UNIVERSITATEA DIN BUCUREŞTI

Seminar ştiinţific

SPAŢII LINIARE ORDONATE TOPOLOGICE

Conducător ştiinţific :
Acad. prof. **ROMULUS CRISTESCU**

Nr. 12 (1991)

BUCUREŞTI 1991

UNIVERSITÉ DE BUCAREST

Séminaire

d'Espaces linéaires ordonnés topologiques

Éditeur : Romulus Cristescu

Nr.12(1991)

248

Sommaire

Articles

— · —

ESPACES DE DIRICHLÈT RECURRENTS

Par
A.BOUKRICHA et GH.BUCUR *

Dans [4] on a introduit la notion d'espace de Drichlèt symétrique par la donnée d'un espace de Hilbert réticulé H tel que $(f,g) \leq 0$ si $f \wedge h = 0$ pour $f,g \in H$.
En partant d'un article récent [3], on définit dans ce travail les espaces de Dirichlet récurrents et on démontre qu'un espace de Dirichlet récurrent est isomorphe à un espace de la forme $L^2(X,\mu)$.

Définition 1 : On appelle espace de Dirichlet symétrique la donnée d'un triplet $(H, \langle\ \rangle, H_+)$ où $(H, \langle\ \rangle)$ est un espace de Hilbert et H_+ un cône convexe fermé de H qui vérifient les propriétés suivantes :

a) $H_+ \cap (-H_+) = \{0\}$

b) H, muni de la relation d'ordre donnée par H_+, est réticulé

c) $\langle f,g\rangle \leq 0$ si $f \wedge g = 0$

Si $(f_i)_{i\in I}$ est une famille d'éléments de H on note par $\bigwedge_{i\in I} f_i$ (resp $\bigvee_{i\in I} f_i$) la borne inférieure (resp supérieure) dans H, si elle existe, de la famille $(f_i)_{i\in I}$

Définition 2 : Un espace de Dirichlet symétrique est appelé récurrent si on a $\langle f,g\rangle \geq 0$ si $f,g \in H_+$

Remrque : Dans un espace de Dirichlet symétrique et récurrent on a la propriété suivante :

$$f,g \in H,\ f \wedge g = 0 \implies \langle f,g\rangle = 0 .$$

Proposition 1 : (Si $(H, \langle\ \rangle, H_+)$ est un espace de Dirichlet symétrique et récurrent alors il existe une famille $(P_i)_{i\in I}$ d'éléments de H_+ et une famille $(H_i)_{i\in I}$ de sous-espaces fermés de H vérifiant les propriétés suivantes :

* Ce travail a été réalisé pendant un séjour à Tunis soutenu par la fondation nationale pour la recherche scientifique projet MA4/89

1) H_i est un idéal d'ordre de H (i.e $x_i \in H_i$, $x \in H$ $|x| \leq |x_i| \Longrightarrow x \in H_i$ avec $|x| = x \wedge (-x)$). $p_i \in H_i$ et $\lim_{n \to \infty} x \wedge (xp_i) = x$ $= \bigvee (x \wedge xp_i)$ pour tout $x \in H_i \cap H_+$ et tout $i \in I$.

2) Pour tout $i, j \in I$ avec $i \neq j$ H_i et H_j sont orthogonaux.

3) H est la somme directe des sous-espaces $(H_i)_{i \in I}$ et $x \in H$ est positif ($x \in H_+$) si et seulement si toutes ses projections sur les H_i le sont.

Démonstration : (voir aussi [5]).
On considère le cône P des potentiels de H c'est à dire :
$\mathcal{P} = \{p \in H \,/\, \langle p,h \rangle \geq 0$ pour tout $h \in H_+\}$.
D'après [4] on a :

$$\mathcal{P} \subset H_+ ,$$

et d'après la définition d'espace récurrent on a

$$H_+ \subset \mathcal{P} .$$

Il en résulte que $\mathcal{P} = H_+$ et que l'ordre sur H défini par H_+ coincide avec l'ordre spécifique sur H défini par le cône des potentiels ; donc H est complètement réticulé.
D'après [4] et [5] on sait que pour tout élément $p \in \mathcal{P} = H_+$ et tout élément $x \in H_+$, la suite $x_n : x \wedge (np)$ est convergente et que $\lim_n x_n = \bigvee_n (x \wedge (np))$.

Soit $\mathbb{E}$ l'ensemble des parties A de H_+ dont les éléments sont deux à deux étrangers ($a,b \in A \Longrightarrow a \wedge b = 0$).
Alors $\mathbb{E}$ est ordonné inductivement par la relation d'ordre :

$$A,B \in \mathbb{E} \quad A \leq B \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} A \subset B.$$

Par suite $\mathbb{E}$ possède un élément maximal.

$$A_0 = \{p_i \,/\, i \in I\}.$$

Pour tout $i \in I$, on note
$H_i = \{x \in H \,.\, |x| = \lim_n (|x| \wedge np_i)\}$. On voit que si $x \in H_i$, $y \in H$ et $|y| \leq |x|$ on a

$$|y| = |y| \wedge |x| = |y| \wedge (\bigvee_n |x| \wedge np_i)$$
$$= \bigvee_n (|y| \wedge (|x| \wedge np_i)) = \bigvee_n (|y| \wedge np_i) = \lim_n (|y| \wedge (np_i|)$$

ce qui donne $y \in H_i$ et donc la propriete 1) est vérifiée

2) Soit $i,j \in I$, $i \neq j$ et $x \in H_i^+$ et $y \in H_j^+$ on a

$$x = \lim_n x \wedge (np_i), \quad y = \lim_n y \wedge (np_j),$$

$$\langle x,y\rangle = \lim_n \langle x \wedge np_i, y \wedge np_j\rangle = 0.$$

Si x et y sont arbitraires dans H_i et H_j respectivement, alors on écrit

$$\langle x,y\rangle = \langle x^+ - x^-, y^+ - y^-\rangle = \langle x^+,y^+\rangle + \langle x^-,y^-\rangle - \langle x^+,y^-\rangle - \langle x^-,y^+\rangle = 0.$$

3) Soit $x \in H_+$ et soit $i \in I$. Si on note

$$x_i = \lim_{n\to\infty} x \wedge (np_i) = \bigvee_n (x \wedge (np_i))$$

alors on a

$$0 \le x_i \le x, \ (x-x_i) \wedge p_i = x \wedge (x_i+p_i) - x_i =$$

$$= x \wedge (\bigvee_n (x \wedge (np_i)) + p_i) - x_i =$$

$$= x \wedge (\bigvee(x+p_i) \wedge (n+1)p_i)) - x_i =$$

$$= \bigvee_n(x \wedge (x+p_j) \wedge (n+1)p_j) - x_i = x_i - x_i = 0.$$

Pour tout système finie $(p_i)_{i\in J}$, $J \subset I$ on a

$$x \wedge (n \sum_{j\in J} p_i) = x \wedge (\bigvee_{j\in J} p_i) =$$

$$= \bigvee_{i\in J} (x \wedge (np_i)) = \sum_{i\in J} x \wedge (np_i) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Par suite

$$\bigvee_n(x \wedge n (\sum_{i\in J} p_i)) = \sum_{i\in J} x_i \le x.$$

On voit qu'on a

$$\|x\|^2 \ge \sum_{i\in J} \|x_i\|^2$$

pour toute partie finie J de I. Par suite la famille $(x_i)_{i\in I}$ est sommable et on a

$$\sum_{i\in I} x_i = \bigvee_{J\subset I} \sum_{i\in J} x_i \le x.$$

Si on note $y = \sum_{i\in I} x_i$ alors $0 \le y \le x$ et de plus $0 \le x-y \le x-x_i$ pour tout $i \in I$ et par suite $0 \leq (x-y) \wedge p_i \leq (x-x_i) \wedge p_i = 0$ pour tout $i \in I$. De la maximalité de la famille $(p_i)_{i \in I}$ on en déduit que $x - y = 0$ et

$$x = \sum_{i \in I} x_i$$

Théorème 1 : Soit $(H, \langle\,\rangle, H_+)$ un espace de Dirichlet symétrique et récurrent qui possède une unité pour l'ordre c'est à dire qu'il existe $p \in H_+$ tel que :

$$x = \bigvee_n (x \wedge (np)) = \lim_n x \wedge (np) \text{ pour tout } x \in H_+ .$$

Alors il existe un espace Stonien X et il existe une mesure normale m sur X qui charge tous les ensembles ouverts non vide de X tels que :

1) L'espace vectoriel ordonné C(X) de toutes les fonctions continues et réelles sur X est isomorphe au sous espace ordonné H_0 de H défini par :

$$H_0 = \{h \in H : \text{il existe } \alpha_h \in \mathbb{R}_+ \text{ tel que } |h| \leq \alpha_h p\}.$$

Plus précisément si on note φ cet isomorphisme de H_0 dans C(X) nous avons les propriétés suivantes :

a) $x,y \in H_0$, $\alpha,\beta \in \mathbb{R} \Longrightarrow \varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y)$

b) $x,y \in H_0 \Longrightarrow (x \leq y \Longleftrightarrow \varphi(x) \leq \varphi(y))$.

c) $\varphi(H_0) = C(X)$; $\varphi(p) = 1$.

2) Pour toute fonction $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, on note par $\bar{f}$ la classe de toutes les fonctions de $X \longrightarrow \mathbb{R}$ qui sont égales à f m-presque partout. Alors l'application de C(X) dans $L^2(m)$ qui à f associe $\bar{f}$ est injective et de plus l'application de H_0 dans $L^2(m)$ qui à x associe $\varphi(x)$ admet un prolongement unique $\bar{\Phi}$ de H dans $L^2(m)$ qui est un isomorphisme d'espaces vectoriels ordonnés et qui vérifie l'égalité suivante :

$$\int \Phi(x)\, \Phi(y)\, dm = \langle x,y \rangle \text{ pour tout } x,y \in H.$$

Démonstration : Avec les notation de l'énoncé et en utilisant le fait que $(H, \leq)$ est complètement réticulé on déduit que $(H_0, \leq)$ est aussi un espace complètement réticulé à unité.
D'après le théorème de Kakutani il existe un espace compact X, une application $\varphi : H_0 \longrightarrow C(X)$ tels que :

a) $\varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y)$ pour tout $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ et $x,y \in H_0$

b) $x,y \in H_0 \Longrightarrow (x \leq y \Longleftrightarrow \varphi(x) \leq \varphi(y))$.

c) $\varphi(p) = 1$.

d) $x \in H_0 \Longrightarrow \|\varphi(x)\| = \inf \{\alpha \in \mathbb{R}_+ \mid |x| \leq \alpha p\}$.

où pour toute fonction bornée $f : X \dashrightarrow \mathbb{R}$, le nombre $\|f\|$ désigne la norme uniforme de f.

e) $\varphi(x \wedge y) = \inf(\varphi(x), \varphi(y))$, $\varphi(x \vee y) = \sup(\varphi(x), \varphi(y))$ $x, y \in H_0$.

f) L'ensemble $\varphi(H_0) \subset C(X)$ sépare les points de X.

Soit $f \in C(X)$ et soit $(x_n)_n \subset H_0$ une suite telles que la limite uniforme de la suite, $(\varphi(x_n))_n$ est la fonction f. En passant, eventuellement à une sous suite nous pouvons supposer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\|\varphi(x_{n+1}) - \varphi(x_n)\| < 1/2^n .$$

D'après la propriété précédente d) on a

$$|x_{n+1} - x_n| < \frac{1}{2^n} p \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N},$$

et alors

$$|x_m - x_n| \leq |x_m - x_{m-1}| + |x_{m-1} - x_{m-2}| + \dots |x_{n+1} - x_n| \leq \frac{1}{2^{n-1}} p \text{ si } m \geq n$$

Donc

$$x_n - \frac{1}{2^{n-1}} p \leq x_m \leq x_n + \frac{1}{2^{n-1}} p \quad \text{pour tous } m,n \in N,\ m \geq n.$$

Si pour tout $n \in N$ on note $x_n = \bigvee_{m \geq n} x_m$, $x_n = \bigwedge_{m \geq n} x_m$,

nous avons

$$x_n - \frac{1}{2^{n-1}} p \leq x_n \leq x_n \leq x_n + \frac{1}{2^{n-1}} p$$

Donc on a

$$\bigvee_{n \in N} x_n = \bigwedge_{n \in N} x_n = x \in H_0 .$$

Comme $x_n \leq x \leq x_n$

et $x_n - \frac{1}{2^{n-1}} p \leq x \leq x_n + \frac{1}{2^{n-1}} p$ pour tout $n \in N$,

on obtient

$$\|\varphi(x_n) - \varphi(x)\| \leq \frac{1}{2^{n-1}} \quad \text{pour tout } n \in N$$

et alors $$f = \lim_{n \to \infty} \varphi(x_n) = \varphi(x).$$

Puisque $\varphi(H_0)$ est, d'après le théorème de Stone Weierstrass, dense dans $C(X)$ par rapport à la convergence uniforme on déduit que

$$\varphi(H_0) = C(X)$$

De plus, H_0 étant un espace vectoriel complètement réticulé, on déduit aussi que l'espace X est un espace de Stone.

Posons maintenant, pour $f = \varphi(x)$, $g = \varphi(y)$ de $C(X)$, $x,y \in H_0$

$$E(f,g) := \langle x,y \rangle$$

On constate que E est une forme bilinéaire sur $C(X)$ qui possède les propriétés suivantes :

$$(*)\ f,g \in C(X),\ f \geq 0,\ g \geq 0 \Longrightarrow E(f,g) \geq 0$$

$$(**)\ f,g \in C(X),\ \inf(f,g) = 0 \Longrightarrow E(f,g) \leq 0$$

Si E vérifie la propriété *, en suivant [7], on montre qu'il existe une mesure positive σ sur $X \times X$ telle que

$$E(f,g) = \int_{X \times X} f(x)\, g(y)\, d\sigma(x,y) \text{ pour } f,g \in C(X).$$

En effet, on note par $\mathfrak{S}$ l'ensemble des fonctions réelles continues h sur $X \times X$ pour lesquelles il existe $f_i, g_i \in C(X)$, $i = 1,2,\ldots,n$ telles que

$$h(x,y) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\, g_i(y) \quad \text{pour} \quad x,y \in X$$

et on démontre que si $h \geq 0$ alors on a

$$\sum_{i=1}^{n} E(f_i,g_i) \geq 0 \quad (h(x,y)) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) g_i(y)).$$

En effet pour tout $\varepsilon > 0$ on considère un recouvrement $(D_j)_{j \in J}$ ouvert et finie de X tel que l'oscillation de chaque fonction f_i sur chaque D_j est inférieure à ε et on note par $(\varphi_j)_{j \in J}$ une partition de l'unité subordonnée à ce recouvrement. Si pour chaque $j \in J$ on fixe un point $x_j \in D_j$ et si on note

$$f_i = \sum_{j \in J} f_i(x_j)\, \varphi_j \quad \text{pour tout} \quad i = 1,2,\ldots,n.$$

on constate que nous avons

$$\|f_i - f_i\| \leq \varepsilon \quad \text{pour tout} \quad i = 1,2,\ldots,n.$$

En utilisant la propriété (*) on voit que

$$E(f,g) \leq E(|f|, |g|) \quad \text{pour} \quad f,g \in C(X),$$

et par suite on a

$$E(f_1,g_1) = E(f_1,g_1) + E(f_1 - f_1, g_1) \leq E(f_1,g_1) + \varepsilon E(1, |g_1|)$$

pour chaque $i = 1,2,\ldots n$. Par addition on déduit que

$$\sum_{i=1}^{n} E(f_i,g_i) \leq \sum_{i=1}^{n} E(f_i,g_i) + \varepsilon \sum_{i=1}^{n} E(1,|g_i|)$$

et puisque

$$\sum_{i=1}^{n} E(f_i,g_i) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j\in J} E(f_i(x_j)\varphi_j,g_i) = \sum_{j\in J} E(\varphi_j, \sum_{i=1}^{n} f_i(x_j)g_i) \geq 0$$

on a

$$\sum_{i=1}^{n} E(f_i,g_i) \geq -\varepsilon \sum_{i=1}^{n} E(1,|g_i|)$$

pour tout $\varepsilon > 0$. Donc la propriété annoncée est démontrée. Maintenant on constate que l'application linéaire $L : \mathfrak{F} \dashrightarrow \mathbb{R}$

$$L\left(\sum_{i=1}^{n} f_i(x)g_i(y)\right) = \sum_{i=1}^{n} E(f_i,g_i)$$

est bien définie et positive. Comme l'espace linéaire $\mathfrak{F}$ est positivement riche dans $C(X)$, on déduit qu'il existe une unique mesure de Radonc positive σ sur $X \times X$ telle que :

$$\sum_{i=1}^{n} E(f_i,g_i) = \int_{X\times X} \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\, g_i(y)\, d\sigma(x,y) \text{ pour } f_i,g_i \in C(X).$$

En utilisant la propriété (**) de la forme bilinéaire E, on démontre que σ est portée par la diagonale Δ de $X \times X$. En effet, soit $h \in C(X \times X)$, $h \geq 0$ sur $X \times X$ $h = 0$ sur une voisinage de Δ.

Pour tout $\varepsilon > 0$ on peut construire une fonction $\widetilde{h} \in \mathfrak{F}$ de la forme

$$\widetilde{h}(x,y) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\, g_i(y) \quad \text{avec} \quad f_i \Delta g_i = 0$$

et telle que $\|h - \widetilde{h}\| \leq \varepsilon$

On a : $\int h\, d\sigma \leq \varepsilon\sigma(X \times X) + \int \widetilde{h}\, d\sigma = \varepsilon\, \sigma(X \times X)$

et par suite $\int h\, d\sigma = 0$. Donc σ est portée par la diagonale de $X \times X$.

On note maintenant par m la mesure sur X définie par

$$\int f\, dm = \int_{X\times X} f(x,y)\, d\sigma(x,y) = \int f(x,x)\, d\sigma\big|_{\Delta}$$

où, pour chaque fonction $f \in C(X)$, $\tilde{f}$ est la fonction sur $X \times X$ définie par :

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x = y \\ 0 & \text{si } x \neq y \end{cases}$$

Pour $f,g \in C_{?}(X)$ on a

$$E(f,g) = \int_{X \times X} f(x)\, g(y)\, d\sigma(x,y) = \int_{\Delta} f(x)\, g(y)\, d\sigma(x,y) =$$

$$= \int_{\Delta} f(x)\, g(x)\, d\sigma|_{\Delta} = \int_X f(x)\, g(x)\, dm(x) .$$

La mesure m charge tout ouvert non vide D de X. En effet soit D ouvert, $D \neq \emptyset$ et soit $f \in C(X)$ tel que $f \neq 0$, $\operatorname{supp} f \subset D$.

On a : $f = \varphi(u)$, $u \in H_0$, $u \neq 0$

$$0 \neq \langle u,u \rangle = E(f,f) = \int f^2 dm$$

et par suite $m(D) > 0$.

La mesure m est une mesure normale puisque pour toute suite $(p_n)_n \subset H_0^+$, $p_n \uparrow q$, $q \in H_0^+$ on a $\langle q,q \rangle = \lim_{n \to \infty} \langle p_n, p_n \rangle$,

$$\int \varphi^2(q)\, dm = \lim_{n \to \infty} \int \varphi^2(p_n)\, dm.$$

Considérons maintenant $h \in H$ arbitraire, $h \geq 0$

Soit $h_n := h \wedge np$. D'après [2], la fonction $\varphi(h) : X \to \mathbb{R}_+$ définie par :

$$\varphi(h)(x) = \widehat{\sup_{n \in N} \varphi(h_n)}\ (x)$$

(où pour une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ on note par $\hat{f}$ la régularisée semi continue supérieurement de f) à la propriété suivante :

$$\inf(\varphi(h), n) = \varphi(h \wedge np) \text{ pour } n \in N.$$

Donc on a

$$\int \varphi^2(h)\, dm = \lim_{n \to \infty} \int \varphi^2(h \wedge np)\, dm = \lim_{n \to \infty} \langle h \wedge np, h \wedge np \rangle = \langle h,h \rangle$$

et alors $\varphi^2(h)$ est intégrable par rapport à la mesure m. Si on note par $\Phi(h)$ la classe d'équivalence de $\varphi(h)$ par rapport à la mesure m on a

$$\|\Phi(h)\|_2 = \|h\| .$$

Soit $f : X \dashrightarrow \mathbb{R}_+$ borélienne telle que $\int f^2 dm < \infty$. Si on considère pour chaque $n \in \mathbb{N}$ la fonction $f_n := \inf(f,n)$ alors en utilisant la propriété de normalité de la mesure m, il résulte qu'il existe $p_n \in H_0$, $p_n \le np$ tel que $\varphi(p_n) = f_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc on a $(p_n)_n \subset H_+$, $p_n \le p_{n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$ et par suite $(p_n)_n$ est convergente puisqu'on a :

$$\|p_n\|^2 = \int f_n^2 \, dm \le \int f^2(x) \, dm(x) < \infty.$$

Si on note $q = \bigvee_n p_n = \lim_{n\to\infty} p_n$ on voit que

$$\varphi(q) = \lim_{n\to\infty} \varphi(p_n) = \lim_{n\to\infty} f_n = f \quad \text{et}$$

$$\Phi(q) = \hat{\bar{f}}$$

Mais $\hat{f} = f$ m-p.p et par suite $\Phi(q) = \bar{f}$. Donc

$$\Phi(H_+) \equiv L_2^+(m) \quad \text{et} \quad \|\Phi(h)\|_2 = \|h\| \quad \text{pour } h \in H^+$$

De plus on a

$$\Phi(h_1) \le \Phi(h_2) \Longleftrightarrow h_1 \le h_2,$$

et par suite Φ peut être prolongé par addditivité à H

Evidemment l'application $\Phi : H \dashrightarrow L_2(m)$ est additive et

$$\Phi(h_1) \le \Phi(h_2) \Longleftrightarrow h_1 \le h_2 .$$

On voit aussi que si $h \in H$ alors on a

$$h_+ \wedge h_- = 0, \; \langle h_+, h_- \rangle = 0$$

$$\|h\|^2 = \|h_+ + h_-\|^2 = \langle h_+,h_+\rangle + \langle h_-,h_-\rangle = \|h_+\|^2 + \|h_-\|^2 = \|h\|^2,$$

ce qui donne que

$$\|h\|^2 = \|\Phi(h)\|_2^2 \quad \text{pour} \quad h \in H.$$

Cette dernière propriété nous conduit à la relation

$$\langle h,h'\rangle = \int \Phi(h)\, \Phi(h')\, dm \text{ pour } h,h' \in H.$$

<u>**Théorème**</u> 2 : Soit $(H, \langle\,\rangle, H_+)$ un espace de Dirichlet symétrique et récurrent Alors il existe un espace localement compact X, une mesure positive m sur X et une application linéaire

$$\Phi : H \dashrightarrow L_2(m)$$

ayant les propriétés suivantes :

1) $h_1, h_2 \in H \Longrightarrow (h_1 \le h_2 \Longleftrightarrow \Phi(h_1) \le \Phi(h_2))$

2) $\Phi(H) = L_2(m)$

3) $h_1, h_2 \in H \Longrightarrow \langle h_1,h_2\rangle = \int \Phi(h_1)\Phi(h_2)dm.$

Démonstration : On considère d'après la proposition précédente une famille $(p_i)_{i\in I}$ d'éléments de H_+ tels que $p_i \wedge p_j = 0$ et les espaces correspondants H_i tels que $(H_i, \langle\ \rangle, H_i+)$ est un espace de Dirichlet symétrique récurrent à unité pour l'ordre. On a :

1) $x \in H \Longrightarrow x = \sum_{i\in I} x_i\ ,\ x_i \in H_i,$

$$\|x\|^2 = \sum_{i\in I} \|x_i\|^2 .$$

2) $x,y \in H,\ x = \sum_{i\in I} x_i\ ,\ y = \sum_{i\in I} y_i \Longrightarrow \langle x,y\rangle = \sum_{i\in I} \langle x_i,y_i\rangle$.

3) $x,y \in H,\ x = \sum_{i\in I} x_i,\ y = \sum_{i\in I} y_i \Longrightarrow (x \le y \Longleftrightarrow x_i \le y_i$ pour tout $i \in I)$.

Pour chaque $i \in I$ on considère un espace compact Stonian X_i, une mesure positive m_i sur X_i et un isomorphisme $\Phi_i : H_i \dashrightarrow L_2(X_i,m_i)$ qui préserve la relation d'ordre et pour lequel on a

$$h'_i, h''_i \in H_i \Longrightarrow \langle h'_i,h''_i\rangle = \int_{X_i} \Phi_i(h'_i)\ \Phi_i(h''_i)\ dm_i$$

Sur l'espace localement compact $X = \bigoplus_{i\in I} X_i$, la somme directe des espaces topologiques X_i, on donne la mesure m définie par

$$m(A) = \sum_{i\in I} m(A \cap X_i).$$

On voit immédiatement qu'on a

$$L_2(X;m) = \sum_{i\in I} L_2(X_i;m_i) \text{ et}$$

$$H = \sum_{i\in I} H_i\ ;$$

où $\sum_{i\in I} L_2(X_i,m_i)$ (resp $\sum_{i\in I} H_i$) est la somme directe des espaces de Hilbert $L_2(X_i,m_i)_{i\in I}$ (resp H_i $i \in I$).

On pose pour tout h ∈ H

$$\Phi(h) = \sum_{i \in I} \Phi_i(h_i)$$

et on peut vérifier aisément que $\Phi : H \dashrightarrow L_2(m)$ a toutes les propriétés de l'énoncé du théorème.

