GH. SIREȚCHI

TEORIA MĂSURII ȘI INTEGRALEI

Partea I-a

Noțiuni fundamentale

Editura Universității din București

GH. SIREȚCHI

TEORIA MĂSURII ȘI INTEGRALEI

Partea I-a

Noțiuni fundamentale

Editura Universității din București
- 2002 -

Referenți științifici: *Prof. dr. Ion COLOJOARĂ*
Conf. dr. Mihai ŞABAC

Şos. Panduri 90-92, București - 76235; Tel./Fax: 410.23.84
E-mail: editura@unibuc.ro
Internet: www.editura.unibuc.ro

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
SIREȚCHI, GHEORGHE
Teoria măsurii şi integralei / Gheorghe Sirețchi. - București : Editura Universității din Bucureşti, 2002
vol. : cm.
ISBN 973-575-638-2
Vol. 1: Noțiuni fundamentale. - 2002. - p. Bibliogr.
ISBN 973-575-639-0

517.518.1

PREFAȚĂ

Această carte reprezintă conținutul cursului intitulat *Teoria Măsurii* pe care îl predau la o serie din anul II, secția matematică, la Facultatea de Matematică, Universitatea din București.

Teoria măsurii şi integralei este o componentă din ansamblul acelor cunostințe necesare care intră în cultura matematică a absolvenților Facultății de Matematică.

Cartea cuprinde prezentarea noțiunilor fundamentale de teoria măsurii şi integralei necesare pentru abordarea altor probleme. Pentru o mai bună înțelegere am încercat să prezint teoria măsurii şi integralei ca o verigă dintr-un lanț, situată între *Analiza Matematică* şi *Analiza Funcțională.*

Capitolul 1 intitulat *Preliminarii,* cuprinde o serie de rezultate de Analiză Matematică, predată în anul I, necesare pe parcursul capitolelor 2-5.

Recomand cititorilor, consultarea în paralel, a părții a II-a a cărții, care conține *exemple* şi *exerciții rezolvate* care permit dobândirea abilităților de lucru în condiții concrete şi în final însuşirea efectivă a teoriei.

Țin să precizez că manuscrisul acestei cărți circulă, sub formă xerografiată, prezentată de autor, printre studenții din anul II, de cel puțin zece ani. Posibilitatea redactării pe calculator mi-a permis prezentarea manuscrisului pentru tipar.

Tehnoredactarea computerizată aparține studenților *Dan Eduard Muraru* şi *Constantin Sirețchi*, cărora le mulțumesc , încă o dată, şi pe această cale,pentru strădania depusă.

CUPRINS

Cap. 1. PRELIMINARII

1.1. Noțiuni de teoria mulțimilor

Notăm cu 2^X mulțimea părților unei mulțimi X. O clasă (familie) de mulțimi $\mathscr{A}=(A_i)_{i\in I}$ se numeşte: *mutual disjunctă*, dacă $A_i \cap A_j = \emptyset$, $(\forall)$ $i\neq j$; *finită*, dacă I este finită; *numerabilă*, dacă I este numerabilă; $(\mathscr{A},\subseteq)$ *filtrată*, dacă $(\forall)$ $i,j\in I$ $(\exists)$ $k\in I$, a.î. $A_i, A_j \subseteq A_k$.

Fie X o mulțime şi $A\subseteq X$. Mulțimea $X\setminus A$ se numeşte *complementara* lui A şi se notează adesea cu CA sau A^c; să observăm că $A=A^{cc}$. Dacă $\mathscr{C}\subseteq 2^x$, notăm $\mathscr{C}^c:=\{A^c;\ A\in\mathscr{C}\}$.

1.1.1. Propoziție. Fie X o mulțime şi A, $A_i\in 2^X (i\in I)$. Atunci au loc relațiile:

1) $A\setminus(\bigcup_i A_i)=\bigcap_i (A\setminus A_i)$; $A\setminus(\bigcap_i A_i)=\bigcup_i (A\setminus A_i)$;

2) $(\bigcup_i A_i)\setminus A=\bigcup_i (A_i\setminus A)$; $(\bigcap_i A_i)\setminus A=\bigcap_i (A_i\setminus A)$;

3) $A\cup(\bigcap_i A_i)=\bigcap_i (A\bigcup A_i)$; $A\cap(\bigcup_i A_i)=\bigcup_i (A\bigcap_i A_i)$;

4) $(\bigcup_i A_i)^c=\bigcap_i A_i^c$; $(\bigcap_i A_i)^c=\bigcup_i A_i^c$.

1.1.2. Propoziție. Fie $(A_i)_{i\in I}, (B_j)_{j\in J}$ două familii de mulțimi. Atunci au loc relațiile:

1) $(\bigcap_i A_i)\cup(\bigcap_j B_j)=\bigcap_{i,j} (A_i\cup B_j)$; $(\bigcup_i A_i)\cap(\bigcup_j B_j)=\bigcup_{i,j} (A_i\cap B_j)$;

2) $(\bigcap_i A_i)\setminus(\bigcap_j B_j)=\bigcup_j (\bigcap_i (A_i\setminus B_j))$; $(\bigcup_i A_i)\setminus(\bigcup_j B_j)\bigcup_i (\bigcap_j (A_i\setminus B_j))$

1.1.3. Propoziție. Fie $(A_i)_{i\in I}$, $(B_j)_{j\in J}$ două familii de mulțimi. Atunci au loc relațiile:

1) $(\bigcup_i A_i)\times(\bigcup_j B_j)=\bigcup_{i,j} A_i\times B_j$; $(\bigcap_i A_i)\times(\bigcap_j B_j)=\bigcap_{i,j} A_i\times B_j$;

2) Dacă I=J, avem $(\bigcap_i A_i)\times(\bigcap_i B_i)=\bigcap_i A_i\times B_i$;

3) Dacă I=J, avem $(\prod_i A_i)\times(\prod_i B_i)=\prod_i (A_i\times B_i)$;

4) Dacă familia $(A_i)_{i\in I}$ este filtrantă relativ la relația „$\subseteq$”, rezultă că

$$(\bigcup_i A_i)\times(\bigcup_i A_i)=(\bigcup_i A_i\times A_i).$$

1.1.4. Propoziție. Oricare ar fi mulțimile A_1, A_2, B_1, B_2, avem relația:

$$(A_1\times A_2)\setminus(B_1\setminus B_2)=$$
$$=((A_1\setminus B_1)\times(A_2\cap B_2))\cup((A_1\cap B_1)\times(A_2\setminus B_2))\cup((A_1\setminus B_1)\times(A_2\setminus B_2)).$$

1.1.5. Definiție. Fie X o mulțime și $(A_n)_{n\geq 1}\subseteq 2^X$ un șir de mulțimi. Să definim mulțimile

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n:=\bigcap_{n\geq 1}(\bigcup_{k\geq n} A_k) \text{ și } \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n:=\bigcup_{n\geq 1}(\bigcap_{k\geq n} A_k)$$

iar dacă $\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n=\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n$, să o notăm cu A; vom spune că șirul $(A_n)_{n\geq 1}$ *are limita* A și vom scrie $A=\lim_{n\to\infty} A_n$.

1) $\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n\subseteq\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n$; $(\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n)^c=\underline{\lim_{n\to\infty}}(A_n)^c$;

2) $x\in\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n \Leftrightarrow (\exists)\ (n_k)_{k\geq 1}\subseteq\mathbf{N}$, $n_k\uparrow\infty$, a.î. $x\in A_{n_k}$, $(\forall)\ k\geq 1$;

3) $x\in\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n \Leftrightarrow (\exists)\ m\geq 1$, a.î. $x\in A_n$, $(\forall)\ n\geq m$;

1.1.6. Propoziție. Fie $(A_n)_{n\geq 1}$ un șir monoton crescător (resp.descrescător) de mulțimi. Atunci $\lim_{n\to\infty} A_n$ există și este egală cu $\bigcup_{n\geq 1} A_n$ (resp. $\bigcap_{n\geq 1} A_n$).

1.1.7. Propoziție. Fie X o mulțime și A, $A_n\in 2^X$, $(n\geq 1)$. Atunci au loc relațiile:

1) $\overline{\lim_{n\to\infty}}(A\setminus A_n)=A\setminus\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n$; $\underline{\lim_{n\to\infty}}(A\setminus A_n)=A\setminus\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n$.

2) $\overline{\lim_{n\to\infty}}(A_n\setminus A)=(\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n)\setminus A$; $\underline{\lim_{n\to\infty}}(A_n\setminus A)=(\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n)\setminus A$;

3) $\overline{\lim_{n\to\infty}}(A\cup A_n)=A\cup\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n$; $\underline{\lim_{n\to\infty}}(A\cup A_n)=A\cup\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n$.

4) $\overline{\lim_{n\to\infty}}(A\cap A_n)=A\cap\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n$; $\underline{\lim_{n\to\infty}}(A\cap A_n)=A\cap\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n$.

Corolar 1. Fie X o mulțime și $(A_n)_{n\geq 1}\subseteq 2^X$ un șir care are limită. Atunci, $(\forall)\ A\subseteq X$, au loc relațiile:

1) $\lim_{n\to\infty}(A\setminus A_n)=A\setminus(\lim_{n\to\infty} A_n)$; 2) $\lim_{n\to\infty}(A_n\setminus A)=(\lim_{n\to\infty} A_n)\setminus A$.

3) $\lim_{n\to\infty}(A\cup A_n)=A\cup(\lim_{n\to\infty} A_n)$; 4) $\lim_{n\to\infty}(A_n\cap A)=(\lim_{n\to\infty} A_n)\cap A$.

5) Dacă șirul $(A_n)_{n\geq 1}$ este monoton, atunci șirurile din relațiile 1)-4) sunt monotone.

Corolar 2. Fie X o mulţime şi A, $A_n \in 2^X$, $(n\geq 1)$. Atunci au loc afirmaţiile:
1) $A_n \uparrow A \Leftrightarrow A\setminus A_n \downarrow \varnothing$; 2) $A_n \downarrow A \Leftrightarrow (A_1\setminus A_n)\uparrow(A_1\setminus A)$.

1.1.8. Definiţie. Fie A, B două mulţimi. Mulţimea $(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$ se numeşte *diferenţa simetrică* a lui A şi B şi se notează cu $A \Delta B$.

1.1.9. Definiţie. Fie X o mulţime şi $A\subseteq X$. Funcţia $f:X\to\{0,1\}$, definită astfel $f(x) = 1$, dacă $x \in A$ şi $f(x)=0$, dacă $x\in X\setminus A$, se numeşte *funcţia caracteristică* a mulţimii A şi se notează cu φ_A, 1_A, car(A)

1.1.10. Propoziţie. Fie X o mulţime şi A, $B\subseteq X$. Atunci au loc afirmaţiile:
1) $\varphi_A=0\Leftrightarrow A=\varnothing$; $\varphi_A=1\Leftrightarrow A=X$; $A\cap B=\varnothing\Leftrightarrow\varphi_A\cdot\varphi_B=0$;
2) $\varphi_A\leq\varphi_B\Leftrightarrow A\subseteq B$; $\varphi_A=\varphi_B\Leftrightarrow A=B$;
3) $\varphi_{A\cup B}=\varphi_A+\varphi_B-\varphi_A\cdot\varphi_B$; $\varphi_{A\cap B}=\varphi_A\cdot\varphi_B$;
4) $\varphi_{A\setminus B}=\varphi_A(1-\varphi_B)$; $\varphi_{A\cup B}=\varphi_A+\varphi_B\Leftrightarrow A\cap B=\varnothing$.
5) $\varphi_{A\Delta B}=\varphi_A+\varphi_B-2\varphi_A\cdot\varphi_B$.

1.1.11 Propoziţie. Fie X o mulţime, $(A_n)_{n\geq 1}\subseteq 2^X$ un şir, $A^*:=\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n$ şi $A_*:=\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n$. Atunci au loc relaţiile:
1) $car(A^*)=\overline{\lim_{n\to\infty}}car(A_n)$; $car(A_*)=\underline{\lim_{n\to\infty}}car(A_n)$;
2) Dacă $(\exists)$ $A=\lim_{n\to\infty}A_n$, avem $car(A)=\lim_{n\to\infty}car(A_n)$;
3) $\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n$ există$\Leftrightarrow\lim_{n\to\infty}car(A_n)$ există.
4) $A_n\uparrow A\ (n\to\infty)\Leftrightarrow car(A_n)\uparrow car(A)(n\to\infty)$.
5) Dacă $A_n\cap A_m=\varnothing$ şi $A=\bigcup_{n\geq 1}A_n$, avem $car(A)=\sum_{n\geq 1}car(A_n)$.

1.1.12. Propoziţie. Fie X o mulţime; $(\forall)$ A, $B\in 2^X$ să definim $A+B:=A\Delta B$ şi $A\cdot B:=A\cap B$. Atunci operaţiile $+$, $\cdot$ definesc pe 2^X o structură algebrică de inel comutativ unitar.

Corolar 1. Fie X o mulţime. Atunci o serie $\sum_{n\geq 1}A_n$ cu elemente din grupul aditiv $(2^X,+)$ este convergentă$\Leftrightarrow\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n=\varnothing$.

1.1.13. Definiţie. Fie X o mulţime (nevidă). Se numeşte *relaţie* pe X o submulţime $\rho\subseteq 2^X$; dacă $(x,y)\in\rho$ se notează $x\rho y$. Relaţia ρ se numeşte de e*chivalenţă* şi se notează cu simbolul $\sim$, dacă este *reflexivă*, *simetrică* şi *tranzitivă*.

1.1.14. Propoziţie. Fie X o mulţime şi $\sim$ o relaţie de echivalenţă pe X. Atunci mulţimea claselor de echivalenţă $x^\sim:=\{y\in X;\ y\sim x\}$, defineşte pe X o partiţie. Reciproc orice partiţie $(A_i)_{i\in I}$ a lui X este unic determinată de o relație de echivalentă şi anume $x \sim y \Leftrightarrow (\exists)\ i \in I$, cu $x, y \in A_i$.

1.1.15. Definiție. Fie X o mulțime. O relație ρ pe X se numeşte de *ordine* şi se notează cu simbolul $\leq$, dacă este *reflexivă*, *antisimetrică* şi *tranzitivă*; perechea $(X, \leq)$ se numeşte *mulțime ordonată* şi se notează cu $X[\leq]$. Vom spune că $X[\leq]$ este *total ordonată* , sau că relația $\leq$ este *totală*, dacă $(\forall)\ x, y \in X$, avem $x \leq y$ sau $y \leq x$. Fie mai departe $X[\leq]$ o mulțime ordonată . Fixăm o mulțime $A \subseteq X$; cel mai mic majorant al mulțimii A, dacă există, se numeşte *marginea superioară* a lui A şi se notează cu supA, sau $\sup\{x; x \in A\}$ sau $\sup\limits_{x \in A} x$; cel mai mare minorant al mulțimii A, dacă există, se numeşte *marginea inferioară* a lui A şi se notează cu infA, $\inf\{x; x \in A\}$ sau $\inf\limits_{x \in A} x$. Mulțimea $X[\leq]$ se numeşte *inductiv ordonată* , dacă orice parte total ordonată A din X, posedă margine superioară. O mulțime ordonată $X[\leq]$ se numeşte *bine ordonată*, dacă orice submulțime nevidă a lui X posedă un prim element. O mulțime amorfă X spunem că se poate *bine ordona*, dacă există o relație de ordine $\leq$ pe X, a.î. $X[\leq]$ este bine ordonată .

Un element al unei mulțimi ordonate $X[\leq]$ se numeşte *maximal*, dacă $(\forall)\ x \in X$, $x \geq m$, rezultă că $x = m$.

1.1.16. Principiul inducției transfinite. Fie $X[\leq]$ o mulțime bine ordonată, cu x_0 prim element şi $X \ni x \to P(x)$, o funcție propozițională, cu proprietățile:

1) $P(x_0)$ este adevărată ;
2) $(\forall)\ x \in X$, cu $P(t)$ adevărată $(\forall)\ x_0 \leq t < x$, rezultă $P(x)$ adevărată .

Atunci $P(x)$ adevărată $(\forall)\ x \in X$.

Corolar 1 (Principiul inducției complete). Fie $\mathbf{N} \ni n \to P(n)$, o funcție propozițională, cu proprietățile:

1) $P(1)$ adevărată .
2) $(\forall)\ n \geq 1$, cu $P(n)$ adevărată , $(\forall)\ k \in \overline{1, n+1}$, rezultă $P(n)$ adevărată .

Atunci $P(n)$ adevărată $(\forall) n \geq 1$.

1.1.17. Teoremă fundamentală. Afirmațiile 1)–4) sunt echivalente:

1) **Axioma alegerii** (Zermelo). $(\forall)(A_i)_{i \in I}$ o familie de mulțimi nevide, $(\exists)\ f: I \to \bigcup\limits_i A_i$, a.î. $f(i) \in A_i$, $(\forall) i \in I$.

2) **Principiul maximalității** (Hausdorff). Orice mulțime ordonată posedă o parte total ordonată maximală.

3) **Principiul elementului maximal** (Zorn). Orice mulțime inductiv ordonată posedă cel puțin un element maximal.

4) **Principiul bunei ordonări** (Zermelo). Orice mulțime (amorfă) se poate bine ordona.

• **Variantă a axiomei alegerii.** $(\forall)(A_i)_{i\in I}$ o familie mutual disjunctă de mulțimi nevide, există o mulțime A,a.î. $A\cap A_i$=1 punct, $(\forall)i\in I$.

• **Variantă a principiului elementului maximal.** Fie $X[\leq]$ o mulțime inductiv ordonată . Atunci,$(\forall)$ $x\in X$,există un element maximal în X,a.î. $m\geq x$.

1.1.18. Definiție. Fie X,Y două mulțimi și $f:X\to Y$ o funcție. Funcția f se numește *inversabilă*, dacă $(\exists)$ $g: Y\to X$,a.î. $g\circ f=1_X$ și $f\circ g=1_Y$. Funcția g se numește *inversa* lui f și se notează cu f^{-1}.

a) f injectivă $\Leftrightarrow(\exists)$ $g: Y\to X$,a.î. $g\circ f=1_X$.

b) f surjectivă $\Leftrightarrow(\exists)$ $g: Y\to X$,a.î. $f\circ g=1_Y$.

c) f bijectivă $\Leftrightarrow$ f inversabilă.

Fie $f:X\to Y$ injectivă și $f_1:X\to f(X)$ definite astfel $f_1(x)=f(x)$, $(\forall)$ $x\in X$. Atunci f_1 este bijectivă, deci inversabilă; inversa sa, $f_1^{-1}:f(x)\to X$,se numeşte *inversa lui f pe imagine.*

1.1.19. Definiție. Fie $f:X\to Y$ o funcție; $(\forall)$ $A\in 2^X$,definim $f(A):=\{y\in Y; (\exists)\ x\in A,\ f(x)=y\}$; obținem astfel o funcție,$2^X\ni A\to f(A)\in 2^Y$, numită *extensia lui f la mulțimea părților*. Analog,$(\forall)$ $B\in 2^Y$,definim $f^{-1}(B):=\{x\in X;\ f(x)\in B\}$; obținem astfel o funcție,$2^Y\ni B\to f^{-1}(B)\in 2^X$,numită *extensia reciprocă a lui f la mulțimea părților*.

In mod curent se folosesc notațiile:

$(\forall)\mathscr{A}:=(A_i)_{i\in I}\subseteq 2^X$, $f(\mathscr{A}):=(f(A_i))_{i\in I}$,

$(\forall)\mathscr{B}:=(B_j)_{j\in J}\subseteq 2^Y$, $f^{-1}(\mathscr{B}):=(f^{-1}(B_j))_{j\in J}$.

1.1.20. Propoziție. Fie $f:X\to Y$ o funcție. Atunci au loc relațiile:

1) $f(\bigcup_i A_i)=\bigcup_i f(A_i)$, $f(\bigcap_i A_i)\subseteq\bigcap_i f(A_i)$, $(\forall)(A_i)_{i\in I}\subseteq 2^X$.

2) $f^{-1}(\bigcup_j B_j)=\bigcup_j f^{-1}(B_j)$, $f^{-1}(\bigcap_j B_j)=\bigcap_j f^{-1}(B_j)$, $(\forall)(B_j)_{j\in J}\subseteq 2^Y$.

1.1.21. Propoziție. Fie $f:X\to Y$ o funcție. Atunci au loc relațiile:

1) $f(A\cap B)=f(A)\cap f(B)$, $(\forall)$ A, $B\in 2^X\Leftrightarrow$f injectivă.

2) $F(A\setminus B)=f(A)\setminus f(B)$, $(\forall)$ A, $B\in 2^X\Leftrightarrow$f injectivă.

3) $f^{-1}(C\setminus D)=f^{-1}(C)\setminus f^{-1}(D)$, $(\forall)$ C, $D\in 2^Y$.

1.1.22. Definiție. Două mulțimi A și B se numesc *echipotente* și se notează A~B, dacă $(\exists)$ $f:A\to B$ bijectivă; clasa mulțimilor echipotente cu o mulțime dată A se numeste *cardinal* de A și se notează cu card(A);numerele cardinale se notează cu primele litere ale alfabetului gotic: $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ ..; cardinalul mulțimii vide se notează cu 0. O mulțime A se numeşte *finită* , dacă este vidă sau (∃) n≥1 a.î. A~{1,2......n} şi atunci card(A) se notează cu n. Card(**N**) se notează cu $\aleph_0$ (prima literă a alfabetului ebraic); o mulțime A echipotentă cu **N** se numeşte *numerabilă*. O mulțime finită sau numerabilă se numeşte *cel mult numerabilă*. Card(**R**) se notează cu $\mathfrak{c}$; O mulțime A echipotentă cu **R** se numeşte de *puterea continuumului*. Un număr cardinal $\mathfrak{b}$ se numeşte *finit* dacă $\mathfrak{b}\in$**N**$\cup\{0\}$ şi *transfinit* în caz contrar.

1.1.23 Propoziție. O reuniune (cel mult) numerabilă de mulțimi numerabile este numerabilă.

1.1.24. Propoziție. Mulțimile **Q**,$\mathbf{Q}^n$(n≥1) sunt numerabile iar mulțimile **R** şi **R\Q** sunt nenumerabile.

1.1.25. Definiție. Operațiile de *adunare*, *înmulțire*, *ridicare la putere* a două numere cardinale se definesc astfel:

$\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$:=card($A\cup B$), unde $A\in\mathfrak{a}$, $B\in\mathfrak{b}$ şi $A\cap B=\varnothing$.

$\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}$:=card($A\times B$), unde $A\in\mathfrak{a}$, $B\in\mathfrak{b}$.

$\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}}$:=card($A^B$), unde $A\in\mathfrak{a}$, $B\in\mathfrak{b}$ şi A^B:={f; F:B→A}

a) Fie X o mulțime şi φ_A:X→{0,1} funcția caracteristică a lui A. Atunci aplicația $2^X\ni A\to\varphi_A\in\{0,1\}^X$ este bijectivă, deci card(2^X):=card($\{0,1\}^X$):=$2^{\mathrm{card}(X)}$

b) $2^{\aleph_0}=\mathfrak{c}$, i.e. card($\{0,1\}^{\mathbf{N}}$)=card(**R**).

c) $\aleph_0<2^{\aleph_0}=\mathfrak{c}$,i.e. card(**N**)<card(**R**).

1.1.26. Definiție. Fie $\mathfrak{a}$,$\mathfrak{b}$ două numere cardinale. Definim $\mathfrak{a}\le\mathfrak{b}\Leftrightarrow$(∃) $A\in\mathfrak{a}$, (∃) $B\in\mathfrak{b}$, a.î. $A\sim C\subseteq B$.

a) Relația ≤ defineşte o relație de ordine totală pe orice mulțime de numere cardinale.

b) Relația ≤ defineşte o relație de bună ordine pe orice mulțime de numere cardinale.

c) (∀)$\mathfrak{a}$ un număr cardinal, avem $\mathfrak{a}<2^{\mathfrak{a}}$, i.e. (∀) X o mulțime, avem card(X)<card(2^X).

d) Suma şi produsul a două numere cardinale sunt operații comutative şi asociative; produsul este distributiv față de sumă.

e) $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=\mathfrak{a}\times\mathfrak{a}=\mathfrak{a}\vee\mathfrak{b}$, (∀)$\mathfrak{a}$,$\mathfrak{b}$ numere cardinale transfinite.

f) Fie X o mulțime infinită şi Φ(X) mulțimea părților finite ale mulțimii X. Atunci card(X)=card(Φ (X)).

Să ne oprim acum la mulţimea **R** a numerelor reale.

1.1.27. Propoziţie.(Caracterizarea marginilor unei mulţimi). Fie $A\subseteq\mathbf{R}$ o mulţime mărginită . Atunci:

1) $M=\sup A\Leftrightarrow$ i) $a\le M$, $(\forall)$ $a\in A$; ii) $(\forall)$ $\varepsilon>0$, $(\exists)$ $a\in A$,cu $a>M-\varepsilon$.
2) $M=\inf A\Leftrightarrow$ i) $m\le a$, $(\forall)$ $a\in A$; ii) $(\forall)$ $\varepsilon>0$, $(\exists)$ $a\in A$,cu $a<M+\varepsilon$.

1.1.28. Definiţie. Fie $(x_n)_{n\ge1}\subseteq\mathbf{R}$ un şir. Vom spune că $(x_n)_{n\ge1}$ este *convergent*, dacă $(\exists)$ $x\in\mathbf{R}$ cu proprietatea:

$$(\forall)\ \varepsilon>0,\ (\exists)\ N\ge1, \text{a.î. } |x-x_n|<\varepsilon,\ (\forall)\ n\ge N$$

Vom scrie atunci: $x_n\to x$; $x_n\to x(n\to\infty)$; $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x$.

Vom spune că $(x_n)_{n\ge1}$ *are limită* $+\infty$ şi vom scrie $x_n\to\infty$, dacă $(\forall)$ $c>0$, $(\exists)$ $N\ge1$,a.î. $x_n\ge c$, $(\forall)$ $n\ge N$. Şirul $(x_n)_{n\ge1}$ se numeşte *şir Cauchy*, dacă

$$(\forall)\ \varepsilon>0,\ (\exists)\ N\ge1, \text{a.î. } |x_n-x_m|<\varepsilon,\ (\forall)\ m,\ n\ge N;$$

sub forma concentrată se scrie $|x_n-x_m|\to0$, $(m,n\to\infty)$.

1.1.29. Teoremă. 1) Orice şir monoton crescător majorat, (resp. monoton descrescător minorat), $(x_n)_{n\ge1}\subseteq\mathbf{R}$, este convergent şi avem:

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\sup_{n\ge1} x_n \ (\text{resp } \lim_{n\to\infty} x_n=\inf_{n\ge1} x_n)$$

2) $(\forall)$ $(x_n)_{n\ge1}\subseteq\mathbf{R}$, avem $(x_n)_{n\ge1}$ convergent$\Leftrightarrow(x_n)_{n\ge1}$ şir Cauchy.

1.1.30. Definiţie. Fie $(x_n)_{n\ge1}\subseteq\mathbf{R}$ un şir. Numărul finit sau infinit definit astfel: $\inf\limits_{n\ge1}(\sup\limits_{k\ge n} x_k)$ (resp. $\sup\limits_{n\ge1}(\inf\limits_{k\ge n} x_k)$) se numeşte *limita superioară* (resp. *limita inferioară*) a şirului $(x_n)_{n\ge1}$ şi se notează cu $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$ (resp. $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$).

1.1.31. Propoziţie.$(\forall)$ $(x_n)_{n\ge1}\subseteq\mathbf{R}$, un şir , au loc afirmaţiile:

1) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(-x_n)=-\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$; $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}(-x_n)=-\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$.

2) Şirul $(x_n)_{n\ge1}$ este convergent$\Leftrightarrow$ $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$. In acest caz avem relaţia: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$.

1.1.32. Definiţie. Fie $(x_n)_{n\ge1}$ un şir. Perechea $((x_n)_{n\ge1}, (s_n)_{n\ge1})$,unde $s_n:=\sum\limits_{k=1}^{n} x_k$, se numeşte *serie de termen general* x_n şi se notează cu $\sum\limits_{n\ge1} x_n$. Seria $\sum\limits_{n\ge1} x_n$ se numeşte *convergentă* , dacă şirul $(s_n)_{n\ge1}$ este convergent; limita lui $(s_n)_{n\ge1}$, să o notăm cu x, se numeşte *suma seriei* şi se scrie $x=\sum\limits_{n\ge1} x_n$. Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} s_n=\pm\infty$, vom scrie $\sum\limits_{n\ge1} x_n=\pm\infty$ şi vom spune că seria *are sumă.* Așadar, dacă $(x_n)_{n\geq1}\subseteq\mathbf{R}_+$, atunci şirul $(s_n)_{n\geq1}$, fiind monoton crescător, are limită , finită sau ∞, deci $\sum_{n\geq1} x_n$ convergentă $\Leftrightarrow \sum_{n\geq1} x_n <\infty$. O serie $\sum_{n\geq1} x_n$ se numeşte *absolut convergentă* , dacă seria modulelor $\sum_{n\geq1} |x_n|$ este convergentă .

1.1.33. Propoziţie. 1) Seria geometrică $\sum_{n\geq0} a^n$ este convergentă $\Leftrightarrow |a|<1$.

In acest caz avem $\sum_{n\geq0} a^n = \frac{1}{1-a}$.

2) O serie numerică $\sum_{n\geq1} x_n$ este convergentă $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(\forall)$ $\varepsilon>0$, $(\exists)$ $N\geq1$,a.î. $\left|\sum_{k=n}^{n+p} x_k\right| < \varepsilon$, $(\forall)$ $n\geq N$, $p\geq1$ (cond. Cauchy).

3) O serie numerică absolut convergentă este convergentă .

4) O serie numerică majorată de o serie numerică convergentă cu termini nenegativi, este convergentă .

1.1.34. Propoziţie. O serie numerică $\sum_{n\geq1} x_n$ este absolut convergentă $\Leftrightarrow$ $(\forall)$ π o permutare a lui **N**, seria $\sum_{n\geq1} x_{\pi(n)}$ este convergentă . In acest caz avem $\sum_{n\geq1} x_n = \sum_{n\geq1} x_{\pi(n)}$, $(\forall)$ π o permutare a lui **N.**

Corolar 1. Fie $(x_n)_{n\geq1}\subseteq\mathbf{R}_+$ un şir. Atunci $(\forall)$ π o permutare a lui **N** avem

$$\sum_{n\geq1} x_n = \sum_{n\geq1} x_{\pi(n)} = \sup\{ \sum_{j\in J} x_j \,;\, J\subseteq\mathbf{N},\ J \text{ finită} \}.$$

1.2. Noţiuni de topologie generală.

1.2.1. Definiţie. Fie X o mulţime(nevidă). O clasă (familie) $\tau\subseteq2^X$ se numeşte topologie pe X, dacă are proprietăile:

$$1)\ \varnothing, X\in\tau; \qquad 2)\ (\forall)\ D_1, D_2\in\tau \Rightarrow D_1\cap D_2\in\tau;$$
$$3)\ (\forall)\ D_i\in\tau\ (i\in I) \Rightarrow \bigcup_i D_i \in \tau.$$

Perechea (X,τ) se numeşte *spaţiu topologic*, prescurtat ST, şi se notează cu $X[\tau]$; elementele lui τ, $D\in\tau$, se numesc *mulţimi deschise* din X, iar elementele lui X, $x\in X$, se numesc *puncte* din X. O mulţime $A\subseteq X$se numeşte *închisă*, dacă A^c, complementara lui A, este deschisă; notăm $\tau^c:=\{D^c;\ D\in\tau\}$-*clasa mulţimilor închise din* X. Se numeşte *vecinătate* a unui punct $x\in X$ o mulţime $V\subseteq X$

cu proprietatea: $(\exists)D\in\tau$, a.î. $x\in D\subseteq V$; notăm cu $\mathcal{V}_X(x)$, $\mathcal{V}(x)$,*mulțimea tuturor vecinătăților lui* x. Spațiul topologic X se numeşte *separat*, dacă orice două puncte distincte x,y din X posedă vecinătăți disjuncte.

