UNIVERSITATEA DIN BUCUREŞTI

Seminar ştiinţific

SPAŢII LINIARE ORDONATE TOPOLOGICE

Conducător ştiinţific :
Prof. dr. doc. ROMULUS CRISTESCU
Membru corespondent al Academiei
R. S. România

Nr. 10 (1989)

BUCUREŞTI, 1989

Seminar ştiinţific

SPATII LINIARE ORDONATE TOPOLOGICE

Conducător ştiinţific

PROF. DR. DOC. ROMULUS CRISTESCU

Membru corespondent al Academiei R.S.R.

Nr. 10 (1989)

Tipografia Universităţii din Bucureşti

C U P R I N S

Unele aspecte ale teoriei spaţiilor liniare ordonate topologice şi operatorilor liniari

Romulus Cristescu

Spaţiile liniare ordonate înzestrate cu structuri topologice au fost studiate începînd din anul 1937, dar în primele lucrări asupra acestor spaţii se considerau topologii definite de norme, studiindu-se mai ales spaţii reticulate normate. Este vorba de rezultatele obţinute de L.V. Kantorovici, precum şi de M.G.Krein şi şcoala sa.

Dezvoltarea teoriei spaţiilor liniare topologice şi, în special, a spaţiilor local convexe a dus şi la introducerea unor spaţii liniare ordonate topologice mai generale decît spaţiile reticulate normate.

In 1952 G.T.Roberts a introdus spaţiile liniare reticulate topologice cu ajutorul bazelor de vecinătăţi solide ale originii. In 1953 H.Nakano a considerat diferite tipuri de topologii pe un spaţiu liniar complet reticulat iar în 1954 (apoi în 1956) R.Cristescu a considerat spaţii reticulate local convexe introduse cu ajutorul familiilor de seminorme solide.

Spaţii liniare ordonate topologice mai generale au fost apoi considerate de H.Schaefer, I.Namioka, I.Kawai etc.

In cele ce urmează se trec în revistă unele noţiuni utilizate actualmente în teoria spaţiilor liniare ordonate topologice, precum şi unele rezultate din teoria operatorilor liniari între spaţii ordonate topologice.

§.1. Topologii pe spaţii liniare ordonate

Presupunem cunoscute noţiunile de spaţiu liniar ordonat, spaţiu liniar dirijat, spaţiu liniar reticulat (σ-reticulat, complet reticulat). Prin con într-un spaţiu liniar înţelegem un clin E cu proprietatea $E \cap (-E) = \{0\}$.

Notăm cu X_+ conul pozitiv al unui spaţiu liniar ordonat X.

Amintim că un şir $\{x_n\}_{n \in N}$ cu valori într-un spaţiu liniar ordonat X se zice că este (o)-convergent către un element x dacă există un şir $\{v_n\}_{n \in N}$ cu valori în X astfel ca $v_n \downarrow_{n \in N} 0$ (i.e., $v_n \leq v_{n+1}$ şi $\bigwedge_{n \in N} v_n = 0$) şi $\pm(x_n - x) \leq v_n$, $\forall n \in N$.

Elementul x se numeşte (o)-limita şirului şi se notează $x = (o)\text{-}\lim_{n \in N} x_n$. Un şir generalizat $\{x_\delta\}_{\delta \in \Delta}$(cu valori în X) se zice că este (ω)-convergent către un element x dacă există un şir generalizat $\{v_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ cu valori în X astfel ca $v_\lambda \downarrow_{\lambda \in \Lambda} 0$ iar pentru orice $\lambda \in \Lambda$ există $\delta_0 \in \Delta$ astfel ca $\pm(x_\delta - x) \leq v_\lambda$, $\forall \delta \geq \delta_0$. Elementul x se numeşte (ω)-limita şirului generalizat şi se notează $x = (\omega)\text{-}\lim_{\delta \in \Delta} x_\delta$.

Presupunem cunoscute noţiunile de subspaţiu liniar reticulat, subspaţiu normal, bandă, componentă.

O funcţională f pe un spaţiu liniar ordonat X se zice pozitivă dacă $f(x) \geq 0, \forall x \in X_+$ şi se zice regulată dacă este diferenţa a două funcţionale aditive şi pozitive.

1.1. Topologii local pline

Dacă X este un spaţiu liniar ordonat şi $a, b \in X$, notăm cu $[a,b]$ (o)-segmentul determinat de a,b (i.e. $[a,b] = \{x \in X \mid a \leq x \leq b\}$).

O submulţime E a lui X se numeşte mulţime plină dacă din $a, b \in E$ rezultă $[a,b] \subset E$.

Fie X un spaţiu liniar ordonat.

Se numeşte <u>topologie local plină</u> pe X orice topologie liniară τ pe X pentru care există o bază de vecinătăţi ale originii formată din mulţimi pline.

Pentru o topologie local plină τ există o bază de vecinătăţi ale originii formată din mulţimi echilibrate şi pline, iar dacă τ este local convexă şi local plină, atunci există o bază de vecinătăţi ale originii formată din mulţimi echilibrate, convexe şi pline.

Pentru ca o topologie liniară τ pe X să fie local plină, este necesar şi suficient ca pentru orice şiruri generalizate $\{x_\delta\}_{\delta\in\Delta}, \{y_\delta\}_{\delta\in\Delta}$ cu valori în X cu proprietăţile $0 \leq x_\delta \leq y_\delta$, $(\forall\delta\in\Delta)$ şi $(\tau)-\lim\limits_{\delta\in\Delta} y_\delta = 0$ să rezulte $(\tau)-\lim\limits_{\delta\in\Delta} x_\delta = 0$.

Intr-o topologie local plină τ orice mulţime (σ)-mărginită (i.e. mărginită în sensul ordinei) este (τ)-mărginită (i.e. mărginită topologic).

Se numeşte <u>seminormă monotonă</u> pe spaţiul X, orice seminormă p pe X care are proprietatea $0 \leq x \leq y$, $(x,y\in X) \Rightarrow p(x) \leq p(y)$.

Pentru ca o topologie local convexă pe X să fie local plină, este necesar şi suficient să fie definită de o mulţime de seminorme monotone.

Un spaţiu liniar ordonat înzestrat cu o topologie local convexă-plină se numeşte <u>spaţiu ordonat local convex.</u>

Orice funcţională liniară (τ)-continuă (i.e. topologic continuă) definită pe un spaţiu ordonat local convex X este o diferenţă a două funcţionale liniare (τ)-continue şi pozitive.

Notăm cu X^*_σ mulţimea funcţionalelor liniare (o)-continue definite pe X (o funcţională f pe X este (o)-continuă dacă din $x = (o)-\lim\limits_{n\in N} x_n$ rezultă $f(x) = \lim\limits_{n\in N} f(x_n)$. Notăm de asemenea cu X^*_ω mulţimea funcţionalelor liniare (ω)-continue definite pe X. (o funcţională f pe X este (ω)-continuă dacă din $x = (\omega)-\lim\limits_{\delta\in\Delta} x_\delta$ rezultă $f(x) = \lim\limits_{\delta\in\Delta} f(x_\delta)$.

Dacă X este înzestrat cu o topologie liniară, notăm cu X^*_τ mulţimea funcţionalelor liniare (τ)-continue definite pe X.

Dacă X este un spaţiu ordonat local convex, atunci condiţia $X_{\tau}^{*} \subset X_{\sigma}^{*}$ (resp. $X_{\tau}^{*} \subset X_{\omega}^{*}$) este echivalentă cu condiţia

$x_n \underset{n\in N}{\downarrow} 0 \Longrightarrow (\tau)\text{-}\lim\limits_{n\in N} x_n = 0$ (resp. $x_\delta \underset{\delta\in\Delta}{\downarrow} 0 \Longrightarrow (\tau)\text{-}\lim\limits_{\delta\in\Delta} x_\delta = 0$).

O normă p pe spaţiul liniar ordonat X se numeşte <u>normă cvasi monotonă</u> dacă există un număr $\gamma \geq 1$ astfel ca: $0 \leq x \leq y$, $(x, y \in X) \Longrightarrow p(x) \leq \gamma p(y)$.

Dacă $\gamma = 1$ atunci p se numeşte <u>normă monotonă</u> .

Dacă spaţiul liniar ordonat X este normat, atunci următoarele trei condiţii sînt echivalente.

(i) Norma spaţiului X este cvasimonotonă .

(ii) Dacă $0 \leq x_n \leq y_n$, $(\forall n \in N)$ în X şi $\lim\limits_n \| y_n \| = 0$ atunci $\lim\limits_n \| x_n \| = 0$.

(iii) Topologia normei este local plină.

Pentru orice normă cvasimonotonă pe spaţiul liniar ordonat X, există o normă monotonă echivalentă.

Dacă τ este o topologie liniară oarecare pe spaţiul liniar ordonat X, atunci pentru orice bază $\mathcal{W}$ de vecinătăţi ale originii, sistemul

$$\mathcal{W}' = \{ pl\ (V) \mid V \in \mathcal{W} \}$$

(unde pl(V) înseamnă acoperirea plină a lui V), *formează o bază de vecinătăţi ale originii* pentru cea mai fină topologie local plină τ' majorată de topologia .

1.2. <u>Topologii local pozitiv-generate</u>

O submulţime E a unui spaţiu liniar ordonat X se zice că este <u>pozitiv-generată</u> dacă

$$E \subset E \cap X_+ - E \cap X_+$$

Se numeşte <u>topologie local pozitiv-generată</u> pe un spaţiu liniar ordonat X, orice topologie liniară τ pe X pentru care există o bază de vecinătăţi ale originii formată din mulţimi pozitiv - generate.

Pentru ca o topologie liniară τ pe un spaţiu liniar ordonat X să fie local pozitiv-generată, este necesar şi suficien ca pentru orice vecinătate W a originii, mulţimea

$$W \cap X_+ - W \cap X_+$$

să fie, de asemenea, o vecinătate a originii.

In particular, dacă pe un spaţiu liniar ordonat X există o topologie local pozitiv-generată, atunci X este un spaţiu liniar dirijat.

Fie X un spaţiu liniar dirijat.

Dacă τ este o topologie liniară metrizabilă pe X, atunci pentru ca τ să fie local pozitiv-generată, este necesar şi suficient ca următoarea condiţie să fie îndeplinită. dacă $(\tau)\text{-}\lim\limits_{n \in N} x_n = 0$, atunci există şirurile $\{y_n\}_{n\in N}$ şi $\{z_n\}_{n\in N}$ de elemente pozitive (τ)- convergente către 0, astfel încît $x_n = y_n - z_n$ $(\forall n\in N)$.

Dacă τ este o topologie local convexă şi local pozitiv-generată pe X, atunci există o mulţime $\mathcal{P}$ de seminorme care defineşte topologia τ astfel ca orice $p\in\mathcal{P}$ să aibă proprietatea: pentru orice $x\in X$ şi orice număr $\varepsilon > 0$ există elementele pozitive x_1, x_2 astfel ca $x = x_1 - x_2$ şi $p(x_1) + p(x_2) \leq p(x) + \varepsilon$.

Dacă τ este o topologie liniară oarecare pe X, atunci pentru orice bază $\mathcal{W}$ de vecinătăţi ale originii, sistemul

$$\mathcal{W}'' = \{V \cap X_+ - V \cap X_+ \mid V \in \mathcal{W}\}$$

formează o bază de vecinătăţi ale originii pentru cea mai puţin fină topologie local pozitiv-generată τ'' care majorează topologia τ .

1.3. Topologii local solide

O submulţime E a unui spaţiu liniar ordonat X se numeşte mulţime solidă dacă are următoarele două proprietăţi

(i) $\forall\, x\in E$, $\exists\, y \in E$, $\pm x \leq y$;

(ii) $0 \leq x \in E \Longrightarrow [-x,x] \subset E$.

Se numeşte topologie local solidă pe un spaţiu liniar dirijat X, orice topologie liniară τ pe X pentru care există o bază de vecinătăţi ale originii formată din mulţimi solide.

Fie X un spaţiu liniar dirijat.

O topologie liniară pe X este local solidă dacă şi numai dacă este local plină şi local pozitiv-generată.

Dacă τ este o topologie local plină pe X, atunci pentru ca τ să fie local solidă, este necesar şi suficient ca pentru orice vecinătate W a originii, mulţimea s(W) dată de formula

$$s(W) = \bigcup_{0 \leq x \in W} [-x,x]$$

să fie o vecinătate a originii.

Se numeşte seminormă solidă pe spaţiul X orice seminormă p pe X care satisface condiţia

$$p(x) = \inf\left\{p(y) \mid \pm x \leq y\right\}, \quad (\forall\, x \in X)$$

Pentru ca o topologie local convexă τ pe spaţiul X să fie local solidă, este necesar şi suficient ca topologia τ să poată fi definită de o mulţime dirijată de seminorme solide.

1.4. Spaţii cu con pozitiv închis

Prin spaţiu cu con pozitiv închis vom înţelege un spaţiu liniar ordonat X înzestrat cu o topologie liniară τ astfel încît conul pozitiv X_+ să fie o mulţime (τ)-închisă.

Un spaţiu cu con pozitiv închis X este separat ca spaţiu topologic şi arhimedian ca spaţiu liniar ordonat (i.e. $0 < x \in X \Rightarrow 0 = \bigwedge_{n \in N} \frac{1}{n} x$).

Dacă τ este o topologie local convexă separată pe un spaţiu liniar ordonat X, atunci pentru ca mulţimea X_+ să fie (τ)-închisă este necesar şi suficient ca din condiţia $f(x_0) \geqslant 0$ oricare ar fi $f \in X^*_\tau$ cu $f \geqslant 0$, să rezulte $x_0 \geqslant 0$.

Dacă un spaţiu Banach este un spaţiu cu con pozitiv închis, atunci condiţia ca topologia normei să fie local plină este echivalentă cu condiţia ca orice mulţime (o)-mărginită să fie (τ)-mărginită .

1.5. Spaţii cu con pozitiv tare

Prin spaţiu cu con pozitiv tare vom înţelege un spaţiu liniar ordonat X înzestrat cu o topologie liniară τ astfel ca $\operatorname{int} X_+ \neq \emptyset$.

Dacă X este un spaţiu cu con pozitiv tare şi dacă $x \in \operatorname{int} X_+$ atunci x se numeşte element tare pozitiv.

Fie X un spaţiu liniar ordonat şi normat.

Condiţia $\operatorname{int} X_+ \neq \emptyset$ este echivalentă cu condiţia ca orice submulţime (τ)-mărginită a lui X să fie (o)-mărginită.

Dacă $\operatorname{int} X_+ \neq \emptyset$, atunci pentru orice element $v \in X$ următoarele condiţii sînt echivalente

(i) Elementul v este tare pozitiv

(ii) Mulţimea $[-v,v]$ este o vecinătate a originii

(iii) Elementul v este axial (i.e. $\forall x \in X, \exists \lambda \in R_+,\ x \leq \lambda v$).

Să presupunem că $\operatorname{int} X_+ \neq \emptyset$, atunci orice funcţională regulată pe X este o funcţională liniară (τ)-continuă. In particular, pe spaţiul X există funcţionale liniare pozitive (τ)-continue nenule pe X. Orice element al lui X este o diferenţă de două elemente tare pozitive; în particular X este un spaţiu liniar dirijat. Un element $v \in X$ este tare pozitiv, dacă şi numai dacă din $0 < f \in X^*_\tau$ rezultă $f(v) > 0$.

1.6. Spaţii cu proprietatea (S)

Dacă X este un spaţiu liniar ordonat înzestrat cu o topologie liniară τ, vom spune că X are proprietatea (S) dacă pentru orice mulţime (τ)-mărginită $A \subset X$ există o mulţime (τ)-mărginită $B \subset X_+$ astfel ca $A \subset B - B$.

In particular, un spaţiu cu proprietatea (S) este un spaţiu liniar dirijat.

Dacă X este un spaţiu liniar ordonat şi normat, atunci pentru ca X să aibă proprietatea (S) este necesar şi suficient să existe un număr $\mu > 0$ astfel ca orice element $x \in X$ să se reprezinte sub forma $x = x' - x''$ cu $x', x'' \geq 0$ şi

$$\max(\|x'\|, \|x''\|) \leq \mu \|x\|.$$

Dacă un spaţiu liniar dirijat [redacted] este un spaţiu Banach cu con pozitiv închis, atunci el este un spaţiu cu proprietatea (S).

1.7. Spaţii liniare reticulate topologice

Dacă X este un spaţiu liniar reticulat, o submulţime E a lui X este o mulţime solidă, dacă şi numai dacă din $|x| \leq |y|$ şi $y \in E$ rezultă $x \in E$.

Dacă τ este o topologie liniară pe un spaţiu liniar reticulat X, atunci următoarele patru condiţii sînt echivalente

(i) Topologia τ este local solidă

(ii) Dacă $\{x_\delta\}_{\delta\in\Delta}$ şi $\{y_\delta\}_{\delta\in\Delta}$ sînt şiruri generalizate cu valori în X astfel ca $|x_\delta| \leq |y_\delta|$, $(\forall \delta\in\Delta)$ şi $(\tau)\text{-}\lim\limits_{\delta\in\Delta} y_\delta = 0$ atunci $(\tau)\text{-}\lim\limits_{\delta\in\Delta} x_\delta = 0$.

(iii) Topologia τ este local plină iar aplicaţia $x \longrightarrow x_+$ a lui X în X este (τ)-continuă în origine.

(iv) Aplicaţia $x \longrightarrow x_+$ a lui X în X este uniform (τ)-continuă.

Intr-o topologie local solidă pe un spaţiu liniar reticulat X aplicaţiile $(x,y) \longrightarrow x\vee y$ şi $(x,y) \longrightarrow x\wedge y$ ale lui $X\times X$ în X sînt continue.

Vom numi <u>spaţiu liniar reticulat topologic</u> orice spaţiu liniar reticulat înzestrat cu o topologie local solidă separată.

Dacă X este un spaţiu liniar reticulat topologic şi Y completatul lui X ca spaţiu liniar topologic, atunci închiderea lui X_+ în spaţiul Y este un con şi în raport cu ordinea dată de acest con, Y este un spaţiu liniar reticulat topologic iar X este un subspaţiu liniar reticulat al lui Y.

Dacă X este un spaţiu liniar reticulat topologic, atunci X este un spaţiu cu con pozitiv închis (în particular este un spaţiu arhimedian), un spaţiu cu proprietatea (S) iar orice bandă a lui X este o mulţime (τ)-închisă .

1.8. Topologii Fatou şi topologii Lebesgue

O submulţime E a unui spaţiu liniar reticulat se numeşte <u>mulţime Fatou</u> dacă este solidă şi dacă din $0 \leq x_\delta \uparrow_{\delta\in\Delta}$ şi $x_\delta \in E$, $(\forall \delta\in\Delta)$ rezultă $x \in E$.

Dacă E este o mulţime Fatou, atunci din $x = (\omega)\text{-}\lim_{\delta\in\Delta} x_\delta$ şi $x_\delta \in E$, $(\forall\delta\in\Delta)$ rezultă $x \in E$.

Se numeşte <u>topologie Fatou</u> pe un spaţiu reticulat arhimedian X orice topologie liniară separată pe X pentru care există o bază de vecinătăţi ale originii formată din mulţimi Fatou.

Se numeşte <u>topologie Lebesgue</u> pe un spaţiu liniar reticulat arhimedian X, orice topologie local solidă separată şi (ω)-continuă pe X.

Pentru ca topologia unui spaţiu liniar reticulat X să fie o topologie Lebesgue, este necesar şi suficient ca orice subspaţiu normal (τ)-închis al lui X, să fie o bandă.

Fie X un spaţiu liniar reticulat arhimedian.

Pentru ca o topologie liniară τ pe X să fie o topologie Lebesgue, este necesar şi suficient ca τ să fie o topologie Fatou şi orice şir crescător şi majorat de elemente pozitive din X să fie un şir (τ)-Cauchy.

Dacă X este (τ)-complet în raport cu o topologie Lebesgue atunci X este un spaţiu liniar complet reticulat.

Dacă este o topologie Fatou (sau Lebesgue) pe spaţiul X atunci există o topologie Fatou (resp.Lebesgue) $\tilde{\tau}$ pe extensia Dedekind $\tilde{X}$ a lui X şi numai o singură astfel de topologie pentru care $\tilde{\tau}\,|\,X = \tau$.

1.9. <u>Spaţii reticulate local convexe</u>

Dacă X este un spaţiu liniar reticulat iar p este o seminormă pe X atunci următoarele patru condiţii sînt echivalente

(i) p este o seminormă solidă

(ii) $|x|\le|y|$, $(x,y\in X) \Longrightarrow p(x)\le p(y)$

(iii) p este o seminormă monotonă şi $p(x) = p(|x|)$, $(\forall x\in X)$

(iv) $p(|x| - |y|) \le p(x-y)$, $(\forall x,y\in X)$.

O topologie local convexă pe un spaţiu liniar reticulat X este local solidă dacă şi numai dacă poate fi definită de o mulţime de seminorme solide.

Fie X un spaţiu liniar reticulat şi τ o topologie local convexă-plină pe X. Fie $\mathcal{W}$ o bază de vecinătăţi ale originii formată din mulţimi echilibrate, convexe şi pline.

Pentru orice $V \in \mathcal{W}$ să punem

$$\hat{V} = \{ x \in V \mid |x| \in V \}$$

Atunci sistemul $\hat{\mathcal{W}} = \{ \hat{V} \mid V \in \mathcal{W} \}$ reprezintă o bază de vecinătăți ale originii pentru o topologie liniară $\hat{\tau}$ pe X care este cea mai puțin fină topologie local convexă solidă care majorează topologia τ.

Numim <u>spațiu reticulat local convex</u> orice spațiu liniar reticulat topologic a cărei topologie este local convexă.

Dacă X este un spațiu reticulat local convex atunci X_τ^* este un subspațiu normal al spațiului liniar complet reticulat X^r al funcționalelor regulate pe X (în X^r se consideră ordinea dată de conul funcționalelor pozitive).

Dacă X este un spațiu reticulat local convex, atunci topologia tare pe X_τ^* este o topologie Fatou.

Se numește <u>seminormă Fatou</u> pe un spațiu liniar reticulat X, orice seminormă solidă p pe X care satisface condiția

$0 \leq x_\delta \uparrow_{\delta \in \Delta} x$ în X $\Longrightarrow$ $p(x_\delta) \uparrow_{\delta \in \Delta} p(x)$.

Pentru ca o topologie local convexă τ pe un spațiu liniar reticulat arhimedian X să fie o topologie Fatou, este necesar și suficient ca τ să fie definită de o mulțime suficientă de seminorme Fatou.

O topologie bornologică τ pe un spațiu liniar reticulat X este local solidă, dacă și numai dacă din $|x_n| \leq |y_n|$, $(\forall n \in N)$ în X și $(\tau)\text{-}\lim_{n \in N} y_n = 0$ rezultă $(\tau)\text{-}\lim_{n \in N} x_n = 0$.

Pentru ca un spațiu reticulat local convex X să fie un spațiu bornologic, este necesar și suficient ca orice seminormă solidă și (τ)-mărginită definită pe X să fie (τ)-continuă.

1.10. <u>Spații reticulate normate</u>

Se numește <u>spațiu reticulat normat</u> orice spațiu liniar reticulat X înzestrat cu o normă solidă (i.e. $|x| \leq |y|$ în X $\Longrightarrow$ $\|x\| \leq \|y\|$). Dacă X este în plus un spațiu Banach, atunci X se numește <u>spațiu reticulat Banach</u>.

Dacă X este un spațiu reticulat normat care este σ-reticulat și cu normă (o)-continuă (i.e. $x_n \downarrow_{n \in N} 0$ în X $\Longrightarrow$ $\|x_n\| \downarrow_{n \in N} 0$) atunci X este un spațiu liniar complet reticulat, (o)-separabil (i.e. dacă $A \subset X$ și $a = \sup A$ atunci există $B \subset A$, B cel mult numărabilă cu $a = \sup B$). In plus, X are o normă (ω)-continuă (i.e. $x_\delta \downarrow_{\delta\in\Delta} 0$ în $X \Longrightarrow \|x_\delta\| \downarrow_{\delta\in\Delta} 0$).

Orice spaţiu reticulat Banach cu normă (ω)-continuă este un spaţiu liniar complet reticulat.

Dacă X este un spaţiu reticulat normat, atunci norma lui X se poate prelungi pînă la o normă solidă pe extensia Dedekind $\tilde{X}$ a lui X. Următoarele două formule

$$p_1(y) = \sup\left\{\|x\| \,\middle|\, 0 \leq x \leq |y|;\ x \in X\right\}$$
$$p_2(y) = \inf\left\{\|x\| \,\middle|\, |y| \leq x \in X_+\right\}$$

reprezintă norme solide pe X care prelungesc norma lui X şi dacă q este o prelungire solidă oarecare pe $\tilde{X}$ (a normei lui X) atunci

$$p_1(y) \leq q(y) \leq p_2(y) \qquad , \qquad (\forall y \in \tilde{X})$$

Dacă spaţiul reticulat normat X are normă (ω)-continuă, atunci $p_1 = p_2$, deci norma lui X se prelungeşte în mod unic într-o normă solidă pe X.

Dacă X este un spaţiu reticulat normat, atunci X_τ^* este un spaţiu reticulat Banach şi un spaţiu liniar complet reticulat.

Pentru orice spaţiu reticulat Banach are loc egalitatea $X_\tau^* = X^r$.

Fie acum X un spaţiu reticulat normat şi să notăm $X^{**} = (X_\tau^*)_\tau^*$ (deci $X^{**} = (X_\tau^*)^r$). Pentru orice $x \in X$, punînd $F_x(f) = f(x), \forall f \in X_\tau^*$ şi

$$(1) \quad \Psi(X) = \left\{F_x \,\middle|\, x \in X\right\}$$

mulţimea $\Psi(X)$ este un subspaţiu liniar reticulat al lui X^{**} iar X şi $\Psi(X)$ sînt izomorfe ca spaţii liniare ordonate normate (prin aplicaţia $x \to F_x$). Dacă X este în plus complet reticulat, atunci condiţia ca $\Psi(X)$ să fie un subspaţiu normal al lui X este echivalentă cu condiţia ca X să aibă normă (o)-continuă.

1.11. Spaţii de tip (KB)

Se numeşte <u>spaţiu de tip (KB)</u> orice spaţiu liniar complet reticulat înzestrat cu o normă solidă (o)-continuă şi satisfăcînd condiţia $0 \leq x_n \uparrow_{n\in N}$ în X şi $\|x_n\| \leq \lambda$, $(\forall n \in N) \Longrightarrow \exists \bigvee_{n\in N} x_n$.

Intr-un spaţiu de tip (KB) orice mulţime (τ)-mărginită, dirijată la dreapta şi formată din elemente pozitive este (o)-mărginită.

Un şir $\{x_n\}_{n\in N}$ de elemente ale unui spaţiu X de tip (KB) (o)-converge către un element x, dacă şi numai dacă converge ca regulator către x (i.e. $\exists\, v\in X_+$, $\exists\, \varepsilon_n\in R_+$, $(n\in N)$, $\varepsilon_n \underset{n\in N}{\downarrow} 0$, $|x_n - x|\leq \varepsilon_n v, \forall n\in N$).

Pentru orice şir $\{x_n\}_{n\in N}$ de elemente ale unui spaţiu de tip (KB) există un şir $\{\lambda_n\}_{n\in N}$ de numere mai mari ca zero astfel că $(o)\text{-}\lim\limits_n \lambda_n x_n = 0$.

Dacă X este un spaţiu de tip (KB) atunci

$$X^*_\tau = X^*_\sigma = X^*_\omega = X^r$$

Dacă X este un spaţiu reticulat normat care este şi complet reticulat atunci pentru ca mulţimea $\Psi(\hat{X})$ (v. 1.10, formula (1)) să fie o componentă a spaţiului X^{**} este necesar şi suficient ca X să fie un spaţiu de tip (KB).

Dacă X este un spaţiu reticulat Banach, complet reticulat, pentru ca X să fie un spaţiu normat reflexiv este necesar şi suficient ca X şi X^*_τ să fie spaţii de tip (KB).

1.12. Spaţii de tip (L) şi spaţii de tip (M)

Se numeşte <u>spaţiu reticulat Banach de tip (L)</u> orice spaţiu reticulat Banach a cărei normă satisface condiţia

$$\|x + y\| = \|x\| + \|y\|, \quad (\forall x, y\in X_+)$$

Orice spaţiu reticulat Banach de tip (L) este un spaţiu de tip (KB).

Se numeşte <u>spaţiu reticulat Banach de tip (M)</u> orice spaţiu reticulat Banach a cărei normă satisface condiţia

$$(1)\quad \|x\vee y\| = \max(\|x\|, \|y\|) \quad (\forall x, y\in X_+)$$

Dacă X este un spaţiu liniar σ- reticulat în care există elemente axiale atunci X este un spaţiu reticulat Banach de tip(M) cu <u>norma generată de un element axial v</u>, adică

$$(2)\quad \|x\| = \inf\{\mu > 0 \mid |x|\leq \mu v\}.$$

Dacă X este un spaţiu reticulat Banach, atunci următoarele trei condiţii sînt echivalente

(i) Există o normă solidă pe X, satisfăcînd condiţia (1) şi echivalentă cu norma spaţiului X.

(ii) $x = (\tau)\text{-}\lim\limits_{n \in N} x_n \Longrightarrow \exists \bigvee\limits_{n \in N} x_n$

(iii) $x = (\tau)\text{-}\lim\limits_{n\ N} x_n \Longleftrightarrow x = (\rho)\text{-}\lim\limits_{n\ N} x_n$

(unde (ρ)-lim înseamnă limita cu regulator)

Dacă X este un spaţiu reticulat Banach de tip (L) (de tip(M)) atunci X^*_τ este un spaţiu reticulat Banach de tip (M) (resp.de tip(L))

Un spaţiu reticulat Banach (nenul) care este în acelaşi timp de tip (L) şi de tip (M) are dimensiunea unu.

Dacă X este un spaţiu reticulat Banach în care norma este generată de un element axial v (v. formula(2)) atunci există un spaţiu compact T astfel ca X să fie izomorf (ca spaţiu liniar ordonat normat) cu spaţiul C(T) al funcţiilor reale continue pe (spaţiul C(T) fiind înzestrat cu structurile obişnuite).

Dacă X este un spaţiu reticulat Banach de tip (L) atunci există un spaţiu local compact T şi o măsură Radon pozitivă μ pe T astfel ca X să fie izomorf (ca spaţiu liniar ordonat normat) cu spaţiul $L(T,\mu)$ (cu structurile obişnuite). Dacă în X există elemente totale (v este total dacă $x \perp v \Longrightarrow x = 0$) atunci se poate lua T compact.