Remarque: Une autre démonstration du theoreme 1 en utilisant la dualite dans les espace de Stone est apparu dans une discution porté par N.Boboc, Gh.Bucur et B.Z.Nagy à Timişoara à l'occasion d'une conference de la Theorie des operateurs.

Bibliographie.

[1] **BENYAICHE, A.** : Subordination des formes de Dirichlet. to appear

[2] **BOBOC, N ; BUCUR, GH** : Stonian H-cône. Studii si cercetari matematice, Revue de l'Academie Roumaine.

[3] **BOBOC, N. ; BUCUR, GH** : Recurrent and transient H-cônes (to appear)

[4] **BOBOC, N ; BUCUR GH. ; CORNEA. A.** : Order and convexity in Potential Theory. H-cône. Lecture notes in math. 853. Berlin-Heidelberg - New-York Springer 1981.

[5] **BOBOC, N. ; BUCUR GH.; CORNEA.A** : Hilbertian and Lattice theoretical methods in Potential Theory. Proc. of the Romanian Finnish Coll. 1976. Lecture notes in Math 743, Berlin - Heidelberg - New-York Springer 1979.

[6] **DELLACHERIE, C.; P.A.MEYER** : Probabilités et Potentiel ch. I à IV Hermann, Paris 1975.

[7] **FUKUSHIMA, M.** : Dirichlet forms and Markov processes. North Holland and Kodanska, Amsterdam - Oxford New-York (1980).

[8] **MORANDA, PH** : Mesure aléatoires. Séminaires de probabilités III, p. 190-229. Lecture Notes in Math. 88 Springer, Berlin 1969.

A.BOUKRICHA
Departement de Mathématiques
Faculté des Sciences de Tunis
1060 Tunis TUNISIE

GH.BUCUR
Institut de Mathematique de l'Académie Roumaine
Strada Academiei N° 14
Bucarest. ROUMANIE

Opérateurs à variation bornée

Romulus Cristescu

Dans cet article on considère des opérateurs définis sur un espace linéaire ordonné (dirigé ou réticulé) à valeurs dans un espace localement convexe, en géneralisant les notions d'opérateur de type (v) et d'opérateur de type (I) considérées dans [8]. On donne certaines propriétés des ces opérateurs, en particulier la représentation intégrale des opérateurs de type (I).

La terminologie utilisée dans cet article corresponde à celle utilisée dans [3]. Nous rappelons quelques définitions dans le premier paragraphe.

1. Préliminaires

Soit X un espace linéaire dirigé.

Si Y est un espace linéaire ordonné quelconque, un opérateur $U : X \longrightarrow Y$ est dit opérateur régulier si $U = U_1 - U_2$ avec U_1, U_2 additifs et positifs. Nous désignons par $\mathcal{R}(X,Y)$ l'espace linéaire diriqé des opérateurs réguliers définis sur X, à valeurs dans Y. L'espace des fonctionnelles régulières définies sur X sera désigné par X^r.

Si Y est un espace linéaire topologique[1)], un opérateur $U : X \longrightarrow Y$ est dit opérateur (oτ)-borné si pour tout sous-ensemble (o)-borné (c'est-à-dire borné par rapport à l'ordre) A de X, l'ensemble U(A) est (τ)-borné, (c'est-à-dire borné par rapport à la topologie de Y). On désignera par $\mathcal{M}$ (X,Y) l'ensemble des opérateurs

1) Les espaces linéaires topologiques considérés dans cet article seront supposés espaces linéaires sur le corps $\mathbb{R}$.

linéaires $(o\tau)$-bornés définis sur X à valeurs dans Y.

On dit que l'espace X satisfait la <u>condition de Riesz</u> si de $0 \leq y \leq x_1 + x_2$ où $0 \leq x_i \in X, (i = 1,2)$ il résulte $y = y_1 + y_2$ avec $0 \leq y_i \leq x_i, (i = 1,2)$.

Si X satisfaît la condition de Riesz et Y est un espace linéaire ordonné (o)-complet (c'est-à-dire tout sous-ensemble majoré admet la borne supérieure) alors $\mathcal{R}(X,Y)$ est un espace linéaire complétement réticulé.

Si Y est un espace linéaire ordonné muni d'une topologie localement convexe τ, on dit que Y est un <u>espace avec la propriété (B)</u> (voir aussi [9]) si pour tout sous-ensemble (τ)-borné E il existe supE et pour chaque semi-norme (τ)-continue q sur Y il existe une semi-norme (τ)-continue q_o sur le même espace telle que $q(\sup E) \leq \sup q_o(E)$ quelque soit l'ensemble (τ)-borné E.

Si X est un espace linéaire dirigé qui satisfait la condition de Riesz et si Y est un espace linéaire réticulé avec la propriété (B) alors $\mathcal{M}(X,Y)$ est un espace linéaire réticulé [5] et si $U \in \mathcal{M}(X,Y)$ alors

$$U_+(x) = \sup U([0,x]) \; . \quad (\forall \; x \in X_+)$$

Soit maintenant Z un espace linéaire réticulé.

On appelle <u>sous-espace normal</u> de Z, tout sous-espace linéaire E de Z qui satisfait la condition: si $|a| \leq |b|$ dans Z et $b \in E$ alors $a \in E$.

Une topologie linéaire τ sur Z est dite (ω)-continue si pour toute suite généralisée $\{z_\delta\}_{\delta \in \Delta}$ à valeurs dans Z telle que $z_\delta \underset{\delta\in\Delta}{\downarrow} 0$ il résulte $(\tau)\text{-}\lim_{\delta\in\Delta} z_\delta = 0$.

Une semi-norme p sur Z s'appelle <u>semi-norme solide</u> si de $|a| \leq |b|$ dans Z il résulte $p(a) \leq p(b)$.

Une topologie linéaire τ sur l'espace Z s'appelle <u>topologie localement convexe-solide</u> s'il existe un ensemble de semi-normes solides qui définit la lopologie τ .

Un espace linéaire réticulé muni d'une topologie localement convexe-solide s'appelle <u>espace réticulé localement convexe</u>. Un espace réticulé localement convexe separé est dit de <u>type (L)</u> s'il existe un ensemble $\mathcal{P}$ de semi-normes solides qui définit la topologie de l'espace tel que chaque $p \in \mathcal{P}$ soit additive sur le cone positif de l'espace.

Une semi-norme p définie sur un espace linéaire ordonné s'appelle <u>semi-norme (o)-bornée</u> si pour chaque sous-ensemble (o)-borné A de l'espace, l'ensemble p(A) est borné.

Si Z est un espace linéaire réticulé archimédien et $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans Z, on dit que la suite <u>converge à régulateur</u> vers un élément z, s'il existe un élément $v \in Z$ et une suite $\{\varepsilon_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres réels telle que $\varepsilon_n \downarrow_{n \in \mathbb{N}} 0$ et $|z_n - z| \leq \varepsilon_n v$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2. Opérateurs linéaires à variation bornée

Soient X un espace linéaire dirigé, Y un espace localement convexe séparé et Q un ensemble dirigé de semi-normes qui définit la topologie de Y. Nous désignons par X_+ le cone positif de l'espace X.

<u>Définition 1</u>. Un opérateur linéaire $U : X \longrightarrow Y$ s'appelle <u>opérateur de type (v)</u> (ou opérateur à variation bornée) si quelque soit $q \in Q$ il existe une fonctionnelle linéaire et positive φ_q définit sur X telle que

$$(1) \qquad q(U(x)) \leq \varphi_q(x), \qquad (\forall x \in X_+)$$

<u>Remarque 1</u>. Si $0 \leq \varphi \in X^r$ nous posons

$$(2) \qquad \tilde{\varphi}(x) = \inf \left\{ \varphi(z) \;\middle|\; \pm x \leq z \in X \right\}, \qquad (\forall x \in X)$$

La fonctionnelle $\tilde{\varphi}$ donné par la formule (2) est une semi-norme (o)-bornée et $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x)$, $\forall x \in X_+$. En particulier si X est réticulé, alors $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(|x|)$, $\forall x \in X$.

Quelque soit l'espace linéaire dirigé X, la condition (1) est équivalente à la condition suivante

(3) $q(U(x)) \leq \tilde{\varphi}_q(x)$, $(\forall\ x \in X)$

En effet, soit $x \in X$ et $\pm x \leq z$. En posant

$$x' = \frac{1}{2}(z + x)\ ,\quad x'' = \frac{1}{2}(z - x)$$

on a $x = x' - x''$, $z = x' + x''$, $0 \leq x' \leq z$, $0 \leq x'' \leq z$. Donc si (1) est valable, alors on a

$$q(U(x)) \leq q(U(x')) + q(U(x'')) \leq \varphi_q(x') + \varphi_q(x'') = \varphi_q(z)$$

d'ou il résulte (3).

Réciproquement de (3) il résulte (1) parce que

$$\tilde{\varphi}_q(x) = \varphi_q(x)\ ,\quad \forall\ x \in X_+ .$$

Remarque 2. Si l'opérateur linéaire $U : X \longrightarrow Y$ satisfait la condition (1) pour tout $q \in \mathcal{Q}$, alors il satisfait la même condition quelque soit la semi-norme continue q definie sur X. Donc la définition de l'opérateur de type (v) ne dépend pas de $\mathcal{Q}$.

Proposition 1. Si X est un espace linéaire dirigé qui satisfait la condition de Riesz et Y un espace linéaire réticulé avec la propriété (B) alors l'ensemble $\mathcal{V}(X,Y)$ des opérateurs de type (v) (définis sur X à valeurs dans Y) est un sous-espace linéaire réticulé de l'espace $\mathcal{M}(X,Y)$ des opérateurs linéaires $(o\tau)$-bornés.

Démonstration. On a $\mathcal{V}(X,Y) \subset \mathcal{M}(X,Y)$. En effet, soit $U \in \mathcal{V}(X,Y)$ et $0 \leq x \leq a$ dans X. De (1) il résulte

$$q(U(x)) \leq \varphi_q(a)$$

donc l'ensemble $U([0,a])$ est (τ)-borné. Si A est un sous-ensemble borné quelconque de X, alors il existe un élément $a > 0$ tel que

$$A \subset [0,a] - [0,a]$$

Il en résulte que l'ensemble U(A) est (τ)-borné. Par conséquent $U \in \mathcal{M}(X,Y)$.

Evidemment $\mathcal{V}(X,Y)$ est un sous-espace linéaire de l'espace $\mathcal{M}(X,Y)$.

Soit maintenant $U \in \mathcal{V}(X,Y)$ et considérons U_+ dans l'espace $\mathcal{M}(X,Y)$. On a

$$U_+(x) = \sup U([0,x])\ ,\quad (\forall\ x \in X_+)$$

Soit $q \in \mathcal{Q}$ et soit q_o une semi-norme (τ)-continue sur Y telle que $q(\sup E) \leq \sup q_o(E)$ quelque soit le sous-ensemble (τ)-borné E de Y. Si $x \in X_+$ alors on a

$$q(U_+(x)) = q(\sup U([0,x])) \leq \sup q_o(U([0,x])) \leq \varphi_{q_o}(x)$$

donc $U_+ \in \mathcal{V}(X,Y)$. Par conséquent $\mathcal{V}(X,Y)$ est un sous-espace linéaire rétidulé de $\mathcal{M}(X,Y)$.

Proposition 2. Soient X un espace linéaire dirigé qui satisfait la condition de Riesz et Y un espace linéaire complétement réticulé, muni d'une topologie localement convexe-solide séparée et (ω)-continue. Alors l'ensemble $\mathcal{V}_r(X,Y)$ des opérateurs réguliers de type (v) (définis sur X à valeurs dans Y) est un sous-espace normal de l'espace $\mathcal{R}(X,Y)$ des opérateurs réguliers.

Démonstration. L'ensemble $\mathcal{V}_r(X,Y)$ est évidemment un sous-espace linéaire de l'espace $\mathcal{R}(X,Y)$ et si $U_1 \in \mathcal{R}(X,Y)$ et $0 \leq U_1 \leq U_2 \in \mathcal{V}_r(X,Y)$ alors $U_1 \in \mathcal{V}_r(X,Y)$.

Soient maintenant $U \in \mathcal{V}_r(X,Y)$ et $x \in X_+$. En posant

$$E(x) = \left\{ \sum_{j=1}^{n} |U(x_j)| \;\middle|\; \sum_{j=1}^{n} x_j = x \;;\; 0 \leq x_j \in X \;;\; n \in \mathbb{N} \right\}$$

on a (voir [5] , 2.2)

$$|U|(x) = \sup E(x)$$

et l'ensemble E(x) est dirigé à droite. Si q est une semi-norme solide et (τ)-continue sur Y alors

$$q(|U|(x)) = \sup \left\{ q(y) \;\middle|\; y \in E(x) \right\}$$

et avec (1) il résulte

$$q(|U|(x)) \leq \varphi_q(x) \;, \qquad (\forall \; x \in X_+)$$

Par conséquent $|U| \in \mathcal{V}_r(X,Y)$ et la proposition est démontré.

Remarque 3. Si Y est un espace linéaire normé (et X un espace linéaire dirigé quelconque) un opérateur linéaire $U : X \longrightarrow Y$ est un opérateur de type (v) si et seulement s'il existe $\varphi \in X^r$ telle que

(4) $$\|U(x)\| \leq \varphi(x), \quad (\forall x \in X_+)$$

Lemme 1.Soient X un espace linéaire dirigé qui satisfait la condition de Riesz et $E \subset X_+$ un ensemble convexe (non vide) pour lequel il existe $S \subset X$ equilibré,convexe et (o)-bornivore tel que $S \cap E = \emptyset$.Il existe alors une fonctionnelle linéaire et positive f_o définie sur X telle que $f_o(x) \geqslant 1$, $\forall x \in E$.

Démonstration.Désignons par θ la plus fine topologie localement convexe sur X telle que tout ensemble (o)-borné soit topologiquement borné ("topology of (o)-boundedness" dans [3]).Si S est un sous-ensemble equilibré,convexe et (o)-bornivore de X alors S est une voisinage de l'origine dans la topologie θ et la condition $S \cap E = \emptyset$ montre que $0 \notin \bar{E}$ (la θ-adhérence de E).Par conséquent il existe une fonctionnelle linéaire et θ-continue f sur X telle que $f(x) \geqslant 1$, $\forall x \in E$.La fonctionnelle f étant une fonctionnelle régulière ([3],5.3.1.prop.1 et [5],2.2) en posant $f_o = |f|$ on a $f_o(x) \geqslant f(x) \geqslant 1$, $\forall x \in E$ parce que $E \subset X_+$.

Proposition 3.Soient X un espace linéaire dirigé qui satisfait la condition de Riesz,Y un espace linéaire normé et $U : X \longrightarrow Y$ un opérateur linéaire (non nul).Pour que U soit de type (v) il faut et il suffit qu'il existe une semi-norme (o)-bornée p définit sur X telle que

(5) $$\sum_{j=1}^{n} \|U(x_j)\| \leq p\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right), \quad (\forall x_j \in X_+ ; \forall n \in \mathbb{N})$$

Démonstration.Si U est de type (v),il existe $\varphi \in X^r$ telle que (4) soit valable.En posant $p(x) = \tilde{\varphi}(x)$,($\forall x \in X$) on obtient une semi-norme (o)-bornée p sur X et l'inégalité (5) est satisfaite.

Réciproquement supposons qu'il existe une semi-norme (o)-bornée p sur X telle que (5) soit valable.Posons

$$\psi = \inf \left\{ \mu > 0 \;\middle|\; \sum_{j=1}^{n} \|U(x_j)\| \leq \mu p\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right), \forall x_j \in X_+, \forall n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$E = \left\{ x \in X_+ \;\middle|\; x = \sum_{j=1}^{n} x_j,\ x_j \in X_+,\ n \in \mathbb{N},\ \sum_{j=1}^{n} \|U(x_j)\| = \psi \right\}$$

L'ensemble E est convexe et $E \neq \emptyset$ car si $x \in X_+$ et $U(x) \neq 0$, alors en posant

$$(6) \qquad x' = \frac{\psi}{\|U(x)\|} \cdot x$$

on a $x' \in E$.

Si $x \in E$ alors $x = \sum_{j=1}^{n} x_j$ avec $x_j \geqslant 0$ et

$$\psi = \sum_{j=1}^{n} \|U(x_j)\| \leqslant \psi\, p\Big(\sum_{j=1}^{n} x_j\Big) = \psi\, p(x)$$

donc $p(x) \geqslant 1$. En posant

$$S = \{ x \in X \mid p(x) < 1 \}$$

il en résulte $S \cap E = \emptyset$ et l'ensemble S est equilibré, convexe et (o)-borné. Avec le lemme précedent, il existe une fonctionnelle linéaire et positive f_o definie sur X, telle que $f_o(x) \geqslant 1$, $\forall\, x \in E$. Si $x \in X_+$ et $U(x) \neq 0$ alors en considérant l'élément x' donné par la formule (6) on a $f_o(x') \geqslant 1$ car $x' \in E$, donc

$$\|U(x)\| \leqslant \psi f_o(x), \qquad (\forall\, x \in X_+)$$

Il reste à poser $\varphi = \psi f_o$.

Remarque 4. Supposons que X est un espace linéaire σ-réticulé et désignons par $\ell_o(X)$ l'ensemble des suites $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans X telles que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ soit (o)-convergente. Avec les structures habituelles, $\ell_o(X)$ est un espace linéaire réticulé. Soit Y un espace localement convexe et $\mathcal{Q}$ un ensemble dirigé de semi-norme qui définie la topologie de Y. Désignons par $\ell_\tau(Y)$ l'espace linéaire des suites $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans Y telle que pour toute $q \in \mathcal{Q}$, la série $\sum_{n=1}^{\infty} q(y_n)$ soit convergente. Considérons sur cet espace la topologie définie par la famille des toutes les semi-normes $\|\cdot\|_q$ de la forme

$$\|\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}\|_q = \sum_{n=1}^{\infty} q(y_n)$$

avec $q \in \mathcal{Q}$. Alors pour tout $U \in \mathcal{V}(X,Y)$ l'opérateur $h_U : \ell_o(X) \longrightarrow \ell_\tau(Y)$ donné par la formule

$$h_U(\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}) = \{U(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$$

est un opérateur de type (v).

<u>Remarque 5</u>.Si X est un espace réticulé localement convexe de type (L) et Y un espace localement convexe quelconque, alors en désignant par $\mathcal{L}(X,Y)$ l'ensemble des opérateurs linéaires et continus définis sur X, à valeurs dans Y, on a $\mathcal{L}(X,Y) \subset \mathcal{V}(X,Y)$. En particulier si X est un espace réticulé de Banach de type (L) alors $\mathcal{L}(X,Y) = \mathcal{V}(X,Y)$.

<u>Exemples 1</u>.Soit X un espace linéaire dirigé et Y un espace localement convexe. Si $0 \leq f_j \in X^r$, $y_j \in Y$, $(j=1,2,\ldots,n)$, et posons

$$U(x) = \sum_{j=1}^{n} f_j(x) y_j \,, \qquad (x \in X)$$

alors $U \in \mathcal{V}(X,Y)$.

2.Soient $X = L([0,1])$ et $Y = (\mathcal{A})$, (l'espace des suites réelles) avec $\mathcal{Q} = \{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ où

$$q_n(\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}) = \max_{j=1}^{n} |\xi_j|$$

Soit $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions réelles définies sur $[0,1]$, mésurable (L) et bornées, et posons

$$U(x) = \left\{ \int_0^1 a_n(t)\, x(t)\, dt \right\}_{n\in\mathbb{N}} \,. \qquad (x \in X)$$

En posant maintenant

$$\varphi_n(x) = \int_0^1 \left(\max_{j=1}^{n} |a_j(t)| \right) x(t)\, dt$$

on a

$$q_n(U(x)) \leq \varphi_n(|x|) \,, \qquad (\forall\, n \in \mathbb{N} \,;\ \forall\, x \in X)$$

donc $U \in \mathcal{V}(X,Y)$.

3. Fonctions additives d'ensembles

Soient X un espace linéaire dirigé qui satisfait la condition de Riesz, Y un espace localement convexe et $\mathcal{Q}$ un ensemble dirigé de semi-normes qui définit la topologie de Y.

Si $U \in \mathcal{V}(X,Y)$, nous désignons par $\|U\|_q$ la plus petite fonctionnelle linéaire et positive φ_q satisfaisante (1). Elle s'appelle <u>la q-variation de U</u>.

<u>Remarque 6</u>. L'ensemble $\mathcal{V}(X,Y)$ est un espace linéaire sur lequel la fonction $U \longrightarrow \|U\|_q$ est une semi-norme vectorielle.

Soient maintenant T un ensemble quelconque (non vide) et $\mathcal{T}$ une algebre de sous-ensembles de T.

<u>Définition 2</u>. Une fonction additive $m : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{V}(X,Y)$ est dite <u>à variation bornée</u> si pour tout $A \in \mathcal{T}$ et pour tout $q \in \mathcal{Q}$ l'ensemble

(7) $$\mathcal{F}_q(A) = \left\{ \sum_{j=1}^{n} \|m(A_j)\|_q \;\middle|\; (A_1,\dots,A_n)\ \mathcal{T}\text{-partition de } A; n \in \mathbb{N} \right\}$$

est borné dans l'espace linéaire complétement réticulé X^r.

<u>Lemme 2</u>. Pour qu'une fonction additive $m : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{V}(X,Y)$ soit à variation bornée, il faut et il suffit que pour toute $q \in \mathcal{Q}$ il existe une fonction additive et positive $m_q : \mathcal{T} \longrightarrow X^r$ telle que

(8) $$\|m(A)\|_q \leq m_q(A), \qquad (\forall A \in \mathcal{T})$$

<u>Démonstration</u>. Supposons que la fonction m soit à variation bornée et posons

(9) $$\bar{m}_q(A) = \sup \mathcal{F}_q(A), \qquad (\forall A \in \mathcal{T};\ \forall q \in \mathcal{Q})$$

On vérifie aisément que la fonction $\bar{m}_q : \mathcal{T} \longrightarrow X^r$ donnée par la formule (9) est une fonction additive. Elle est évidement positive et on a

$$\|m(A)\|_q \leq \bar{m}_q(A), \qquad (\forall A \in \mathcal{T};\ \forall q \in \mathcal{Q})$$

parce que $\|m(A)\|_q \in \mathcal{F}_q(A)$. Par conséquent (8) est valable si on pose $m_q = \bar{m}_q$.

Réciproquement si (8) est valable alors $m_q(A)$ est un majorant de $\mathcal{F}_q(A)$ dans l'espace X^r.

Définition 3. La fonction $\overline{m}_q$ donnée par la formule (9) (voir aussi (7)) s'appelle la q-variation de m.

Remarque 7. La fonction $\overline{m}_q$ est la plus petite fonction additive et positive vérifiant (8).

4. Intégrales vectorielles.

Soient X un espace linéaire σ-réticule et σ-régulier [3], Y un espace localement convexe séparé et complet, et Q un ensemble dirigé de semi-normes qui définit la topologie de Y.

Soient T un ensemble quelconque (non vide) et $\mathcal{T}$ une algèbre de sous-ensembles de T.

Définition 4. Si $m : \mathcal{T} \longrightarrow X^r$ est un fonction additive et positive et $f, f_n : T \longrightarrow X$, $(n \in \mathbb{N})$, on dit que la suite $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (o)-converge m-presque uniformément vers f si les suivantes conditions sont vérifiées: (i) il existe une suite $\{S_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathcal{T}$ telle que $\{m(CS_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge à régulateur vers l'élément nul; (ii) pour chaque $k \in \mathbb{N}$ il existe une suite $\{d_n^k\}_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans X telle que $d_n^k \downarrow_{n\in\mathbb{N}} 0$ $(\forall k \in \mathbb{N})$ et

$$|f_n(t) - f(t)| \leqslant d_n^k, \quad (\forall t \in S_k;\ \forall n \in \mathbb{N})$$

On définit d'une manière habituelle l'integrale d'une fonction $\mathcal{T}$-simple $f : T \longrightarrow X$ par rapport à une fonction additive et positive $m : \mathcal{T} \longrightarrow X^r$.

Définition 5. Si $m : \mathcal{T} \longrightarrow X^r$ est une fonction additive et positive, une fonction $f : T \longrightarrow X$ est dite m-intégrable s'il existe une suite $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions $\mathcal{T}$-simples (définit sur T à valeurs dans X) qui (o)-converge m-presque unifomément vers f, telle que

$$\lim_{i,j} \int_T |f_i - f_j|\, dm = 0$$

Si f est un fonction m-intégrable, on pose (avec les notations de la définitions 5)

$$(10) \qquad \int_T f\, dm = \lim_n \int_T f_n\, dm$$

Il existe la limite dans (10) et elle ne dépend pas de la suite $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

<u>Définition 6</u>. Soit $\mathcal{M} = \{m_j\}_{j\in J}$ une famille de fonctions additives et positives définies sur $\mathcal{T}$, à valeurs dans X^r. On dit qu'une fonction $f : T \longrightarrow X$ est $\mathcal{M}$-<u>intégrable</u> si elle est m_j-intégrable quelque soit $j \in J$, et s'il existe une suite généralisée de fonctions $\mathcal{T}$-simples $\{f_\delta\}_{\delta\in\Delta}$ (définies sur T à valeurs dans X) telle que [2)]

$$\lim_{\delta\in\Delta} \int_T |f_\delta - f|\, dm_j = 0\ , \qquad (\forall\, j \in J)$$

<u>Remarque 7</u>. Désignons par $G(T,X,\mathcal{M})$ l'ensemble des fonctions définies sur T à valeurs dans X qui sont m_j-intégrables, $\forall\, j \in J$ (oú $\mathcal{M} = \{m_j\}_{j\in J}$ est une famille de fonctions additives et positives définis sur $\mathcal{T}$ à valeurs dans X^r). L'ensemble $G(T,X,\mathcal{M})$ est un espace linéaire (par rapport aux opérations habituelles) et pour tout $j \in J$ on obtient une semi-norme sur cet espace en posant

$$(11) \qquad \|f\|_j = \int_T |f|\, dm_j\ , \qquad (f \in G(T,X,\mathcal{M}))$$

Soit τ la topologie donnée par la famille $\{\|\cdot\|_j\}_{j\in J}$ de semi-normes. La définition 6 équivaut á dire que une fonction $f : T \longrightarrow X$ est $\mathcal{M}$-intégrable si $f \in G(T,X,\mathcal{M})$ et s'il existe une suite généralisée $\{f_\delta\}_{\delta\in\Delta}$ de fonctions $\mathcal{T}$-simples, telle que $f = (\tau)\text{-}\lim_{\delta\in\Delta} f_\delta$.