Fie $A\subseteq X$ o mulțime fixată. Un punct $x\in X$ se numeşte *punct aderent* lui A, dacă $A\cap V\neq\emptyset$, $(\forall)\ V\in\mathcal{V}(x)$; notăm cu $\overline{A}$ mulțimea punctelor aderente ale mulțimii A. Un punct $x\in X$ se numeşte *punct de acumulare* al lui A, dacă $A\cap(V\setminus\{x\})\neq\emptyset$, $(\forall)\ V\in\mathcal{V}(x)$; notăm cu A' mulțimea punctelor de acumulare ale mulțimii A.Un punct $x\in X$ se numeşte *punct interior* lui A, dacă există $V\in\mathcal{V}(x)$, a.î. $V\subseteq A$; notăm cu $\overset{\circ}{A}$ sau A° *interiorul* mulțimii A. Mulțimea $\overline{A}\cap\overline{A^c}$ se numeşte *frontiera* lui A şi se notează cu ∂A sau Fr(A).

1.2.2. Definiție. Fie $X_1[\tau_1]$, $X_2[\tau_2]$, două spații topologice, $X:=X_1\times X_2$ produsul cartezian al mulțimilor X_1 cu X_2; atunci familia

$$\tau:=\{G\subseteq X;\ (\forall)(x_1, x_2)\in G,\ (\exists)\ V_1\times V_2\in\mathcal{V}(x_1)\times\mathcal{V}(x_2),\ V_1\times V_2\subseteq G\}$$

este o topologie pe X, notată cu $\tau_1\otimes\tau_2$. Perechea (X,τ) se numeşte *spațiu topologic produs* al celor două spații.

1.2.3. Definiție. Fie X un ST şi $(x_n)_{n\geq 1}\subseteq X$ un şir. Vom spune că $(x_n)_{n\geq 1}$ este *convergent* dacă $(\exists)\ x\in X$ cu proprietatea:

$$(\forall)\ V\in\mathcal{V}_X(x),\ (\exists)\ n_v\geq 1,\ \text{a.î. } x_n\in V,\ (\forall)\ n\geq n_v.$$

1.2.4. Definiție. Fie X, Y două ST şi $f:X\to Y$ o funcție ; funcția f se numeşte *continuă* într-un punct $x_0\in X$, dacă:

$$(\forall)\ V\in\mathcal{V}_Y(f(x_0)),\ (\exists)\ U\in\mathcal{V}_X(x_0),\ \text{a.î. } f(U)\subseteq V.$$

Functia f se numeşte *secvențial continuă* în $x_0\in X$, dacă: $(\forall)\ (x_n)_{n\geq 1}\subseteq X$, $x_n\to x_0$, rezultă că $f(x_n)\to f(x_0)$.

1.2.5. Teoremă. Fie X , Y două ST şi $f:X\to Y$ o funcție. Atunci condițiile 1)-5) sunt echivalente:

1) f continuă pe X; 2) $f^{-1}(\tau_Y)\subseteq\tau_X$; 3) $f^{-1}(\tau_Y^c)\subseteq\tau_X^c$;

4) $f(\overline{A})\subseteq\overline{f(A)}$, $(\forall)\ A\subseteq X$; 5) $\overline{f^{-1}(B)}\subseteq f^{-1}(\overline{B})$, $(\forall)\ B\subseteq Y$;

1.2.6. Definiție. Fie X, Y două ST , $A\subseteq X$ o mulțime, $x_0\in A'$ un punct şi $f:A\to Y$ o funcție. Vom spune că f are limită în x_0, dacă $(\exists!)y_0\in Y$ cu proprietatea:

$$(\forall)V\in\mathcal{V}_Y(y_o),\ (\exists)U\in\mathcal{V}_X(x_0),\text{a.î. } f(A\cap U\setminus\{x_o\})\subseteq V;$$

vom scrie atunci $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=y_o$.

1.2.7. Teoremă. Fie X, Y două ST, $A \subseteq X$ o mulțime, $x_0 \in A \cap A'$ un punct şi $f:A \to Y$ o funcție. Atunci

$$f \text{ continuă în } x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

1.2.8. Definiție. Fie X un ST; o familie de mulțimi $\mathscr{A} = (A_i)_{i \in I} \subseteq 2^X$ se numeşte *local finită* dacă $(\forall)\ x \in X$, există $V \in \mathcal{V}_X(x)$ şi $J \subseteq I$ finită, a.î. $V \cap A_i = \varnothing$, $(\forall)\ i \in I \setminus J$.

1.2.9. Propoziție. Fie X un ST şi $(A_i)_{i \in I} \subseteq 2^X$ o familie local finită de de mulțimi închisă. Atunci $\bigcup_{i \in I} A_i$ este mulțime închisă.

1.2.10. Propoziție. Fie X un ST şi $f:X \to \mathbf{R}$ o funcție . Atunci: f continuă (pe X)$\Leftrightarrow(\exists)\ (A_i)_{i \in I}$ o acoperire închisă, local finită, a lui X, a.î. functia $f|A_i$ este continuă,$(\forall)\ i \in I$..

1.2.11. Definiție. Fie X un ST. Vom spune că X este *compact*, dacă este separat şi *quasi-compact* , i.e. $(\forall)\ (D_i)_{i \in I}$ o familie de mulțimi deschise din X, care acoperă pe X, $(\exists)\ J \subseteq I$ finită, a.î. $\bigcup_{j \in J} D_j = X$. O mulțime $A \subseteq X$ se numeşte *compactă*, dacă A înzestrat cu topologia indusă de topologia lui X, este un ST compact.

1.2.12. Teoremă. Fie X un ST. Atunci au loc proprietățile:

1) X quasi-compact şi $A \subseteq X$ închisă, implică A quasi-compactă.
2) X separat şi $A \subseteq X$ compactă, implică A închisă.

1.2.13. Teoremă. Fie X un ST şi $f:X \to \mathbf{R}$ o funcție continuă. Atunci $(\forall)$ $A \subseteq X$ o mulțime quasi-compactă,rezultă că f(A) este compactă şi $(\exists)\ x_0, x_1 \in A$, a.î. $(\forall)\ x \in A$ avem $f(x_0) \le f(x) \le f(x_1)$.

1.2.14. Definiție. Fie X o mulțime ; se numeşte *metrică* pe X o aplicație $d:X^2 \to \mathbf{R}$, cu proprietățile:

1) $d(x,y) \ge 0$, $(\forall)\ x,y \in X$; $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$; 2) $d(x,y)=d(y,x)$, $(\forall)\ x,y \in X$;

3) $d(x,y) \le d(x,z)+d(z,y)$, $(\forall)\ x,y,z \in X$.

Perechea (X,d) se numeşte *spațiu metric*, prescurtat SM, şi se notează cu X[d]. $(\forall)\ x \in X$ şi $r>0$ se folosesc notățiile:

$B(x_0,r)=\{ x \in X;\ d(x, x_0)<r\}$ - *bila deschisă* de centru x_0 şi rază r

$B[x_0,r]=\{ x \in X;\ d(x, x_0) \le r\}$ - *bila închisă* de centru x_0 şi rază r

$S(x_0,r)=\{ x \in X;\ d(x, x_0)=r\}$ - *sfera* de centru x_0 şi rază r

Exemple.

a) Relația $d(x,y)=\frac{|x-y|}{1+|x-y|}$, $(x,y)\in\mathbf{R}^2$, definește o metrică pe **R**.

b) Relația $d(x,y)=(\sum_{i=1}^{m}(\xi_i-\eta_i)^2)^{1/2}$, $x=(\xi_i)_{i=\overline{1,m}}$, $y=(\eta_i)_{i=\overline{1,m}}$, $\in\mathbf{R}^m$ definește o merică pe $\mathbf{R}^m$ (metrica euclidiană).

1.2.15. Propoziție. Fie X[d] un SM. Atunci familia următoare: $\{D\subseteq X;\ (\forall)\ x\in D,\ (\exists)\ r>0$,a.î. $B(x_0,r)\subseteq D\}$este o topologie separată pe X , numită *topologia(naturală)definită de metrica* d.

1.2.16. Propoziție. Fie X[d] un SM și τ_d- topologia definită de d. Atunci au loc afirmațiile:

a) $(\forall)\ x,x_n\in X\ (n\geq1)$, avem: $x_n\xrightarrow{\tau_d}x\Leftrightarrow d(x,x_n)\to0\ (n\to\infty)$

b) Bila deschisă, $B(x_0,r)$,este o mulțime deschisă; bila închisă, $B[x_0,r]$, și sfera $S(x_0,r)$,sunt mulțimi închise.

c) Familia $(B(x_0,1/n))_{n\geq1}$ (resp. $(B[x_0,1/n])_{n\geq1}$)este o bază de vecinătăți deschise (respectiv închise), a lui x_0, cu $x_0\in X$.

d) $(\forall)A\subseteq X$ avem: $x\in\overline{A}\Leftrightarrow(\exists)\ (x_n)_{n\geq1}\subseteq A$,a.î. $x_n\to x$;

$x\in A'\Leftrightarrow(\exists)\ (x_n)_{n\geq1}\subseteq A\setminus\{x\}$,a.î. $x_n\to x$;

e) O mulțime $A\subseteq X$ este densă în X,i.e. $\overline{A}=X\Leftrightarrow(\forall)\ x\in X,\ (\forall)\ \varepsilon>0\ (\exists)\ a\in A$,a.î. $d(x,a)<\varepsilon$.

1.2.17. Propoziție. Fie X[d] un SM și $x,x_n\in X\ (n\geq1)$. Atunci avem: $x_n\to x\Leftrightarrow$ orice subșir al șirului $(x_n)_{n\geq1}$, posedă un subșir convergent la x.

1.2.18. Definiție. Fie X[d] un SM. Un șir $(x_n)_{n\geq1}\subseteq X$ se numește *șir Cauchy*, dacă $d(x_n,x_m)\to0(n,m\to\infty)$. Spațial X[d] se numește *complet*,sau că d este *completă*, dacă orice șir Cauchy cu elemente din X este convergent.

1.2.19. Definiție. Fie X[τ] un spațiu topologic. O mulțime $A\subseteq X$ se numește de *tip* F_σ (resp. G_δ) și se notează $A\in(F_\sigma)$ (resp. $A\in(G_\delta)$), dacă $(\exists)$ $(A_n)_{n\geq1}$ un șir monoton crescător de mulțimi închise (resp. monoton descrescător de mulțimi deschise) din X,a.î. $A=\bigcup_{n\geq1}A_n$ (resp.$A=\bigcap_{n\geq1}A_n$).

Analog se definesc mulțimile de tip $\mathscr{A}_\sigma$, $\mathscr{A}_\delta$, $\mathscr{A}_{\delta\sigma}$,$\mathscr{A}_{\sigma\delta}$; plecînd de la o mulțime X arbitrară și $\mathscr{A}$ o familie de părți din X precizată.

1.2.20. Propoziție. Fie x[d] un spațiu metric. Atunci au loc următoarele proprietăți:

1) $A\subseteq X$ este de tip F_σ (resp. G_σ)$\Leftrightarrow A^c$ este de tip G_σ (resp. F_σ).

2) Orice mulțime închisă $A\subseteq X$ este de tip G_δ și avem

$$A=\bigcap_{n\geq 1} A_n \text{ , unde } A_n:=\{ x\in X;\ d(x, A)< 1/n\}.$$

3)Orice mulțime deschisă $A\subseteq X$ este de tip F_σ şi avem

$$A=\bigcup_{n\geq 1} A_n \text{ , unde } A_n:=\{ x\in X;\ d(x, A^c)\geq 1/n \}.$$

4)($\forall$) A, B$\in F_\sigma$ (resp. G_δ),rezultă $A\cup B$, $A\cap B\in F_\sigma$ (resp. G_δ).

5)Orice interval $I\subseteq \mathbf{R}$ este simultan de tip F_σ şi G_δ .

1.2.21. Definiție. Fie X[d] un SM. O mulțime $A\subseteq X$ se numeşte *precompactă*, dacă satisface una din următoarele condiții echivalente:

1) ($\forall$) $\varepsilon>0$, ($\exists$) $C\subseteq X$ o mulțime finită,a.î. $A\subseteq \cup\{B(x,\varepsilon);\ x\in C\}$.

2) Orice şir cu elemente din A posedă un subşir Cauchy.

1.2.22. Definiție. Fie X un spațiu topologic. O mulțime $A\subseteq X$ se numeşte *secvențial compactă*, dacă orice şir $(x_n)_{n\geq 1}\subseteq A$ posedă un subşir convergent către un punct $x\in A$.

1.2.23. Teoremă. Fie X[d] un spațiu metric şi $A\subseteq X$ o mulțime. Atunci condițiile 1)- 3) sunt echivalente:

1) A compactă; 2) A secvențial compactă;

3) A precompactă şi completă.

Corolar 1.(Borel-Lebesgue)Fie $A\subseteq \mathbf{R}^m$ o mulțime. Atunci A compactă$\Leftrightarrow$ A secvențial compactă$\Leftrightarrow$ A mărginită şi închisă.

1.2.24. Definiție. Un spațiu topologic X[τ] se numeşte *separabil*, dacă ($\exists$) $A\subseteq X$ numerabilă a.î. $\overline{A}=X$.

1.2.25. Definiție. Un spațiu topologic X[τ] se numeşte cu *bază numerabilă* (de deschişi), dacă ($\exists$) o familie numerabilă $\mathscr{B}\subseteq\tau$ cu proprietatea:

$$(\forall)\ D\in\tau,\ (\exists)\ (D_n)_{n\geq 1}\subseteq \mathscr{B}\text{,a.î. } D=\bigcup_{n\geq 1} D_n$$

1.2.26. Propoziție. Orice ST cu bază numerabilă este separabil.

1.2.27. Propoziție. Fie X[d] un SM separabil şi $\{a_1, a_2, a_3,\ldots\}$ o enumerare a unei mulțimi numerabile $A\subseteq X$, densă în X,i.e. $\overline{A}=X$.Atunci familia numerabilă,$\mathscr{B}:=(B_X(a_n,1/m))_{n,m\geq 1}$,este o bază a lui X, deci X este cu bază numerabilă.

Corolar 1. Fie X[d] un SM. Atunci X separabil$\Leftrightarrow$X cu bază numerabilă.

Corolar 2.O bază numearbilă de deschişi a lui **R** este dată de familia numerabilă $\{(a, b);\ a, b\in \mathbf{Q},\ a<b\}$.

1.2.28. Propoziție. Fie $X[d]$ un spațiu metric. Atunci X separabil$\Leftrightarrow(\forall)$ $\varepsilon>0$ și $A\subseteq X$ o mulțime ε- discretă (i.e. $d(x,y)\geq\varepsilon$, $(\forall)$ $x, y\in A$ $x\neq y$), rezultă că A este cel mult numerabilă.

1.2.29. Propoziție. Fie X_1, X_2 două spații topologice cu bază numearbilă. Atunci$(\forall)\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2$ baze numerabile de deschiși în X_1resp.X_2,rezultă că $\mathscr{B}_1\times\mathscr{B}_2$ este o bază numearbilă în spațiul topologic produs $X_1\otimes X_2$.

Corolar 1. Fie X_1, X_2 două spații metrice separabile. Atunci spațial metric produs $X_1\otimes X_2$ posedă o bază numerabilă.

Corolar 2. O bază numerabilă de deschiși a lui $\mathbf{R}^2$ este dată de familia numerabilă$\{(a_1, b_1)\times(a_2, b_2);\ a_1, b_1, a_2, b_2\in\mathbf{Q},\ a_1< b_1\ ,a_2< b_2\}$.

1.2.30. Teoremă (N. Luzin). Fie X un ST separabil și $\mathscr{A}$ o familie mutual disjunctă de mulțimi deschise nevide din X. Atunci $\mathscr{A}$ este cel mult numerabilă.

Corolar 1. Fie $D\subseteq\mathbf{R}$ o mulțime deschisă nevidă. Atunci D se poate scrie că o reuniune cel mult numerabilă de intervale deschise , mutual disjuncte.

1.2.31. Definiție. Fie $X[\tau]$ un ST. O mulțime $A\subseteq X$ se numește *rară* (nicăeri densă), dacă $\overset{\circ}{\overline{A}}=\varnothing$; o reuniune numerabilă de mulțimi rare se numește de *prima categorie* (Baire). O mulțime care nu este de prima categorie se numește de *a două categorie*.

1.2.32. Teoremă. Fie X un ST. Atunci cond. 1)-2) sunt echivalente:

1) Orice mulțime deschisă nevidă din$X$ este de categoria a doua.

2) Complementara unei mulțimi de prima categorie (i.e. mulțime reziduală) din X este densă in X.

1.2.33. Teoremă (R. Baire). Fie $X[d]$ un spațiu metric complet. Atunci oricare mulțime deschisă, nevidă,din X este de categoria a două.

1.2.34. Teoremă. Fie $X[d]$, $Y[d']$ două spații metrice $x_o\in X$ și $f:X\to\mathbf{R}$ o funcție. Atunci cond. 1)-3) sunt echivalente:

1) f este continuă în x_o; 2) f este secvențial continuă în x_o;

3) $(\forall)$ $\varepsilon>0$, $(\exists)$ $\eta>0$, a.î. $d'(\ f(x),\ f(x_o))<\varepsilon$, $(\forall)$ $d(x, x_o)<\eta$.

1.2.35. Teoremă. Fie $I\subseteq\mathbf{R}$ un interval și $f:I\to\mathbf{R}$ o funcție monotonă. Atunci f este continuă cu excepția unei mulțimi cel mult numerabile.

1.2.36. Definiție. Fie X o mulțime, $\mathscr{F}(X,\mathbf{R}):=\{f;\ f:X\to\mathbf{R}\}$ și $(f_n)_{n\geq1}\subseteq\mathscr{F}(X,\mathbf{R})$ un șir de funcții. Vom spune că:

- $(f_n)_{n\geq1}$ *simplu (punctual) convergent*,dacă $(\exists)$ $f:X\to\mathbf{R}$,a.î.$f_n(x)\to f(x)$, $(\forall)$ $x\in X$; vom scrie atunci $f_n\xrightarrow{s}f$ și vom spune că $(f_n)_{n\geq1}$ *converge simplu* (punctual) la f.
- $(f_n)_{n\geq1}$ *uniform convergent*, dacă $(\exists)$ $f:X\to\mathbf{R}$ cu proprietatea

$$(\forall)\varepsilon>0,\ (\exists)\ N\geq1,\text{a.î. } |f(x)-f_n(x)|\leq\varepsilon,\ (\forall)\ n\geq N,\ \ (\forall)\ x\in X;$$

vom scrie atunci $f_n \xrightarrow{u} f$ şi vom spune că $(f_n)_{n\geq 1}$ *converge uniform* la f.

- $(f_n)_{n\geq 1}$ *uniform Cauchy*, dacă are proprietatea:
  $(\forall)\varepsilon>0$, $(\exists)$ $N\geq 1$ a.î. $|f_n(x)- f_m(x)|\leq\varepsilon$, $(\forall)$ m, $n\geq N$, $(\forall)$ $x\in X$;

Analog se defineşte *convergenţa simplă* (resp. *uniformă*) pe o mulţime $A\subseteq X$.

$(\forall)$ $f\in\mathcal{F}(X,\mathbf{R})$ şi $A\subseteq X$ vom folosi notaţiile:

$$\|f\|_A := \sup_{x\in A}|f(x)|\,;\ \|f\|_u := \sup_{x\in X}|f(x)|\,;(\|f\|_u \text{ se notează şi cu } \|f\|_\infty).$$

1.2.37. Propoziţie. Fie f, $f_n\in\mathcal{F}(X,\mathbf{R})$ $(n\geq 1)$. Atunci avem:

1) $f_n \xrightarrow{u} f \Leftrightarrow \|f-f_n\|_u \to 0(n\to\infty) \Leftrightarrow \sup\limits_{x\in X}|f(x)-f_n(x)| \to 0(n\to\infty)$

2) $(f_n)_{n\geq 1}$ uniform Cauchy $\Leftrightarrow \|f_n - f_m\|_u \to 0(n, m\to\infty) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sup_{x\in X}|f_n(x)-f_m(x)| \to 0(n, m\to\infty)\,;$$

3) $(f_n)_{n\geq 1}$ uniform convergent$\Leftrightarrow(f_n)_{n\geq 1}$ uniform Cauchy.

1.2.38. Definiţie. Fie X o mulţime şi $(f_n)_{n\geq 1}\in\mathcal{F}(X,\mathbf{R})$ un şir de funcţii. Seria de functii $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ se numeşte:

- *simplu* (*punctual*) *convergentă*, dacă şirul $(s_n)_{n\geq 1}$, unde $s_n:=\sum\limits_{k=1}^{n} f_k$, este punctual convergent.
- *uniform convergentă*, dacă şirul $(s_n)_{n\geq 1}$ este uniform convergent.
- *normal convergentă*, dacă $(\exists)\sum\limits_{n\geq 1} c_n$ serie numerică convergentă cu termini nenegativi, a.î. $\sum\limits_{n\geq 1} f_n << \sum\limits_{n\geq 1} c_n$.

1.2.39. Teoremă. Fie X un ST, $x_0\in X$ un punct şi $f_n:X\to\mathbf{R}(n\geq 1)$ un şir unform convergent de funcţii continue în x_0. Atunci limita sa, $f:X\to\mathbf{R}$, este continuă în x_0.

Corolar 1. Fie X un ST, $x_0\in X$ un punct şi $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ o serie uniform (resp. normal) con-vergentă de funcţii $f_n:X\to\mathbf{R}(n\geq 1)$ continue în x_0. Atunci suma sa, $f:X\to\mathbf{R}$, este o funcţie continuă în x_0.

1.2.40. Teoremă (Baire). Fie X un spaţiu metric complet şi $f_n:X\to\mathbf{R}$ $(n\geq 1)$ un şir punctual convergent de funcţii continue. Atunci limita şirului, $f:X\to\mathbf{R}$, este continuă pe X, cu excepţia unei mulţimi de prima categorie.

Corolar 1. In acelaşi cadru avem: f este continuă pe o mulţime reziduală, deci densă din X.

1.2.41. Teoremă (Weierstrass).Fie $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ o funcție continuă. Atunci există un şir de funcții polinomiale, $f_n:[a,b]\to\mathbf{R}(n\geq 1)$, a.î. $f_n \xrightarrow{u} f$.

1.2.42. Definiție. Fie E un **R**-spațiu vectorial. O aplicație $\|\cdot\|:E\to\mathbf{R}$ se numeşte *normă* pe E, dacă are proprietățile:

1) $\|x\|\geq 0$, $(\forall)$ $x\in E$, $x\neq 0$; 2) $\|\alpha x\|=|\alpha|\,\|x\|$, $(\forall)$ $\alpha\in\mathbf{R}$ & $x\in E$;

3) $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$, $(\forall)$ $x,y\in E$.

Perechea $(E,\|\cdot\|)$ se numeşte *spațiu normat*, prescurtat SVN şi se notează cu $E[\|\cdot\|]$.

1.2.43. Propoziție. Fie $E[\|\cdot\|]$ un spațiu normat. Atunci relația $d(x,y):=\|x-y\|$, $x,y\in E^2$, este o metrică pe E (numită şi *metrica naturală* definită de norma $\|\cdot\|$).

1.2.44. Propoziție. Fie $E[\|\cdot\|]$ un spațiu normat, d metrica naturală definită de normă şi τ_d topologia definită de d. Atunci au loc proprietățile:

a) $(\forall)$ x, $x_n\in E$ $(n\geq 1)$ avem:

$$\|x-x_n\|\to 0 \Leftrightarrow d(x,x_n)\to 0 \Leftrightarrow x_n \xrightarrow{\tau_d} x(n\to\infty)$$

b) Adunarea şi înmulțirea cu scalari în E sunt operații continue în ansamblul variabilelor

1.2.45. Definiție. Un spațiu normatcomplet,în sensul metricii definită de normă,se numeşte *spațiu Banach.*

1.2.46. Definiție. Fie $E[\|\cdot\|]$ un spațiu normat. O mulțime $A\subseteq E$ se numeşte *mărginită*, dacă $(\exists)$ $k>0$, a.î. $\|x\|\leq k$, $(\forall)$ $x\in A$, i.e. $\sup\{\|x\|;\, x\in A\}<\infty$.

1.2.47. Definiție. Două norme $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ definite pe un spațiu vectorial E se numesc *echivalente*, dacă $(\exists)\alpha$, $\beta>0$,a.î. $\alpha\|\cdot\|_1\leq\|\cdot\|_2\leq\beta\|\cdot\|_1$.

Exemple. a)Fie $\mathbf{R}^m$ înzestrat cu structura vectorială naturală. Atunci următoarele relații:

$$\|x\|_1:=\sum_{i=1}^{m}|\xi_i|\,;\ \|x\|_2:=\left(\sum_{i=1}^{m}|\xi_i|^2\right)^{1/2};\ \|x\|_\infty:=\max_{1\leq i\leq m}|\xi_i|,$$

unde $x=(\xi_i)_{i=\overline{1,m}}\in\mathbf{R}^m$, definesc pe $\mathbf{R}^m$ norme complete, echivalente între ele.

b)Fie X o mulțime şi $\mathcal{M}(X,\mathbf{R})$ mulțimea aplicațiilor mărginite $f:X\to\mathbf{R}$. Atunci operațiile vectoriale naturale $f+g$, αf şi relația $\|x\|_u:=\sup_{x\in X}|f(x)|$, noma uniformă, definesc pe $\mathcal{M}(X,\mathbf{R})$ o structură de spațiu Banach.

c) Fie X un spaţiu topologic şi $\mathscr{B}(X, \mathbf{R})$ mulţimea aplicaţiilor $f:X\to\mathbf{R}$ continue şi mărginite. Atunci operaţiile vectoriale naturale $f+g$, αf,şi norma uniformă $\|\cdot\|_u$ definesc pe $\mathscr{B}(X, \mathbf{R})$ o structură de spaţiu Banach. Dacă X este compact, atunci $\mathscr{B}(X, \mathbf{R})$ coincide cu $\mathscr{C}(X, \mathbf{R})$,mulţimea aplicaţiilor continue $f:X\to\mathbf{R}$.

1.2.48. Propoziţie. Fie E un spaţiu normat. Atunci $(\forall)$ A, $B\subseteq E$,rezultă $\overline{A}\pm\overline{B}\subseteq\overline{A\pm B}$.

1.2.49. Teoremă. Fie E un **R**-spaţiu vectorial. Atunci E finit dimensional

$\Leftrightarrow$orice două norme pe E sunt echivalente între ele.

1.2.50. Teoremă. Fie E, F două spaţii normate şi $f:E\to F$ o aplicaţie liniară. Atunci cond.1)-4) sunt echivalente:

1) f continuă în 0; 2) f continuă pe E;

3) $(\exists)$ M>0, a.î. $\|f(x)\|\le M\|x\|,(\forall)x\in E$; 4) $\|f\|:=\sup\limits_{\|x\|\le 1}\|f(x)\|<\infty$.

Corolar 1. Fie E, F două spaţii normate şi $f:E\to F$ o aplicaţie liniară şi continuă. Atunci $\|f(x)\|\le\|f\|\cdot\|x\|$, $(\forall)$ $x\in E$.

1.2.51.Propoziţie. Fie $D\subseteq\mathbf{R}^m$ o mulţime deschisă. Atunci există un şir $(K_n)_{n\ge1}$ de mulţimi compacte din $\mathbf{R}^m$ care exhaustează pe D, i.e. $\bigcup\limits_{n\ge1}K_n=D$ şi $K_n\subseteq \overset{\circ}{K}_{n+1}$, $(\forall)$ $n\ge1$.

1.2.52. Definiţie. Fie E un spaţiu normat şi $(x_n)_{n\ge1}\subseteq E$ un şir. Perechea $((x_n)_{n\ge1}, (s_n)_{n\ge1})$, unde $s_n=\sum\limits_{i=1}^{n}x_n$, se numeşte *serie de termen general* x_n şi se notează $\sum\limits_{n\ge1}x_n$. Seria $\sum\limits_{n\ge1}x_n$ se numeşte *convergentă* dacă şirul $(s_n)_{n\ge1}$ este convergent ; limita şirului $(s_n)_{n\ge1}$ se numeşte *suma seriei* dată şi se scrie $x=\sum\limits_{n\ge1}x_n$. Seria $\sum\limits_{n\ge1}x_n$ se numeşte *absolut convergentă*, dacă seria normelor $\sum\limits_{n\ge1}\|x_n\|$, este convergentă.

Observaţie. A nu se confunda *seria* $\sum\limits_{n\ge1}x_n$,care este un simbol, cu *suma acestei serii,* care este un element din E şi este notată cu acelaşi simbol. Diferenţa rezultă din context.

1.2.53. Teoremă. Fie E un spațiu normat şi $\sum_{n\geq 1} x_n$, $\sum_{n\geq 1} y_n$ două serii convergente cu elemente din E şi $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$. Atunci seria $\sum_{n\geq 1}(\alpha\alpha_n + \beta y_n)$ este convergentă şi are suma $\alpha\sum_{n\geq 1} x_n + \beta\sum_{n\geq 1} y_n$.

1.2.54.Teoremă. Fie E un spațiu normat şi $\sum_{n\geq 1} x_n$ o serie cu elemente din E. Dacă $\sum_{n\geq 1} x_n$ este convergentă, rezultă că seria satisface *condiția Cauchy,* i.e.:

$$(\forall)\ \varepsilon>0,\ (\exists)N\geq 1,\text{a.î. } \left\|\sum_{k=n}^{n+p} x_k\right\|\leq\varepsilon,\ (\forall)\ n\geq N,\ p\geq 1.$$

Dacă E este complet, este adevărată şi implicația reciprocă.

1.2.55. Teoremă. Fie E un spațiu normat. Atunci,E este complet$\Leftrightarrow$ orice serie absolut convergentă cu elemente din E este convergentă.