1.13. Spaţii reticulate Banach cu proprietatea Krein-Milman

Dacă X este un spaţiu liniar normat iar $B \subset X$, vom nota cu $\overline{co}\,(B)$ acoperirea convexă şi închisă a lui B. Vom nota de asemenea cu ext A mulţimea punctelor extremale ale unei submulţimi convexe A a lui X.

Un spaţiu Banach X se zice că are proprietatea Krein-Milman dacă pentru orice submulţime convexă, închisă şi mărginită A a lui X are loc egalitatea $A = \overline{co}\,(\text{ext } A)$.

Dacă A este o submulţime mărginită a unui spaţiu Banach X, se numeşte <u>transă</u> a lui A, orice mulţime de forma

$$T(A,f,\alpha) = \left\{x \in A \,\middle|\, f(x) > \sup f(A) - \alpha\right\}$$

unde f este o funcţională liniară şi continuă pe X iar $\alpha > 0$.

Fie acum X un spaţiu reticulat Banach infinit dimensional.

Pentru ca X să aibă proprietatea Krein-Milman, este necesar şi suficient ca X să aibă următoarea proprietate (Radon-Nikodym) pentru orice număr $\varepsilon > 0$, orice submulţime (τ)-mărginită a lui X posedă o transă de diametru mai mic decît ε.

Dacă X este separabil ca spaţiu normat, atunci următoarele două condiţii sînt echivalente

(i) X are proprietatea Krein-Milman şi admite o bază (τ)-mărginită de elemente pozitive.

(ii) X este izomorf ca spaţiu liniar ordonat cu spaţiul (ℓ^1) (cu structurile obişnuite).

§.2. Operatori pe spaţii liniare ordonate topologice

Dacă X şi Y sînt spaţii liniare ordonate, un operator $U: X \to Y$ se numeşte operator pozitiv dacă $U(X_+) \subset Y_+$ şi operator regulat dacă $U = U_1 - U_2$, unde U_1 şi U_2 sînt operatori aditivi şi pozitivi.
Vom nota $\mathcal{R}(X,Y)$ mulţimea operatorilor regulaţi care aplică X în Y.

Dacă X este un spaţiu liniar dirijat, atunci mulţimea operatorilor pozitivi din $\mathcal{R}(X,Y)$ formează un con şi considerăm ordinea dată de acest con. Dacă X este un spaţiu liniar dirijat care satisface condiţia lui Riesz (i.e. $0 \leq z \leq x_1 + x_2$ şi $x_1, x_2 \in X_+ \Longrightarrow z = z_1 + z_2$ cu $0 \leq z_i \leq x_i$, $i = 1,2$) iar Y este un spaţiu liniar ordonat (o)-complet (i.e. orice parte majorată admite supremum) atunci $\mathcal{R}(X,Y)$ este un spaţiu liniar complet reticulat.

Dacă X şi Y sînt spaţii liniare ordonate (sau spaţii liniare oarecare) înzestrate cu topologii liniare, vom nota cu $\mathcal{L}(X,Y)$ mulţimea operatorilor liniari (τ)-continui (i.e. topologic continui) care aplică X în Y. Dacă X este un spaţiu liniar dirijat şi Y un spaţiu liniar ordonat atunci în $\mathcal{L}(X,Y)$ considerăm ordinea dată de conul operatorilor pozitivi.

2.1. Operatori regulaţi şi operatori liniari (τ)-continui

Dacă X şi Y sînt spaţii liniare dirijate înzestrate cu topologii liniare, vom nota $\mathcal{L}_r(X,Y)$ mulţimea operatorilor $U: X \to Y$ care se pot reprezenta sub forma $U = U_1 - U_2$ cu $0 \leq U_i \in \mathcal{L}(X,Y)$, $(i=1,2)$.

Condiţia ca spaţiul liniar ordonat $\mathcal{L}(X,Y)$ să fie dirijat se poate exprima sub forma

(1) $\mathcal{L}(X,Y) = \mathcal{L}_r(X,Y)$

Egalitatea (1) are loc dacă $X = (\ell^p)$, $(1 \leq p \in R)$ iar $Y = (c)$. Dacă $X = (\ell^1)$ atunci egalitatea (1) are loc oricare ar fi spaţiul reticulat Banach Y. In particular, $\mathcal{L}((\ell^1),(c)) = \mathcal{L}_r((\ell^1),(c))$, dar $\mathcal{L}((c),(\ell^1)) \neq \mathcal{L}_r((c),(\ell^1))$.

Să presupunem acum că X este un spaţiu liniar dirijat înzestrat cu o topologie local convexă-plină, iar Y un spaţiu liniar complet reticulat. Dacă în Y există elemente axiale şi dacă se consideră topologia dată de norma asociată unui element axial, atunci egalitatea (1) are loc. Aceeaşi egalitate are, de asemenea, loc dacă topologia lui X este nucleară iar Y este un spaţiu reticulat Banach.

Fie acum X un spaţiu liniar dirijat înzestrat cu o topologie liniară cu conul pozitiv tare iar Y un spaţiu liniar ordonat înzestrat cu o topologie local plină. In acest caz are loc incluziunea

(2) $\mathcal{R}(X,Y) \subset \mathcal{L}(X,Y)$

Dacă X este un spaţiu liniar dirijat şi un spaţiu Banach cu conul poziziv închis, iar Y un spaţiu liniar ordonat cu normă monotonă, atunci orice operator liniar şi pozitiv care aplică X în Y este (τ)-continuu. In particular, dacă X este un spaţiu reticulat Banach, iar Y un spaţiu reticulat normat atunci incluziunea (2) are loc.

Dacă X este un spaţiu reticulat Banach de tip (L) iar Y un spaţiu de tip (KB) atunci $\mathcal{R}(X,Y) = \mathcal{L}(X,Y)$.

2.2. Operatori (τo)-mărginiţi şi operatori $(o\tau)$-mărginiţi

In această secţiune vom nota cu X un spaţiu liniar reticulat topologic.

Fie Y un spaţiu liniar complet reticulat.

Un operator $U: X \to Y$ se numeşte operator (τo)-mărginit dacă pentru orice submulţime (τ)-mărginită A a lui X, mulţimea $U(A)$ este (o)-mărginită.

Dacă G este un subspaţiu normal al lui X iar $U_o: G \to Y$ un operator liniar pozitiv şi (τo)-mărginit, atunci U_o se poate prelungi pe X cu păstrarea liniarităţii, pozitivităţii şi (τo)-mărginirii.

Vom nota cu $\mathcal{M}_{\tau o}(X,Y)$ mulţimea operatorilor liniari şi (τo)-mărginiţi care aplică X în Y.

Mulţimea $\mathcal{M}_{\tau o}(X,Y)$ este un subspaţiu normal al spaţiului $\mathcal{R}(X,Y)$.

Dacă în spaţiul X există elemente axiale iar topologia spaţiului este topologia dată de norma asociată unui element axial, atunci $\mathcal{M}_{\tau o}(X,Y) = \mathcal{R}(X,Y)$.

Fie acum Z un spaţiu liniar topologic.

Un operator $U: X \to Z$ se numeşte <u>operator $(o\tau)$-mărginit</u> dacă pentru orice submulţime (o)-mărginită A a lui X, mulţimea U(A) este (τ)-mărginită.

Vom nota cu $\mathcal{M}_{o\tau}(X,Z)$ mulţimea operatorilor liniari $(o\tau)$-mărginiţi care aplică X în Z.

Dacă topologia lui X este cea mai fină topologie local convexă-solidă pe X (topologia (o)-mărginirii) iar topologia lui Z este local convexă, atunci $\mathcal{M}_{o\tau}(X,Z) = \mathcal{L}(X,Z)$.

2.3. <u>Asupra unor operatori pozitivi</u>

Fie X şi Y spaţii liniare ordonate înzestrate cu topologii liniare. Vom nota cu $\mathcal{H}(X,Y)$ mulţimea operatorilor liniari $U: X \to Y$ cu proprietatea dacă A este o submulţime (τ)-mărginită a lui X, atunci U(A) este (τ)-precompactă în Y.
Vom nota, de asemenea, cu $\mathcal{K}(X,Y)$ mulţimea operatorilor liniari $U: X \to Y$ cu proprietatea există o vecinătate W a originii în X astfel ca U(W) să fie o mulţime (τ)-precompactă în Y.

Fie acum X şi Y spaţii liniare dirijate care satisfac condiţia lui Riesz şi Z un spaţiu liniar complet reticulat. Să presupunem că X,Y,Z sînt înzestrate cu topologii local solide şi că topologia lui Z este (ω)-continuă. Fie $U_i: X \to Y$ şi $V_i: Y \to Z$, $(i=1,2)$ operatori liniari astfel ca $0 \leq U_1 \leq U_2$ şi $0 \leq V_1 \leq V_2$. Dacă $U_2 \in \mathcal{K}(X,Y)$ iar $V_2 \in \mathcal{K}(Y,Z)$ atunci $V_1U_1 \in \mathcal{K}(X,Z)$.

Dacă X este un spaţiu liniar dirijat înzestrat cu o topologie liniară, o submulţime A a lui X se zice că este <u>(τo)-mărginită</u>, dacă pentru orice vecinătate W a originii în X există $x_o \in X_+$ astfel ca $A \subset [-x_o, x_o] + W$.

Fie X un spaţiu liniar dirijat înzestrat cu o topologie liniară cu proprietatea (S) iar Y un spaţiu liniar dirijat care satisface condiţia lui Riesz, înzestrat cu o topologie local solidă.

Fie $U_i \in \mathcal{L}(X,Y)$, $(i=1,2)$ cu $0 \leq U_1 \leq U_2$ şi să presupunem că $U_2 \in \mathcal{H}(X,Y)$. Atunci pentru orice submulţime (τ)-mărginită A a lui X, mulţimea $U_1(A)$ este (τo)-mărginită. Dacă orice (o)-segment al lui Y este o mulţime (τ)-precompactă, atunci $U_1 \in \mathcal{H}(X,Y)$.

Dacă X este un spaţiu liniar dirijat care satisface condiţia lui Riesz, înzestrat cu o topologie local solidă şi dacă Y este un spaţiu reticulat Banach în care există elemente axiale, atunci mulţimea $\mathcal{K}(X,Y)$ este un subspaţiu liniar reticulat al spaţiului $\mathcal{R}(X,Y)$.

2.4. Operatori regulaţi sumabili

Fie X un spaţiu reticulat Banach şi Y un spaţiu Banach.

Dacă $U \in \mathcal{L}(X,Y)$ şi dacă există $f \in X^*_\tau$ astfel ca

$$\|U(x)\| \leq f(|x|) \quad , \forall x \in X$$

atunci U se numeşte operator sumabil.

Vom nota cu b(X) mulţimea tuturor şirurilor $\{x_n\}_{n\in N}$ cu valori în X pentru care seria $\sum_n |x_n|$ este (τ)-convergentă. Vom nota, de asemenea, cu $\ell(Y)$ mulţimea tuturor şirurilor $\{y_n\}_{n\in N}$ cu valori în Y pentru care seria $\sum_n \|y_n\|$ este convergentă. In raport cu operaţiile obişnuite cu şirurile şi înzestrate respectiv cu normele

$$\|\{x_n\}_{n\in N}\| = \Big\| \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \Big\|$$

$$\|\{y_n\}_{n\in N}\| = \sum_{n=1}^{\infty} \|y_n\|$$

b(X) şi $\ell(Y)$ sînt spaţii Banach.

Dacă $U \in \mathcal{L}(X,Y)$ atunci U este sumabil dacă şi numai dacă satisface condiţia

$$\{x_n\}_{n\in N} \in b(X) \Longrightarrow \{U(x_n)\}_{n\in N} \in \ell(Y)$$

Vom nota cu $\mathcal{S}(X,Y)$ mulţimea operatorilor sumabili care aplică X în Y.

Dacă $U \in \mathcal{S}(X,Y)$ atunci operatorul $\tilde{U} : b(X) \to \ell(Y)$ dat de formula

$$\tilde{U}(\{x_n\}_{n\in N}) = \{U(x_n)\}_{n\in N}$$

este liniar şi (τ)-continuu.

Dacă Y este un spaţiu reticulat Banach cu normă (ω)-continuă, atunci mulţimea $\mathcal{R}(X,Y)\cap\mathcal{S}(X,Y)$ este un subspaţiu normal al spaţiului $\mathcal{R}(X,Y)$. In particular, dacă Y este un spaţiu de tip (KB) atunci $\mathcal{S}(X,Y)$ este o componentă a spaţiului $\mathcal{R}(X,Y)$.

2.5. <u>Operatori de tip (v)</u>

Fie X un spaţiu liniar reticulat, Y un spaţiu local convex şi $\mathcal{P}$ mulţimea seminormelor continue pe Y.

Un operator liniar $U: X \longrightarrow Y$ se numeşte <u>operator de tip(v)</u> dacă pentru orice $q\in\mathcal{P}$, există o funcţională liniară şi pozitivă φ_q pe X astfel ca

(1) $q\,(U(x))\leq\varphi_q(|x|)$, $(\forall x\in X)$.

Cea mai mică funcţională liniară şi pozitivă φ_q care verifică (1) se numeşte q-<u>variaţia</u> lui U şi se notează $\|U\|_q$.

Notăm cu $\mathcal{V}(X,Y)$ mulţimea operatorilor de tip (v) care aplică X în Y.

Funcţia $U\rightarrow\|U\|_q$ de la $\mathcal{V}(X,Y)$ la spaţiul X^r al funcţionalelor regulate pe X, este o seminormă vectorială şi punînd

$$Y_q^* = \left\{\psi\in Y^{\ell}\,\middle|\; |\psi(y)|\leq q(y),\ \forall y\in Y\right\}$$

(unde Y^{ℓ} este mulţimea funcţionalelor liniare pe Y) avem

$$\|U\|_q = \sup\left\{|\psi U|\,\middle|\,\psi\in Y_q^*\right\}$$

Dacă X este un spaţiu reticulat local convex bornologic secvenţial (τ)-complet, atunci $X^r = X^*_\tau$ şi deci, în acest caz, orice operator de tip (v) este (τ)-continuu. In particular, dacă X este un spaţiu reticulat Banach, atunci $\mathcal{V}(X,Y) = \mathcal{S}(X,Y)$, (v. secţ.2.4).

Vom numi <u>spaţiu de tip (K_o)</u> orice spaţiu reticulat local convex a cărei topologie este (ω)-continuă şi care satisface condiţia: pentru orice şir generalizat crescător şi (τ)-mărginit de elemente pozitive există marginea superioară.

Dacă Y este un spaţiu de tip (K_o), atunci mulţimea $\mathcal{V}(X,Y)$ este un subspaţiu normal al spaţiului $\mathcal{R}(X,Y)$ şi

$$\|U\|_q = \||U|\|_q$$

oricare ar fi $U\in\mathcal{V}(X,Y)$.

B I B L I O G R A F I E

Borwein J.M. and Jost D.T.

1. Absolute norms on vector lattices. Proc.Edinbourgh Math.Soc. 27 (1984), part 2, 215-222.

Bourgain J. and Talagrund M.

1. Dans un espace de Banach reticulé solide, la propriété de Radon-Nicodým et celle de Krein-Milman sont équivalentes. Proc. Amer. Math. Soc. 81 (1981), 93-96

Buhvalov, A.V.; Veksler, A.I.; Lozanovski, G.I.

1. Banahovî reşetki - nekotorîe banahovî aspektî teorii. Uspehi Matem. nauk 34 (1979) , 137-183

Cristescu, Romulus

1. Spaţii parţial ordonate pseudonormate. Comunic. Acad.R.P.R, 4 (1954), 15-19
2. Clase de spaţii liniare semiordonate pseudonormate. St.cerc. mat. 7 (1956), 291-302 .
3. Operatori liniari mărginiţi pe spaţii liniare reticulate topologice. St.cerc.mat. 20 (1968), 1313 - 1316.
4. Sur l'extension de type Dedekind d'un espace reticulé localement convexe bornologique. Rev. Roum. math. pures et appl. 13 (1968), 1293-1296.
5. Spaţii liniare ordonate topologice. St.cerc.mat. 21 (1969) 685-709.
6. Sur une classe d'opérateurs reguliers. Rev.Roum.math.pures et appl. 15 (1970), 1149-1152.
7. Sur le dual d'un espace dirigé localement convexe. Rev.Roum.math. pures et appl.17 (1972, 17-20.
8. Asupra unor spaţii de operatori liniari. St.cerc.mat. 26 (1974), 521-524.
9. Elemente difuze în spaţii ordonate local convexe. St.cerc. mat. 26 (1974), 1288-1292.

10. Ordered vector spaces and linear operators. Abacus Press, Kent, 1976
11. Topological vector spaces. Noordhoff J.P., Leyden, 1977
12. Espaces ordonnés d'opérateurs linéaires et continus. Rev.Roum.math,pures et appl. 24 (1979), 79-85.
13. Structuri de ordine în spaţii liniare normate. Editura ştiinţifică şi enciclopedică, 1983
14. Asupra unor operatori precompacţi. St.cerc.mat. 36 (1984) 321-323.

Duhoux, M.
1. Order properties of $\mathcal{L}(E,F)$, Annalles Soc. Sci. Bruxelles 90 (1976), 95-108
2. Order precompactness in topological Riesz spaces. London Math. Soc. 23 (1981), 509-522

Grzaslewicz, R.
1. A charcterization of ℓ^p-spaces in therms of positive operators. Bull. Polish Acad. Sci. Math. 33 (1985), N^o7-8, 337-379.

Kantorovici, L.V.
1. Linear halbgeordnete Räume. Recueil Math. (Mat.Sbornik) 2 (1937), 121-168.

Kawai, Itizo
1. Locally convex lattices. Jour. Math. Soc. Japan 9 (1957), 281-314

Krein, M.G.
1. O snovnîe normalnîh koniceskih mnojestv v prostranstve Banaha. Dokladi Akad. Nauk 28 (1940), 13-17

Kusraev, A.G.
1. O teoremah M.G.Kreina i G.Djeimsona . Optimizatsya No.41 (58) (1987), 134-143.

Labuda, I.
1. On the largest σ-enlargement of a locally solid Riesz space. Bull. Polish Acad.Sci.Math.13 (1985),n.11-12
2. Submeasures and locally solid topologies on Riesz spaces. Math. Zeit. 195 (1987), h.2, 179-196.

Nakano, H.

1. Linear topologies on semiorderes linear spaces. Jour. Fac. Sci. Hokaido Univ. ser.I Math.12 (1953), 89-104

Namioka, I.

1. Partially ordered linear topological spaces. Memoirs of the Amer.Math. Soc. 24 (1957),

Ng , Kung-Fu

1. Solid sets in ordered topological vector spaces. Proc. London Math, Soc. 22 (1971), 106-120.

Ng, Kung-Fu and Duhoux,M.

1. Directedness in ordered normed spaces and operators. Math. Ann. 256 (1981), 281-287

Polyrakis, I.A.

1. Lattice Banach spaces, order isomorphic to ℓ_1. Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 94 (1983), 519-522.

Peressini, A.L.

1. On topologies on ordered linear spaces. Math. Ann. 144 (1961), 199-223

Roberts, G.T.

1. Topologies in vector lattices. Proc. Cambridge Phil. Soc. 48 (1952), 533-546

Schaefer, H.Helmut

1. Halbgeordnete lokalkonvexe vektorraume. Math, Ann.135 (1958),115-141.

Schmidt, G.C.

1. A characterization of normed M-spaces. Glasgow Math. J. 24 (1989), 89-92

Sundaresan, K.and Swaminathan, S.

1. Orthogonality and linear homomorphisms in Banach lattices. Contemporary Mathematics, vol.52 (1986),163-169

Toirov, S.M.

1. Nekotorîe geometriceskie svoistva konusov v topologhiceskîh vektornîh prostranstvah. Dokladî Ak.Nauk Tadjik 27 (1981), 629-632

Vietsch, W.K.

1. Abstract kernel operators and compact operators. Thesis, Leyden, 1979

Wirth, A.

1. The maximal topological extension of a locally solid Riesz space with the Fatou property. Comment.Mathem.Prace, serie I, 24 (1984), 166-172

Wong, Yau Chuen

1. Locally o-convex Riesz spaces. Proc.London Math.Soc. 19 (1969), 289-309

Xiong, Hong-Yun

1. On whether or not $\mathcal{L}(E,F) = \mathcal{L}^r(E,F)$ for some classical Banach lattices E and F. Indag. Math. 90 (1976), 95-108.

- /// -

ASUPRA SPAŢIILOR LINIARE DIRIJATE TOPOLOGICE

Gheorghe Grigore

Un studiu mai sistematic al spaţiilor liniare dirijate topologice a început prin anii 1974 cînd Romulus Cristescu, M. Duhoux, autorul ş.a. s-au preocupat de organizarea spaţiilor liniare dirijate cu topologii compatibile cu ordinea, dovedindu-se că legătura cea mai naturală se face cu ceea ce s-a numit topologie local solidă. Spaţiile liniare dirijate situîndu-se între cele liniare ordonate şi cele reticulate, rezultatele obţinute au generalizat la început unele din cele cunoscute pentru spaţii reticulate. Pe parcursul studiului s-au degajat noţiuni noi, specifice acestor spaţii, cum ar fi cea de ortogonalitate, [1] ,subspaţiu dirijat [2] , ideal, morfism ş.a. In cele urmează sînt prezentate unele rezultate privind dualul unui spaţiu liniar dirijat. Pentru realizarea unei imagini mai complete vom reaminti unele rezultate dintre cele care au făcut obiectul unor comunicări precedente.

Amintim că un subspaţiu Y al spaţiului liniar dirijat X se numeste subspaţiu dirijat dacă pentru $0 \leq y \in X$ şi $x \in Y$, $x \leq y$, există $z \in Y$ astfel încît $x \leq z \leq y$. Este evident că dacă X este reticulat iar Y un subspaţiu dirijat atunci el este un subspaţiu reticulat al lui X. O serie de rezultate contribuie la acreditarea ideii că noţiunea este naturală. Astfel topologia indusă pe un subspaţiu dirijat de o topologie local solidă este de asemenea local solidă, funcţionalele liniare, continui şi pozitive pe un subspaţiu dirijat al unui spaţiu dirijat local convex, local solid se poate prelungi pe întreg spaţiul cu păstrarea pozitivităţţi şi a continuităţii. In ceea ce priveşte structura dualului topologic ca subspaţiu în spaţiul

$$\inf\left\{f(y):\ -y\leq x\leq y\right\} = \sup\left\{|F(x)|:\ |F|\leq f\right\} \qquad (2)$$

Demonstrație: Să observăm pentru început că pentru orice $f\in X^r$ avem

$$|f(x)|\leq \inf\left\{\ |f|(y):\ -y\leq x\leq y\right\} \qquad (3)$$

Intr-adevăr, aceasta rezultă din

$$|f|(y) = \sup\left\{f(y_1) - f(y_2):\ y_1,y_2\geq 0,\ y_1+y_2=y\right\}$$

luînd $y_1=\frac{1}{2}(x+y)$, $y_2=\frac{1}{2}(y-x)$

Din (3) rezultă

$$|F(x)|\leq \inf\left\{|F|(y):\ -y\leq x\leq y\right\}\leq \inf\left\{f(y):-y\leq x\leq y\right\}$$

deci

$$\sup\left\{\ |F(x)|\ :|F|\leq f\right\}\leq \inf\left\{f(y):-y\leq x\leq y\right\} \qquad (4)$$

Pentru a obține cealaltă inegalitate fie $p:X\to R_+$

$$p(x) = \inf\left\{f(y):\ -y\leq x\leq y\right\}$$

Funcționala p este evident o seminormă solidă pe X. Fie $Y = \left\{\lambda x:\lambda\in R\right\}$ și $G: Y\to R$ definită prin $G(\lambda x) =\lambda p(x)$. Atunci $|G(y)|\leq p(y)\ \forall y\in Y$ și prelungim pe G cu teorema Hahn-Banach la o funcțională liniară F_o astfel încît $|F_o(x)|\leq p(x)\ \forall x\in X$. Funcționala F_o este atunci mărginită pe mulțimile o-mărginite și este deci regulată. Fie $t\in X_+$ și $t=t_1+t_2$, $t_i\in X_+$.

Din $-t\leq t_1-t_2\leq t$ rezultă $p(t_1-t_2)\leq p(t) = f(t)$ și deci

$F_o(t_1) - F_o(t_2) = F_o(t_1-t_2)\leq p(t_1-t_2)\leq f(t)$. De aici $|F_o|\leq f$ și prin urmare

$$\sup\left\{|F(x)|:|F|\leq f\right\}\geq |F_o(x)| = |G(x)| = p(x) = \inf\left\{f(y):\ -y\leq x\leq y\right\}$$

adică are loc inegalitatea contrară celei din (4) și teorema este demonstrată.

Teorema 6 Fie X un spațiu liniar dirijat cu proprietatea de descompunere. Fie $f\geq 0$, $f\in X^r$ un element discret. Atunci şi $\{y: -y \leq z \leq y\} \supset \{y: -y \leq x \leq y\}$ atunci $|f(z)| \leq |f(x)|$ şi deci $z \in \ker f$. Deoarece $0 = \min f(\{y: -y \leq x \leq y\})$ există $y \in \ker f \cap \{y: -y \leq x \leq y\}$ şi în consecinţă ker f este mulţime solidă.

Reciproc să presupunem că $f \geq 0$ şi că ker f este un subspaţiu solid. Să observăm pentru început că dacă N este un subspaţiu solid atunci, cu ordinea canonică, X/N este un spaţiu liniar dirijat. Intr-adevăr, dacă $\varphi(x) = \hat{x}$ este aplicaţia canonică, $x \in X_+$, $y \in X_+$ şi $\varphi(x) = -\varphi(y)$ atunci $x+y \in N$. Din $-(y+x) \leq x-y \leq x+y$, deoarece N este solid rezultă că $x-y \in N$, de aici $\varphi(x) = \varphi(y) = \hat{0}$ adică $\varphi(X_+)$ este con. Deoarece X este dirijat rezultă imediat că X/N este dirijat. Fie $f \in X^r$, $f > 0$ şi astfel încît Kerf să fie un subspaţiu solid. Prin $\tilde{f}(\hat{x}) = f(x)$, $x \in \hat{x}$, spaţiul X/kerf este izomorf cu R. Să observăm că $\hat{x} \geq \hat{0}$ dacă şi numai dacă $\forall x \in \hat{x}$, $f(x) \geq 0$. Intr-adevăr, dacă pentru orice $\hat{x} \geq \hat{0}$ am avea $f(x) = 0$, deoarece X/kerf este dirijat ar rezulta $f = \theta$ ceea ce este o contradicţie. Există deci $\hat{x} > \hat{0}$ astfel încît $f(x) > 0$ şi deci $\tilde{f}(\hat{X}_+) = [0, \infty)$. Deoarece f este o bijecţie rezultă atunci că $\tilde{f}(\hat{x}) \geq \hat{0} \Leftrightarrow \hat{x} \geq \hat{0}$ adică $\hat{x} > \hat{0} \Leftrightarrow f(x) > 0$.

Fie $x \in$ kerf; conform ipotezei există $z \in$ kerf, $-z \leq x \leq z$ deci $|f(x)| \leq f(z)$, adică $|f(x)| = 0 = \min\{f(y): -y \leq x \leq y\}$ ceea ce înseamnă că are loc (1). Fie $x \in X$ astfel încît $f(x) > 0$; fie conform observaţiilor precedente $u > 0$ astfel încît $f(u) = 1$. Atunci $x - f(x)u \in$ kerf şi există $w \in$ kerf astfel încît

$$-w \leq x - f(x)u \leq w$$

de unde $-w - f(x)u \leq x \leq w + f(x)u$ şi $f(w - f(x)u) = f(x)$ ceea ce din nou arată că are loc (1). Din această ultimă etapă rezultă că relaţia (1) are loc şi în cazul $f(x) < 0$ ceea ce încheie demonstraţia.

Teorema 5 Fie X un spaţiu liniar dirijat cu proprietatea de descompunere şi $f \in X^r$, $f \geq 0$ Atunci:

funcţionalelor regulate are loc :

Teorema 1([3]) Dacă X este un spaţiu dirijat local convex, local solid atunci $X^{\#}_{\tau}$ este un subspaţiu dirijat în X^r.

In obţinerea rezultatului precedent ca şi a unora din cele ce urmează s-a dovedit utilă o altă noţiune specifică spaţiilor dirijate, cea de ideal: un subspaţiu Y al unui spaţiu liniar dirijat X se numeşte ideal dacă $\forall\, z \in X_+,\ z \neq 0$ există $0 < u \in Y \cup Y^{\perp}$ astfel încît $u \leq z$. Are loc :

Teorema 2 ([3]) Dacă X este un spaţiu dirijat local convex, local solid atunci $X^{\#}_{\tau}$ este un ideal în X^r.

In cazul spaţiilor Banach dirijate X este aproape o componentă în X^r :

Teorema 3 ([3]) Fie X un spaţiu Banach dirijat local solid. Pentru orice $g \in X^r$ există $g_1 \in X^{\#}_{\tau}$ şi $g_2 \in X^{\#\perp}_{\tau}$ astfel încît $g = g_1 + g_2$.

De remarcat că rezultatul precedent este nebanal doar dacă X nu are con închis.

Studiul spaţiilor liniare dirijate topologice presupune în continuare adecvarea unor noţiuni care să suplinească absenţa modulului sau să regăsească valenţele unora care şi-au demonsrat importanţa în cazul reticulat. O asemenea noţiune ar putea fi cea de morfism: dacă X este un spaţiu liniar dirijat, $f \in X^r$ se numeşte morfism dacă

$$|f(x)| = \min\{f(y) : -y \leq x \leq y\} \qquad x \in X \qquad (1)$$

Teorema 4 Fie X un spaţiu liniar dirijat cu proprietatea de descompunere. Funcţionala $f \in X^r$ este morfism dacă şi numai dacă $f \geq 0$ şi ker f este un subspaţiu solid.

Demonstraţie: Dacă f este morfism atunci $f \geq 0$. Dacă $x \in$ ker f

$$\inf\{f(y): -y \leq x \leq y\} = |f(x)| \qquad (5)$$

Demonstrație: Dacă $0 \leq g \leq f$ atunci conform ipotezei există $\lambda \in [0,1]$ astfel încît $g = \lambda f$. Pentru $x \in X$ avem deci $|g(x)| = |\lambda f(x)| \leq f(x)$ și atunci

$$\sup\{|g(x)|: 0 \leq g \leq f\} \leq |f(x)|$$

Conform teoremei 5 aceasta înseamnă că

$$\inf\{f(y): -y \leq x \leq y\} \leq |f(x)|$$

Avînd în vedere forma mulțimii a cărei margine inferioară se calculează în inegalitatea precedentă nu putem avea inegalitate strictă și deci are loc (5).