---

2) Pour une fonction $g : T \longrightarrow X$ on désigne par $|g|$ la fonction: $|g|(t) = |g(t)|$, $\forall\, t \in T$. Si g est m_j-intégrable alors $|g|$ est aussi m_j-intégrable.

Remarque 8. Si (avec les notations de la définition 5) il existe une fonction additive et positive $m_0 : \mathcal{T} \longrightarrow X^r$ telle que $m_j \leq m_0$, ($\forall\, j \in J$) et si $f : T \longrightarrow X$ est une fonction m_0-intégrable, alors f est $\mathcal{M}$-intégrable.

Définition 7. Soient $m : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{V}(X,Y)$ une fonction additive et à variation bornée, $\bar{m}_q$ la q-variation de m (pour $q \in \mathcal{Q}$) et $\bar{\mathcal{M}} = \{\bar{m}_q\}_{q \in \mathcal{Q}}$. On dit que une fonction $f : T \longrightarrow X$ est m-intégrable si elle est $\bar{\mathcal{M}}$-intégrable.

La définition des fonctions m-intégrables ne dépend pas de $\mathcal{Q}$

Soit $m : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{V}(X,Y)$ une fonction additive et à variation bornée.

Si $f : T \longrightarrow X$ est une fonction $\mathcal{T}$-simple, on définit d'une manière habituelle l'intégrale de f par rapport à m.

Si $f : T \longrightarrow X$ est une fonction m intégrable et si $\{f_\delta\}_{\delta \in \Delta}$ est une suite généralisée de fonctions $\mathcal{T}$-simple telle que

$$(12) \qquad \lim_{\delta \in \Delta} \int_T |f_\delta - f| \, d\bar{m}_q = 0, \qquad (\forall\, q \in \mathcal{Q})$$

nous posons

$$(13) \qquad \int_T f \, dm = \lim_{\delta \in \Delta} \int_T f_\delta \, dm$$

Il existe la limite (13) et elle ne dépend pas de la suite généralisée $\{f_\delta\}_{\delta \in \Delta}$ qui vérifie (12).

Remarque 9. Soit $T = [0,1]$. Une fonction $f : T \longrightarrow X$ est dite uniformément (o)-continue s'il existe une suite $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de X telle que $v_n \downarrow_{n \in \mathbb{N}} 0$, et $t', t'' \in T$, $|t' - t''| < \frac{1}{n} \Rightarrow$

$\Rightarrow |f(t') - f(t'')| \leq v_n$.

[illegible] l'ensemble des parties boreliennes de T, alors, que[illegible]tion additive et à variation bornée

m [illegible] $\mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{V}(X,Y)$, to[illegible] onction uniformément (o)-continue

$f : T \longrightarrow X$ est m-intégra[illegible]

5. Opérateurs de type (I)

Soit X un espace linéaire σ-réticulé, σ-régulier.

Soient T un ensemble quelconque (non vide), $\mathcal{T}$ une algebre de sous-ensembles de T et $\mathcal{M} = \{m_j\}_{j \in J}$ une famille de fonctions additives et positives définies sur $\mathcal{T}$ à valeurs dans X^r.

Nous posons

$$F(T,X,\mathcal{M}) = \{ f : T \longrightarrow X \mid f \ \mathcal{M}\text{-intégrable} \}$$

L'ensemble $F(T,X,\mathcal{M})$ est un espace linéaire réticulé avec l'ordre: $f_1 \leq f_2 \iff f_1(t) \leq f_2(t)$, $\forall t \in T$ (et les opérations habituelles).

Soit maintenant Y un espace localement convexe séparé et complet et Q un ensemble dirigé de semi-normes qui définit la topologie de Y.

<u>Définition 6.</u> Un opérateur linéaire $U : F(T,X,\mathcal{M}) \longrightarrow Y$ s'appelle <u>opérateur de type (I)</u> si pour tout $q \in Q$ il existe $j(q) \in J$ tel que

$$(14) \qquad q(U(f)) \leq \int_T |f| \, dm_{j(q)} \quad , \quad (\forall f \in F(T,X,\mathcal{M}))$$

<u>Proposition 4.</u> Un opérateur $U : F(T,X,\mathcal{M}) \longrightarrow Y$ est de type (I) si et seulement si il se représente sous la forme

$$(15) \qquad U(f) = \int_T f \, dm \quad , \quad (f \in F(T,X,\mathcal{M}))$$

où $m : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{V}(X,Y)$ est une fonction additive satisfaisant la condition: pour tout $q \in Q$ il existe $j(q) \in J$ tel que

$$(16) \qquad \| m(A) \|_q \leq m_{j(q)}(A) \quad , \quad (\forall A \in \mathcal{T})$$

<u>Démonstration.</u> Soit $m : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{V}(X,Y)$ une fonction additive qui vérifie (16). En posant

$$\bar{\mathcal{M}} = \{\bar{m}_q\}_{q \in Q}$$

où $\bar{m}_q$ est la q-variation de m, on a $\bar{m}_q \leq m_{j(q)}$ d'où il résulte que si $f \in F(T,X,\mathcal{M})$ alors f est $\bar{\mathcal{M}}$-intégrable. On peut donc considerer l'opérateur U donné par la formule (15) et alors U est évidemment linéaire. D'autre part, avec la définition de l'integrale, on a

$$q\left(\int_T f\, dm\right) \leqslant \int_T |f|\, d\bar{m}_q \quad . \qquad (\forall q \in Q)$$

d'où il résulte (14).

Réciproquement, soit $U : F(T,X,\mathcal{M}) \longrightarrow Y$ un opérateur linéaire satisfaisant (14). En posant

$$(m(A))(x) = U(\chi_A \cdot x) \ , \qquad (\forall A \in \mathcal{T},\ \forall x \in X)$$

(où χ_A est la fonction caractéristique de A), on obtient une fonction additive $m : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{V}(X,Y)$ qui vérifie (16).

Si $f : T \longrightarrow X$ est un fonction $\mathcal{T}$-simple alors l'égalité (15) est évidente. Si $f \in F(T,X,\mathcal{M})$ est une fonction quelconque, alors de $\bar{m}_q \leqslant m_{j(q)}$ (qui est une conséquence de (16)) il résulte que la fonction f est m-intégrable. D'autre part, il existe une suite généralisée $\{f_\delta\}_{\delta\in\Delta}$ de fonctions $\mathcal{T}$-simples telle que (voir (11))

$$\lim_{\delta\in\Delta} \| f_\delta - f \|_j = 0 \ , \qquad (\forall j \in J)$$

et avec (14) on a

$$q(U(f_\delta) - U(f)) \leqslant \| f_\delta - f \|_{j(q)}$$

Il en résulte

$$U(f) = \lim_{\delta\in\Delta} U(f_\delta) = \lim_{\delta\in\Delta} \int_T f_\delta\, dm = \int_T f\, dm$$

donc (11) est valable.

<u>Remarque 10</u>. Si Y est un espace linéaire normé et $m_o : \mathcal{T} \longrightarrow X^r$ une fonction additive et positive, alors un opérateur linéaire $U : F(T,X,m_o) \longrightarrow Y$ est de type (I) si et seulement si

$$\| U(f) \| \leqslant \int_T |f|\, dm_o \ . \quad (\forall f \in F(T,X,m_o))$$

<u>Remarque 11</u>. Si Y est un espace linéaire réticulé avec la propriété (B) et si $U : F(T,X,\mathcal{M}) \longrightarrow Y$ est un opérateur de type (I), alors U est un opérateur régulier et $|U|$ est un opérateur de

type (I).

En effet, F(T,X,$\mathcal{M}$) est un espace linéaire réticulé et U est un opérateur de type (v). Donc il existe (avec la proposition 1) l'opérateur |U| et on vérifie aisément que |U| est de type (I).

Bibliographie

1. Romulus Cristescu. Integrali vettoriali su uno spazio localmente compatto. Atti. Accad. Naz. Lincei, Rendiconti 40(1966), 792-795.

2. ——— Asupra unor operatori liniari mărginiţi. Analele Univ. Bucureşti (mat.) 16(1967), nr. 1, 39-43.

3. ——— Ordered vector spaces and linear operators. Abacus Press, Kent, England, 1976.

4. ——— Sur la représentation intégrale de certaines opérateurs linéaires. Rev. Roum. Math. pures et appl. 25(1980), 519-524.

5. ——— Clase de operatori pe spaţii ordonate. Structuri de ordine în Analiza funcţională, vol. 1, 9-62. Editura Academiei, 1986.

6. ——— Operatori liniari regulaţi şi integrale vectoriale. Seminar ştiinţific "Spaţii liniare ordonate topologice", nr. 8 (1987), 1-24.

7. ——— Vector integrals and operator of type (I). Bull. Math. S.S. Math. de Roumanie 32(1988), 205-209.

8. ——— Operators of type (I) with values in a locally convex spaces. St. cerc. mat. 42(1990), 137-141.

9. W.D. May, R.R. Chivukula. Lattice properties of $\mathcal{L}$(E,F). Duke Math. J. 33(1972), 345-350.

10. G. Muni. Intorno ad alcuni aspetti della teoria dell'integrale vettoriale. Rend. Mat. Roma. 7(1974), 239-268.

A NON - COMMUTATIVE VERSION OF BISHOP'S APPROXIMATION THEOREM

by

Constantin P. Niculescu, Gavril Păltineanu, Dan Tudor Vuza.

It is well know that there is an one-to-one map from the family of the closed subsets of a compact Hausdorff space X onto the family of the closed ideals of $C(X,\mathbb{C})$. More exactely, to every closed ideal $\mathcal{J}$ corresponds a closed subset K of X such that

$$\mathcal{J} = \{ f \in C(X,\mathbb{C}) \ ; \ f|K = 0 \}.$$

Starting from this remarque we have generalized in [15] the Bishop's approximation theorem and some results of the interpolation sets to the case of order ideals in a Banach lattice or to the case of two-sided ideals in a C^*- algebra.

In this paper we extend these results for M-ideals in a Banach space. This extention is a proper generalization and it makes also possible an unitary approach of the both cases which appear in [15].

1. Antisymmetric sets and Bishop's approximation theorem.

Let X be a Hausdorff compact space and let $\mathcal{A}$ be a closed subalgebra of $C(X,\mathbb{C})$ that contains the constants and separates the points of X. A subset S of X is called antisymmetric with respect to $\mathcal{A}$ provided that $f \in \mathcal{A}$ and $f(S) \subset \mathbb{R}$ implies f is constant on S.

There is a disjoint - pairwise partition $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}$ of X formed by the maximal antisymmetric subsets (with respect to $\mathcal{A}$).

Theorem 1.1 (E.Bishop) For each $f \in C(X,\mathbb{C})$ we have $d(f,\mathcal{A}) = \sup \{ d(f|S, \mathcal{A}|S) \ , \ S \in \mathcal{F}_{\mathcal{A}} \}$ (Here $\mathcal{A}|S$ denotes the restriction of f to S and $d(f,\mathcal{A})$ denotes the distance from f to $\mathcal{A}$.

$$d(f,\mathcal{A}) = \inf \{ \|f-g\| \ ; \ g \in \mathcal{A} \})$$

The proof is bases on application of the Krein - Milman theorem and on the following de Branges' type lemma : if $\mu \in \mathrm{Ext}$ (ball $\mathcal{A}^o$), then carrier μ is a set of antisymmetry with respect to $\mathcal{A}$ (Here $\mathcal{A}^o$ denotes the polar set of $\mathcal{A}$).

For each closed subset K of X, we put

$$\mathcal{A}_0(K) = \{ f \in \mathcal{A};\ f \mid K = 0 \}.$$

A closed subset K is called a set of <u>strict interpolation</u> with respect to $\mathcal{A}$ if $\mathcal{A} \mid K$ is isometrically - isomorphic to the quatient algebra $\mathcal{A}/\mathcal{A}_0(K)$. Particularly, it follows that $\mathcal{A} \mid K$ is closed in $C(K, \mathbb{C})$ if K is a set of interpolation for $\mathcal{A}$.

<u>Theorem 1.2</u> Every maximal antisymmetric set with respect to $\mathcal{A}$ is a set of strict interpolation with respect to $\mathcal{A}$.

We recall that a subset K of X is called a <u>peak set</u> for $\mathcal{A}$ if $K = \{ x \in X;\ f(x) = 1 \}$, where $f \in \mathcal{A}$ and $\|f\| = 1$. Every intersection of peak sets for $\mathcal{A}$ is a set of strict interpolation for $\mathcal{A}$.

The generalization of Theorem 1.1 from the case of algebras to the case of linear subspaces was obtained in [14].

Let E be a linear subspace of $C(X, \mathbb{C})$. A subset S of X is called <u>antisymmetric with respect to E</u> provided $\varphi \in C(X, \mathbb{C})$ with the properties: a) $\varphi(S) \subset \mathbb{R}$; and b) $\varphi f \mid S \in E \mid S$, $\forall f \in E$ implies φ is constant on S.

We shall denote by $\mathcal{F}_E$ the family of maximal antisymmetric subsets of X with respect to E.

<u>Theorem 1.4</u>. For each $f \in C(X, \mathbb{C})$ we have:

$$d(f,E) = \sup \{ d(f \mid S,\ E \mid S),\ S \in \mathcal{F}_E \}$$

The generalizations of Theorem 1.2. and 1.3. to the case of a linear subspace of $C(X, \mathbb{C})$ was obtained in [4]

A closed subset K of X is said to be a <u>set of strict</u> interpolation for the linear subspace E of $C(X, \mathbb{C})$, if $E \mid K$ is isometrically - isomorphic to the quatient space $E/E_0(K)$, where $E_0(K) = \{ f \in E;\ f \mid K = 0 \}$

<u>Theorem 1.5</u>. Every maximal antisymmetric subset of X with respect to the linear subspace E of $C(X, \mathbb{C})$ is a set of strict interpolation with respect to E. A closed subset S of X is said to be a <u>frontal set for E</u> if for every $f \in E$, every neighbourhood V of K, every $\varepsilon > 0$ and $\eta > 0$, there is $\tilde{f} \in E$ with the following properties:

a) $\tilde{f} \mid K = f \mid K$

b) $\|\tilde{f}\|_X < \|f\|_K + \eta$

c) $\|\tilde{f}\|_{X \setminus V} \leq \varepsilon$

(Here $\|g\|_S = \sup\{|g(x)|;\ x \in S\}$, for each $g \in C(X,\mathbb{C})$ and each closed subset S of X).

Every frontal set for E is a set of strict interpolation for E.

Theorem 1.6. Every maximal antisymmetric set with respect to the linear subspace E of $C(X,\mathbb{C})$ is a frontal set for E.

2. Reviewof M - structure theory

In what follows we review some basic facts conserning to M - structure theory which we need in our approach of non-commutative approximation and interpolation. For a therough presentation of M - structure theory we refer to [3]

Let E be a Banach space. An idempotent $P \in L(E,E)$ is called a L - projection provided that

$$\|x\| = \|Px\| + \|x - Px\|, \text{ for all } x \in E$$

The L - projections on E constitute a Bollean algebra by letting:

$$P \vee Q = P + Q - PQ$$

$$P \wedge Q = PQ$$

$$P^{\perp} = I - P$$

One denotes by $\mathbb{P}_L(E)$ this boolean algebra. Actually $\mathbb{P}_L(E)$ is a Bade complete i.e, for every family $(P_\alpha)_\alpha$ of elements of $\mathbb{P}_L(E)$ there exist $\vee P_\alpha$ and $\wedge P_\alpha$ in $\mathbb{P}_L(E)$ and moreover

$$(\vee P_\alpha)(E) = \overline{\text{Span} \cup P_\alpha(E)}$$

$$(\wedge P_\alpha)(E) = \cap P_\alpha(E)$$

A closed subspace $\mathcal{J}$ of E is said to be a M - ideal provided that its polar $\mathcal{J}^o$ is the image of a L - projection on E'.

$\mathcal{J}^o$ can be the image of at most one L - projection, usually denoted by $P_{\mathcal{J}}$.

There are various examples of M - ideals.

1) If E is a C^* - algebra, then the M - ideals are precisely the closed two - sided ideals.

2) If E is a M - space, then its M - ideals coincide with the closed lattices ideals.

3) If E is the space A(K) of all continuous affine functions on compact convex K, then the M - ideals of E are the annihilators of the split faces of K. See [1].

4) If E is a Lindenstrauss space (i.e if E' is an L^1 - space),

then the M - ideals of E are the annihilators of the bifaces of the closed unit ball of E'. See [1].

5) If E is a function algebra on a compact metrizable space K, then the M - ideals of E are exactly the annihilators of the peak sets. See [13].

We shall denote by $\mathcal{M}(E)$ the set of all M - ideals of a Banach space E. The map $J \to P_J$, from $\mathcal{M}(E)$ onto $\mathbb{P}_L(E')$ is bijective and thus $\mathcal{M}(E)$ can be organized naturally as a Boolean algebra.

Every finite sum, as well as every finite intersection of M - ideals of E is still a M - ideal of E. Also, if $(J_\alpha)_\alpha$ is a family of elements of $\mathcal{M}(E)$ then $\overline{\text{Span}}\, \bigcup J_\alpha \in \mathcal{M}(E)$.

It folows that every closed subspace of E contains a largest M - ideal.

In contrast to the situation for ideals in rings, arbitrary intersection of M - ideals need not be an M - ideal. See [6]. A Banach space E is called <u>M - distinguished</u> if $\mathcal{M}(E)$ is closed under arbitrary intersection. Examples : C^* - algebras, M- spaces, reflexive Banach spaces etc.

3. <u>The centralizer of a Banach space.</u>

To any Banach space E one can associate two operator algebras. The first one is the so called <u>Cunnigham algebra</u>, namely

$$\mathcal{C}(E) = \overline{\text{Span}}\ \mathbb{P}_L(E)$$

(the closure is considered in the uniform topology of L(E,E)). $\mathcal{C}(E)$ is a commutative Banach algebra with unit I, the identity of E. Also $\mathcal{C}(E)$ is algebraic and isometric isomorphic to $C(\text{Spec}\,\mathcal{B}, \mathbb{K})$, where Spec $\mathcal{B}$ denotes the Stone space associated to $\mathbb{P}_L(E)$ and $\mathbb{K}$ denotes the field of scalars. See Evans [8] for details. Particularly, $\mathcal{C}(E)$ is a Banach lattice, possibly complex. If we denote by $\text{Re}\,\mathcal{C}(E)$ the closure of the finite real combinations of the elements of $\mathbb{P}_L(E)$ we have (via the above isomorphism),

$$\text{Re}\ \mathcal{C}(E) \simeq C(\text{Spec}\ \mathbb{P}_L(E), \mathbb{R})$$

The second algebra is <u>the centralizer</u>. It is the Banach subalgebra Z(E) of L(E,E) consisting of all operators $T \in L(E,E)$ such that $T' \in \mathcal{C}(E')$. Z(E) is also a commutative Banach algebra with unit I and each $T \in Z(E)$ leaves invariant every M - ideal of E.

We definite the real part the centralizer by

$$\text{Re}\ Z(E) = \{\, T \mid T' \in \text{Re}\ \mathcal{C}(E') \,\}$$

It is natural to consider on ReZ(E) the order relation: $S \leq T$ in Re Z(E) if and only if $S' \leq T'$ in $\mathrm{Re}\,\mathcal{C}(E') = C(\mathrm{Spec}\ \mathbb{P}_L(E'), \mathbb{R})$. With respect to this order relation ReZ(E) becomes a $C(S, \mathbb{R})$ - space. Alfsen and Effros [1] have described the order relations on Re $\mathcal{C}$(E) and on ReZ(E) via order relations on E. We shall not enter the details have. However it seems worthwhile to recall their basic remark.

Consider on the Banach space E the L-order relation $x \leq_L y$ if and only if $\|y\| = \|x\| + \|y - x\|$.

Then $0 \leq S \leq T$ in Re $\mathcal{C}$(E) if and only if $Sx \leq_L Tx$ for all $x \in E$. A consequence of this remark is the following.

Proposition 3.1. Let $T \in$ ReZ(E) such that $0 \leq T \leq I$. Then $\overline{\mathrm{Im}T}$ is a M - ideal.

The description of the centralizer in terms of $C(S, \mathbb{C})$-- space is much easier for C^* - algebras $\mathcal{U}$ with unit $\mathbb{1}$. In fact, as remarked Wils [20],

$$Z(\mathcal{U}) = \{ x \in \mathcal{U} \mid xy = yx \text{ for all } y \in \mathcal{U} \}$$

and $\mathrm{ReZ}(\mathcal{U}) = \{ x \in \mathcal{U} \mid -\alpha \mathbb{1} \leq x \leq \alpha \mathbb{1}$ for a suitable $\alpha > 0 \}$

Then Re $Z(\mathcal{U})$ is a **Banach lattice** with a strong order unit I, and the operatorial norm **on** ReZ($\mathcal{U}$) coincides with the norm $\| \ \|_I$ associated to I,

$$\|x\|_I = \inf \{ \alpha \mid -\alpha \mathbb{1} \leq x \leq \alpha \mathbb{1} \}$$

By a classical theorem due to Kakutani and Krein, ReZ($\mathcal{U}$) is algebraic lattice and isometric-isomorphic to a space $C(S, \mathbb{R})$.

4. Antisymmetric M - ideals. The generalization of Bishop's approximation theorem.

We start with a natural generalization of the notion of a set of antisymmetry. Let $E \neq \{0\}$ be a complex Banach space and let X be a closed subspace of E. For each M - ideal $\mathcal{J}$, we shall denote by $\pi_{\mathcal{J}}$, the canonical map $E \to E/\mathcal{J}$.

Definition 4.1. A M - ideal $\mathcal{J}$ of E is said to be antisymmetric with respect to X provided that every $U \in \mathrm{ReZ}(E/\mathcal{J})$ such that $U(\pi_{\mathcal{J}}(X)) \subset \pi_{\mathcal{J}}(X)$ is a multiple of $I_{E/\mathcal{J}}$.

We shall denote by $\mathcal{A}_X(E)$ the set of all M - ideals of E, antisymmetric with respect to X.

Clearly, $\mathcal{A}_X(E) \subset \mathcal{A}_{\overline{X}}(E)$.

The fact that every point belongs to a maximal set of antisymmetry has the following noncommutative analogue.

Lemma 4.1. Suppose that E is M - distinguished and let $(\mathcal{J}_\alpha)_\alpha$ be a family of elements of $\mathcal{A}_X(E)$ such that $\mathcal{J} = \overline{\text{Span}} \cup \mathcal{J}_\alpha \neq E$. Then $\mathcal{J} = \cap \mathcal{J}_\alpha \in \mathcal{A}_X(E)$.

Corollary 4.1. Suppose that E is M - distinguished. Then every $\mathcal{J} \in \mathcal{A}_X(E)$, $\mathcal{J} \neq E$ contains a (unique) minimal ideal $\mathcal{J}_0$ in $\mathcal{A}_X(E)$.

The following result is an extension of de Branges' Lemma

Lemma 4.2. Let E be a Banach space, $X \neq \{0\}$ a subspace of E and f an extreme point of the unit ball of X^0. Then maximal M - ideal $\mathcal{J}$ contained in Kerf is antisymmetric with respect to X.

One denotes by $\widetilde{\mathcal{A}}_X(E)$ the family of all minimal antisymmetric ideals of E. The following theorem extends Bishop's theorem.

Theorem 4.1. Let E be a M - distinguished Banach space and let X be a closed subspace of E. Then, for every $x \in E$ we have:

$$d(x,X) = \sup\{ d(\pi_{\mathcal{J}}(x), \pi_{\mathcal{J}}(X)) \mid \mathcal{J} \in \widetilde{\mathcal{A}}_X(E)\}.$$

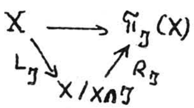
5. Non - commutative interpolation.

In the sequel E will denote a Banach space, B its unit ball and X a closed subspace of E.

Definition 5.1. A M - ideal $\mathcal{J}$ of E is said to be a strict interpolating ideal for X provided that

$$\pi_{\mathcal{J}}(B \cap X) = \pi_{\mathcal{J}}(B) \cap \pi_{\mathcal{J}}(X)$$

The basic remark is that the canonical surjection $\pi_{\mathcal{J}} : E \to E/\mathcal{J}$ admits a natural factorization.



The maps $L_{\mathcal{J}}$ and $R_{\mathcal{J}}$ are both continuous when $X/X\cap\mathcal{J}$ is endowed with the quatient topology.

Lemma 5.1. If $\mathcal{J}$ is a strict interpolating ideal for X, then the mapping $R_{\mathcal{J}} : X/X\cap\mathcal{J} \to \pi_{\mathcal{J}}(X)$ is an algebraic topologic izomorphism.