1.2.56. Definiție. Fie E un **R**-spațiu vectorial. Se numeşte *produs scalar* pe E, o aplicație $<,>:E^2\to\mathbf{R}$ cu proprietățile:

1) $\langle x, x\rangle\geq 0$; $\langle x, x\rangle=0\Leftrightarrow x=0$;

2) $\langle x, y\rangle=\langle y, x\rangle$, $(\forall)$ $x,y\in E$;

3) $\langle \alpha x + \beta y, z\rangle=\alpha\langle x, y\rangle+\beta\langle y, z\rangle$, $(\forall)$ $x,y,z\in E$; $(\forall)$ $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$;

Perechea (E, <,>) se numeşte *spațiu cu produs scalar* sau spațiu pre-Hilbert.

1.2.57. Propoziție. Fie E un **R**- spațiu cu produs scalar. Atunci au loc proprietățile:

1) $|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle\cdot\langle y, y\rangle,(\forall)x, y \in E$;

2) Relația $p(x):=\sqrt{\langle x, x\rangle}$, $(\forall)$ $x\in E$, defineşte pe E o normă (*norma naturală* definită de produsul scalar).

1.2.58. Definiție. Un **R**-spațiu cu produs scalar, complet în norma definită de produsul scalar, se numeşte *spațiu Hilbert.*

Exemple.a)Considerăm **R**-spațiul vectorial $\mathbf{R}^m$. Atunci relația

$$\langle x, y\rangle := \sum_{k=1}^{m} \xi_k\eta_k\ ,\quad x=(\xi_i)_{i=\overline{1,m}},\ y=(\eta_i)_{i=\overline{1,m}}\in\mathbf{R}^m,$$

defineşte pe $\mathbf{R}^m$ o structură de spațiu Hilbert.

b)Fie $\ell^2:=\{\ x=(\xi_n)_{n\geq 1}\in\mathbf{R}^{\mathbf{N}};\ \sum_{n\geq 1}|\xi_n|^2 < \infty\ \}$. Atunci operațiile vectoriale naturale:

$$x+y=(\xi_n+\eta_n)_{n\geq 1},\ \alpha x=(\alpha\xi_n)_{n\geq 1},\ x=(\xi_n)_{n\geq 1},\ y=(\eta_n)_{n\geq 1}\in\ell^2,\ \alpha\in\mathbf{R}$$

şi relaţia $\langle x,y\rangle := \sum_{n\geq 1}\xi_n\eta_n$, definesc pe ℓ^2 o structură de spaţiu Hilbert.

c) Fie $\mathscr{C}[a,b]:=\{f:[a,b]\to\mathbf{R};\ f \text{ continuă}\}$. Atunci operaţiile vectoriale naturale f+g, αf şi relaţia $\langle f,g\rangle := \int_a^b fg\,dx$, definesc pe $\mathscr{C}[a,b]$ o structură de spaţiu pre-Hilbert incomplet.

d) Fie $\mathscr{R}([a,b]):=\{\ f:[a,b]\to\mathbf{R};\ f$ R-integrabilă$\}$, în care am identificat funcţiile egale între ele a.p.t.,atunci operaţiile vectoriale naturale f+g, αf şi relaţia, $\langle f,g\rangle := \int_a^b f(x)g(x)dx$, defnesc pe $\mathscr{R}([a,b])$ o structură de spaţiu pre-Hilbert incomplet.

1.2.59. Propoziţie. Fie (E, <,>) un spaţiu pre-Hilbert. Atunci norma $\|x\| := \sqrt{\langle x,x\rangle}$, $x\in E$, satisface „relaţia paralelogramului":

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\|x\|^2+2\|y\|^2,\ (\forall)\ x,y\in E.$$

1.2.60. Teoremă (F. Riesz).Fie E un spaţiu Hilbert şi $f:E\to\mathbf{R}$ o aplicaţie liniară şi continuă. Atunci $(\exists!)\ y\in E$, a.î. $f(x)=\langle x,y\rangle$, $(\forall)\ x\in E$; $\|f\| = \|y\|$.

1.2.61. Definiţie. Fie $f:[a,b]\to\mathbf{R}^m$ o funcţie; notăm cu Div[a,b] *mulţimea diviziunilor* lui [a,b];$(\forall)\ \Delta=(x_i)_{i=\overline{0,n}} \in$ Div[a,b],suma $\sum_{i=1}^{n}\|f(x_i)-f(x_{i-1})\|$ se notează cu $V_\Delta(f)$ şi se numeşte *variaţia parţială* a funcţiei f definită de Δ. Numărul sup$\{\ V_\Delta(f);\ V\in$Div[a,b]$\}$se notează cu $V_a^b(f)$ şi se numeşte *variaţia totală* a funcţiei f pe [a,b]. Funcţia f se numeşte *cu variaţie marginită*, dacă $V_a^b(f)<\infty$. Notăm cu VM([a,.b], $\mathbf{R}^m$),respectiv cu VM([a,.b]) , dacă m=1, mulţimea funcţiilor cu variaţie mărginită, $f:[a,b]\to\mathbf{R}^m$.

Exemple. Orice funcţie monotonă $f:[a,b]\to\mathbf{R}$,şi orice funcţie lipschitziană $f:[a,b]\to\mathbf{R}^m$, este cu variaţie mărginită. O funcţie derivabilă cu derivată mărginită, $f:[a,b]\to\mathbf{R}$, este cu variaţie mărginită.

1.2.62. Teoremă. Fie $f=(f_i)_{i=\overline{1,m}}:[a,b]\to\mathbf{R}^m$ o funcţie. Atunci:

$$f\in VM([a,b],\mathbf{R}^m)\Leftrightarrow f_i\in VM([a,b],\mathbf{R}),\ (\forall)\, i=\overline{1,m}.$$

1.2.63. Teoremă. Mulţimea VM([a,b], **R**) este o **R**-algebră,i.e.
$(\forall)$ f,g$\in$ VM([a,b], **R**), rezultă f+g, αf, fg$\in$ VM([a,b], **R**).

1.2.64. Teoremă. Fie $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ o funcţie cu variaţie mărginită. Atunci $(\exists)$ $f_1, f_2:[a,b]\to\mathbf{R}$ două funcţii monoton crescătoare, a.î. $f= f_1-f_2$.

Corolar 1. Fie f:[a,b]→**R** o funcție cu variație marginită. Atunci 1°) f continuă cu exceptia unei mulțimi cel mult numerabile; 2°) f derivabilă (a.p.t.).

1.2.65. Definiție. O funcție f:[a,b]→**R** se numeşte *absolut continuă*, dacă (∀) ε>0, (∃) δ>0, cu proprietatea: (∀)$((a_k, b_k))_{k\in K}$ o familie finită, mutual disjunctă, de intervale deschise din [a,b], cu $\sum_{k\in K}(b_k - a_k) < \varepsilon$, rezultă că $\sum_{k\in K}|f(a_k) - f(b_k)| < \varepsilon$. Notăm cu AC([a,b], **R**) *mulțimea funcțiilor absolut continue* f:[a,b]→**R**.

a) Putem înlocui în Def. 1.2.65. condiția $\sum_{k\in K}|f(a_k) - f(b_k)| < \varepsilon$, prin condiția $\sum_{k\in K}|f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon$.

b) Orice funcție absolut continuă este continuă. Reciproca nu este numaidecit adevarată.

1.2.66. Propoziție. Fie f:[a,b]→**R** o funcție. Atunci f este absolut continuă⇔(∀) ε>0, (∃) δ>0, cu proprietatea: (∀) $(I_n)_{n\geq 1}$ un şir mutual disjunct de intervale deschise din [a,b], cu $\sum_{n\geq 1}\ell(I_n) < \delta$, rezultă $\sum_{n\geq 1}\operatorname{dia} f(I_n) < \varepsilon$.

1.2.67. Teoremă. (∀) f,g∈AC([a,b], **R**), rezultă f+g, αf, fg∈AC([a,b], **R**).

1.2.68. Teoremă. Fie f:[a,b]→[c,d] şi g:[c,d]→**R** două funcții absolut continue; f strict crescătoare sau g lipschitziană. Atunci funcția $g\circ f$ este absolut continuă.

1.2.69. Teoremă. Orice funcție absolut continuă f:[a,b]→**R** este cu variație marginită, i.e. AC([a,b], **R**)⊆ VM([a,b], **R**).

Corolar 1. Fie f:[a,b]→**R** o funcție absolut continuă. Atunci f este derivabilă (a.p.t.).

1.2.70. definiție. Fie I⊆**R** un interval şi f:I→**R** o funcție. Vom spune cã f este *primitivabilă* (admite primitive), dacã (∃) F: I→**R** o funcție derivabilă, a.î. F`=f ; funcția F se numeşte *o primitivă* a lui f.

a) Orice funcție continuă f: I→**R** admite primitive.

b) Fie f: I→**R** o funcție primitivabilă. Atunci orice două primitive ale lui f diferă intre ele printr-o constantă.

c) Fie f: I→**R** o funcție primitivabilă şi F o primitivă a sa. Atunci F are proprietatea Darboux.

1.2.71. Teorema (Leibniz-Newton).Fie $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ o functie integrabilă şi primitivabilă. Atunci $(\forall)$ $F:[a,b]\to\mathbf{R}$ o primitivă a lui f, are loc relaţia

$$\int_a^b f\,dx = F(b) - F(a).$$

Corolar 1. Fie $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ o funcţie continuă. Atunci f este integrabilă şi primitivabilă, deci $(\forall)$ F o primitivă a lui f, are loc relaţia: $\int_a^b f\,dx = F(b) - F(a)$.

1.3. Integrala Riemann in $\mathbf{R}^m$

1.3.1. Definiţie. Fie X o mulţime (nevidă) şi $\mathscr{A}\subseteq 2^X$.Vom spune că $\mathscr{A}$ este *inel* (clan) pe X, dacă $(\forall)$ $A,B\in\mathscr{A}$ rezultă $A\cap B$, $A\setminus B\in\mathscr{A}$, şi dacă în plus $X\in\mathscr{A}$, atunci $\mathscr{A}$ se numeşte *algebră* pe X.O aplicaţie $\mu:\mathscr{A}\to\mathbf{R}$ se numeşte *măsură aditivă* (finită) pe X, dacă $\mu(\varnothing)=0$; $\mu\geq 0$; $\mu(A\cap B)=\mu(A)+\mu(B)$, $(\forall)$ $A,B\subseteq\mathscr{A}$, cu $A\cap B\neq\varnothing$.

Prin $(X,\mathscr{A},\mu)$ vom nota un triplet definit astfel: X mulţime (nevidă), $\mathscr{A}$-inel pe X, $\mu:\mathscr{A}\to\mathbf{R}$ măsură aditivă. Măsura $\mu:\mathscr{A}\to\mathbf{R}$ se numeşte *numerabil aditivă* dacă $(\forall)$ $(A_n)_{n\geq 1}\subseteq\mathscr{A}$, un şir mutual disjunct, cu $\bigcup\limits_{n\geq 1} A_n\in\mathscr{A}$, rezultă că

$$\mu\Big(\bigcup_{n\geq 1} A_n\Big)=\sum_{n\geq 1}\mu(A_n).$$

Observaţia 1. Condiţia $\mu(\varnothing)=0$ rezultă din condiţiile μ finită şi μ aditivă.

Observaţia 2. În Cap. 2-4 prin *măsură* vom înţelege o aplicaţie $\mu:\mathscr{A}\to\overline{\mathbf{R}}$ cu proprietăţile: $\mu(\varnothing)=0$; $\mu\geq 0$; μ numerabilă aditivă.Denumirea de „măsură aditivă” în loc de „măsură” este improprie. O utilizăm totuşi păstrînd denumirea de „măsură” pentru „măsură numerabil aditivă”.

1.3.2. Propoziţie. Fie $(X,\mathscr{A},\mu)$ un triplet definit astfel: X mulţime (nevidă) , $\mathscr{A}$ inel pe X, $\mu:\mathscr{A}\to\mathbf{R}$ măsură aditivă. Atunci au loc proprietăţile:

1) $(\forall)$ $(A_i)_{i=\overline{1,n}}\subseteq\mathscr{A}$, rezultă $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_n$, $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_n\in\mathscr{A}$;

2) $(\forall)$ $(A_i)_{i=\overline{1,n}}\subseteq\mathscr{A}$, cu $A_i\cap A_j=\varnothing$ $(i\neq j)$, rezultă relaţia:

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_n\Big)=\sum_{i=1}^{n}\mu(A_n)\ (\mu \text{ finit aditivă})$$

3)$(\forall)$ A, $B\in\mathscr{A}$, $A\subseteq B$, rezultă $\mu(A)\leq\mu(B)$ (μ-monoton crescătoare);

$$\mu(B\setminus A)=\mu(B)-\mu(A)\ (\mu\text{- subtractivă})$$

4) $(\forall)$ A, $B\in\mathscr{A}$, rezultă $\mu(A\cup B)=\mu(A)+\mu(B)-\mu(A\cap B)$

5)$(\forall)\ (A_i)_{i=\overline{1,n}} \subseteq \mathcal{A} \Rightarrow \mu(\bigcup_{i=1}^{n} A_n) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu(A_n)$ (μ finit subaditivă)

Observație. Condiția $A_i \cap A_j = \varnothing$ $(i \neq j)$ din 2) poate fi înlocuită prin condiția $\mu(A_i \cap A_j) = 0$ $(i \neq j)$.

1.3.3. Definiție. Se numeşte *interval* în $\overline{\mathbf{R}}$ o mulțime $I \subseteq \overline{\mathbf{R}}$ de forma: (a,b), $[a,b]$, $(a,b]$, $[a,b)$, unde $a,b \in \overline{\mathbf{R}}$, $a \leq b$ şi $(a,b) = \{x \in \overline{\mathbf{R}},\ a < x < b\}$-*interval deschis*, $[a,b] = \{x \in \overline{\mathbf{R}},\ a \leq x \leq b\}$-*interval închis*, etc. Se numeşte *interval* în $\mathbf{R}$ urma pe $\mathbf{R}$ a unui interval din $\overline{\mathbf{R}}$, i.e. o mulțime din $\mathbf{R}$ de forma : (a,b), $[a,b]$, $(a,b]$, $[a,b)$, unde $a,b \in \mathbf{R}$, $a \leq b$; $(-\infty,a)$, $(-\infty,a]$, (a,∞), $[a,\infty)$, unde $a \in \mathbf{R}$; $(-\infty,+\infty)$; punctele a,b resp. a, $\pm\infty$ se numesc *capetele* (extremitățile) lui I, iar $b-a$ se numeşte *lungimea* (*1-dimensională*) a lui I şi se notează cu $\ell(I)$; numerul $\ell(I)$ este finit, nenegativ, dacă a şi b sunt finite, şi $+\infty$, dacă a sau b este infinit.

Vom nota cu $\mathfrak{I}_{\mathbf{R}}$, $\mathfrak{I}^{\circ}_{\mathbf{R}}$, $\mathfrak{I}^{c}_{\mathbf{R}}$, $\mathfrak{I}^{d}_{\mathbf{R}}$, $\mathfrak{I}^{\hat{\imath}}_{\mathbf{R}}$ mulțimea *tuturor intervalelor*, a intervalelor *mărginite*, *compacte*, *deschise* resp. *închise* din $\mathbf{R}$.

a) $\mathfrak{I}^{c}_{\mathbf{R}} \subseteq \mathfrak{I}^{\circ}_{\mathbf{R}} \subseteq \mathfrak{I}_{\mathbf{R}}$; $\mathfrak{I}^{\circ}_{\mathbf{R}} \cap \mathfrak{I}^{\hat{\imath}}_{\mathbf{R}} = \mathfrak{I}^{c}_{\mathbf{R}}$;

b) $(\forall)\ I \in \mathfrak{I}_{\mathbf{R}}$ el se poate reprezenta ca o reuniune cel mult numerabilă de elemente din $\mathfrak{I}^{c}_{\mathbf{R}}$ şi ca o intersecție cel mult numerabilă de elemente din $\mathfrak{I}^{d}_{\mathbf{R}}$ (resp. din $\mathfrak{I}^{d}_{\mathbf{R}} \cap \mathfrak{I}^{\circ}_{\mathbf{R}}$, dacă $I \in \mathfrak{I}^{\circ}_{\mathbf{R}}$), deci I este de tip K_σ şi G_τ.

c) $(\forall)\ I \in \mathfrak{I}_{\mathbf{R}}$ avem, $\ell(I) = 0 \Leftrightarrow I^{o} = \varnothing \Leftrightarrow (\exists)\ a \in \mathbf{R}$, a.î. $I = [a,a]$.

d) $(\forall)\ I \in \mathfrak{I}_{\mathbf{R}}$ avem relația:

$$\ell(I) = \sup\{\ell(K);\ K \in \mathfrak{I}^{c}_{\mathbf{R}},\ K \subset I\} = \inf\{\ell(J);\ J \in \mathfrak{I}^{d}_{\mathbf{R}},\ J \supseteq I\}$$

e) $(\forall)\ I \in \mathfrak{I}^{\circ}_{\mathbf{R}}$ şi $\varepsilon > 0$, $(\exists)\ K \in \mathfrak{I}^{c}_{\mathbf{R}}$ şi $J \in \mathfrak{I}^{d}_{\mathbf{R}}$, a.î.

$$K \subset I \subset J\ \&\ \ell(J) - \varepsilon < \ell(I) < \ell(K) + \varepsilon$$

f) $(\forall)\ I,J \in \mathfrak{I}_{\mathbf{R}}$, rezultă i) $I \cap J \in \mathfrak{I}_{\mathbf{R}}$; ii) $I \setminus J$ este un interval sau reuniunea a două intervale din $\mathbf{R}$.

g) $(\forall)\ I \in \mathfrak{I}_{\mathbf{R}}$ şi $c \in \mathbf{R}$, $I + c \in \mathfrak{I}_{\mathbf{R}}$ şi $\ell(I+c) = \ell(I)$.

h) $(\forall)\ c \in \mathbf{R}$, rezultă $c + \mathfrak{I}_{\mathbf{R}} = \mathfrak{I}_{\mathbf{R}}$, $c + \mathfrak{I}^{\circ}_{\mathbf{R}} = \mathfrak{I}^{\circ}_{\mathbf{R}}$, $c + \mathfrak{I}^{c}_{\mathbf{R}} = \mathfrak{I}^{c}_{\mathbf{R}}$ etc.

1.3.4. Definiție. Se numeşte *interval* în $\mathbf{R}^m$ (*interval m-dimensional*) o mulțime $I \subseteq \mathbf{R}^m$ de forma $I = \prod_{k=1}^{m} I_k$, unde $I_k \in \mathfrak{I}_{\mathbf{R}}$; numărul $\prod_{k=1}^{m} \ell(I_k)$, finit sau $+\infty$, se numeşte *lungimea* (*m-dimensională*) a lui I şi se notează cu $\ell_m(I)$ sau $\ell(I)$ (cu convenția $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$). Notăm cu $\mathfrak{I}_{\mathbf{R}^m}$, $\mathfrak{I}^{\circ}_{\mathbf{R}^m}$, $\mathfrak{I}^{c}_{\mathbf{R}^m}$, $\mathfrak{I}^{d}_{\mathbf{R}^m}$, $\mathfrak{I}^{\hat{\imath}}_{\mathbf{R}^m}$ clasa *tuturor intervalelor*, a intervalelor mărginite, compacte, *deschise*, resp. *închise* din $\mathbf{R}^m$.

a) $\mathfrak{I}^{c}_{\mathbf{R}^m} \subseteq \mathfrak{I}^{\circ}_{\mathbf{R}^m} \subseteq \mathfrak{I}_{\mathbf{R}^m}$; $\mathfrak{I}^{\circ}_{\mathbf{R}^m} \cap \mathfrak{I}^{\hat{\imath}}_{\mathbf{R}^m} = \mathfrak{I}^{c}_{\mathbf{R}^m}$;

b) $(\forall) I=\prod_{k=1}^{m} I_k \in \mathfrak{I}^c{}_{\mathbf{R}}{}^m$, cu $\ell(I)>0$ avem: I mulțime mărginită, închisă, deschisă, resp. compactă (în $\mathbf{R}^m$)$\Leftrightarrow$ $(\forall)k\in\overline{1,m}$, I_k mulțime mărginită e t c.

c) $(\forall)\ I=\prod_{k=1}^{m} I_k \in \mathfrak{I}^c{}_{\mathbf{R}}{}^m$ avem: $\bar{I}=\prod_{k=1}^{m}\bar{I}_k$, $\overset{\circ}{I}=\prod_{k=1}^{m}\overset{\circ}{I}_k$, $\ell(I)=\ell(\overset{\circ}{I})=\ell(\bar{I})$;

$\ell(I)=0\Leftrightarrow(\exists)\ k\in\overline{1,m}$, cu $\ell(I_k)=0\Leftrightarrow I^o=\emptyset$.

d) $(\forall)\ I\in\mathfrak{I}_{\mathbf{R}}{}^m$, I se poate reprezenta ca o reuniune cel mult numerabilă de elemente din $\mathfrak{I}^c{}_{\mathbf{R}}{}^m$ și ca o intersecție cel mult numerabilă de elemente din $\mathfrak{I}^d{}_{\mathbf{R}}{}^m$ (resp. $\mathfrak{I}^d{}_{\mathbf{R}}{}^m\cap\mathfrak{I}^{\circ}{}_{\mathbf{R}}{}^m$, dacă $I\in\mathfrak{I}^{\circ}{}_{\mathbf{R}}{}^m$).

e) $(\forall)\ I\in\mathfrak{I}_{\mathbf{R}}{}^m$, are loc relația:

$$\ell(I)=\sup\{\ell(K);\ K\in\mathfrak{I}^c{}_{\mathbf{R}}{}^m,\ K\subseteq I\}=\inf\{\ell(J);\ J\in\mathfrak{I}^d{}_{\mathbf{R}}{}^m,\ J\supseteq I\}$$

f) $(\forall)\ I\in\mathfrak{I}^{\circ}{}_{\mathbf{R}}{}^m$ și $\varepsilon>0$, $(\exists)\ K\in\mathfrak{I}^c{}_{\mathbf{R}}{}^m$ și $J\in\mathfrak{I}^d{}_{\mathbf{R}}{}^m$, a.î.

$$K\subseteq I\subseteq J\ \&\ \ell(J)-\varepsilon<\ell(I)<\ell(K)+\varepsilon$$

g) $(\forall)\ I=\prod_{k=1}^{m} I_k$, $J=\prod_{k=1}^{m} J_k$, două intervale m-dimensionale, rezultă :

$$I\cap J=\left(\prod_{k=1}^{m} I_k\right)\cap\left(\prod_{k=1}^{m} J_k\right)=\prod_{k=1}^{m}(I_k\cap J_k)\in\mathfrak{I}_{\mathbf{R}}{}^m.$$

h) $(\forall)\ I\in\mathfrak{I}_{\mathbf{R}}{}^m$ și $c=(c_k)_{k=\overline{1,m}}\in\mathbf{R}^m$, avem:

$$I+c=\prod_{k=1}^{m}(I_k+c_k),\ \text{deci } I+c\in\mathfrak{I}_{\mathbf{R}}{}^m \text{ și } \ell(I+c)=\ell(I).$$

Observație. Nici una din clasele de intervale definite anterior nu este inel. O extensie naturală a claselor de intervale este *clasa mulțimilor elementare*, al doilea pas către teoria măsurii în $\mathbf{R}^m$.

1.3.5. Definiție. Se numește *mulțime elementară* în $\mathbf{R}^m$ o reuniune finită de intervale din $\mathbf{R}^m$; notăm cu $\mathscr{E}_{\mathbf{R}}{}^m$, $\mathscr{E}^{\circ}{}_{\mathbf{R}}{}^m$, $\mathscr{E}^c{}_{\mathbf{R}}{}^m$, $\mathscr{E}^d{}_{\mathbf{R}}{}^m$, $\mathscr{E}^{\hat{\imath}}{}_{\mathbf{R}}{}^m$ familia *tuturor mulțimilor elementare*, elementare *mărginite, compacte, deschise*, resp. *închise* din $\mathbf{R}^m$.

a) $\mathscr{E}^c{}_{\mathbf{R}}{}^m\subseteq\mathscr{E}^{\circ}{}_{\mathbf{R}}{}^m\subseteq\mathscr{E}_{\mathbf{R}}{}^m$; $\mathscr{E}^{\circ}{}_{\mathbf{R}}{}^m\cap\mathscr{E}^{\hat{\imath}}{}_{\mathbf{R}}{}^m=\mathscr{E}^c{}_{\mathbf{R}}{}^m$;

b) $(\forall)\ E\in\mathscr{E}_{\mathbf{R}}{}^m$, E se poate reprezenta ca o reuniune cel mult numerabilă de elemente din $\mathscr{E}^c{}_{\mathbf{R}}{}^m$ și ca o intersecție cel mult numerabilă de elemente din $\mathscr{E}^d{}_{\mathbf{R}}{}^m$ (resp. $\mathscr{E}^d{}_{\mathbf{R}}{}^m\cap\mathscr{E}^{\circ}{}_{\mathbf{R}}{}^m$, dacă $E\in\mathscr{E}^{\circ}{}_{\mathbf{R}}{}^m$).

c) $(\forall)\ E\in\mathscr{E}_{\mathbf{R}}{}^m$(resp. $\mathscr{E}^{\circ}{}_{\mathbf{R}}{}^m$), $(\exists)\ (I_k)_{k=\overline{1,m}}\subseteq\mathfrak{I}_{\mathbf{R}}{}^m$ (resp. $\mathfrak{I}^c{}_{\mathbf{R}}{}^m$) , a.î.

$E=\bigcup_{k=1}^{m} I_k$ și $I_k\cap I_{k'}=\emptyset$ $(k\neq k')$; vom spune atunci că relația $E=\bigcup_{k=1}^{m} I_k$ este o *reprezentare canonică* a lui E.

d) $(\forall)$ E, F$\in \mathscr{E}_{\mathbf{R}}^m$ (resp. $\mathscr{E}^{\circ}{}_{\mathbf{R}}^m$), rezultă E$\cup$F, E$\cap$F$\in \mathscr{E}_{\mathbf{R}}^m$ (resp. $\mathscr{E}^{\circ}{}_{\mathbf{R}}^m$).

Intr-adevăr, fie $E=\bigcup_{h=1}^{p} I_h$, $F=\bigcup_{k=1}^{q} J_k$. Evident E$\cup$F$\in \mathscr{E}_{\mathbf{R}}^m$.

$$E\cap F=(\bigcup_{h=1}^{p} I_h)\cap(\bigcup_{k=1}^{q} J_k)=\bigcup_{h,k}(I_h\cap J_k)$$

Cum însă $I_h\cap J_k\in \mathfrak{I}_{\mathbf{R}}^m$, rezultă că E$\cap$F$\in \mathscr{E}_{\mathbf{R}}^m$.

e) $(\forall)$ E$\in \mathscr{E}_{\mathbf{R}}^n$ şi F$\in \mathscr{E}_{\mathbf{R}}^m$, rezultă că E$\times$F$\in \mathscr{E}_{\mathbf{R}}^{n+m}$

Intr-adevăr $E=\bigcup_{h=1}^{p} I_h$ ($I_k\in \mathfrak{I}_{\mathbf{R}}^n$), $F=\bigcup_{k=1}^{q} J_k$ ($J_k\in \mathfrak{I}_{\mathbf{R}}^m$), deci

$$E\times F=(\bigcup_{h=1}^{p} I_h)\times(\bigcup_{k=1}^{q} J_k)=\bigcup_{h,k}(I_h\times J_k)\in \mathscr{E}_{\mathbf{R}}^{n+m}.$$

(ţinem seama că $I_h\times I_k\in \mathfrak{I}_{\mathbf{R}}^{n+m}$).

1.3.6. Propoziţie. $(\forall)$ I, J$\in \mathfrak{I}_{\mathbf{R}}^m$, rezultă că I\J$\in \mathscr{E}_{\mathbf{R}}^m$ (m>1).

Dem. Pentru m=1 afirmaţia este evidentă.

Fie m$\geq$2 cu proprietatea: $(\forall)$ I, J$\in \mathfrak{I}_{\mathbf{R}}^m$, rezultă I\J$\in \mathscr{E}_{\mathbf{R}}^m$ (1)

Fixăm mai departe I', $J'\in \mathfrak{I}_{\mathbf{R}}^{m+1}$, deci $I'=I_1\times I_2$, $J'=J_1\times J_2$, unde $I_1, J_1\in \mathfrak{I}_{\mathbf{R}}^m$ şi $I_2, J_2\in \mathfrak{I}_{\mathbf{R}}^1$. Din P. 1.1.41. rezultă $I'\setminus J'=(I_1\times I_2)\setminus(J_1\times J_2)=$

$$=[(I_1\setminus J_1)\times(I_2\cap J_2)]\cup[(I_1\cap J_1)\times(I_2\setminus J_2)]\cup[(I_1\setminus J_1)\times(I_2\setminus J_2)].$$

Să arătăm că cele trei paranteze [...] aparţin lui $\mathscr{E}_{\mathbf{R}}^{m+1}$. Din (1) rezultă că $I_1\setminus J_1\in \mathscr{E}_{\mathbf{R}}^m$; evident $I_2\cap J_2\in \mathscr{E}_{\mathbf{R}}^1$, deci $(I_1\setminus J_1)\times(I_2\cap J_2)\in \mathscr{E}_{\mathbf{R}}^{m+1}$.

Deoarece $I_1=\prod_{i=1}^{m} I_i^{(1)}$, $J_1=\prod_{i=1}^{m} J_i^{(1)}$ ($I_i^{(1)}, J_i^{(1)}\in \mathfrak{I}_{\mathbf{R}}^1$), rezultă

$$I_1\cap J_1=\prod_{i=1}^{m}(I_i^{(1)}\cap J_i^{(1)})\in \mathfrak{I}_{\mathbf{R}}^m\subseteq \mathscr{E}_{\mathbf{R}}^m$$

Cum $I_2\cap J_2\in \mathscr{E}_{\mathbf{R}}^1$, deducem că $(I_1\cap J_1)\times(I_2\setminus J_2)\in \mathscr{E}_{\mathbf{R}}^{m+1}$.

In fine, deoarece $I_2\setminus J_2\in \mathscr{E}_{\mathbf{R}}^1$, rezultă că

$$(I_1\setminus J_1)\times(I_2\setminus J_2)\in \mathscr{E}_{\mathbf{R}}^m\times \mathscr{E}_{\mathbf{R}}^1\subseteq \mathscr{E}_{\mathbf{R}}^{m+1}.$$

Din cele arătate mai sus şi din expresia lui $I'\setminus J'$, rezultă că $I'\setminus J'\in \mathscr{E}_{\mathbf{R}}^{m+1}$.

Aplicînd principiul inducţiei conchidem că proprietatea din enunţ este adevărată.

Corolar 1.($\forall$) E, F$\in \mathscr{E}_{\mathbf{R}}{}^{m}$ (resp. $\mathscr{E}^{\circ}{}_{\mathbf{R}}{}^{m}$),rezultă că E\F$\in \mathscr{E}_{\mathbf{R}}{}^{m}$ (resp. $\mathscr{E}^{\circ}{}_{\mathbf{R}}{}^{m}$).

