1′) de un număr finit de ori.

Observația 5.1. Definiția (F0′) – (F2′) arată că (E_f, →, c) este algebra Peano (monosortat de tip (2,0) liber generată de mulțimea P.

Observația 5.2. În virtutea relațiilor

(1.7) $$N\alpha = \alpha \to c,$$

(1.8) $$\alpha \vee \beta = N\alpha \to \beta,$$

(1.9) $$\alpha \wedge \beta = N(\alpha \to N\beta),$$

precum și a unor transformări inverse asupra cărora nu insistăm, în considerentele despre algebr E_f a formulelor, tipul (2,0) poate fi înlocuit cu alte tipuri de algebre monosortate.

În plan semantic *dispare noțiunea de valuare,* iar *interpretările coincid cu realizările* Sensul exact al acestei afirmații este următorul:

Relația (2.3) devine $V = D^\phi = \{\perp\}$, unde $\perp : \phi \to D$ este funcția vidă. Așadar există o singură valuare, prin urmare această noțiune își pierde interesul: orice funcție definită pe V este o constantă, orice mulțime de forma M^V poate fi identificată cu mulțimea M etc. Să considerăm în particular noțiunea de interpretare, a cărei definiție se reduce la relațiile (2.7), (2.9), (2.12) - (2.14), și noțiunea de realizare, a cărei definiție se reduce la relațiile (2.17), (2.19), (2.21) - (2.23). Fiecare din aceste două șiruri de câte 5 relații se reduce la următorul șir:

(5.2) $$\varphi_p \in \{0,1\} \quad (p \in P),$$

(5.3) $$\varphi_f : E_f \to \{0,1\},$$

(5.4) $$\varphi_f p = \varphi_p \quad (p \in P),$$

(5.5) $$\varphi_f(\alpha \to \beta) = \varphi_f\alpha \to \varphi_f\beta \quad (\alpha, \beta \in E_f),$$

(5.6) $$\varphi_f c = 0.$$

Mai mult, orice pereche $\left(\varphi_f, (\varphi_p)_{p\in P}\right)$ satisfăcând relațiile (5.2) – (5.6) poate fi identificată cu prima componentă φ_f deoarece familia $(\varphi_p)_{p\in P}$ este unic determinată de φ_f via relațiile (5.4) și rezultă că satisface (5.2). Obținem astfel:

Observația 5.3. Noțiunea de *interpretare* coincide cu aceea de *realizare* și este dată de relațiile (5.3), (5.5), (5.6), adică o realizare se poate defini ca un homomorfism

(5.7) $$\varphi_f : (E_f, \to, c) \to (\{0,1\}, \to, 0)$$

de la algebra expresiilor la algebra booleană cu două elemente (în care $x \to y = x' \vee y$).

În plan sintactic păstrăm schemele de axiome

(A1) $$\alpha \to (\beta \to \alpha),$$

(A2) $$(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)),$$

(A3) $$((\alpha \to c) \to c) \to \alpha,$$

și *modus ponens* ca regulă de deducție (adică, în definiția 3.3 a *textelor H-demonstrative* dispare cazul (3) (regula generalizării)).

Celelalte definiții din §§ 1-3 păstrează aceleași formulări. De asemenea, sunt valabile rezultatele din § 3 a căror formulare își păstrează sensul. Așadar au loc: *observațiile* 3.1 – 3.3 și 3.5 – 3.6, *observația* 3.4 (fără *GN*), *tezele* (T1) – (T5), *teorema deducției* 3.1 – 3.6 și *corolarele* ultimilor două. Trecând la § 4, constatăm că au loc *lemele* 4.1 – 4.3 precum și teorema 4.1, care însă trebuie reformulată:

Teorema 5.1. *Calculul propozițiilor este consistent.*

Propoziția 4.1 și teorema de completitudine 4.2 au fost demonstrate în ipoteza că mulțimea X este infinită. Arătăm acum că ele sunt adevărate și pentru $X = \phi$.

Propoziția 5.1. *O mulțime H de formule ale calculului proporțional este consistentă semantic dacă și numai dacă este consistentă sintactic.*

Demonstrație. Rămâne să demonstrăm reciproca lemei 4.2.

Fie H o mulțime consistentă sintactic. Conform propoziției 3.4 există o mulțime consistentă maximală $H_1 \supseteq H$. Dacă arătăm că există un model φ pentru H_1, atunci φ va fi în particular model pentru H, stabilind astfel consistența semantică a mulțimii H.

Fie $\varphi: E_f \to \{0,1\}$ funcția caracteristică a mulțimii H_1, adică $\varphi\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha \in H_1$; conform observației 5.3, rămâne să arătăm că φ este un homomorfism (5.5), (5.7). Pentru aceasta vom folosi propoziția 3.5 și corolarul ei. Fie $\alpha, \beta \in E_f$.