Considerînd l^r cu conul $C = \{x: x = (x_i)_{i \in N}, x_i > 0\} \cup \{0\}$ putem constata că funcționala $f(x) = x_1$ este o funcțională discretă care nu este morfism. Are loc însă:

Teorema 7. Fie X un spațiu liniar dirijat cu proprietatea de descompunere. Atunci orice morfism din X^r este element discret.

Demonstrație: Conform teoremei 4 dacă f este morfism atunci $f \geq 0$ și kerf este un subspațiu solid. Fie $0 \leq g \leq f$. Deoarece kerf este solid, dacă $x \in$ kerf există $z \in \{y: -y \leq x \leq y\} \cap$ kerf și deci $|g(x)| \leq g(z) \leq f(z) = 0$ ceea ce arată că kerf $\subset$ kerg și deci sau $g=0$ sau kerg = kerf de unde $g = \lambda f$ cu $\lambda \in [0,1]$.

BIBLIOGRAFIE

1 Rômulus Cristescu, Spații liniare ordonate și operatori liniari. Editura Academiei, 197o.

2 Gh. Grigore Spații liniare dirijate topologice St. cerc mat. tom 25 nr 7 p. 993-996

3 Gh. Grigore On the dual of o locally solid ordered vector space. Rev. Roum. Math. Pures et Appl Tome XXII 4 553-556 1978

NOI REZULTATE ÎN TEORIA ALFSEN-EFFROS

Constantin P.Niculescu

Teoria Alfsen-Effros îşi are originea în lucrarea [AE], unde se dezvoltă studiul M-idealelor, o clasă de subspaţii închise care generalizează idealele bilaterale închise într-o C^*-algebră. Principalele rezultate obţinute în [AE] sînt:

i) caracterizarea M-idealelor în termeni de intersecţie de bule;

ii) reprezentarea centralizatorului ca spaţiu de funcţii reale, mărginite şi continue în raport cu topologia structurală.

Demonstraţiile originale au fost complicate. Ulterior, Behrends [Bh] Lima [L1], Elliott [E] şi Elliott şi Olesen [EO] au indicat argumente mai simple şi mai puternice.

În abordarea lui Alfsen şi Effros un rol important îl juca descrierea geometriei bulei unitate a unui spaţiu Banach cu ajutorul unei relaţii de ordine. Această idee a fost reluată de autor în 1983 cînd în conferinţa ţinută la Colocviul de spaţii liniare ordonate topologice (Braşov, iunie 1983) a introdus conceptul general de structură de ordine de tip Alfsen-Effros şi a remarcat că acest concept explică similarităţile între geometria C^*- algebrelor şi a laticilor Banach.

Printre rezultatele importante ale teoriei Alfsen-Effros menţionăm caracterizarea subalgebrelor von Neumann comutative ale unui spaţiu de operatori L(E,E) ca centralizatori (vezi [N3]) precum şi rezultatele din [NW] privind clasele de spaţii slab secvenţial complete precum şi generalizarea teoremei lui Grothendieck privind sumanzii lui $L^{\infty}(\mu)$. În proces de elaborare se află teoria convexităţii aferentă structurilor de tip Alfsen-Effros [N3].

Ne propunem în cele ce urmează să prezentăm noi contribuţii la teoria idealelor din punctul de vedere al teoriei Alfsen-Effros.

1. Structuri de ordine de tip Alfsen-Effros

Fie E un spaţiu Banach peste corpul $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$).

1.1 DEFINIŢIE. (Vezi [N1]). O relaţie de ordine $\ll$ pe E se zice că este de tip Alfsen -Effros (prescurtat, $\ll$ este o AE-relaţie) dacă verifică următoarele condiţii

AE1) $u \ll v$ implică $v-u \ll v$;

AE2) $u \ll v$ implică $\alpha u \ll \alpha v$ pentru orice $\alpha \in \mathbb{K}$;

AE3) $0 \leq \alpha \leq \beta$ în $\mathbb{R}$ implică $\alpha u \ll \beta u$ pentru orice $u \in E$;

AE4) Dacă $x_1 \ll y_1$, $x_2 \ll y_2$ şi $y_1 \ll y_1 + y_2$ atunci $x_1 \ll x_1+x_2$ şi $x_1+x_2 \ll y_1+y_2$;

AE5) $u+v \ll 2v$ implică $\|u\| \leq \|v\|$;

AE6) $u_\alpha \ll v$ ($\alpha \in A$) şi $\|u_\alpha - u\| \longrightarrow 0$ implică $u \ll v$.

Este evident că definiţia de mai sus se poate adapta la contextul spaţiilor local convexe cu sisteme de seminorme precizate. Deasemenea, condiţiile AE1)-AE6) se pot reformula în termeni de codirecţie definind

$$x \parallel y \text{ (} x \text{ şi } y \text{ sînt codirecţionali)} \Longleftrightarrow x \ll x + y .$$

Din AE1) rezultă că $x \parallel y \Longleftrightarrow y \parallel x$.

De asemenea, din AE1) rezultă că

$$0 \ll x \quad \text{pentru orice } x \in E$$

astfel că o AE-relaţie de ordine nu este compatibilă cu structura liniară. În schimb, ea pare mai adaptată pentru a descrie geometria bulei unitate a unui spaţiu Banach. Vezi [N3].

EXEMPLELE FUNDAMENTALE.

1. Spaţiul euclidian 1-dimensional $\mathbb{K}$ admite o singură AE-relaţie de ordine,

$$x \ll y \Longleftrightarrow x = \alpha y \text{ pentru un anume } \alpha \in [0,1].$$

2. Fie H un spaţiu Hilbert şi $\mathcal{A} \subset L(H,H)$ o subalgebră von Neumann comutativă. Atunci putem considera pe H AE-relaţia de ordine $\ll_{\mathcal{A}}$ definită prin

$$x \ll_{\mathcal{A}} y \Leftrightarrow x = Ay \text{ pentru un anume } A \in \mathcal{A},\ 0 \leq A \leq I.$$

Vezi [N3], pag. 94.

3. Fie E un spaţiu Banach regulat ordonat (în sensul lui Davies). Atunci putem considera pe E relaţia de ordine $\ll_{\sigma}$ de tip AE, definită prin

$$x \ll_{\sigma} y \Leftrightarrow \text{orice interval } [u,v] \text{ care conţine pe } 0 \text{ şi } y \text{ îl conţine şi pe } x.$$

Dacă E este o latice Banach atunci

$$x \ll_{\sigma} y \Leftrightarrow |y| = |x| + |y-x|.$$

4. Pe orice spaţiu Banach E putem considera relaţiile de ordine $\ll_L$ şi $\ll_M$ (introduse de Alfsen şi Effros

$$x \ll_L y \Leftrightarrow \|y\| = \|x\| + \|y-x\|$$

$$x \ll_M y \Leftrightarrow \text{orice bulă închisă } \bar{B}_r(z) \text{ din } E \text{ care conţine pe } 0 \text{ şi pe } y \text{ îl conţine şi pe } x.$$

Putem generaliza aceste exemple considerînd norme vectoriale $\varphi : E \longrightarrow X$ care sînt izometrice şi au proprietatea lui Riesz de descompunere (vezi [N3], pag. 90)

$$x \ll_{L,\varphi} y \Leftrightarrow \varphi(y) = \varphi(x) + \varphi(y-x)$$

$$x \ll_{M,\varphi} y \Leftrightarrow \varphi(z-x) \leq \varphi(z) \vee \varphi(z-y) \text{ pentru orice } z \in E.$$

Pentru $\varphi = \|\ \|$, norma lui E, $\ll_{L,\varphi} = \ll_L$ şi $\ll_{M,\varphi} = \ll_M$; pentru E o latice Banach şi $\varphi = |\ |$, modulul lui E, avem $\ll_{L,\varphi} = \ll_{M,\varphi} = \ll_{\sigma}$. Considerarea relaţiilor $\ll_{L,\varphi}$ şi $\ll_{M,\varphi}$ permite înglobarea într-o teorie unitară a rezultatelor din [AE] şi din teoria laticilor Banach. Vezi de exemplu [NV].

Fie E un spaţiu Banach înzestrat cu o relaţie $\ll$ de tip AE. Spunem că E are <u>normă ($\ll$-) continuă</u> dacă orice şir generalizat $(x_\alpha)_\alpha$ $\ll$- dirijat descrescător este normic convergent (la $\ll$ -

marginea sa inferioară). Se arată uşor că această condiţie implică faptul că orice şir generalizat $\ll$-majorat şi $\ll$-dirijat crescător este normic convergent la $\ll$-marginea sa superioară.

Exemple de spaţii Banach cu normă continuă :

spaţiile Banach reflexive, indiferent de $\ll$

spaţiile Banach înzestrate cu $\ll_L$

laticile Banach cu normă (o)-continuă în sensul teoriei laticilor Banach (vezi [N2]) înzestrate cu $\ll_o$.

2. Proiecţii Cunningham

Fie E un spaţiu Banach înzestrat cu o relaţie de ordine $\ll$ de tip AE.

2.1 DEFINIŢIE. O proiecţie $P \in L(E,E)$ se zice că este o ($\ll$-) proiecţie Cunningham dacă

$$Px \ll x \quad \text{pentru orice } x \in E.$$

Imaginile ($\ll$ -) proiecţiilor Cunningham se numesc ($\ll$-)sumanzi.

Evident, 0 şi I sînt proiecţii Cunningham; dacă P este o proiecţie Cunningham atunci şi I-P este.

2.2 LEMĂ. Orice două ($\ll$-) proiecţii Cunningham comută.

Vezi [N3], nota de la pag.111, pentru demonstraţie.

Predecesorii Definiţiei 2.1 sînt L- şi M- proiecţiile introduse de Cunningham. O proiecţie $P \in L(E,E)$ se zice că este o L-proiecţie dacă

$$\|x\| = \|Px\| + \|x - Px\|$$

şi o M-proiecţie dacă

$$\|x\| = \|Px\| \vee \|x - Px\|.$$

Se arată simplu că L- (respectiv M-) proiecţiile coincid cu $\ll_L$ - (respectiv $\ll_M$ -) proiecţiile.

Dacă $\mathcal{A}$ este o algebră von Neumann atunci $\ll_M$ -sumanzii lui $\mathcal{A}$ sînt idealele bilaterale w^*-închise ale lui $\mathcal{A}$. Vezi [AE] pentru detalii.

Dacă E este o latice Banach atunci $\ll_\sigma$ - proiecţiile Cunningham ale lui E sînt precis proiecţiile asociate benzilor. Vezi [N3], pag.109.

Notăm cu $\mathbb{P}(E)$ mulţimea tuturor $\ll$ -proiecţiilor Cunningham pe E ; notaţii ca $\mathbb{P}_{\ll}(E)$ sau $\mathbb{P}_L(E)$ semnifică faptul că relaţia de ordine în atenţie este $\ll$,respectiv $\ll_L$. $\mathbb{P}(E)$ constituie o algebră Boole de proiecţii relativ la operaţiile

$$P \vee Q = P+Q-PQ$$
$$P \wedge Q = PQ$$
$$P^{\perp} = I-P.$$

2.3 PROPOZIŢIE([N3],pag.112).Presupunem că E admite o topologie local convexă Hausdorff τ mai slabă decît topologia normei astfel încît:

i) Orice şir generalizat $\ll$ -filtrant descrescător conţine un subşir generalizat τ -convergent;

ii) Orice $\ll$ -interval $[u,v]$ este τ-compact.

Atunci $\mathbb{P}(E)$ este o algebră Boole de proiecţii completă în sensul că pentru orice familie $(P_\alpha)_\alpha$ din $\mathbb{P}(E)$ există $\vee P_\alpha$ şi $\wedge P_\alpha$ în $\mathbb{P}(E)$ şi în plus

$$(\vee P_\alpha)(E) = \overline{Sp} \bigcup_\alpha P_\alpha(E)$$
$$(\wedge P_\alpha)(E) = \bigcap_\alpha P_\alpha(E).$$

$\mathbb{P}(E)$ este o algebră Boole de proiecţii completă în fiecare din următoarele cazuri :

$\ll = \ll_L$

$\ll = \ll_\sigma$ şi E este o latice Banach cu normă (o)-continuă

$\ll = \ll_M$ şi E este dualul unui spaţiu Banach .

Vezi [N3] pentru detalii.

3. Cazul cînd $\ll$ este $\ll_{L,\varphi}$ sau $\ll_{M,\varphi}$

Cazul relației $\ll_{*,\varphi}$, unde $*$ este L sau M, prezintă importanță deoarece este posibilă reliefarea unei dualități între relațiile $\ll_{L,\varphi}$ și $\ll_{M,\varphi'}$, respectiv între $\ll_{M,\varphi}$ și $\ll_{L,\varphi'}$.

Duala normei vectoriale $\varphi: E \longrightarrow X$ (izometrice și avînd proprietatea lui Riesz de descompunere) este norma vectorială $\varphi': E' \longrightarrow X'$ definită prin formula

$$\varphi'(e')x = \sup_{\varphi(e)\leq x} |e'(e)| \quad \text{pentru } x \in X_+ .$$

Se poate arăta că φ' este de asemenea izometrică și cu proprietatea lui Riesz de descompunere, deci se pot considera relațiile $\ll_{L,\varphi'}$ și $\ll_{M,\varphi'}$. Vezi [N3], pag.91.

Urmînd o idee din [AE], putem introduce noțiunea de $\ll_{L,\varphi}$- (respectiv $\ll_{M,\varphi}$-) ideal al unui spațiu Banach E ca fiind orice subspațiu închis $\mathcal{J}$ cu proprietatea că polara sa $\mathcal{J}^o$ este un $\ll_{M,\varphi'}$ (respectiv un $\ll_{L,\varphi'}$-) sumand al lui E'.

3.1 LEMĂ (Vezi [N3], pag.109). O proiecție $P \in L(E,E)$ este o $\ll_{M,\varphi}$- proiecție dacă și numai dacă

$$\varphi(x) = \varphi(Px) \vee \varphi(x-Px) \quad \text{pentru orice } x \in E.$$

3.2 LEMĂ (Vezi [N3], pag.109). Fie $P \in L(E,E)$ o proiecție. Atunci

i) P este o $\ll_{L,\varphi}$ - proiecție dacă și numai dacă P' este o $\ll_{M,\varphi'}$-proiecție.

ii) P este o $\ll_{M,\varphi}$ - proiecție dacă și numai dacă P' este o $\ll_{L,\varphi'}$-proiecție.

O condiție necesară pentru ca o proiecție $P \in L(E,E)$ să fie o $\ll_{L,\varphi}$- (sau $\ll_{M,\varphi}$-) proiecție este aceea de a fi φ -<u>contractivă</u> adică,

$$\varphi(Px) \leq \varphi(x) \quad \text{pentru orice } x \in E.$$

3.3 LEMĂ.

i) Dacă P este o $\ll_{M,\varphi}$- proiecţie pe E şi Q este o proiecţie φ-contractivă pe E încît $\operatorname{Im} P = \operatorname{Im} Q$ atunci $P = Q$.

ii) Dacă P este o $\ll_{L,\varphi}$ - proiecţie pe E şi Q este o proiecţie φ-contractivă pe E încît $\operatorname{Ker} P = \operatorname{Ker} Q$ atunci $P = Q$.

Demonstraţie. i) Avem de arătat că $\operatorname{Ker} P = \operatorname{Ker} Q$.

Incluziunea $\subset$. Fie $x \in \operatorname{Ker} P$ şi să presupunem că $Qx \neq 0$. Avem $0 < \varphi(Qx) \leq \varphi(x)$ şi există un $\alpha > 1$ astfel încît

$$(\varphi(x) - \alpha\varphi(Qx))^{-} > 0 \quad \text{şi} \quad \pi(\varphi(Qx)) > 0$$

unde $\pi : E \longrightarrow E/[(\varphi(x)-\alpha\varphi(Qx))^{-}]^{\perp}$ desemnează proiecţia canonică.
Să alegem $z' \in (E/[(\varphi(x)-\alpha\varphi(Qx))^{-}]^{\perp})'$, $z' > 0$ astfel că $z'(\pi(\varphi(Qx))) > 0$.
Atunci $x' = z' \circ \pi$ verifică următoarele două condiţii

$$x'(\varphi(Qx)) > 0$$

şi

$$y'(\varphi(x) - \alpha\varphi(Qx)) \leq 0 \text{ pentru orice } 0 \leq y' \leq x'.$$

Deoarece

$$x'(\varphi(x+\alpha Qx)) = x'[\varphi(x) \vee \alpha\varphi(Qx)] =$$
$$= \sup_{0 \leq y' \leq x'} [y'(\varphi(x)) + \alpha(x'-y')(\varphi(Qx))]$$

pentru orice $\varepsilon > 0$ există un $y'_{\varepsilon} \in [0, x']$ astfel încît

$$x'(\varphi(x+\alpha Qx)) < y'_{\varepsilon}(\varphi(x)) + \alpha \cdot (x'-y'_{\varepsilon})(\varphi(Qx)) + \varepsilon \leq$$
$$\leq y'_{\varepsilon}(\varphi(x) - \alpha\varphi(Qx)) + \alpha \cdot x'(\varphi(Qx)) + \varepsilon \leq$$
$$\leq \alpha \cdot x'(\varphi(Qx)) + \varepsilon .$$

Deoarece Q este φ - contractivă,

$$x'(\varphi(x+\alpha Qx)) \geq x'(\varphi(Qx+\alpha Qx)) = (1+\alpha)x'(\varphi(Qx))$$

ceea ce conduce la o contradicţie pentru $\varepsilon > 0$ suficient de mic.

Incluziunea $\supset$. Fie $x \in \operatorname{Ker} Q$. Atunci $y = x - Px \in \operatorname{Ker} P \subset \operatorname{Ker} Q$ şi deci

$$0 = Qy = Qx - QPx = -QPx = -Px$$

adică $x \in \operatorname{Ker} P$.

ii) rezultă prin dualitate din i) utilizînd lema 3.2. ■

3.4 COROLAR. Dacă un $\ll_{M,\varphi}$ - ideal J al lui E este imaginea unei proiecţii φ -contractive P, atunci J este un $\ll_{M,\varphi}$ -sumand.

Demonstraţie. Conform ipotezei, P' este o proiecţie φ' -contractivă şi $\mathrm{Ker}P' = J^{o}$. Deoarece J^{o} este un $\ll_{L,\varphi'}$ -sumand, din Lema 3.3 ii) deducem că P' este $\ll_{L,\varphi'}$ -proiecţia corespunzătoare. Rămîne să aplicăm Lema 3.2. ■

3.5 PROPOZIŢIE. Fie E un spaţiu Banach şi J un $\ll_{M,\varphi}$ -ideal al lui E. Dacă K este un $\ll_{M,\varphi}$ -sumand al lui E, atunci $K \cap J$ este de asemenea un $\ll_{M,\varphi}$ - sumand al cărui ortogonal este $K^{\perp} \cap J$, $K^{\perp}$ reprezentînd ortogonalul lui K.

Demonstraţie. Fie P $\ll_{M,\varphi}$ - proiecţia lui E pe K. Vom arăta că $PJ \subset J$ i.e., $P'J^{o} \subset J^{o}$. Într-adevăr, P' este o $\ll_{L,\varphi'}$ -proiecţie şi J^{o} este un $\ll_{L,\varphi'}$ - sumand. Fie Q $\ll_{L,\varphi'}$ - proiecţia pe J^{o}. Comutativitatea proiecţiilor Cunningham implică

$$P'J^{o} = P'Q(E') = QP'(E) \subset Q(E') = J^{o} . ■$$

3.6 COROLAR. Să presupunem că E este un $\ll_{M,\varphi''}$ -ideal în E'' şi J un $\ll_{M,\varphi}$ - ideal în E. Atunci J este un $\ll_{M,\varphi}$ - sumand în E.

Demonstraţie. Conform ipotezei, J^{oo} este un $\ll_{M,\varphi''}$ -sumand în E''. Or, $J = J^{oo} \cap E$ şi se aplică Propoziţia 3.5. ■

Semnificaţia Corolarului 3.6 în contextul laticilor Banach este că orice ideal în sensul ordinei, normic închis, al unei latici Banach cu normă (o)-continuă este de fapt o bandă (deci imaginea unei proiecţii pozitive). Ca să ne convingem de acest fapt avem nevoie de rezultatul următor care ne arată că $\ll_{\sigma}$ -idealele coincid cu idealele în sensul ordinei.

3.7 PROPOZITIE. Fie E o latice Banach şi $\mathcal{I}$ un subspaţiu închis. Sînt echivalente următoarele afirmaţii :

i) $\mathcal{I}$ este un ideal în sensul ordinei adică

$$|y| \leq |x| \text{ şi } x \in \mathcal{I} \text{ implică } y \in \mathcal{I}.$$

ii) $\mathcal{I}$ verifică următoarele două proprietăţi :

PI)(proprietatea de interpolare) Dacă $j,k \in \mathcal{I}$, $v \in E$ şi $j,k \leq v$ atunci există $h \in \mathcal{I}$ astfel încît $j,k \leq h \leq v$;

PD)(proprietatea de descompunere) Dacă $h \leq u+v$ cu $h \in \mathcal{I}$ şi $u,v \geq 0$ atunci $h = j+k$ cu $j,k \in \mathcal{I}$ şi $j \leq u$, $k \leq v$.

iii) $\mathcal{I}^o$ este o bandă.

Demonstraţie. i) $\Rightarrow$ ii). PI) are loc pentru $h = j \vee k \in \mathcal{I}$. PD) se obţine din proprietatea lui Riesz de descompunere aplicată pentru $h^+ \leq u + v$. Avem

$$h^+ = \bar{j} + \bar{k} \quad \text{pentru anume } \bar{j},\bar{k} \in \mathcal{I},\ 0 \leq \bar{j} \leq u,\ 0 \leq \bar{k} \leq v$$

şi alegem $j = \bar{j} - h^-$, $k = \bar{k}$.

ii) $\Rightarrow$ i). Dacă $x \in \mathcal{I}$ atunci $0,x \leq x^+$ şi conform PI) rezultă că există $h \in \mathcal{I}$ încît $0,x \leq h \leq x^+$. Deci $x^+ = h \in \mathcal{I}$.

Fie $0 \leq y \leq x$ şi $x \in \mathcal{I}$. Atunci $x \leq y + (x-y)$ şi conform PD),

$$x = j + k \quad \text{cu} \quad j,k \in \mathcal{I},\ j \leq y,\ k \leq x-y.$$

Inegalităţile nu pot fi stricte căci prin adunare obţinem în membrul stîng x. Deci $y = j \in \mathcal{I}$.

i) $\Rightarrow$ iii). Fie $\varphi \in \mathcal{I}^o$. Întrucît

$$\varphi^+(x) = \sup_{0 \leq y \leq x} \varphi(y) \quad \text{pentru } x \geq 0$$

rezultă că $\varphi^+(x^{\pm}) = 0$ pentru orice $x \in \mathcal{I}$, deci $\varphi^+ \in \mathcal{I}^o$. Prin urmare $\mathcal{I}^o$ este un ideal.

Fie $(\varphi_\alpha)_\alpha$ o familie dirijată crescător de elemente ale lui $\mathcal{I}^o$ pentru care există $\varphi = \sup_\alpha \varphi_\alpha$. Deoarece în aceste condiţii $\varphi_\alpha(x) \to \varphi(x)$ pentru orice $x \geq 0$, rezultă că

$\varphi \in \mathcal{J}^{\circ}$.

iii) $\Longrightarrow$ i) . Avem $\mathcal{J} = \mathcal{J}^{\circ\circ} \cap E$. ∎

Cînd un spaţiu Banach este un $\ll_{M,\varphi''}$-ideal în bidualul său? În context de latici Banach (înzestrate cu $\ll_{\sigma}$)aceasta înseamnă că norma este (o)-continuă.Vezi [N2] .În cazul general are loc următoarea :

3.8 PROPOZIŢIE.Să presupunem că proiecţia naturală π a lui E''' pe E' definită prin

$$\pi(e''') = e'''|E$$

este φ''' - contractivă.Atunci următoarele afirmaţii sînt echivalente:

i) E este un $\ll_{M,\varphi''}$-ideal în E'' ;

ii) π este o $\ll_{L,\varphi'''}$- proiecţie.

Demonstraţie.i) $\Longrightarrow$ ii). $\ll_{L,\varphi'''}$ - proiecţia P pe $\ll_{L,\varphi'''}$ - sumandul ortogonal lui $i_E(E)^{0}$ are nucleul $i_E(E)^{0}$; $i_E : E \longrightarrow E''$ reprezintă incluziunea canonică.Întrucît aceasta este de asemenea nucleul lui π ,Lema 3.3 ne arată că $P = \pi$.

ii) $\Longrightarrow$ i) este evident. ∎

În cazul cînd $\varphi = \|\ \|$, condiţia de contractibilitate din Propoziţia 3.8 este automat îndeplinită.

c_0 şi $K(H)$ (compacţii pe un spaţiu Hilbert H) sînt M-ideale în bidualele lor : ℓ^{∞} şi respectiv $L(H,H)$.Din Propoziţia 3.8 rezultă că proiecţia naturală $\pi : E''' \longrightarrow E'$ verifică în acest caz relaţia

$$\|e'''\| = \|e'''|E\| + \|e''' - e'''|E\| .$$

Bibliografie

[AE] E.Alfsen & E.Effros; Structure in real Banach spaces, Ann.of Math.96(1972),98-173.

[Bh] E.Behrends: M-structure and the Banach -Stone Theorem, Lecture Notes in Math.736(1979), Springer-Verlag.

[CER] F.Cunningham, E.Effros & N.M.Roy: M-structure in dual Banach spaces, Israel J.Math. 14(1973), 304-308

[E] G.A.Elliott: An abstract Dauns-Hofmann-Kaplansky multiplier theorem, Canad.J.Math. XXVII(1975), 827-836.

[EO] G.A.Elliott & D.Olesen: A simple proof of the Dauns-Hofmann theorem, Math.Scand.34(1974), 231-234.

[HL] P.Harmand & A.Lima: Banach spaces which are M-ideals in their biduals, Trans.A.M.S. 283(1984), 253-264.

[L1] A.Lima: Intersections properties of balls and subspaces in Banach spaces, Trans.A.M.S. 227(1977), 1-62.

[L2] A.Lima: On M-ideals and best approximation, IndianaUnivUniv.Math.J. 31(1982), 27-36.

[N1] C.Niculescu: Structuri de ordine pe spaţii de operatori, în vol. Spaţii liniare ordonate topologice n°4(1983), Reprografia Univ.Bucureşti.

[N2] C.Niculescu: Probleme de slab compactitate în latici Banach, în vol.Structuri de ordine în analiza funcţională, vol.I, pp.97-158, Ed.Acad.R.S.R., Bucureşti, 1986.

[N3] C.Niculescu: Introducere în convexitatea comutativă, în vol. Structuri de ordine în analiza funcţională, vol.II, pp.83-115, Ed.Acad.R.S.R., Bucureşti, 1989.

[NV] C.Niculescu & D.T.Vuza: Alfsen-Effros type order relations defined by vector norms, Revue Roum.Math.Pures et Appl.33(1988), 751-766.

IDEALE DE INTERPOLARE IN RAPORT CU UN SUBSPATIU AL UNEI LATICI SAU AL UNEI C^* - ALGEBRE

de

Gavriil Păltineanu şi Dan Tudor Vuza

Introducere. In §1 sînt prezentate principalele noţiuni şi rezultate cunoscute privind mulţimile de interpolare strictă în raport cu un subspaţiu de funcţii continue pe un compact.

In §2 se introduc noţiunile de ideal de interpolare $\mathcal{V}_e$-strictă şi ideal $\mathcal{V}_o$ - distins în raport cu un subspaţiu E al unei latici (sau C^* - algebre)X.

Teorema 2.1 generalizează Teorema 12 din [4] . In §3 se introduce noţiunea de ideal frontalier în raport cu E. Teoremele 3.1, 3.2 şi 3.3 generalizează Teoremele 3,6 şi 8 din [1] . In §4 se introduce noţiunea de ideal real anticentral în raport cu E, care generalizează noţiunea de mulţime antisimetrică din [2] . Teoremele 4.2 şi 4.3 generalizează Lema de Branges, iar Teorema 4.4 generalizează Teorema lui Bishop [2] .

§1. Mulţimi de interpolare

In această secţiune prezentăm o sinteză a principalelor noţiuni şi rezultate privind mulţimile de interpolare. Pentru detalii recomandăm [1] , [4] .

Fie X un spaţiu Hausdorff compact, $E \subset C(X)$ un subspaţiu liniar, $K \subset X$ o submulţime compactă şi $E_o(K) = \{f \in E ; f|K = 0\}$

Aplicaţia $\rho : E/E_o(K) \to E|K$, definită prin $\rho(f) = f|K$, unde $f \in \hat{f}$, este bine definită, liniară, continuă şi bijectivă, dar nu este în general izomorfism (topologic).

Definiţia 1.1 K se numeşte mulţime de interpolare mărginită (de interpolare strictă) în raport cu E dacă ρ este izomorfism (izomorfism izometric).

In ipoteza suplimentară că E este închis, din teorema de izomorfism a lui Banach rezultă : K este de interpolare mărginită dacă şi numai dacă $E|K$ este închisă în $C(K)$.

Teorema 1.1 Dacă $E/E_o(K)$ este complet şi $1_K\mu \in E^o$ pentru orice $\mu \in E^o$, atunci K este de interpolare strictă în raport cu E.

Definiţia 1.2 K se numeşte distins în raport cu E dacă există o aplicaţie liniară şi continuă

$N : M(X) \longrightarrow M(X)$, $M(X)$ - spaţiul măsurilor Radon pe X,

cu proprietăţile :

1) $\| N \| \leq 1$

2) Dacă $\mu \in E^o$ atunci $N(\mu) \in E^o$ şi $\operatorname{supp} N(\mu) \subset K$

3) Dacă $\mu \in M(X)$ şi $\operatorname{supp}\mu \subset K$, atunci $N(\mu) = \mu$

Teorema 1.2 Dacă $E/E_o(K)$ este complet şi K este distins în raport cu E, atunci K este de interpolare strictă în raport cu E.

O clasă specială de mulţimi de interpolare strictă o constituie clasa mulţimilor frontaliere.

Definiţia 1.3 K se numeşte frontalieră în raport cu E dacă $\forall f \in E$, $\forall$ V vecinătate a lui K, $\forall \varepsilon > 0$ şi $\forall \eta > 0$, există $\bar{f} \in E$ astfel încît :

1) $\bar{f}|K = f|K$

2) $\|\bar{f}\|_X \leq \|f\|_K + \eta$

3) $\|\bar{f}\|_{X \setminus V} \leq \varepsilon$

Noţiunea de mulţime frontalieră a fost introdusă în [1] şi generalizează, pentru subspaţii, noţiunea de mulţime peak de la algebre de funcţii.