Since $X/X\cap\mathcal{J}$ is complet it follows (via Lemma 5.1) that $\pi_{\mathcal{J}}(X)$ is a closed subspace of $E/\mathcal{J}$.

Lemma 5.2. A M - ideal $\mathcal{J}$ of E is an interpolating ideal for X if and only if $\pi_{\mathcal{J}}(B \cap X)$ is dense in $\pi_{\mathcal{J}}(B) \cap \pi_{\mathcal{J}}(X)$.

Definition 5.2. A M- ideal $\mathcal{J}$ of E, is said to be a frontal ideal with respect to X, provided that the L - projection $P \in L(E',E')$, whose image is $\mathcal{J}^{o}$, leaves invariant X^{o}.

We shall denote by $\mathcal{F}_X(E)$ the set of all X - frontal ideals of E. If $\mathcal{J}$ and J are in $\mathcal{M}(E)$ then $\mathcal{J} \in \mathcal{F}_J(E)$.

The family $\mathcal{F}_X(E)$ is closed under finite sums and finite intersections.

Theorem 5.1. Every X - frontal ideal of E is a strict interpolating ideal for X.

The following result is an analoque of the fact that frontal subsets of frontal subsets are frontal too.

Theorem 5.2. Let $\mathcal{J}$ and J be two M - ideals of E such that $\mathcal{J} \subset J$ and $\mathcal{J} \in \mathcal{F}_X(E)$. Then, $J \in \mathcal{F}_X(E)$ if and only if $J/\mathcal{J} \in \mathcal{F}_{\pi_{\mathcal{J}}(X)}(E/\mathcal{J})$.

Theorem 5.3. Suppose that E is M - distinguished and X is a closed subspace of E. Then every minimal antisymmetric M - ideal with respect to X is a frontal ideal with respect to X. ($\widetilde{\mathcal{A}}_X(E) \subset \mathcal{F}_X(E)$).

This result extends the fact that every maximal antisymmetric set is a frontal set.

Bibliography

[1] Alfsen E. and Effros E.G.: Structure in real Banach spaces, Annals of Math. 96 (1972), 98 - 173

[2] Alfsen E.: M - structure and intersection properties of balls in Banach spèces, Israel J. Math. 13 (1972), 235 - 245

[3] Behrends E.: M - structure and the Banach - Stone theorem, Lectures Notes in Math. Vol 736, Springer - Verlag 1969

[4] Bernard A.: Caractérisations de certaines parties d'un espace compact muni d'un espace vectoriel ou d'une algèbre de fonctions continues, Ann. Inst. Fourier Grenoble 17, 2 (1967), 359 - 382

[5] Bishop E.: A generalization of the Stone - Weierstrass theorem, Pacific J. Math. 11, 1961, 777-783.

[6] Bunce J.: The intersection of closed ideals in a simplex spaces need not be an ideal, J. London Math. Soc. (2) 1, (1969), 67-68

[7] Combes J.F et Perdrizet F.: Certaines idéaux dans les espaces vectoriels ordonnés, J. Math. Pures et Appl 49 (1970), 29 - 59

[8] Dixmier J.: Les C - algebras et leurs représentations, Gauthier-Villars, Paris, 1968

[9] Evans R.: Resolving Banach spaces, Studia Math. 69 (1980), 91-107

[10] Feyel D. and de la Pradelle A.: Sur certains extensions du Théorème d'Approximation de Bernstein, Pacific J. Math. 115, 1984, 81 - 89

[11] Gamelin T.W.: Uniform algebras, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1969.

[12] Glicksbery I.: Measures orthogonal to algebras and sets of antisymetry, Trans. Amer. Math. Soc. 104 (1962), 415 - 435

[13] Hirsberg B.: M - ideals in complex functions spaces and algebras. Israel J. Math. 12, 133 - 146 (1972)

[14] Păltineanu G.: A generalization of the Stone - Weierstrass theorem for weighted spaces, Rev. Roum. Math. Pures Appl., 7, (1978)

[15] Păltineanu G.; Vuza D.T.: Ideale de interpolare în raport cu un subspaţiu al unei latici sau al unei C^* - algebre, Seminar ştiinţific S.L.O.T., Nr.10 (1989), 40-49

[16] Prolla J.B.: A generalized Bernstein approximation theorem, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. (1988), 104, 317 - 330.

[17] Schaeffer H.: Banach Lattices and Positive Operators, Springer - Verlag, 1974

[18] Silov G.E.: On rings of functions with uniform convergence, Ukrain Math. Zh. 3(1951), 404 - 411.
[19] Sucin I: Algebre de funcţii, Ed. Acad. R.S.R, Bucureşti, 1969
[20] Wils W.: The ideal center of partially ordered vector spaces, Acta Math. 127 (1971), 41-77.

A GAMLEN–GAUDET TYPE THEOREM IN THE UNCONDITIONAL PART OF $L_\infty(0,1)$ WITH RESPECT TO THE HAAR SYSTEM

by N. POPA

We consider the space U_∞, the unconditional part of the space $L_\infty(0,1)$ with respect to the Haar system $(h_i)_{i=1}^\infty$ and we classify the isomorphy types of the closed subspaces of U_∞ spanned by the subsequences of the Haar system. More precisely we show that there are only ten such distinct subspaces. This result is motivated by the previous work of Gamlen-Gaudet [3] and P. F. X. Müller [7].

§0 – Introduction

Let $k=0,1,\ldots$; $0\leq m\leq 2^k-1$. Then we define the dyadic interval $(km)=$ $=(2^{-k}m,2^{-k}(m+1)]$ and the Haar function h_{km} which is 1 on the left half of $(2^{-k}m,2^{-k}(m+1)]$, -1 on the right half and zero elsewhere.

We use also the notation h_n instead of h_{km}, where $n=2^k+m$ and $h_0(x)=1$ for $x\in[0,1]$.

1973 j. Gamlen and R. Gaudet characterized the closed subspaces of $L_p(0,1)$, $(1<p<\infty)$, spanned by subsequences of the Haar system $(h_i)_{i=0}^\infty$. They proved that there are only two distinct (up to an isomorphism) classes of such subspaces, namely l_p and $L_p(0,1)$ itself.

It seems to be natural to ask ourselves what can be said about the subspaces $[h_{k_i}]_{i=1}^\infty$ in the extremal cases $p=1$ or $p=\infty$.

It is clear that the unconditionality of the Haar system in the space $L_p(0,1)$, $(1<p<\infty)$, plays an important role in the proof of the Gamlen-Gaudet theorem, so since the Haar system is a conditional basis in $L_1(0,1)$

an moreover $L_\infty(0,1)$ is a nonseparable space, we can not expect ourselves to a straightforward extension of the Gamlen-Gaudet theorem in these extremal cases.

1987 P. F. X. Müller found the right answer to this problem for p=1. More precisely he characterized the closed subspaces $[h_{km}]_{(k,m)\in B}$, where $B\subset N$ is an infinite subset, of the dyadic Hardy space H_1.

We recall the definition (cf. [7]) of H_1: for $f=\sum_{(km)} a_{km}h_{km}\in L_1(0,1)$, put $S(f)=(\sum_{(km)} a_{km}^2 h_{km}^2)^{1/2}$, $||f||_{H_1}:=\int S(f)$ and $H_1:=\{f\in L_1; ||f||_{H_1}<\infty\}$.

But it was remarked in [2] that H_1 is the <u>unconditional part of $L_1(0,1)$ with respect to the Haar system</u> $(h_i)_{i=0}^{\infty}$, i.e. $H_1=\{f\in L_1;\ \int f dt=0$, s.t. $f=\sum_{i=1}^{\infty} a_i h_i$ the series being unconditionally convergent in $L_1(0,1)\}$ and $||f||_{H_1}$ is equivalent to $\sup_{\varepsilon_i=\pm 1} ||\sum_{i=1}^{\infty} a_i\varepsilon_i h_i||_{L_1}$.

So instead of $L_1(0,1)$ Müller considered H_1, the unconditional part of L_1, and he was able to find that there are only three distinct subspaces $[h_{k_i}]_i$ of H_1, namely l_1, H_1 and $(\sum_{n=1}^{\infty} H_1(n))_{l_1}$, where $H_1(n)$ is the subspace in H_1 spanned by the first 2^n-1 Haar functions.

Motivated by this last result we intend to characterize the closed subspaces $[h_{k_i}]_{i=1}^{\infty}$ of the unconditional part of the space $L_\infty(0,1)$ with respect to the Haar system and we get ten such subspaces.

In order to describe them we first consider the subspace a_0, the unconditonal part of the space c_0 (of all null-convergent sequences) with respect to a system $(c_i)_{i=1}^{\infty}$ similar to the Haar system of functions and we classify the subspaces $[c_{k_i}]_{i=1}^{\infty}$ of a_0.

Let us mention that the unexplained terminology used in this paper follows [5].

§1 - The space a_0 and Gamlen-Gaudet theorem for a_0

In order to classify the subspaces $[h_{k_i}]_{i=1}^{\infty}$ of U_∞ it is useful to study the discrete variant of the space U_∞ and first of all we will introduce the system $(c_i)_{i=1}^{\infty}$ of sequences, system which is similar to the classical

Haar system of functions.

We describe now the so-called <u>discrete Haar system indexed w.r.t. to N^2</u> $(c_{ij})_{i=0,j=0}^{\infty}$ as follows:

$c_{i,0}=\sum_{i=0}^{2^i-1} e_j-\sum_{j=2^i}^{2^{i+1}-1} e_j$ and $c_{i,k}=U_{2^{i+1}k}(c_{i,0})$ where $i=0,1,2,\ldots$ and $U_n(x):=$ $:=(x_n,x_{n+1},\ldots)$ for $x:=(x_0,x_1,\ldots)$. Here $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ stands for the standard unit basis in any space of sequences.

Sometimes it is useful to rearrange the system $(c_{ij})_{i=0,j=0}^{\infty}$ w.r. to N^* proceeding as follows:

$c_{2^i}:=c_{i,0}$ for $i=0,1,2,\ldots$

$c_{2^0+2^i}:=c_{i-1,2^0}$ for $i=1,2,\ldots$

.

.

.

$c_{\sum_{j=0}^{k-1}\varepsilon_j 2^j+2^k+2^i}:=c_{i-k-1,\ \sum_{j=0}^{k-1}\varepsilon_j 2^j+2^k}$, where $\varepsilon_j=0$ or 1, $1\leq k<i$ and $i=2,3,\ldots$

In what follows we call the <u>discrete Haar system</u> anyone of these two representations: $(c_i)_{i=1}^{\infty}$ or $(c_{ij})_{i=0,j=0}^{\infty}$.

The following definition is essentially contained in [5]. Let E be a real Banach space and $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ a basic sequence in E. We call the <u>unconditional part of E w.r. to</u> $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ and we denote by $Unc(E,x_n)$ the space $Unc(E,x_n):=\{x\in E$ s.t. $x=\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ unconditionally converges in E$\}$ endowed with the norm $||x||:=\sup_{\varepsilon_j=\pm 1}||\sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon_i a_i x_i||_E$ for $x=\sum_{n=1}^{\infty}a_n x_n$. It is well-known that $Unc(E,x_n)$ is a Banach space. Recall that a Schauder basis $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ unconditionally convereges in E iff $\sup_{\varepsilon_i=\pm 1;\,||\sum a_i x_i||\leq 1}||\sum_{i=1}^{\infty} a_i\varepsilon_i x_i||_E<\infty$.

Now we study the properties of the discrete Haar system $(c_i)_{i=1}^{\infty}$ in the space c_0.

Let $f=(f_i)_{i=1}^{\infty}\in c_0$ and denote by $a_j(f):=|\text{supp}\ c_j|^{-1}\sum_{i\in \text{supp}\ c_j} f_i c_j(i)$.

Using the classical Cèsaro theorem we have:

Lemma 1.1 The Fourier-Haar series $\sum_{j=1}^{\infty} a_j(f)c_j$ coordinatewise converges to $f\epsilon c_0$.

But more is true, namely:

Theorem 1.2 The discrete Haar system $(c_i)_{i=1}^{\infty}$ is a Schauder basis of c_0.

Proof By Lemma 1.2 it follows that the set $\{\sum_{i=1}^{k} a_i c_i,\ a_i\epsilon R,\ k\epsilon N\}$ is dense in c_0. We show that $\|\sum_{i=1}^{n} a_i c_i\|_{c_0} \leq 2\|\sum_{i=1}^{m} a_i c_i\|_{c_0}$ for all $a_i\epsilon R$ and all $n\leq m$. Then Nikolskii's criterion ends the proof.

Case I If $n=2^k<n<2^{k+1}-1$, the above inequality follows remarking that $|a|\leq|a+b|V|a-b|$ for all $a,b\epsilon R$.

Case II For $n=2^k-1<m=2^{k+1}$ for $l\geq 1$, we have $\sum_{i=1}^{2^k-1} a_i c_i = E(f|\sigma')-E(f|\sigma)$, where $f=\sum_{i=1}^{2^{k+1}} a_i c_i$, σ is the finite algebra generated by the following subsets $\{0,1,\dots,2^k-1\},\{2^k,\dots,2^{k+1}-1\},\{2^{k+1},\dots,2^{k+2}-1\},\dots,$ $\{2^{k+l-1},\dots,2^{k+l}-1\}$, σ' is the algebra generated by $\{0\},\{1\},\dots,\{2^k-1\},$ $\{2^k,\dots,2^{k+1}-1\},\dots,\{2^{k+l-1},\dots,2^{k+l}-1\}$ and $E(f|\sigma)$ is the conditional expectation of f with respect to σ. Hence $\|\sum_{i=1}^{n} a_i c_i\|\leq 2\|\sum_{i=1}^{m} a_i c_i\|$ for all $a_i\epsilon R$.

The third case, the general one, follows easy from the cases I and II. ◻

It is clear that $(c_i)_{i=1}^{\infty}$ is not an unconditional basis in c_0 and in what follows we denote by $a_0:=\mathrm{Unc}(c_0,c_i)=\{f\epsilon c_0;\ f=\sum_{i=1}^{\infty} a_i c_i$, the series being unconditionally convergent in $c_0\}$, endowed with the norm

$$|||f|||=\sup_{\epsilon_j=\pm 1}\ \|\sum_{j=1}^{\infty} a_j\epsilon_j c_j\|_{c_0}=\sup_{i\epsilon N}\sum_{\{j;\,i\epsilon \mathrm{supp}\, c_j\}}|a_j|. \qquad (\text{I}.1)$$

It is clear that $a_0=\{f\epsilon c_0;$ s.t. $|||f|||<\infty\}$.

Now we classify the subspaces of a_0 spanned by the subsequences of the basis $(c_i)_{i=1}^{\infty}$.

In the sequel B is an infinite subset of N^2.

We have the following obvious types of subspaces a_B of a_0 generated by $(c_{ij})_{(i,j)\in B}$.

1. $B=\{(j_k,0);\ 1\le j_1<j_2<\dots\}\cup A$, where A is a finite family of indices of the form (j,k). It is easy to show, using (1.1), that $a_B \simeq l_1$.

2. If there is a constant $M>0$ such that for each $i\in N$, $|\{j;\ i\in \operatorname{supp} c_{jk},\ (j,k)\in B\}|\le M$, then $a_B \simeq c_0$.

3. If $B=B_1\cup B_2$, where B_1 (resp. B_2) is the family from case 1. (resp. from case 2), then $a_B \simeq l_1 \oplus c_0$.

4. Let $A_n:=\{(j,k);\ 0\le j\le n-1,\ 2^{n-j-1}\le k\le 2^{n-j}-1\}$ and $B_n=\{(j,2^{n-j-1});\ 0\le j\le n-1\}$, where $n=1,2,\dots$ It is obvious that, putting $B=\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, we get $a_B \simeq (\sum_{n=1}^{\infty} l_1(n))_{c_0}$.

5. If $B=B_1\cup B_4$, where B_1 (resp. B_4) is the family from the case 1. (resp. from the case 4.) then $a_B \simeq l_1 \oplus (\sum_{n=1}^{\infty} l_1(n))_{c_0}$.

6. If $B=\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, we denote by X_0 the space a_B.

7. Let $B=N^2$. Then a_B coincides with a_0.

In what follows we will show that only these seven isomorphy types of the subspaces a_B of a_0 are possible. This is the Gamlen-Gaudet theorem for a_0.

It is known (cf. [1]) that the first five of these seven subspaces are pairwise nonisomorphic.

<u>Proposition 1.3</u> <u>The space</u> X_0 <u>is not isomorphic to anyone of the first five spaces above.</u>

<u>Proof</u> Since l_1 and c_0 have an unique unconditional basis it is clear that X_0 is not isomorphic neither to l_1 nor to c_0.

If X_0 would be isomorphic to $l_1\oplus c_0$, then $(\sum_n l_1(n))_{c_0}$ should be complemented in $l_1\oplus c_0$. This is impossible since by a theorem of Edelstein and Wojtaszczyk (cf. [5]- Remark 2 after Theorem 2.c.13) every complemented subspace of $l_1\oplus c_0$ should be isomorphic to one of the spaces

l_1, c_0 or $l_1 \oplus c_0$ and by [1] $(\sum_{n=1}^{\infty} l_1(n))_{c_0}$ is not isomorphic to anyone of these three spaces.

We will show now that $X_0 \neq (\sum_{n=1}^{\infty} l_1(n))_{c_0}$.

Assume the contrary is true and then by [1] it would follow that the basis $(c_{ij})_{(i,j)\in \cup A_n}$ of X_0 would be equivalent to the standard basis of $(\sum_{n=1}^{\infty} l_1(n))_{c_0}$.

This in turn imply that there is a constant $M>0$ indepent of n and a partition $(\tau_s)_{s=1}^{r}$ of the set A_n into pairwise disjoint subsets such that:

$$M^{-1} \max_{1\leq s\leq r} \sum_{\tau_s} |a_{ki}| \leq \||\sum_{A_n} a_{ki}c_{ki}\|| \leq M \max_{1\leq s\leq r} \sum_{\tau_s} |a_{ki}| \qquad (1.2)$$

for all $a_{ki}\in R$ and all $n\in N$.

Let us put $l=(j_0,j_1,\dots,j_{n-1})$ such that $\bigcap_{i=0}^{n-1} \operatorname{supp} c_{ij_i} \neq \emptyset$ and let us denote $B_{nl}:=\{(i,j_i);0\leq i\leq n-1,\ l=(j_0,\dots,j_{n-1})\}$. We have 2^n such distinct subsets B_{nl} of A_n. Fix B_{nl} and let $\tau_{i_1},\dots,\tau_{i_k}$ a partition of B_{nl} such that $\tau_i \cap B_{nl} \neq \emptyset$ for all $1\leq m\leq k$. Then, by (1.1.) and (1.2), we get the relation:

$$k\leq M. \qquad (1.3)$$

Moreover, for each $1\leq s\leq r$ and $0\leq i\leq n-1$ put $C_{i,s}:=\{j;$ s.t. $(i,j)\in\tau_s$ and $\operatorname{supp} c_{ij}$ be pairwise disjoint$\}$.

Then we have, by (1.1) and (1.2):

$$|C_{i,s}|\leq M \qquad (1.4)$$

for $1\leq s\leq r$, $0\leq i\leq n-1$.

Next we show that the relations (1.2), (1.3) and (1.4) lead to a contradiction.

Take $n=Mk$ for $k\in N$ which will be fixed later and take M in (1.2) sufficiently large such that

$$2^{M-1}\geq M(M+1). \qquad (1.5)$$

Let $B_{nl}^{M}=\{(i,j_i)\in B_{nl};\ M(k-1)\leq i\leq Mk-1\}$ for all $B_{nl}\subset A_n$ and let $M_1\leq M$

the number of all subsets τ_{i_j}, $1\leq j\leq M_1$, such that $\tau_{i_j}\cap B^M_{nl}\neq\emptyset$.

If $M_1=M$ for all B_{nl}, by (1.3) it follows that all the subsets $B_{nl}\setminus B^M_{nl}$ are covered by the subsets $(\tau_{i_j})^M_{j=1}$, hence at least one of the subsets $(\tau_{i_j})^M_{j=1}$, let us say τ_{i_1}, has the property that

$$|\tau_{i_1}|\geq M^{-1}(2^{Mk}-2^M) \ . \qquad (1.6)$$

Taking $k\in N$ sufficiently large we have that:

$$|\tau_{i_1}|\geq 2M^2k \qquad (1.7)$$

and putting $a_{ij}=1$, for $(i,j)\in\tau_{i_1}$ and 0 otherwise, we get the false relation $2Mk\leq Mk$.

Consequently there are $2^{M(k-1)}$ subsets $B_{nl}\subset A_n$ such that $1\leq M_1<M$ and moreover there is an unique $j_k\in N$ with the property that $(M(k-1),j_k)$ belongs to these $2^{M(k-1)}$ subsets. Take one of these subsets B_{nl} and denote by B^{2M}_{nl} the set $\{(i,j_i)\in B_{nl};\ M(l-2)\leq i\leq M(k-1)-1\}$.

Each of these B^{2M}_{nl} is covered by $0\leq M_2<M$ sets $(\tau_{i_j})^{M_1+M_2}_{j=M_1+1}$. If $M_2=0$ for all these B^{2M}_{nl}, then all B^{2M}_{nl} are covered by $\tau_{i_1},\dots,\tau_{i_{M_1}}$ and since $|\{(M(k-2),j_1)\in\bigcup_1 B^{2M}_{nl}\}|=2^{M-1}$, it follows that at least one of the sets $\tau_{i_1},\dots,\tau_{i_{M_1}}$ has $M_1 2^{M-1}\geq M+1$ elements $(M(k-2),j_1)$, which clearly contradicts (1.4). Consequently there are $2^{M(k-2)}$ sets $B_{nl}\subsetneq A_n$ such that B^{2M}_{nl} is covered by M_2 sets $(\tau_{i_j})^{M_1+M_2}_{j=M_1+1}$, where $1\leq M_2<M$. Assuming $M_1+M_2<M$, we proceed as above finding the sets $\tau_{i_{M_1+M_2+1}},\dots,\tau_{i_{M_1+M_2+M_3}}$ for $1\leq M_3<M$ and after at most M steps we find $2^{M(k-M)}$ sets $B'_{nl}\subsetneq A_n$ such that $|\ \{(0,j_1)\in\bigcup_1 B'_{nl}\}|=2^{Mk-M^2}$ and such that B'_{nl} be covered by at most M sets $\tau_{i_1},\dots,\tau_{i_M}$. Consequently there is a set, say τ_1, such that

$|\{(0,j_1)\in\tau_1\}|\geq M^{-1}2^{Mk-M^2}$. Take k verifying (1.7) and

$$M^{-1}2^{Mk-M^2}\geq M+1 . \qquad (1.8)$$

Then it follows that (1.4) is violated.

So, (1.2) does not hold for any n, thus $X_0 \not\approx (\sum_{n=1}^{\infty} l_1(n))_{c_0}$, and by Proposition 4.1 – [1], X_0 is not a complemented subspace of $(\sum_{n=1}^{\infty} l_1)_{c_0}$.

If $X_0 \approx l_1 \oplus (\sum_{n=1}^{\infty} l_1(n))_{c_0}$, then X_0 would be complemented into $(\sum_{n=1}^{\infty} l_1)_{c_0}$, which we have seen that is false. ∎

<u>Proposition 1.4</u> <u>All seven spaces</u> a_B <u>are pairwise nonisomorphic.</u>

<u>Proof</u> Obviously

$$X_0 \oplus l_1 \approx a_0 . \qquad (1.9)$$

By Proposition 1.3, relation (1.9) and by theorem of Edelstein and Wojtaszczyk it follows that a_0 is not isomorphic to the first five spaces of the list of a_B. It remains to prove that

$$X_0 \not\approx a_0 . \qquad (1.10)$$

But using the fact that X_0 is an order continuous Banach lattice with respect to the order given by the basis $(c_j)_{j=1}^{\infty}$ we get X_0 contains l_1 (cf. [6]), so (1.10) is proved. ∎

<u>Theorem 1.5</u> <u>The seven spaces listed above are all the subspaces of</u> a_0 <u>of the type</u> a_B.

<u>Proof</u> Let $B\subset N^2$ an infinite subset. Then $B=B_1\cup B_2$, where $B_1\subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ and $B_2\subset\{(i,0);i\in N\}$. By (1.9) it suffices to show that (up to an isomorphism) c_0, $(\sum_{n=1}^{\infty} l_1(n))_{c_0}$ and X_0 are all the subspaces a_B of X_0.

Since $X_0=(\sum_{n=1}^{\infty} a_{A_n})_{c_0}$ it is clear that one of the following situations occurs.

1. There is a subsequence $(n_i)_{i\in N}\subseteq N$ such that the set $\{c_{kj};(k,j)\in B\cap A_{n_i}\}$ contains the elements $c_{k(l),j}$, (with $0\leq k(l)\leq n_i$ and $1\leq l\leq r_i$ such that $\lim_{i\to\infty} r_i=\infty$), such that there is j so that the support of $c_{k(r_i),j}$ intersects the supports of at least two elements $c_{k(r_i-1),s}$, each of these

elemnts having supports which intersect the support of at least two elemts $c_{k(r_i-2),s}$, etc.

The nonexistence of such a sequence $(n_i)_i$ implies the existence of a n_0 such that for each $n\geq n_0$ the sets $\{i;(i,j)\in B\cap A_n\}$ be in one of the following situations:

2. There is a natural number K independent of n, such that $|\{i;(i,j)\in B\cap A_n\}|\leq$ $\leq K$ for all $n\geq n_0$.