Dem. $E=\bigcup_{h=1}^{p} I_h$, $F=\bigcup_{k=1}^{q} J_k$ (I_h , $J_k \in \mathfrak{I}_{\mathbf{R}}{}^{m}$) fixați. Din P. 1.1.2. rezultă:

$$E\setminus F=\left(\bigcup_{h=1}^{p} I_h\right)\setminus\left(\bigcup_{k=1}^{q} J_k\right)=\bigcup_{h}\bigcap_{k}(I_h \setminus J_k)$$

Cum însă $I_h \setminus J_k \in \mathscr{E}_{\mathbf{R}}{}^{m}$ (P.1.3.6.), rezultă că $\bigcap_{k}(I_h \setminus J_k) \in \mathscr{E}_{\mathbf{R}}{}^{m}$,deci E\F$\in \mathscr{E}_{\mathbf{R}}{}^{m}$.

1.3.7. Definiție. (Aria m-dimensională)($\forall$) E$\in \mathscr{E}_{\mathbf{R}}{}^{m}$ (resp. $\mathscr{E}^{\circ}{}_{\mathbf{R}}{}^{m}$) și $E=\bigcup_{k=1}^{m} I_k$ o reprezentare canonică a lui E, *aria (m-dimensională)* a lui E se definește prin relația $\sigma(E):=\sum_{k=1}^{p} \ell(I_k)$ .Definiția dată este coerentă, i.e. nu depinde de reprezentarea canonică a lui E.

a)($\forall$) E$\in \mathscr{E}_{\mathbf{R}}{}^{m}$ are loc relația:

$\sigma(E)=\sup\{\sigma (K); K\in \mathscr{E}^{c}{}_{\mathbf{R}}{}^{m}, K\subset E \}=\inf\{ \sigma (D); J\in \mathscr{E}^{d}{}_{\mathbf{R}}{}^{m}, D\supseteq E \}$.

b)($\forall$) E$\in \mathscr{E}^{\circ}{}_{\mathbf{R}}{}^{m}$ și $\varepsilon>0$, ($\exists$) K$\in \mathscr{E}^{c}{}_{\mathbf{R}}{}^{m}$ și D$\in \mathscr{E}^{d}{}_{\mathbf{R}}{}^{m}$, a.î.

$K\subseteq E\subseteq D$ & $\sigma(D)-\varepsilon\leq\sigma(E)\leq\sigma(K)+\varepsilon$.

c)($\forall$) E$\in \mathscr{E}_{\mathbf{R}}{}^{m}$ și c$\in \mathscr{E}_{\mathbf{R}}{}^{m}$, rezultă E+c$\in \mathscr{E}_{\mathbf{R}}{}^{m}$ & $\sigma(E+c)= \sigma(E)+c$

1.3.8. Teoremă. Tripletul ($\mathbf{R}^m$, $\mathscr{E}^{\circ}{}_{\mathbf{R}}{}^{m}$, σ) are proprietățile: $\mathscr{E}^{\circ}{}_{\mathbf{R}}{}^{m}$ este inel pe $\mathbf{R}^m$ și σ: $\mathscr{E}^{\circ}{}_{\mathbf{R}}{}^{m}\to\mathbf{R}$ măsură aditivă invariantă la translație.

Corolar 1. (Unicitatea măsurii σ)($\forall$) ν: $\mathscr{E}^{\circ}{}_{\mathbf{R}}{}^{m}\to\mathbf{R}$ măsură aditivă, cu proprietatea $\nu(I)=\sigma(I)$, ($\forall$) $I\in\mathfrak{I}^{\circ}{}_{\mathbf{R}}{}^{m}$, rezultă că $\nu=\sigma$.

1.3.9. Definiție. (Măsura Jordan)Fie $A\subseteq\mathbf{R}^m$ o mulțime mărginită. Numerele (finite), definite astfel:

$\mu^{-}(A):=\sup\{\sigma(E); E\in \mathscr{E}^{\circ}{}_{\mathbf{R}}{}^{m} , E\subseteq A\}$, $\mu^{+}(A):=\inf\{\sigma(E); E\in \mathscr{E}^{\circ}{}_{\mathbf{R}}{}^{m} , E\supseteq A\}$

se numesc *măsura Jordan inferioară*, resp. *măsura Jordan superioară* a mulțimii A. Dacă $\mu^{-}(A)=\mu^{+}(A)$, vom spune că A este J-*măsurabilă* (măsurabilă Jordan), iar numărul $\mu^{-}(A)=\mu^{+}(A)$ se numește *măsura Jordan* a lui A, și se notează cu $\mu_m(A)$, sau simplu $\mu(A)$. Notăm cu $J_{\mathbf{R}}{}^{m}$ familia mulțimilor J-măsurabile din $\mathbf{R}^m$; funcția μ: $J_{\mathbf{R}}{}^{m}\to\mathbf{R}$ se numește *măsura Jordan* pe $\mathbf{R}^m$.

Observație.J-*măsurabilitatea* unei mulțimi A, ca și J-*măsura* sa depind de dimensiunea spațiului ambiant al mulțimii A, care rezultă din context. Dacă $A\subseteq\mathbf{R}^m$, atunci A are J-măsura nulă în spațiul $\mathbf{R}^{m+p}$, ($\forall$) $p\geq1$, deci $\mu_{m+p}(A)=0$, deși in $\mathbf{R}^m$ mulțimea poate să nu fie J-măsurabilă.

a) $J^{\circ}_{\mathbf{R}}{}^{m} \subset \mathscr{E}^{\circ}_{\mathbf{R}}{}^{m} \subset J_{\mathbf{R}}{}^{m}$ şi au loc relaţiile:

$$\ell(I)=\sigma(I),\ (\forall)\ I\in J^{\circ}_{\mathbf{R}}{}^{m}\ ;\ \sigma(E)=\mu(E),\ (\forall)\ E\in \mathscr{E}^{\circ}_{\mathbf{R}}{}^{m}.$$

b) $(\forall)\ A\in J_{\mathbf{R}}{}^{m}$ avem relaţia:

$\mu(A)=\sup\{\sigma(K);\ K\in \mathscr{E}^{c}_{\mathbf{R}}{}^{m},\ K\subset A\}=\inf\{\sigma(D);\ J\in \mathscr{E}^{d}_{\mathbf{R}}{}^{m},\ D\supseteq A\}$.

c) $(\forall)\ A\in J_{\mathbf{R}}{}^{m}$ şi $\varepsilon>0$, $(\exists)\ K\in \mathscr{E}^{c}_{\mathbf{R}}{}^{m}$ şi $D\in \mathscr{E}^{d}_{\mathbf{R}}{}^{m}$, a.î.

$$K\subseteq A\subseteq D\ \&\ \sigma(D)-\varepsilon<\mu(A)<\sigma(K)+\varepsilon$$

d) $(\forall)\ A\in J_{\mathbf{R}}{}^{m}$ şi $c\in\mathbf{R}^{m}$, rezultă $A+c\in J_{\mathbf{R}}{}^{m}\ \&\ \mu(A+c)=\mu(A)$.

e) Există mulţimi compacte în $\mathbf{R}^{m}$ şi care nu sunt J-măsurabile.

f) Fie $\mathbf{R}^{m}:=\mathbf{R}^{k}\times\mathbf{R}^{h}$ şi $C\in J_{\mathbf{R}}{}^{m}$. Atunci:

i) Mulţimea $pr_{\mathbf{R}}{}^{k}(C)$ nu este numaidecit J-măsurabilă;

ii) Dacă $x\in pr_{\mathbf{R}}{}^{k}(C)$, mulţimea $C[x]:=\{y\in\mathbf{R}^{h},\ (x,y)\in C\}$, nu este numaidecît J-măsurabilă.

1.3.10. Teoremă. Fie $A\subseteq\mathbf{R}^{m}$ o mulţime mărginită. Atunci cond. 1)-4) sunt echivalente:

1) $A\in J_{\mathbf{R}}{}^{m}$, i.e. A este J-măsurabilă.

2) $(\forall)\ \varepsilon>0$, $(\exists)\ E,F\in \mathscr{E}^{\circ}_{\mathbf{R}}{}^{m}$, a.î. $E\subseteq A\subseteq F\ \&\ \sigma(F\setminus E)<\varepsilon$.

3) $(\exists)\ (E_n)_{n\geq1}\subseteq \mathscr{E}^{\circ}_{\mathbf{R}}{}^{m}$ şir monoton crescător, $(\exists)(F_n)_{n\geq1}\subseteq \mathscr{E}^{\circ}_{\mathbf{R}}{}^{m}$ şir monoton descrescător, a.î. $E_n\subseteq A\subseteq F_n$, $(\forall)\ n\geq1\ \&\ \sigma(F_n\setminus E_n)\to0$.

4) $(\forall)\ \varepsilon>0$, $(\exists)\ C,D\in J_{\mathbf{R}}{}^{m}$, a.î. $C\subseteq A\subseteq D\ \&\ \mu(D)-\mu(C)<\varepsilon$.

Corolar 1. In acelaşi cadru avem: $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma(E_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\sigma(F_n)$.

1.3.11. Teoremă. Tripletul $(\mathbf{R}^{m}, J_{\mathbf{R}}{}^{m}, \mu)$ are proprietăţile: $J_{\mathbf{R}}{}^{m}$ este inel pe $\mathbf{R}^{m}$ şi $\mu:J_{\mathbf{R}}{}^{m}\to\mathbf{R}$, măsura Jordan, este o măsură numerabil aditivă şi invariantă la translaţie.

Corolar 1. (Unicitatea măsurii Jordan)$(\forall)\ \nu:J_{\mathbf{R}}{}^{m}\to\mathbf{R}$,cu $\nu\geq0$, ν măsură aditivă şi $\nu(I)=\ell(I)$, $(\forall)\ I\in J^{\circ}_{\mathbf{R}}{}^{m}$,rezultă că $\nu=\mu$ (măsura Jordan).

1.3.12. Teoremă. Fie $A\subseteq\mathbf{R}^{m}$ o mulţime mărginită. Atunci cond. 1)-3) sunt echivalente:

1) $A\in J_{\mathbf{R}}{}^{m}$, i.e. A J-măsurabilă.

2) $(\forall)\ \varepsilon>0$, $(\exists)\ C,D\in J_{\mathbf{R}}{}^{m}$, a.î. $C\subseteq D\subseteq A\ \&\ \mu(D\setminus C)<\varepsilon$.

3) $(\exists)\ (A_n)_{n\geq1}\subseteq J_{\mathbf{R}}{}^{m}$, şir monoton crescător, $(\exists)\ (B_n)_{n\geq1}\subseteq J_{\mathbf{R}}{}^{m}$, şir monoton descrescător, a.î. $A_n\subseteq A\subseteq B_n$, $(\forall)\ n\geq1\ \&\ \lim\limits_{n\to\infty}\mu(A_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\mu(B_n)$.

Corolar 1. Fie $A\subseteq\mathbf{R}^{m}$ o mulţime mărginită,cu proprietatea$(\exists)(A_n)_{n\geq1}\subseteq J_{\mathbf{R}}{}^{m}$, şir monoton crescător, $(\exists)\ (B_n)_{n\geq1}\subseteq J_{\mathbf{R}}{}^{m}$, şir monoton descrescător, a.î.

$A_n\subseteq A\subseteq B_n$, $(\forall)\ n\geq1\ \&\ \lim\limits_{n\to\infty}\mu(A_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\mu(B_n)$. Atunci $A\in J_{\mathbf{R}}{}^{m}$ şi avem

$$\lim_{n\to\infty}\mu(A_n)=\lim_{n\to\infty}\mu(B_n)=\mu(A).$$

1.3.13. Definiție. O mulțime marginită $A\subseteq\mathbf{R}^m$ se numeşte J-*neglijabilă*, dacă măsura superioară Jordan a mulțimii A este nulă, i.e. $\mu^+(A)=0$; notăm cu $\mathcal{N}_{\mathbf{R}}{}^m$ familia mulțimilor J-neglijabile din $\mathbf{R}^m$.

a) $A\in\mathcal{N}_{\mathbf{R}}{}^m \Leftrightarrow A\in J_{\mathbf{R}}{}^m$ şi $\mu(A)=0 \Leftrightarrow$

$$(\forall)\ \varepsilon>0,\ (\exists)\ (E_k)_{k=\overline{1,n}}\subseteq \overset{\circ}{\mathscr{E}}_{\mathbf{R}}{}^m,\ \text{a.î.}\ \bigcup_{k=1}^{n}E_k\supseteq A\ \&\ \sum_{k=1}^{n}\sigma(E_k)<\varepsilon \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(\forall)\ \varepsilon>0,\ (\exists)(I_k)_{k=\overline{1,n}}\subseteq\overset{\circ}{\mathfrak{I}}_{\mathbf{R}}{}^m,\ \text{a.î.}\ \bigcup_{k=1}^{n}I_k\supseteq A\ \&\ \sum_{k=1}^{n}\ell(I_k)<\varepsilon.$$

b) $(\forall)\ (A_i)_{i=\overline{1,n}}\subseteq\mathcal{N}_{\mathbf{R}}{}^m\Rightarrow\bigcup_i A_i,\ \bigcap_i A_i\in\mathcal{N}_{\mathbf{R}}{}^m$.

c) $(\forall)\ A\in\mathcal{N}_{\mathbf{R}}{}^m$ şi $B\subseteq A$, rezultă $B\in\mathcal{N}_{\mathbf{R}}{}^m$.

d) $(\forall)\ A\in\overset{\circ}{\mathscr{E}}_{\mathbf{R}}{}^m$, rezultă $\partial(A)\in\mathcal{N}_{\mathbf{R}}{}^m$.

e) $A\in\mathcal{N}_{\mathbf{R}}{}^m\Leftrightarrow A+c\in\mathcal{N}_{\mathbf{R}}{}^m$, $(\forall)\ c\in\mathbf{R}^m$.

f) $(\forall)\ A\in J_{\mathbf{R}}{}^m$ avem: $A\in\mathcal{N}_{\mathbf{R}}{}^m\Leftrightarrow\overset{\circ}{A}=\varnothing$; $\mu(A)>0\Leftrightarrow\overset{\circ}{A}\neq\varnothing$;

g) Fie $M\in J_{\mathbf{R}}{}^m$ şi $f:M\to\mathbf{R}$ o funcție mărginită integrabilă. Atunci G_f, graficul lui f, este o mulțime neglijabilă în $\mathbf{R}^{m+1}$.

1.3.14. Teoremă. Fie $A\subseteq\mathbf{R}^m$ o mulțime mărginită. Atunci $A\in J_{\mathbf{R}}{}^m\Leftrightarrow\partial(A)$, frontiera lui A, este J-neglijabilă.

Corolar 1.1 1°) $(\forall)A\in J_{\mathbf{R}}{}^m$, rezultă $\overline{A},\ \overset{\circ}{A}\in J_{\mathbf{R}}{}^m$ & $\mu(\overline{A})=\mu(\overset{\circ}{A})=\mu(A)$.

2°) $(\forall)A,\ B\in J_{\mathbf{R}}{}^m$, cu $\overset{\circ}{A}\cap\overset{\circ}{B}=\varnothing$, rezultă $A\cap B$ J-negijabilă, deci $\mu(A\cup B)=\mu(A)+\mu(B)$.

3°) $(\forall)\ A\subseteq\mathbf{R}^m$, avem $A\in J_{\mathbf{R}}{}^m\Leftrightarrow\overline{A},\ \overset{\circ}{A}\in J_{\mathbf{R}}{}^m$ & $\mu(\overline{A})=\mu(\overset{\circ}{A})$.

1.3.15. Definiție. O mulțime $A\subseteq\mathbf{R}^m$ se numeşte L-*neglijabilă* (neglijabilă Lebesgue), dacă $(\forall)\ \varepsilon>0$, $(\exists)(I_n)_{n\geq1}\in J_{\mathbf{R}}{}^m$, a.î. $\bigcup_{n\geq1}I_n\supseteq A$ & $\sum_{n\geq1}\ell(I_n)<\varepsilon$.

a) A L-neglijabilă$\Leftrightarrow\inf\{\sum_{n\geq1}\ell(I_n);\ (I_n)_{n\geq1}\subseteq\mathfrak{I}_{\mathbf{R}}{}^m,\ \bigcup_{n\geq1}I_n\supseteq A\}=0$;

b) A L-neglijabilă şi $B\subseteq A$, rezultă B L-neglijabilă.

c) Fie $A\subseteq\mathbf{R}^m$ o mulțime. Atunci A J-neglijabilă$\Rightarrow$A L-neglijabilă; A compact şi L-neglijabilă$\Rightarrow$A J-neglijabilă.

d) Fie $A\subseteq\mathbf{R}^m$ o mulțime mărginită. Atunci $A\in J_{\mathbf{R}}{}^m\Leftrightarrow\partial(A)$, frontiera lui A, este L-neglijabilă.

e) O reuniune cel mult numerabilă de mulțimi L-neglijabile,este L-neglijabilă.

f) Există mulțimi L-neglijabile şi care nu sunt J-neglijabile (spre exemplu mulțimea $[0,1]\cap\mathbf{Q}$).

1.3.16. Definiție. Fie tripletul $(\mathbf{R}^m, J_{\mathbf{R}}{}^m, \mu)$ unde $J_{\mathbf{R}}{}^m$ este familia mulțimilor J-neglijabile din $\mathbf{R}^m$ şi $\mu: J_{\mathbf{R}}{}^m \to \mathbf{R}$, măsura Jordan; fixăm $M \in J_{\mathbf{R}}{}^m$. Se numeşte *diviziune* (*J-diviziune*) a lui M, o familie finită $\Delta=(A_i)_{i=\overline{1,p}}$ de mulțimi J-măsurabile, care are proprietățile: $\bigcup_i A_i = M$ şi $\mu(A_i \cap A_j)=0$ $(i\neq j)$.

numărul $\max\limits_{1\le i\le p}(\mathrm{dia}(A_i))$ se numeşte *norma diviziunii* Δ şi se notează cu $\|\Delta\|$.

Se numeşte *sistem de puncte intermediare* (prescurtat s.p.i.) asociat diviziunii Δ, o familie $(\xi_i)_{i\in\overline{1,p}}$, cu $\xi_i \in A_i$, notată cu ξ_Δ. Notăm cu Div(M), *familia diviziunilor mulțimii* M. Fie Δ, $\Delta' \in \mathrm{Div}(M)$ fixate; vom spune că Δ' este *mai fină* ca Δ şi vom scrie $\Delta \le \Delta'$, dacă $(\forall)$ $A'_i \in \Delta'$, $(\exists)$ $A_j \in \Delta$, a.i $A_j \supseteq A'_i$.

1.3.17. Definiție. Fie $M \in J_{\mathbf{R}}{}^m$ o mulțime şi $f: M \to \mathbf{R}$ o funcție arbitrară;$(\forall)$ $\Delta := (A_i)_{i=\overline{1,p}}$ şi $\xi_\Delta := (\xi_i)_{i=\overline{1,p}}$ s.p.i.,numărul $\sum\limits_{i=1}^{p} f(\xi_i)\,\mu(A_i)$ se numeşte *suma integrală Riemann* asociată lui f, Δ, ξ_Δ şi se notează cu $\sigma_f(\Delta,\xi_\Delta)$. Funcția f se numeşte *integrabilă Riemann* (R-integrabilă), dacă $\lim\limits_{\|\Delta\|\to 0} \sigma_f(\Delta,\xi_\Delta)$ există şi este finită, $(\forall)$ ξ_Δ s.p.i. Aceasta înseamnă că $(\exists)$ $L \in \mathbf{R}$ cu proprietatea următoare:

$$(\forall)\varepsilon>0,\ (\exists)\ \eta>0, \text{ a.î. } |L-\sigma_f(\Delta,\xi_\Delta)| \le \varepsilon,\ (\forall)\ \Delta \in \mathrm{Div}(M),\ \|\Delta\| \le \eta,\ (\forall)\xi_\Delta.$$

Numarul L se numeşte *integrala Riemann* (pe M) *a funcției* f şi se notează cu:

$$\int_M f,\quad \int_M f(x)dx,\quad \overbrace{\int\int\cdots\int_M}^{n} f(x_1, x_2 \ldots x_n)dx_1 dx_2 \ldots dx_n$$

Dacă n=2, resp n=3, se folosesc notațiile:

$$\iint_M f(x,y)dxdy\ ,\ \text{resp}\ \iiint_M f(x,y,z)dxdydz\,.$$

Notăm cu $\mathcal{R}(M)$ *mulțimea funcțiilor* $f: M \to \mathbf{R}$, *integrabile Riemann*.

a) Integrala $\int_M f(x)dx$ este unic determinată de f şi M.

b) $(\forall)$ $f \in \mathcal{R}(M)$ şi $f \ge 0$, rezultă $\int_M f(x)dx \ge 0$.

c) $(\forall)$ $M \in J_{\mathbf{R}}{}^{\mathbf{m}}$ şi $c \in \mathbf{R}$, rezultă $\int_M c\,dx = c\cdot\mu(M)$

1.3.18. Definiţie. Fie $M \in J_{\mathbf{R}}^m$ o mulţime, $f:M \to \mathbf{R}$ o funcţie mărginită şi $\Delta=(A_i)_{i=\overline{1,p}} \in \mathrm{Div}(M)$; notăm $m_i:=\inf f(A_i)$, $M_i:=\sup f(A_i)$, $(\forall)\ i=\overline{1,p}$.
Numerele finite:

$$s_f(\Delta):=\sum_{i=1}^{p} m_i \mu(A_i)\ ,\ S_f(\Delta):=\sum_{i=1}^{p} M_i \mu(A_i)$$

se numesc *sumele integrale Darboux inferioară*, resp. *superioară*, *asociate lui f şi Δ*, iar funcţiile:

$$\varphi_f(\Delta):=\sum_{i=1}^{p} m_i 1_{A_i}\ ,\ \psi_f(\Delta):=\sum_{i=1}^{p} M_i 1_{A_i}$$

se numesc *funcţiile Darboux inferioară, resp. superioară, asociate lui* f *şi* Δ.

Numerele (finite):

$$I^-(f):=\sup\{s_f(\Delta);\ \Delta\in \mathrm{Div}(M)\};\ \ I^+(f):=\inf\{S_f(\Delta);\ \Delta\in \mathrm{Div}(M)\}$$

se numesc *integralele Darboux* inferioară, resp. superioară, pe M, ale funcţiei f. Dacă $I^-(f)=I^+(f)$, funcţia f se numeşte *integrabilă Darboux* (D-integrabilă), iar numărul $I^-(f)=I^+(f)$ se numeşte *integrala Darboux*, pe M, a funcţiei f şi se notează cu $I(f)$.

a) $(\forall)\ \Delta,\ \Delta' \in \mathrm{Div}(M),\ \Delta\le \Delta' \Rightarrow s_f(\Delta)\le s_f(\Delta'),\ S_f(\Delta')\le S_f(\Delta)$.
b) $(\forall)\ \Delta\in \mathrm{Div}(M) \Rightarrow s_f(\Delta)\le \sigma_f(\Delta, \xi_\Delta)\le S_f(\Delta),\ (\forall)\xi_\Delta$ s.p.i.
c) $(\forall)\ \Delta,\ \Delta' \in \mathrm{Div}(M) \Rightarrow s_f(\Delta)\le s_f(\Delta\cap \Delta')\le S_f(\Delta\cap\Delta')\le S_f(\Delta')$.
d) $(\forall)\ \Delta\in \mathrm{Div}(M) \Rightarrow s_f(\Delta)=\inf\limits_{\xi_\Delta} \sigma_f(\Delta, \xi_\Delta),\ S_f(\Delta)=\sup\limits_{\xi_\Delta} \sigma_f(\Delta, \xi_\Delta)$.
e) $\int_M \varphi_f(\Delta)dx = s_f(\Delta),\ \int_M \psi_f(\Delta)\,dx = S_f(\Delta),\ (\forall)\ A\in \mathrm{Div}(M)$.

Proprietăţile integralei Riemann şi ale integralei Darboux in $\mathbf{R}^m$, definite mai sus, sunt similare cu proprietăţile binecunoscute, ale acestor integrale, în cazul particular n=1. Să reamintim, în continuare, pe cele mai importante.

1.3.19. Propoziţie. Fie $M\in J_{\mathbf{R}}^m$ o mulţime cu proprietatea: $(\forall)\ \varepsilon>0$, $(\exists)$ $\Delta:=(A_i)_{i=\overline{1,p}} \in \mathrm{Div}(M)$, cu $\mathrm{dia}(A_i)\le\varepsilon$ şi $\mu(A_i)>0$, $(\forall)\ i=\overline{1,p}$ (caz particular $M\in \mathfrak{J}^{\circ}{}_{\mathbf{R}}^{m}$, $\sigma(M)>0$). Atunci $(\forall)\ f\in \mathscr{R}(M)$, rezultă f mărginită.

1.3.20. Propoziţie. Fie $M\in J_{\mathbf{R}}^m$ o mulţime J-neglijabilă şi $f:M\to\mathbf{R}$ o funcţie mărginită. Atunci f este integrabilă şi $\int_M f\,dx=0$.

Observaţie. P. 1.3.20. este adevărată şi pentru f arbitrară.

1.3.21. Teoremă. Fie $M\in J_{\mathbf{R}}^m$ o mulţime şi $f:M\to\mathbf{R}$ o funcţie. Atunci cond 1)-3) sunt echivalente:

1) $f\in \mathscr{R}(M)$, i.e. f este R-integrabilă.

2)$(\forall)$ $(\Lambda_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathrm{Div}(M)$ cu $\|\Lambda_n\| \to 0$; $(\forall)\, \xi_{\Lambda_n}$ s.p.i. $(n\geq 1)$, rezultă că şirul $(\sigma_f(\Lambda_n, \xi_{\Lambda_n}))_{n\geq 1}$ este convergent.

3)$(\forall)\varepsilon>0$, $(\exists)$ $\eta>0$, cu proprietatea:

$$|\sigma_f(\Lambda, \xi_\Lambda)-\sigma_f(\Lambda', \xi_{\Lambda'})| < \varepsilon, (\forall)\Lambda, \Lambda' \in \mathrm{Div}(M), \text{cu} \|\Lambda\|, \|\Lambda'\| < \eta, (\forall)\xi_\Lambda, \xi_{\Lambda'}.$$

Corolar 1. Fie $M \in J_{\mathbf{R}}^m$ şi $f \in \mathscr{R}(M)$. Atunci $(\forall)$ $(\Delta_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathrm{Div}(M)$, cu $\|\Delta_n\| \to 0$ $(n\to\infty)$ şi ξ_{Δ_n} s.p.i. asociat lui Δ_n, rezultă $\sigma_f(\Delta_n, \xi_{\Delta_n}) \longrightarrow \int_M f\, dx$.

Observaţie. Din cond. 2) rezultă că şirul $(\sigma_f(\Delta_n, \xi_{\Delta_n}))_{n\geq 1}$ are o limită in **R** care nu depinde de şirul $(\Delta_n)_{n\geq 1}$ şi ξ_{Δ_n} $(n\geq 1)$. Cond. 3) se numeşte „condiţia Cauchy" de integrabilitate.

1.3.22. Teoremă. (Darboux) Fie $M \in J_{\mathbf{R}}^m$ şi $f: M \to \mathbf{R}$ o funcţie mărginită. Atunci cond. 1)-4) sunt echivalente:

1) $f \in \mathscr{R}(M)$, i.e. f este R-integrabilă.
2) f este D-integrabilă.
3) $(\forall)$ $\varepsilon>0$, $(\exists)$ $\Delta \in \mathrm{Div}(M)$, a.î. $S_f(\Delta)-s_f(\Delta)\leq\varepsilon$.
4) $(\forall)$ $\varepsilon>0$, $(\exists)$ $\eta>0$, cu proprietatea:

$$S_f(\Delta)-s_f(\Delta)\leq\varepsilon,\ (\forall)\ \Delta \in \mathrm{Div}(M),\ \|\Delta\| \leq \eta.$$

In contextul de mai sus avem $I(f)= \int_M f\, dx$, deci *integrala Riemann coincide cu integrala Darboux în cazul funcţiilor mărginite.*

Corolar 1. Fie $M \in J_{\mathbf{R}}^m$ o mulţime şi $f: M \to \mathbf{R}$ o funcţie mărginită. Atunci $f \in \mathscr{R}(M) \Leftrightarrow$ $(\exists)$ $f_1, f_2 \in \mathscr{R}(M)$, două funcţii mărginite, $(\exists)$ $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$, a.î.

$$|f(x)-f(y)| \leq \alpha_1 |f_1(x)-f_1(y)| + \alpha_2 |f_2(x)-f_2(y)|,\ (\forall)\ x,y \in M.$$

Corolar 2. Fie $M \in J_{\mathbf{R}}^m$ o mulţime J-măsurabilă şi $f: M \to \mathbf{R}$ o funcţie mărginită, uniform continuă (resp. M J-măsurabilă compactă şi f continuă). Atunci f este R-integrabilă.

Observaţie. Conceptul de funcţie „R-integrabilă" fiind identic cu cel de funcţie „D-integrabilă", pentru funcţii *mărginite*, le vom folosi sub denumirea comună de *funcţie integrabilă*, în cazul funcţiilor marginite.

1.3.23. Teoremă. (Lebesgue) Fie $M \in J_{\mathbf{R}}^m$ o mulţime şi $f: M \to \mathbf{R}$ o funcţie marginită. Atunci f integrabilă $\Leftrightarrow$ f continuă a.p.t. (i.e. $(\exists)$ $A \subseteq \mathbf{R}^m$ L-neglijabilă, cu f continuă pe $M \setminus A$).

Corolar 1. Fie $f:[a,b] \to \mathbf{R}$ o funcţie continuă (resp. monotonă). Atunci f integrabilă.

Corolar 2. Fie $f:[a,b] \to \mathbf{R}$ o funcţie. Atunci are loc afirmaţia:

f R-integrabilă $\Leftrightarrow$ 1) f mărginită; 2) f continuă (a.p.t.).

1.3.24. Teoremă. Fie $M \in J_{\mathbf{R}}^m$ o mulțime și $f,g \in \mathscr{R}(M)$ două funcții mărginite. Atunci au loc afirmațiile:

1) $\alpha f+\beta g \in \mathscr{R}(M)$, $(\forall)\ \alpha,\beta \in \mathbf{R}$ și avem:

$$\int_M (\alpha\alpha + \beta g)dx = \alpha \int_M f\,dx + \beta \int_M g\,dx$$

2) Dacă $f \le g$, rezultă $\int_M f\,dx \le \int_M g\,dx$.

3) $|f| \in \mathscr{R}(M)$ și $\left|\int_M f\,dx\right| \le \int_M |f|\,dx \le \|f\|_\infty \cdot \mu(M)$.

4) $f\cdot g \in \mathscr{R}(M)$ și $\left|\int_M f\cdot g\,dx\right| \le \|f\|_\infty \cdot \left|\int_M g\,dx\right|$.