Teorema 1.3 Dacă $E/E_e(K)$ este complet, atunci K este frontalieră în raport cu E dacă şi numai dacă $1_K\mu \in E^{\circ}$ pentru orice $\mu \in E^{\circ}$.

Familia mulţimilor frontaliere este închisă la intersecţii oarecare şi la reuniuni finite şi determină o topologie (în general neseparată) pe X, numită topologia frontalieră.

Definiţia 1.4 O submulţime $Y \subset X$ se numeşte slab antialgebrică în raport cu E, dacă $\forall f \in C(X)$ cu proprietăţile : $f(Y) \subset \mathbb{R}$ şi $fg|Y \in E|Y$, $\forall g \in E$ este constantă pe Y.

Noţiunea de mulţime slab antialgebrică a fost introdusă în [6] ca o generalizare, pentru subspaţii, a noţiunii de mulţime antisimetrică de la algebre de funcţii.

Se observă imediat că familia mulţimilor slab antialgebrice este închisă la reuniuni oarecare şi orice mulţime slab antialgebrică este conţinută într-o mulţime slab antialgebrică maximală. Există o partiţie a spaţiului X formată din mulţimi slab antialgebrice maximale pe care o notăm $(S_i)_{i \in I}$

Teorema 1.4 Fie $E \subset C(X)$ subspaţiu închis şi $f \in C(X)$

Atunci : 1) S_i frontalieră în raport cu E, $\forall i \in I$

2) $f \in E$ dacă şi numai dacă $f|S_i \in E|S_i$, $\forall i \in I$

Se ştie că dacă $I \subset C(X)$ este un ideal în ordine închis, atunci există $K \subset X$ închisă astfel încît :

$$I = \{ f \in C(X) \ ; \ f|K = 0 \}$$

Intre familia idealelor închise şi familia mulţimilor anulatoare, este o corespondenţă bijectivă. Prin această bijecţie, avem următoarele corespondenţe :

$$\bigcap K_\alpha \longleftrightarrow \overline{\sum I_\alpha} \quad \text{şi} \quad \bigcup_{i=1}^{n} K_i \longleftrightarrow \bigcap_{i=1}^{n} I_i$$

Această legătură între ideale şi mulţimi sugerează posibilitatea generalizării noţiunilor şi rezultatelor de la mulţimile de interpolare la ideale într-o latice sau într-o C^* - algebră.

In cele ce urmează vom considera următoarele două situaţii :

A) X este o latice local convexă, local solidă, metrizabilă reală sau complexă. In cazul complex vom presupune X relativ uniform completă. X' este dualul lui X, iar $I \subset X$ este un ideal (în ordine) închis. $\mathcal{V}_o$ este un sistem fundamental de vecinătăţi convexe solide şi deschise ale originii.

B) X este o C^* - algebră cu unitate , X' dualul său, iar $I \subset X$ este un ideal bilateral închis autoadjunct ($I^* = I$). Cu B notăm bila unitate şi cu $\mathcal{V}_o = \{\lambda B \, ; \, \lambda > 0\}$.

Definiţiile şi rezultatele de mai jos sînt valabile pentru ambele cazuri.

§2. Ideale de interpolare $\mathcal{V}_o$ - strictă.

Fie $E \subset X$ un subspaţiu liniar, $I \subset X$ un ideal închis şi $\pi_I : X \longrightarrow X/I$ aplicaţia canonică. Pe spaţiul $\pi_I(X)$ se introduce unica structură de latice (C^* - algebră) pentru care π_I este morfism laticial (de C^* - algebră).

Definiţia 2.1 Idealul I se numeşte de interpolare $\mathcal{V}_o$- strictă în raport cu E dacă

$$\pi_I(V \cap E) = \pi_I(V) \cap \pi_I(E) \ , \quad \forall \ V \in \mathcal{V}_o$$

Din Definiţia 2.1 rezultă că dacă I este ideal de interpolare $\mathcal{V}_o$ - strictă, atunci aplicaţia $E \xrightarrow{\overline{\pi}_I} \pi_I(E)$ este deschisă, unde $\overline{\pi}_I$ este restricţia lui π_I la E, iar din diagrama

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[rr, "\overline{\pi}_I"] \arrow[dr, "\pi_{I\cap E}"'] & & \pi_I(E) \\
 & E/_{E\cap I} \arrow[ur, "\rho_I"'] &
\end{tikzcd}$$

rezultă că dacă I este de interpolare $\mathcal{V}_0$-strictă, atunci aplicaţia $\rho_I : E/_{E\cap I} \longrightarrow \pi_I(E)$ este izomorfism (topologic).

In cazul particular cînd $E/_{E\cap I}$ este complet, rezultă $\pi_I(E)$ este închisă în X/I.

Propoziţia 2.1 Dacă $E/E\cap I$ este complet, atunci I este de interpolare $\mathcal{V}_0$- strictă dacă şi numai dacă $\pi_I(V\cap E)$ este densă în $\pi_I(E)\cap \pi_I(V)$, $\forall V\in \mathcal{V}_0$

Definiţia 2.2 I se numeşte ideal $\mathcal{V}_0$- distins în raport cu E dacă există o aplicaţie liniară

$N : X' \longrightarrow X'$ cu proprietăţile :

i) $N(V^0)\subset V^0$, $\forall V\in \mathcal{V}_0$

iii) $N(E^0)\subset E^0\cap I^0$

iii) Dacă $f\in I^0$ atunci $Nf = f$

Teorema 2.1 Orice ideal $\mathcal{V}_0$- distins este ideal de interpolare $\mathcal{V}_0$- strictă

3. Ideale frontaliere

In cazul A), I^0 este o bandă în X' şi $P_I : X' \longrightarrow X'$ este proiecţia asociată acestei benzi. In cazul B), definirea aplicaţiei P_I este mai complicată şi necesită o anumită pregătire. Dacă X este o C^* - algebră cu unitate, se notează cu $X_h = \{x\in X ; x = x^*\}$ şi cu

$$X_+ = \{x\in X ;\ \exists\, y\in X \quad \text{astfel încît } x = y^*y\}$$

Elementele din X_h se numesc hermitice, iar elementele din X_+ se numesc pozitive. Are loc incluziunea $X_+\subset X_h$.

Pe X_h se introduce următoarea relaţie de ordine : $x\leq y$ dacă şi numai dacă $y - x\in X_+$

O funcţională $f\in X'$ se numeşte hermitică (pozitivă) dacă $f(x^*) = \overline{f(x)}$, $\forall x\in X$ (respectiv dacă $f(x)\geqslant 0$, $\forall x\in X_+$). Dacă notăm cu X'_h mulţimea funcţionalelor hermitice şi cu X'_+ mulţimea funcţionalelor pozitive, atunci $X_h = X'_+ - X'_+$.

Observăm de asemenea că $X' = X'_h + i\, X'_h$. Intr-adevăr, pentru orice $f \in X'$ notăm :

$$\mathrm{Ref}(X) = \frac{1}{2}\left[\, f(x) + \overline{f(x^*)}\,\right] \quad \text{şi}$$

$$\mathrm{Imf}(X) = \frac{1}{2i}\left[\, f(x) - \overline{f(x^*)}\,\right] \quad , \quad \forall\, x \in X.$$

Se constată imediat că Ref, Imf $\in X'_h$ şi $f = \mathrm{Ref} + i\,\mathrm{Imf}$.

Fie $I \subset X$ un ideal bilateral autoadjunct închis. Definirea aplicaţie P_I se face în următoarele etape :

Dacă $f \in X'_+$, atunci :

$$(1 - P_I)(f)(x) = \sup_{\substack{y \leq x \\ y \in I}} f(y) \quad , \forall\, x \in X_+$$

In continuare P_I se extinde la X'_h deoarece $X'_h = X'_+ - X'_+$

In sfrîşit, P_I se extinde la X' prin $P_I(f) = P_I(\mathrm{Ref}) + i\, P_I(\mathrm{Imf})$

Aplicaţia $P_I : X' \to X'$ a fost introdusă de Combes şi Perdrizet în [3] şi are următoarele proprietăţi :

1. $P_I(X'_h) = I^\circ \cap X'_h$

2. $0 \leq P_I(f) \leq f, \ \forall\, f \in X'_+$

Cu aceste precizări, putem spune că oricărui ideal bilateral autoadjunct închis dintr-o C^* - algebră i se poate asocia o proiecţie continuă.

In continuare, introducem relaţia de dominare între un element $x \in X$ şi un element $y \in X_+$ astfel :

In cazul A)

$x \prec y$ dacă şi numai dacă $|x| \leq y$

In cazul B)

$x \prec y$ dacă şi numai dacă $\forall \varepsilon > 0$ avem

$\|(y + \varepsilon e)^{-1/2} x (y + \varepsilon e)^{-1/2}\| \leq 1$, unde

cu e s-a notat elementul unitate al C^* - algebrei X.

<u>Definiţia 3.1</u> Un ideal închis I se numeşte frontalier în raport cu subspaţiul $E \subset X$ dacă $\forall V \in \mathcal{V}_e$, $\forall x \in E$, $\forall y \in X$ cu proprietatea :

$\pi_I(x) \prec \pi_I(y)$, $\exists \bar{x} \in E$ şi $z \in V \cap X_+$ astfel

încît $\bar{x} - x \in I$ şi $\bar{x} \prec y + z$

<u>Teorema 3.1</u> Următoarele afirmaţii sînt echivalente :

1) I este ideal frontalier în raport cu E

2) $P_I(E^\circ) \subset E^\circ$

<u>Corolar</u> Orice ideal frontalier în raport cu E este ideal de interpolare $\mathcal{V}_e$- strictă în raport cu E.

Notăm cu $\mathcal{F}_E$ familia tuturor idealelor frontaliere în raport cu E.

<u>Teorema 3.2</u>

1) Dacă $(I_\alpha)_\alpha \subset \mathcal{F}_E$ atunci $\overline{\sum_\alpha I_\alpha} \in \mathcal{F}_E$

2) Dacă $I_1, I_2 \in \mathcal{F}_E$ atunci $I_1 \cap I_2 \in \mathcal{F}_E$

<u>Teorema 3.3</u> Fie I şi J ideale închise astfel încît $I \subset J$, $I \in \mathcal{F}_E$ şi $E/E \cap I$ este complet. Atunci $J \in \mathcal{F}_E$ dacă şi numai dacă J/I este frontalier în raport cu $\pi_I(E)$.

4. Idealele real - anticentrale.

Reamintim că centrul unei latici arhimediene X este mulţimea Z(X) a acelor operatori liniari : U : X ⟶ X pentru care există $a \in \mathbb{R}_+$ (depinzînd de U) astfel încît $|U(x)| \leq a|x|$, $\forall x \in X$.

Se notează cu $Z_h = Z(X)_+ - Z(X)_+$

In cazul unei C^* - algebre cu unitate, centrul se defineşte astfel :

$$Z(X) = \{x \in X \; ; \; xy = yx \; , \forall y \in X\}$$

Mulţimea elementelor hermitice din centru se notează cu Z_h.

In cazul A) o submulţime $Y \subset X$ se numeşte real - anticentrală dacă $\forall U \in Z_h$ cu proprietatea $U(Y) \subset Y$ există $c \in \mathbb{R}$ astfel încît $U = c\, 1_Y$.

In cazul B) o submulţime $Y \subset X$ se numeşte real - anticentrală dacă $\forall u \in Z_h$ cu proprietatea $uy \in Y$ pentru $\forall y \in Y$, există $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ astfel încît $u = a\, e$.

Pentru ambele cazuri introducem următoarea definiţie :

Definiţia 4.2 Un ideal închis $I \subset X$ se numeşte ideal real anticentral în raport cu subspaţiul $E \subset X$ dacă $\pi_I(E)$ este real anticentral în X/I. Notăm cu $\mathcal{A}_E$ familia tuturor idealelor real-anticentrale în raport cu E.

Principalele proprietăţi ale familiei $\mathcal{A}_E$ sînt concentrate în următoarea teoremă :

Teorema 4.1

1) Dacă $(I_\alpha)_\alpha \subset \mathcal{A}_E$ şi $\sum_\alpha I_\alpha \neq X$ atunci $\bigcap_\alpha I_\alpha \in \mathcal{A}_E$

2) Pentru orice $I \in \mathcal{A}_E$ există un unic ideal real-anticentral minimal $J \subset X$.

3) Dacă E este complet, orice ideal real-anticentral minimal

este ideal frontalier.

Notăm cu $\bar{\mathcal{A}}_E$ familia idealelor real-anticentrale minimale.
In cazul A) are loc următorul rezultat :

Teorema 4.2 Fie V o vecinătate a originii, local convexă, local solidă care este sublatice, f un element extremal al mulţimii $E^o \cap V^o$ şi

$$I = \{ x \in X ; |f|(|x|) = 0 \}$$

Atunci $I \in \mathcal{A}_E$

Fie X o C^* - algebră cu unitate şi $B = \{ x \in X ; \| x \| \leq 1 \}$
Se poate arăta că pentru orice element extremal f al mulţimii $B^o \cap E^o$ există $g \in X'$ astfel încît

$$|f(x)| \leq g(x) \ , \ \forall x \in X_+ \quad \text{şi} \quad \|g\| = 1$$

Cu aceste precizări, în cazul B) are loc următorul rezultat :

Teorema 4.3 Fie f un element extremal al mulţimii $B^o \cap E^o$ şi $I = \{ x \in X \ ; \ g(y^* x^* xy) = 0, \ \forall \ y \in X \}$

Atunci $I \in \mathcal{A}_E$

Teorema 4.4 Fie X un (AM) - spaţiu în cazul A) respectiv o C^* - algebră cu unitate în cazul B). Fie $E \subset X$ un subspaţiu liniar şi $x \in X$. Atunci $x \in E$ dacă şi numai dacă $\pi_I(x) \in \pi_I(E)$, $\forall \ I \in \bar{\mathcal{A}}_E$.

Teorema 4.4 generalizează Teorema 1 din [6] care la rîndul său este o generalizare a Teoremei Bishop de la algebre de funcţii (vezi [2]).

Bibliografie

[1] A.Bernard : Caractérisations de certaines parties d'un espace compact muni d'un espace vectorial ou d'une algèbre de fonctions continues, Ann.Inst.Fourier, Grenoble 17, 2(1967), p.359-382.

[2] E.Bishop : A generalization of the Stone-Weierstrass theorem, Pacific J.Math. 11(1961), p.777-783.

[3] F.Combes et F.Perdrizet : Certains idéaux dans les espaces vectoriels ordonnés, J.Math.Pures et Appl. 49(1970) p.29-59.

[4] D.Feyel et A.de la Pradelle : Sur certains extensions du theoreme d'approximation de Bernstein, Pacific J.Math., Vol.115, No.1, 1984.

[5] I.Glicksberg : Measures orthogonal to algebras and sets of antisymmetric, Trans.Amer.Math.Soc., 105 (1962), p.415-435.

[6] G.Păltineanu : A generalization of the Stone-Weierstrass theorem for weighted spaces, Rev.Roumaine Math.Pures Appl, 7(1978).

SISTEMUL HAAR DISCRET SI PROIECTII CONTINUE IN SPATII HARDY DIADICE DE SIRURI

NICOLAE POPA

In această lucrare vom introduce un sistem ortogonal de şiruri, care, datorită analogiei cu sistemul Haar, va fi numit sistem Haar discret. Cu ajutorul lui se va defini spaţiul Hardy diadic de şiruri $h_X(d)$, X fiind un spaţiu de şiruri invariant la rearanjări. Vom da o reprezentare a dualului acestui spaţiu şi, în cazul $X=\ell_1$, vom caracteriza subspaţiile în $h_1(d)$ generate de subşiruri ale bazei Haar discrete. De asemenea vom da unele rezultate privind spaţiile complementate generate de şiruri bazice ale sistemului Haar discret, de data aceasta în cazul $X=\ell_p$, $0<p\leq 1$. Aceste din urmă rezultate sînt motivate de lucrările [5] şi [3] .

1 - Spaţiul $h_X(d)$

Fie X un spaţiu cu bază simetrică astfel că $\ell_1 \subset X \subset \ell_2$, injecţiile canonice $i: \ell_1 \longrightarrow X$ şi $j: X \longrightarrow \ell_2$ avînd normele mai mici decît 1. In plus presupunem că X este un ideal în sensul ordinii în ℓ_2, ℓ_1 fiind la rîndul său, ideal în sensul ordinii în X. Reamintim că $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ este o bază simetrică în X dacă există o constantă $M>0$ astfel încît $\|\sum_i a_i x_{\pi(i)}\| \leq M\|\sum_i a_i x_i\|$ oricare ar fi permutarea $\pi: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$.

Vom considera <u>sistemul Haar discret ℓ_∞-normalizat</u> $(c_i)_{i=1}^{\infty}$ definit precum urmează:

$$c_{2^i} = c_{i,0}\ ;\ c_{2^0+2^i} = c_{i-1;2^0}\ ; \ldots\ c_{\sum\limits_{j=0}^{k-1} \varepsilon_j 2^j + 2^k + 2^i} =$$

$$= c_{i-k-1,\ \sum\limits_{j=0}^{k-1} \varepsilon_j 2^j + 2^k} \quad \text{unde} \quad \varepsilon_j = 0,1\ ;\ 1 \leq k < i \text{ și } i = 0,1,\ldots$$

Considerăm acum funcția pătratică $S_n(x) = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i^2(x) c_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$ pentru șirul de scalari reali $x = (x(k))_{k=0}^{\infty}$, unde $\alpha_i(x) = \langle x, c_i\rangle_{\ell_2} \cdot |I_i|^{-1} = \left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} x(k) c_i(k)\right) |I_i|^{-1}$, $i \in \mathbb{N}$; I_i fiind suportul lui c_i, iar $|I_i|$ cardinalul lui I_i. Prin urmare $S_n(x) = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \langle x, f_i\rangle^2 f_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$, unde $f_i = c_i \cdot \|c_i\|_{\ell_2}^{-1}$ este un sistem ortonormal în ℓ_2, iar $\langle x, f_i\rangle$ este produsul scalar în ℓ_2. Cu $S(x)$ vom nota $\sup\limits_n S_n(x)$, iar S se numește <u>funcția pătratică a lui x față de sistemul</u> $(c_i)_{i=1}^{\infty}$.

Notăm cu $h_X(d)$, sau, prescurtat, cu h_X, spațiul $\{x = (x_n)_{n=0}^{\infty}$ cu $S(x) \in X\}$, dotat cu norma $\|x\|_{h_X} \stackrel{\text{def}}{=} \|S(x)\|_X$.

<u>Lema 1.1</u> <u>h_X este un spațiu Banach de șiruri.</u>

<u>Demonstrație</u> Fie $x^i \in h_X$, $i = 1,2,\ldots$ astfel că $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \|x^i\| = M < \infty$

Trebuie să arătăm că $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x^i$ converge la $x \in h_X$. Dar $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \|x^i\| =$

$=\sum_{i=1}^{\infty}\|S(x^i)\|_X<\infty$ şi, cum X este un spaţiu Banach, de aici rezultă că seria $\sum_{i=1}^{\infty} S(x^i)$ converge la y în X. Pe de altă parte, deoarece $\|x\|_{\ell_2}\leq\|x\|_X$, rezultă că $\sum_{i=1}^{\infty}\|x^i\|_2=\sum_{i=1}^{\infty}\|S(x^i)\|_{\ell_2}<\infty$. Deci $\sum_{i=1}^{\infty} x^i$ converge la x în ℓ_2. Dar $\langle x,f_i\rangle=\sum_{j=1}^{\infty}\langle x^j,f_i\rangle$, $i=1,2,\ldots$ şi

$$s_n(x)=\Big(\sum_{i=1}^{n}\Big[\sum_{j=1}^{\infty}\langle x^j,f_i\rangle\Big]^2 f_i^{\,2}\Big)^{\frac{1}{2}}\leq\sum_{j=1}^{\infty}\Big(\sum_{i=1}^{n}\langle x^j,f_i\rangle^2 f_i^{\,2}\Big)^{\frac{1}{2}}=\sum_{j=1}^{\infty} S(x^j)\leq$$

$\leq y\in X$. Prin urmare $0\leq S(x)=\sup_n S_n(x)\leq y$, de unde rezultă că $S(x)\in X$, adică elementul x aparţine lui h_X. In plus, deoarece seria $\sum_{i=1}^{\infty} S(x^i)$ converge în X, pentru $\varepsilon>0$ există $n\in\mathbb{N}$ cu $\|\sum_{i=n}^{\infty} S(x^i)\|_X<\varepsilon$. Dar $S(\sum_{i=n}^{\infty} x^i)\leq\sum_{i=n}^{\infty} S(x^i)$, de unde $\|S(\sum_{i=n}^{\infty} x^i)\|_X<\varepsilon$, adică $\sum_{i=1}^{n} x^i$ converge la x în h_X. ■

2. Dualul lui h_X

Fie $k\in\mathbb{N}$ fixat şi $\Omega_k=\{0,1,\ldots,2^k-1\}$. Notăm cu $\mathcal{F}_i^k$, $i=0,1,\ldots,2^k-1$, algebrele de mulţimi generate de intervalele de constanţă ale şirurilor $(c_j^k)_{j=0}^{2^k-1}$, unde

$c_0^k=e_0+e_1+\ldots+e_{2^k-1}$

$c_1^k=e_0+e_1+\ldots+e_{2^{k-1}-1}-e_{2^{k-1}}-\ldots-e_{2^k-1}$

$c_2^k=2^{\frac{1}{2}}(e_0+\ldots+e_{2^{k-2}-1}-e_{2^{k-2}}-\ldots-e_{2^{k-1}-1})$

$c_3^k=2^{\frac{1}{2}}(e_{2^{k-1}}+\ldots+e_{2^{k-1}+2^{k-2}-1}-e_{2^{k-1}+2^{k-2}}-\ldots-e_{2^k-1})$

$\vdots$

$c_{2^k-1}^k=2^{(k-1)/2}(e_{2^k-2}-e_{2^k-1})$.

Deci $(c_i^k)_{i=1}^{2^k-1}$ sînt abstracţie făcînd de o permutare elementele

$(2^{k/2} f_i)_{i=1}^{2^k-1}$.

Pe Ω_k definim măsura μ_k dată de $\mu_k(A)=2^{-k}|A|$, pentru $A\subset\Omega_k$. Evident $(\Omega_k, \mathcal{F}^k_{2^k-1}, \mu_k)$ este un spațiu probabilist. Atunci $\|e_i^k\|_{L_2(\mu_k)}=1$ pentru $0\le i\le 2^k-1$ și $(e_i^k)_{i=0}^{2^k-1}$ este o bază ortonormală a lui $L_2(\mu_k)$. Se observă că așteptarea condiționată $E(u|\mathcal{F}^k_n)$ a unui $u\in L_1(\Omega_k, \mathcal{F}^k_{2^k-1}, \mu_k)$ este dată de $E(u|\mathcal{F}^k_n)= =\sum_{i=0}^{n} \langle u, e_i^k\rangle_{L_2(\mu_k)} e_i^k$, unde $\langle\cdot,\cdot\rangle_{L_2(\mu_k)}$ este produsul scalar în $L_2(\mu_k)$. Dacă notăm cu $S^k(u)=(\sum_{i=0}^{2^k-1}\langle u,e_i^k\rangle^2_{L_2(\mu_k)}(e_i^k)^2)^{\frac{1}{2}}$, atunci punem $h_X^{(k)}(d) \overset{def}{=} \{u\in L_1(\Omega_k, \mathcal{F}^k_{2^k-1}, \mu_k)$ cu $\int_{\Omega_k} u d\mu_k=0$ și cu $\|u\|_{h_X^{(k)}(d)}=\|S^k(u)\|_{X_k}\}$, unde $X_k=\{x=(x_i)_{i=0}^{2^k-1}\ ;\ \|x\|_{X_k}=2^{-k}\|x\|_X\}$.

Să mai observăm că $S^k(u)=S_{2^k-1}(u)$, deci $\|u\|_{h_X^{(k)}(d)}=2^{-k}\|S_{2^k-1}(u)\|_X$ pentru orice u cu supp $u\subset\Omega_k$ pentru orice k. Dacă $u\in h_X(d)$, atunci notînd $u_k=\sum_{i=1}^{2^k-1}\langle u,f_i\rangle f_i$, avem că $u_k\in h_X^{(k)}(d)$ pentru orice $k\in\mathbb{N}$ și

$$\text{(2.1)}\quad \|u\|_{h_X}=\lim_{k\to\infty} 2^k\|u_k\|_{h_X^{(k)}(d)}=\sup_k 2^k\|u_k\|_{h_X^{(k)}(d)}.$$

Să presupunem în continuare că X este o latice Banach q-concavă pentru un anume $1\le q<2$, adică să presupunem că există $M>0$ astfel că $(\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^q)^{1/q}\le M\|(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^q)^{1/q}\|_X$ pentru orice $x_1,\dots,x_n\in X$, unde $(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^q)^{1/q}$ este șirul $((\sum_{i=1}^{n}|x_i(k)|^q)^{1/q})_{k=0}^{\infty}$ din X.

Atunci X_k este în mod evident o latice Banach finit dimensională verificînd inegalitatea de q-concavitate cu constanta M oricare ar fi $k\in\mathbb{N}$.

Pentru laticea Banach q-concavă X considerăm $X^{(p)}=\{x=(x_n)_n;$ $(|x_n|^p)_n\in X\}$, dotată cu norma $\|x\|_{X^{(p)}}=\|(|x_n|^p)_n\|^{1/p}$, pentru $1\leq p<\infty$. Atunci $X^{(p)}$ este latice Banach pq-concavă, numită <u>p-convexificarea lui X</u>. Dacă în inegalitatea de mai sus inversăm sensul, obținem definiția unei latici Banach q-convexe și notăm în acest caz prin $X_{(q)}$ spațiul $\{x=(x_n)_n;\ (|x_n|^{1/q})_n\in X\}$, unde $1\leq q<\infty$. Față de quasi-norma $\|x\|_{X_{(q)}}=\||x_n|^{1/q}\|^q$, $X_{(q)}$ devine o latice Banach, numită <u>q-concavificatul lui X</u>. Vom folosi acum următoarele notații din [6] pentru laticea X_k. Notăm cu $Y_k=[X_k^{(2/q)}]^*_{(2)}$. Y_k este o latice Banach finit-dimensională avînd sistemul $(e_i)_{i=0}^{2^k-1}$ drept bază simetrică de constantă de simetrie nedepinzînd de k. De asemenea punem $Z_k=$ $=[X_k^{(1/(2-q))}]^*$, care este spațiu Banach finit dimensional avînd baza simetrică $(e_i)_{i=1}^n$ a cărei constantă de simetrie nu depinde de k. Cu aceste notații definim

$$\mathrm{bmo}^{(k)}_{X^*}(d)\overset{\mathrm{def}}{=}\{g\in L_1(\Omega_k,\mathcal{F}^k_{2^k-1},\mu_k)\ \text{cu}\ \int g\,d\mu_k=0\},\ \text{dotat}$$

cu norma

$$\|g\|_{\mathrm{bmo}^{(k)}_{X^*}(d)}\overset{\mathrm{def}}{=}\sup_{\substack{\|r\|_{Y_k^*}\leq 1\\ r>0}}\ \|\sup_{1\leq j\leq 2^k-1}E([\sum_{i=j}^{2^k-1}\beta_i^2(e_i^k)^2]r|\mathcal{F}_j^k)\|^{\frac{1}{2}}_{Z_k}$$

unde $\beta_i=\langle g,e_i^k\rangle_{L_2(\mu_k)}$, $i=1,2,\dots,2^k-1$.

Pe de altă parte, notînd cu $\mathcal{F}_i$, $i=0,1,2,\dots$, algebra finită de părțiale lui N generată de primele funcții Haar discrete (față de ordonarea introdusă la începutul lucrării), putem defini $x^*=$ $=\sup_i|E(x|\mathcal{F}_i)|$ pentru orice șir x. x^* se numește <u>șirul maximal al lui Doob</u> și el poate avea eventual componente egale cu $+\infty$.

Dacă X este o latice Banach q-concavă, $1\leq q<2$, avînd sistemul canonic $(e_i)_{i=0}^{\infty}$ drept bază simetrică, rezultă că X^* este spațiu de șiruri invariant la rearanjări (adică $\|(x_{\pi(k)})_k\|=\|(x_k)_k\|$ pentru orice permutare $\pi: N \longrightarrow N$) X^* fiind în plus latice Banach p-convexă pentru un $p>2$.

Considerațiile din [4] pag. 222-224 ne dau următoarea teoremă de interpolare:

<u>Teorema 2.1</u> <u>Fie Y un spațiu de șiruri invariant la rearanjări, care este latice Banach p-convexă pentru un</u> $p>2$ <u>și fie</u> $T:\ell_\infty \to \ell_\infty$ <u>un operator subliniar și pozitiv omogen, mărginit față de normele lui</u> ℓ_∞ <u>și</u> ℓ_2. <u>Atunci T aplică mărginit pe Y în el însuși, adică</u>

$\|Tx\|_Y \leqslant C\cdot\|x\|_Y$, <u>unde</u> $C=\max(\|T\|_\infty, \|T\|_2)$.

<u>Schiță a demonstrației</u> Este necesar să verificăm condiția (8.23) - p.223 - [4], care în contextul nostru ia forma următoare:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)^{\frac{1}{2}-}\left[n^{-\frac{1}{2}}-(n+1)^{-\frac{1}{2}}\right]<\infty \text{ pentru un } 0<\alpha<\tfrac{1}{2}.$$

Cum $(n+1)^{\frac{1}{2}-\alpha}\leq n^{\frac{1}{2}-\alpha}+n^{-\frac{1}{2}-\alpha}\ \forall\, n\in N$, atunci

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)^{\frac{1}{2}-\alpha}\left[n^{-\frac{1}{2}}-(n+1)^{-\frac{1}{2}}\right]\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\left[n^{-\alpha}-(n+1)^{-\alpha}\right]+\sum_{n=1}^{\infty}n^{-1-\alpha}<\infty. \blacksquare$$

Aplicînd teorema 2.1 spațiului $Y=X_k^*$ obținem:

<u>Corolarul 2.2</u> (Inegalitatea lui Doob) <u>Fie</u> X_k <u>definit la începutul lucrării. Atunci există</u> $C>0$ <u>nedepinzînd de k astfel că</u>

$$\|f^*\|_{X_k^*}\leqslant C\|f\|_{X_k^*}.$$

Repetînd raționamentul din [6] - teoremele 4 și 5 - obținem:

<u>Lema 2.3</u> <u>Dualul lui</u> $h_X^k(d)$, <u>X fiind un spațiu de șiruri invariant la rearanjări, q-concav pentru</u> $1\leqslant q<2$, <u>se identifică cu</u> $bmo_{X^*}^{(k)}(d)$ <u>prin aplicația</u> $g\longrightarrow L_g$, <u>unde</u> $g=\sum_{i=1}^{2^k-1}\beta_i f_i\in bmo_{X^*}^{(k)}(d)$,

iar $L_g \in (h_X^{(k)})^*$ fiind dată de $L_g(u)=\int_{\Omega_k} ug\,d\mu_k = 2^{-k}\sum_{i=1}^{2^k-1}\alpha_i\beta_i$ pentru $u=\sum_{i=1}^{2^k-1}\alpha_i f_i \in h_X^{(k)}(d)$. In plus, există $C>0$ nedepinzînd de $k\in\mathbb{N}$ astfel încît

$$C^{-1}\|L_g\|_{(h_X^{(k)}(d))^*}\le \|g\|_{bmo_{X^*}^{(k)}} \le C\|L_g\|_{(h_X^{(k)})^*}.$$

Putem descrie acum dualul lui $h_X(d)$:

Teorema 2.4 Fie X un spațiu Banach de șiruri invariant la rearanjări, care este în plus latice q-concavă pentru un anume $1\le q<2$. Atunci dualul lui $h_X(d)$ se identifică cu spațiul $bmo_{X^*}(d) \overset{def}{=} \{g=(g_k)_{k=1}^{\infty};\ g_k\in bmo_{X^*}^{(k)}(d)$ cu $\langle g_{k+1},u\rangle_{L_2(\mu_{k+1})}=\langle g_k,u\rangle_{L_2(\mu_k)}$ pentru orice $u\in h_X^{(k)}$ și cu $\|g\|_{bmo_{X^*}(d)} \overset{def}{=} \sup_k 2^{-k}\|g_k\|_{bmo_{X^*}^{(k)}(d)}<\infty\}$.