3. $\sup_n |\{i,(i,j)\in B\cap A_n\}|=\infty$, but all the supports of elements c_{ij}, with $(i,j)\in B\cap A_n$ for $n\geq n_0$, are pairwise disjoint.

4. Denoting by $k(l):=|\{i,(i,j)\in B\cap A_n\}|$ for $1\leq l\leq r$, we have $\lim_{n\to\infty} k(r_n)=\infty$ and moreover $B\cap A_n = \bigcup_{k=1}^{M} C_k$, where M does not depend on n, such that the support of each $c_{k(r_n),j}$, with $(k(r_n),j)\in C_k$, intersects only one support of an element $c_{k(r_n-1),s}$ with $(k(r_n-1),s)\in C_k$ for $k=1,2,\dots,M$; etc.

In cases 2. and 3., obviously $a_B=c_0$ and in the case 4. it follows that $a_B=(\sum_{n=1}^{\infty} l_1(n))_{c_0}$.

In case 1. $Y:=a_B$ contains a complemented subspace isomorphic to X_0, namely the subspace $Z:=(\sum_{n=1}^{\infty} Z_n)_{c_0}$, where $Z_n:=[c_{k(r_n),j};c_{k(r_n-1),s_1};$ $c_{k(r_n-1),s_2}; c_{k(r_n-2),s_{11}}; c_{k(r_n-2),s_{12}};\dots]$, where $\operatorname{supp} c_{k(r_n-1),s_i}\cap$ $\cap \operatorname{supp} c_{k(r_n),j}\neq\emptyset$ for i=1,2 and similar relations for $c_{k(r_n-2),s_{1i}}$ with i=1,2; etc.

Since

$$X_0=(\sum_{n=1}^{\infty} X_0)_{c_0} \tag{1.11}$$

the decomposition method of Pelczynski gives us that $Y\approx X_0$, which ends the proof of Theorem 1.5 . □

§2 - The space U_∞ and Gamlen-Gaudet theorem in U_∞

Let us remark that the Haar system $(h_{nk})_{n=0,k=0}^{\infty\ \ 2^k-1}$ is a basic sequence in $L_\infty(0,1)$, so we can consider the Banach space $U_\infty := \mathrm{Unc}(L_\infty(0,1),h_{nk})$. The norm in U_∞ is given by:

$$|||x||| = \sup_{n\in N}\ \sup_{t\in[0,1]}\ \sum_{k\leq n;\, t\in \mathrm{supp}\, h_{kj}} |a_{kj}| \tag{2.1}$$

Let $B\subset N^2$ an infinite subset. We intend to classify the subspaces $U_B := [h_{nk}]_{(n,k)\in B}$ of U_∞.

First we list the obvious subspaces $U_B \subseteq U_\infty$.

<u>Proposition 2.1 Besides the seven subspaces a_B of a_0 there are three other subspaces U_B, namely $(\sum_{n=1}^{\infty} l_1)_{c_0}$, $(\sum_{n=1}^{\infty} l_1)_{c_0} \oplus X_0$ and U_∞. All these ten spaces are pairwise nonisomorphic.</u>

<u>Proof</u> All these spaces have a natural representation as subspaces of the type U_B. Let us mention for instance that $U_B = U_\infty$ if $B=\{(n_i,k_{ij});\ n_1<n_2<n_3<\ldots,\ 1\leq j\leq 2^{i-1}$, $\mathrm{supp}\, h_{n_i k_{ij}} \cap \mathrm{supp}\, h_{n_i k_{il}} = \emptyset$ for $j\neq l$ and $\mathrm{supp}\, h_{n_i k_{ij}} \cap \mathrm{supp}\, h_{n_{i+1} k_{i+1,l}} \neq \emptyset$, $l=2j-1$ or $2j\}$. Moreover, for $B=\{(n_i,k_i);\ n_1<n_2<\ldots$, $\mathrm{supp}\, h_{n_i k_i} \cap \mathrm{supp}\, h_{n_{i+1} k_{i+1}} \neq \emptyset$, $i\in N\}$, then $U_B = l_1$ and for $B=\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$, where B_i are the above sets such that $\mathrm{supp}\, h_{nk} \cap \mathrm{supp}\, h_{nl} = \emptyset$ for all $(n,k)\in B_i$, $(m,l)\in B_j$ for $i\neq j$, then $U_B = (\sum_{n=1}^{\infty} l_1)_{c_0}$. Finally for $B=\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, where $A_n=\{(m_i,k_{ij});\ i\leq n;\ m_1<m_2<\ldots<m_n;\ 1\leq j\leq 2^{i-1}$, $\mathrm{supp} h_{m_i k_{ij}} \cap \mathrm{supp}\, h_{m_i k_{il}} = \emptyset$ for $j\neq l$ and $\mathrm{supp}\, h_{m_i k_{ij}} \cap \mathrm{supp}\, h_{m_{i+1} k_{i+1,l}} = \emptyset$ for $l=2j-1$ or $l=2j\}$ and moreover $\mathrm{supp}\, h_{mk} \cap \mathrm{supp}\, h_{lj} = \emptyset$ for all $(m,k)\in A_n$ and $(l,j)\in A_p$ for $n\neq p$, then $U_B = X_0$.

It remains to show that the last three spaces of the above list are pairwise nonisomorphic and moreover nonisomorphic to any first seven spaces of the list. It is known (cf. [1]) that $(\sum_{n=1}^{\infty} l_1)_{c_0}$ is nonisomorphic to the first five spaces. Since X_0 is not isomorphic to a complemented subspace of $(\sum_{n=1}^{\infty} l_1)_{c_0}$, it follows that $(\sum_n l_1)_{c_0} \not\approx X_0$ and $(\sum_n l_1)_{c_0} \not\approx l_1 \oplus X_0$.

Similarly we may show that $(\sum_n l_1)_{c_0} \oplus X_0$ is not isomorphic to anyone of the first eight spaces of the list except perhaps $l_1 \oplus X_0$ (this case will be studied later).

Simple arguments show that U_∞ is not isomorphic to all the spaces which precede it in this list except $l_1 \oplus X_0$ and $(\sum_n l_1)_{c_0} \oplus X_0$.

It remains to show that $(\sum_n l_1)_{c_0} \oplus X_0$ is not isomorphic neither to $l_1 \oplus X_0$ not to U_∞ and U_∞ is not isomorphic to $l_1 \oplus X_0$.

In order to prove these three nonisomorphisms we will use Theorem 1.1-[1]. First let us show that $U_\infty \not\approx l_1 \oplus X_0$. Assume the contrary is true. Applying Theorem 1.1 - [1] for m=2, for l_1 and X_0 instead of the spaces $(X_i)_{i=1}^2$ from the statement of this theorem and for $z_n = T(h_n)$, $T: U_\infty \to l_1 \oplus X_0$ being an isomorphism, we get a partition of $\mathbb{N}$, $(A_i)_{i=1}^2$ such that $(h_n)_{n\in A_1}$ be equivalent to $(P_1 T h_n \otimes r_n)_{n\in A_1} \subseteq L_2([0,1],X_0)$ and $(h_n)_{n\in A_2}$ be equivalent to $(P_2 T h_n \otimes r_n)_{n\in A_2} \subseteq L_1([0,1],l_1)$, P_1 and P_2 being the canonical projections of $X_0 \oplus l_1$ onto its components.

Since $l_1 \not\subseteq X_0$ it follows that $(h_i \otimes h_j)_{i,j}$ is a shrinking basis in $L_2([0,1],X_0)$ and consequently $l_1 \not\subset [h_n]_{n\in A_1} \subset L_2([0,1],X_0)$. Denoting by $\sigma_i := \{t\in[0,1]$, t belongs to an infinity of the supports of h_n, $n\in A_i\}$, i=1,2, it follows that $\sigma_1 = \emptyset$ and thus $|\sigma_2| = \infty$. Hence $(\sum_n l_1)_{c_0} \subseteq [h_n]_{n\in A_2}$ (cf. Corollary 2.3 and the proof which follows after it). This inclusion is impossible, otherwise $c_0 \subset L_1([0,1],l_1)$ (cf. [9]).

Completely similar one shows that $(\sum_n l_1)_{c_0} \oplus X_0 \not\approx l_1 \oplus X_0$.

Now we show that $U_\infty \not\approx (\sum_n l_1)_{c_0} \oplus X_0$. otherwise it would exist an isomorphism $T: U_\infty \to (\sum_n l_1)_{c_0} \oplus X_0$, consequently it would exist a decomposition of $\mathbb{N}$ into $A_1 \cup A_2$ such that $[h_n]_{n\in A_2} \subset L_2([0,1],X_0)$ and $(h_n)_{n\in A_1}$ would be

M-equivalent to $(u_n \otimes r_n)_{n\in A_1}$ into $L_\infty([0,1],(\sum_n l_1)_{c_0})$. Since $l_1 \not\subset [h_n]_{n\in A_2}$, it follows that $U_\infty \subset [h_n]_{n\in A_1}$ (see the proof of Proposition 2.2).

By the proof of Theorem 1.1 - [1] it follows the existence of an M non depending on $k\in N$ such that, denoting by $B_k = A_1 \cap \{1,2,\ldots,k\}$, we have that $(h_n)_{n\in B_k}$ is M-equivalent to $(\ell_n)_{n\in B_k} \in [\sum_1^{2^k}(\sum_{n=1}^\infty l_1)_{c_0}]_\infty$ and moreover $[h_n]_{n\in B_k}$ is M-complemented in this last space for all $k\in N$. By ℓ_n we denote $(\varepsilon_n^1 u_n, \varepsilon_n^2 u_n, \ldots, \varepsilon_n^{2^k} u_n)$, where $\varepsilon_n^i = \pm 1$ for $1\le i\le 2^k$ and $u_n = P_1 T h_n$ for $n\in B_k$.

But there is the isometry $U_k : [\sum_1^{2^k}(\sum_{n=1}^\infty l_1)_{c_0}]_\infty \to (\sum_n l_1)_{c_0}$ for $k\in N$. put now $v_{nk} = U_k \ell_n$ for $n\in B_k$ and it follows that $(h_n)_{n\in B_k}$ is M-equivalent to $(v_{nk})_{n\in B_k}$ for all $k\in N$. Moreover, let Q_k be the projection of $[\sum_1^{2^k}(\sum_{n=1}^\infty l_1)_{c_0}]_\infty$ onto $[\ell_n]_{n\in B_k}$. Then $R_k := U_k Q_k U_k^{-1}$ is the projection of $(\sum_{n=1}^\infty l_1)_{c_0}$ onto $[v_{nk}]_{n\in B_k}$ and $\|R_k\| \le \|Q_k\| \le M$ for all $k\in N$.

Hence $(h_n)_{n\in B_k}$ is M-equivalent to the M-unconditional and M-complemented sequence $(v_{nk})_{n\in B_k}$ in $(\sum_n l_1)_{c_0}$ for all $k\in N$.

By Proposition 4.1 - [1] it follows that there is $K>0$ non depending on $k\in N$, such that for all $k\in N$ there is a partition of B_k into the sets τ_s, $1\le s\le r_k$, such that

$$K^{-1}\max_s \sum_{n\in\tau_s} |a_n| \le \left\|\sum_{n\in B_k} a_n h_n\right\| \le K.\max_s \sum_{n\in\tau_s} |a_n|$$

for all $a_n\in R$.

Since $X_0 \subseteq U_\infty \subseteq [h_n]_{n\in A_1}$, it follows that for a fixed $l\in N$, there is $k(l)\in N$ such that for the set $A_l := \{(j,k) ; 0\le j\le n-1,\ 2^{n-j-1}\le k\le 2^{n-j}-1\}$, there is a set $A_l' \subseteq B_{k(l)}$ so that $[h_{jk}]_{(j,k)\in A_l}$ is isometric to $[h_n]_{n\in A_l'}$.

Taking $\tau_s' = \tau_s \cap A_l'$ we have:

$$K^{-1}\max_s \sum_{n\in\tau_s'} |a_n| \le \left\|\sum_{n\in A_l'} a_n h_n\right\| \le K.\max_s \sum_{n\in\tau_s'} |a_n|$$

for all $a_n \in R$ and all $l \in N$, which is impossible by the proof of Proposition 1.3. ∎

Denote by σ the set $\{t \in [0,1]$; t belongs to an infinity of the supports of h_{nk}; $(n,k) \in B\}$.

As in the proof of Theorem 1.5 we can show that $\sigma = \emptyset$ implies that U_B is isomorphic to one of the following spaces: c_0, $(\sum_{n=1}^{\infty} l_1(n))_{c_0}$ and X_0.

If $|\sigma| < \infty$, then U_B is obviously isomorphic to one of the following spaces: l_1, $c_0 \oplus l_1$, $l_1 \oplus (\sum_{n=1}^{\infty} l_1(n))_{c_0}$, $l_1 \oplus X_0$. It remains to show that $|\sigma| = \infty$ implies that U_B must be isomorphic to $(\sum_{n=1}^{\infty} l_1)_{c_0}$, $(\sum_{n=1}^{\infty} l_1)_{c_0} \oplus X_0$ or U_∞ itself.

Now we denote by σ' the set of accumulations points of σ.

Proposition 2.2 Let $\sigma \subset \sigma'$. Then $U_B = U_\infty$.

Proof Let $t_0 \in \sigma$. There is a dyadic interval $I_{k_0 i_0}$ such that supp $h_{k_0 i_0} = I_{k_0 i_0}$ and $t_0 \in I_{k_0 i_0}$. Since $t_0 \in \sigma'$ there are $t_1, t_2 \in \sigma$ with $t_1 \neq t_2$ such that $t_1, t_2 \in \mathring{I}_{k_0 i_0}$. Hence there is $I_{k_1 i_1}, I_{k_1 i_2} \subset I_{k_0 i_0}$ such that $I_{k_1 i_1} \cap I_{k_1 i_2} = \emptyset$, $t_1 \in I_{k_1 i_1}$, $t_2 \in I_{k_1 i_2}$. Since $t_1, t_2 \in \sigma'$, there are $t_{11}, t_{12} \in \sigma \cap I_{k_1 i_1}$ and t_{21}, $t_{22} \in \sigma \cap I_{k_1 i_2}$. t_{11}, t_{12} belonging to σ it follows that there are $I_{k_2 i_3}$, $I_{k_2 i_4} \subset I_{k_1 i_1}$ so that $I_{k_2 i_3} \cap I_{k_2 i_4} = \emptyset$ and $t_{11} \in I_{k_2 i_3}$, $t_{12} \in I_{k_2 i_4}$. Similarly there are disjoint intervals $I_{k_2 i_5}, I_{k_2 i_6}$ included into $I_{k_1 i_2}$ such that $t_{21} \in I_{k_2 i_5}$, $t_{22} \in I_{k_2 i_6}$ and so on.

It follows easily that $[h_{k_n i_j}]_{n=1,\, 2^n-1}^{\infty \quad 2^{n+1}-2} = U_\infty$ and the decomposition method of Pelczynski shows that $U_B = U_\infty$. ∎

Corollara 2.3 If σ is an uncountable set, then $U_B = U_\infty$.

Proof By a well-known (cf. [8]) theorem it follows that $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$, where σ_2 is a perfect set (i.e. $\sigma_2 = \sigma_2'$). Consequently U_B contains a complemented subspace isomorphic to U_∞, hence U_B itself is isomorphic to U_∞. ∎

Now it remains the case that σ is a countable set so that $\sigma\not\subset\sigma'$.

Put then $\tau_0:=\sigma\setminus\sigma'\neq\emptyset$ and $\tau_1=\sigma'\cap\sigma$.

If $\sigma_1=\emptyset$, then it is easy to show that U_B is isomorphic either to $(\sum_n l_1)_{c_0}$ or to $(\sum_n l_1)_{c_0}\oplus X_0$.

If $\sigma_1\neq\emptyset$ and $\sigma_1\subset\sigma_1'$ by Proposition 2.2 it follows that $U_B=U_\infty$. Hence let us assume that $\sigma_1\not\subset\sigma_1'$ put $\sigma_2=\sigma_1\cap\sigma_1'$ and proceeding as above we can define for each ordinal number of the second class $\alpha<\Omega$ (cf. [8]) the set σ_α. More precisely if α is a limit ordinal, that is, there is not a β so that $\beta+1=\alpha$, we take $\sigma^{(\alpha)}=\bigcap_{\beta<\alpha}\bar{\sigma}_\beta$ and $\sigma_\alpha=\sigma\cap\sigma^{(\alpha)}$.

It is known that there is an ordinal $\alpha_0<\Omega$ so that $\sigma_{\alpha_0}=\sigma_\beta$ for all $\beta>\alpha_0$ and we may assume $\sigma_{\alpha_0}=\emptyset$. So we get the sequence of pairwise disjoint sets $\tau_0=\sigma\setminus\sigma'$, $\tau_1=\sigma_1\setminus\sigma_1',\dots,\tau_\beta=\sigma_\beta\setminus(\sigma_\beta)'$ for all $\beta\leq\alpha_0$. Then $\sigma=\bigcup_{0\leq\beta\leq\alpha_0}\tau_\beta$.

Now let $\tau_0=(t_{0i})_{i=1}^\infty$, where τ_{0i} are the isolated points of σ and let us denote by $B_0\subset B$ the set of indices such that $B_0=\bigcup_{i=1}^\infty B_{0i}$, where $t_{0i}\in$ $\in\bigcap_{(k,j)\in B_{0i}}\text{supp } h_{kj}$, $i=1,2,\dots$; and $\text{supp } h_{kj}\cap\text{supp } h_{ml}=\emptyset$ for $(k,j)\in B_{0i}$ and $(m,l)\in B_{0n}$ with $i\neq n$. Then $[h_{kj}]_{(k,j)\in B_0}$ is isometric to $(\sum_n l_1)_{c_0}$ by the map T_0 which carries the l^{th} function h_{kj} with $(k,j)\in B_{0i}$ onto e_{li} the l^{th} element of the i^{th} copy of l_1 into $(\sum_{n=1}^\infty l_1)_{c_0}$.

Put $\tau_1=(t_{1i})_{i=1}^\infty$ and let us consider the set of indices $B_1\subset B\setminus B_0$, disjoint from B_0 such that $B_1=\bigcup_{i=1}^\infty B_{1i}$ with $t_{1i}\in\bigcap_{(k,j)\in B_{1i}}\text{supp } h_{kj}$, $i=1,2,\dots$ and $\text{supp } h_{kj}\cap\text{supp } h_{ml}=\emptyset$ for $(k,j)\in B_{1i}$ and $(m,l)\in B_{1n}$ with $i\neq n$.

Next we show that there is an isometry $T_1:[h_i]_{i\in B_0\cup B_1}\to(\sum_n l_1)_{c_0}$ which extends T_0.

Then $|||\sum_{i=1}^\infty\sum_{(j,k)\in B_{1i}}a^i_{jk}h_{jk}+\sum_{i=1}^\infty\sum_{(j,k)\in B_{0i}}b^i_{kj}h_{kj}|||=$

$=|||\sum_{i\in N_1}\sum_{(k,j)\in B_{0i}} b^i_{kj}h_{kj}|||\vee|||\sum_{i}\sum_{(k,j)\in B_{1i}} a^i_{kj}h_{kj}+\sum_{i\in N\setminus N_1}\sum_{(k,j)\in B_{0i}} b^i_{kj}h_{kj}|||,$

where $N_1\subset N$ so that supp $h_{kj}\cap$ supp $h_{ml}=\emptyset$ for $(k,j)\in\bigcup_{i\in N_1}B_{0i}$ and $(m,l)\in B_1$.

Hence we may assume that for all $(k,j)\in B_{0i}$, supp $h_{kj}\subset$ supp h_{ml}, where $(m,l)\in B_1$ and it follows that: $|||\sum_{i}\sum_{(k,j)\in B_{1i}} a^i_{kj}h_{kj}+\sum_{i}\sum_{(k,j)\in B_{0i}} b^i_{kj}h_{kj}|||=$

$=\bigvee_{i=1}^{\infty}|||\sum_{(k,j)\in B_{1i}} a^i_{kj}h_{kj}+\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{B_{0l}} b^{i}_{kj}h_{kj}|||.$

Fix $i\in N$. We have $|||\sum_{(k,j)\in B_{1i}} a^i_{kj}h_{kj}+\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{(k,j)\in B_{0i}} b^l_{kj}h_{kj}|||=$(since supp $h_{kj}\subset$ supp $h_{k_1m_1}$ for all $(k,j)\in\bigcup_{l\in N_1}B_{0l}$ and $(k_1,m_1)\in B_{1i}$)$=|a^i_{k_1m_1}|+$

$+\sup(|||\sum_{(k_2,j)\in B_{1i}} a^i_{k_2j}h_{k_2j}+\sum_{l\notin N_1}\sum_{(k,j)\in B_{0l}} b^l_{kj}h_{kj}|||,|||\sum_{l\in N_1}\sum_{B_{0l}} b^l_{kj}h_{kj}|||)\leq$

$\leq$(using a set N_2 whose definition is like those of N_1)$<$

$<|||\sum_{l\in N_1}\sum_{(k,j)\in B_{0l}} b^l_{kj}h_{kj}|||\vee|||\sum_{l\in N_2}\sum_{(k,j)\in B_{0l}} b^l_{kj}h_{kj}|||\vee(|a^i_{k_1m_1}|+|a^i_{k_2m_2}|+$

$+|||\sum_{(k_3,j)\in B_{1i}} a^i_{k_3j}h_{k_3j}+\sum_{l\notin N_1\cup N_2}\sum_{(k,j)\in B_{0l}} b^l_{kj}h_{kj}|||)\leq\dots$

$\leq\bigvee_{m=1}^{\infty}|||\sum_{l\in N_m}\sum_{(k,j)\in B_{0l}} b^l_{kj}h_{kj}|||\vee(\sum_{j=1}^{\infty}|a^i_{k_jm_j}|).$

It follows that $|||\sum_{i}\sum_{(k,j)\in B_{1i}} a^i_{kj}h_{kj}+\sum_{i}\sum_{(k,j)\in B_{0i}} b^i_{kj}h_{kj}|||\leq$

$\leq\bigvee_{m=1}^{\infty}|||\sum_{l\in N_m}\sum_{B_{0l}} b^l_{kj}h_{kj}|||\vee\bigvee_{i=1}^{\infty}(\sum_{j=1}^{\infty}|a^i_{k_jm_j}|).$

The reverse inequality is obvious $(h_i)_i$ being an unconditional basis. This gives us the isometry T_1 which extends T_0.

Consequently, for all finite ordinals n we may define isometries $T_n:[h_{kj}]_{(k,j)\in\bigcup_{1\leq i\leq n}B_i}\to(\sum_{n=1}^{\infty} l_1)_{c_0}$ which map the natural bases one onto another. If $\alpha\leq\alpha_0$ is a limit ordinal, the above procedure works unchanged and consequently using the transfinite induction we get an isometry $T_{\alpha_0}:[h_{kj}]_{(k,j)\in\bigcup_{\alpha\leq\alpha_0}B_\alpha}\to(\sum_{n=1}^{\infty} l_1)_{c_0}$.

Let $B':=B\setminus\bigcup_{\alpha\leq\alpha_0}B_\alpha$ and remark that $U_{B'}$ is either of finite dimension or isomorphic to one of the following spaces: $(\sum_{n=1}^{\infty} l_1(n))_{c_0}$ or X_0.

Consequently U_B is isomorphic either to $(\sum_n l_1)_{c_0}$ or to $(\sum_n l_1)_{c_0} \oplus X_0$.

This ends the proof of Gamlen-Gaudet theorem for U_∞:

Theorem 2.4 All the isomorphy types of subspaces U_B of U_∞ are those from the statement of Proposition 2.1 .

References

[1]- J. Bourgain, P.G. Casazza, J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, Banach spaces with a unique unconditional basis up to permutation, Memoirs AMS, 54, nr. 322, (1985), 1-111.

[2] - S.Y.A. Chang, Z. Cisielski, Spline characterizations of H^1, Studia Math., 75, (1983), 183-192.

[3]-J. L. B. Gamlen, R. J. Gaudet, On subsequences of the Haar system in $L_p(0,1)$, $(1<p<\infty)$, Israel J. Math., 15, (1973), 404-413.

[4] - A. Garsia, Martingale inequalities; Seminar Notes on recent progress, W. A. J. Benjamin Inc., Reading, 1973.

[5] - J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, Classical Banach spaces I, Springer, Berlin, 1977.

[6] - P. Meyer-Nieberg, Zur schwachen Kompaktheit in Banachverbänden, Math. Z., 134, (1973), 303-315.

[7] - P. F. X. Müller, On subsequences of the Haar basis in $H^1(\delta)$ and isomorphism between H^1-spaces, Studia Math., 85, (1987), 73-90.

[8] - I. P. natanson, Theory of functions of real variables (russian), Moscow, 1950.

[9] - N. Popa, Die Permanenzeigenschaften der Tensorprodukte von Banachverbänden, in "Romanian-Finnish Seminar on Complex Analysis" L.N.M.743, Springer, Berlin, 1979.

Institute of Mathematics Romanian Academy
P.O. Box 1-764, 70700 Bucharest ROMANIA

COMMUNICATIONS

Résumés

SUR LA CONVERGENCE DES MARTINGALES DANS R.I. ESPACES

Antipa M.Adrian
Fac. de matematică
Universitatea Bucuresti

Le resultat est une facile extension du théorème sur la convergence des martingales bornées dans $L_p(m)$, $1<p<\infty$, m mésure de probabilité. On a pris les notations de [1] et [2].