Dacă $\beta \in H_1$, atunci din (A1) $\vdash \beta \to (\alpha \to \beta)$ rezultă $\alpha \to \beta \in H_1$, deci

$$\varphi\alpha \to \varphi\beta = \varphi\alpha \to 1 = 1 = \varphi(\alpha \to \beta).$$

Dacă $\beta \notin H_1$ și $\alpha \in H_1$, atunci $\alpha \to \beta \notin H_1$ (altfel $\beta \in H_1$), deci

$$\varphi\alpha \to \varphi\beta = 1 \to 0 = 0 = \varphi(\alpha \to \beta).$$

Dacă $\beta \notin H_1$ și $\alpha \notin H_1$, atunci $N\alpha \in H_1$ și din (T5) $\vdash N\alpha \to (\alpha \to \beta)$ rezultă $\alpha \to \beta \in H_1$, deci

$$\varphi\alpha \to \varphi\beta = 0 \to 0 = 1 = \varphi(\alpha \to \beta).$$

În sfârșit, $c \notin H_1$ (astfel $H_1 \vdash c$), deci $\varphi c = 0$.

Teorema 5.2 (a lui Gödel, de completitudine a calculului propozițiilor). *Pentru orice $H \subseteq E_f$ și $\alpha \in E_f$*

(5.8) $$H \vdash \alpha \Leftrightarrow H \models \alpha.$$

Demonstrație. Din propoziția 5.1 și lema 4.3.

Corolar. *Tezele coincid cu tautologiile:*

(5.9) $$\vdash \alpha \Leftrightarrow \models \alpha.$$

În încheiere demonstrăm încă un rezultat fundamental privind calculul propozițiilor și care nu se regăsește la calculul predicatelor.

Teorema 5.3. *Calculul propozițiilor este decidabil,* în sensul că există un algoritm care, primind la intrare o formulă oarecare, stabilește dacă ea este teză ($\Leftrightarrow$ tautologie) sau nu.

Demonstrație. În virtutea corolarului precedent, este suficient să demonstrăm teorema pentru tautologii. Fie $\alpha \in E_f$. Potrivit celor arătate în cap 0, α are o construcție P-formativă; cf. definiției (F0′) – (F2′). Fie $p_1,\dots,p_k$ variabilele propoziționalele care apar în această construcție formativă. Pentru orice realizare (5.7), valoarea $\varphi_f\alpha$ se calculează în funcție de valorile $\varphi_f p_1,\dots,\varphi_f p_k \in \{0,1\}$ urmărind construcția formativă a lui α și aplicând (5.5) sau (5.6) după caz. Rezoltă de aici următorul algpritm. Se deschide un ciclu pentru parcurgerea celor 2^k sisteme posibile de valori $\varphi_f p_1,\dots,\varphi_f p_k$ și la fiecare pas se calculează valoarea corespunzătoare $\varphi_f\alpha$. Dacă se întâlnește o valoare $\varphi_f\alpha = 0$, algoritmul se oprește cu răspunsul că α nu este tautologie; dacă $\varphi_f\alpha = 1$ la fiecare din cei 2^k pași, atunci α este tautologie.

Observație. Am demonstrat mai sus existența unui algoritm; problema găsirii unui algoritm eficient este diferită și nu o vom trata aici.

INDICE DE TERMENI

INDICE DE SIMBOLURI

BIBLIOGRAFIE

D. W. BARNES, J. M. MACK (1975). An Algebraic Introduction to Mathematical Logic. Springer-Verlag, N York / Heideberg / Berlin.

C. CALUDE, V. E. CĂZĂNESCU (1984). Bazele informaticii. Lecții de logică matematică. Univ. Bucur Fac. Matematică, București.

V. E. CĂZĂNESCU (1981). Curs de bazele informaticii. Introducere în logica matematică. Univ. București, Matematică, București.

R. C. LYNDON (1966). Notes on Logic. Van Nostrand, New York.

J. D. MONK (1976). Mathematical Logic. Springer-Verlag, New York / Heideberg / Berlin.

S. RUDEANU (1977). Curs de bazele informaticii. Logică matematică. I. Elemente de algebră universală Calculul propozițiilor. Univ. București, Fac. Matematică, București.

S. RUDEANU (1982). Curs de bazele informaticii. Latici și algebre booleene. Univ. București, Fac. Matemat București.

S. RUDEANU (1991). Cap. VI. Preliminarii de algebră. Cap. VII. Logică matematică. In: C. P. Popovici Rudeanu, Horia Georgescu, Bazele informaticii, vol. II. Univ. București, Fac Matematică, București.

Tiparul s-a executat sub c-da nr. 177/1995 la
Tipografia Editurii Universității din București

ISBN - 973 - 575 - 138-0

Lei 2300