Identificarea se face prin intermediul aplicației $L\longrightarrow g=(g_k)_{k=1}^{\infty}\in bmo_{X^*}(d)$ unde $g_k=2^k\sum_{i=1}^{2^k-1}L(f_i)f_i$ pentru $k=1,2,\dots$ Reciproc dacă $\|g\|_{bmo_{X^*}}<\infty$, lui g îi corespunde funcționala $L_g\in(h_X)^*$ dată de $L_g(u)=\lim_{k\to\infty}\langle g_k,u_k\rangle_{L_2(\mu_k)}$ pentru $u=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i f_i\in h_X(d)$ și $u_k=\sum_{i=1}^{2^k-1}\alpha_i f_i$. In plus $\|g\|_{bmo_{X^*}}\sim\|L_g\|_{(h_X)^*}$.

Demonstrație Fie $L\in(h_X)^*$. Atunci, pentru $u=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i f_i\in h_X$, avem: $\langle g_k,u_k\rangle_{L_2(\mu_k)}=2^{-k}\sum_{i=1}^{2^k-1}g_k(i)u_k(i)=$

$$=2^{-k}\sum_{i=1}^{2^k-1}2^k\Big(\sum_{j=1}^{2^k-1}L(f_j)f_j(i)\Big)\Big(\sum_{\ell=1}^{2^k-1}\alpha_\ell f_\ell(i)\Big)=\sum_{j=1}^{2^k-1}\alpha_j L(f_j).$$

Deci $\langle g_k,u_k\rangle_{L_2(\mu_k)}=\langle L,u_k\rangle$ $k\in\mathbb{N}$ și $|\langle g_k,u_k\rangle_{L_2(\mu_k)}|=|\langle L,u_k\rangle|\le$ $\le\|L\|\cdot\|u_k\|_{h_X}\le$ (din (2.1)) $\le\|L\|_{(h_X)^*}\cdot 2^k\|u_k\|_{h_X^{(k)}}$.

Din lema 2.3 avem atunci

$$\|g_k\|_{\mathrm{bmo}_{X^*}^{(k)}} \leq C\cdot 2^k \|L\|_{(h_X)^*} \qquad k\in \mathbb{N}.$$

Prin urmare

$$(2.2) \qquad \sup_k 2^{-k}\|g_k\|_{\mathrm{bmo}_{X^*}^{(k)}} \leq \|L\|_{(h_X)^*}\,.$$

Reciproc, fie $\langle g_k,u\rangle_{L_2(\mu_k)}=\langle g_{k+1},u\rangle_{L_2(\mu_{k+1})}$ $\forall\, u\in h_X^{(k)}$ şi

$$(2.3) \qquad \sup_k 2^{-k}\|g_k\|_{\mathrm{bmo}_{X^*}^{(k)}} = M<\infty\,.$$

Atunci $|\langle g_{k+\ell},u_{k+\ell}\rangle_{L_2(\mu_{k+\ell})}-\langle g_k,u_k\rangle_{L_2(\mu_k)}|=$

$=|\langle g_{k+\ell},u_{k+\ell}-u_k\rangle_{L_2(\mu_{k+\ell})}|\leq$(din lema 2.3)$\leq$

$\leq C\,\|g_{k+\ell}\|_{\mathrm{bmo}_{X^*}^{(k+\ell)}}\cdot\|u_{k+\ell}-u_k\|_{h_X^{(k+\ell)}}\leq$(din (2.1) şi(2.3))$\leq$

$\leq CM\,\|u_{k+\ell}-u_k\|_{h_X}\longrightarrow 0$ cînd $k,\ell\longrightarrow\infty$.

Prin urmare există $\lim\limits_{k\to\infty}\langle g_k,u_k\rangle_{L_2(\mu_k)} \overset{\mathrm{def}}{=} L(u)$ pentru $u\in h_X$

şi $\|L\|_{(h_X)^*}\leq \sup\limits_{\substack{k\in\mathbb{N}\\ \|u\|_{h_X}\leq 1}} |\langle g_k,u_k\rangle|\leq CM.$ ∎

3. Subspaţii complementate în $h_1(d)$

In acest paragraf, avînd drept motivaţie lucrarea [5], vom descrie în cazul $X=\ell_1$, subspaţiile generate de subşiruri ale bazei Haar discrete normalizate în ℓ_1, $t_i=|I_i|^{-1}c_i$. (E de remarcat că $(c_i)_{i=1}^{\infty}$ este bază necondiţionată în $h_X(d)$ pentru orice spaţiu de şiruri invariant la rearanjări X).

Rezultatul principal al paragrafului este următorul:

Teorema 3.1 Fie spaţiul h_1 şi fie $(t_i)_{i=1}^{\infty}$ baza Haar normalizată. Dacă $\mathcal{B} \subset \mathbb{N}$ este o submulţime infinită, atunci subspaţiul închis generat de $\mathcal{B}$, notat cu $[t_i]_{i\in\mathcal{B}}$, este izomorf fie cu ℓ_1 fie cu h_1 după cum este îndeplinită sau nu relaţia

$$(3.1) \qquad \sup_J |J|^{-1} \sum_{\substack{I_i\subset J\\ i\in\mathcal{B}}} |I_i| = M < \infty .$$

Demonstraţia teoremei 3.1 se face în mai multe etape. Primul pas constă în demonstraţia propoziţiei următoare:

Propoziţia 3.2 Dacă relaţia (3.1) este îndeplinită atunci spaţiile $[t_i]_{i\in\mathcal{B}}$ şi ℓ_1 sînt izomorfe.

Demonstraţie Conform teoremei 2.4. dualul lui $h_1(d)$ este spaţiul bmo(d) pe care-l vom descrie astfel:

$$\mathrm{bmo}(d) \overset{\mathrm{def}}{=} \Big\{ g=(g_k)_{k\in\mathbb{N}};\ g_k=2^k \sum_{i=1}^{2^k-1} \beta_i f_i,\quad \|g\|_{bmo} =$$

$$= \sup_k \sup_{1\le j\le 2^k-1} \Big\| \Big[2^{-k} \sum_{i=1}^{2^k-1} E\big(\beta^2_{\pi_k(i)} (e_i^k)^2 \,|\, \mathcal{F}_j^k\big)\Big]^{\frac12} \Big\|_{\infty} < \infty \text{ şi}$$

$$\langle g_{k+1},u\rangle_{L_2(\mu_{k+1})} = \langle g_k,u\rangle_{L_2(\mu_k)}\ \forall\, u\in h_j^{(k)}(d) \Big\} .$$

Aici $\pi_k: \{1,2,\dots,2^k-1\} \longrightarrow \{1,2,\dots,2^k-1\}$ este permutarea unică pentru care $f_{\pi_k(i)}=e_i^k$, $i=1,2,\dots,2^k-1$.

In plus dualitatea dintre bmo(d) şi $h_1(d)$ este dată de $\langle g,u\rangle = \lim_{k\to\infty} \langle g_k,u_k\rangle_{L_2(\mu_k)}$, unde $u=\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i f_i$, $u_k=\sum_{i=1}^{2^k-1}\alpha_i f_i$.

Prin urmare, dacă $g_k=2^k \sum_{i=1}^{2^k-1} \beta_i f_i$, unde $k\in\mathbb{N}$, atunci, pentru $\beta_i\neq 0$ cu $i\in\mathcal{B}$,

$$\|g\|_{bmo} = \sup_k \sup_{1\le j\le 2^k-1} \Big\| \Big[\sum_{i=j}^{2^k-1} E\big(\beta^2_{\pi_k(i)} f^2_{\pi_k(i)} \,|\, \mathcal{F}_j^k\big)\Big]^{\frac12} \Big\|_{\infty} =$$

$$= \sup_k \sup_{1\le j\le 2^k-1} \Big\| \Big[\sum_{\substack{i=j\\ \pi_k(i)\in\mathcal{B}}}^{2^k-1} E\big(|I_{\pi_k(i)}|^{-1} \beta^2_{\pi_k(i)} e^2_{\pi_k(i)} \,|\, \mathcal{F}_j^k\big)\Big]^{\frac12} \Big\|_{\infty} \le$$

$$\le \sup_{k\in\mathcal{B}} |\beta_k|\cdot|I_k|^{-\frac12} \cdot \sup_k \sup_{1\le j\le 2^k-1} \Big\| E\Big(\sum_{\substack{i=j\\ \pi_k(i)\in\mathcal{B}}}^{2^k-1} e^2_{\pi_k(i)} \,|\, \mathcal{F}_j^k\Big)^{\frac12} \Big\|_{\infty} =$$

$$=\sup_{k\in\mathcal{B}}|\beta_k|\cdot|I_k|^{-\frac{1}{2}}\cdot\sup_J(|J|^{-1}\sum_{\substack{I_i\subset J\\ i\in\mathcal{B}}}|I_i|)^{\frac{1}{2}}.$$

Deci $\|\sum_{i\in\mathcal{B}}\alpha_i t_i\|_{h_1}\geq\sup\{<L,\sum_{i\in\mathcal{B}}\alpha_i t_i>;\ \|L\|_{h_1^*}\leq 1\}\geq$

$\geq C\sup\{<L_g,\sum_{i\in\mathcal{B}}\alpha_i t_i>;\ \|g\|_{bmo(d)}\leq 1;\ g=(g_k)_k;\ g_k=2^k\sum_{\substack{i=1\\ i\in\mathcal{B}}}^{2^k-1}\beta_i f_i\}\geq$

$\geq C\sup\{\sum_{i\in\mathcal{B}}\alpha_i\beta_i\cdot|I_i|^{-\frac{1}{2}};\ \sup_{i\in\mathcal{B}}|\beta_i|\cdot|I_i|^{-\frac{1}{2}}\cdot\sup_J(|J|^{-1}\sum_{\substack{i\in\mathcal{B}\\ I_i\subset J}}|I_i|)^{\frac{1}{2}}\leq 1\}\geq$

$\geq CM^{-\frac{1}{2}}\sum_{i\in\mathcal{B}}|\alpha_i|$, adică $[t_i]_{i\in\mathcal{B}}$ este izomorf cu ℓ_1. ■

Vom nota cu $X=[t_i]_{i\in\mathbb{N}\setminus\{2^k-1\}_{k=1}^{\infty}}=(\sum_{k=1}^{\infty}h_1(k))_{\ell_1}$, unde $h_1(k)=$ $=[t_i]_{i\in A_k}$, iar $A_k=\{2^k,\ldots,2^{k+1}-2\}$.

Următorul pas în demonstrația teoremei 3.1 este dat de:

<u>Propoziția 3.3</u> $(\sum_{i=1}^{\infty}X)_{\ell_1}\approx X$.

<u>Demonstrația propoziției 3.3</u> Notăm $Y=(\sum_i X)_{\ell_1}$. Folosind renumerotarea sistemului Haar discret $(c_i)_{i=1}^{\infty}$ sub forma $(c_{i,j})_{i=0,j=0}^{\infty\ \ \infty}$ observăm că baza lui X se poate scrie astfel: $\{c_{0,i}\}_{i=1}^{\infty}\cup\{c_{1,i}\}_{i=1}^{\infty}\cup$ $\cup\ldots\cup\{c_{k,i}\}_{i=1}^{\infty}\cup\ldots=\bigcup_{k=0}^{\infty}\bigcup_{i=1}^{\infty}\{c_{k,i}\}\stackrel{def}{=}\mathcal{B}$. Descompunem pe $\mathcal{B}$ în $\mathcal{B}_1$ și $\mathcal{B}_2$, unde $\mathcal{B}_1=\{c_{0,1}\}\cup\{c_{0,2},c_{1,1}\}\cup\{c_{0,2^2},c_{1,2},c_{2,1}\}\cup$ $\cup\{c_{0,2^3},c_{1,2^2},c_{2,2},c_{3,1}\}\cup\ldots\cup\{c_{0,2^k},c_{1,2^{k-1}},\ldots,c_{k,1}\}\cup\ldots;$ iar $\mathcal{B}_2=\mathcal{B}\setminus\mathcal{B}_1=\{c_{0,2+1}\}\cup\{c_{0,2^2+1}\}\cup\{c_{0,2^2+2},c_{0,2^2+2+1},c_{1,2+1}\}\cup$ $\cup\{c_{0,2^3+1}\}\cup\{c_{0,2^3+2},c_{0,2^3+2+1},c_{1,2^2+1}\}\cup\{c_{0,2^3+2^2},c_{0,2^3+2^2+2},$ $c_{0,2^3+2^2+2+1},c_{1,2^2+2},c_{1,2^2+2+1},c_{2,2+1}\}\cup\ldots\stackrel{def}{=}A_{0,2+1}\cup A_{0,2^2+1}\cup$ $\cup A_{1,2+1}\cup A_{0,2^3+1}\cup A_{1,2^2+1}\cup A_{2,2+1}\cup A_{0,2^4+1}\cup A_{1,2^3+1}\cup A_{2,2^2+1}\cup A_{3,2+1}\cup$

Dacă notăm cu T_{1k} translaţia spre stînga cu 2^{k+1} paşi de lungime 2 a lui $[t_i]_{i\in A_{k,2+1}}$, se observă uşor că T_{1k} este o izometrie în h_1. Punem atunci $T_1=\sum_{k=0}^{\infty} T_{1k}$ cu $T_1: [t_i]_{i\in \bigcup_{k=0}^{\infty} A_{k,2+1}} \longrightarrow X$. Evident T_1 este o izometrie în h_1. In mod analog $T_2=\sum_{k=0}^{\infty} T_{2k}$ de la $[t_i]_{i\in \bigcup_{k=0}^{\infty} A_{k,2^2+1}}$ la X, unde T_{2k} reprezintă translaţia spre stînga cu 2^{k+2} paşi de lungime 2, este o izometrie în h_1 şi, mai general, $T_n=\sum_{k=0}^{\infty} T_{nk}: [t_i]_{i\in \bigcup_{k=0}^{\infty} A_{k,2^n+1}} \longrightarrow X$, unde T_{nk} este translaţia spre stînga cu 2^{k+n} paşi de lungime 2, este o izometrie în h_1.

Deci $[t_i]_{i\in\mathcal{B}_2}\approx(\sum_{i=1}^{\infty} X)_{\ell_1}$ şi $X\approx[t_i]_{i\in\mathcal{B}_1}\oplus(\sum_{i=1}^{\infty} X)_{\ell_1}$.

Prin inducţie se poate arăta că $\sup_k 2^{-k} \sum_{I_i\subset I_{2^k-1},\, i\in\mathcal{B}_1} |I_i|\leq 2$

şi, aplicînd propoziţia 3.2, obţinem că $[t_i]_{i\in\mathcal{B}_1}\approx \ell_1$. Prin urmare $X\approx\ell_1\oplus Y$. Deoarece X este un subspaţiu complementat în Y, iar $Y\approx(\sum_{i=1}^{\infty} Y)_{\ell_1}$, metoda de descompunere a lui Pelczynski ne arată că $X\approx Y=(\sum_{i=1}^{\infty} X)_{\ell_1}$. ∎

Să presupunem acum că

$$\sup_J |J|^{-1} \sum_{\substack{I_i\subset J\\ i\in\mathcal{B}}} |I_i|=\infty \tag{3.2}$$

Dacă $\mathcal{B}$ nu conţine nici un subşir al lui $(2^k-1)_{k=1}^{\infty}$, atunci $[t_i]_{i\in\mathcal{B}}\approx\ell_1\oplus[t_i]_{i\in\mathcal{B}_1}$, unde $\mathcal{B}_1=\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k$, A_k fiind submulţimi finite de indici, disjuncte două cîte două şi astfel încît să existe un unic indice $i_k\in A_k$ cu $I_i\subset I_{i_k}$ pentru $i\in A_k$ şi cu

$$(3.3) \qquad N = \sup_k |I_{i_k}|^{-1} \sum_{i \in A_k} |I_i| = \infty .$$

In caz că $N < \infty$, adăugînd subșirul înlăturat anterior, ajungem la relația

$$\sup_J |J|^{-1} \sum_{\substack{I_i \subset J \\ i \in \mathcal{B}}} |I_i| \le N+1 < \infty ,$$

ceea ce contrazice (3.2).

Notăm cu $h_1(A_k) = [t_i]_{i \in A_k}$. Atunci $[t_i]_{i \in \mathcal{B}_1} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} h_1(A_k)\right)_{\ell_1} = Z$.

Următorul, și cel mai important, pas în demonstrația teoremei 3.1 este dat de:

<u>Propoziția 3.4</u> <u>Spațiul $[t_i]_{i \in \mathcal{B}_1}$ este izomorf cu X.</u>

<u>Demonstrația propoziției 3.4</u> Deoarece A_k este inclusă în $\{2^k, \dots, 2^{k+1}-2\}$; $k = 1, 2, \dots$, rezultă că Z este un subspațiu complementat în X. Reciproc, deoarece (3.3) este îndeplinită, pentru $n \in \mathbb{N}$ și un γ_n astfel încît $1 - 4^{-n} < \gamma_n < 1$, există subșirul $(k_n)_n$ cu $A_{k_n} \overset{def}{=} B_n$ și subșirul $i_n \overset{def}{=} i_{k_n} \in B_n$ cu

$$(3.4) \qquad |I_{i_n}|^{-1} \sum_{i \in B_n,\ I_i \subset I_{i_n}} |I_i| > n(1-\gamma_n)^{-1} .$$

Dacă punem $G_1(I) = \{J \in \mathcal{B};\ J \subset I,\ \ J \text{ maximal}\}$, iar $G_k(I) = \bigcup_{J \in G_{k-1}(I)} G_1(J)$ pentru $k = 2, 3, \dots$, atunci relația (3.4) implică $G_n(I_{i_n}) \neq \emptyset$. Repetînd acum demonstrația lemei 1 -[5] obținem existența unui $I_i \in B_n$ cu $I_o \subset I_{i_n}$ și cu

$$(3.5) \qquad |I_o|^{-1} \sum_{J \in G_n(I_o)} |J| \geq \gamma_n .$$

Raționînd ca în lema principală din [5] rezultă că există Y_n un subspațiu al lui $[t_i]_{i \in B_n}$ astfel că Y_n să fie 4-izomorf cu

$h_1(n+1)$ şi Y_n să fie 4-complementat în $h_1(d)$. Deci Z conţine un subspaţiu 4-complementat $[t_i]_{i\in \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k}$, care conţine la rîndul său subspaţiul complementat $(\sum_{n=1}^{\infty} Y_n)_{\ell_1}$, care este izomorf cu $(\sum_{n=1}^{\infty} h_1(n+1))_{\ell_1} \approx X$. Deci Z conţine un subspaţiu complementat izomorf cu X şi folosind propoziţia 3.3, putem aplica metoda de descompunere a lui Pelczynski, ceea ce încheie demonstraţia propoziţiei 3.4 . ■

<u>Demonstraţia teoremei 3.1</u> Este clar că $X\oplus \ell_1 \approx h_1$, deci din propoziţiile 3.4 şi 3.2 ar urma că oricare ar fi $\mathcal{B}\subset \mathbb{N}$, $[t_i]_{i\in \mathcal{B}}$ este izomorf cu ℓ_1, X sau cu h_1. Deoarece din propoziţia 3.3 rezultă că $X\oplus X\approx X$ şi cum $h_1\approx X\oplus \ell_1$ este izomorf cu un subspaţiu complementat în $X\oplus X\approx X$, metoda de descompunere a lui Pelczynski ne arată că $X\approx h_1$, ceea ce încheie demonstraţia. ■

<u>Corolarul 3.5</u> <u>Notînd</u> $[t_i]_{i=1}^{2^k-1}$ <u>cu</u> B_k, $k=1,2,\ldots$, <u>obţinem că</u> h_1 <u>este izomorf cu</u> $(\sum_{k=1}^{\infty} B_k)_{\ell_1}$, <u>adică cu spaţiul</u> $(\sum_{n=1}^{\infty} H_1(n))_{\ell_1}$ <u>introdus în [5]</u>.

<u>Demonstraţie</u> Intr-adevăr din demonstraţia teoremei 3.1 rezultă că h_1 este izomorf cu $X=(\sum_{k=1}^{\infty} h_1(k))_{\ell_1}$. Dar $h_1(k)$ este izometric cu B_k prin izometria T_k care translatează blocul $h_1(k)$ spre stînga cu un pas. Deci $(\sum_{k=1}^{\infty} h_1(k))_{\ell_1}$ este izometric cu $(\sum_{k=1}^{\infty} B_k)_{\ell_1}$ prin $T=\sum_{k=1}^{\infty} T_k$. Dar $\|\sum_{i=1}^{2^k-1} \alpha_i t_i^k\|_{h_1} = \|\sum_{i=1}^{2^k-1} \alpha_i h_i\|_{H_1}$ $\forall$ k, unde $t_i^k = c_i^k \|c_i^k\|_{\ell_1}^{-1}$, iar $(h_i)_{i=1}^{\infty}$ este sistemul Haar L_1-normalizat. Deci $(\sum_{n=1}^{\infty} H_1(n))_{\ell_1}$ este izometric cu $(\sum_{k=1}^{\infty} B_k)_{\ell_1}$. ■

Corolarul 3.6 Spaţiul bmo(d) este izomorf cu BMO(d).

Demonstraţie Din [7] -pag. 153 rezultă că $BMO(d) \approx (\sum_n BMO(n))_{\ell_\infty}$, $BMO(n)$ fiind spaţiul $[c_i]_{i=1}^{2^n-1}$ în BMO(d). Dar din corolarul 3.5 $bmo=(h_1)^*$ este izomorf cu $(\sum_n BMO(n))_{\ell_\infty}$. ∎

Remarca 3.7 S-ar putea bănui că toate subspaţiile complementate ale lui h_1 ar fi izomorfe cu h_1 sau cu ℓ_1.

Nu este aşa după cum arată exemplul următor:

Fie $Y=(\sum_{n=1}^{\infty} Y_n)_{\ell_1}$, unde $Y_n=[y_k]_{k=0}^{n-1}$ cu $y_k = \sum_{i=0}^{2^{n-k-1}-1} c_{k,i}$,

$k=0,1,\dots,n-1$. Este clar că $P_n:h_1 \longrightarrow Y_n$ dat de $P_n(\sum_{i,j} \alpha_{ij}c_{ij}) = \sum_{i=0}^{n-1} 2^{i-n}(\sum_{j=0}^{2^{n-i}-1} \alpha_{ij})y_i$ este o proiecţie de normă ≤ 1 pentru orice n. Prin urmare $P=\sum_{n=1}^{\infty} P_n:h_1 \longrightarrow Y$ este o proiecţie mărginită, iar p e de altă parte este clar că Y_n este izometric cu $2^n\ell_2(n)$, deci deci $Y \approx (\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \ell_2(n))_{\ell_1} \approx (\sum_{n=1}^{\infty} \ell_2(n))_{\ell_1}$.

Prin urmare h_1 conţine un subspaţiu Y complementat în h_1 şi izomorf cu $(\sum_{n=1}^{\infty} \ell_2(n))_{\ell_1}$. Dar Y nu este izomorf cu h_1, căci Y are o bază necondiţionată unică pînă la o permutare [1]. (Spunem că o bază necondiţionată $(x_n)_n$ este bază unică pînă la o permutare în spaţiul Banach Y, dacă oricare ar fi baza necondiţionată $(y_n)_n$ în Y, există un izomorfism $T:Y \longrightarrow Y$ şi o permutare $\pi:N \longrightarrow N$ astfel încît $Tx_n = y_{\pi(n)}$ $\forall n \in N$) şi atunci ar exista $T:Y \longrightarrow h_1$ un izomorfism şi $\pi:N \longrightarrow N$ o permutare cu $T(e_{\pi(n)}) = c_n$ $\forall n$, ceea ce conduce uşor la o contradicţie. Din cauza unicităţii bazei necondiţionate în ℓ_1 nici ℓ_1 nu este izomorf cu Y. ∎

4. Proiecții continue în h_p cu $0 < p \leq 1$

In acest paragraf vom descrie subspațiile complementate în h_p, $0 < p \leq 1$, generate de o bază necondiționată inesențială (definiția va fi dată mai departe). Rezultatele sînt analoge celor din [3], de unde este împrumutată și tehnica de demonstrație.

Fie deci $0 < p \leq 1$ și să punem $h_p(d) \overset{def}{=} \{x = (x_n)_{n\geq 1};\ S(x) \in \ell_p\}$ dotat cu p-norma $\|x\|_{h_p} \overset{def}{=} \|S(x)\|_{\ell_p}$. Atunci h_p este un spațiu p-Banach, adică un spațiu complet a cărui topologie este generată de o p-normă $\| \ \|$ (care verifică inegalitatea $\|x+y\|^p \leq \|x\|^p + \|y\|^p\ \forall x, y$). Demonstrația acestui fapt este complet similară cu cea a lemei 1.1.

Vom introduce acum unele notații. Dacă $(u_n)_n$ este un șir bazic complementat, adică $[u_n]_n$ este un subspațiu complementat în h_p, vom nota cu u_n' funcționala liniară și continuă pe h_p asociată lui u_n, adică vom avea $Py = \sum_n u_n'(y) u_n$ pentru P o proiecție pe $[u_n]_n$. Vom spune că (u_n, u_n') este un <u>șir bazic complementat în</u> h_p. Notăm de asemenea cu $(h_i)_{i=1}^{\infty}$ sistemul Haar discret normalizat în h_p. Dacă $u_n = \sum_{i\in A_n} a_i h_i$ și $u_n' = \sum_{i\in A_n} b_i h_i$ spunem că (u_n, u_n') este un <u>șir bazic de blocuri complementat în</u> h_p. Atunci are loc analogul lemei 6.3 -[3]:

<u>Propoziția 4.1</u> <u>Fie</u> (u_n, u_n') <u>un șir bazic necondiționat normalizat și complementat în</u> h_p. <u>Presupunem că</u> $(A_n)_{n\in N}$ <u>este un șir de submulțimi disjuncte ale lui</u> N <u>astfel că</u>

$$\sum_{k\in A_n} u_n'(h_k) h_k'(u_n) = \theta_n \quad \underline{\text{pentru}}\ n \in N$$

<u>Presupunem că</u> $|\theta_n| \geq \theta > 0$ <u>pentru orice</u> $n \in N$. <u>Definim</u>

$$v_n = \sum_{k\in A_n} h_k'(u_n) h_k$$

$$v_n' = \theta_n^{-1} \sum_{k\in A_n} u_n'(h_k)h_k' .$$

<u>Atunci</u> (v_n, v_n') <u>este un şir bazic complementat de blocuri echiva-</u>

<u>cu</u> $(u_n)_n$.

<u>Demonstraţie</u> Este clar că (v_n, v_n') este biortogonal. Deoarece (u_n, u_n') este şir bazic complementat şi necondiţionat rezultă că $\lim_{\delta\to 0}\eta(\delta)=0$, unde $\eta(\delta) = \sup_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ \varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n=\pm 1}} \sup_{\|x\|_{h_p}\leq\delta} \|\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i u_i'(x)u_i\|_{h_p}$.

Vom arăta că $S: [u_n]_n \longrightarrow [v_n]_n$ dat de $S(x)=\sum_{n=1} u_n'(x)v_n$ şi $T: [h_n]_n \longrightarrow [u_n]_n$ dat de $Tx=\sum_{n=1}^{\infty} v_n'(x)u_n$ sînt operatori continui. Atunci, deoarece $Su_n = v_n$, rezultă că $(u_n)_n$ şi $(v_n)_n$ sînt şiruri echivalente. In plus $Tv_n = u_n$ şi $STx=\sum_{n=1}^{\infty} v_n'(x)v_n$ este o proiecţie de la h_p pe $[v_n]_n$. Intr-adevăr $TS=Id_{[u_n]_n}$. Vom arăta mai întîi că S este operator continuu.

Fie $x=\sum_{i=1}^{n} a_i u_i \in [u_n]_n \subset h_p$. Dacă $\|x\|_{h_p}\leq\delta$ atunci $\|\sum_{i=1}^{n} a_i r_i(t)u_i\|_{h_p} \leq \eta(\delta)$ $\forall\, t\in[0,1]$ şi cum $y=\sum_{j=1}^{\infty} h_j'(y)h_j$ $\forall\, y\in h_p$, avem

$\eta(\delta) \geq \|\sum_{i=1}^{n} a_i r_i(t)u_i\|_{h_p} = \|\sum_{j=1}^{\infty}(\sum_{i=1}^{n} a_i r_i(t)h_j'(u_i)h_j\|_{h_p} \geq$ (din inegalitatea Burkholder-Gundy-Davis [2] aplicată spaţiului $L_p(\mu_k)$, notaţiile fiind cele din §2) $\geq C \sup_{\varepsilon_j=\pm 1} \|\sum_{j=1}^{\infty}\varepsilon_j(\sum_{i=1}^{n} a_i r_i(t)h_j'(u_i))h_j\|_{\ell_p}$, de unde notînd cu C o constantă care se schimbă de la rînd la rînd,

$\sum_{k=1}^{\infty}(\sum_{j=1}^{\infty} r_j(s) \sum_{i=1}^{n} a_i r_i(t)h_j'(u_i)e_k'(h_j))^p \leq C\eta(\delta)^p$ $\forall\, s,t\in I$, adică

$\sum_{k=1}^{\infty}(\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n}[a_i h_j'(u_i)e_k'(h_j)]r_j(s)r_i(t))^p \leq C\,\eta(\delta)^p$ $\forall\, s,t\in I$.