<u>Théorème.</u> Soient X un espace invariant aux rearrangements sur $[0,1]$ (r.i.espace en bref), $X \neq L_1, L_\infty$ et $\{F_n\}_n$ une suite croissante des σ-algebres qui génère la σ-algebre borelienne de $[0,1]$. Alors, pour qu'une martingale $\{f_n\}_n$ relative à $\{F_n\}_n$ soit convergente dans X il faut et il sufit qu'elle soit bornée dans X, c.a.d. $\sup_n \|f_n\|_X < \infty$

Pour le démonstré, on utilise les memes idées que dans le cas classique et des propriétés des r.i. espaces.

[1] J.Lidenstrauss, L.Tzafriri: Classical Banach Spaces, II. 1979
[2] J.Diestel, J.J.Uhl: Vector Measures, Math. Surveys, No.15, Amer. Math. Soc., 1977

GENERALIZING THE MINKOWSKIAN SPACE-TIME

T. Bălan (Univ. Craiova)

The Minkowskian space-time is essentially considered as a world endowed with a super-additive metric. Its former generalization to a Pontrjaguine Π_1 space keeps up the fundamental properties concerning the causal order, temporal and spatial norms and metrics, orthogonality, hyperbolical and circular angles, etc. A similar, but more general structure, is studied in the world of the events which happen in a normed or in a metric space. The specific properties refer to monotony, simultaneity, characterization of the inner product spaces between the normed ones and the imminence after common causes.

Simple examples like $\|f\| = \inf_{t \in T} f(t)$, defined on the cone of the strict order of $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}(T)$, together with the temporal norms in event worlds lead to the general notion of super-additive (s.a.) norm and metric. As for the s.a. metrics the domain's restriction is always possible, the prolongation's problem appears to be more significant. Apart from the symmetric prolongation, we have:

<u>Theorem</u>. If $\sigma : K \to \mathbb{R}_+$ is a normal s.a. metric and $\bar{\sigma} : \overset{\top}{K} \to \mathbb{R}_+$ is its standard prolongation (which vanishes on $\overset{\top}{K} \setminus K$), then:

a) $\bar{\sigma}$ is a s.a. metric too, and

b) $\bar{\sigma}$ has no proper extension.

The farther generalizations have a qualitative character and consist of structures dual to the uniform topological and topological ones. These structures, called (u) horistological, are considered structures of discreteness and the basic tool for introducing them is the ideal's technique.

For u.h. the following metrizability theorem holds:

<u>Theorem</u>. The u.h. $(W, \mathcal{H})$ is generated by a family of p.s.a. metrics if and only if $\mathcal{H}$ admits a basis consisting of exhaustive prospects.

The horistology on W is defined by a function $\chi : W \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(W))$ which attaches to each point of W an ideal of perspectives. An alternative is to use operators like the premise operator (corresponding to the topological interior) $p : \mathcal{P}(W) \to \mathcal{P}(W)$, for which $p(A) = \{ x \in W : A \in \chi(x)\}$. In particular the completed directed sets admits natural horistologies.

The (u) horistologies generate proper orders on the considered worlds, which play an important role in properties like:

Proposition. If P is the premise operator of (W, χ), then:

a) $p(A) \subseteq p(K[A])$

b) $K^{-1}[p(K[A])] = p(A)$

c) if $A = K^{-1}[A]$, then $p(A) = \emptyset$.

The morphisms of the (u) horistologies are the so called discrete (u) functions, which are dual to the (u) continuous ones. Replacing the notio of convergence by its horistological dual (emergence), we obtain the properties of discreteness by analogy with those of continuity

Theorem. Let (W, χ) and (M, φ) be horistological worlds and let p_χ and p_φ be the corresponding prelude operators. Then $f: W \to M$ is discrete on W if and only if $f(p_\chi(A)) \subseteq p_\varphi(f(A))$ for each $A \subseteq W$.

The most important references are:

[1] Bognár J., Indefinite inner product spaces, Springer-Verlag, 1974

[2] Cristescu R., Analiză funcţională, EDP, Bucureşti 1970

[3] Kelley J.L., General Topology, Van Nostrand Comp., 1968.

Prolongement des operateurs (o)-bornés

Irina Cătuneanu

§1. Prolongement des certaines operateurs positives

Soient $T \neq \emptyset$, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{T}$ des algèbres de sous - ensembles de T de telle sorte que $\mathcal{C} \subset \mathcal{T}$ et, pour toute $A \in \mathcal{T}$ et $F \in \mathcal{C}$, $A \cap F \in \mathcal{C}$.

Soient X un espace linéaire réticulé et les espaces linéaires réticulés $M(T,\mathcal{C},X)$ et $M(T,\mathcal{T},X)$.

$M(T,\mathcal{T},X)$ est l'espace de fonctions (o)-bornées définies sur T, à valeurs dans X de telle sorte qu'existent $(f_n)_{n\in N}$ une suite de fonctions $\mathcal{T}$- simples de telle sorte que $(f_n)_{n\in N}$ (o)- converge unéformément sur T vers f.

$M(T,\mathcal{T},X)$ est un espace linéaire réticulé où $f \leq g \iff f(t) \leq g(t)$ $\forall t \in T$.

$M(T,\mathcal{C},X)$ est un sous - espace de $M(T,\mathcal{T},X)$.

Théorème 1.1.

Si $U: M(T,\mathcal{C},X) \longrightarrow Y$ est un opérateur linéaire, positif et (o)-continu, alors existe l'opérateur linéaire et positif

$V : M(T,\mathcal{T},X) \longrightarrow Y$

de telle sorte que

$V/_{M(T,\mathcal{C},X)} = U$

Remarques 1.1.

Si $R : M(T,\mathcal{T},X) \longrightarrow Y$ est un opérateur linéaire, positif et (o)-continu de telle sorte que $R/_{M(T,\mathcal{C},X)} = U$ alors $R \geq V$ où :

$V : M(T,\mathcal{T},X) \longrightarrow Y$

$V(g) = \int g \, dm_V, \quad \forall g \in M(T,\mathcal{T},X)$

$m_V : \mathcal{T}^T \longrightarrow R_+(X,Y)$

$m_V(A) = \sup \{ m(F) \mid A \supseteq F, F \in \mathcal{C} \} \quad , A \in \mathcal{T}$

$m(F)(x) = U(\chi_F x), \ F \in \mathcal{C}$

§2. Prolongement des certaines operateurs $\tilde{\mathcal{P}}$- bornés

Soient $T \neq \emptyset$, $\mathcal{T}$ et $\mathcal{J}$ des σ- anneaux de sous-ensembles de T de telle, sorte que $\mathcal{T} \subset \mathcal{J}$ et pour toute $A \in \mathcal{J}$ et $F \in \mathcal{T}$, $A \cap F \in \mathcal{T}$ et existe $F_o \in \mathcal{T}$ de telle sorte que $F \subseteq F_o$, $\forall F \in \mathcal{T}$

Soient X un espace linéaire réticulé, $X^r \neq \{o\}$, Y un espace linéaire complètement réticulé.

Soient $\mathcal{P}$ l'ensemble des semi-normes solides et (o) - continues sur X.

Soient $\tilde{p}(f) = \sup \{ p(f(t)) \mid t \in T \}$ où $f : T \longrightarrow X$, $f \in M(T,\mathcal{J},X)$, $p \in \mathcal{P}$

Soient $\tilde{\mathcal{P}} = \{ \tilde{p} \mid p \in \mathcal{P} \}$ et $\mathcal{P}_o = \tilde{\mathcal{P}}/_{M(T,\mathcal{T},X)}$

Théorème 2.1.

Si $U : M(T,\mathcal{T},X) \longrightarrow Y$ est un opérateur linéaire, positif et $\tilde{\mathcal{P}_o}$ - borné, alors existe un opérateur linéaire, positif $V : M(T,\mathcal{J},X) \rightarrow Y$ de telle sorte que

$V/_{M(T,\mathcal{T},X)} = U$ et $\forall A \in \mathcal{J}$

$V/_{M_A(T,\mathcal{J},X)}$ est $\tilde{\mathcal{P}}$- borné

$M_A(T,\mathcal{J},X) = \{ f \in M(T,\mathcal{J},X) \mid (\exists)\ (f_m)_{n \in N}$ suite approximant pour f, de telle sorte que $\{ t \mid f_m(t) \neq o \} \subset A,\ \forall\ n \in N \}$

Remarques 2.1.

Si $\mathcal{A}$ est une classe non vide de sous-ensembles de T, soit $\mathcal{T}(\mathcal{A})$ la classe de toutes ensembles $E \subset T$ por quelles $A \cap E \in \mathcal{A}$, $\forall A \in \mathcal{A}$

a) $T \in \mathcal{T}(\mathcal{A})$

b) $\emptyset \in \mathcal{A} \Rightarrow \emptyset \in \mathcal{T}(\mathcal{A})$

Si $\mathcal{A}$ est un σ- anneau alors $\mathcal{T}(\mathcal{A})$ est un σ-anneau et $\mathcal{A} \subset \mathcal{T}(\mathcal{A})$, $T \in \mathcal{T}(\mathcal{A})$. On peux considérer $\mathcal{J} = \mathcal{T}(\mathcal{A})$.

Bibliographie

[1] Irina Cătuneanu, Operatori $\mathcal{P}$ - mărginiţi şi integrale vectoriale, Studii şi cercetări matematice, 1 (1989).

[2] Irina Cătuneanu, Operatori (o) - mărgiŝiţi şi integrale vectoriale, Lucrări ştiinţifice - Sesiune jubiliară, I.P.G. Ploieşti, 1990.

The representation of some rearrangement invariant function spaces using the Poisson integral

Nicolae Dăneţ

A. Let X be a rearrangement invariant (r.i.) function space on $T = [0,2\pi]$ ([3], 2.a.). For every $t \in T$ we define an automorphism with invariant measure τ_t on T into itself by $\tau_t(s) = t - s \pmod{2\pi}$. For every $g \in X$ let g_t be the function defined by $g_t(s) = (g \circ \tau_t^{-1})(s)$, $\forall s \in T$. We shall write abusively $g_t(s) = g(t-s)$, $\forall s \in T$. Then $g_t \in X$ and $\|g_t\|_X = \|g\|_X$, $\forall t \in T$.

If $f \in X$ and $g \in X'$ (the subspace of X^* consisting of the integrals [3], p.29), then the convolution of f and g is well defined by

$$(f*g)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(s)g_t(s)ds = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(s)g(t-s)ds \ , \ \forall t \in T .$$

Proposition 1. i) If $f \in X$ and $g \in X'$, then $f*g \in L_\infty(T) \subset X$ and

$$\|f*g\|_X \leq \|f*g\|_\infty \leq \|f\|_X \|g\|_{X'}$$

ii) If $f \in X$ and $g \in L_\infty(T)$, then $f*g \in L_\infty(T) \subset X$ and

$$\|f*g\|_X \leq \|f*g\|_\infty \leq \|f\|_X \|g\|_\infty$$

iii) (lemma 6.1., [1]) If $f \in X$ and $g \in L_1(T)$, then $f*g \in X$ and

$$\|f*g\|_X \leq \|f\|_X \|g\|_1$$

Corollary 2. If $f \in X$, then $f*P_r \in X$ and $\|f*P_r\|_X \leq \|f\|_X$, where $P_r(t) = \dfrac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos t}$ is the Poisson kernel on T.

B. First some notations: $D = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1 \}$, $T = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \}$ canonically identified with $[0,2\pi]$, $Har(D)$ the set of the functions $F : D \longrightarrow R$ which are harmonic on D.

Let X be a r.i. function space on $T = [0,2\pi]$. We denote by

$$h^X(D) = \left\{ F \in Har(D) \;\middle|\; \|F\|_{h^X(D)} = \sup_{0<r<1} \|F_r\|_X < \infty \right\}$$

where $F_r(t) = F(re^{it})$, $\forall t \in T$. If $X = L_p(T)$, $1 \leq p \leq \infty$, then $h^X(D)$ is the classical space $h^p(D)$.

The Poisson integral of a function $f \in X$ is the function $P[f] : D \longrightarrow R$ defined by

$$P[f](re^{it}) = (f*P_r)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(s)P_r(t-s)ds \ , \quad 0 \leq r < 1 \ , \ t \in T$$

The main results of this note are:

Theorem 3. Let X be a r.i. function space on $[0,2\pi]$ and $f \in X$. Then $P[f]$, the Poisson integral of f, belongs to the space $h^X(D)$ and

$$\|P[f]\|_{h^X(D)} \leq \|f\|_X$$

Theorem 4. Let X be a maximal r.i. function space on $[0,2\pi]$ which is not order isomorphic to $L_1(0,2\pi)$. Then, for every function $F \in h^X(D)$, there exists a function $f \in X$ such that $F = P[f]$ and

$$\|f\|_X \leq \|F\|_{h^X(D)}$$

Corollary 5. Let X be a maximal r.i. function space on $[0,2\pi]$ which is not order isomorphic to $L_1(0,2\pi)$. Then X is isometric to $h^X(D)$. More precisely, the Poisson integral $P : X \longrightarrow h^X(D), f \longrightarrow P[f]$ is an isometry from X on $h^X(D)$.

References

1. C.Bennett, R.Sharpley. Interpolation of Operators, Academic Press, New York London Tokyo.
2. P.Koosis. Theory of H^p-Spaces, London Math. Soc. Lecture Note Ser. 40, Cambridge Univ. Press, 1980.
3. J.Lindenstrauss, L.Tzafriri. Classical Banach Spaces II, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1979.
4. W.Rudin. Real and Complex Analysis. Mc Graw-Hill Book Company, Amsterdam New York Oxford, 1966.

INSTITUTE OF CONSTRUCTIONS , DEPARTMENT OF MATHEMATICS ,

Bd. LACUL TEI 124 , 72302 BUCHAREST , ROMANIA

ON A CLASS OF ORTHOMORPHISMS ON BANACH LATTICES(I)

Rodica-Mihaela Dăneţ

It is very well-known that if $\mathfrak{X}$ is a complete vector lattice and $P:\mathfrak{X}\longrightarrow\mathfrak{X}$ is a proiector, then the set Ker(I-P) is a component of $\mathfrak{X}$ (here I is the identity operator on $\mathfrak{X}$).

In this way, is justified the problem of the study of the subspace Ker(I-T), for T a linear operator of $\mathfrak{X}$ into $\mathfrak{X}$ ($\mathfrak{X}$ being an Archimedean vector lattice).

A first step, is to give some conditions so that the subspace Ker(I-T) is reduced to $\{0\}$.

We find the origin of these conditions for applications $T:\mathfrak{X}\longrightarrow\mathfrak{X}$, with $\mathfrak{X}$ a complete metric space, the Picard-Banach theorem being easy transfered in a (σ)-complete vector lattice(in our group, F. Voicu has worked in this direction)

I am interested in the linear case and especially when $\mathfrak{X}$ is a (σ)-complete Banach lattice and T is an orthomorphism on $\mathfrak{X}$, with $\|T\|<1$ (namely, $T=T_1-T_2$ with T_1 and T_2 two positive orthomorphisms on $\mathfrak{X}$, that is $T_1(u)\wedge v = 0$ and $T_2(u)\wedge v = 0$, when $u\wedge v = 0$ in $\mathfrak{X}$). It is well-known, in this case, that the set Orth($\mathfrak{X}$) of all orthomorphisms $T:\mathfrak{X}\longrightarrow\mathfrak{X}$ is also the set of all regular operators $T:\mathfrak{X}\longrightarrow\mathfrak{X}$ $(T\in\mathcal{R}(\mathfrak{X}))$ for that there exists $\lambda>0$ so that $\pm T<\lambda I$ (we can suppose even $\lambda\in(0,1)$ if $\|T\|<1$).

In this paper, $\mathfrak{X}$ is a (σ)-complete Banach lattice and $T\in$ Orth($\mathfrak{X}$). I want to find some relations between the conditions of Picard-Banach type.

So:

THEOREM 1. If $\|T\|<1$ and $(x_n)_{n\in N}\subset\mathfrak{X}$ is a sequence defined by : $x_0\in\mathfrak{X}$ and $x_{n+1} = T(x_n)$, $(\forall)\ n\in N$, then:

a) Ker(I-T) = $\{0\}$,

b) $x_n \xrightarrow{(o)} 0$.

THEOREM 2. If there exists $n\in N$ so that $\|T^n\|<1$, then Ker(I-T) = $\{0\}$.

THEOREM 3. If $T_1, T_2\in\mathcal{R}(\mathfrak{X})$ and there exist $\alpha,\beta>0$ so that $\alpha+\beta<1$ and

$$|T_1(x)-T_2(y)|\le\alpha|T_1(x)-x| + \beta|T_2(y)-y| \ ,\quad (\forall)\ x,y\in\mathfrak{X},\ x\neq y,$$

then:

a) $T_1, T_2\in$ Orth($\mathfrak{X}$) and $\|T_1\|<\frac{\alpha}{1-\alpha}$, $\|T_2\|<\frac{\beta}{1-\beta}$;

b) $\alpha<\frac{1}{2}$ (and $\beta<\frac{1}{2}$) $\Rightarrow$ $\|T_1\|<1$ (and $\|T_2\|<1$);

c) Ker(I-T_1) = Ker(I-T_2) = $\{0\}$;

d) $x_n\xrightarrow{(o)} 0$, where $(x_n)_{n\in N}$ is a sequence defined by $x_0\in\mathfrak{X}$, $x_{2n+1} = T_1(x_{2n})$ and $x_{2n+2} = T_2(x_{2n+1})$, $(\forall)\ n\in N$.

Particularly, from theorem 3 it results :

THEOREM 4. If $T_1, T_2\in\mathcal{R}(\mathfrak{X})$ and there exists $q\in(0,\frac{1}{2})$ so that

$$|T_1(x)-T_2(y)|<q(|T_1(x)-x|+|T_2(y)-y|),\ (\forall)\ x,y\in\mathfrak{X},\ x\neq y,$$

then:

a) $T_1, T_2\in$ Orth($\mathfrak{X}$) and $\|T_1\|<1$, $\|T_2\|<1$;

b) Ker(I-T_1) = Ker(I-T_2) = $\{0\}$.

c) the same conclusion as in theorem 3, d).

DEFINITION 1. A regular operator $T\in\mathcal{R}(\mathfrak{X})$ is named 1-approximable if there exist a regular operator $S\in\mathcal{R}(\mathfrak{X})$ and $\alpha,\beta>0$, $\alpha<\frac{1}{2}$, $\beta<\frac{1}{2}$ so that

$$(1)\quad |T(x)-S(y)|\leq\alpha|T(x)-x|+\beta|S(y)-y|\ ,\ (\forall)x,y\in\mathfrak{X},\ x\neq y.$$

REMARK 1. Then, the sense of theorem 3 is that if T is a 1-Approximable operator then, either $\|T\|<1$, or T is "almost" (in the sense of (1)) to an operator S with $\|S\|<1$.

Another consequence of theorem 3 is the following :

THEOREM 5. If $T\in\mathcal{R}(\mathfrak{X})$ is so that there exist $\alpha,\beta>0$ with $\alpha+\beta<1$ and

$$|T(x)-T(y)|\leq\alpha|T(x)-x|+\beta|T(y)-y|\ ,\ \text{for}\ x,y\in\mathfrak{X}\ ,x\neq y\ .$$

then :

a) $T\in Orth(\mathfrak{X})$ and $\|T\|<\min(\frac{\alpha}{1-\alpha},\frac{\beta}{1-\beta})<1$;

b) $Ker(I-T)=\{0\}$;

c) $x_n\xrightarrow{(o)}0$ where $(x_n)_{n\in N}\subseteq\mathfrak{X}$ is a sequence defined by: $x_0\in\mathfrak{X}$ and $x_{n+1}=T(x_n)$, $(\forall)\ n\in\mathbb{N}$.

REFERENCES

1. B. de PAGTER : "f-algebras and orthomorphisms", Thesis, Univ. of Leiden 1981.
2. V. ISTRATESCU : "Introduction to the theory of fixed points", Ed.Acad. Buc., 1973, (in Romanian).

Institute of Constructions
Department of Mathematics, Bucharest
Romania

(ρ) - UNIFORMLY CONTINUOUS FUNCTIONS.

by

M. GAVRILĂ.

Let E be a vector lattice and let F be an ordered vector space. The function $f : E \to F$ is called <u>symmetrically monotone</u> function if for any three vectors x, y and y' in E, with $|y| \leq |y'|$ it is true that

$$f(x+y) + f(x-y) \leq f(x+y') + f(x-y')$$

<u>LEMMA 1.</u> The following assertions are echivalent:

(i) f is symmetrically monotone function;

(ii) $f(x+y) - f(x) \leq f(z+y) - f(z)$

for all x, y, z in E such that $|y-z+x| \leq |y+z-x|$;

(iii) $f(x) - f(x-y) \leq f(z) - f(z-y)$

for all x, y, z in E such that $|y-z+x| \leq |y+z-x|$.

<u>LEMMA 2.</u> Let E, F vector lattices. If $f: E \to F$ is symmetrically monotone function, with $f(0) = 0$, and y, z are positive vectors in E, then:

(i) $f(z+y) - f(z) \geq f(y) \geq 0$;

(ii) $f(z-y) - f(z) \leq f(-y)$,

and

(iii) if $0 \leq x \leq z$, then

$$f(x) - f(x-y) \leq f(z+y) - f(z).$$

<u>DEFINITION.</u> Let E be a Archimedian vector lattice and let $(F, \| \ \|)$ be a normed vector lattice. The function $f : E \to F$ is called (ρ) - <u>uniformly continuous</u> function if for any $x \in E_+$, $f|_{(E_x, \rho_x)}$ is uniformly continuous function,

where

$$E_x = \{ y \in E \mid (\exists)\ \lambda \geq 0 ,\ |y| \leq \lambda x \} ,$$

and

$$\rho_x(y) = \inf \{ \lambda \geq 0 \mid |y| \leq \lambda x \} .$$

THEOREM 1. Let E be a Archimedian vector lattice and let $(F, \| \ \|)$ be a normed vector lattice . If $f : E \longrightarrow F_+$ is a symmetrically monotone function and (ρ) - continuous function with $f(0) = 0$, then f is (ρ) - uniformly continuous function an each order interval $[-z , z]$, $z \geq 0$.

REFERENCES

1. Cristescu, Romulus

Structuri de ordine in spații liniare normate. Editura științifică si enciclopedică, 1983.

2. Gavrilă, Marinică

Funcții monoton simetrice pe spații liniare σ- reticulate. Seminarul științific "Spații liniare ordonate topologice" Univ. Bucuresti 10(1990).

3. Sundaresaan, K.

Convex Functions on Banach Lattices, Contemporany Mathematiches, vol 54(1983).

Civil Engineering Institute

Bucharest, Romania

ISOTONE PROJECTION CONES

by

G. Isac and A. B. Németh

Let C be a closed convex set in the real Hilbert space $(H, \langle \cdot,\cdot \rangle)$, and let u be an element therein. Then $P_C u$ denotes the unique element of C which realizes the minimal distance to u, that is,

$$\langle P_C u - u, P_C u - u \rangle = \min \{ \langle v - u, v - u \rangle : v \in C \} .$$

P_C is a well defined operator called the metric projection, or simply, the projection onto C.

Projections onto convex sets occur in various application oriented mathematical problems. In complementarity theory and in some special parameter estimation problems the convex sets one projects on are in fact cones (see e.g. [5], [6] and [2]). Let us consider for instance the so called general complementarity problem.

Let K be a closed convex cone in H and $f : K \to H$ be given. Find $x_o \in K$ such that $f(x_o) \in -K^{\perp}$ and $\langle f(x_o), x_o \rangle = 0$, where $K^{\perp} = \{ y \in H : \langle y, x \rangle \leq 0 , \forall x \in K \}$. The relation with projections is by Moreau's theorem [8] which states :

If $x, y, z \in H$, then the following statements are equivalent :

(i) $z = x + y$, $x \in K$, $y \in K^{\perp}$, $\langle x, y \rangle = 0$;

(ii) $x = P_K z$, $y = P_{K^{\perp}} z$.

Thus x_o is a solution for the general complementarity problem if and only if there exists an element y in H such that $x_o = P_K y$ and $f(x_o) = -P_{K^{\perp}} y$.

Projections onto cones are deeply investigated. The classical results concerning this topic can be find in Zarantonello's monograph [9]. It is interesting that no in this monograph no in the literature until 1986 was considered in any way the relation of P_K and the order relation that K induces in the space H. But some results of this kind can be useful in obtaining fixed point theorems and iterative methods. Thus we had to consider cones K for which P_K is isotone with respect to the order relation K induces, that is, we asked for cones K for which $v-u$ K implies $P_K v - P_K u$ K. If K possesses this property we call it <u>isotone projection cone</u>.

It is almost obvious that $K \subset \mathbb{R}^2$ is isotone projection (i.p.) cone if and only if $\langle x, y \rangle \geqslant 0 \ \forall x, y \in K$.

Does this property characterize i.p. cones in general ? Unfortunately not. The condition above is a necessary but not a sufficient one.

In trying to answer the question in positive we got a counterexample in dimension three [6] which is in plus a minihedral cone ! But from this moment becomes clear that the conditions must be put not on the elements but on the faces of the cone. We proved in [3] the following theorem :

Let K be a proper closed generating cone in $\mathbb{R}^n$. Then the following two conditions are equivalent :

(i) K is an i.p. cone ;

(ii) there exist the elements u_1 in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ with $\langle u_i, u_j \rangle \leq 0$ if $i \neq j$ and $K = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u_i \rangle \leq 0, \ \forall i \}$.