5) Dacă $g \ge 0$ sau $g \le 0$, există $\pi \in [m_f, M_f]$, a.î. $\int_M fg\,dx = \pi \int_M g\,dx$, unde $m_f = \inf\limits_{x\in M} f(x)$, $M_f = \sup\limits_{x\in M} f(x)$.

6) Dacă M este compactă conexă, f continuă și $g \ge 0$ sau $g \le 0$, există $x_0 \in M$, a.î. $\int_M fg\,dx = f(x_0)\int_M g\,dx$

7) $\int_M |f|\,dx = 0 \Leftrightarrow f = 0$ (a.p.t.).

Corolar 1. Fie $M \in J_{\mathbf{R}}^m$ o mulțime și $\mathscr{R}_b(M)$ mulțimea funcțiilor $f:M \to \mathbf{R}$, integrabile și mărginite. Atunci operațiile vectoriale naturale $f+g$, fg, αf, împreună cu norma $\|\cdot\|_\infty$, definesc pe $\mathscr{R}_b(M)$ o structură de algebră normată, completă, iar aplicația, $\int_M : \mathscr{R}_b(M) \to \mathbf{R}$, este liniară, monoton crescătoare și continuă.

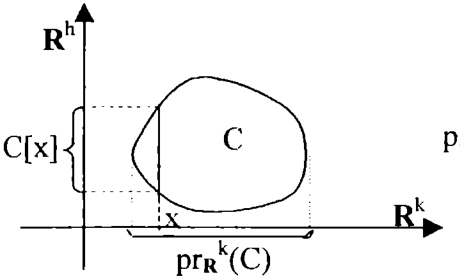
1.3.25. Teoremă. Fie $M \in J_{\mathbf{R}}^m$ o mulțime și $f:M \to \mathbf{R}$ o funcție integrabilă mărginită și $g: \overline{f(M)} \to \mathbf{R}$ o funcție continuă. Atunci funcția $g \circ f$ este integrabilă.

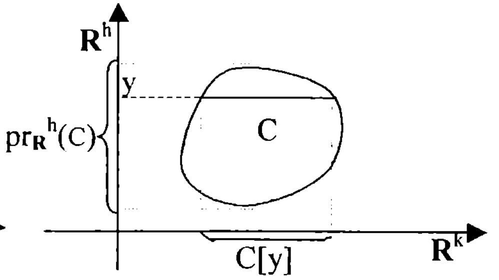
1.3.26. Teoremă. Fie $M \in J_{\mathbf{R}}^m$ o mulțime, $(f_n)_{n\ge 1} \subseteq \mathscr{R}_b(M)$, un șir uniform convergent de funcții, și $f:M \to \mathbf{R}$ limita sa. Atunci $f \in \mathscr{R}_b(M)$ și $\int_M f_n\,dx \to \int_M f\,dx$.

1.3.27. Teoremă. Fie $M \in J_{\mathbf{R}}^m$ o mulțime și $f:M \to \mathbf{R}$ o funcție mărginită. Atunci f integrabilă $\Leftrightarrow$ $(\exists)\ (A_i)_{i=\overline{1,p}}$ o diviziune a lui M, a.î. f este integrabilă pe fiecare A_i $(i=\overline{1,p})$. In acest caz avem relația $\int_M f\,dx = \sum\limits_{i=1}^{p} \int_{A_i} f\,dx$.

1.3.28. Propoziție. Fie $M \in J_{\mathbf{R}}^m$ o mulțime, $A \subseteq M$ și $\varphi_A: M \to \mathbf{R}$ funcția caracteristică a lui A. Atunci $\varphi_A \in \mathscr{R}(M) \Leftrightarrow A \in J_{\mathbf{R}}^m$. In acest caz avem relația: $\int_M \varphi_A\,dx = \mu(A)$.

1.3.29. Definiție. Fie $C \subseteq \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^h$ o mulțime şi $f: C \to \mathbf{R}$ o funcție. Fixăm $x \in \mathbf{R}^k$; mulțimea $C[x] := \{y \in \mathbf{R}^h;\ (x,y) \in C\}$ se numeşte *secțiunea* lui C prin x; analog se defineşte C[y] secțiunea lui C prin y, cu $y \in \mathbf{R}^h$. Pentru orice $x \in pr_{\mathbf{R}}{}^k(C)$ fixat, are sens funcția $C[x] \ni y \to f(x,y) \in \mathbf{R}$; analog pentru orice $y \in pr_{\mathbf{R}}{}^h(C)$ fixat, are sens funcția $C[y] \ni x \to f(x,y) \in \mathbf{R}$. Aceste funcții se numesc *funcțiile parțiale* ale lui f; ele se notează cu f_x, $f(x,\cdot)$, resp f^y, $f(\cdot,y)$. Integrala $\int_{C[y]} f(\cdot,y)dx$ se notează, simplu, cu $\int_{C[y]} f(x,y)dx$, iar integrala $\int_{C[x]} f(x,\cdot)dy$ se notează cu $\int_{C[x]} f(x,y)dy$. Să ilustrăm grafic mulțimile $C[x], C[y], pr_{\mathbf{R}}{}^h(C), pr_{\mathbf{R}}{}^k(C)$.





1.3.30. Teoremă (Fubini). Fie $\mathbf{R}^m := \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^h$, $C \in J_{\mathbf{R}}{}^m$ o mulțime şi $f: C \to \mathbf{R}$ o funcție integrabilă mărginită; presupunem îndeplinite condițiile:

i) $pr_{\mathbf{R}}{}^k(C) \in J_{\mathbf{R}}{}^k$ şi $C[x] \in J_{\mathbf{R}}{}^h$, $(\forall)\ x \in pr_{\mathbf{R}}{}^k(C)$;

ii) $(\forall) x \in pr_{\mathbf{R}}{}^k(C)$, funcția, $C[x] \ni y \to f(x,y)$, este integrabilă.

Atunci funcția, $pr_{\mathbf{R}}{}^k(C) \ni x \to \int_{C[x]} f(x,y)dy$, este integrabilă şi avem relația:

$$\iint_C f(x,y)dxdy = \int_{pr_{\mathbf{R}}{}^k(C)} \left(\int_{C[x]} f(x,y)dy \right) dx \qquad (1)$$

Analog are loc relația duală:

$$\iint_C f(x,y)dxdy = \int_{pr_{\mathbf{R}}{}^h(C)} \left(\int_{C[y]} f(x,y)dx \right) dy \qquad (2)$$

Corolar 1. Fie $A \in J_{\mathbf{R}}{}^k$, $B \in J_{\mathbf{R}}{}^h$ şi $f: A \times B \to \mathbf{R}$ o funcție integrabilă cu proprietatea: $(\forall)\ x \in A$, funcția, $B \ni y \to f(x,y)$, este integrabilă. Atunci funcția, $A \ni x \to \int_B f(x,y)dy$, este integrabilă şi avem relația:

$$\iint_{A \times B} f(x,y)dxdy = \int_A \left(\int_B d(x,y)dy \right) dx$$

Analog are loc relația duală:

$$\iint_{A \times B} f(x,y)dxdy = \int_B \left(\int_A d(x,y)dx \right) dy$$

1.3.31. Definiție. Relațiile (1), (2) se numesc *formule de reducere a integralei multiple, la integrale iterate, în ordinea* y,x (relația (1)), *resp. în ordinea* x,y (relația (2)). Continuînd acest procedeu putem reduce *integrala multiplă* (m-uplă) la m *integrale simple*, i.e. pe mulțimi din **R**.

Exemple. a) Fie $C:=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2;\ x^2+(y-1)^2\le 1,\ x\ge 0\}$ şi $f:C\to\mathbf{R}$ o funcție continuă. Atunci

$$\iint_C f(x,y)dxdy = \int_{pr_x(C)}\left(\int_{C[x]} f(x,y)dy\right)dx = \int_{pr_y(C)}\left(\int_{C[y]} f(x,y)dx\right)dy,$$

unde

$$pr_x(C)=[0,1],\ C[x]=[1-(1-x^2)^{1/2},\ 1+(1-x^2)^{1/2}],\ (\forall)\ x\in[0,1].$$

$$pr_y(C)=[0,2],\ C[y]=[0,(2y-y^2)^{1/2}],\ (\forall)\ y\in[0,2].$$

b) Fie $K:=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2;\ (x-1)^2+(y-1)^2\le 1\}$; $C_1=\{(x,y)\in K;0\le x\le 1, y\ge 1-x^2\}$; $C_2=\{(x,y)\in K;x\ge 1\}$; $C=C_1\cup C_2$ şi $f:C\to\mathbf{R}$ o funcție continuă. Atunci avem:

$$pr_x(C_1)=[0,1],\ C_1[x]=[1-x^2,\ 1+,(2x-x^2)^{1/2}],\ (\forall)\ x\in[0,1].$$

$$pr_x(C_2)=[1,2],\ C_2[x]=[\ 1-(2x-x^2)^{1/2},\ 1+(2x-x^2)^{1/2}],\ (\forall)\ x\in[1,2],$$

deci

$$\iint_C f(x,y) = \int_{C_1} f(x,y)dxdy + \int_{C_2} f(x,y)dxdy =$$

$$= \int_0^1\left(\int_{-x^2}^{1+\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy\right)dx + \int_1^2\left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1+\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy\right)dx$$

c) Fie $C:=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3;\ x^2+y^2+z^2\le 1,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0\}$ şi $f:C\to\mathbf{R}$ o funcție continuă. Atunci avem :

$$\iiint_C f\,dxdydz = \iint_{pr_{xy}(C)}\left(\int_{C[(x,y)]} f dz\right)dx\,dy = \int_{pr_x(C)}\left(\iint_{C[x]} f dydz\right)dx,$$

unde

$$pr_x(C)=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2;\ x^2+y^2\le 1,\ x\ge 0,\ y\ge 0\};\ C[(x,y)]=[0,(1-x^2-y^2)^{1/2}],$$

$$(\forall)\ (x,y)\in pr_{xy}(C);\ pr_x(C)=[0,1],\ C[x]=\{(y,z)\in\mathbf{R}^2;\ y^2+z^2\le 1-x^2,\ x\ge 0,\ y\ge 0\}$$

Calculăm mai departe integrala dublă $\iint_{pr_{xy}(C)} F(x,y)dxdy$, unde $F(x,y):= = \int_{C[(x,y)]} f\ dz$. Altfel, calculăm integrala $\iint_{C[x]} f\,dydz$ şi obținem o funcție în variabilă x, unde $x\in pr_x(C)$, să o notăm cu G, apoi calculăm integrala simplă $\int_0^1 G(x)dx$.

CAPITOLUL 2.
CLASE DE MULȚIMI. MĂSURĂ

2.1. Clase de mulțimi: inele, algebre, clase monotone

2.1.1. Definiție. Fie X o mulțime nevidă și $\mathscr{A} \subseteq 2^X$, o clasă nevidă de submulțimi din X. Vom spune că $\mathscr{A}$ este *inel pe* X, dacă: $A \cup B$ și $A \setminus B \in \mathscr{A}$, $(\forall)$ $A, B \in \mathscr{A}$. Dacă în plus $X \in \mathscr{A}$, vom spune că $\mathscr{A}$ este *o* algebră *pe X*. Un inel(resp. algebră) $\mathscr{A}$ pe X se numește *σ-inel (resp. σ-algebră)* pe X, dacă $\bigcup_{n \geq 1} A_n \in \mathscr{A}$, $(\forall)$ $(A_n)_{n \geq 1} \subseteq \mathscr{A}$. O mulțime $A \subseteq X$ se numește *$\mathscr{A}$-măsurabilă* (simplu, măsurabilă), dacă $A \in \mathscr{A}$. Se numește *spațiu măsurabil* o pereche $(X, \mathscr{A})$, unde X este o mulțime nevidă și $\mathscr{A}$ o σ-algebră pe X. Dacă, în plus, X este spațiu topologic (resp. metric), atunci $(X, \mathscr{A})$ se numeste *spațiu topologic* (resp. *metric*) *măsurabil.*

Observatie. Se mai utilizează terminologia : clan = inel; inel unitar (clan unitar) = algebră; trib(σ-clan unitar) = σ-algebră.

2.1.2. Propoziție.(Proprietăți elementare ale mulțimilor măsurabile).

1^0)*Fie $\mathscr{A}$ inel pe* X.*Atunci avem*:(i) $\emptyset \in \mathscr{A}$; (ii) $A \Delta B \in \mathscr{A}$, $(\forall) A, B \in \mathscr{A}$;

$$\text{(iii)} \quad \bigcup_{k=1}^{n} A_k, \ \bigcap_{k=1}^{n} A_k \in \mathscr{A}, \ (\forall)\ (A_k)_{k=\overline{1,n}} \subseteq \mathscr{A}.$$

2^0) *Fie $\mathscr{A}$ σ-inel pe* X. *Atunci,*$(\forall)(A_n)_{n \geq 1} \subseteq \mathscr{A}$, *avem*: $\bigcap_{n \geq 1} A_n$, $\underline{\lim}_{n \to \infty} A_n$, $\overline{\lim}_{n \to \infty} A_n \in \mathscr{A}$; *în particular, dacă șirul* $(A_n)_{n \geq 1}$ *are limită, spre exemplu, dacă* $(A_n)_{n \geq 1}$ *este monoton, avem* $\lim_{n \to \infty} A_n \in \mathscr{A}$.

3^0) *Fie* $\mathscr{A} \subseteq 2^X$ *fixat. Atunci $\mathscr{A}$ algebră pe* X $\Leftrightarrow$ (i) $A \cup B \in \mathscr{A}$, $(\forall)$ $A, B \in \mathscr{A}$, (ii) $X \setminus A \in \mathscr{A}$, $(\forall)$ $A \in \mathscr{A}$.

4^0) *Fie* $\mathscr{A} \subseteq 2^X$ *fixat. Atunci $\mathscr{A}$ σ-algebră pe* X $\Leftrightarrow$ (i)$\bigcup_{n \geq 1} A_n \in \mathscr{A}, (\forall)(A_n)_{n \geq 1} \subseteq \mathscr{A}$; (ii)$X \setminus A \in \mathscr{A}, (\forall) A \in \mathscr{A}$.

5^0) *Fie* $(\mathscr{A}_i)_{i \in I}$ *o familie de inele (resp. algebre, σ-inele, σ-algebre) pe* X. *Atunci* $\bigcup_{i} \mathscr{A}_i$ *este inel (resp. algebră, σ-inel, σ-algebră) pe* X.

6^0) *Fie $\mathscr{A}$ inel (resp. algebră, etc.)pe* X *și* $M \subseteq X$ *fixată. Atunci* $\mathscr{A}|_M$, *urma lui $\mathscr{A}$ pe* M, *este inel (resp. algebră, etc.) pe* M.

7^0) *Fie* $\mathscr{A} \subseteq 2^X$ *fixat. Atunci* $\mathscr{A}$ *inel* $\Leftrightarrow A\Delta B$, $A \cap B \in \mathscr{A}$, $(\forall) A,B \in \mathscr{A}$.

Dem. 1^0) (i)Fie $A \in \mathscr{A}$ fixat. Atunci, $\varnothing = A \setminus A \in \mathscr{A}$.

(ii) $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \in \mathscr{A}$, $(\forall)$ $A,B \in \mathscr{A}$.

(iii)$A \cap B = A \setminus (A \setminus B) \in \mathscr{A}$, $(\forall) A,B \in \mathscr{A}$. Mai departe deducem prin inducție că $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$, $\bigcap_{k=1}^{n} A_k \in \mathscr{A}$, $(\forall)$ $(A_k)_{k=\overline{1,n}} \subseteq \mathscr{A}$.

2^0) Fie $\mathscr{A}$ σ-inel pe X și $(A_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathscr{A}$ fixat. Atunci avem urmatoarele relații :

$$\bigcap_{n\geq 1} A_n = A_1 \cap (\bigcap_{n\geq 1} A_n) = A_1 \setminus (A_1 \setminus \bigcap_{n\geq 1} A_n) = A_1 \setminus \bigcap_{n\geq 1} (A_1 \setminus A_n) \in \mathscr{A};$$

$$B_n := \bigcup_{k\geq n} A_k \in \mathscr{A}, (\forall)\ n\geq 1;\ A := \bigcap_{n\geq 1} B_n \in \mathscr{A}, \text{ deci } \overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = A \in \mathscr{A}.$$

Analog se arată că $\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n\geq 1}\left(\bigcap_{k\geq n} A_k\right) \in \mathscr{A}$.

3^0) $(\Leftarrow)$ Fie $A,B \in \mathscr{A}$ fixați. Deoarece $A \setminus B = X \setminus ((X \setminus A) \cup B)$, rezultă că $A \setminus B \in \mathscr{A}$. Fixînd $A \in \mathscr{A}$, avem $\varnothing = A \setminus A \in \mathscr{A}$, deci $X = X \setminus \varnothing \in \mathscr{A}$ și deci $\mathscr{A}$ algebră pe X.

4^0) Același raționament ca în cazul 3^0).

5^0) Fie $(\mathscr{A}_i)_{i\in I}$ o familie de inele pe X și $\mathscr{A} := \bigcap_i \mathscr{A}_i$. Atunci $(\forall) A,B \in \mathscr{A}$, rezultă $A,B \in \mathscr{A}_i$, $(\forall) i \in I$, deci $A \cup B$, $A \setminus B \in \mathscr{A}_i$, $(\forall)$ $i\in I$ și deci $A \cup B$, $A \setminus B \in \bigcap_i \mathscr{A}_i = \mathscr{A}$. Prin urmare $\mathscr{A}$ inel pe X.

6^0) Fie $\mathscr{A}$ inel și $A_1, B_1 \in \mathscr{A}|_M$ fixați, deci $(\exists)$ $A,B \in \mathscr{A}$, cu $A_1 = A \cap M$, $B_1 = B \cap M$ și deci $A_1 \cup B_1 = (A \cup B) \cap M \in \mathscr{A}|_M$, $A_1 \setminus B_1 = (A \setminus B) \cap M \in \in \mathscr{A}|_M$. Prin urmare $\mathscr{A}|_M$ este un inel pe M, etc.

7^0) Ținem seama de definiția lui $A \Delta B$ și de relațiile

$$A \cup B = (A \Delta B) \Delta (A \cap B), A \setminus B = A \Delta (A \cap B).$$

2.1.3. Definiție. Fie $\mathscr{A}$ un inel (resp. algebră, etc.) pe o mulțime X și $M \subseteq X$. Atunci $\mathscr{A}|_M$ se numește *inelul indus* (resp. *algebra indusă*, etc.) de $\mathscr{A}$ pe M.

2.1.4. Definiție. Fie X o mulțime și $\mathscr{C} \subseteq 2^X$ fixat. Cel mai mic inel, σ-inel , algebră , σ-algebră , pe X, care conține pe $\mathscr{C}$, se notează cu $r(\mathscr{C})$, $\sigma r(\mathscr{C})$, $a(\mathscr{C})$, resp.$\sigma a(\mathscr{C})$, și se numește *: inelul, σ-inelul,* algebra, resp. σ-algebra *pe X generat(ă) de* $\mathscr{C}$.

a) Notăm cu $\sigma(\mathscr{C})$ familia $\{A\ ;\ (\exists)\ (C_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathscr{C},\ \bigcup_{n\geq 1} C_n = A\}$. Atunci avem: $\sigma r(\mathscr{C}) = \sigma(\, r\,(\mathscr{C})\,),\ \sigma a(\mathscr{C}) = \sigma(\, a\,(\mathscr{C})\,)$.

2.1.5. Propoziție. *Fie X o mulțime și $\mathscr{C} \subseteq 2^X$ fixat. Atunci $r(\mathscr{C}), a(\mathscr{C}), \sigma r(\mathscr{C}), \sigma a(\mathscr{C})$ există:*

$\mathscr{C}$ inel $\Leftrightarrow \mathscr{C} = r(\mathscr{C})$; $\mathscr{C}$ algebră $\Leftrightarrow \mathscr{C} = a(\mathscr{C})$, etc.

Dem. Evident, avem: $r(\mathscr{C}) = \bigcap_{i\in I} \mathscr{A}_i$, unde $(\mathscr{A}_i)_{i\in I}$ este familia tuturor inelelor pe X, care conțin pe $\mathscr{C}$, etc.

Corolar 1. *Fie $\mathscr{A}$ un inel (resp. algebră, etc.) pe X* și *$\mathscr{C} \subseteq \mathscr{A}$. Atunci, $r(\mathscr{C}) \subseteq \mathscr{A}$ (resp. $a(\mathscr{C}) \subseteq \mathscr{A}$, etc.).*

2.1.6. Propoziție. *Fie X o mulțime și $\mathscr{C} \subseteq 2^X$. Atunci $(\forall)\ A \in r(\mathscr{C})$ (resp. $A \in \sigma r(\mathscr{C})$), $(\exists)\ (C_k)_{k=\overline{1,n}} \subseteq \mathscr{C}$ (resp. $(C_k)_{k\geq 1} \subseteq \mathscr{C}$), a.î. $A \subseteq \bigcup_{1\leq k\leq n} C_k$ (resp. $A \subseteq \bigcup_{k\geq 1} C_k$).*

Dem. Fie $\mathscr{A} := \{A \subseteq X; (\exists)(C_k)_{k=\overline{1,n}} \subseteq \mathscr{C},\ \bigcup_{1\leq k\leq n} C_k \supseteq A\}$. Atunci $\mathscr{A}$ inel pe X și $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{A}$, deci $r(\mathscr{C}) \subseteq \mathscr{A}$, etc.

2.1.7. Propoziție. *Fie X o mulțime și $\mathscr{C} \subseteq 2^X$. Atunci notând $\mathscr{C}^c := \{A^c,\ A \in \mathscr{C}\}$, au loc relațiile: $a(\mathscr{C}) = a(\mathscr{C}^c)$* și *$\sigma a(\mathscr{C}) = \sigma a(\mathscr{C}^c)$.*

Dem. $\mathscr{C} \subseteq \sigma a(\mathscr{C})$, deci $\mathscr{C}^c \subseteq \sigma a(\mathscr{C})$ și deci $\sigma a(\mathscr{C}^c) \subseteq \sigma a(\mathscr{C})$. Analog avem $\mathscr{C}^c \subseteq \sigma a(\mathscr{C}^c)$, deci $\mathscr{C} \subseteq \sigma a(\mathscr{C}^c)$ și deci $\sigma a(\mathscr{C}) \subseteq \sigma a(\mathscr{C}^c)$.

Prin urmare $\sigma a(\mathscr{C}) = \sigma a(\mathscr{C}^c)$.

2.1.8. Propoziție. *Fie X o mulțime și $(\mathscr{A}_i)_{i\in I}$ o familie arbitrară de inele, algebre (resp. o familie finită de σ-inele, σ-algebre) pe X, filtrantă relativ la relatia $\subseteq$. Atunci, $\cup \mathscr{A}_i$ este inel, algebră (resp. σ-inel, σ-algebră) pe X.*

Dem. Fie $A, B \in \mathscr{A} := \cup \mathscr{A}_i$ fixați. Atunci $(\exists) i,j \in I$, cu $A \in \mathscr{A}_i$ și $B \in \mathscr{A}_j$. Cf. ipotezei, $(\exists)\ k \in I$, a.î. $\mathscr{A}_i \subseteq \mathscr{A}_k$ și $\mathscr{A}_j \subseteq \mathscr{A}_k$, deci $A \cup B,\ A \setminus B \in \mathscr{A}_k \subseteq \mathscr{A}$, deci $\mathscr{A}$ este inel, etc.

2.1.9. Propoziție. *Fie X o mulțime* și *$\mathscr{C} \subseteq 2^X$. Atunci $r(\mathscr{C}) = \bigcup_{n\geq 0} \mathscr{C}^{(n)}$, unde* șirul *$(\mathscr{C}^{(n)})_{n\geq 0}$ este definit astfel: $\mathscr{C}^{(0)} = \mathscr{C}$* și

$$\mathscr{C}^{(n)} := \{\bigcup_{finita} (A \setminus B);\ A, B \in \in \mathscr{C}^{(n-1)}\},\ (\forall)\ n \geq 1.$$

Dem. Cum, prin convenție, mulțimea vidă este finită și $\bigcup_{i\in\emptyset}(A_i \setminus B_i) = \emptyset$, rezultă că $\emptyset \in \mathscr{C}^{(n)}$, $(\forall)$ $n\geq 1$. De aici rezultă că șirul $(\mathscr{C}^{(n)})_{n\geq 1}$ este monoton crescător. Fie $\mathscr{R} := \bigcup_{n\geq 0} \mathscr{C}^{(n)}$ și A, B $\in \mathscr{R}$ fixați. Șirul $(\mathscr{C}^{(n)})_{n\geq 1}$ fiind monoton, $(\exists)$ $n\geq 1$, cu $A,B \in \mathscr{C}^{(n)}$. Din definiția lui $\mathscr{C}^{(n+1)}$ rezultă:

$$A \setminus B \in \mathscr{C}^{(n+1)} \;\&\; A \cup B = (A \setminus \emptyset) \cup (B \setminus \emptyset) \in \mathscr{C}^{(n+1)},$$

deci $A \setminus B$, $A \cup B \in \mathscr{R}$ și deci $\mathscr{R}$ inel. Cum $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{R}$, rezultă $r(\mathscr{C}) \subseteq \mathscr{R}$. In fine, prin inducție deducem că $\mathscr{C}^{(n)} \subseteq \mathscr{R}$, $(\forall)$ $n \geq 0$, deci $\bigcup_{n\geq 1} \mathscr{C}^{(n)} \subseteq \mathscr{R}$.

Prin urmare, $r(\mathscr{C}) = \bigcup_{n\geq 1} \mathscr{C}^{(n)}$.

2.1.10. Definiție. Fie X un ST și $\tau = \tau_X$-topologia lui X; σ-algebra generată de familia τ se numește *familia mulțimilor boreliene din X* și se notează cu $\mathscr{B}_X$, i.e. $\mathscr{B}_X := \sigma a(\tau)$. Un element $A \in \mathscr{B}_X$ se numește *mulțime boreliană din* X. Se numește *mulțime boreliană din M*, cu $M \subseteq X$ fixat, urma pe M a unei mulțimi boreliene din X, i.e. un element din σ-algebra pe M generată de τ_M (vezi T.2.1.14, Cor.3).

Exemple: a) Punctele dintr-un ST separat X sunt mulțimi boreliene în X. Mai general, orice mulțime închisă dintr-un ST este boreliană.

b) O reuniune (resp. intersecție) cel mult numerabilă de mulțimi boreliene dintr-un ST este o mulțime boreliană (din acel spațiu).

c) Limita superioară și limita inferioară a unui șir de mulțimi deschise (resp. închise), dintr-un ST, este o mulțime boreliană.

d) Orice mulțime de tip F_σ sau G_τ, dintr-un ST, este o mulțime boreliană.

Intr-adevăr, fie X un ST și $A \subseteq X$, $A \in (F_\sigma)$ (resp. $A \in (G_\tau)$). Atunci $A = \bigcup_{n\geq 1} A_n$ (resp. $A = \bigcap_{n\geq 1} A_n$), unde fiecăre $A_n (n\geq 1)$ este mulțime închisă (resp. deschisă) din X. Cum $A_n \in \mathscr{B}_X$ $(\forall)$ $n\geq 1$, rezultă cf. b) că $A \in \mathscr{B}_X$.

e) Orice interval din **R** este o mulțime boreliană din **R**. Mulțimile **Z**, **Q**, **R**, **R** \ **Q** sunt mulțimi boreliene din **R**; $\mathscr{B}_{\mathbf{R}} \neq 2^{\mathbf{R}}$ (Ex. 2.77.).

2.1.11. Teoremă (Clase de generatori pentru boreliene).*Fie $X[\tau]$ un spațiu topologic. Atunci $\mathscr{B}_X = \sigma a(\mathscr{C})$, unde $\mathscr{C}$ este una din următoarele clase (familii) de mulțimi:*

1^0) Familia τ^c a mulțimilor închise din X;

2^0) Familia mulțimilor deschise (resp. închise) și mărginite din X, dacă X este spațiu metric;

3^0) O bază numerabilă de deschiși a lui X, dacă X este cu bază numerabilă;

4^0) Familia numerabilă $\mathscr{C} := (B_X(a_n, 1/m))_{n,m\geq 1}$, dacă X este spațiu metric separabil și $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ o mulțime densă în X;

5^0) Familia $\mathscr{K}$ a mulțimilor compacte din X, dacă X este separat și σ-compact, i.e. $X = \bigcup_{n\geq 1} K_n$, cu K_n compactă, $(\forall)\ n \geq 1$;

Dem. 1^0) Din P 2.1.7. rezultă $\sigma a(\tau) = \sigma a(\tau^c)$, deci $\mathscr{B}_X = \sigma a(\tau^c)$;

2^0) Fie X [d] spațiu metric, $\tau = \tau_d$ și $\mathscr{C}$ familia mulțimilor deschise și mărginite din X. Fixăm $x_0 \in X$; atunci $(\forall)\ D \in \tau$, avem:

$$D = \bigcup_{n\geq 1} D_n \text{ , unde } D_n := D \cap B_X(x_0, n) \in \mathscr{C},\ (\forall)\ n\geq 1,$$

deci $D \in \sigma a(\mathscr{C})$ și deci $\tau \subseteq \sigma a(\mathscr{C})$, de unde obținem că $\mathscr{B}_X := \sigma a(\tau) \subseteq \sigma a(\mathscr{C})$. Cum, evident, $\mathscr{C} \subseteq \tau \subseteq \mathscr{B}_X$, rezultă $\sigma a(\mathscr{C}) \subseteq \mathscr{B}_X$. Așadar, $\sigma a(\mathscr{C}) = \mathscr{B}_X$.

3^0) Fie $\mathscr{C}$ o bază numerabilă a spațiului X. Atunci $\sigma a(\mathscr{C}) \subseteq \sigma a(\tau) = \mathscr{B}_X$. Reciproc, $(\forall)\ D \in \tau$, $(\exists)(D_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathscr{C}$, cu $\bigcup_{n\geq 1} D_n = D$, deci $D \in \sigma a(\mathscr{C})$ și deci $\tau \subseteq \sigma a(\mathscr{C})$, de unde rezultă $\mathscr{B}_X = \sigma a(\tau) \subseteq \sigma a(\mathscr{C})$, etc.

4^0) Din P.1.2.27. rezultă că familia numerabilă $\mathscr{C} = (\mathscr{B}_X(a_n, 1/m))_{n,m\geq 1}$ este o bază a spațiului X. Atunci, din 3^0) rezultă că $\sigma a(\mathscr{C}) = \mathscr{B}_X$.

5^0) Din T.1.2.12 rezultă $\mathscr{K} \subseteq \tau^c$, deci $\sigma a(\mathscr{K}) \subseteq \sigma a(\tau^c) = \mathscr{B}_X$. Reciproc, $(\forall) A \in \tau^c$, avem $A = \bigcup_{n\geq 1} (A \cap K_n)$ și $A \cap K_n \in \mathscr{K}$, deci $A \in \sigma a(\mathscr{K})$ și deci $\tau^c \subseteq \sigma a(\mathscr{K})$, de unde rezultă $\mathscr{B}_X \subseteq \sigma a(\mathscr{K})$, etc.