Integrăm şi folosim inegalitatea lui Bonami (vezi lema 6.2 - [3])

Obţinem atunci:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n}a_i^2h_j^*(u_i)^2[s_k^*(h_j)]^2\Big)^{p/2}\leq c\,\eta(\delta)^p \text{ sau}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\sum_{\{j;\ k\in \mathrm{supp}\ h_j\}}\ \sum_{i=1}^{n}a_i^2h_j^*(u_i)^2|\mathrm{supp}\ h_j|^{-2/p}\Big)^{p/2}\leq c\,\eta(\delta)^p.$$

Dar $\|\sum_{i=1}^{n}a_iv_i\|_{h_p}^p=\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\in A_i\cap\{\ell;\ k\in\mathrm{supp}\ h_\ell\}}a_i^2h_j^*(u_i)^2|\mathrm{supp}\ h_j|^{-2/p}\Big)^{p/2}\leq$

$=\sum_{k=1}\Big(\sum_{j\in\{\ell;\ k\in\mathrm{supp}\ h_\ell\}}\sum_{i=1}^{n}a_i^2h_j^*(u_i)^2|\mathrm{supp}\ h_j|^{-2/p}\Big)^{p/2}\leq$ (din inegalitatea de mai sus) $\leq c\,\eta(\delta)^p$. Prin urmare $\|S(x)\|_{h_p}\leq c\,\eta(\delta)$ dacă $\|x\|_{h_p}\leq\delta$ şi cum $\lim_{\delta\to 0}\eta(\delta)=0$, rezultă că S este continuu.

Fie acum $x=\sum_{i=1}^{\infty}a_ih_i\in[h_i]_{i=1}^{\infty}$, unde $a_i\neq 0$ numai pentru un număr finit de termeni, cu $\|x\|_{h_p}=\delta$. Atunci, deoarece $(h_i)_{i=1}^{\infty}$ este o bază necondiţionată în h_p, avem pentru orice $t\in[0,1]$ şi orice $n\in N$ $\|\sum_{k=1}^{n}r_k(t)\cdot\sum_{i\in A_k}a_ih_i\|_{h_p}\leq\delta$. Deci, din definiţia lui $\eta(\delta)$, rezultă că $\|\sum_{j=1}^{n}r_j(s)u_j^*(\sum_{k=1}^{n}r_k(t)\cdot\sum_{i\in A_k}a_ih_i)u_j\|_{h_p}\leq\eta(\delta)\ \forall\ s\in[0,1]$,

sau $\|\sum_{\ell=1}^{\infty}[\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}r_j(s)r_k(t)\sum_{i\in A_k}a_iu_j^*(h_i)h'(u_j)]h_\ell\|_{h_p}\leq\eta(\delta)$.

Deci, pentru orice $\omega\in[0,1]$, deoarece $\|x\|_{\ell_p}\leq C\|x\|_{h_p}$,

$$\|\sum_{\ell=1}^{\infty}r_\ell(\omega)[\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}r_j(s)r_k(t)\sum_{i\in A_k}a_iu_j^*(h_i)h_\ell^*(u_j)]h_\ell\|_{\ell_p}\leq C\eta(\delta),\text{ sau}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\Big[\sum_{\substack{\ell=1\\ m\in\mathrm{supp}\ h_\ell}}^{\infty}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}r_j(s)r_k(t)r_\ell(\omega)\sum_{i\in A_k}a_iu_j^*(h_i)h_\ell^*(u_j)|\mathrm{supp}\ h_\ell|^{-1}\Big]^p$$

$\leq C^p\eta(\delta)^p$. Integrăm pe $[0,1]^3$ şi repetînd demonstraţia lemei 6.2 -[3] pentru trei variabile, obţinem:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\Big[\sum_{\substack{\ell=1\\ m\in\mathrm{supp}\ h_\ell}}^{\infty}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\Big(\sum_{i\in A_k}a_iu_j^*(h_i)h_\ell^*(u_j)\Big)^2|\mathrm{supp}\ h_\ell|^{-2/p}\Big]^{p/2}\leq(C\eta(\delta))^p$$

Deci, luînd $j=k$, obţinem:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\Big[\sum_{\substack{\ell=1\\ m\in\operatorname{supp} h_\ell}}^{\infty}\ \sum_{k=1}^{n}\Big(\sum_{i\in A_k} a_i u_k'(h_i)h_\ell'(u_k)\Big)^2|\operatorname{supp} h_\ell|^{-2/p}\Big]^{p/2}\le C^p\eta(\delta)^p,$$

adică, ținînd cont de definiția lui v_k':

$$\sum_{m=1}^{\infty}\Big[\sum_{\substack{\ell=1\\ m\in\operatorname{supp} h_\ell}}^{\infty}\ \sum_{k=1}^{n}|\theta_k v_k'(x)h_\ell'(u_k)|^2|\operatorname{supp} h_\ell|^{-2/p}\Big]^{p/2}\le C^p\eta(\delta)^p.$$

Deoarece $|\theta_k|\ge\theta$ $\forall k$, avem cu un alt $C>0$,

$$\sum_{m=1}^{\infty}\Big[\sum_{\substack{\ell\in N\\ m\in\operatorname{supp} h_\ell}}\ \sum_{k=1}^{n}|v_k'(x)h'(u_k)|^2|\operatorname{supp} h_\ell|^{-2/p}\Big]^{p/2}\le C^p\eta(\delta)^p.$$

Dar $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\int_0^1\int_0^1\Big|\sum_{\substack{\ell\in N\\ m\in\operatorname{supp} h_\ell}}\ \sum_{k=1}^{n}r_k(s)r(t)v_k'(x)h_k'(u_k)|\operatorname{supp} h_\ell|^{-1/p}\Big|^p\,ds\,dt$

$\displaystyle\le$ (din lema 6.2 -[3]) $\displaystyle\le C\sum_{m=1}^{\infty}\Big[\sum_{\substack{\ell\in N\\ m\in\operatorname{supp} h_\ell}}\ \sum_{k=1} v_k'(x)^2h'(u_k)^2|\operatorname{supp} h_\ell|^{-2/p}\Big]^{p/2}$

$\le C^p\eta(\delta)^p$. Deci, pentru un anume $s\in[0,1]$, avem:

$$(4.1)\quad \int_0^1\sum_{m=1}^{\infty}\Big[\sum_{\substack{\ell\in N\\ m\in\operatorname{supp} h_\ell}}\ \sum_{k=1}^{\infty}r_k(s)r_\ell(t)v_k'(x)h_k'(u_k)\frac{1}{|\operatorname{supp} h_\ell|^{1/p}}\Big]^p dt\le[C\eta(\delta)]^p$$

Dar $\displaystyle\|\sum_{k=1}^{n}v_k'(x)u_k\|_{h_p}^p\le$ (deoarece $(u_k)_k$ este un șir bazic necondițio-

nat în h_p) $\displaystyle\le C\|\sum_{k=1}^{n}r_k(s)v_k'(x)u_k\|_{h_p}^p=C\|\sum_{k=1}^{n}r_k(s)v_k'(x)\sum_{\ell=1}^{\infty}h'(u_k)h_\ell\|_{h_p}^p=$

$\displaystyle=C\|\sum_{\ell=1}^{\infty}\Big[\sum_{k=1}^{n}r_k(s)v_k'(x)h'(u_k)\Big]h_\ell\|_{h_p}^p=$

$\displaystyle=C\sum_{m=1}^{\infty}\Big(\sum_{\substack{\ell\in N\\ m\in\operatorname{supp} h_\ell}}\Big[\sum_{k=1}^{n}r_k(s)v_k'(x)h_\ell'(u_k)\Big]^2|\operatorname{supp} h_\ell|^{-2/p}\Big)^{p/2}\le$ (din

(4.1) și din inegalitatea lui Hincin) $\le C^p\eta(\delta)^p$.

Prin urmare $\displaystyle\|\sum_{k=1}^{n}v_k'(x)u_k\|_{h_p}\longrightarrow 0$ cînd $\delta\to 0$, adică T este un operator continuu. ■

Următoarea definiție este adaptată după [3] ;

Un șir bazic (u_n,u_n') complementat, necondiționat și normalizat în h_p, $0<p\le 1$, se numește <u>esențial</u> dacă

$$\inf_n\ \sup_k\ |u_n'(h_k)h_k'(u_n)|=0$$

In caz contrar, şirul bazic se numeşte inesenţial.

Teorema 4.2 Fie (u_n, u_n') un şir bazic inesenţial în h_p, $0<p\leq 1$. Atunci există $\ell\in\mathbb{N}$ astfel că şirul $(u_n)_n$ să fie echivalent cu un subşir al bazei canonice (adică baza formată cu ajutorul sistemului Haar discret) a lui $\sum_{i=1}^{\ell} h_p$.

Demonstraţie Fie $\beta=\inf_n \sup_k |u_n'(h_k)h_k'(u_n)|>0$. Atunci există o aplicaţie $\pi:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$ astfel încît

(4.2) $\quad \|u_n'(h_{\pi(n)})h_{\pi(n)}'(u_n)\|\geq\beta$

Deoarece $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este mărginit topologic, există $M>0$ cu $\sup_k \|h_k'\|\cdot\|h_k\|<M$. Dar $(u_n)_n$ fiind şi complementat, fie $P:h_p\rightarrow[u_n]_n$ o proiecţie mărginită, cu $P(h_k)=\sum_n u_n'(h_k)u_n$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}|h_k'[u_n'(h_k)u_n]|=\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n h_k'[u_n'(h_k)u_n]=h_k'\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n u_n'(h_k)u_n\Big)\leq$$

$\leq\|h_k'\|\cdot\|\sum_n\varepsilon_n u_n'(h_k)u_n\|_{h_p}\leq$ (deoarece $(u_n)_n$ este necondiţionat) $\leq$

$\leq C\|h_k'\|\cdot\|\sum_n u_n'(h_k)u_n\|_{h_p}\leq C\|h_k'\|\|Ph_k\|\leq C\|h_k'\|\cdot\|h_k\|\leq K\quad\forall\ k\in\mathbb{N}$, unde $K>0$ este o constantă ce depinde numai de $(u_n)_n$. Deci

(4.3) $\quad \sup_k\sum_{n=1}|u_n'(h_k)h_k'(u_n)|\leq M.$

Din (4.2) şi (4.3) rezultă imediat că există un $\ell\in\mathbb{N}$ cu card $\pi^{-1}(\{k\})\leq\ell\ \forall\ k\in\mathbb{N}$; deci putem descompune pe $\mathbb{N}$ într-o reuniune finită şi disjunctă $B_1\cup\ldots\cup B_\ell$ de subşiruri astfel încît $\pi|B_j$ să fie injectivă pentru orice $1\leq j\leq\ell$.

Pentru a demonstra teorema este suficient să arătăm că $\{u_n;\ n\in B_i\}$ este echivalent cu $(h_{\pi(n)})_{n\in B_i}$ $1\leq i\leq\ell$. Notăm cu $A_i=\pi(B_i)$ pentru $i\leq\ell$ fixat. Aplicînd propoziţia 4.1 şirului

$(u_n)_{n\in B_i}$ şi ţinînd cont de relaţia (4.2), rezultă că $(u_n)_{n\in B_i}$ este echivalent cu $(h^{*}_{\pi(n)}(u_n)h_{\pi(n)})_{n\in B_i}$. Deoarece şirurile $(u_n)_n$ şi $(h_{\pi(n)})_n$ sînt normalizate şi necondiţionate, atunci $(u_n)_{n\in B_i}$ este echivalent cu $(h_{\pi(n)})_{n\in B_i}$. ■

Corolarul 4.3 Fie $0<p\leq 1$. Atunci subspaţiile complementate ale lui h_p, generate de o bază necondiţionată şi inesenţială, sînt izomorfe cu subspaţiile generate de subşiruri ale bazei Haar discrete în h_p.

Demonstraţie Folosind notaţiile din demonstraţia propoziţiei 3.3 precum şi această demonstraţie, este imediat de arătat că baza canonică a lui $(\bigoplus_{i=1}^{\ell} h_1)$ este echivalentă cu baza Haar discretă a lui h_1. In cazul $0<p<1$, demonstraţia propoziţiei 3.3 se aplică, dacă arătăm că baza canonică a lui $[t_{2^i-1}]_{i=1}^{\infty}\oplus[t_i]_{i\in\mathcal{B}_1}$ este echivalentă cu baza canonică a lui ℓ_p. Dar $\|\sum_{i=1}^{n}a_i h_{2^i-1}\|^p_{h_p}\leq$ $\leq\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p=\|\sum_{i=1}^{n}a_i e_i\|^p_{\ell_p}$ şi $\|\sum_{i=1}^{n}a_i h_{2^i-1}\|^p_{h_p}\geq$ (calcul direct) $\geq\frac{1}{2}\|\sum_{i=1}^{n}a_i e_i\|^p_{\ell_p}$ oricare ar fi a_i reali. Pe de altă parte, din demonstraţia propoziţiei 3.3 este clar că $[t_i]_{i\in\mathcal{B}_1}=(\sum_{n=1}^{\infty}X_n)_{\ell_p}$ unde X_n este izometric cu $[h_{2^i-1}]_{i=1}^{n}$ $\forall n$; baza canonică a lui $X_n=[c_{0,2^{n-1}}, c_{1,2^{n-2}},\ldots, c_{n-1,1}]$ fiind dusă prin izometria de mai sus în $(h_{2^i-1})_{i=1}^{n}$. Deci $(t_i)_{i\in\mathcal{B}_1}$ este dusă printr-un izomorfism în baza canonică a lui $(\sum_{n=1}^{\infty}\ell_p(n))_{\ell_p}=\ell_p$. ■

Din teorema 3.1 şi corolarul 4.3 rezultă o îmbunătăţire sensibilă a teoremei 4.1:

Corolarul 4.4 Orice subspațiu complementat Y în h_1 avînd o bază necondiționată și inesențială $(u_n)_n$ este izomorf cu ℓ_1 sau cu h_1.

Remarca 3.7 ne arată că, în cazul $(u_n)_n$ esențial, corolarul de mai sus nu este adevărat.

Vom arăta în continuare că, dacă $0<p<1$, atunci subspațiul $(\sum_{n=1}^{\infty}\ell_2(n))_{\ell_p}$ nu este complementat în h_p, în contrast cu cazul $p=1$.

Pentru aceasta vom folosi tehnica dezvoltată de N.J. Kalton în [3] - teorema 6.5 .

Lema 4.5 Fie $0<p\leq 1$. Atunci normele $\|\sum_i a_i h_i\|_{h_p}$ și $\max_{\varepsilon_i=\pm 1}\|\sum_i a_i\varepsilon_i h_i\|_{\ell_p}$ sînt echivalente.

Demonstrație Din inegalitatea Burkholder-Gundy-Davis aplicată spațiului $L_{p(\mu\times)}$ rezultă existența unei constante $C>0$ astfel că

$$\max_{\varepsilon_i=\pm 1}\|\sum_i a_i\varepsilon_i h_i\|_{\ell_p}\leq C\|\sum_i a_i h_i\|_{h_p}.$$

Reciproc $\max_{\varepsilon_i=\pm 1}\|\sum_i a_i\varepsilon_i h_i\|_{\ell_p}\geq \int_0^1\|\sum_i a_i r_i(t)h_i\|_{\ell_p}dt\geq$

$$\geq C\|(\sum_i a_i^2 h_i^2)^{\frac{1}{2}}\|_{\ell_p}=C\|\sum_i a_i h_i\|_{h_p}. \blacksquare$$

Propoziția 4.6 Fie $0<p\leq 1$ și $(u_n)_n$ un șir bazic normalizat complementat și esențial în h_p. Atunci $(u_n)_n$ are un subșir echivalent cu baza canonică a lui ℓ_p și cu un șir bazic de blocuri ale sistemului Haar discret complementat în h_p.

Demonstrație Deoarece $(u_n)_n$ este șir esențial, putem găsi șirul $(m_n')_n$ cu $m_1'=0$ și astfel încît

(4.4) $\quad \lim_{n\to\infty}\max_i |u^*_{m_n'}(h_i)h_i^*(u_{m_n'})|=0$

Punem acum $p_0=0$. Putem găsi un $p_1\in N$ cu

$\sum_{i=p_0+1}^{p_1} u_1'(h_i)h_i'(u_1) \geq \frac{1}{2}$. (Este suficient să observăm că $u_1'(u_1)=1$).

Din (4.4) putem găsi m_2' cu $\sum_{i=1}^{p_1} |u_{m_2'}'(h_i)h_i'(u_{m_2'})| \leq 2^{-p_1}$.

Punînd $m_2'=m_2$, avem, pentru un $p_2>p_1$, că

$$\sum_{i=p_1+1}^{p_2} u_{m_2}'(h_i)h_i'(u_{m_2}) = \theta_2 \geq \frac{1}{2}.$$

Procedînd la fel în continuare, construim şirurile $(p_i)_{i=0}^{\infty}$ cu $p_0=0$ şi $(m_i)_{i=1}^{\infty}$ cu $m_1=1$, astfel încît

$$(4.5)\qquad \sum_{i=p_{n-1}+1}^{p_n} u_{m_n}'(h_i)h_i'(u_{m_n}) = \theta_n \geq \frac{1}{2}.$$

Din propoziţia 4.1 şi din (4.5) rezultă că $(u_{m_n})_n$ este echivalent cu un şir bazic de blocuri (v_n, v_n') complementat, unde

$$v_n = \sum_{i=p_{n-1}+1}^{p_n} h_i'(u_{m_n})h_i = \sum_{i=p_{n-1}+1}^{p_n} a_ih_i$$

$$v_n' = \theta_n^{-1} \sum_{i=p_{n-1}+1}^{p_n} u_{m_n}'(h_i)h_i' = \sum_{i=p_{n-1}+1}^{p_n} b_ih_i'.$$

Deoarece $\|v_n\|_{h_p} = \|\sum_{i=p_{n-1}+1}^{p_n} a_ih_i\|_{h_p} \sim$ (din lema 4.5) $\sim \max_{\varepsilon_i=\pm 1} \|\sum_{i=p_{n-1}+1}^{p_n} a_i\varepsilon_ih_i\|_{\ell_p}$, rezultă că există $\varepsilon_i=\pm 1$ pentru $p_{n-1}<i\leq p_n$ $\forall$ n, astfel încît, notînd cu $w_n = \sum_{i=p_{n-1}+1}^{p_n} a_i\varepsilon_ih_i$, să avem $\|v_n\|_{h_p} \sim \|w_n\|_{\ell_p}$ (adică cele două norme satisfac o dublă inegalitate cu constante independente de n). Atunci $\|\sum_{i=1}^{k}\alpha_iu_{m_i}\|_{h_p} \sim \|\sum_{i=1}^{k}\alpha_iv_i\|_{h_p} \sim$ (h_i fiind bază necondiţionată în h_p) $\sim \|\sum_{i=1}^{k}\alpha_iw_i\|_{h_p}$ pentru orice k. Deoarece $\infty > \sup_n \|v_n\|_{h_p} \geq \inf_n \|v_n\|_{h_p} > 0$, atunci $\infty > \sup_n \|w_n\|_{h_p} \geq \inf_n \|w_n\|_{h_p} > 0$, de unde raţionînd similar cu demonstrației propoziției 4.3 - [3] , obținem un subșir al lui $(w_n)_n$ notat tot cu $(w_n)_n$, astfel că $\|\sum_{i=1}^{k}\alpha_i w_i\|_{\ell_p} \sim \|\sum_{i=1}^{k}\alpha_i e_i\|_{\ell_p} = $ $=(\sum_{i=1}^{k}|\alpha_i|^p)^{1/p}$ pentru orice scalari α_i. Deci $(\sum_{i=1}^{k}|\alpha_i|^p)^{1/p}.A \geq$ $\geq \|\sum_i \alpha_i u_{n_i}\|_{h_p} \sim \|\sum_{i=1}^{k}\alpha_i w_i\|_{h_p} \geq C\|\sum_{i=1}^{k}\alpha_i w_i\|_{\ell_p} \sim (\sum_{i=1}^{k}|\alpha_i|^p)^{1/p}$, unde $A=$ $=\sup_i \|u_{n_i}\|_{h_p}$, ceea ce implică că $\|\sum_{i=1}^{k}\alpha_i u_{m_i}\|_{h_p} \sim \|\sum_{i=1}^{k}\alpha_i w_i\|_{h_p} \sim$ $\sim \|\sum_{i=1}^{k}\alpha_i w_i\|_{\ell_p} \sim (\sum_{i=1}^{k}|\alpha_i|^p)^{1/p}$ pentru orice scalari α_i. Deci propoziția 4.6 este demonstrată. ∎

<u>Corolarul 4.7</u> <u>Folosind notațiile și condițiile propoziției 4.6 pentru $0<p<1$, rezultă că nu putem avea șirurile crescătoare de numere naturale $(\ell(n))_{n=1}^{\infty}$ și $(p(n))_{n=1}^{\infty}$ astfel că</u>

$$\sup_n \sum_{i=p_{\ell(n)-1}+1}^{p_{\ell(n)}} |h_i'(u_{m_n})|^p \leq M < \infty \tag{4.6}$$

<u>Demonstrație</u> Din alegerea lui $(a_i)_i$ și $(b_i)_i$ făcute în propoziția 4.6 avem relațiile

$$\sum_{i=p_{n-1}+1}^{p_n} a_i b_i = 1 \text{ și } \beta_n = \max_{p_{n-1}<i\leq p_n} |a_i b_i| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \tag{4.7}$$

iar $v_n = \sum_{i=p_{n-1}+1}^{p_n} a_i h_i$, $v_n' = \sum_{i=p_{n-1}+1}^{p_n} b_i h_i'$ definesc un șir bazic de blocuri complementat în h_p și echivalent cu $(u_{m_n})_n$. Vom arăta acum că, dacă relația (4.6) este îndeplinită, atunci $[v_i]_{h_p} \approx \ell_1$.

Fie, mai întîi, $0\leq\alpha_n\leq 1$ cu $\sum_n \alpha_n < \infty$. Este suficient să arătăm că $\sum_n \alpha_n^p < \infty$. Există un șir crescător $(m(n))_n$ cu:

$m(n)\alpha_n = t_1^{(n)} + \ldots + t_{m_n}^{(n)}$ $0 \leq t_i^{(n)} \leq 1$, unde $m(n)^{-1}\sum_{i=1}^{m(n)} |t_i^{(n)}|^p \leq \alpha_n + 2^{-n}$.

Alegem apoi un șir crescător $\ell(n)$ cu

$$\beta_{\ell(n)} \leq 2^{-m(n)} \qquad n=1,2,\ldots \tag{4.8}$$

Atunci mulţimea $\{p_{\ell(n)-1}+1,\dots,p_{\ell(n)}\}$ poate fi descompusă în $m(n)$ submulţimi $A_1^n,\dots,A_{m(n)}^n$ cu

$$(4.9)\qquad \Big|\sum_{i\in A_k^n} a_i b_i - m(n)^{-1}\Big| \le 2^{-m(n)} \qquad k=1,\dots,m(n)$$

ceea ce rezultă din relaţiile (4.7) şi (4.8).

Fie $v_k^{(n)} = \sum_{i\in A_k^n} a_i h_i$, $k=1,\dots,m(n)$ şi, pentru orice permutare σ a mulţimii $\{1,\dots,m(n)\}$, fie $x_\sigma^{(n)} = \sum_{k=1}^{m(n)} t_{\sigma(k)}^{(n)} v_k^{(n)}$.

Atunci $\|x_\sigma^{(n)}\|_{h_p}^p \sim \|(\sum_{k=1}^{m(n)} |t_{\sigma(k)}^{(n)}|^2 \sum_{i\in A_k^n} a_i^2 h_i^2)^{\frac{1}{2}}\|_{\ell_p}^p =$

$= \|(\sum_{k=1}^{m(n)} \sum_{i\in A_k^n} |t_{\sigma(k)}^{(n)}|^2 a_i^2 h_i^2)^{\frac{1}{2}}\|_{\ell_p}^p$. Deci $\sum_\sigma \|x_\sigma^{(n)}\|_{h_p}^p \sim$

$\sim \sum_\sigma \sum_{j=1}^\infty (\sum_{k=1}^{m(n)} \sum_{i\in A_k^n} |t_{\sigma(k)}^{(n)}|^2 a_i^2 h_i^2(j))^{p/2} \le$

$\le \sum_{j=1}^\infty \sum_\sigma (\sum_{k=1}^{m(n)} \sum_{i\in A_k^n} |t_{\sigma(k)}^{(n)}|^p a_i^p [h_i(j)]^p) =$ (procedînd ca în [3] - pag. 273) $= (m(n)-1)! \sum_{j=1}^\infty \sum_{i=p_{\ell(n)-1}+1}^{p_{\ell(n)}} \sum_{k=1}^{m(n)} |t_k^{(n)}|^p a_i^p (h_i(j))^p$.

De unde există τ cu $\|x_\tau^{(n)}\|_{h_p}^p \le m(n)^{-1} \sum_{j=1}^\infty \sum_{i=p_{\ell(n)-1}+1}^{p_{\ell(n)}} \sum_{k=1}^{m(n)} |t_k^{(n)}|^p a_i^p (h_i(j))^p$

$= m(n)^{-1} \sum_{k=1}^{m(n)} |t_k^{(n)}|^p \|v_{\ell(n)}\|^p$, unde $\|v_{\ell(n)}\|^p = \sum_{j=1}^\infty \sum_{i=p_{\ell(n)-1}+1}^{p_{\ell(n)}} a_i^p h_i(j)^p$

$\sum_{i=p_{\ell(n)-1}+1}^{p_{\ell(n)}} |h_i^!(u_{m_n})| \cdot \|h_i\|_{\ell_p}^p = \sum_{i=p_{\ell(n)-1}+1}^{p_{\ell(n)}} |h_i^!(u_{m_n})|^p \le$ (din relaţia (4.6)) $\le M$. Prin urmare $\|x_\tau^{(n)}\|_{h_p}^p \le M m(n)^{-1} \sum_{k=1}^{m(n)} |t_k^{(n)}|^p \le$

$\le M(\alpha_n + 2^{-n})$. Punînd $y_n = x_\tau^{(n)}$, rezultă că $\sum_n y_n$ converge în h_p.

Dacă $P: h_p \longrightarrow [v_n]_n$ este o proiecţie continuă, avem din definiţia lui $v_i^!$ că $Py_n = \sum_i v_i^!(y_n) v_i$ $\forall$ n. deci $\sum_n Py_n$, care converge în h_p, este $\sum_n Py_n = \sum_n (\sum_i v_i^!(y_n) v_i)$.

Dar $v'_i(y_n) = \langle \sum_{j=p_{i-1}+1}^{p_i} b_j h'_j, \sum_{k=1}^{m(n)} t_{\sigma(k)}^{(n)} \sum_{j\in A_k^n} a_j h_j \rangle =$ (din ortogonalitatea lui $(h_i)_i$) $= 0$ cînd $i \neq \ell(n)$ și $v'_{\ell(n)}(y_n) =$

$$= \sum_{k=1}^{m(n)} t_{\sigma(k)}^{(n)} \sum_{j\in A_k^n} a_j b_j \geq \text{ (din (4.9))} \geq \tfrac{1}{2}\, m(n)^{-1} \sum_{k=1}^{m(n)} t_{\sigma(k)}^{(n)} = \text{(din}$$

alegerea lui $t_i^{(n)}$) $= \frac{1}{2}\alpha_n$. Prin urmare $\|\sum_n P y_n\|_{h_p} = \|\sum_n v'_{\ell(n)}(y_n)\, v_{\ell(n)}\|_{h_p}$

$\geq \frac{1}{2} \|\sum_n \alpha_n v_{\ell(n)}\|_{h_p} \sim$ (din demonstrația propoziției 4.6) $\sim$

$\sim (\sum_n |\alpha_n|^p)^{1/p}$ și deci $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^p < \infty$, ceea ce este absurd, căci am ajunge la faptul că $\ell_1 \approx \ell_p$ pentru un $0<p<1$. ∎

<u>Corolarul 4.8</u> <u>Dacă</u> $0<p<1$, <u>atunci spațiul</u> $Y = (\sum_{n=1}^{\infty} \ell_2(n))_{\ell_p}$ <u>nu este izomorf cu un subspațiu complementat în</u> h_p.

<u>Demonstrație</u> Intr-adevăr atît condiția de esențialitate cît și (4.6) sînt îndeplinite de baza lui Y. Deci aplicăm corolarul 4.7. ∎

<u>Remarca 4.8</u> Corolarul 4.8 pare să justifice întrebarea: <u>Fie Y un subspațiu complementat cu bază necondiționată în</u> h_p, $0<p<1$. <u>Este Y izomorf cu</u> ℓ_p <u>sau cu</u> h_p?

Secția de matematică INCREST

București 79622 ROMANIA

BIBLIOGRAFIE

1 - J. Bourgain, P.G.Casazza, J. Lindenstrauss, L.Tzafriri:Banach spaces with a unique unconditional basis up to permutation, Memoirs AMS, 322 (1985).

2 - R.F. Gundy:Inégalités pour martingales à un et deux indices; L'espace H^p. în LNM 774, Springer Verlag, Berlin,1980.

3 - N.J. Kalton:Orlicz sequence spaces without local convexity, Math.Proc.Cambr.Phil.Soc. 81, 253-277(1977).

4 - S.G.Krein, Iu. Petunin,E.Semenov:Interpolation of linear operators (în limba rusă) Nauka, Moscow,1978.

5 - P.F.X.Müller:On subsequences of the Haar basis in $H^1(\delta)$ and isomorphism between H^1-spaces, Studia Math.85,73-90 (1987).

6 - N.Popa:Duals of dyadic Hardy spaces generated by a rearrangement invariant function space X, Rev.Roum.Math. Pures et Appl. 33, 769-779(1988).

7 - P. Wojtaszczyk: On projections in spaces of bounded analytic functions with applications, Studia Math. 65,147-173 (1979).

O INEGALITATE PENTRU MARTINGALE

ANTIPA ADRIAN (Bucureşti)

Se extinde inegalitatea Burkholder - Gundy - Davis, $C^{-1}\|f^*\|_p\le\|Sf\|_p\le C\|f^*\|_p$, $1\le p<\infty$, ([2]), pentru martingale $f=(f_1,f_2,\dots)$ din spaţii invariante la rearanjări pe [0,1]; sînt prezentate aplicaţii. Sf şi f^* sînt funcţiile pătratică şi maximală; q_X este indicele Boyd superior ([3]). Iată rezultatele:

Teorema 1. Pentru X spaţiu invariant la rearanjări pe [0,1], următoarele afirmaţii sînt echivalente:

(i) $q_X<\infty$

(ii) există constanta C astfel ca $C^{-1}\|f^*\|_X\le\|Sf\|_X\le C\|f^*\|_X$

pentru orice $f\in X$ şi orice şir crescător de σ - subalgebre în raport cu care sînt considerate martingalele.