In particular, there exist exactly n such vectors u_i which are linearly independent and hence K must be minihedral (that is, the order relation induced by K is a lattice order). The proof was difficult, very technical and long. The vectors u_i are in fact the normals to the maximal faces of K fact which plays an important role in all the proof. Hence the above characterization (as well as its proof) does not work in infinite dimensional case except for cones which are maximal face generated [6]. But for instance the standard positive cone in $L_2([0,1])$ which is an i.p. cone has no proper maximal face.

Hence we have to use different terms in the general setting. One of them is that of the projectionally exposed cone [1].

$K \subset H$ is called <u>projectionally exposed</u> if for every face F of K one has $P_{sp\,F}K \subset K$.

Using this notion, our best result for the general case is the following [4] :

Let K be a proper generating i.p. cone in the real Hilbert space H. Then K is projectionally exposed and minihedral.

We are sure that the converse of this theorem is also true but we have no proof at this moment.

The notion of the projectionally exposed cone as well as some results of Barker, Laidacker and Poole [1] concerning this notion help us to simplify our proof for finite dimensions. We have in this context the following theorem :

Let K be a closed, proper, generating cone in $\mathbb{R}^n$. Then the following assertions are equivalent :

(i) K is an i.p. cone;

(ii) There exists the family of nonzero vectors $u_i \in \mathbb{R}^n$ with $\langle u_i, u_j\rangle \leq 0$ for $i \neq j$ such that $K = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u_i\rangle \leq 0, \forall i\}$;

(iii) K is polyhedral and projectionally exposed ;

(iv) K is minihedral and projectionally exposed.

(v) K is minihedral and for every x in $\mathbb{R}^n$, $P_K x \leq x^+$, where $^+$ is the standard lattice operation in the lattice with the positive cone K.

We have presented here the very essential part of the theory of i.p. cones. In fact there are a lot of other results concerning them which in part were used in obtaining the above characterization theorems.

So for example, every i.p. cone K is subdual in the sense that

$K \subset -K^{\perp}$. Then, every i.p. cone is regular, that is, it induces an ordering in H with the property that every monotone order bounded sequence is convergent. Hence every such cone is normal 4 .

Special results were obtained for Hilbert lattices and for maximal face generated cones where the analogy with the finite dimensional case is proeminent 6 .

REFERENCES

1 BARKER, G. PH., LAIDACKER, M., POOLE, G., Projectionally exposed cones, SIAM J. Alg. Disc. Math. 8 (1987) 100 - 105 .

2 BARLOW, R.E., BRUNK, H.D., The isotonic regression problem and its dual, J. Amer. Statist. Assoc. 67 (1972) 140 - 147 .

3 ISAC, G., NÉMETH, A.B., Monotonicity of metric projections onto positive cones of ordered Euclidean spaces, Arch. Math. 46 (1986) 568 - 576 , corrigendum ibidem 49 (1987) 367 - 368 .

4 ISAC, G., NÉMETH, A.B., Every generating isotone projection cone is latticial and correct, J. Math. Anal. Appl. 147 (1990) 53-62.

5 ISAC, G., NÉMETH, A.B., Projection methods, isotone projection cones and complementarity problems, J. Math. Anal. Appl. 153 (1990) 258 - 275 .

6 ISAC, G., NÉMETH, A.B., Isotone projection cones in Hilbert spaces and the complementarity problem, Bolletino Un. Mat. Ital. (7) 4-B (1990) 773 - 802 .

7 ISAC, G., NÉMETH, A.B., Isotone projection cones in Euclidean spaces, preprint.

8 MOREAU, J., Décomposition orthogonale d'un espace hilbertien selon deux cones mutuellement polaires , C. R. Acad Sci. Paris 225 (1962) 238 - 240 .

9 ZARANTONELLO, E.H., Projections on convex sets in Hilbert spaces and spectral theory, in "Contributions to Nonlinear Functional Analysis" (E.H. Zarantonello, Ed.), pp. 237 - 424 , Academic Press, New York, 1971 .

AN APPLICATION OF A GENERAL EXTENSION THEOREM OF LINEAR OPERATORS TO THE CLASSICAL MOMENT PROBLEM

OCTAV OLTEANU

POLYTECHNICAL INSTITUTE BUCHAREST

The purpose of this work is to apply the theorem 1 [6, p. 956] to the classical moment problem. From the general theorem 1, in [6, p.956], we deduce theorem 2, which may be regarded as an answer for a more general problem than that stated in [1, p.199], problem B (compare to the solution given by M.G.Krein [4, p.32e] to the initial problem stated in [1, p.199]). Finally, we give an application of theorem 2 below to the classical moment problem.

The following results are new.

THEOREM 2. Let X be an ordered vector space, Y an order-complete vector lattice, $\{x_j : j \in J\} \subset X$, $\{y_j : j \in J\} \subset Y$, $\{f_1, f_2\} \subset L(X, Y)$.

Let us consider the following assertions:

(a) $(\exists)\ f \in L(X,Y)$, $f(x_j) = y_j$, $j \in J$, $f_1(z) \leq f(z) \leq f_2(z)$ $(\forall)\ z \in X_+$

(b) $(\forall)\ F \subset J$, F finite subset, $(\forall)\{\lambda_j : j \in F\} \subset \mathbb{R}$, we have:

$$\sum_{j \in F} \lambda_j x_j = z_2 - z_1 \text{ with } \{z_1, z_2\} \subset X_+ \Rightarrow \sum_{j \in F} \lambda_j y_j \leq f_2(z_2) - f_1(z_1).$$

If X is a vector lattice, we consider also the assertion (b'):

(b') $f_1(z) \leq f_2(z)$ $(\forall)$ $z \in X_+$ and:

$(\forall)\ F \subset J$, F finite, $(\forall)\{\lambda_j : j \in F\} \subset \mathbb{R}$, we have:

$$\sum_{j \in F} \lambda_j y_j \leq f_2\Big(\big(\sum_{j \in F} \lambda_j x_j\big)^+\Big) - f_1\Big(\big(\sum_{j \in F} \lambda_j x_j\big)^-\Big).$$ Then (a) $\Leftrightarrow$ (b).

If X is a lattice, then (a) $\Leftrightarrow$ (b) $\Leftrightarrow$ (b').

The base implication here is (b) $\Rightarrow$ (a), which is a direct consequence of (b) $\Longrightarrow$ (a) in theorem 1 [6, p.956].

Finally, let us rewrite theorem 2 in the particular case $X = L^1([a,b])$, Y an order-complete topological vector space, whose positive cone Y_+ is normal, $J = \mathbb{N}$, x_j the class of the polynomial t^j, $j \in \mathbb{N}$, $f_1 = 0$, $f_2(x) = (\int_a^b x(t)dt).\tilde{y}$, where $\tilde{y} \in Y_+ \setminus \{0\}$ is a fixed element; $\{y_j : j \in \mathbb{N}\} \subset Y$. We obtain:

COROLLARY 1. The following assertions are equivalent:

(a) $(\exists)$ $f : L^1([a,b]) \to Y$ linear, positive and continuous such that

$$f(x_j) = y_j,\ j \in \mathbb{N} \text{ and } f(z) \leq (\int_a^b z(t)dt).\tilde{y},\ (\forall)\ z \in L^1([a,b])_+.$$

(b') $(\forall)$ $n \in \mathbb{N}$, $(\forall)\{\lambda_0, \ldots, \lambda_n\} \subset \mathbb{R}$, we have:

$$\lambda_0 y_0 + \lambda_1 y_1 + \ldots + \lambda_n y_n \leq (\int_a^b \max\{\lambda_0 + \lambda_1 t + \ldots + \lambda_n t^n, 0\} dt)\tilde{y}.$$

Of course, f with the properties stated in (a) is unique by the density of polynomials in $L^1([a,b])$.

On the other hand, corollary 1 may be restated when we replace $[a,b]$ by an n-dimensional interval $[a_1,b_1] \times \ldots \times [a_n,b_n]$.

REFERENCES

[1] H.J.AHIEZER and M.G.KREIN, L - problem in abstract normed linear spaces, p.171-199, from the volume Upon some questions of the moment theory, Scientific-Technical Publishing House of Ukraine, Harkov (1955)(in Russian)

[2] G.CASSIER - Problème des moments sur un compact de $\mathbb{R}^n$ et décomposition de polynômes à plusieurs variables, J.Funct.Anal., 58, (1984), p.254-266

[3] R.CRISTESCU, Ordered vector spaces and linear operators, Editura Academiei, București, Romania, Abacus Press, Tunbridge Wells, Kent, England (1976).

[4] M.KREIN, A.A.NUDELMAN, Markov moment problem and extremal problems, Science Publishing House, Moscow (1973) (in Russian).

[5] O.OLTEANU, Convexité et prolongement d'opérateurs linéaires, C.R. Acad.Sc.Paris, 286 (1978), 511-514

[6] O.OLTEANU, Théorèmes de prolongement d'opérateurs linéaires, Rev. Roumaine Math.Pures et Appl., tome XXVIII, no.10 (1983), 953-983.

[7] O.OLTEANU, Application de théorèmes de prolongement d'opérateurs linéaires au problèmes des moments et une généralisation d'un théorème de Mazur - Orlicz, C.R.Acad. Sc. Paris (to appear).

[8] H.SCHAEFER, Topological vector spaces, the Macmillan Company, New York, Collier - Macmillan Limited, London (1966).

Représentations induites généralisées dans les espaces de Fréchet

Liliana Pavel

La présente communication a comme point de départ deux généralisations de la méthode de Mackey (Blattner) concernant le procédé d'induction. La premiéré généralisation a été réalisée par I.Schochetman et R.A.Fontenot qui ont valorifié les idées de Bruhat et ont extendu la théorie des représentations isometriques induites dans les espaces de Banach de H.Kraljevic aux représentations "p-q inductibles". La deuxiéme généralisation est donné par H.Moscovici qui quoi qu'il étudie les représentations unitaires, imagine une théorie dans laquelle le sousgroupe H du groupe G est remplacé par un groupe H qui est lié au groupe G par une condition plus faible: les deux groupes opérent sur un méme espace localement compact.

Dans ce qui suit nous nous proposons de généraliser le procédé d'induction de H.Moscovici aux représentations avec opérateurs dans les espaces de Fréchet et qui sont "p-q inductibles".

Les principeaux résultats obtenus sont:

- une théoreme de structure des fonctions q-homogènes qui nous permet de construire l'espace de la représentation induite
- la construction effective de la représentation induite et la démonstration du fait que l'object obtenu est vraiment une représentation continue dans les espaces de Fréchet.

Nous présenterons en résumé le contenu de la communication.

Préliminaires

Soient H et G des groupes localement compacts, m_H et m_G des mesures de Haar sur H, respectivemont G de fonctions modulaires Δ_H, respectivement Δ_G et $p \in [1,\infty]$.

Définition. On dit que l'espace localement compact séparé X est un p(G-H) espace intermédiaire s'il satisfait aux conditions suivantes:

1. G opére à gauche sur X continument (on note avec γ l'action de G)
2. H opére à droite sur X continument et properment et X/H est paracompact (on note avec δ l'action de H)
3. Quels que soient $h \in H$ et $g \in G$
   $\gamma(g)\,\delta(h) = \delta(h)\,\gamma(g)$
4. Il existe une mesure de Radon sur X avec les propriétés:
   $\gamma(g)\mu = \mu$ et $\delta(h)\mu = \Delta(h)\mu$.
5. $\int_H \left(\frac{\Delta}{\Delta_H}(h)\right)^{1/p} dm_H(h) < \infty$.

Soit $(E, \|\ \|_n)_{n\in N}$ un espace de Fréchet et L(E) l'espace des opérateurs linéaires et continues sur E.

Soit $V: H \longrightarrow L(E)$ une représentation continue du groupe H sur E.

Définition. On dit que la paire $(p;q) \in [1,\infty] \times (o,\infty]$ est une paire inductoire pour V à G" si pour chaque $m \in N$, il existe $n_m \in N$ et $C_m \geq 1$ tel que:

$$\|V(h)x\|_m \leq C_m \left(\frac{\Delta_H}{\Delta}(h)\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \|x\|_{n_m}, \ (\forall)\ (h \in H,\ x \in E)$$

./.

Si une telle paire existe on dit que V est inductible à G (Fréchet)

Fonctions q-V-homogénes

On note:

$$\mathcal{C}_{o,H}(X,E) = \left\{ f : X \to E \;\middle|\; \begin{array}{l} 1.\ \text{supp} f \text{ is compact} \\ 2.\ f \text{ is H-uniform continue} \end{array} \right\}$$

$$\mathcal{C}_q^{V}(X,E) = \left\{ f : X \to E \;\middle|\; \begin{array}{l} 1.\ f \text{ is q-V homogéne} \\ 2.\ f \text{ is continue} \\ 3.\ f \text{ is H-uniform continue} \\ 4.\ \text{supp} f.H \text{ is compact} \end{array} \right\}$$

Théorème. (La structure de l'espace $\mathcal{C}_q^{V}(X,E)$)

$$\mathcal{C}_q^{V}(X,E) = \left\{ f_V : X \to E \;\middle|\; f_V(x) = \int_H \left(\frac{\Delta}{\Delta_H}(h)\right)^{\frac{1}{q}} V(h)\, f(xh)\, dm_H(h),\ f \in \mathcal{C}_{o,H}(X,E) \right\}.$$

Représentations p-induites

Pour $f \in \mathcal{C}_q^{V}(X,E)$ et $n \in \mathbb{N}$ on définit

$$F_{p,n}(f) : X/H \to [0,\infty),$$

$$F_{p,n}(f)(\dot{x}) = \sup_{h \in H} \frac{|f(xh)|_n}{\rho(xh)^{1/p}}$$

(où : $\rho : X \to (0,\infty)$, $\rho(x) = \int_H \frac{\Delta}{\Delta_H}(h)\, \beta(xh)\, dm_H(h)$, β étant une fonction de Bruhat).

Proposition. L'application $F_{p,n} : \mathcal{C}_q^{V}(X,E) \to \mathbb{R}_+$,

$$F_{p,n}(f) = \left(\int_{X/H} F_{p,n}(f)(\dot{x})^p\, d\tilde{\mu}(\dot{x}) \right)^{1/p}$$

est une norme sur $\mathcal{C}_q^{V}(X,E)$ avec la propriété:

- $F_{p,n}(f_a) = F_{p,n}(f)$, $(\forall) a \in G$.

Note. On note avec $B_{p,q}^{V}(X,E)$ le complété de l'espace $(\mathcal{C}_q^{V}(X,E), (F_{p,n}))_{n \in \mathbb{N}}$, donc $B_{p,q}^{V}(X,E)$ est un espace de Fréchet.

Pour $a \in G$, on note avec $U_{p,q}(G)(a)$ le prolongement de l'application continue:

$$\tilde{U}_{p,q}(G)(a) : \mathcal{C}_q^{V}(X,E) \to \mathcal{C}_q^{V}(X,E)$$

$$U_{p,q}(G)(a) = f_{a^{-1}}$$

a l'espace de Fréchet $B_{p,q}^{V}(X,E)$.

Théoreme. L'application $a \mapsto U_{p,q}(G)(a)$ de G dans $L(B_{p,q}^{V}(X,E))$ est une représentation continue du groupe G dans l'espace de Fréchet $B_{p,q}^{V}(X,E)$ qui a la propriété:

$$F_{p,n}(U_{p,q}(G)(a)\, f) = F_{p,n}(f),$$

$(\forall) n \in \mathbb{N}$, $a \in G$, $f \in B_{p,q}^{V}(X,E)$

Pour $(p,q) \in [1,\infty] \times (0,\infty]$ fixée, cette représentation s'appelle la représentation p-q induite de la représentation V du groupe H on E sur le groupe G.

The characterization of maximales normal subspaces of a strict axial space

Alexandru Petcu
The Institute of Oil and Gas-Ploiești

A subset $\{e_n\}_{n\geq 1}$ of positiv elements of vector lattice X is called <u>axial</u> if for any $x\in X$ there exists $n\in N$ and λ real number such that $|x|\leq \lambda e_n$.

In [2] I established the following results:

<u>Theorem 1</u>. Let X be an Arhimedian vector lattice and $\{e_n\}_{n\geq 1}$ an axial set of X . The followings affirmations are equivalents.

a) Topology of (o)-bounded Θ on X is strict limit inductive of topologies (o)-bounded Θ_n on $X_n=Sp[-e_n, e_n]$

b) X space contents an axial set $\{f_n\}_{n\geq 1}$ with the property $f_n\wedge(f_{n+1}-f_n)=o, \forall n\geq 1$ and any f_n is an axial element in X_n.

An Arhimedian vector lattice X with counting axial set which verifies one of the conditions of Theorem 1, will be called <u>strict axial space</u>.

We remember that a vector subspace M of a vector lattice X with the property: $x\in M$ and $|y|\leq|x|$ implies $y\in M$, is called <u>normal subspace</u> of X. A normal subspace M with $M\neq\{o\}$, $M\neq X$ is called <u>maximal</u> if does not exist any other normal subspace in X which contents M excepting X space itself.

In this work we shall give a characterization of maximales normal subspace in a strict axial space with the aid of linear functional.

First we indicate that any strict axial space contents maximales normal subspaces.

<u>Proposition 1</u>. If X is a strict axial space with the axial set $\{e_n\}_{n\geq 1}$, than for any $n\geq 1$ there exists a maximale normal space M such that $e_n^{\perp}\subset M$.

<u>Proposition 2</u>. If X is a strict axial space, than for each $a\in X$ with $a\neq o$ there exists a maximal normal subspace M in X such that $a\notin M$.

We denote with $\mathcal{M}$ the set of all maximales normal subspaces of strict axial X space.

<u>Corollary</u> If X is a strict axial space, than

$$\bigcap_{M\in\mathcal{M}} M=\{o\}.$$

<u>Proposition 3</u>. If X is a strict axial space and $a\in X$ with $a\neq o$ than

1) $a\notin M$ implies $a^{\perp}\subset M$

2) $a^{\perp}=\bigcap_{M\in\mathcal{M},\, a\notin M} M$.

Let X be a vector lattice with the axial set $\{e_n\}_{n\geq 1}$. We denote with F the positiv linear functional set $f: X\rightarrow R$ with $f\neq o$ with the properties:

1) $f(|x|)=|f(x)|$, $\forall\, x\in X$

2) there exists $n\geq 1$ such that $f(e_{n+k})=1$ for any natural k.

<u>Theorem 2</u>. Let X be a strict axial space.

a) If $f\in F$, than Ker f is maximal normal subspace in X.

b) Reciprocal, for any maximal normal subspace $M\in\mathcal{M}$, there exists $f_M\in F$ such that $M=\text{Ker } f_M$

c) Aplication $g:\mathcal{M}\rightarrow F$, where $g(M)=f_M$, is a bijection.

<u>Bibliography</u>

1. Cristescu, R.-„Topological vector spaces"-Noordhoff J.P., Leyden, 1977.

2. Petcu, A.-„Topologia (o)-mărginirii în spaţii cu mulţimi axiale" în Spaţii liniare ordonate topologice, Univ.Bucureşti, nr.1o, 1989, 86-87.

3. Petcu,A.- „Asupra spaţiilor cu mulţimii axiale numărabile" în Spaţii liniare ordonate topologice, Univ.Bucureşti,nr.11, 199o,96-97.

THE BOHMAN-KOROVKIN THEOREM

George Popescu

The basic fact considered is the following theorem of Bohman-Korovkin.

Theorem 1 Let X be a compact Haussdorff space, $C(X,\mathbb{R})$ the space of continuous real valued functions on X and $f_1,\dots,f_m$ $a_1,\dots,a_m \in C(X,\mathbb{R})$ two sets of functions such that

$$P(x,y) \overset{def}{=} \sum_{i=1}^{m} a_i(y)\, f_i(x) \geq 0 \qquad \forall\, x,y \in X .$$

and $\quad P(x,y) = 0 \quad$ iff $\quad x = y$.

Let $H_n : C(X,\mathbb{R}) \longrightarrow C(X,\mathbb{R})$ be a sequence of positive linear operators. If $H_n(f_i) \longrightarrow f_i$ for $i = \overline{1,m}$ then $H_n(f) \longrightarrow f$ for all $f \in C(X,\mathbb{R})$.

In this paper we intend to extend this theorem from the classical space of continuous functions on a compact Haussdorff space $C(X,\mathbb{R})$ to an arbitrary C^*-algebra and by consequence to some operator algebras in $\mathcal{B}(H)$, H denotes a Hilbert space and $\mathcal{B}(H)$ the bounded operators on H.

In the case of a commutative C^*-algebra it is a simple fact of transposing the theorem into the context of C^*-algebras. We get the following theorem.

Theorem 2 Let A be a commutative C^*-algebra with unit and two sets $f_1,\dots,f_m, a_1,\dots,a_m \in A$ such that

$$\sum_{i=1}^{m} \mu(a_i)\, \delta(f_i) \geq 0$$

for all μ, δ pure states on A, and

$$\sum_{i=1}^{m} \mu(a_i)\, \delta(f_i) = 0 \quad \text{iff} \quad \mu = \delta$$

Then for any sequence $H_n : A \to A$ of positive linear operators on A if $H_n(f_i) \to f_i$ for $i = \overline{1,m}$ then $H_n(f) \to f$ for all $f \in A$.

The main ideas of the proof are similar to the classical case but some C^*-algebras techniques are also required.

Remarks

1. The existence of a unit and the commutativity could easily be surpassed so they can be dropped from the hypothesis.
2. The problem which remains open is how to find a criteria for a finite set $f_1,\dots,f_m,a_1,\dots,a_m$ to have the property required in the theorem. If such a thing seems to be hopeless to find in the general case of an arbitrary C^*-algebra, a solution for $\mathcal{B}(H)$ or at least for some operator subalgebras would be of great interest. Otherwise the practical purpuse remains unsolved.

However the importance of approximation by "positive preserving" methods in C^*-algebras is emphasised well enough and by consequence the basic importance of the order structure in such algebras.

References

1. J.DIXMIER, Les C^*-algebres et leur representations Gauthier-Villars Paris 1969
2. G.G.LORENTZ, Approximations of functions 1966
3. G.G.LORENTZ, Krovkin Sets, Lectures Notes, The University of Texas at Austin 1972.
4. J.A.SASKIN, Korovkin systems in spaces of continuous functions, Amer.Math.Soc.Transl.Ser. 2,54(1966) 125-144
5. H.H.SCHAEFER, Banach lattices and positive operators, Springer 1974
6. S.TAKAHASI, Korovkin's theorems for C^*-algebras, J.Approx.Theory 27(1979) 197-202.

ON ε - VECTORIAL SUBDIFFERENTIALS AND APPLICATIONS

Vasile Postolică, Piatra Neamț

Taking into account the research works [1] , [2] and starting from the results obtained in [4] , [5] and [6] we consider in this paper the concepts of ε-vectorial subdifferential and of H-vectorial subdifferential, respectively, for multifunctions with H a non-empty subset of a convex pointed cone such that it does not contain the origin in a real ordered vector space, having in view the characterization of the ε-efficient points (H-efficient points) with respect to a multifunction (Theorem 1), In point of applications, we show that these notions can be used for the study of the solutions for the approximate vectorial optimization programs with objective maps multifunctions and, following the corresponding concepts of ε-vectorial (H-vectorial) conjugates, it is possible to construct and develop an approximate duality for ε-efficiency (H-efficiency) in ordered locally convex spaces. Also we remark that every ε-efficient point is a critical point for some generalized dynamical system [3] .

Let $(Z, \leq)$ be a real vector space ordered by a convex, pointed cone K and X a real linear space. To unify the study, we add to Z a smallest element denoted by $-\infty$ and a largest element denoted by $+\infty$ respectively, we consider $\bar{Z} = Z \cup \{-\infty, +\infty\}$ and we extend the addition and the scalar multiplication from Z to $\bar{Z}$ using the calculation convention given in [5] .

DEFINITION 1. If ε is an arbitrary element of K and $f : D(f) \subseteq X \to \bar{Z}$ is a multifunction with $D(f) = \{x \in X : f(x) \neq \emptyset\}$, then we define the ε-vectorial subdifferential of f at a point $x_o \in D(f)$ by

(1) $\partial_v^{\varepsilon} f(x_o) = \{T \in L(X,Z)$: there exists $y_o \in f(x_o)$ such that $Tx_o - Tu + \varepsilon \not\leq y_o - y$ for every $u \in D(f)$ and $y \in f(u)\}$

It is clear that (1) extends the notions of usual ε-subdifferential for functions and it generalizes the concept of vectorial subdifferential introduced in [5] . In a similar manner one defines the notions of ε-vectorial (H-vectorial) subdifferentials corresponding to ε-efficiency (H-efficiency) with applications to the minimality conditions [4] .

DEFINITION 2. We say that $x_o \in D(f)$ is an ε-vectorial minimum point for the multifunction f with respect to K if there exists $y_o \in f(x_o)$ such that for every $x \in D(f)$ and $y \in f(x)$ it follows that $y \not\leq y_o - \varepsilon$

THEOREM 1. (i) $x_o \in D(f)$ is an ε-vectorial minimum point for f if and only if $0 \in \partial_v^{\varepsilon}(f)$;

(ii) if we denote $f(D(f)) = Y$ and $Y(\varepsilon) = \{y \in Y : y - \varepsilon \notin Y\}$, then for every ε-vectorial minimum point x_0 of f with respect to K there exists $y_0 \in f(x_0)$ such that

$$(Y \cup \{y_0 - \varepsilon\}) \cap (y_0 - \varepsilon - K) \cap [Y(\varepsilon) - \varepsilon] = \{y_0 - \varepsilon\}$$

Thus, $y_0 - \varepsilon$ is a critical point for the generalized dynamical system F defined by

$$F(t) = (Y \cup \{t\}) \cap (t - K) \cap [Y(\varepsilon) - \varepsilon], \quad t \in Y(\varepsilon) - \varepsilon.$$

REFERENCES

1. Chen G.Y. & Craven B.D. - Approximate dual and approximate vector variational inequality for multiobjective optimization.J.Austral Math.Soc.(Series A) 47(1989),418 - 423.
2. Loridan P. - ε-solutions in vector minimization problems.J.Optim. Theory Appl. 43(1984), 265 - 276.
3. Isac G. - Sur l'existence de l'optimum de Pareto.Riv.Mat.Univ. Parma,4,9(1983), 303 - 325.
4. Németh A.B. - Between Pareto efficiency and Pareto ε-efficiency. Optimization 20(1989) 5,615 - 637.
5. Postolică V. - Vectorial optimization programs with multifunctions and duality.Ann.Sc.Math.Québec,10,1,1986,85 - 102.
6. Postolică V. - New types of vectorial subdifferentials and conjugates.Journ. of Global Optimization.Kluwer Academic Publishers Group (to appear).