Corolar 1. *Fie $X = \boldsymbol{R}^m$. Atunci $\mathscr{B}_X = \sigma a(\mathscr{C})$, unde $\mathscr{C}$ este una din următoarele familii de mulțimi din X:*

1^0) Familia mulțimilor închise din X;

2^0) Familia mulțimilor deschise și mărginite din X;

3^0) Familia bilelor $(B_X(r_i, 1/j))_{i,j\geq 1}$, unde $\{r_1, r_2, r_3, \ldots\} = \boldsymbol{Q}^m$;

4^0) Familia mulțimilor compacte din X;

5^0) Familia intervalelor m-dimensionale deschise din X.

Dem. Afirmațiile 1^0)-4^0) rezultă din T.2.1.11., ținînd seama că $\mathbf{R}^m$ este un spațiu metric separabil și σ-compact. Intr-adevăr, $\mathbf{Q}^m$ este numerabilă și densă în X, deci X este separabil. De asemenea, avem $X = \bigcup_{n\geq 1} K_n$, unde

$K_n := \{x \in X;\ d(0,x) \le n\}$ este o mulțime compactă din X (cf. T.1.2.23.), deci X este σ-compactă.

5^0) Fie $\{r_1, r_2, r_3, ...\}$ o enumerare a mulțimii **Q**. Atunci familia numerabilă $\mathfrak{J} = (r_n - 1/m,\ r_n + 1/m)_{n,m \ge 1}$ este o bază a spațiului topologic **R** (P.1.2.27.), deci $\mathfrak{J}^m = \mathfrak{J} \times \mathfrak{J} \times ... \times \mathfrak{J}$ (m-ori) este bază numerabilă a spațiului topologic $\mathbf{R}^m$(P.1.2.29.), deci(T.2.1.11.,3^0)) $\sigma a(\mathfrak{J}^m) = \mathscr{B}_{\mathbf{R}^m}$ .Cum $\mathfrak{J}^d_{\mathbf{R}^m} \supseteq \mathfrak{J}^m$, rezultă $\sigma a(\mathfrak{J}^d_{\mathbf{R}^m}) = \mathscr{B}_{\mathbf{R}^m}$

Observație. In Cor.1(5^0) putem înlocui $\mathfrak{J}^d_{\mathbf{R}^m}$ prin $\mathfrak{J}^0_{\mathbf{R}^m}$, $\mathfrak{J}^c_{\mathbf{R}^m}$, $\mathfrak{J}^i_{\mathbf{R}^m}$; resp. şi prin $\{(a, \infty), a \in \mathbf{R}\}$, $\{[a,\infty); a \in \mathbf{R}\}$, dacă m = 1.

2.1.12. Propoziție. *Fie X, Y două mulțimi, $f: X \to Y$ o funcție, și $\mathscr{A}_1$ un inel(resp. σ-inel,etc.)pe Y. Atunci $f^{-1}(\mathscr{A}_1)$ este un inel(resp. σ-inel,etc.) pe X.*

Dem. Fie, spre exemplu, $\mathscr{A}_1$ σ-inel pe Y şi $\mathscr{A} := f^{-1}(\mathscr{A}_1)$. Atunci, $(\forall)A,B \in \mathscr{A}$, $(\exists)$ $C,D \in \mathscr{A}_1$, cu $f^{-1}(C) = A$ şi $f^{-1}(D) = B$, deci:

$$A \setminus B = f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D) = f^{-1}(C \setminus D) \in \mathscr{A}.$$

Fie acum $(A_n)_{n\ge1} \subseteq \mathscr{A}$ fixat. Atunci $(\exists)(B_n)_{n\ge1} \subseteq \mathscr{A}_1$, cu $f^{-1}(B_n) = A_n$, $(\forall)$ $n \ge 1$, deci cum $\bigcup_{n\ge1} B_n \in \mathscr{A}_1$, rezultă:

$$\bigcup_{n\ge1} A_n = \bigcup_{n\ge1} f^{-1}(B_n) = f^{-1}(\bigcup_{n\ge1} B_n) \in \mathscr{A}.$$

Prin urmare, $\mathscr{A}$ este σ-inel pe X.

Corolar 1. *Fie X o mulțime, $\mathscr{A}$ un inel (resp. σ-inel, etc.) pe X şi $M \subseteq X$ o mulțime. Atunci, $\mathscr{A}|_M$ este inel (resp. σ-inel, etc.) pe M.*

Dem. Aplicăm P.2.1.12. pentru injecția canonică $f : M \to X$.

Observație. Dacă $\mathscr{A}$ este un inel pe X şi $f : X \to Y$ o funcție, nu rezultă,în mod necesar,că $f(\mathscr{A})$ este inel pe Y.

Contraexemplu. Fie $f:[0,2) \to \mathbf{R}$ definită astfel: $f(x) = x$, dacă $x \in [0,1)$ şi $f(x)=2x-2$, dacă $x \in [1,2)$ şi fie $\mathscr{A} := \{\varnothing, [0,1), [1,2), [0,2)\}$. Atunci $\mathscr{A}$ inel pe [0,2) şi $f(\mathscr{A}) = \{\varnothing, [0,1), [0,4)\}$ care nu este inel pe **R.**

2.1.13. Propoziție. *Fie X,Y două mulțimi, $\mathscr{A}$ un inel (resp. σ-inel, etc.) pe X şi $f:X \to Y$ o funcție. Atunci familia $\mathscr{A}_1 := \{B \subseteq Y;\ f^{-1}(B) \in \mathscr{A}\}$ este un inel (resp. σ-inel, etc.) pe Y.*

Dem. Fie $B, C \in \mathscr{A}_1$ fixați, deci $f^{-1}(B), f^{-1}(C) \in \mathscr{A}$. Atunci,

$$f^{-1}(B \cup C) = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(C) \in \mathscr{A}, \text{ deci } B \cup C \in \mathscr{A}_1;$$

$$f^{-1}(B \setminus C) = f^{-1}(B) \setminus f^{-1}(C) \in \mathscr{A}, \text{ deci } B \setminus C \in \mathscr{A}_1;$$

Prin urmare, $\mathscr{A}_1$ este inel pe Y.

Corolar 1. *Fie X o mulțime, $M \subseteq X$ și $\mathscr{A}$ un inel (resp. σ-inel, etc.) pe M. Atunci, familia $\mathscr{A}_1 := \{A \subseteq X;\ A \cap M \in \mathscr{A}\}$ este un inel(resp. σ-inel, etc.) pe X.*

Dem. Aplicăm P 2.1.13. pentru injecția canonică $f: M \to X$.

2.1.14. Teoremă. *Fie X,Y două mulțimi, $f: X \to Y$ o funcție și $\mathscr{C} \subseteq 2^Y$. Atunci au loc relațiile:*

$1^0)\ r(f^{-1}(\mathscr{C})) = f^{-1}(r(\mathscr{C}));\quad 2^0)\ \sigma r(f^{-1}(\mathscr{C})) = f^{-1}(\sigma r(\mathscr{C}));$

$3^0)\ a(f^{-1}(\mathscr{C})) = f^{-1}(a(\mathscr{C}));\quad 4^0)\ \sigma a(f^{-1}(\mathscr{C})) = f^{-1}(\sigma a(\mathscr{C})).$

Dem. Să demonstrăm, spre exemplu,3^0). Deoarece $\sigma r(\mathscr{C})$ este σ-inel pe Y, rezultă (P.2.1.12.) că $f^1(\sigma r(\mathscr{C}))$ este σ-inel pe X, și cum $f^1(\mathscr{C}) \subseteq f^1(\sigma r(\mathscr{C}))$, rezultă că $\sigma r(f^1(\mathscr{C})) \subseteq f^1(\sigma r(\mathscr{C}))$ (1). Fie mai departe familia:

$$\mathscr{F} := \{B \subseteq Y;\ f^{-1}(B) \in \sigma r(f^{-1}(\mathscr{C}))\}$$

Din P.2.1.13. rezultă că $\mathscr{F}$ este σ-inel pe Y și avem:

$$\mathscr{C} \subseteq \mathscr{F};\big((\forall)\ C \in \mathscr{C},\ f^1(C) \in f^1(\mathscr{C}) \subseteq \sigma r(f^1(\mathscr{C})),\ \text{deci } C \in \mathscr{F}\big).$$

Atunci $\sigma r(\mathscr{C}) \subseteq \mathscr{F}$, deci $(\forall)\ B \in \sigma r(\mathscr{C})$, avem $B \in \mathscr{F}$ și deci $f^1(B) \in$ $\in \sigma r(f^1(\mathscr{C}))$. Așadar, $f^1(\sigma r(\mathscr{C})) \subseteq \sigma r(f^1(\mathscr{C}))$ (2). Din(1) & (2)rezultă egalitatea $\sigma r(f^1(\mathscr{C})) = \sigma r(f^{-1}(\mathscr{C}))$.

Corolar 1. *Fie X o* mulțime, *$M \subseteq X$* și *$\mathscr{C} \subseteq 2^X$. Atunci avem:*

$1^0) r(\mathscr{C})|_M = r(\mathscr{C}|_M);\quad 2^0)\ \sigma r(\mathscr{C})|_M = \sigma r(\mathscr{C}|_M);$

$3^0)\ a(\mathscr{C})|_M = a(\mathscr{C}|_M);\quad 4^0)\ \sigma a(\mathscr{C})|_M = \sigma a(\mathscr{C}|_M).$

Dem. Aplicăm T.2.1.14. pentru injecția canonică $f: M \to X$.

Corolar 2. *Fie $\mathscr{C} \subseteq 2^{\mathbf{R}}$, $\mathscr{B}$ familia mulțimilor boreliene din $\mathbf{R}$* și *$x_0 \in \mathbf{R}$ un punct. Atunci avem:*

$1^0)\ r(x_0 \pm \mathscr{C}) = x_0 \pm r(\mathscr{C});\quad 2^0)\ \sigma r(x_0 \pm \mathscr{C}) = x_0 \pm \sigma r(\mathscr{C});$

$3^0)\ a(x_0 \pm \mathscr{C}) = x_0 \pm a(\mathscr{C});\quad 4^0)\ \sigma a(x_0 \pm \mathscr{C}) = x_0 \pm \sigma a(\mathscr{C});$

$5^0)\ \mathscr{B} = x_0 + \mathscr{B}$, *deci* $(\forall)A \subseteq \mathbf{R}$, *avem:* $A \in \mathscr{B} \Leftrightarrow x + A \in \mathscr{B},\ (\forall)x \in \mathbf{R}$.

Dem. 1^0) - 4^0). Aplicăm T.2.1.14. pentru funcția $f(x) = x_0 + x$, $x \in \mathbf{R}$.

$$5^0)\ \mathscr{B} = \sigma\, a(\tau_{\mathbf{R}}) = \sigma\, a(x_0 \pm \tau_{\mathbf{R}}) = x_0 \pm \sigma\, a(\tau_{\mathbf{R}}) = x_0 + \mathscr{B}.$$

Corolar 3. *Fie X un spațiu topologic $\tau = \tau_X$ și $\mathscr{B} = \mathscr{B}_X$. Atunci, $(\forall)M \subseteq X$, avem: $\mathscr{B}|_M = \sigma\, a(\tau_M)$.*

2.1.15. Definiție. Fie X o mulțime și $\mathscr{C} \subseteq 2^X$. Vom spune că $\mathscr{C}$ este o *clasă monotonă* (pe X) dacă $(\forall)(A_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathscr{C}$, un șir monoton, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} A_n \in \mathscr{C}$, i.e. $\bigcup\limits_{n\geq 1} A_n$ și $\bigcap\limits_{n\geq 1} A_n$ aparțin lui $\mathscr{C}$.

a) Orice σ-inel pe X este o clasă monotonă pe X

b) Dacă $\mathscr{A}$ este inel (resp. algebră) pe X și $(\forall)(A_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathscr{A}$, un șir ascendent, avem $\lim\limits_{n\to\infty} A_n \in \mathscr{A}$, dacă în plus $\mathscr{A}$ este clasă monotonă, atunci $\mathscr{A}$ este σ-inel (resp. σ-algebră).

Intr-adevăr, fie $(A_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathscr{A}$ fixat. Atunci, $(\forall) n \geq 1$, avem $B_n := \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k \in \mathscr{A}$ și $(B_n)_{n\geq 1}$ este monoton crescător, deci $\bigcup\limits_{n\geq 1} A_n = \bigcup\limits_{n\geq 1} B_n = \lim\limits_{n\to\infty} B_n \in \mathscr{A}$ și deci $\mathscr{A}$ este σ-inel.

c) Fie $(\mathscr{C}_i)_{i\in I}$ o familie de clase monotone pe o mulțime X. Atunci, $\bigcap\limits_{i} \mathscr{C}_i$ este o clasă monotonă pe X.

2.1.16. Definiție. Fie X o mulțime și $\mathscr{C} \subseteq 2^X$. Cea mai mică clasă monotonă pe X, care include pe $\mathscr{C}$ se notează cu $m(\mathscr{C})$ și se numește *clasă monotonă generată* de $\mathscr{C}$.

2.1.17. Propoziție. *Fie X o mulțime și $\mathscr{C} \subseteq 2^X$. Atunci $m(\mathscr{C})$ există.*

Dem. Este suficient să punem $m(\mathscr{C}) := \bigcap\limits_{i\in I} \mathscr{C}_i$, unde $(\mathscr{C}_i)_{i\in I}$ este familia tuturor claselor monotone pe X, care includ pe $\mathscr{C}$.

2.1.18. Teoremă. *Fie $\mathscr{A}$ un inel (resp. algebră) pe o mulțime X. Atunci, $m(\mathscr{A}) = \sigma r(\mathscr{A})$ (*resp. *$m(\mathscr{A}) = \sigma a(\mathscr{A})$).*

Dem. Deoarece $\sigma r(\mathscr{A})$ este o clasă monotonă și $\mathscr{A} \subseteq \sigma(\mathscr{A})$, avem $m(\mathscr{A}) \subseteq \sigma r(\mathscr{A})$. Rămâne de demonstrat că $\sigma r(\mathscr{A}) \subseteq m(\mathscr{A})$. Să arătăm în prealabil că $m(\mathscr{A})$ este inel. Intr-adevăr, fie $A \in m(\mathscr{A})$ fixat; să notăm:

$$\mathscr{M}_A := \{B \in m(\mathscr{A});\ A \cup B,\ A \setminus B,\ B \setminus A, \in m(\mathscr{A})\}$$

Fie $(B_n)_{n\geq 1}$, un șir monoton cu elemente din $\mathscr{M}_A$, fixat. Atunci $A \cup B_n$, $A \setminus B_n$, $B_n \setminus A \in m(\mathscr{A})$, $(\forall)\ n \geq 1$, deci (P 1.1.7.Cor.1):

$$A \cup \lim_{n\to\infty} B_n = \lim_{n\to\infty} (A \cup B_n) \in m(\mathscr{A})$$

Analog, $A \setminus \lim\limits_{n\to\infty} B_n \in m(\mathscr{A})$, $(\lim\limits_{n\to\infty} B_n) \setminus A \in m(\mathscr{A})$.

Cu aceasta am arătat că $\mathscr{M}_A$ este o clasă monotonă.

Dacă A,B $\in$ m($\mathscr{A}$), avem,evident,că: B $\in \mathscr{M}_A \Leftrightarrow$ A $\in \mathscr{M}_B$.

Deoarece $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{M}_A$, $(\forall)A\in\mathscr{A}$, rezultă m($\mathscr{A}$) $\subseteq$ $\mathscr{M}_A$, $(\forall)A\in\mathscr{A}$, deci $(\forall)B\in m(\mathscr{A})\subseteq$ $\mathscr{M}_A$& $(\forall)A\in\mathscr{A}$, avem $A\in\mathscr{M}_B$ şi deci $\mathscr{A}\subseteq$ $\mathscr{M}_B$, $(\forall)B\in m(\mathscr{A})$, încât m($\mathscr{A}$) $\subseteq \mathscr{M}_B$, $(\forall)$ B $\in$ m($\mathscr{A}$). De aici rezultă că $(\forall)$ A,B $\in$ m($\mathscr{A}$), avem $A\cup B$, $A\setminus B \in$ m($\mathscr{A}$), deci m($\mathscr{A}$) este inel.

Aşadar, m($\mathscr{A}$) este o clasa monotonă şi,în acelaşi timp,m($\mathscr{A}$) este inel, deci m($\mathscr{A}$) este σ-inel. Cum $\mathscr{A} \subseteq$ m($\mathscr{A}$), conchidem că σr ($\mathscr{A}$) $\subseteq$ m($\mathscr{A}$), prin urmare m($\mathscr{A}$)=σr($\mathscr{A}$).

Corolar 1. *Fie X o mulţime, P o funcţie propoziţională definită pe* 2^X *şi* $\mathscr{A}$ *un inel (resp. algebră) pe X, cu proprietăţile:*

1^0) $|P_A|=1$, $(\forall)$ $A\in$ $\mathscr{A}$;

2^0) Familia $\mathscr{M}$ = $\{A\in 2^X, |P_A|=1\}$ este clasă monotonă.

Atunci $|P_A|=1$, $(\forall)$ $A \in \sigma r(\mathscr{A})$ (resp. $\sigma a(\mathscr{A})$).

Dem. Cf. ipotezei, $\mathscr{A}\subseteq$ $\mathscr{M}$, deci σr ($\mathscr{A}$) = m($\mathscr{A}$) $\subseteq$ m($\mathscr{M}$) = $\mathscr{M}$, etc.

Observaţie Prin $|P_A|=1$, înţelegem că propoziţia P_A este adevărată.

2.2. Măsură, Măsură exterioară.

2.2.1. Definiţie. Fie X o mulţime şi $\mathscr{A}$ o algebră pe X. Se numeşte *măsură pe X* o aplicaţie $\mu:\mathscr{A}\to\overline{\mathbf{R}}$ cu proprietăţile : (i) $\mu(\emptyset)=0$; (ii) μ nenegativă, i.e. $\mu(A)\geq 0$, $(\forall)A\in$ $\mathscr{A}$; (iii) μ *numerabil aditivă* , i.e. $(\forall)$ $(A_n)_{n\geq 1}\subseteq\mathscr{A}$, un şir mutual disjunct , cu $\bigcup_{n\geq 1} A_n \in$ $\mathscr{A}$, avem relaţia $\mu(\bigcup_{n\geq 1} A_n) = \sum_{n\geq 1}\mu(A_n)$. Dacă în loc de (iii) punem condiţia (iii') $\mu(A\cup B) = \mu(A) + \mu(B)$, $(\forall)$ A,B $\in$ $\mathscr{A}$, $A\cap B = \emptyset$, atunci μ se numeşte impropriu *măsură aditivă*. Măsura μ se numeste *finită*, dacă $\mu(X) < \infty$ (i.e. μ: $\mathscr{A}\to\mathbf{R}$) şi *σ-finită*, dacă $(\exists)$ $(A_n)_{n\geq 1}\subseteq\mathscr{A}$, cu $\bigcup_{n\geq 1} A_n = X$, şi $\mu(A_n) < \infty$, $(\forall)$ $n\geq 1$.

Se numeşte *spaţiu cu măsură*, prescurtat s.c.m., un triplet (X, $\mathscr{A}$, μ), unde X este mulţime nevidă, $\mathscr{A}$ σ-algebră pe X şi μ: $\mathscr{A}\to\overline{\mathbf{R}}$ o măsură. Dacă X este spaţiu topologic (resp. metric), atunci tripletul (X, $\mathscr{A}$, μ) se numeşte *spaţiu topologic* (resp. *metric*) *cu măsură*. Dacă μ este finită, σ-finită, atunci (X, $\mathscr{A}$, μ) se numeşte *spaţiu cu măsură finită*, resp. *σ-finită*.

Un triplet $(X, \mathscr{A}, \mu)$, unde X este o mulțime nevidă, $\mathscr{A}$ o algebră pe X şi $\mu: \mathscr{A} \to \overline{\mathbf{R}}$ o măsură, se numeşte *quasi-spațiu cu măsură* (q-s.c.m.).

a) Din condiția(iii') rezultă $\mu(\bigcup_{i \in I} A_i) = \sum_{i \in I} \mu(A_i)$, $(\forall)(A_i)_{i \in I} \subseteq \mathscr{A}$, familie finită, mutual disjunctă, i.e. μ finit aditivă .

b) Orice măsură este măsură aditivă. Reciproca nu este în general adevarată.

c) Fie $\mu: \mathscr{A} \to \overline{\mathbf{R}}$ o măsură şi $M \in \mathscr{A}$ o mulțime fixată. Atunci funcția $\mathscr{A} \ni A \to \mu(A \cap M)$, este o măsură pe X (măsura concentrată pe M).

d) O aplicație $\mu: \mathscr{A} \to \overline{\mathbf{R}}$ este măsură $\Leftrightarrow$ (i) $(\exists)\ A \in \mathscr{A}$, cu $\mu(A) < \infty$; (ii) $\mu \geq 0$; (iii) μ numerabil aditivă.

e) O măsură $\mu: \mathscr{A} \to \overline{\mathbf{R}}$ este σ-finită $\Leftrightarrow (\exists)(A_n)_{n \geq 1}$ o partiție măsurabilă a lui X, a.î. $\mu(A_n) < \infty$, $(\forall)n \geq 1$.

$(\Rightarrow)$ Prin ipoteză $(\exists)(A_n)_{n \geq 1} \subseteq \mathscr{A}$, cu $\bigcup_{n \geq 1} A_n = X$ & $\mu(A_n) < \infty$, $(\forall)\ n \geq 1$.

Atunci şirul $(B_n)_{n \geq 1}$, unde $B_1 := A_1$ şi $B_n := A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k$, $(\forall)\ n \geq 2$, constituie o partiție măsurabilă a lui X, cu $\mu(B_n) < \infty$, $(\forall)\ n \geq 1$.

f) Fie $\mu: \mathscr{A} \to \overline{\mathbf{R}}$ o măsură şi $\mathscr{A}_0 \subseteq \mathscr{A}$ o algebră pe X. Atunci $\mu|_{\mathscr{A}_0}$, restricția lui μ pe $\mathscr{A}_0$, este o măsură pe X. Dacă μ este σ-finită, rezultă că şi $\mu|_{\mathscr{A}_0}$ este σ-finită.

Exemple.a) *Măsura de numărare.* Fie X o mulțime şi $\mu : 2^X \to \overline{\mathbf{R}}$ o funcție definită astfel: $\mu(A) = \text{card}(A)$, dacă A este finită şi $\mu(A) = \infty$, dacă A este infinită. Atunci μ este o măsură şi $(X, 2^X, \mu)$ spațiu cu măsură.

b) *Măsura Dirac* . Fie X o mulțime nevidă , $\mathscr{A}$ o σ-algebră pe X (în particular $\mathscr{A} = 2^X$), $a \in X$ un punct fixat şi, $\delta_a : \mathscr{A} \to \mathbf{R}$, o funcție definită astfel: $\delta_a(A)=1$, dacă $a \in A$ şi $\delta_a(A)=0$, dacă $a \notin A$. Atunci δ_a este o măsură (finită) pe X (măsura concentrată în a) .Evident , $\delta_a(A) = \varphi_A(a)$, $(\forall)A \in \mathscr{A}$. Tripletul $(X, \mathscr{A}, \delta_a)$ este un spațiu cu măsură.

2.2.2.Definiție. Fie X o mulțime, $\mathscr{A} \subseteq 2^X$ o familie de mulțimi şi $(A_n)_{n \geq 1} \subseteq \mathscr{A}$ un şir. Se numeşte *$\mathscr{A}$-disjuncție* a şirului $(A_n)_{n \geq 1}$ un şir mutual disjunct $(B_n)_{n \geq 1} \subseteq \mathscr{A}$, cu $B_n \subseteq A_n$ $(\forall)n \geq 1$ şi $\bigcup_{n \geq 1} B_n = \bigcup_{n \geq 1} A_n$.

2.2.3.Propoziție. *Fie X o mulțime, $\mathscr{A}$ un inel pe X și $(A_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathscr{A}$ un şir. Atunci:*

1^0) Dacă $A_n\uparrow$, şirul $B_n := A_n \setminus A_{n-1}$, $(\forall)$ $n\geq 1$ $(A_0 = \varnothing)$, este o $\mathscr{A}$-disjuncție a şirului $(A_n)_{n\geq 1}$.

2^0) Dacă $A_n\downarrow A_0$ şi $A_0\in \mathscr{A}$, șirul $B_0:=A_0$ şi $B_n:=A_n\setminus A_{n+1}$, $(\forall)n\geq 1$, este o $\mathscr{A}$-disjuncție a șirului $(A_n)_{n\geq 0}$.

3^0) Dacă $(A_n)_{n\geq 1}$ este arbitrar, șirul $B_1 := A_1$ şi $B_n := A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k$, $(\forall)$ $n\geq 1$, este o $\mathscr{A}$-disjuncție a șirului $(A_n)_{n\geq 1}$.

Dem. 1^0) Fie $A:= \bigcup_{n\geq 1} A_n$. Evident, $B_n \subseteq A_n \subseteq A$, $(\forall)$ $n\geq 1$, deci $\bigcup_{n\geq 1} B_n \subseteq A$ (1). Reciproc, fie $x\in A$ fixat. Dacă $x\notin A_1$, fie $m\geq 2$ cel mai mic număr natural, cu $x\in A_m$. Atunci, $x\notin A_{m-1}$, deci $x\in A_m \setminus A_{m-1} = B_m$ şi deci $A\subseteq \bigcup_{n\geq 1} B_n$ (2). Din (1) şi (2) rezultă $\bigcup_{n\geq 1} A_n = \bigcup_{n\geq 1} B_n$.

Mai departe, este clar că $B_1 \cap B_n = \varnothing$, $(\forall)$ $n\geq 2$. Fie acum $m > n \geq 2$, fixați. Dacă $x \in B_m$, rezultă $x \in A_m$ şi $x \notin A_{m-1}$. Cum $A_{m-1} \supseteq A_n \supseteq B_n$, rezultă $x \notin B_n$, deci rezultă $B_n \cap B_m = \varnothing$. Prin urmare, șirul $(B_n)_{n\geq 1}$ este mutual disjunct.Afirmația 2^0) se arată la fel cu 1^0).

3^0) Notăm $A := \bigcup_{n\geq 1} A_n$ .Evident $B_n\subseteq A_n\subseteq A$,$(\forall)n\geq 1$,deci $\bigcup_{n\geq 1} B_n \subseteq A$ (1). Reciproc, fie $x\in A$ fixat. Dacă $x \notin A_1$, fie $m \geq 2$ cel mai mic număr natural, cu $x \in A_m$. Atunci $x \notin \bigcup_{k=1}^{m-1} A_k$, deci $x\in A_m\setminus \bigcup_{k=1}^{m-1} A_k = B_m$, deci $x\in \bigcup_{n\geq 1} B_n$ şi deci $A \subseteq \bigcup_{n\geq 1} B_n$ (2). Din (1) şi (2) rezultă $\bigcup_{n\geq 1} A_n = \bigcup_{n\geq 1} B_n$. Mai departe, este clar că $B_1 \cap B_n = \varnothing$, $(\forall)$ $n \geq 2$. Fie acum $m > n \geq 2$, fixați. Dacă $x\in B_m$, rezultă $x\in A_m$ şi $x\notin \bigcup_{i=1}^{m-1} A_i$. Cum $\bigcup_{i=1}^{m-1} A_i \supseteq A_n \supseteq B_n$, rezultă $x\notin B_n$, deci $B_n \cap B_m = \varnothing$.

Prin urmare,şirul $(B_n)_{n\geq 1}$ este mutual disjunct.

Corolar 1. *Fie X o mulțime, $\mathscr{A}$ un inel pe X şi $(A_i)_{i=\overline{1,n}} \subseteq \mathscr{A}$.*

1^0) Dacă $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq ... \subseteq A_n$, rezultă că următorul şir finit $A_1, A_2 \setminus A_1, ..., A_n \setminus A_{n-1}$, este o $\mathscr{A}$-disjuncție a lui $(A_i)_{i=\overline{1,n}}$.

2^0) Dacă $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq ... \supseteq A_n$, rezultă că următorul şir finit $A_n, A_{n-1}\setminus A_n, A_{n-2}\setminus A_{n-1}, ..., A_1\setminus A_2$, este o $\mathscr{A}$-disjuncție a lui $(A_i)_{i=\overline{1,n}}$.

3^0) Dacă $(A_i)_{i=\overline{1,n}}$ este arbitrar, rezultă că şirul finit $B_1 := A_1$, $B_k := A_k \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} A_i$, $(\forall) k = \overline{2,n}$, este o $\mathscr{A}$-disjuncție a lui $(A_i)_{i=\overline{1,n}}$.

Dem. Aplicăm P 2.2.3. pentru şirul $A_1, A_2, \ldots, A_n, A_n, A_n, \ldots$

Corolar 2. *Fie $(I_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathfrak{I}_R$ un şir de intervale. Atunci $(\exists)(J_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathfrak{I}_R$, un şir mutual disjunct de intervale, a.î. $\bigcup_{n\geq 1} J_n = \bigcup_{n\geq 1} I_n$.*

2.2.4. Propoziție. *Fie X o mulțime, $\mathscr{A}$ o algebră pe X şi $\mu: \mathscr{A} \to \overline{\mathbf{R}}$ o măsură aditivă. Atunci au loc afirmațiile:*

1^0) μ monotonă, i.e. $(\forall)$ $A, B \in \mathscr{A}$, $A \subseteq B$, rezultă $\mu(A) \leq \mu(B)$;

2^0) μ subtractivă, i.e. $(\forall)$ $A, B \in \mathscr{A}$, $A \subseteq B$, cu $\mu(A) < \infty$ sau $\mu(B) < \infty$, avem relația $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$;

3^0) μ finit subaditivă, i.e. $(\forall)$ $(A_i)_{i\in I} \subseteq \mathscr{A}$, o familie finită arbitrară, rezultă inegalitatea $\mu(\bigcup_{i\in I} A_i) \leq \sum_{i\in I} \mu(A_i)$;

4^0) μ numerabil supraaditivă, i.e. $(\forall)$ $(A_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathscr{A}$, un şir mutual disjunct cu $\bigcup_{n\geq 1} A_n \in \mathscr{A}$, avem inegalitatea $\mu(\bigcup_{n\geq 1} A_n) \geq \sum_{n\geq 1} \mu(A_n)$;

5^0) μ măsură $\Leftrightarrow$ μ numerabil subaditivă, i.e. $(\forall)(A_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathscr{A}$, un şir cu $\bigcup_{n\geq 1} A_n \in \mathscr{A}$, avem inegalitatea $\mu(\bigcup_{n\geq 1} A_n) \leq \sum_{n\geq 1} \mu(A_n)$.

Dem. 1^0) Mulțimile A şi B \ A sunt disjuncte, măsurabile, şi avem:

$B = A \cup (B \setminus A)$, deci $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A)$

2^0) Rezultă imediat din 1^0).