Demonstraţia foloseşte teorema 2, care este forma duală a inegalităţii lui Doob obţinută în [1] şi ideile lui D. Burkholder din [2]:

Teorema 2. Pentru X spaţiu invariant la rearanjări pe [0,1], următoarele afirmaţii sînt echivalente:

(i) $q_X<\infty$

(ii) există constanta $C<\infty$ a.i. $\left\|\sum_n|E(f_n|F_n)|\right\|_X\le$

$\le C\left\|\sum_n|f_n|\right\|_X$, oricare ar fi $f_n\in X$ şi şirul de σ - subalgebre F_n.

Aplicaţii. (1) (generalizare a unui rezultat din [4])

Fie X spaţiu invariant la rearanjări pe [0,1], cu normă σ-continuă. Atunci, $H_X(\delta)=\{f\in L_1(0,1); Sf\in X\}$, cu norma $\|f\|_{H_X}=\|Sf\|_X$

este spaţiu Banach, cu sistemul Haar, $\{h_i\}$, bază 1-necondiţionată, ([4]),
(Dacă $q_X<\infty$ atunci $\|f\|_X\le\|f^*\|_X\le C\|Sf\|_X$. Rezultă

$$\left\|\sum_i\varepsilon_ia_ih_i\right\|_X\le C\left\|\left(\sum_i a_i^2h_i^2\right)^{1/2}\right\|_X,\ \text{pentru orice } \varepsilon_i=\pm1.$$

Pe de altă parte, folosind inegalitatea Hincin - Maurey ([3]), avem:

$$A_1\left\|\left(\sum_i a_i^2h_i^2\right)^{1/2}\right\|_X\le\int_0^1\left\|\sum_i r_i(t)a_ih_i\right\|_X\le\sup_{\varepsilon_i=\pm1}\left\|\sum_i\varepsilon_ia_ih_i\right\|_X,\ \text{deci}$$

$H_X(\delta)$ se identifică subspaţiului lui X format din funcţiile pentru care seria Haar converge necondiţionat.

(2)

Fie X un spaţiu invariant la rearanjări pe $I=[0,1]$, cu $q_X<\infty$. Atunci există o constantă $M<\infty$ a.i.

$$M^{-1}\left\|\left(\sum_i|x_i|^2\right)^{1/2}\right\|_X\le\left\|\sum_i r_i(t)\,x_i(s)\right\|_{X(I\times I)}\le M\left\|\left(\sum_i|x_i|^2\right)^{1/2}\right\|_X,$$

oricare ar fi $\{x_i\}_{i=1}^{n}\subset X$, deci $X(l_2)$ este izomorf cu $Rad(X)$, spaţiul generat de $\{r_i \times x_i\}_i$ in $X(I\times I)$, r_i fiind funcţiile Rademacher.

Cum $H_X(\delta)$ este izomorf cu un subspaţiu al lui $X(l_2)$, rezultă că $H_X(\delta)$ este izomorf cu un subspaţiu al lui X.

Demonstraţia dublei inegalităţi:

Pentru $f(s,t)=\sum_{i=1} r_i(s)\, x_i(t)$ şi σ- algebrele generate de $\left[\frac{i}{2^k}, \frac{i+1}{2^k}\right) \times B$, cu $0 \leq i \leq 2^k-1$ şi B boreliană in I, avem $Sf(s,t) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i(t)|^2\right)^{1/2}$ şi $f^*(s,t) = \sup_{1\leq k\leq n}\left|\sum_{i=1}^{k} r_i(s)\, x_i(t)\right|$.

Din teorema 1, rezultă $\|f^*\|_{X(I\times I)} \leq C\cdot \|Sf\|_{X(I\times I)}$, de unde inegalitatea dreaptă.

Pentru partea stingă, folosind inegalitatea lui Hincin, avem:

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} r_i(s)\, x_i(t)\right\|_{X(I\times I)} = \int_0^1 \left\|\sum_{i=1}^{n} x_i(s)\, r_i(t)\, r_i(u)\right\|_{X(I\times I)} du \geq$$

$$\geq \left\|\int_0^1 \left|\sum_{i=1}^{n} x_i(s)\, r_i(t)\, r_i(u)\right| du\right\|_{X(I\times I)} \geq A_1 \left\|\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i(s)|^2\right)^{1/2}\right\|_{X(I\times I)} =$$

$$= A_1 \left\|\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2}\right\|_X .$$

BIBLIOGRAFIE:

[1] Antipa A.: Doob's inequality for rearrangement invariant function spaces, Rev. R. Math. P. Appl. (va apare)

[2] Burkholder D.L. : Distribution function inequalities for martingales. Ann. Probability 1,19-42 ,1973

[3] Lindenstrauss L., Tzafriri L.: Classical Banach Spaces II,1979

[4] Popa N.: Duals of Hardy spaces generated by a rearrangement invariant function space X, Rev. R. Math. P. Appl. 33 ,1988.

Reprezentarea integrală a unor operatori $\mathcal{F}$- mărginiți

Irina Cătumeanu

Institutul de Petrol și Gaze
Ploiești

Fie X spațiu liniar reticulat și Y spațiu liniar complet reticulat, mulțimea $T \neq \emptyset$ și $\mathcal{T}$ o algebră de părți ale lui T. $R_o(X,Y)$ componenta operatorilor regulați și (o)- continui definiți pe X cu valori în Y.

Fie Z un subspațiu normal în $R_o(X,Y)$.

Fie $m: \mathcal{T} \to Z$ aditivă și avînd proprietatea că

$$\mathcal{E}(m) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} |m(A_i)| \,\Big|\, A_1, \ldots, A_n \ \mathcal{T}\text{- partiție a lui } T \right\}$$

este (o)- mărginită în Z.

Z este spațiu liniar complet reticulat, deci există

$$V_m = \sup \mathcal{E}(m)$$

Fie $f \in M(T,\mathcal{T},X)$ (unde $M(T,\mathcal{T},X)$) este spațiul funcțiilor (o)-mărginite definite pe T cu valori în X care au următoarea proprietate: $(\exists)\ (f_n)_{n \in N}$ un șir de funcții $\mathcal{T}$- simple așa încît f_n (o)-converge uniform pe T la f.

Definiția 1:

Dacă $f \in M(T, ,X)$ este $\mathcal{T}$- simplă atunci definim

$$\int_T f dm = \sum_{i=1}^{n} m(A_i)(x_i) \text{ unde } f(t) = \sum_{i=1}^{n} \chi_{A_i}(t) x_i \ \forall t \in T$$

Observația 1:

In acest caz $\left| \int_T f \, dm \right| \leq V_m(\max_i |x_i|)$

Propoziția 1:

Dacă $f \in M(T,\mathcal{T},X)$ și $(f_n)_{n \in N}$ este un șir aproximant pentru f, şirul ($\int_T f_n dm)_{n\in N}$ este (o)-convergent.

Definiţia 2:

Dacă $f\in M(T,\mathcal{T},X)$ şi $(f_n)_{n\in N}$ este şir aproximat pentru f, definim $\int_T f dm = (o)-\lim_T \int_T f_n dm$.

Fie în continuare, $\mathcal{F}$ componenta funcţionalelor regulate şi (o)- continue definite pe $M(T,\mathcal{T},X)$ şi $\widetilde{\mathcal{F}}$ spaţiul funcţionalelor regulate şi (o)- continue definite pe X prin:

$\widetilde{F}(x) = F(\chi_T x)$, $\forall\, x\in X$ şi $F\in\mathcal{F}$.

Vom considera în continuare $Z=\mathcal{M}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(X,Y)$, [4] . $\mathcal{M}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(X,Y)$ este spaţiu liniar complet reticulat [3] .

Teorema 1:

Dacă $U:M(T,\mathcal{T},X)\to Y$ este liniar şi $\mathcal{F}$-mărginit, atunci U se poate reprezenta sub forma

$$U(f) = \int_T f\, dm$$

Bibliografie:

[1] Romulus Cristescu : " Spaţii liniare ordonate şi operatori liniari" - Ed. Academiei RSR, Bucureşti,1970.

[2] Romulus Cristescu : " Clase de operatori pe spaţii ordonate" în "Structuri de ordine în Analiza funcţională" vol I, Ed. Academiei RSR, Bucureşti, 1986.

[3] Irina Cătuneanu : " $\mathcal{P}$- bunded operators and $\mathcal{F}$- bunded operators" în Analele Univ. Bucureşti, 1987.

[4] Irina Cătuneanu : " Asupra operatorilor $\mathcal{F}$- mărginiţi şi operatorilor ($\tilde{\sigma}$)- continui" în "Spaţii liniare ordonate topologice", Univ. Bucureşti,Nr.8/1987.

PRELUNGIREA UNOR OPERATORI LINIARI SI POZITIVI

Rodica-Mihaela Dăneţ

În această lucrare, continuînd studiul problematicii de prelungire a unor operatori liniari şi pozitivi, studiu dezvoltat în [1], dăm un rezultat ce generalizează o teoremă a lui Z.Lipecki ([2,Th.pag.231]). Acest rezultat este următorul :

TEOREMA 1. Fie $\mathcal{X}$ un spaţiu liniar reticulat, $\mathcal{Y}$ un spaţiu liniar complet reticulat, $G\subseteq\mathcal{X}$ un subspaţiu liniar reticulat, $x_0\in\mathcal{X}\setminus G$ iar $T: G\longrightarrow\mathcal{Y}$ un operator liniar şi pozitiv. Fie de asemenea $P:\mathcal{X}\longrightarrow\mathcal{Y}$ un operator astfel încît : 1) P sublinear; 2) P izoton; 3) $P(v)=T(v)$, $(\forall)$ $v\in G$; 4) $P(x+v)=P(x)+T(v)$, $(\forall)$ $x\in\mathcal{X}$ şi $v\in G$; 5) $P(x_1\vee x_2) = P(x_1)\vee P(x_2)$, $(\forall)$ $x_1,x_2\in\mathcal{X}$. Atunci :

a) există S o unică prelungire liniară şi pozitivă a lui T la spaţiul liniar reticulat generat de $G\cup\{x_0\}$, a.î.

$S(\bigvee_{1\le i\le n}(v_i+\alpha_i x_0)) = P(\bigvee_{1\le i\le n}(v_i+\alpha_i x_0))$, $(\forall)$ $(v_i)_{i=1}^n\subseteq G$ şi $(\alpha_i)_{i=1}^n\subset\mathbb{R}$;

b) dacă în plus T este laticial, atunci rezultă că şi S este de asemenea laticial.

În demonstraţia teoremei de mai sus am folosit următoarele leme :

LEMA 2.([2]) Dacă $V\subseteq\mathcal{X}$ este un clin, atunci :

a) $V-V$ este un subspaţiu al lui $\mathcal{X}$;

b) $V-V$ este un subspaţiu liniar reticulat al lui $\mathcal{X}$, în ipoteza suplimentară că V este închis la luarea supremurilor finite.

LEMA 3.(ce generalizează [2, P.pag.230]) Dacă în plus faţă de lema 2, G este un subspaţiu liniar reticulat al lui $\mathcal{X}$ a.î. $G\subseteq V$ iar $T: G\longrightarrow\mathcal{Y}$ este un operator liniar şi pozitiv şi $P:\mathcal{X}\longrightarrow\mathcal{Y}$ are proprietăţile (1)-(4) din teorema 1, atunci :

a) următoarele afirmaţii sînt echivalente

(i) există o unică prelungire liniară şi pozitivă S a lui T la $V-V$ a.î. $S(w)=P(w)$, $(\forall)$ $w\in V$,

(ii) P este aditiv pe V ;

b) în ipoteza suplimentară că V este închis la luarea supremurilor finite iar P are proprietatea (5) din teorema 1, rezultă că S este un operator laticial .

Ca o consecinţă a teoremei 1 se obţine un cunoscut rezultat de prelungire pentru operatori laticiali, rezultat care în literatura de specialitate a fost demonstrat cu tehnici mai complicate, tocmai pentru că nu se putea aplica teorema Hahn-Banach. Același rezultat decurge și din [2, Th.pag.231] .

COROLAR 4. Dacă $G \subseteq \mathcal{X}$ este un subspațiu liniar reticulat și majorant, iar $T : G \longrightarrow \mathcal{Y}$ este un operator laticial, atunci el poate fi prelungit la întreg spațiul $\mathcal{X}$ cu păstrarea laticialității.

BIBLIOGRAFIE

1. R.Dăneț. Asupra unor clase de operatori liniari pe spații ordonate. Teză, Univ. Buc.,1987.
2. Z.Lipecki. Extension of vector-lattce homomorphisms revisited. Proceedings A 88(2), 1985

Institutul de Construcții București
Bd.Lacul Tei,nr. 124.

FUNCTII CONVEXE PE LATICI BANACH

M. GAVRILĂ

Institutul de Construcţii Bucureşti

In această lucrare, E reprezintă o latice Banach de dim ≥ 2 iar f o funcţie definită pe E cu valori reale. O funcţie f se numeşte <u>monoton simetrică</u> dacă pentru orice x,y,y' din E cu $|y| \leq |y'|$ atunci $f(x+y) + f(x-y) \leq f(x+y') + f(x-y')$, iar f se numeşte <u>ortogonal aditivă</u> dacă pentru orice x,y din E cu $x \perp y$ ($|x| \wedge |y| = 0$) avem $f(x+y) = f(x) + f(y)$

In [2] (Propoziţia 2) am arătat următorul rezultat :

<u>PROPOZITIA 1</u> . Fie f continuă şi monoton simetrică atunci f este convexă şi translaţia $g_x : E \longrightarrow R$ definită prin $g_x(y) = f(x+y) - f(x)$ este ortogonal aditivă.

Scopul prezentei lucrări este de a prezenta reciproca acestui rezultat.

O reciprocă a propoziţiei 1, în cazul în care E este latice σ - completă cu proprietatea de a fi relativ uniform completă (dacă pentru orice x din E_+, idealul E_x cu norma $\|y\| = \inf \{\lambda > 0;\ |y| \leq \lambda x\}$ (y din E_x) este o latice Banach) şi cînd în loc de continuitate am luat ρ - continuitate ($x_n \xrightarrow{\rho} x$ implică $f(x_n) \longrightarrow f(x)$), a fost dată în [2] (teorema 5).

<u>TEOREMA 2</u>. Fie f continuă, convexă, ortogonal aditivă, $f(o) = 0$ şi pentru orice x din E translaţia $g_x : E \longrightarrow R$ este ortogonal aditivă. Atunci f este uniform continuă pe orice (θ) - interval $[-z, z]$, $z \geq 0$.

<u>PROPOZITIA 3</u>. Fie K un spaţiu compact Hansdorff arbitrar şi $f : C(K) \longrightarrow R$ în ipotezele teoremei 1. Atunci pentru orice x_1, x_2 din $C(K)$ cu $|x_1| < |x_2|$ avem $f(x_1) + f(-x_1) \leq f(x_2) + f(-x_2)$

<u>COROLAR 4.</u> In cazul $E = C(K)$ este adevărată reciproca propoziţiei 1.

LEMA 5. Dacă f este ortogonal aditivă atunci pentru orice x,y din E cu $|x| = |y|$ avem

$$f(x) + f(-x) = f(|x|) + f(-|x|) = f(y) + f(-y)$$

TEOREMA 6. Fie f continuă.

Dacă f este convexă şi pentru orice x din E, translaţia g_x este ortogonal aditivă atunci f este monoton simetrică.

Demonstraţie. Teorema este demonstrată dacă se arată că $g_x(y) + g_x(-y) \leq g_x(y') + g_x(-y')$ pentru $|y| \leq |y'|$ şi x din E.

In virtutea lemei 5 este suficient să verificăm inegalitatea pentru x,y,y' din E cu $0 \leq y \leq y'$. Considerînd $E_{y'}$, cu teorema Krein - Kakutani există un spaţiu topologic compact K astfel în cît $E_{y'}$ este izomorf (ca spaţiu liniar ordonat normat) cu spaţiul $C(K)$. Identificînd $E_{y'}$ cu $C(K)$ prin acest izomorfism restricţia lui g_x la $E_{y'}$ considerată ca o aplicaţie a lui $C(K)$ în R satisface ipotezele Propoziţiei 3 şi astfel teorema este demonstartă.

BIBLIOGRAFIE

[1] . R. Cristescu - Strueturi de ordine în spaţii liniare normate, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, 1983.

[2] . M. Gavrilă - Funcţii monoton simetriee pe latici Banach, Seminarul ştiinţific "Spaţii liniare ordonate topologice", Univ.Buc. 9(1988).

[3] . H.H. Sohaefer - Banach Lattices and Positive Operators, Springer - Verlag, New York, Heidelberg, Berlin 1974.

[4] . K. Sundaressan - Convex Functions on Banach Lattices, Contemporany Mathematiches, vol 54 (1986).

OPERATORI CONVECŞI MARGINIŢI INFERIOR

Octav Olteanu

Catedra de Matematici I, I.P.B.

Se enunţă o proprietate de bază a unor operatori convecşi pe mulţimi mărginite, care conduce la proprietatea de mărginire a unor mulţimi convexe de tip intergrafic.

TEORMEA 1. Fie $B \subset R^n$ o submulţime convexă şi mărginită, Y un spaţiu liniar complet reticulat, $P : B \rightarrow Y$ un operator convex. Atunci P este mărginit inferior pe B. Reciproc: dacă B este o submulţime convexă a unui spaţiu vectorial real oarecare, a.î. orice funcţională convexă pe B este mărginită inferior, atunci B este inclusă într-un subspaţiu finit dimensional şi este mărginită.

TEOREMA 2. Fie X un spaţiu vectorial topologic, real, $B \subset X$ o submulţime convexă, mărginită, a.î. $\mathring{B} \neq \emptyset$. Fie Y un s.l.c.r. cu unitate tare şi $P : B \rightarrow Y$ un operator convex continuu într-un punct $b \in \mathring{B}$. Atunci P este mărginit inferior pe B. Reciproc: dacă X este local convex separat şi B X este convexă a.î. orice funcţională convexă continuă pe B este mărginită inferior, atunci B este mărginită în X.

CONSECINTA. Fie X, B, Y ca în teorema 2. Fie $Q : B \rightarrow Y$ un operator concav, continuu într-un punct $b_1 \in \mathring{B}$, a.î. $P(x) \leq Q(x)$ $(\forall)$ $x \in B$. Atunci mulţimea intergrafic :

$$M = \{(x,y) : x \in B, \ P(x) \leq y \leq Q(x)\}$$

este mărginită în $X \times Y$, unde Y este înzestrat cu norma definită de unitatea tare.

BIBLIOGRAFIE

[1] R.CRISTESCU, Spaţii liniare ortonormate şi operatori liniari. Acad. R.S.R., Bucureşti, 1970.

[2] A.GROTHENDIECK, Espaces vectoriels topologiques, 2-ème éd. Soc.Mat. de Sao Maulo, Sao Paulo, 1958.

[3] O.OLTEANU, Sur les functiones convexes définies sur des ensembles convexes bornés de R^n, C.R.Acad.Sc. Paris, 290 (1980), 837-838.

[4] O.OLTEANU, Théorèmes de prolongement d'operateurs linéaires, Rev. Roumaine Math. Pures et Appl. tome XXVIII, No.10 (1983), 953-983.

[5] H.SCHAEFER, Topological Vector Spaces, Mac Millan, New York, 1966.

TOPOLOGIA (O)-MARGINIRII IN SPATII CU MULTIMI AXIALE

Alexandru Petcu

Institutul de Petrol şi Gaze-Ploieşti

Vom pune în evidenţă unele proprietăţi ale topologiei (o)-mărginirii în spaţii cu mulţimi axiale.

Fie X un spaţiu liniar ordonat. O mulţime E de elemente pozitive din X se numeşte <u>mulţime axială</u> dacă pentru orice x din X există λ în R şi e în E aşa încît $x \leqslant \lambda e$.

Pe un acelaşi spaţiu X pot coexista mai multe mulţimi axiale. Fiecărei mulţimi axiale E i se asociază o topologie pe X care însă nu coincid neapărat. Topologia τ_E se defineşte cu seminorma Minkowski

$p_E(x) = \inf\{\lambda > o \mid x \in \lambda S_E\}$ unde $S_E = \bigcup_{e\in E} [-e,e]$.

Fie X un spaţiu liniar dirijat avînd mulţimea axială E şi $X_e = Sp[-e,e]$. Evident e este element axial în Xe şi $X = \bigcup_{e\in E} X_e$. Notăm şi θ_e topologia (o)-mărginirii pe X respectiv cu θ pe Xe. Dacă presupunem în plus că X este cvasiarhimedian, atunci θ_e este topologie de spaţiu normat, local plină şi funcţionala lui Minkowski $p_e(x) = \inf\{\lambda > o \mid -\lambda e \leqslant x \leqslant \lambda e\}$ este o normă pe X_e.

Este cunoscut următorul rezultat ([1], pag.184, prop.3): dacă X este spaţiu liniar dirijat cvasiarhimedian avînd mulţimea axială E, atunci topologia θ pe X este limita inductivă a topologiilor θ_e pe X_e.

Intrucît θ este unică pe X iar pe X se pot considera diverse mulţimi axiale, se poate pune problema determinării unei mulţimi axiale pe X faţă de care limita inductivă să fie <u>strictă</u>. Cu alte cuvinte se pune problema ca mulţimea axială E să aibă o astfel de proprietate încît pentru e_1, $e_2 \in E$ cu $e_1 < e_2 \Leftrightarrow X_{e_1} \subset X_{e_2}$ să rezulte $\theta_{e_2}|_{X_{e_1}} = \theta_{e_1}$.

O condiţie suficientă este dată de următoarea teoremă.

<u>TEOREMA 1.</u> Dacă X este un spaţiu liniar dirijat, cvasiarhimedian, E o mulţime axială a sa avînd proprietatea

$$[-e_2, e_2] \cap X_{e_1} = [-e_1, e_1], \ \forall e_1, e_2 \in E \text{ cu } e_1 < e_2 \qquad (1)$$

atunci Θ este limita inductivă strictă a topologiilor Θ_e pe X_e.

Condiția (1) devine și necesară în cazul spațiilor liniare reticulate. Mai precis:

TEOREMA 2. Fie X un spațiu liniar reticulat, arhimedian și $\{e_n\}_{n\in N}$ o mulțime axială numărabilă pe X. Topologia (o)-mărginirii Θ pe X este limita inductivă striată a topologiilor Θ_e pe X_e dacă și numai dacă X conține o mulțime axială $\{e'_n\}_{n\in N}$ avînd proprietatea (1) și fiecare e'_n este element axial în $X_n = Sp[-e_n, e_n]$.

TEOREMA 3. Dacă X este un spațiu liniar dirijat arhimedian și $E=\{e_n\}_{n\in N}$ este o mulțime axială a sa cu proprietatea (1), iar X nu conține elemente axiale, atunci $\mathcal{T}_E < \Theta$.

TEOREMA 4. Fie X un spațiu liniar reticulat. Următoarele afirmații sînt echivalente:

(i) X conține o mulțime axială numărabilă cu proprietatea (1)

(ii) X conține o mulțime axială $E=\{e_n\}_{n\in N}$ cu proprietatea:

$$(e_{n+1}-e_n)\wedge e_n = 0 \qquad \forall n\in N \tag{2}$$

(iii) X conține o mulțime $B=\{v_n\}_{n\in N}$ de elemente strict pozitive mutual disjuncte așa încît $E'=\{e'_n\}_{n\in N}$ cu $e'_n=\sum_{i=1}^{n} v_i$ este o mulțime axială în X.

TEOREMA 5. Dacă X este un spațiu liniar dirijat, arhimedian avînd mulțimea axială $\{e_n\}_{n\in N}$ cu proprietatea (1), atunci următoarele afirmații sînt echivalente:

a) X este secvențial (Θ)-complet

b) X are proprietatea (O)-sumabilității a lui Schaefer.

BIBLIOGRAFIE

1 . Cristescu R."Spații liniare topologice".Ed.Acad.RSR,București,1974.

2 . Schaefer H.H."Topological vector spaces"Macmillan,New-York,1966.

3 . Petcu A. "Spații ordonate normate axiale". St.cerc.mat.,33,1,131-140 (1981).

APROXIMARE CU FUNCTII COMPLET POZITIVE

George POPESCU

Teoremele de aproximare date de Korovkin pentru operatori pozitivi pe $C(X)$ cu X compact, pot fi generalizate pentru $\mathcal{B}(H)$, (operatorii mărginiți pe H spatiu Hilbert), iar analogul adecvat al operatorilor pozitivi sint funcțiile complet pozitive pe $\mathcal{B}(H)$.

Definitie Fie A,B C^*-algebre, aplicația liniară $\phi: A \to B$ este complet pozitivă dacă pentru orice matrice pozitivă (a_{ij}), $a_{ij} \in A$ avem $(\phi(a_{ij}))$ pozitivă.

Definitie O submulțime $\mathcal{S} \subset \mathcal{B}(H)$ se numește "WKS" (weak Korovkin set) dacă pentru orice șir de funcții complet pozitive $(\phi_\alpha)_\alpha$ cu $\phi_\alpha(I) \leq I$ convergența $\phi_\alpha \xrightarrow{wo} id$ pe $\mathcal{S}$ implică convergența $\phi_\alpha \xrightarrow{wo} id$ pe $\mathcal{B}(H)$.

$\mathcal{S}$ este ireductibilă dacă operatorii din $\mathcal{S}$ și $\mathcal{S}^*$ nu au subspații invariante.

Teoremă Fie $\mathcal{S}$ ireductibilă $\subset \mathcal{B}(H)$ care conține I, iar C^*-algebra generată de $\mathcal{S}$: $C^*(\mathcal{S})$ conține un operator compact nenul. $\mathcal{S}$ este WKS dacă și numai dacă $id|_{\mathcal{S}}$ se extinde unic complet pozitiv la $C^*(\mathcal{S})$.

Corolar Dacă $\mathcal{S}$ este ireductibilă, conține I și există $T \in span\{\mathcal{S}+\mathcal{S}^*\}$ și K operator compact așa incit $\|T-K\| < \|T\|$ atunci $\mathcal{S}$ este WKS.

Exemple $S \in \mathcal{B}(H)$ operator compact ireductibil, atunci $\{I,S\}$ este WKS. Operatorul Volterra $V f(x) = \int_0^x f(t)dt$, $f \in L^2([0,1])$ este compact și ireductibil.

Fie operatorii $M f(x) = xf(x)$, $T f(x) = x\int_0^1 f(t)dt$

$\mathcal{S} = \{I,M,T\}$ este ireductibilă, iar T compact, deci este WKS.

Definitie Fie A,B C^*-algebre. $\phi: A \to B$ o aplicație $*$-liniară și $\phi(a^*a) \leq \phi(a^*)\phi(a)$, ϕ este o funcție Schwarz.

Teoremă Fie $E \subset A$, A C^*-algebra și $F = E \cup \{a^*a+aa^* \mid a \in E\}$ $\phi: C^*(E) \to B$ un $*$-morfism. Atunci $\phi|_F$ se prelungește unic la o funcție Schwarz pe $C^*(E)$.

Corolar Dacă $\mathcal{S} \subset \mathcal{B}(H)$ este ireductibilă, conține I, iar $C^*(\mathcal{S})$ conține un operator compact, atunci

i) $\mathcal{S} \cup \{S^*S + SS^* \mid S \in \mathcal{S}\}$ este WKS.

ii) pentru $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$, $\mathcal{S} \cup \{\sum_{i=1}^{n} S_i^*S_i + S_i S_i^*\}$ este WKS.

Exemple Fie S operator ireductibil și aproape normal, adică $S^*S - SS^*$ este compact, atunci $\{I, S, S^*S + SS^*\}$ este WKS.

Iată o clasă de operatori aproape normali. H spațiu Hilbert separabil, $e_0, e_1, \dots$ bază ortonormată, S sift unilateral cu ponderi $Se_n = \alpha_n e_{n+1}$ și $|\alpha_n| \leq \alpha < \infty$, atunci S este ireductibil și $S^*S - SS^*$ (aproape) normal dacă $|\alpha_n| - |\alpha_{n-1}| \to 0$.

Dacă $\limsup |\alpha_n| < \sup |\alpha_n|$, atunci $\{I, S\}$ este WKS. Dacă avem egalitate, atunci $\{I, S, S^2, \dots\}$ nu este WKS, dar $\{I, S, S^*S + SS^*\}$ da.

BIBLIOGRAFIE

1. W.ARVESON, Subalgebras of C*-algebras, Acta Math. 123(1969) 141-224
2. W.ARVESON, Subalgebras of C*-algebras II, Acta Math. 128(1972) 271-308
3. W.ARVESON, "An Invitation to C*-Algebras", Springer-Verlag, New York, 1976
4. B.V.LIMAYE and M.N.N.NAMBOODIRI, Weak Korovkin Approximation by Completely Positive Linear Maps on $\mathcal{B}(H)$, J.Approx.Theory 42(1984) 201-211
5. S.TAKAHASHI, Korovkin theorem for C*-algebras, J.Approx.Theory 27(1979) 197-202
6. M.TAKESAKI, "Theory of Operator Algebras I", Springer-Verlag, New York, 1979

CONURI SUPERNORMALE SI APLICATII

de

Vasile Postolică, Piatra Neamţ

Lucrarea conţine exemple sugestive de conuri supernormale şi rezultate de existenţă pentru optimele vectoriale în spaţii local convexe ordonate de astfel de conuri, care extind criteriile din [3], se bazează pe Teorema 2 din [1], dovedesc că supernormalitatea cuplată cu condiţii specifice impuse extensiilor sau secţiunilor conice ale mulţimilor nevide asigură existenţa punctelor eficiente în spaţii local convexe, permiţînd trecerea de la spaţii finit-dimensionale (optimele Pareto) la spaţii infinit-dimensionale. Se pune astfel în evidenţă o nouă cale (completitudinea şi mărginirea în raport cu conurile respective în locul compactităţii sau ipotezelor care solicită neviditatea interiorului conurilor) pentru studiul optimelor de tip Pareto.

Fie X un spaţiu local convex separat Hausdorff cu topologia indusă de o familie $\mathcal{P} = \{p_\alpha : \alpha \in I\}$ de seminorme, ordonat de un con convex propriu K şi dualul X', A o submulţime nevidă şi $\bar{x} \in A$. Peste tot în lucrare notăm cu $\emptyset$ mulţimea vidă.

Definitia 1. $\bar{x}$ se numeste punct eficient pentru multimea A în raport cu conul K, în notatie, $\bar{x} \in MIN_K(A)$, dacă $A \cap (\bar{x} - K) = \{\bar{x}\}$.