ON TENSOR PRODUCT STABILITY OF LORENTZ-ZYGMUND OPERATOR IDEALS

NICOLAE TIŢA

Introduction. Let be E and F two Banach spaces and $T \in \mathcal{L}(E,F)$ a linear and bounded operator from E into F.
For $T \in \mathcal{L}(E,F)$ and n = 1,2,...we define the n-th approximation number as follows [1], [2], [3], [4].

$$a_n(T) = \inf \{ \|T - K\| : K \in \mathcal{L}(E,F), \dim K < n \}.$$

We denote by $\mathcal{L}_{p,q,\gamma}(E,F)$ the Lorentz-Zygmund operator ideal [1], $0 < p \leq \infty$, $0 < q < \infty$, $-\infty < \gamma < \infty$.

$$\mathcal{L}_{p,q,\gamma}(E,F) = \{ T \in \mathcal{L}(E,F) : \sum_1^\infty [n^{\frac{1}{p}}(1+\log n)^\gamma a_n(T)]^q \cdot n^{-1} < \infty \}.$$

In the paper [1] is proved that if $S_i \in \mathcal{L}_{\infty,q,\gamma}(E_i,F_i)$, $i = 1,2$; $0 < q \leq 1$, $-\frac{1}{q} < \gamma < \infty$, then $S_1 \hat{\otimes}_\tau S_2 \in \mathcal{L}_{\infty,q,\gamma}(E_1 \hat{\otimes}_\tau E_2, F_1 \hat{\otimes}_\tau F_2)$, where τ is a tensor norm [1], [4].

Here we study the general case when $0 < p \leq \infty$ and we deduce in a simple way, the tensor product stability of the ideal $\mathcal{L}_{\infty,q,\gamma}$ for $0 < q < \infty$.

1. Tensor product stability. From Lemma 3.1 [4] it results the following.

Proposition 1.1. For all $S_i \in \mathcal{L}(E_i,F_i)$, i = 1,2, the following relation holds.

$a_{m.n}(S_1 \hat{\otimes}_\tau S_2) \leq c(a_m(S_1) + a_n(S_2))$, m,n = 1,2,..., where c is a constant, $c < 2.\max(\|S_1\|, \|S_2\|)$.

From this proposition it results:

Theorem 1.2. If $S_i \in \mathcal{L}_{p,q,\gamma}(E_i,F_i)$, i = 1,2, then

$$S_1\hat{\otimes}_\tau S_2 \in \mathcal{L}_{2p,q,\gamma}(E_1\hat{\otimes}_\tau E_2, F_1\hat{\otimes}_\tau F_2),\ 0<p\le\infty,\ 0<q<\infty,\ -\frac{1}{q}<\gamma<\infty.$$

Proof. By a simple calculation it results that $\max((1+\log n^2)^\gamma, (1+\log (n+1)^2)^\gamma) \le c(\gamma)(1+\log n)^\gamma$, for all natural numbers n.

Since the sequence $\{a_n(S)\}$ is decreasing, we obtain

$$\sum_1^\infty \left[n^{\frac{1}{2p}}(1+\log n)^\gamma \cdot a_n(S_1\hat{\otimes}_\tau S_2)\right]^q .n^{-1} \le$$

$$\sum_1^\infty (2n+1)\left[(n+1)^{\frac{2}{2p}}.\max((1+\log n^2)^\gamma, (1+\log(n+1)^2)^\gamma)\, a_{n^2}(S_1\hat{\otimes}_\tau S_2)\right]^q .n^{-2}$$

$$\le 3\, c(p,q,\gamma) \sum \left[n^{\frac{1}{p}}(1+\log n)^\gamma (c(a_n(S_1)+a_n(S_2))\right]^q .n^{-1} \le$$

$$\bar{c}(p,q,\gamma) \sum \left[\left(n^{\frac{1}{p}}(1+\log n)^\gamma a_n(S_1)\right)^q n^{-1} + \left(n^{\frac{1}{p}}(1+\log n)^\gamma a_n(S_2)\right)^q n^{-1}\right] < \infty$$

Hence $S_1\hat{\otimes}_\tau S_2 \in \mathcal{L}_{2p,q,\gamma}$

Corollary 1.3. The ideal $\mathcal{L}_{\infty,q,\gamma}$ is tensor product stable for all q, $0<q<\infty$.

Remarks 1. The case $\gamma = 0$ is known [5] . 2. All results are valid if $\{a_n(S)\}$ is replaced by the sequences of the Kolmogorov numbers or Gelfand numbers, since the proposition 1.1 is also true for these numbers [4] .

3. The ideals $\mathcal{L}_{p,q,0}$ are not tensor product stable for all p, [2], [5] .

References

[1]. F.Cobos and I Resina, Representation theorems for some operator ideals, J. London Math.Soc. 2(39)(1989) 324-334.

[2] H.König, On tensor stability of S-numbers ideals, Math.Ann 269(1984) 77-93.

[3] A.Pietsch, Operator ideals, North-Holand, Amsterdam, 198o

[4] N.Tiţa, $l_{\phi,\varphi}$ operators and (ϕ,φ)-spaces, Collect.Math. 3o(1979)3-1o.

[5] N.Tiţa, On a class of $l_{\phi,\varphi}$ operators, Collect.Math.32(1981) 275-279.

Department of Math.University of Braşov, 22oo-Braşov-Romania

Une application des opérateurs de Fredholm d'index 0

Rădulescu Vicenţiu

Ţarfulea Nicolae

Résumé:

Brown a donné, en 1935, le résultat suivant:

Théorème: Soit $U \subset R^n$ ouvert et $f:U \longrightarrow R$ une fonction de classe C^k. Alors l'ensemble des valeurs critiques de la fonction f n'a pas de points intérieurs.

Dans cette ouvrage nous donnons une generalisation à cette théorème en utilisant les opérateurs de Fredholm qui ont l'index 0.

Definition:1. Soit E et F deux espaces de Banach, l'ouvert connexe $U \subset E$ et l'application $T:U \longmapsto F$ de classe C^1. On dit que T est un opérateur de Fredholm si la dérivee Fréchet de T en chaque point $u \in U$ est un opérateur de Fredholm.

Si on pose ind T = int d_uT, où $u \in U$, on voit que la définition est corecte parceque U est un ouvert connexe, T est de classe C^1, l'ensemble des opérateurs de Fredholm $\mathcal{F}(E,F)$ est ouverte en L(E,F) et la fonction „index" est continue sur l'ensemble $\mathcal{F}(E,F)$.

Definition 2: Avec les conditiones ci-dessus, $u \in U$ s'appelle point régulier de l'application T si $d_uT \in L(E,F)$ est surjective. Autrement, u s'appelle point critique.

Définition 3: Le point $y \in F$ s'appelle valeur régulière pour l'application $T:U \longmapsto F$ si tous les points $u \in U$ avec la proprieté $Tu = y$ sont des points réguliers pour T. Autrement, y s'appelle valeur critique.

Le résultat que nous avons acquéri a le fond suivant:

Théorème: Soit $T:U \longmapsto F$ un opérateur de Fredholm de classe C^1 et d'index 0. Alors l'ensemble de valeurs critiques de T n'a pas de points intérieurs.

Demonstration: Soient a U et $S = d_aT \in \mathcal{F}(E,F)$. On voit que nous pouvons écrire E sous la forme suivante: $E = E_1 \oplus \text{Ker } S \simeq E_1 \times \text{Ker } S$. En vertu de ces relations nous pouvons maintenant identifier $a = (b_o, c_o)$ où $b_o \in E_1$ et $c_o \in \text{Ker } S$.

Notons $d_{(b_o,c_o)}T\big|_{E_1\times\{0\}} = d_xT(b_o,c_o): E_1 \longmapsto F$ et on voit que cette fonction est injective.

Parce que l'ensemble des isomorphismes est ouvert en L(E,F), il découle que $d_x T(b,c)$ est une application isomorphe qui applique

E_1 sur un sous-espace fermé de F pour (b,c) dans un voisinage de (b_o, c_o). En vertu du théorème des fonctions implicites, nous avons $V_1 \times V_2 \subset E_1 \times \mathrm{Ker}\, S$ telleque V_2 est un voisinage compact et $T|_{V_1 \times \{c\}}$ est un homeomorphisme sur l'image, où c est un point arbitraire en V_2. On voit immediatement que T est une application propre. On sait que l'ensemble des points critiques de T est fermé. Il est suffisant de démontrer que si W est un voisinage, alors il existe une valeur régulière en W pour T.

Soit l'application: $\gamma : \{b_o\} \times \mathrm{Ker}\, S \longmapsto F_{/\mathrm{Im}\, S}$

$\gamma(c) = \pi(T(b_o, c))$, où

$\pi : F \longrightarrow F_{/\mathrm{Im}\, S}$ est l'application canonique.

On sait qu'il existe une valeur régulière z de γ en $\pi(W)$. Alors $y \in \pi^{-1}(z) \cap W$ est une valeur régulière de T en W.

Enfin, nous croyons que utilisant les notions ci-dessous on peut démontrer des généralisations pour autres théorèmes (par exemple pour le théorème des fonctions implicites).

Bibliographie:

1. Mawhin, J.:Topological degree methods in nonlinear boundary value problems; Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences by the American Mathematichal Society, Providence, Rhode Island, 1978.

2. Oproiu, V. şi Gheorghiev, G.: Varietăţi diferenţiabile finit şi infinit dimensionale, Editura Academiei, 1976.

3. Sburlan, S.: Gradul topologic. Lecţii asupra ecuaţiilor neliniare, Editura Academiei, Bucureşti, 1983.

DEPENDENTA PUNCTULUI FIX DE PARAMETRU

de FLORICA VEICU

In lucrare sînt demonstrate teoreme ce pun în evidență condițiile îndeplinite de unele aplicații pentru ca punctul lor fix să depindă continuu de parametru.

Fie X, Y spații liniare reticulate și $T : X \times Y \longrightarrow X$ o aplicație. Considerăm următoarele aplicații induse de aplicația T :

$$T_y : X \longrightarrow X \qquad T_y(x) = T(x,y) \qquad (1)$$

și

$$T_x : Y \longrightarrow X \qquad T_x(y) = T(x,y) \qquad (2)$$

Presupunem că pentru orice $y \in Y$, T_y are un punct fix unic $x_y^* = T_y(x_y^*)$

Definim următoarea aplicație :

$$P : Y \longrightarrow X \text{ prin formula } P(y) = x^* \qquad (3)$$

<u>DEFINITIE</u>. Se spune că punctul fix x_y^* al aplicației T_y depinde continuu de parametrul y, dacă aplicația P este (o) - continuă.

<u>TEOREMA 1</u>. Fie X un spațiu liniar σ - reticulat, Y un spațiu liniar și $T : X \times Y \longrightarrow X$ astfel încît :

(i) $(\exists)\alpha \in]0,1[$ pentru care :

$$|T(x_1,y) - T(x_2,y)| \leq \alpha\, |x_1 - x_2| \quad (\forall) x_1,x_2 \in X; \ (\forall) y \in Y \qquad (4)$$

(ii) pentru $(\forall)\ x \in X$ aplicația T_x este (o) - continuă.

TEOREMA 2 . Fie X spaţiu liniar σ - reticulat, Y spaţiu liniar şi $T : X \times Y \longrightarrow X$ aplicaţie (o) - continuă.
Dacă :

$(\exists)\ \alpha \in \mathbb{R}_+,\ \alpha < \frac{1}{2}$ astfel încît :

$$|T(x_1, y) - T(x_2, y)| \leq \alpha \left(|x_1 - T(x_1, y)| + |x_2 - T(x_2, y)| \right) \quad (5)$$

pentru $(\forall)\ x_1, x_2 \in X$; $(\forall)\ y \in Y$
atunci aplicaţia $P : Y \longrightarrow X$, $P(y) = x_y^*$ este (o) - continuă.

TEOREMA 3 . Fie X spaţiu liniar σ - reticulat, Y spaţiu liniar şi $T : X \times Y \longrightarrow X$ aplicaţie (o) - continuă. Dacă există $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$, $\alpha + 2\beta < 1$ astfel încît :

$$|T(x_1, y) - T(x_2, y)| \leq \alpha |x_1 - x_2| + \beta \left(|x_1 - T(x_1, y)| + |x_2 - T(x_2, y)| \right) \quad (6)$$

pentru $(\forall)\ x_1, x_2 \in X$ şi $y \in Y$
atunci aplicaţia P definită de (3) este (o) - continuă.

- B I B L I O G R A F I E -

[1] CRISTESCU R. "Spaţii liniare ordonate şi operatori liniari". Edit.Acad.R.S.R. Bucureşti, (1970).

[2] RUS I.A. "Principii şi aplicaţii ale teoriei punctului fix". Edit.Dacia Cluj-Napoca (1979)

[3] VOICU FLORICA "Teoreme de punct fix în spaţii liniare σ - reticulate". Bul.şt.I.C.B. anXXX nr.2 (1987)

[4] VOICU FLORICA "Applications contractives dans les éspaces ordonnés" "Babeş-Bolyai" University, Sem.on Dif.Eq. Preprint Nr.3, 1991.

Integrated Semigroups on Locally Convex Lattices

MIHAI VOICU

In this paper we give sufficient conditions such that a resolvent positive operator generates an integrated semigroup.

Definition 1. Let E / $\mathbb{R}$ be a ordered locally convex space and $A : D(A) \longrightarrow E$ a linear operator. We say that A is a resolvent positive operator if there exists $\alpha \in \mathbb{R}$ such that $(\alpha, \infty) \subset \rho(A)$ (resolvent set of A) and $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1} \in L_+(E)$ for all $\lambda > \alpha$.

If A is a resolvent positive operator we denote by :

$$S(A) = \inf\left\{ \mu \in \mathbb{R} \mid (\mu, \infty) \subset \rho(A) \text{ and } R(\lambda, A) \in L_+(E), \forall \lambda > \mu \right\}$$

Definition 2. Let (E, E_+) be a sequentially complete ordered locally convex space and $A : D(A) \longrightarrow E$ a resolvent positive operator. Assume that there exists a (unique) increasing function $S : [0, \infty) \longrightarrow L(E)$, $S(0) = 0$ such that :

1. For every $x \in E$ and $t_0 \in [0, \infty)$, $\lim\limits_{t \to t_0} S(t)x = S(t_0)x$.
2. $R(\lambda, A) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, dS(t)x$, for all $x \in E$, and $\lambda > \lambda_0 > S(A)$.

Then S is called the integrated semigroup generated by A.

Theorem. Let (E, E_+) be a complete locally convex lattice, P the family of continuous seminorms on E with the property : $x, y \in E$, $|x| \leq |y|$ implies $p(x) \leq p(y)$ for all $p \in P$.

Let $A : D(A) \longrightarrow E$ be a densely defined resolvent positive operator. Then A generates a positive integrated semigroup.

Remark. Let (E, E_+) be sequentially complete ordered locally convex space, $T : [0, \infty) \to L(E)$ a positive equicontinuous C_0-semigroup and $A : D(A) \longrightarrow E$ its generator. Then $S : [0, \infty) \to L(E)$ defined by $S(t)x = \int_0^t T(s)x\, ds$, $x \in E$ is the integrated semigroup generated by A.

REFERENCES

1. Arendt, W., - Resolvent Positive Operators. Proc.London Math. Soc. Nr. 7 (1988).

2. Cristescu, R., - Spaţii lineare topologice, Ed.Acad.Bucureşti, 1974.

3. Nagel, R., - One Parameter Semigroups of Positive Operators, Springer, Lecture Notes, 1184.

4. Pazy, A., - Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, New York, 1983.

5. Voicu, M., - Analele Univ. Bucureşti, No. 3 (1989).

6. Voicu, M., - Spaţii lineare ordonate topologice, No. 11(1990).

7. Widder, D.V. - The Laplace Transform, Princeton, Univ. Press., New Jersey, 1946.

8. Yosida, K., - Functional Analysis, Springer (1965).

INSTITUTUL DE CONSTRUCTII BUCURESTI
BD.LACUL TEI 124, BUCURESTI,
ROMANIA

A TYPICAL NON-REPRESENTABLE OPERATOR ON $L_1([0,1])$

Constantin Volintiru

University of Bucarest

Let $A \subset [0,1]$ be a measurable set with $\mu(A) > 0$ and let be the tree $\bigcup_{n \geq 0} \{0,1\}^n$.

We call G-Haar system (supported by A) any family of measurable sets $H = (A_\alpha)_{\alpha \in \Delta}$ such that $A_\phi = A$ and for every $\alpha \in \Delta$, $\mu(A_\alpha) > 0$, $A_\alpha = A_{\alpha 0} \cup A_{\alpha 1}$ and $A_{\alpha 0} \cap A_{\alpha 1} = \emptyset$.

Define $a_\alpha = \mu(A_\alpha)$, $b_\alpha = a_\alpha^{-1}$, $h_\phi = b_\phi \psi_A$; $h^* = \psi_A$,

$$h_\alpha = b_{\alpha 0} \psi_{A_{\alpha 0}} - b_{\alpha 1} \psi_{A_{\alpha 1}}, \quad h_\alpha^* = b_\alpha (a_{\alpha 1} \psi_{A_{\alpha 0}} - a_{\alpha 0} \psi_{A_{\alpha 1}})$$

Let $\mathcal{F}_H$ be the σ-algebra generated in A by the G-Haar system $(A_\alpha)_{\alpha \in \Delta}$.

With the enumeration given by the lexicographic order on $(h_\alpha)_{\alpha \in \Delta}$ is a monotone base for $L_1(A, \mathcal{F}_H, \mu)$ with the associate functionals $(h_\alpha^*)_\alpha$. The following proposition is true :

<u>**THEOREM**</u> Assume that X is a real Banach space and $U : L_1([0,1]) \to X$ is a linear non-representable operator. (i.e. X lacks RNP.)

Then there exist $\varepsilon_0 > 0$ and a G-Haar system supported by some $A \subset [0,1]$ such that:

(a) $\| U(h_\alpha) \| \geq \varepsilon_0$ for every

(b) $(U(h_\alpha))_{\alpha \in \Delta}$ is a basic sequence in X.

The above result seems to be a new one and there are some reasons to hope that the restriction of the above U to $L_1(A, \mathcal{F}_H, \mu)$ may be viewed as a typical non-representable operator. However a complete proof of this last assertion is not yet available. The missing part is an argument which could insure that the measure space $(A, \mathcal{F}_{H}, \mu)$ is non-atomic.

REFERENCES

1. J.Diestel, J.J. Uhl Jr. Vector Measure , Math.Surveys, 15 (1977) AMS .
2. J.Diestel , J.J.Uhl Jr. Progress in Vector Measures (in Measure Theory and its Applications , Lecture Notes in Math. nr. 1033 , Springer-Verlag , 1984 .

UNIFORM CONTINUITY AND UNIFORM CONVERGENCE

Dan Tudor Vuza
The Institute of Mathematics
of the Romanian Academy

In the book *Şocul Matematicii* [The Mathematical Shock] by professor Solomon Marcus, the relation between the uniform continuity of a function $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ and the uniform convergence of the sequence of functions $(f_n)_{n\geq 1}$ attached to f, where $f_n(x) = f(x + n^{-1})$, is considered. It is remarked there that the uniform continuity of f implies the uniform convergence of (f_n), while the converse is not true. The counterexample given there uses Dirichlet's function ($f(x) = 1$ for x rational, $f(x) = 0$ for x irational) for which the sequence (f_n) is constant at every $x \in \mathbb{R}$. Dirichlet's function is discontinuous at every point; it is therefore natural to ask whether the converse implication is true when f belongs to the class of continuous functions. The purpose of this communication is to show that the answer is negative even for the class of infinitely differentiable functions. In fact, we considered the problem in a more general setting, namely that of functions defined on a topological group. The main result follows.

THEOREM. *Let G be a commutative metrizable non-discrete and non-compact topological group and let* $(x_n)_{n\geq 1} \subset G$ *be a sequerce such that* $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. *There is a function* $f:G \longrightarrow \mathbb{R}$ *with the following properties:*

i) *f is continuous and bounded;*

ii) $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in G} |f(x + x_n) - f(x)| = 0$;

iii) *f is not uniformly continuous;*

iv) *If G is a Lie group, then f is infinitely differentiable.*

Travaux du Séminaire

(année universitaire 1990-91)

A.Antipa-Inégalités de martingales

T.Bălan-Généralisations de l'espace de Minkowski

I.Cătuneanu-Sur le support des certains opérateurs réguliers *)

M.Cîrnu-Applications des représentations de Carleman *)

R.Cristescu-Sur la décomposition des opérateurs réguliers *)

-Remarques sur le prolongement des fonctionnelles linéaires et positives

-Sur le théorème de prolongement de Kantorovitch

N.Dăneţ-Opérateurs positifs p-sommables

M.Gavrilă-Fonctions convexes sur des espace linéaires σ-réticulés

-Points fortement exposés dans des espaces de fonctions vectorielles

C.Niculescu-Une théorie generale des ideaux *)

-Sur la théorie des idéaux

O.Olteanu-Une généralisation d'un théorème concernant le problème des moments

L.Pavel-Représentations des hyper-groupes sur des espace à métrique indéfinie

G.Păltineanu-Sur le théorème de Bohman-Korovkin *)

-Remarques concernant le théorème de Bohman-Korovkin

F.Pop-Sur le théorème de Freudenthal

N.Popa-Le théorème de Gamlen-Gaudet dans la partie inconditionnelle de $L_{op}(0,1)$

C.Velintiru-Suites de type Rademacher et opérateurs completement continues *)

-Ensembles convexes, fermés et bornés sans des points extrémaux

-Certains problèmes ouverts concernant les opérateurs linéaires et continus sur L_1.

*) Communication au Symposion de Craiova - 27 Octobre 1991

XII^{ème} Colloque

ESPACES LINÉAIRES ORDONNÉS TOPOLOGIQUES

Sinaia, 25-27 Juin 1991

PROGRAMME DES TRAVAUX

Mardi 25 Juin 1991

9-10 Conférences

1. Romulus Cristescu - Opérateurs à variation bornée.
2. Nicolae Popa - The unconditional part of $L_\infty(0,1)$ with respect to the Haar system and Gamlen-Gaudet theorem.

10-11 Réunion de discussions scientifiques

11-13 Communications

1. M.Voicu - Integrated semigroups on locally convex lattices.
2. D.T.Vuza - Uniform convergence and uniform continuity.
3. Irina Cătuneanu - Prolongement des opérateurs (o)-bornés.
4. A.Antipa - Sur la convergence des martingales dans r.i.espaces.
5. N.Dăneţ - The representation of some rearrangement invariant function spaces using the Poisson integral.
6. N.Ţiţa - Le produit tensoriel des idéaux de Lorentz-Zygmund.

Mercredi 26 Juin 1991

9-10 Conférences

1. C.Niculescu, G.Păltineanu, D.T.Vuza - Non-commutative interpolation.
2. G.Isac, A.B.Németh - Projection isotone cones.

10-11 Réunion de discussions scientifiques

11-13 Communications

1. T.Bălan - Generalizing the Minkowskian space-time.
2. Rodica Dăneţ - A class of orthomorphisms on Banach lattices.
3. M.Gavrilă - (ρ)-Uniformly continuous functions.
4. Liliana Pavel - Représentations induites généralisées dans les espaces de Fréchet.
5. G.Popescu - The Bohman-Korovkin theorem.
6. T.Precupanu - Dual properties in vector optimization.

Jeudi 27 Juin 1991

9-11 Communications

1. O.Olteanu - An application of a general extension theorem of linear operators to the classical moment problem.

2. A.Petcu - The characterization of maximal normal subspaces of a strictly axial space.

3. Florica Voicu - Dépendence du point fixe du paramètre.

4. C.Volintiru - A typical nonrepresentable operator on $L_1(0,1)$.

5. Ileana Bucur - Une conjecture dans les espaces de Choquet.

6. V.Rădulescu, N.Ţarfulea - Une application des opérateurs de Fredholm d'index zéro.

11-11.30 Séance de clôture du Colloque

Articles publiés dans le "Séminaire d'Espaces linéaire ordonnés topologiques

Nr.1(1980)

Articles pag.

Nr.2(1981)

Articles pag.

Communications(résumés)

Nr.3(1982)

Articles pag.

Communications(résumés)

Nr.4(1983)

Articles pag.

Communications(résumés)

Nr.5(1984)

Articles

Communications(résumés)

Nr.6(1985)

Articles

Communications(résumés)

Nr.7(1986)

Articles

Nr.8(1987)

Articles pag.

Communications(résumés)

Nr.9(1988)

Articles pag.

Communications(résumés)

Nr.10(1989)

Articles

Nr.11(1990)

Articles pag

Communications(résumés)

— . —

Lei 46,40