3^0) Fie, spre exemplu, familia $(A_i)_{i=\overline{1,n}} \subseteq \mathscr{A}$, arbitrară, fixată. Să notăm $B_1 := A_1$ şi $B_k := A_k \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} A_i$, $(\forall)$ $k \in \overline{2,n}$. Atunci (P.2.2.3,Cor.1.), $(B_i)_{i=\overline{1,n}}$ este o disjuncție măsurabilă a familiei $(A_i)_{i=\overline{1,n}}$, deci avem:

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \mu(\bigcup_{i=1}^{n} B_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu(B_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$$

4^0) Fie $(A_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathscr{A}$, un şir mutual disjunct, cu $A := \bigcup_{n\geq 1} A_n \in \mathscr{A}$, fixat. Atunci, $(\forall) n \geq 1$ avem:

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) = \mu(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \leq \mu(A), \text{ deci } \sum_{i\geq 1} \mu(A_i) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) \leq \mu(A)$$

5^0) ($\Rightarrow$) Fie $(A_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathscr{A}$, un şir arbitrar, cu $\bigcup_{n\geq 1} A_n \in \mathscr{A}$, fixat. Să notăm $B_1 := A_1$ şi $B_n := A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n} A_k$, $(\forall)$ $n \geq 2$. Atunci $(B_n)_{n\geq 1}$ este o disjuncţie măsurabilă a şirului $(A_n)_{n\geq 1}$ (P.2.2.3.), deci avem:

$$\mu(\bigcup_{n\geq 1} A_n) = \mu(\bigcup_{n\geq 1} B_n) = \sum_{n\geq 1} \mu(B_n) \leq \sum_{n\geq 1} \mu(A_n).$$

($\Leftarrow$)Cf. ipotezei,μ este numerabil subaditivă şi cf. 4^0),μ este numerabil supraaditivă , deci μ este numerabil aditivă , prin urmare μ este o măsură.

2.2.5. Definiţie. Fie X o mulţime, $\mathscr{A}$ un inel pe X şi μ: $\mathscr{A} \to \overline{\mathbf{R}}$ o funcţie. Vom spune că μ este:

- *continuă la stânga în* A $\in \mathscr{A}$, dacă $(\forall)(A_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathscr{A}$, $A_n \uparrow A$, rezultă $\mu(A_n) \to \mu(A)$;
- *continuă, condiţionat, la dreapta în* A $\in \mathscr{A}$, dacă $(\forall)(A_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathscr{A}$, $A_n \downarrow A$, şi $\mu(A_1) < \infty$, rezultă $\mu(A_n) \to \mu(A)$;
- *continuă în* A $\in \mathscr{A}$, dacă este continuă la stânga şi condiţionat la dreapta în A.
- *continuă (pe* $\mathscr{A}$*)*, dacă este continuă în fiecare A $\in \mathscr{A}$.

a) μ continuă la stânga în A$\in \mathscr{A} \Leftrightarrow (\forall)(A_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathscr{A}$, un şir monoton crescător, cu $\bigcup_{n\geq 1} A_n = A$, rezultă $\mu(A_n) \to \mu(A)$.

b) μ continuă la dreapta în A $\in \mathscr{A} \Leftrightarrow (\forall)(A_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathscr{A}$, un şir monoton descrescător, cu $\bigcap_{n\geq 1} A_n = A$ şi $\mu(A_1) < \infty$, rezultă $\mu(A_n) \to \mu(A)$.

c) Dacă μ este finită, avem: μ continuă (pe $\mathscr{A}$) $\Leftrightarrow (\forall)(A_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathscr{A}$, un şir monoton, cu $\lim_{n\to\infty} A_n \in \mathscr{A}$, rezultă $\mu(\lim_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$.

Observaţie. In loc de μ *continuă la stânga, continuă la dreapta*, se spune uneori: μ *continuă inferior*, respectiv μ *continuă superior*. Condiţia $\mu(A_1)<\infty$, din Def. 2.2.5. poate fi înlocuită prin condiţia $(\exists)m\geq 1$,cu $\mu(A_m)<\infty$.

2.2.6.Teoremă.*Fie X o mulţime,* $\mathscr{A}$ *inel pe X şi* μ*:*$\mathscr{A} \to \overline{\mathbf{R}}$ *o măsură. Atunci* μ *este continuă (pe* $\mathscr{A}$*).*

Dem. 1^0) Fie A $\in \mathscr{A}$ şi $(A_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathscr{A}$, cu $A_n \uparrow A$ fixaţi, deci $A = \bigcup_{n\geq 1} A_n$.

Notăm $B_1 := A_1$ şi $B_n := A_n \setminus A_{n-1}$, $(\forall)$ $n\geq 2$. Atunci, cf. P.2.2.3. şirul $(B_n)_{n\geq 1}$

este mutual disjunct şi $\bigcup_{n\geq 1} B_n = \bigcup_{n\geq 1} A_n = A$; în plus $\bigcup_{k=1}^{n} B_k = A_n$, $(\forall)n\geq 1$, deci:

$$\mu(A) = \mu\Big(\bigcup_{n\geq 1} B_n\Big) = \sum_{n\geq 1}\mu(B_n) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\mu(B_k) = \lim_{n\to\infty}\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right) = \lim_{n\to\infty}\mu(A_n).$$

Aşadar, $\mu(A_n)\to\mu(A)$, deci μ continuă la stânga în A.

2^0) Fie acum $A \in \mathscr{A}$, $(A_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathscr{A}$, cu $A_n \downarrow A$ şi $\mu(A_1) < 1$, fixaţi. Atunci(P.1.1.7,Cor.2),$A_1 \setminus A_n \uparrow A_1 \setminus A$ $(n\to\infty)$, deci (cf.1^0)), $\mu(A_1 \setminus A_n) \to$ $\to \mu(A_1 \setminus A)$. Cum $\mu(A_1) < 1$, avem (P.2.2.4.), $\mu(A_1 \setminus A) = \mu(A_1) - \mu(A)$ şi $\mu(A_1 \setminus A_n) = \mu(A_1) - \mu(A_n)$, $(\forall)$ $n\geq 1$, deci

$$\mu(A_1) - \mu(A_n) \to \mu(A_1) - \mu(A) \Leftrightarrow \mu(A_n) \to \mu(A), \text{ etc.}$$

Corolar 1. *Fie X o mulţime, $\mathscr{A}$ inel pe X şi $\mu : \mathscr{A} \to$ **R** o măsură finită. Atunci μ este continuă (pe $\mathscr{A}$), i.e. $(\forall)(A_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathscr{A}$,un şir monoton, cu $\lim\limits_{n\to\infty} A_n \in \mathscr{A}$, rezultă:*

$$\mu(\lim_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

Observaţie. Condiţia $\mu(A_1) < \infty$ din T.2.2.6. este esenţială.

Contraexemplu. Fie $\mu : 2^{\mathbf{N}} \to \overline{\mathbf{R}}$ măsura de numărare şi $A_n := \{n, n+1, n+2, ...\}$ $(n\geq 1)$. Atunci $A := \bigcap_{n\geq 1} A_n = \emptyset$, deci $\mu(A) = 0$, în timp ce $\mu(A_n) = \infty$, $(\forall)$ $n\geq 1$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n) = \infty$.

2.2.7. Propoziţie. *Fie X o mulţime, $\mathscr{A}$ un inel pe X şi $\mu : \mathscr{A}\to\overline{\mathbf{R}}$ o măsură aditivă,continuă la stânga pe $\mathscr{A}$ (resp. la dreapta în $\emptyset$). Atunci μ este numerabil aditivă, deci μ măsură.*

Dem. Fie $(A_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathscr{A}$ un şir mutual disjunct, cu $A := \bigcup_{n\geq 1} A_n \in \mathscr{A}$, fixat.

Notăm $B_n := \bigcup_{k=1}^{n} A_k$,$(\forall)$ $n\geq 1$; evident $(B_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathscr{A}$ şi $B_n \uparrow A$. Presupunem μ continuă la stânga pe $\mathscr{A}$. Atunci, $\mu(B_n) \to \mu(A)$, deci:

$$\sum_{k=1}^{n}\mu(A_k) = \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big) = \mu(B_n) \to \mu(A) \ (n \to \infty).$$

Prin urmare , $\sum_{n\geq 1}\mu(A_n) = \mu(A)$, deci μ numerabil aditivă.

Presupunem acum μ continuă la dreapta în $\emptyset$ şi să notăm $C_n := A \setminus B_n$, $(\forall)$ $n\geq 1$. Din P.1.1.7,Cor.2, rezultă $C_n \downarrow \emptyset$, deci $\mu(C_n) \to 0$. Cum $A = B_n \cup C_n$ şi $B_n \cap C_n = \emptyset$, $(\forall) n\geq 1$, rezultă $\mu(A) = \mu(B_n) + \mu(C_n)$, $(\forall)$ $n\geq 1$, deci $\mu(B_n) \to \mu(A)$ şi deci, ca şi mai sus, $\sum\limits_{n\geq 1} \mu(A_n) = \mu(A)$, etc.

Corolar 1. *Fie X o mulţime, $\mathscr{A}$ inel pe X şi $\mu : \mathscr{A} \to$* **R** *o măsură aditivă, finită. Atunci condiţiile 1^0) - 3^0) sunt echivalente: 1^0) μ măsură; 2^0) μ continuă la stânga pe $\mathscr{A}$; 3^0) μ continuă la dreapta în $\emptyset$.*

2.2.8. Definiţie. Se numeşte *măsură exterioară* pe o mulţime X, o funcţie $\mu^*: 2^X \to \overline{\mathbf{R}}$ cu proprietăţile: 1^0) $\mu^*(\emptyset)=0$; 2^0) μ^* monoton crescătoare, i.e. $(\forall)$ A, B $\in 2^X$, $A \subseteq B$, rezultă $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$; 3^0) μ^*numerabil subaditivă, i.e. $(\forall)(A_n)_{n\geq 1} \subseteq 2^X$, rezultă $\mu^*(\bigcup\limits_{n\geq 1} A_n) \leq \sum\limits_{n\geq 1} \mu^*(A_n)$. Tripletul $(X, 2^X, \mu^*)$ îl vom numi *spaţiu cu măsură exterioară*.

a) Orice măsură exterioară este funcţie nenegativă.

b) Orice măsură exterioară este funcţie subaditivă, i.e.

$$(\forall)(A_i)_{i=\overline{1,n}} \subseteq 2^X \Rightarrow \mu^*(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu^*(A_i).$$

c) Dacă $\mu : 2^X \to \overline{\mathbf{R}}$ este o măsură, atunci μ este o măsură exterioară. Reciproca nu este în mod necesar adevărată.

d)$\mu^*: 2^X \to \overline{\mathbf{R}}$ măs. ext.$\Leftrightarrow$(i) $\mu^*(\emptyset)=0$;(ii) $\mu^*(A) \leq \mu^*(B), (\forall) A \subseteq B \subseteq X$; (iii)$(\forall)(A_n)_{n\geq 1} \subseteq 2^X$ un şir mutual disjunct, avem $\mu^*(\bigcup\limits_{n\geq 1} A_n) \leq \sum\limits_{n\geq 1} \mu^*(A_n)$

($\Leftarrow$) Fie $(A_n)_{n\geq 1} \subseteq 2^X$,un şir, şi $(B_n)_{n\geq 1}$o disjuncţie a lui $(A_n)_{n\geq 1}$. Atunci,

$$\mu^*(\bigcup_{n\geq 1} A_n) = \mu^*(\bigcup_{n\geq 1} B_n) \leq \sum_{n\geq 1} \mu^*(B_n) \leq \sum_{n\geq 1} \mu^*(A_n),$$

deci μ^* numerabil subaditivă, etc.

e)Fie, $\mu^*: 2^X \to \overline{\mathbf{R}}$, o măsură exterioară aditivă. Atunci μ^* este măsură.

Intr-adevăr, μ^* fiind aditivă, este numerabil supraaditivă (P.2.2.4.), iar prin ipoteză μ^* este numerabil subaditivă, prin urmare μ^* este numerabil aditivă, deci μ^* este o măsură.

Exemple. a) Fie X o mulţime nevidă, care nu se reduce la un punct şi $\mu^*: 2^X \to \mathbf{R}$ o funcţie definită astfel: $\mu^*(\emptyset)=0$ şi $\mu^*(A)=1$, $(\forall)$ $A \in 2^X$, $A \neq \emptyset$. Atunci μ^* este o măsură exterioară şi nu este o măsură.

b) Fie X o mulţime nevidă, care nu se reduce la un punct şi $\mu^*: 2^X \to \overline{\mathbf{R}}$ o funcţie definită astfel: $\mu^*(\emptyset)=0$; $\mu^*(A)=1$, dacă $A \in 2^X$, A finită nevidă; $\mu^*(A) = \infty$, dacă $A\in 2^X$, A infinită. Atunci μ^* este o măsură exterioară şi nu este o măsură.

2.2.9. Teoremă (Construcţia unei măsuri exterioare)*Fie X o mulţime şi $\mathscr{C} \subseteq 2^X$ cu proprietăţile: $\emptyset\in\mathscr{C}$ şi $(\exists)(C_n)_{n\geq 1}\subseteq\mathscr{C}$, a.î. $\bigcup_{n\geq 1} C_n = X$; fie mai departe $\varphi : \mathscr{C} \to \overline{\mathbf{R}}$ o funcţie nenegativă, cu $\varphi(\emptyset)=0$. Atunci funcţia $\mu^*: 2^X\to\overline{\mathbf{R}}$ definită astfel*

$$\mu^*(A) := \inf\{ \sum_{n\geq 1} \varphi(C_n); (\exists)(C_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathscr{C}, \bigcup_{n\geq 1} C_n \supseteq A\},$$

este o măsură exterioară pe X.

Dem. Evident, $\mu^*(\emptyset) = 0$. Fie $A,B\in 2^X$, $A \subseteq B$ fixaţi şi $(C_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathscr{C}$, cu $\bigcup_{n\geq 1} C_n \supseteq B$. Atunci, $\bigcup_{n\geq 1} C_n \supseteq A$, deci $\mu^*(A) \leq \sum_{n\geq 1} \varphi(C_n)$ şi deci

$$\mu^*(A) \leq \inf\{ \sum_{n\geq 1} \varphi(C_n); (C_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathscr{C}, \bigcup_{n\geq 1} C_n \supseteq B\} = \mu^*(B).$$

Fie acum $(A_n)_{n\geq 1} \subseteq 2^X$ şi $A:=\bigcup_{n\geq 1} A_n$; să arătăm că $\mu^*(A)\leq \sum_{n\geq 1} \mu^*(A_n)$ (1)

Dacă $(\exists)n \geq 1$, cu $\mu^*(A_n) = \infty$, ineg.(1) este, evident, adevărată; presupunem deci că $\mu^*(A_n) < \infty,(\forall)\ n\geq 1$. Fixăm $\varepsilon > 0$; din definiţia lui μ^* rezultă: $(\forall)\ n\geq 1$, $(\exists)(C_{nk})_{k\geq 1} \subseteq \mathscr{C}$, a.î.:

$$\bigcup_{k\geq 1} C_{nk} \supseteq A_n,\ \sum_{k\geq 1} \varphi(C_{nk}) \leq \mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Atunci $(C_{nk})_{n\geq 1,k\geq 1}$ este o familie numerabilă de elemente din $\mathscr{C}$, care acoperă A, deci avem:

$$\mu^*(A) \leq \sum_{n\geq 1}\sum_{k\geq 1} \varphi(C_{nk}) \leq \sum_{n\geq 1} (\mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}) = \sum_{n\geq 1} \mu^*(A_n) + \varepsilon.$$

Cum $\varepsilon > 0$ a fost arbitrar, rezultă $\mu^*(A) \leq \sum_{n\geq 1} \mu^*(A_n)$.

Prin urmare, μ^* este o măsură exterioară pe X.

Observaţia 1. Dacă $\mathscr{C}$ este o algebră pe X şi $\varphi : \mathscr{C} \to \overline{\mathbf{R}}$ o măsură, atunci μ^* este o prelungire a lui φ (T .2.2.17.), ceea ce nu se întâmplă în cadrul T. 2.2.9.

Observaţia 2. Dacă X este un spaţiu normat iar $\mathscr{C}$ şi φ au proprietăţi suplimentare: $\mathscr{C}$ invariant la translaţii, resp. φ monotonă, etc., atunci μ^* este invariantă la translaţii, monotonă, prelungeşte pe φ, etc.

Exemplul 1. Fie $\mathfrak{I}_{\mathbf{R}}$ familia tuturor intervalelor din **R** şi $\ell:\mathfrak{I}_{\mathbf{R}}\to\overline{\mathbf{R}}$ funcţia lungime, i.e. $\ell(I)=b-a$, unde a şi b sunt capetele intervalului I. Atunci tripletul ($\mathbf{R}$, $\mathfrak{I}_{\mathbf{R}}$, ℓ) satisface condiţiile din T.2.2.9 ; măsura exterioară corespunzătoare se numeşte *măsura exterioară Lebesgue* pe **R** şi se notează cu λ^* (vezi Def. 2.3.2.)

Exemplul 2. Fie $\mathfrak{I}_{\mathbf{R}}$ ca mai sus, $h:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ o funcţie monoton crescătoare şi $\varphi:\mathfrak{I}_{\mathbf{R}}\to\overline{\mathbf{R}}$ o funcţie definită astfel $\varphi(I) = h(b) - h(a)$, unde a şi b sunt capetele lui I. Atunci tripletul ($\mathbf{R}$, $\mathfrak{I}_{\mathbf{R}}$, φ) satisface condiţiile din T.2.2.9 ; măsura exterioară corespunzătoare se numeşte *măsura exterioară Lebesgue-Stieltjes* pe **R**.

2.2.10. Definitie. Fie X o mulţime şi $\mu^*:2^X\to\overline{\mathbf{R}}$ o măsură exterioară. O mulţime $A\subseteq X$ se numeste *μ^*-măsurabilă*, dacă satisface condiţia

$$\mu^*(B) = \mu^*(B\cap A) + \mu^*(B\cap A^c), (\forall)\ B\in 2^X, \qquad (1)$$

numită *condiţia de μ^*- măsurabilitate* a lui A, pe care o vom nota cu M*.

a) Mulţimile $\varnothing$ şi X sunt μ^*-măsurabile.

b) Mulţimea A este μ^*-măsurabilă $\Leftrightarrow$ A^c este μ^*-măsurabilă

c) Deoarece familia $\{B\cap A, B\cap A^c\}$ constituie o partiţie a lui B şi cum μ^* este subaditivă, rezultă că inegalitatea "$\leq$ " din relaţia (1) este întotdeauna îndeplinită.

d) *Dacă $\mu^*(A)=0$, atunci A este μ^*-măsurabilă.*

Intr-adevăr, fie $B\subseteq X$ fixat. Deoarece $B\cap A\subseteq A$ şi $B\cap A^c\subseteq B$, avem $\mu^*(B\cap A)\leq\mu^*(A)=0$ şi $\mu^*(B\cap A^c)\leq\mu^*(B)$, deci

$$\mu^*(B)\leq\mu^*(B\cap A)+\mu^*(B\cap A^c)\leq\mu^*(B)\Leftrightarrow(1)$$

2.2.11. Teoremă (Caratheodory). *Fie X o mulţime şi $\mu^*: 2^X\to\overline{\mathbf{R}}$ o măsură exterioară. Atunci , familia $\mathscr{A}^\wedge$ a mulţimilor μ^*-măsurabile din X este o σ-algebră pe X şi $\hat{\mu}:=\mu^*/\mathscr{A}^\wedge$ este o măsură, deci tripletul $(X,\mathscr{A}^\wedge,\hat{\mu})$ este un spaţiu cu măsură.*

Dem. (I) Am observat mai înainte că mulţimile $\varnothing$ şi X sunt μ^*-măsurabile, deci aparţin lui $\mathscr{A}^\wedge$, iar dacă $A\in\mathscr{A}^\wedge$, rezultă că $A^c\in\mathscr{A}^\wedge$. Să arătăm acum că $A\cup B\in\mathscr{A}^\wedge,(\forall)A,B\in\mathscr{A}^\wedge$.Fie, în acest scop, $A,B\in\mathscr{A}^\wedge$ şi $M\subseteq X$, fixaţi. Din relaţia de μ^*-măsurabilitate a lui A,resp. B rezultă relaţiile :

$$\mu^*(M)=\mu^*(M\cap A)+\mu^*(M\cap A^c)\ ,\ \mu^*(M)=\mu^*(M\cap B)+\mu^*(M\cap B^c) \qquad (1)$$

Inlocuind pe M cu $M\cap B^c$, resp. $M\cap(A\cup B)$, obţinem :

$$\mu^*(M\cap B^c)=\mu^*((M\cap B^c)\cap A)+\mu^*((M\cap B^c)\cap A^c)$$

$$\mu^*(M\cap(A\cup B))=\mu^*((M\cap(A\cup B))\cap B)+\mu^*((M\cap(A\cup B))\cap B^c)=$$

$$= \mu^*(M \cap B) + \mu^*(M \cap A \cap B^c),$$

deci

$$\mu^*(M)=\mu^*(M\cap B)+\mu^*(M\cap B^c)=\mu^*(M\cap B)+(\mu^*(M\cap B^c\cap A)+\mu^*(M\cap B^c\cap A^c))=$$
$$= \mu^*(M \cap (A \cup B)) + \mu^*(M \cap B^c\cap A^c)$$

Aşadar,

$\mu^*(M) = \mu^*(M\cap(A\cup B)) + \mu^*(M\cap(A\cup B)^c)$, $(\forall)$ $M\in 2^X$, i.e. $A\cup B\in\hat{\mathscr{A}}$.

Cu aceasta am arătat că $\hat{\mathscr{A}}$ este o algebră pe X.

(II) Fie acum $(A_n)_{n\geq1} \subseteq \hat{\mathscr{A}}$ un şir mutual disjunct, cu $A:=\bigcup\limits_{n\geq1} A_n \in \mathscr{A}$, şi $M \subseteq X$ fixaţi. Deoarece

$$(M \cap (A_1 \cup A_2)) \cap A_2 = M \cap A_2,\ (M \cap (A_1 \cup A_2)) \cap A^c_2 = M \cap A_1$$

şi A_2 este μ^*-măsurabilă, rezultă

$$\mu^*(M \cap (A_1 \cup A_2)) = \mu^*(M \cap A_1) + \mu^*(M \cap A_2),$$

de unde, prin inducţie, deducem relaţia

$$\mu^*(M \cap (\bigcup_{k=1}^{n} A_k)) = \sum_{k=1}^{n}\mu^* (M \cap A_k),\ (\forall)\ n \geq 1 \qquad (2)$$

Inlocuind în (2) pe M cu X, obţinem:

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=1}^{n}\mu^* (A_k),\ (\forall)\ n \geq 1,$$

deci $\mu^*(A) \geq \sum\limits_{k\geq1}\mu^* (A_k)$. Cum inegalitatea contrară $\leq$ este întotdeauna adevărată, avem egalitate.

Am arătat, în acest fel, că μ^* este o măsură pe $\hat{\mathscr{A}}$.

(III) Fie acum $(A_n)_{n\geq1} \subseteq \hat{\mathscr{A}}$ fixat şi $A =\bigcup\limits_{n\geq1} A_n$. Să notăm $B_1 := A_1$ şi $B_n:=A_n\setminus\bigcup\limits_{k=1}^{n-1} A_k$ $(n\geq1)$. Evident, $(B_n)_{n\geq1}\subseteq \mathscr{A}$; $\bigcup\limits_{n\geq1} B_n = A$ & $B_n\cap B_m=\varnothing$ $(n\neq m)$.

Atunci, $(\forall)$ $M \subseteq X$, cf. (1) avem:

$$\mu^*(M) = \mu^*(M \cap (\bigcup_{k=1}^{n} B_k)) + \mu^*(M \cap (\bigcup_{k=1}^{n} B_k)^c) =(\text{cf}(2))$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \mu^*(M \cap B_k) + \mu^*(M \cap (\bigcup_{k=1}^{n} B_k)^c) \geq \sum_{k=1}^{n} \mu^*(M \cap B_k) + \mu^*(M \cap A^c),$$

deci, prin trecere la limită, $n \to \infty$, obţinem:

$$\mu^*(M) \geq \sum_{k\geq1} \mu^*(M \cap B_k) + \mu^*(M \cap A^c) \geq \mu^*(M \cap A) + \mu^*(M \cap A^c),$$

deoarece $M \cap A = \bigcup_{k\geq 1} (M \cap B_k)$ şi μ^* este numerabil subaditivă.

Aşadar, $\mu^*(M) \geq \mu^*(M \cap A) + \mu^*(M \cap A^c)$, i.e. $A \in \mathscr{A}^\wedge$, prin urmare, $\mathscr{A}^\wedge$ este o σ-algebră pe X.

Corolar 1. *In acelaşi cadru avem: tripletul $(X, \mathscr{A}^\wedge, \mu^\wedge)$ este un spaţiu cu măsură completă.*

Dem. Fie $B \subseteq A \in \mathscr{A}^\wedge$, cu $\mu(A) = 0$, fixaţi. Atunci $\mu^*(A) = 0$, deci $0 \leq \mu^*(B) \leq \mu^*(A) = 0$ şi deci $B \in \mathscr{A}^\wedge$.

*

Fie $(X, 2^X, \mu^*)$ un spaţiu topologic (resp.metric) cu măsură exterioară. Se pune problema : în ce condiţii $\mathscr{B}_X$,mulţimile boreliene din X , sunt μ^*-măsurabile ?

2.2.12. Teoremă. *Fie $(X, 2^X, \mu^*)$ un spaţiu topologic cu măsură exterioară şi $\mathscr{A}^\wedge$ familia mulţimilor μ^*-măsurabile. Atunci:*

$$\mathscr{B}_X \subseteq \mathscr{A}^\wedge \Leftrightarrow \mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B),\ (\forall)\ A,B \in 2^X,\ cu\ A \cap \overline{B} = \varnothing$$

Dem. $(\Rightarrow)$ Fie $A,B \in 2^X$, cu $A \cap \overline{B} = \varnothing$, fixaţi. Cum $\overline{B} \in \mathscr{B}_X \subseteq \mathscr{A}^\wedge$, rezultă

$$\mu^*(M) = \mu^*(M \cap \overline{B}) + \mu^*(M \cap \overline{B}^c),\ (\forall)\ M \in 2^X.$$

Fie $M := A \cup B$. Deoarece $B \subseteq \overline{B}$ şi $A \subseteq \overline{B}^c$, avem:

$$M \cap \overline{B} = (A \cup B) \cap \overline{B} = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{B}) = B$$
$$M \cap \overline{B}^c = (A \cup B) \cap \overline{B}^c = (A \cap \overline{B}^c) \cup (B \cap \overline{B}^c) = A,$$

deci

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*(M) = \mu^*(B) + \mu^*(A).$$

$(\Leftarrow)$ Fie $D \in \tau_X$ fixat. Atunci, $(\forall)\ M \in 2^X$, avem:

$$(M \cap D) \cap (\overline{M \cap D^c}) \subseteq (M \cap D) \cap (\overline{M} \cap \overline{D^C}) = M \cap D \cap D^c = \varnothing$$

Aşadar,

$$(M \cap D) \cap \overline{M \cap D^c} = \varnothing\ \&\ (M \cap D) \cup (M \cap D^c) = M,$$

deci

$$\mu^*(M) = \mu^*(M \cap D) + \mu^*(M \cap D^c),$$

şi deci D μ^*-măsurabilă, i.e. $D \in \mathscr{A}^\wedge$, etc.

2.2.13. Definiţie. Fie $(X,2^X,\mu^*)$ un spaţiu metric cu măsură exterioară. Vom spune că μ^* satisface *condiţia lui Caratheodory*, prescurtat condiţia [C], dacă

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B),\ (\forall)\ A,B \in 2^X,\ d(A,B) > 0.$$

2.2.14. Propoziție. *Fie $(X, 2^X, \mu^*)$ un spațiu metric cu măsură exterioară și $\mathscr{A}^\wedge$ familia mulțimilor μ^*-măsurabile. Dacă $\tau_X \subseteq \mathscr{A}^\wedge$, i.e. orice mulțime deschisă este μ^*-măsurabilă, atunci μ^* satisface condiția lui Caratheodory.*

Dem. Fie $A_1, A_2 \in 2^X$, cu $\delta = d(A_1,A_2)>0$, fixați. Evident, $(\forall) 0<\varepsilon<\delta$, avem $A_1 \cap B_X(A_2,\varepsilon) = \varnothing$. Mulțimea $D = B_X(A_2,\varepsilon)$ fiind, evident, deschisă, este , conform ipotezei, μ^*-măsurabilă, deci avem:

$$\mu^*(A_1 \cup A_2) = \mu^*((A_1 \cup A_2) \cap D) + \mu^*((A_1 \cup A_2) \cap D^c) \quad (1)$$

Cum avem $(A_1 \cup A_2) \cap D = A_2$ și $(A_1 \cup A_2) \cap D^c = A_1$, din (1) rezultă $\mu^*(A_1 \cup A_2)=\mu^*(A_1)+\mu^*(A_2)$, deci μ^* satisface condiția lui Caratheodory.

Observație. Din condiția $d(A,B)>0$ rezultă relația $A \cap \overline{B} = \overline{A} \cap B = \varnothing$, deci P.2.2.14 rezultă din T.2.2.12.

2.2.15. Teoremă (Caratheodory). *Fie $X[d]$ un spațiu metric și $\mu^*: 2^X \to \overline{\mathbf{R}}$ o măsură exterioară. Atunci, orice mulțime boreliană din X este μ^*-măsurabilă, i.e. $\mathscr{B}_X \subseteq \mathscr{A}^\wedge \Leftrightarrow \mu^*$ satisface condiția [C] a lui Caratheodory.*

Dem. Implicația $(\Rightarrow)$ rezultă din P 2.2.14.

$(\Leftarrow)$ Fie $\mathscr{A}^\wedge, \mathscr{B}, \mathscr{C}$, familia mulțimilor μ^*-măsurabile, boreliene, resp. închise din X.Dacă arătăm că $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{A}^\wedge$ (1), rezultă $\mathscr{B} = \sigma a(\mathscr{C}) \subseteq \mathscr{A}^\wedge$ și teorema este demonstrată. Fie, în acest scop, $A \in \mathscr{C}$ și $M \subseteq X$ fixați și să arătăm că

$$\mu^*(M) \geq \mu^*(M \cap A) + \mu^*(M \cap A^c) \qquad (2)$$

Să notăm $A_n := \{x \in M \cap A^c;\ d(x,A) \geq 1/n\}$. Atunci A_n este închisă, $A_n \subseteq A_{n+1}$ și $d(A_n,A) \geq 1/n$, $(\forall)\ n \geq 1$. Cum $d(M \cap A, A_n) \geq d(A, A_n) \geq 1/n$, $(\forall)\ n \geq 1$, și μ^* satisface condiția [C], rezultă:

$$\mu^*(M) \geq \mu^*((M \cap A) \cup A_n) = \mu^*(M \cap A) + \mu^*(A_n),\ (\forall)\ n \geq 1 \quad (3)$$

Șirul $(A_n)_{n\geq 1}$ fiind monoton crescător, rezultă că șirul numeric $(\mu^*(A_n))_{n\geq 1}$ este monoton crescător, deci are limită. Dacă arătam că inegalitatea $\lim\limits_{n\to\infty} \mu^*(A_n) \geq \mu^*(M \cap A^c)$ (4) este adevărată, din (3) $\wedge$ (4) rezultă că (2) este adevărată, deci (1) este adevărată.