Definitia 2. [1]. K se numeste supernormal (nuclear) dacă pentru orice seminormă $p_\alpha \in \mathcal{P}$, există măcar o functională liniară şi continuă $f_\alpha \in X'$ astfel încît $p_\alpha(x) \leq f_\alpha(x)$ pentru orice $x \in K$.

Exemple.

1. Orice con generat de o mulţime nevidă, convexă, mărginită a cărei aderenţă nu conţine originea este supernormal.
2. Intr-un spaţiu liniar normat, un con convex este supernormal dacă şi numai dacă are o bază de tipul exemplului precedent.
3. Orice con local compact (slab local compact) este supernormal.
4. Intr-un spaţiu nuclear, un con convex este supernormal dacă şi numai dacă conul este normal.
5. Să considerăm spaţiul $L^p([a,b])$ $(p \geq 1)$ şi $K = \{x \in L^p([a,b]) : x(t) \geq 0 \text{ a.p.t.}\}$. Acest con este supernormal numai dacă p = 1, avînd ca bază mulţimea $B = \{x \in K : \int_a^b x(t)dt = 1\}$
6. In spaţiul $C([a,b],R)$ cu norma uzuală $\|x\| = \sup_{a \leq t \leq b} |x(t)|$ un con supernormal este $K = \{x \in C([a,b],R) : x \text{ concavă}, x(a) = x(b) = 0 \text{ şi } x(t) \geq 0, \forall t \in [a,b]\}$ cu baza mărginită $B = \{x \in K : x(t_0) = 1, t_0$ arbitrar fixat între a şi b$\}$.

Teorema 1. Fie $A \subseteq B \subseteq A + K$. Dacă conul K este supernormal şi mulţimea $B \cap (A_0 - K)$ este mărginită şi completă pentru o mulţime nevidă arbitrară $A_0 \subseteq A$, atunci $MIN_K(A) \neq \emptyset$.

Corolar 1. Dacă A este o mulţime nevidă mărginită şi închisă în X şi K este generat de o mulţime nevidă, convexă, mărginită şi completă care nu conţine originea în aderenţă, atunci $MIN_K(A) \neq \emptyset$ şi $A \subseteq MIN_K(A) + K$.

Definiţia 3. O mulţime nevidă $B \subset X$ este K - mărginită dacă există o mulţime mărginită $B_0 \subset X$ astfel încît $B \subseteq B_0 + K$ şi B se numeşte K - închisă dacă extensia conică în raport cu K, $B + K$ este închisă.

Proprietăţi ale mulţimilor conic - mărginite şi conic - închise în spaţii infinit - dimensionale sînt expuse în [2].

Teorema 2. Dacă X este cvasi - complet (orice mulţime nevidă, mărginită şi închisă este completă) şi K este închis şi supernormal, atunci pentru orice submulţime nevidă K - mărginită şi K - închisă A, $MIN_K(A) \neq \emptyset$ şi $A \subseteq MIN_K(A) + K$.

Corolar 2. Dacă X este cvasi - complet, K este închis şi supernormal şi $B \cap (A_0 - K)$ este mărginită şi închisă în raport cu K pentru măcar două submulţimi B şi A_0 cu $A \subseteq B \subseteq A + K$ şi $A_0 \subseteq A$, atunci $MIN_K(A) \neq \emptyset$.

B I B L I O G R A F I E

(Extras)

1. Isac G. - Sur l'existence de l'optimum de Pareto. Riv. Mat. Univ. Parma, 4,9,1983, 303 - 325.
2. Luc D.T. - Cone closedness and cone continuity. To appear in SIAM Journ.Optim.Control Theory.
3. Postolică V. - Existence conditions of efficient points for multifunctions with values in locally convex spaces. To appear in „Studii şi cercetări matematice", Ed. Academiei R.S.România, 1989.

P. Rozoveanu
I.M.F. Bucureşti

TEOREME DE SEPARARE IN SPATII ORDONATE

Fie X spatiu liniar ordonat, $A \subseteq X$ o submulţime a lui X.

Def1: Un punct $a \in A$ se numeste punct intern pentru A dacă $\forall x \in X, \exists \lambda \in R_+$ a.î:

$$a + \varepsilon \cdot x \in A, \ \forall \varepsilon \in R, \ 0 \leq \varepsilon \leq \lambda.$$

Notam cu $cor(A) = \{a \in A / a$ este p. intern ptr. $A\}$

Def2: Un punct a A se numeşte punct (f)-intern pentru A dacă:

i) a este punct intern pentru A

ii) $\forall x \geq a, \exists \lambda \in R_+$ a.î.

$$[a - \lambda(x-a), a + \lambda(x-a)] \subseteq A,$$

unde notaţia $[x,y]$ înseamnă $\{v \in X / x \leq v \leq y\}$

Def3: Un con C din spaţiul liniar real X se numeşte (ρ)-con dacă pentru orice şir $\{x_n\}_n \subseteq X$, descrescător la zero în raport cu ordinea asociată lui C, avem incluziunea:

$$cor(C) \subseteq \bigcup_{n \in N} (x_n + C)$$

Propoziţia 1 Fie X spaţiu liniar ordonat astfel că $cor(X_+) \neq \emptyset$. Sînt echivalente:

i) X_+ este (ρ)-con.

ii) Orice funcţională liniară h care separă două mulţimi A şi A', astfel că A are puncte (f)-interne este (o)-continuă.

Teorema 1 Fie X s.l.o. arhimedian, cu $cor(X_+) \neq \emptyset$ şi X_+ (ρ)-con. Dacă K1 şi K2 sînt submulţimi ale lui X, convexe, disjuncte şi (o)-secvenţial închise, iar K1 este (o)-secvenţial-compactă, atunci există o funcţională liniară şi (o)-continuă f şi există c şi ε -nr. reale, $\varepsilon > 0$ astfel că:

$$f_{/K2} \leq c - \varepsilon < c \leq f_{/K1}$$

Consecinţă: In condiţiile teoremei, dacă $A \subseteq X$ este convexă, atunci

punînd: $\bar{A}^{o} = \{x \in X / \exists a_n \in A$ a.î $a_n \xrightarrow{o} x\}$

şi $\bar{A}^{\sigma o} = \{x \in X / \forall f \in X_o^*, \exists a_n \in A$ a.î. $f(a_n) \xrightarrow{o} f(x)\}$

avem $X^{e} \subseteq X^{\sigma_e}$.

Propoziția 2. Fie X s.l.e. arhimedian cu cor$(X_+)\neq\emptyset$ și X_+ (ρ)-con.
Atunci:

i) $\forall$ $a,b\in X, a\leq b, \forall x\in X$, $x\notin[a,b]$, $\exists$ f-funcțională liniară (e)-continuă și pozitivă care separă tare pe x de $[a,b]$.

ii) Dacă $a,b,a',b'\in X$ a.î. $a\leq b$ și $a'\leq b'$ și dacă $e\notin[a-b',b-a']$, atunci există f-funcțională liniară și (e)-continuă și pozitivă care separă tare intervalele $[a,b]$ și $[a',b']$.

Ca aplicație se poate demonstra următoarea teoremă ergodică:

Teoremă 2 Fie X s.l.e. arhimedian, cu cor$(X_+)\neq\emptyset$ si X_+-(ρ)-con și fie $U:X\to X$ un operator liniar care satisface condiția:

$$0\leq x\Longrightarrow 0\leq U(x)\leq x\ , \qquad x\in X.$$

Notăm:

$$U_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}U^k(x)$$

Dacă $x_1\in X$ are proprietatea că $\{U_n(x_1)\}_{n\in N}$ are un punct x_e σ_e-aderent, atunci:

i) $U(x_e)=x_e$

ii) (e)-lim $U_n(x_1)=x_e$

Bibliografie:

R.Cristescu Structuri de ordine în spații liniare normate.

R.B.Holmes Geometric Functional Analysis and its Application, 975-Springer-Verlag.

Operatori o-derivabili Gateaux şi C-contracţii

Gh-Simion IPB

Fie X un spaţiu Banach înzestrat cu un con C care presupunem că este o mulţime închisă în topologie lui X şi că ordinea dată de C pe X este o ordine dirijată, adică X=C-C. Un astfel de spaţiu îl vom numi C-spaţiu. Prin Y vom nota un spaţiu Banach.

Definiţie Fie $f: X \longrightarrow Y$, $x_0 \in X$. Vom spune că f este o derivabil Gateaux în x_0 dacă există $f'_G(x_0): X \longrightarrow Y$ liniar şi continuu astfel încît oricare ar fi $s \in C$ să avem :

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0+ts)-f(x_0)}{t} = f'_G(x_0)(s).$$

Definiţie Fie X un C-spaţiu, $A \subset X$ mulţime închisă.

$\varphi : A \longrightarrow A$ se numeşte C- contracţie dacă :

1) Oricare ar fi $x \in A$, x şi $\varphi(x)$ sînt comparabile.
2) Există $\alpha \in (0,1)$ astfel încît oricare ar fi $x,y \in A$ comparabile să rezulte $\|\varphi(x) - \varphi(y)\| \leq \alpha \cdot \|x-y\|$.
3) φ este continuă.

Teoremă Fie X un C-spaţiu. Fie $A \subset X$ o mulţime închisă şi convexă. Fie $\varphi : A \longrightarrow A$ astfel încît:

1) Oricare ar fi $x \in A$, x şi $\varphi(x)$ sînt comparabile.
2) φ este continuă.
3) φ este o -derivabil Gateaux pe A.

Atunci următoarele afirmaţii sînt echivalente :

1) φ este o C-contracţie.
2) $\sup_{x \in A} \|\varphi'_G(x)\| = \alpha < 1$.

Teoremă Fie X un C-spaţiu, $A \subset X$ o mulţime închisă şi convexă. Fie $f: A \longrightarrow A$ astfel încît:

1) f este continuu.
2) f este derivabil o-Gateaux pe A.
3) $\sup_{x \in A} \|f'_G(x)\| = \alpha < 1$.
4) Oricare ar fi $x \in A$, x şi f(x) sînt comparabile.

Atunci f are cel puţin un punct fix. Dacă în plus x şi y sînt puncte fixe pentru f, comparabile, atunci x=y.

Acum vom da un exemplu de C-contracţie care nu este contracţie.

Fie $X = R^2$ cu norma euclidiană. $C = \{(x,y) \,/\, x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\}$.
$A = \{(x,y) \mid x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ x \geqslant y\}$.
Fie $\varphi : A \longrightarrow A$, $\varphi(z) = \dfrac{z}{|z|}$.

Se arată că φ este C-contracţie şi nu este contracţie.

Bibliografie

1. Romulus Cristescu, "Structuri de ordine în spaţii liniare normate". Ed.Stiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti,1983.
2. L.V.Kantorovici, G.P. Akilov "Analiză Funcţională". Ed.Stiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1986.

O APLICATIE A NORMELOR VECTORIALE IN ANALIZA NUMERICA

de

GEORGE TURCITU

Definiţie Fie E un spaţiu liniar real şi X o latice liniară reală. O funcţie $p : E \to X$ se numeşte normă vectorială, dacă are proprietăţile:

i) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$, pentru orice $x,y \in E$;

ii) $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$, pentru orice $\alpha \in R$ şi $x \in E$;

iii) $p(x) = 0 \Rightarrow x = 0$.

Dacă pe E se defineşte o normă vectorială cu valori în laticea X, se zice că E este un spaţiu cu normă vectorială şi notăm aceasta prin (E,p,X).

Din i) şi ii) rezultă: $|p(x) - p(y)| \leq p(x-y)$, pentru orice $x,y \in E$, de unde $0 \leq p(x)$ pentru orice $x \in E$.

Definiţie Fie (E,p,X). p se numeşte normă Kantorovici (sau cu proprietatea de descompunere), pe scurt K-normă, dacă pentru orice $x \in E$ şi orice $u_1,u_2 \in X_+$ cu $p(x) \leq u_1 + u_2$, există $x_1,x_2 \in E$ astfel încît $x = x_1 + x_2$, $p(x_1) \leq u_1$, $p(x_2) \leq u_2$.

Dacă p este o K-normă spunem că (E,p,X) este un spaţiu K-normat

In [1] proprietatea de descompunere se defineşte ca mai sus cu deosebirea că inegalităţile devin egalităţi. Aceasta este o proprietate mai tare. In adevăr, dacă $p(x) \leq u_1 + u_2$, cum X are proprietatea lui Riesz, există $z_1,z_2 \in X_+$ astfel încît $z_1 \leq u_1$, $z_2 \leq u_2$ şi $p(x) = z_1 + z_2$. Cu proprietatea de descompunere [1], există $x_1,x_2 \in E$ astfel încît $x = x_1 + x_2$ şi $p(x_1) = z_1 \leq u_1$, $p(x_2) = z_2 \leq u_2$.

Orice spaţiu liniar normat obişnuit ($X = R$) cu $p = \|\cdot\|$ precum şi orice latice liniară ($X = E$) cu $p = |\cdot|$ sînt spaţii K-normate.

Definiţie Fie (E,p,X) şi (F,q,Y). Un operator aditiv $U : X \to Y$ se numeşte p,q-mărginit dacă există un operator aditiv şi pozitiv $V : X \to Y$, numit p,q-majorant al lui U, a.î.

$$q(Ux) \leq V(p(x)) \quad \text{, pentru orice } x \in E.$$

Mulţimea tuturor p,q-majoranţilor lui U o notăm cu $Maj(U)$, iar mulţimea operatorilor p,q-mărginiţi cu $M(E,F)$.

Teorema Fie (E,p,X) şi (F,q,Y) cu p K-normă şi Y completa. Dacă $U \in M(E,F)$, atunci, există $\inf Maj(U)$ în $L_r(X,Y)$ şi

$\|U\|_{p,q}(x) := (\inf \mathrm{Maj}(U))(x) = \sup \left\{ q(Uy) \ / \ y \in E \ , \ p(y) \leq x \right\}$,
pentru orice $x \in X$.

Fie în continuare $E = R^n$. Dacă $E_1, \ldots, E_k$ sînt subspaţii liniare netriviale ale lui R^n considerăm pe fiecare E_i o normă $\|\cdot\|_i$. Pentru orice $x \in R^n$, dacă x_i este proiecţia lui x în E_i definim $p_i(x) = \|x_i\|_i$. Este uşor de arătat că $p : R^n \to R^k$ prin $p(x) = (p_1(x), \ldots, p_k(x))$ este o K-normă de la R^n la R^k cu ordinea pe componente , $\mathbb{R}^n = \bigoplus_{i=1}^{k} E_i$ ..

<u>Proprietate</u> Fie $A \in M(R^n, R^n)$ în K-spaţiul (R^n, p, R^k) . Dacă matricea $B \in \mathrm{Maj}(A)$, atunci , B este nenegativă şi raza spectrală a matricii A este mai mică decît raza spectrală a lui B , $\rho(A) \leq \rho(B)$.

Cu teorema şi proprietatea de mai sus obţinem :

<u>Teorema</u> Fie P_i $(i=1,\ldots,k)$,proiecţia lui R^n pe E_i iar pentru matricea arbitrară A de tip $n \times n$, $A_{i,j} = P_i A P_j$ $(1 \leq i,j \leq k$
Atunci : i) există $\|A\|_{p,p} = (m_{i,j}(A))_{k \times k}$ unde

$$m_{i,j}(A) = \sup \left\{ \frac{p_i(A_{i,j}\, x_j)}{p_j(x_j)} \ / \ x_j \in E_j \ , \ x_j \neq 0 \right\}$$

ii) $\rho(A) \leq \rho(\|A\|_{p,p})$.

<u>Teorema</u> Fie A o matrice reală de tip $n \times n$ cu $\rho(\|A\|_{p,p}) < 1$.

Atunci , iteraţia liniară $x_{r+1} = Ax_r + b$ converge la soluţia unică $x = (I - A)^{-1}b$. In plus , are loc următoarea estimare a erorii :

$$p(x - x_r) \leq (\|A\|_{p,p})^r (I - \|A\|_{p,p})^{-1} p(x_1 - x_o)$$

Ultimul rezultat constitue o generalizare a teoremei clasice $(p = \|\cdot\|)$ asupra iteraţiilor liniare . Mai mult , este un criteriu practic uşor de folosit . Astfel dacă matricea A are rangul mare este foarte greu de calculat raza sa spectrală pentru a vedea dacă procesul este convergent . Prin construirea unei norme vectoriale adecvate (după modelul de mai sus) cu un k suficient de mic totul revine la calculul razei spectrale pentru o matrice de ordin $k \times k$.

<u>BIBLIOGRAFIE</u> . 1 R.Cristescu , Spaţii Liniare Ordonate Si Operatoti Liniari, Ed.Acad.R.S.R.,Buc.197o

PUNCTE FIXE COMUNE IN SPATII LINIARE ORDONATE

Florica Voicu

Institutul de Construcţii Bucureşti

TEOREMA 1. Fie X un spaţiu liniar σ- reticulat, $T,U : X \to X$ şi $\alpha \in [0, \frac{1}{2}[$. Dacă este satisfăcută relaţia :

$$|T(x) - U(y)| \leq \alpha(|x - T(x)| + |y - U(y)|) \quad (\forall)x,y \in X \quad (1)$$

atunci avem :

(i) $Fix(T) = Fix(U) = \{x^*\}$

(ii) Pentru $(\forall)$ $x_0 \in X$ definim şirul $\{x_n\}_{n\in \mathbb{N}}$:

$$x_{2n} = (UT)^n(x_0) \text{ , } x_{2n+1} = T(x_{2n}) \text{ ; } (x_{2n} = U(x_{2n-1}))$$

Atunci : $x_n \xrightarrow{o} x^*$ şi

$$|x_n - x^*| \leq \frac{1-\alpha}{1-2\alpha}\cdot\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^n |x_0 - T(x_0)|$$

(iii) $|T^n(x_0) - x^*| \leq \frac{1-\alpha}{1-2\alpha}\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^n |x_0 - T(x_0)|$

$$|U^n(x_0) - x^*| \leq \frac{1-\alpha}{1-2\alpha}\cdot\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^n |x_0 - U(x_0)|$$

(iv) Fie $V,W : X \longrightarrow X$ aproximatele lui T şi V, adică :

$(\exists)$ $v \in X_+$ astfel încît :

$$|T(x) - V(x)| \leq v \qquad (\forall)\ x \in X$$

$$|U(x) - W(x)| \leq v \qquad (\forall)\ x \in X$$

Dacă $y_n = V^n(x_0)$ şi $z_n = W^n(x_0)$ atunci :

$$|y_n - x^*| \leq \frac{1-\alpha}{1-2\alpha} v + \left[2(n-1) + \frac{1-\alpha}{1-2\alpha}\right]\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^n |x_0 - T(x_0)|$$

$$|z_n - x^*| \leq \frac{1-\alpha}{1-2\alpha} v + \left[2(n-1) + \frac{1-\alpha}{1-2\alpha}\right]\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^n |x_0 - U(x_0)|$$

(v) Dacă $T_n, U_n : X \to X$ astfel încît :

$$T_n \xrightarrow{(o)-u} T \quad \text{şi} \quad U_n \xrightarrow{(o)-u} U$$

şi dacă $a_n^* \in Fix(T_n)$, $b_n^* \in Fix(U_n)$ atunci :

$$a_n^* \xrightarrow{o} x \qquad \text{şi} \quad b_n \xrightarrow{o} x^*$$

Fie X,Y spaţii liniare reticulate şi $T: X \times Y \longrightarrow X$. Considerăm următoarele aplicaţii induse de aplicaţia T:

$$T_y : X \longrightarrow X \qquad T_y(x) = T(x,y)$$

$$T_x : Y \longrightarrow X \qquad T_x(y) = T(x,y)$$

Presupunem că pentru orice $y \in Y$, T_y are un punct fix unic $x_y^* = T_y(x_y^*)$
Definim aplicaţia $P : Y \longrightarrow X$ prin formula $P(y) = x_y^*$.

DEFINIŢIA 1. Se spune că punctul fix x_y^* al aplicaţiei T_y depinde continuu de parametrul y, dacă aplicaţia P este (o)-continuă.

Folosind definiţiile anterioare şi teorema 1 rezultă :

TEOREMA 2. Fie X spaţiu liniar σ - reticulat, Y spaţiu liniar reticulat şi aplicaţiile $T,U : X \times Y \longrightarrow X$ pentru care :

(i) $(\exists)\ \alpha \in [0,\frac{1}{2}[$ astfel încît $(\forall) x_1, x_2 \in X, y \in Y$ avem :

$$|T(x_1,y) - U(x_2,y)| \leq \alpha (|x_1 - T(x_1,y)| + |x_2 - U(x_2,y)|) \quad (2)$$

(ii) aplicaţiile T_x, U_x sînt (o) - uniform continue pentru $(\forall)\ x \in X$

Atunci aplicaţiile T şi U au un punct fix comun unic.

TEOREMA 3. Fie X spaţiu liniar σ - reticulat şi aplicaţiile $T,U : X \longrightarrow X$ pentru care $(\exists)\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$, $\alpha + \beta < 1$ astfel încît

$$|T(x) - U(y)| \leq \alpha |x - T(x)| + \beta |y - U(y)| \quad (\forall) x,y \in X \quad (3)$$

Atunci aplicaţiile T şi U au un punct fix comun unic.

COROLAR. Fie X spaţiu liniar σ - reticulat, $T : X \longrightarrow X$ o aplicaţie pentru care $(\exists)\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$, $\alpha + \beta < 1$ astfel încît

$$|T(x) - T(y)| \leq \alpha |x - T(x)| + \beta |y - T(y)|\ ;\ (\forall) x,y \in X \quad (3^*)$$

Atunci T are un punct fix unic.

TEOREMA 4. Fie X spaţiu liniar σ - reticulat şi aplicaţiile $T,U : X \longrightarrow X$ pentru care $(\exists)\ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}_+$, $\alpha + 2\beta + 2\gamma < 1$ astfel încît $(\forall)\ x,y \in X$ este satisfăcută relaţia :

$$|T(x) - U(y)| \leq \alpha |x - y| + \beta (|x - T(x)| + |y - U(y)|) +$$
$$+ \gamma (|x - U(y)| + |y - T(x)|) \quad (4)$$

Atunci aplicaţiile T şi U au un punct fix comun unic.

COROLAR Fie X spaţiu liniar σ - reticulat, $T : X \longrightarrow X$ o aplicaţie pentru care $(\exists)\ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}_+$, $\alpha + 2\beta + 2\gamma < 1$ astfel încît $(\forall)\ x,y \in X$ avem :

$$|T(x) - T(y)| \leq \alpha |x-y| + \beta (|x - T(x)| + |y - T(y)|) +$$
$$+ \gamma (|x - T(y)| + |y - T(x)|) \quad (4^*)$$

Atunci T are un punct fix unic.

GRUPURI DE OPERATORI PE LATICI LOCAL CONVEXE

M. VOICU

In prima parte a lucrării se dau condiţii necesare şi suficiente de prelungire (extindere) a semigrupurilor pe spaţii local convexe secvenţial complete.

In partea a doua se obţin condiţii suficiente pentru ca un operator pozitiv rezolvant să genereze un grup pozitiv.

Definiţia 1. Fie $E/\mathbb{R}$ un spaţiu local convex şi $S : \mathbb{R} \to L(E)$ o aplicaţie. Aplicaţia S se numeşte grup de clasă C_0 dacă are următoarele proprietăţi :

1. $S(t+s) = S(t)S(s)$
2. $S(o) = I$
3. $\lim_{t \to o} S(t)x = x$ pentru orice $t, s \in \mathbb{R}$ şi $x \in E$. Dacă în plus familia $S(t)$, $t \in \mathbb{R}$ este echicontinuă, atunci S se numeşte grup echicontinuu de clasă C_o.

Definiţie 2. Fie E o latice locel convexă, $D \subset E$ un subspaţiu şi $A : D \to E$ un operator linear. Spunem că A este pozitiv rezolvant dacă există un număr $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încît $(\alpha, \infty) \subset \rho(A)$ şi $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1} \in L_+(E)$ pentru orice $\lambda > \alpha$.

Definiţia 3. Dacă $A : D \to E$ este un operator pozitiv rezolvant vom nota cu :

$S(A) = \inf\{\mu \in \mathbb{R} / (\mu, \infty) \subset \rho(A)$ şi $R(\lambda, A) \in L_+(E)$, pentru orice $\lambda > \mu\}$

Teorema 1. Fie E un spaţiu local convex secvenţial complet, $S : \mathbb{R} \to L(E)$ şi $A : D \to E$ un operator linear. Următoarele afirmaţii sînt echivalente.

1. S este un grup echicontinuu de clasă C_o al cărui generator este A.
2. Există două semigrupuri echicontinue de clasă C_o, $T, \hat{T} : [0, \infty) \to L(E)$ astfel încît A generează pe T şi $(-A)$ pe $\hat{T}$.

In acest caz :

$$S(t) = \begin{cases} T(t); & t \geq o \\ \hat{T}(-t); & t < o \end{cases}$$

Teorema 2. Fie (E,E_+) o latice-local convexă secvențial completă, P familia seminormelor continue și solide și $A : D \longrightarrow E$ un operator linear care are următoarele proprietăți :

1. $\overline{D} = E$
2. A și $(-A)$ sînt pozitiv rezolvanți și $S(A)$, $S(-A) \in [-\infty, 0)$
3. Există $\lambda_0 > 0$ astfel încît pentru orice $p \in P$ există $q \in P$ cu proprietatea $p(x) \leq q(R(\lambda_0, \pm A)x)$ pentru orice $x \in E_+$.

Atunci A generează un grup echicontinuu de clasă Co pozitiv.

Teorema 3. Fie (E,E_+), P cu proprietățile din Teorema 2 și $A : D \longrightarrow E$ linear cu următoarele proprietăți.

1. $\overline{D} = E$
2. A și $(-A)$ sînt pozitiv-rezolvanți
3. Există $\lambda_0 > S(\pm A)$ astfel încît pentru orice $p \in P$ există $q \in P$ cu proprietatea :

$$p(x) \leq q(R(\lambda_0, \pm A)x) \text{ pentru orice } x \in E_+$$

Atunci A generează un grup de clasă Co pozitiv.

INSTITUTUL DE CONSTRUCTII BUCURESTI
BD. LACUL TEI 124, SECTOR 2 , BUCURESTI
ROMANIA

BIBLIOGRAFIE

1. ARENDT, W. - Resolvent positive operators, Proc.London Math. Soc. (to appear).
2. CRISTESCU, R. - Spații lineare topologice, Ed.Acad. R.S.R., București 1974.
3. DAVIES, E.B. - One parameter semigroups, Academic Press, London 1980.
4. NAGEL, R. - One parameter semigroups of posisitve operators, Springer, Lecture notes 1184.
5. PAZY, A. - Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations, New.York 1983.
6. VOICU, M. - Operatori pozitiv-rezolvanți pe latici local convexe, Spații lineare ordonate topologice No.9 (1988).
7. YOSIDA, K. - Functional Analysis, Springer, 1965.

Referate şi comunicări prezentate la seminarul ştiinţific

"Spaţii liniare ordonate topologice"

în anul universitar 1988 - 1989

1. A.Antipa - Inegalitatea lui Doob pentru spaţii invariante la rearanjări
   - Inegalităţi de martingale *)
2. R.Cristescu - Automate liniare pozitive şi automate regulate
   - Operatori de tip (I) cu valori într-un spaţiu local-convex
   - Spaţii liniare ordonate topologice *)
3. R.Dăneţ - Prelungirea unor operatori liniari pozitivi *)
4. M.Gavrilă - Funcţii convexe pe latici Banach
5. O.Olteanu - O caracterizare geometrică a reflexivităţii în spaţii Banach şi aplicaţii
6. G.Păltineanu - Mulţimi de interpolare şi mulţimi frontale în spaţii local-compacte
   - Mulţimi de interpolare în raport cu un spaţiu de funcţii continue *)
7. N.Popa - Rezultate recente în teoria spaţiilor L^p Banach cu $0<p<1$
   - Spaţii Hardy de martingale *)
8. G.Popescu - Unele rezultate din teoria mulţimilor Korovkin
9. M.Popovici şi Dan Vuza - Factorizarea operatorilor de convoluţie
10. G.Simion - Funcţii diferenţiabile în spaţii liniare ordonate
11. C.Volintiru - Asupra unor proprietăţi ale operatorilor Dunford-Pettis

*) Expunere făcută la Universitatea din Timişoara (mai 1989)

<u>Conferinţe şi comunicări prezentate la al X-lea Colocviu de "Spaţii liniare ordonate topologice"(Braşov, 14-15 iunie 1989)</u>

<u>Conferinţe</u>

1. <u>Romulus Cristescu</u> - Unele aspecte ale teoriei spaţiilor liniare ordonate topologice şi operatorilor liniari.
2. <u>Gheorghe Grigore</u> - Asupra spaţiilor liniare dirijate topologice.
3. <u>Constantin Niculescu</u> - Studiul topologic al structurilor de ordine.
4. <u>Gavril Păltineanu şi Dan Vuza</u> - Ideale de interpolare
5. <u>Nicolae Popa</u> - Subspaţii complementate în spaţii Hardy de şiruri.

<u>Comunicări</u>

1. <u>A.Antipa</u> - O inegalitate pentru martingale
2. <u>Irina Cătuneanu</u> - Reprezentarea integrală a unor operatori $\mathcal{T}$-mărginiţi
3. <u>N.Dăneţ</u> - Operatori pozitiv p-sumabili
4. <u>Rodica Dăneţ</u> - Asupra unor operatori liniari
5. <u>M.Gavrilă</u> - Funcţii convexe pe latici Banach
6. <u>O.Olteanu</u> - Operatori convecşi mărginiţi inferior
7. <u>A.Petcu</u> - Topologia (o)-mărginirii în spaţii cu mulţimi axiale
8. <u>G.Popescu</u> - Asupra teoremelor de aproximare de tip Korovkin
9. <u>V.Postolică</u> - Conuri supernormale şi aplicaţii
10. <u>O.Sasu</u> - Asupra unor teoreme de reprezentare a operatorilor liniari şi continui
11. <u>G.Simion</u> - Asupra operatorilor (o)-derivabili
12. <u>Ligia Sporiş</u> - Cîteva consideraţii asupra algebrelor reticulate arhimediene cu element unitate
13. <u>I.Stan</u> - Interpolarea familiilor de spaţii Banach
14. <u>Doina Şerban-Tofan</u> - Teoreme de prelungire pentru operatori -regulaţi

15. G.Turcitu - Norme vectoriale şi aplicaţii în analiza numerică liniară

16. Florica Voicu - Puncte fixe comune pentru operatori în spaţii liniare ordonate

17. M.Voicu - Grupuri de operatori pe laticii local-convexe

18. C.Velintiru - O caracterizare geometrică a mulţimilor convexe de tip Dunford-Pettis în spaţii Banach

Lei 13,45