Pentru a arăta (4) plecăm de la relația evidentă :

$$M \cap A^c = \bigcup_{k\geq n} A_k = A_n \cup \Big(\bigcup_{k\geq n} (A_{k+1} \setminus A_k)\Big),\ (\forall)\ n \geq 1$$

$\Big(\bigcup\limits_{k\geq n} A_k = \bigcup\limits_{k\geq 1} A_k \subseteq M \cap A^c$; reciproc, $(\forall) x \in M \cap A^c$, $(\exists)\varepsilon>0$, a.î. $A \cap B_X(x,\varepsilon)=\varnothing$, deci $d(x,A) \geq \varepsilon$ și deci $(\exists) n \geq 1$, cu $x \in A_n$, a.î. $M \cap A^c \subseteq \bigcup\limits_{k\geq n} A_k \Big)$, deci

$$\mu^*(M \cap A^c) \leq \mu^*(A_n) + \sum_{k\geq n}\mu^*(A_{k+1} \setminus A_k), (\forall)\, n \geq 1.$$

Dacă $\sum_{k\geq 1}\mu^*(A_{k+1} - A_k) < \infty$, rezultă relația:

$$\mu^*(M \cap A^c) \leq \lim_{n\to\infty} \mu^*(A_n) + \lim_{n\to\infty} \sum_{k\geq n}\mu^*(A_{k+1} \setminus A_k) = \lim_{n\to\infty} \mu^*(A_n),$$

şi cu aceasta, relația (4) este arătată.

In fine, să presupunem acum că avem $\sum_{k\geq n}\mu^*(A_{k+1} \setminus A_k) = \infty$. Plecăm atunci de la relațiile evidente:

$$\left.\begin{array}{l} A_1\cup(A_3\setminus A_2) \cup \ldots\cup (A_{2n-1}\setminus A_{2n-2}) \subseteq A_{2n};\ (A_2\setminus A_1) \cup\ldots\cup (A_{2n}\setminus A_{2n-1})\subseteq A_{2n} \\ d(A_{2k-1}\setminus A_{2k-2}\ ,\ A_{2k-3}\setminus A_{2k-4}) > 0\ ;\ d(A_{2k}\setminus A_{2k-1}\ ,\ A_{2k-2}\setminus A_{2k-3}) > 0 \end{array}\right\} (1)$$

(Intr-adevăr, fie $x\in A_{2k-1}\setminus A_{2k-2}$ şi $y\in A_{2k-3}\setminus A_{2k-4}$ fixați, deci $d(x,A)\geq 1/(2k-1)$ şi deoarece $y\in A_{2k-3} \subseteq M \cap A^c$ şi $y \notin A_{2k-4}$, $(\exists)z\in A$, cu $d(y,z)<1/(2k-4)$, de unde rezultă:

$$d(x,y) \geq d(y,z) - d(x,z) > 1/(2k-4) - 1/(2k-1)> 0,$$

încât:

$$d(A_{2k-1}\setminus A_{2k-2}\ ,\ A_{2k-3}\setminus A_{2k-4}) \geq 1/(2k-4) - 1/(2k-1)> 0, \text{ etc }).$$

Cum μ^* satisface condiția lui Caratheodory, din (1), deducem:

$2\mu^*(A_{2n}) \geq\mu^*(A_1) +\mu^*(A_2\setminus A_1) +\mu^*(A_3\setminus A_2) +\ldots+ \mu^*(A_{2n}\setminus A_{2n-1}) \to \infty, (n\to \infty)$, deci $\mu^*(A_{2n}) \to \infty\ (n \to \infty)$ şi deci $\mu^*(A_n) \to \infty\ (n \to \infty)$.

Aşadar, avem $\mu^*(M \cap A^c) \leq \infty = \lim_{n\to\infty} \mu^*(A_n)$.

Inegalitatea (4) este arătată şi cu aceasta teorema este demonstrată.

2.2.16. Definitie. Fie $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un quasi-spațiu cu măsură, i.e. X mulțime, $\mathscr{A}$ algebră pe X şi $\mu : \mathscr{A} \to \overline{\mathbf{R}}$ măsură. Se numeşte *măsura exterioară generată* de μ , o aplicație $\mu^* : 2^X \to \overline{\mathbf{R}}$ definită astfel:

$$\mu^* (A) := \inf \{ \sum_{n\geq 1}\mu (A_n)\ ;\ (A_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathscr{A},\ \bigcup_{n\geq 1} A_n \supseteq A\},\ A \in 2^X$$

(Din T.2.2.9. rezultă că μ^* este efectiv o măsură exterioară).

2.2.17. Teoremă (Hahn). *Fie $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un quasi-spațiu cu măsura $\mu^*: 2^X \to \mathbf{R}$, măsura exterioară generată de μ şi $\mathscr{A}^\wedge$ familia multimilor μ^*-măsurabile din X (Def.2.2.10.). Atunci 1^0)$(X, \mathscr{A}^\wedge, \hat{\mu})$, unde $\hat{\mu} =\mu^*/ \mathscr{A}^\wedge$, este un spațiu cu măsură(T.2.2.11),care majorează pe $(X,\mathscr{A},\mu)$, i.e. $\mathscr{A}\subseteq\mathscr{A}^\wedge$ şi $\hat{\mu}\, /_{\mathscr{A}}=\mu$; 2^0) Măsura $\hat{\mu}\, /_{\sigma a(\mathscr{A})}$ este o prelungire a lui μ; această prelungire este unică, dacă μ este σ-finită.*

Dem. 1^0) Fie $A \in \mathscr{A}$ fixat. Din definiția lui μ^*, rezultă $\mu^*(A) \le \mu(A)$. Presupunem cazul nebanal că $\mu^*(A)<\infty$ şi fie $\varepsilon>0$ fixat; atunci $(\exists)(A_n)_{n\ge1}\subseteq \mathscr{A}$, cu $\bigcup\limits_{n\ge1} A_n \supseteq A$ şi $\sum\limits_{n\ge1}\mu(A_n)\le \mu^*(A)+\varepsilon$. Evident avem: $A=\bigcup\limits_{n\ge1}(A \cap A_n)$, deci μ fiind numerabil subaditivă, rezultă:

$$\mu(A) \le \sum_{n\ge1}\mu(A \cap A_n) \le \sum_{n\ge1}\mu(A_n) \le \mu^*(A) + \varepsilon$$

şi cum $\varepsilon > o$ a fost arbitrar, rezultă $\mu(A) \le \mu^*(A)$. Am obținut astfel că $\mu(A) = \mu^*(A)$, deci $\mu^* |_{\mathscr{A}} = \mu$.

Fixăm din nou $A \in \mathscr{A}$ şi să arătăm inegalitatea:

$$\mu^*(M) \ge \mu^*(M \cap A) + \mu^*(M \cap A^c), (\forall)\, M \subseteq X.$$

Fie, în acest scop, $\varepsilon>0$ şi $M\subseteq X$ fixați şi să presupunem cazul nebanal că $\mu^*(M)< \infty$. Din definiția lui μ^* rezultă: $(\exists)\ (A_n)_{n\ge1} \subseteq \mathscr{A}$, cu $\bigcup\limits_{n\ge1} A_n \supseteq M$ şi $\sum\limits_{n\ge1}\mu(A_n)\le\mu^*(M)+\varepsilon$. Deoarece $M\cap A \subseteq\bigcup\limits_{n\ge1}(A_n\cap A)$ şi $M\cap A^c\subseteq\bigcup\limits_{n\ge1}(A_n\cap A^c)$, iar μ^* este numerabil subaditivă, rezultă:

$$\mu^*(M \cap A) \le \sum_{n\ge1}\mu^*(A_n \cap A),\ \mu^*(M \cap A^c) \le \sum_{n\ge1}\mu^*(A_n \cap A^c),$$

deci

$$\mu^*(M \cap A) + \mu^*(M \cap A^c) \le \sum_{n\ge1}(\mu^*(A_n \cap A) +\mu^*(A_n \cap A^c)) =$$

$$= \sum_{n\ge1}(\mu(A_n \cap A) + \mu(A_n \cap A^c)) = \sum_{n\ge1}\mu(A_n) \le \mu^*(M) + \varepsilon$$

şi deci $\mu^*(M \cap A) + \mu^*(M \cap A^c) \le \mu^*(M)$, ceea ce înseamnă că A este μ^* - măsurabilă, i.e $A \in \mathscr{A}^\wedge$, încât $\mathscr{A}\subseteq\mathscr{A}^\wedge$.

2^0) Din 1^0) avem că $(X, \mathscr{A}^\wedge, \hat{\mu})$ este un spațiu cu măsură care extinde pe $(X, \mathscr{A}, \mu)$, deci $(X, \sigma a(\mathscr{A}), \hat{\mu}|_{\sigma a(\mathscr{A})})$ este un spațiu cu măsură care extinde pe $(X, \mathscr{A}, \mu)$.

Presupunem acum μ σ-finită şi fie ν o măsură pe $\sigma a(\mathscr{A})$ care prelungeşte pe μ; să arătăm că $\nu(A)= \hat{\mu}(A)$, $(\forall)A\in\sigma a(\mathscr{A})$ (1). Deoarece μ este σ-finită, $(\exists)(B_n)_{n\ge1} \subseteq \mathscr{A}$, mutual disjunct,cu $\bigcup\limits_{n\ge1} B_n =X$ & cu $\mu(B_n)<+\infty$, $(\forall)n \ge 1$.Cum avem $A=\bigcup\limits_{n\ge1}(A\cap B_n)$, $(\forall)A\in\sigma a(\mathscr{A})$, rezultă:

$$\hat{\mu}(A) = \sum_{n\ge1}\hat{\mu}(A \cap B_n),\ \nu(A) = \sum_{n\ge1}\nu(A \cap B_n),\ (\forall)\ A \in \sigma a(\mathscr{A}),$$

deci

$$\hat{\mu} = \nu \Leftrightarrow \hat{\mu}(A \cap B_n) = \nu(A \cap B_n), (\forall)\ n \geq 1, (\forall)\ A \in \sigma a(\mathscr{A}).$$

Insă,

$$\hat{\mu}\ (A \cap B_n) \leq \hat{\mu}\ (B_n) = \mu(B_n) < \infty, (\forall)\ n \geq 1, (\forall)\ A \in \sigma a(\mathscr{A}).$$

Aşadar, este suficient să arătăm (1) pentru orice $A \in \sigma a(\mathscr{A})$, cu $\hat{\mu}(A) < +\infty$; să fixăm o asemenea mulţime. Atunci,

$$(\forall)\ \varepsilon > 0, (\exists)\ (A_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathscr{A}, \text{ a.î. } B := \bigcup_{n\geq 1} A_n \supseteq A\ \&\ \sum_{n\geq 1} \mu(A_n) \leq \hat{\mu}(A) + \varepsilon,$$

deci

$$B \in \sigma a(\mathscr{A}) \subseteq \mathscr{A}^{\wedge}\ \&\ \hat{\mu}\ (B) \leq \sum_{n\geq 1} \hat{\mu}\ (A_n) = \sum_{n\geq 1} \mu(A_n) \leq \hat{\mu}\ (A) + \varepsilon.$$

Pe de o parte, avem:

$$\nu(A) \leq \nu(\bigcup_{n\geq 1} A_n) \leq \sum_{n\geq 1} \nu(A_n) = \sum_{n\geq 1} \mu(A_n) \leq \hat{\mu}\ (A) + \varepsilon,$$

deci, cum $\varepsilon > 0$ a fost arbitrar, rezultă $\nu(A) \leq \hat{\mu}(A)$.

Pe de alta parte, avem (2.2.4) $\hat{\mu}(B \setminus A) = \hat{\mu}(B) - \hat{\mu}(A) \leq \varepsilon$ şi $\hat{\mu}(A_n) = \nu(A_n)$, $(\forall) n \geq 1$, de unde deducem (2.2.6.), presupunând şirul $(A_n)_{n\geq 1}$ ascendent, că $\hat{\mu}(\bigcup_{n\geq 1} A_n) = \nu(\bigcup_{n\geq 1} A_n)$, deci $\hat{\mu}(B) = \nu(B)$ şi deci,

$$\hat{\mu}(A) \leq \hat{\mu}(B) = \nu(B) = \nu(A) + \nu(B \setminus A) \leq \nu(A) + \hat{\mu}(B \setminus A) \leq \nu(A) + \varepsilon.$$

Cum $\varepsilon > 0$ a fost arbitrar, rezultă $\hat{\mu}(A) \leq \nu(A)$, prin urmare $\hat{\mu}(A) = \nu(A)$ şi teorema este demonstrată.

2.2.18. Definiţie. Fie $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un quasi-spaţiu cu măsură. Atunci spaţiul cu măsură $(X, \mathscr{A}^{\wedge}, \hat{\mu})$ se numeşte *extensiunea (prelungirea) standard* a lui $(X, \mathscr{A}, \mu)$.

Corolar 1. *Fie $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un quasi-spaţiu cu măsură. Atunci extensiunea standard a lui $(X, \mathscr{A}, \mu)$ este un spaţiu cu măsură completă.*

Dem. Aplicăm T.2.2.17. şi T.2.2.11., Cor.1.

Corolar 2. *Fie $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un quasi-spaţiu cu măsură σ-finită şi μ^* măsura exterioară pe X generată de μ. Atunci, tripletul $(X, \sigma a(\mathscr{A}), \mu^* /_{\sigma a(\mathscr{A})})$ este un spaţiu cu măsura σ-finită şi $\mu^* /_{\sigma a(\mathscr{A})}$ este unica măsură pe $\sigma a(\mathscr{A})$ care prelungeşte pe μ.*

Observaţie. Extensiunea *standard* a unui quasi-spaţiu cu măsură $(X, \mathscr{A}, \mu)$ se obţine astfel: definim măsura exterioară $\mu^*: 2^X \to \overline{\mathbf{R}}$ determinată de tripletul $(X, \mathscr{A}, \mu)$; considerăm familia $\mathscr{A}^{\wedge}$ a mulţimilor μ^*-măsurabile din X; definim $\hat{\mu}:=\mu^*|_{\mathscr{A}^\wedge}$ .Tripletul $(X,\mathscr{A}^\wedge,\hat{\mu})$ *constituie extensiunea standard a lui* $(X,\mathscr{A},\mu)$.

2.2.19. Definiție. Fie $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un spațiu cu măsură. O mulțime $A\subseteq X$ se numeste *μ-neglijabilă*, dacă are proprietatea :

$$(\forall)\varepsilon > 0, (\exists)\ (A_n)_{n\geq 1}\subseteq\mathscr{A}, \text{ a.î.} \bigcup_{n\geq 1} A_n \supseteq A \ \&\ \sum_{n\geq 1}\mu(A_n) < \varepsilon.$$

2.2.20. Propoziție. *Fie $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un spațiu cu măsură și $A \subseteq X$ o mulțime. Atunci, condițiile 1^0) - 3^0) sunt echivalente:*

1^0) A μ-neglijabilă; 2^0) $(\exists)$ $B \in \mathscr{A}$ a.î. $B \supseteq A$ & $\mu(B) = 0$.

3^0) Măsura exterioară a lui A este nulă, i.e. $\mu^*(A)=0$;

Dem. $1^0) \Leftrightarrow 2^0)$; $1^0) \Leftrightarrow (\forall)\ \varepsilon>0, (\exists)\ (A_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathscr{A}$, cu $\bigcup_{n\geq 1} A_n \supseteq A$ & $\sum_{n\geq 1}\mu(A_n) < \varepsilon \Leftrightarrow (\forall)\ \varepsilon>0, \mu^*(A) < \varepsilon \Leftrightarrow \mu^*(A)=0 \Leftrightarrow 2^0)$.

$3^0) \Rightarrow 2^0)$ Fie $n\geq 1$. Cf. $3^0)$ $(\exists)\ (A_n^k)_{k\geq 1} \subseteq\mathscr{A}$, a.î. $B_n := \bigcup_{k\geq 1} A_n^k \supseteq A$ & $\sum_{k\geq 1}\mu(A_n^k) \leq 1/n$. Atunci, $B := \bigcap_{n\geq 1} B_n \in \mathscr{A}$, $B \supseteq A$ și avem:

$$\mu(B) \leq \mu(B_n) \leq \sum_{k\geq 1}\mu(A_n^k) \leq 1/n,\ (\forall)\ n\geq 1,$$

deci $\mu(B) = 0$. Prin urmare $(\exists)$ $B \in\mathscr{A}$, cu $B \supseteq A$ & $\mu(B) = 0$.

$2^0)\Rightarrow 3^0)$ Cf. $2^0)$ $(\exists) B\in \mathscr{A}$,a.î. $B\supseteq A$ și $\mu(B)=0$. Atunci $\mu^*(B) \geq \mu^*(A)$ și cum $\mu^*(B) = \mu(B)$ (T 2.2.17.), rezultă $\mu^*(A)=0$.

Corolar 1.*Fie $(X,\mathscr{A},\mu)$ un spațiu cu măsură. Atunci au loc afirmațiile:*

1^0) $(\forall)$ $B \subseteq X$ neglijabilă și $A \subseteq B$, rezultă A neglijabilă;

2^0) $(\forall)$ $A \in \mathscr{A}$, cu $\mu(A)=0$, rezultă A neglijabilă;

3^0) $(\forall)$ $(A_n)_{n\geq 1} \subseteq 2^X$, un șir de multimi neglijabile, rezultă că mulțimea $A:=\bigcup_{k\geq 1} A_k$ este neglijabilă.

Dem. 1^0) Din P.2.2.19. rezultă $\mu^*(B) = 0$, deci $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)=0$ și deci $\mu^*(A)=0$. Prin urmare, A neglijabilă.

2^0) Deoarece $\mu^*(A) = \mu(A)$, rezultă $\mu^*(A)=0$, deci (P.2.2.19), A neglijabilă.

3^0)Din P.2.2.19. rezultă $\mu^*(A_n)=0, (\forall) n\geq 1$, deci $\mu^*(A)\leq \sum_{n\geq 1} \mu^*(A_n)=0$ și deci $\mu^*(A)=0$. Cf. P.2.2.19. rezultă A neglijabilă.

Observaţie. *Nu orice mulţime μ-neglijabilă dintr-un spaţiu cu măsură* $(X, \mathscr{A}, \mu)$ *aparţine lui* $\mathscr{A}$.

Fie, spre exemplu, spaţiul cu măsură $(\mathbf{R}, \mathscr{B}_{\mathbf{R}}, \beta)$, unde β - măsura Borel şi fie $K \subseteq \mathbf{R}$ mulţimea lui Cantor. Atunci, $2^K \not\subseteq \mathscr{B}_{\mathbf{R}}$ (Ex. 2.77.), deci $(\exists) A \subseteq K$ şi $A \notin \mathscr{B}_{\mathbf{R}}$. Însă $\beta^*(A) \leq \beta^*(K) = \lambda^*(B) = \lambda(B) = 0$, deci A β-neglijabilă.

2.2.21. Definiţie. Fie $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un spaţiu cu măsură. Vom spune că $(X, \mathscr{A}, \mu)$ este *spaţiu cu măsură completă*, dacă orice mulţime μ-neglijabilă din X aparţine lui $\mathscr{A}$, i.e.$(\forall) A \subseteq X$, cu $\mu^*(A) = 0$, rezultă $A \in \mathscr{A}$.

a)Fie $(X, \mathscr{A}, \mu)$ spaţiu cu măsură completă şi $A \subseteq X$. Atunci A μ-neglijabilă $\Leftrightarrow A \in \mathscr{A}$ şi $\mu(A) = 0$.

b) Fie $(X, \mathscr{A}, \mu)$ spaţiu cu măsură. Atunci μ completă $\Leftrightarrow (\forall)\ A \subseteq B \in \mathscr{A}$ şi $\mu(B)=0$, rezultă $A \in \mathscr{A}$, i.e. $2^B \subseteq \mathscr{A}$.

c) Măsura Lebesgue $\lambda : \mathscr{L}_{\mathbf{R}} \to \overline{\mathbf{R}}$ este completă, în timp ce măsura Borel, $\beta := \lambda \mid \mathscr{B}_{\mathbf{R}}$ este incompletă (Ex. 2.77,Cor.2.).

2.2.22. Definiţie. Fie $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un spaţiu cu măsură. Vom spune că spaţiul cu măsură $(X, \widetilde{\mathscr{A}}, \widetilde{\mu})$ este o *extensiune (prelungire, majorant)* al lui $(X, \mathscr{A}, \mu)$, dacă $\mathscr{A} \subseteq \widetilde{\mathscr{A}}$ şi $\widetilde{\mu}\ |_{\mathscr{A}} = \mu$. Cel mai mic spaţiu cu măsură completă $(X, \widetilde{\mathscr{A}}, \widetilde{\mu})$ care extinde (prelungeşte) pe $(X, \mathscr{A}, \mu)$ se numeşte *completatul* lui $(X, \mathscr{A}, \mu)$; se mai spune că $\widetilde{\mu}$ este o *prelungire completă* a lui μ.

2.2.23. Teoremă (Orice spaţiu cu măsură este completabil).*Fie* $(X, \mathscr{A}, \mu)$ *un spaţiu cu măsură incompletă. Atunci completatul lui* $(X, \mathscr{A}, \mu)$ *este egal cu* $(X, \widetilde{\mathscr{A}}, \widetilde{\mu})$, *unde* $\widetilde{\mathscr{A}} = \{A \cup N;\ A \in \mathscr{A},\ N \subseteq B \in \mathscr{A},\ \mu(B) = 0\}$ *şi* $\widetilde{\mu}(A \cup N) = \mu(A),\ (\forall)\ A \cup N \in \widetilde{\mathscr{A}}$.

Dem. Fie $A \in \mathscr{A}$ şi $N \subseteq B \in \mathscr{A}$ cu $\mu(B)=0$, fixaţi. Atunci, $X \setminus (A \cup N) = (X \setminus A) \cap ((X \setminus B) \cup (B \setminus N)) = (X \setminus (A \cup B)) \cup (B \setminus (A \cup N)) \in \mathscr{A}$, deoarece $X \setminus (A \cup B) \in \mathscr{A}$ şi $B \setminus (A \cup N) \subseteq B$.

Fie acum şirul $(A_k \cup N_k)_{k \geq 1} \subseteq \widetilde{\mathscr{A}}$ fixat, deci $(A_k)_{k \geq 1} \subseteq \mathscr{A}$ şi $(\exists)$ $(B_k)_{k \geq 1} \subseteq \mathscr{A}$, a.î. $N_k \subseteq B_k$ şi $\mu(B_k)=0$, $(\forall)\ k \geq 1$. Atunci :

$$A := \bigcup_{k \geq 1} A_k \in \mathscr{A},\ B := \bigcup_{k \geq 1} B_k \in \mathscr{A},\ \mu(B) \leq \sum_{k \geq 1} \mu(B_k) = 0,\ N := \bigcup_{k \geq 1} N_k \subseteq B,$$

deci $$\bigcup_{k \geq 1} (A_k \cup N_k) = \Big(\bigcup_{k \geq 1} A_k\Big) \cup \Big(\bigcup_{k \geq 1} N_k\Big) = A \cup N \in \widetilde{\mathscr{A}}.$$

Aşadar, $\widetilde{\mathscr{A}}$ este o algebră pe X.

Dacă şirul $(A_k \cap N_k)_{k\geq 1}$, considerat mai sus, este mutual disjunct, atunci şirul $(A_k)_{k\geq 1}$ este mutual disjunct, deci:

$$\widetilde{\mu}\ (\bigcup_{k\geq 1}(A_k \cup N_k)) = \widetilde{\mu}\,(A \cup N) = \mu(A) = \sum_{k\geq 1}\mu(A_k) = \sum_{k\geq 1}\ \widetilde{\mu}\ (A_k \cup N_k).$$

Cum avem $\widetilde{\mu} \geq 0$ şi $\widetilde{\mu}\,(\varnothing) = 0$, conchidem că $\widetilde{\mu}$ este o măsură definită pe $\widetilde{\mathscr{A}}$. Evident, $\widetilde{\mu}\,\big|_{\mathscr{A}} = \mu$. Să arătăm că $\widetilde{\mu}$ este completă. Fie, în acest scop, $C \subseteq A \cup N \in \widetilde{\mathscr{A}}$, cu $\widetilde{\mu}\,(A \cup N) = 0$, fixaţi. Atunci $\mu(A) = 0$ şi $N \subseteq B \in \mathscr{A}$ cu $\mu(B) = 0$, deci $C \subseteq A \cup B \in \mathscr{A}$ şi $\mu(A \cup B) = 0$ şi deci $C \in \widetilde{\mathscr{A}}$, încât $\widetilde{\mu}$ este completă.

Să presupunem acum că $(X, \mathscr{A}_1, \mu_1)$ este un spaţiu cu măsură completă care majorează pe $(X, \mathscr{A}, \mu)$ şi să arătăm că $\widetilde{\mathscr{A}} \subseteq \mathscr{A}_1$ şi $\mu_1 \big|_{\widetilde{\mathscr{A}}} = \widetilde{\mu}$.

Fie, în acest scop $A \cup N \in \widetilde{\mathscr{A}}$ fixat, deci $A \in \mathscr{A} \subseteq \mathscr{A}_1$ şi $N \subseteq B \in \mathscr{A}$, cu $\mu(B)=0$. Atunci, $\mu_1(B)=\mu(B)=0$, deci μ_1 fiind completă, rezultă $N \in \mathscr{A}_1$ şi deci $A \cup N \in \mathscr{A}_1$. In plus, avem:

$$\mu_1(A \cup N) = \mu_1(A \cup (A \setminus N)) = \mu_1(A) + \mu_1(A \setminus N) = \mu(A) = \widetilde{\mu}\,(A \cup N).$$

Aşadar, avem $\widetilde{\mathscr{A}} \subseteq \mathscr{A}_1$ şi $\mu_1 \big|_{\widetilde{\mathscr{A}}} = \widetilde{\mu}$. Prin urmare $(X, \widetilde{\mathscr{A}}, \widetilde{\mu})$ este cel mai mic spaţiu cu măsură completă care majorează pe $(X, \mathscr{A}, \mu)$.

Corolar 1. *Fie $(X,\mathscr{A},\mu)$ un spaţiu cu măsură. Atunci completatul lui $(X,\mathscr{A},\mu)$ coincide cu $(X,\mathscr{A}_1,\mu_1)$, unde :*

$$\mathscr{A}_1 := \{A\ \Delta\ N;\ A \in \mathscr{A},\ N \subseteq B \in \mathscr{A},\ \mu(B) = 0\} \quad \text{şi}$$

$$\mu_1(A\ \Delta\ N) = \mu(A),\ (\forall)\ A\ \Delta\ N \in \mathscr{A}_1.$$

Observaţie. *Corolarul 1 poate fi reformulat astfel: completatul lui* $(X, \mathscr{A}, \mu)$ *coincide cu tripletul* $(X, \mathscr{A}_1, \mu_1)$, *unde* $\mathscr{A}_1 = \mathscr{A}\ \Delta\ \mathscr{N}$, $\mathscr{N}$ *fiind familia mulţimilor μ-neglijabile din* X *şi* $\mu_1\,(A\ \Delta\ N) = \mu\,(A), (\forall) A\ \Delta\ N \in \mathscr{A}_1$.

2.2.24. Teoremă. *Fie $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un spaţiu cu măsură σ-finită. Atunci extensiunea Caratheodory a lui $(X,\mathscr{A},\mu)$ coincide cu completatul lui $(X,\mathscr{A},\mu)$, i.e. $(X, \mathscr{A}^{\wedge}, \hat{\mu}) = (X, \widetilde{\mathscr{A}}, \widetilde{\mu})$ (Def. 2.2.18.)& (T. 2.2.23.).*

Dem. Reamintim că $\mathscr{A}^{\wedge}$ este familia multimilor μ^* - măsurabile din X (μ^* - măsura exterioară generată de μ),

$$\hat{\mu} = \mu^* \big|\, \mathscr{A}^{\wedge},\ \widetilde{\mathscr{A}} = \{A \cup N;\ A \in \mathscr{A},\ N \subseteq B \in \mathscr{A},\ \mu(B)=0\} \text{ şi } \widetilde{\mu}\,(A \cup N) = \mu(A).$$

Deoarece $(X, \mathscr{A}^{\wedge}, \hat{\mu})$ este un spațiu cu măsură completă care majorează pe $(X, \mathscr{A}, \mu)$, rezultă că $(X, \mathscr{A}^{\wedge}, \hat{\mu})$ majorează și pe $(X, \widetilde{\mathscr{A}}, \widetilde{\mu})$.

Reciproc, fie $A \in \mathscr{A}^{\wedge}$, cu $\hat{\mu}(A) < +\infty$. Atunci, $\mu^*(A) = \hat{\mu}(A) < +\infty$, deci $(\forall)\ n \geq 1$, $(\exists)\ (A_{nk})_{k\geq 1} \subseteq \mathscr{A}$, cu $B_n := \bigcup_{k\geq 1} A_{nk} \supseteq A$ & $\sum_{k\geq 1} \mu(A_{nk}) \leq \mu^*(A) + 1/n$.

Punem $B := \bigcap_{n\geq 1} B_n$ și observăm că $B_n, B \in \mathscr{A}$ și $A \subseteq B \subseteq B_n$, $(\forall)\ n \geq 1$, deci

$$\hat{\mu}(A) \leq \hat{\mu}(B) \leq \hat{\mu}(B_n) = \mu(B_n) \leq \sum_{k\geq 1} \mu(A_{nk}) \leq \mu^*(A) + 1/n,\ (\forall)\ n \geq 1,$$

deci $\quad \hat{\mu}(A) \leq \mu(B) \leq \hat{\mu}(A) + 1/n,\ (\forall)\ n \geq 1 \Leftrightarrow \hat{\mu}(A) = \mu(B)$.

Cum $\hat{\mu}(A) < +\infty$, avem (P 2.2.24), $\hat{\mu}(B \setminus A) = \hat{\mu}(B) - \hat{\mu}(A) = 0$.

Dacă reluăm acum raționamentul de mai sus pentru $B \setminus A$ în loc de A, deducem că $(\exists)\ C \in \mathscr{A}$, cu $C \supseteq B \setminus A$ și $\mu(C) = \hat{\mu}(B \setminus A) = 0$, deci $B \setminus A$ este μ-neglijabilă și deci $B \setminus A \in \widetilde{\mathscr{A}}$. Cum $B \in \mathscr{A} \subseteq \widetilde{\mathscr{A}}$ și $\widetilde{\mathscr{A}}$ algebră, conchidem că $A = B \setminus (B \setminus A) \in \widetilde{\mathscr{A}}$. Așadar, $(\forall) A \in \mathscr{A}^{\wedge}$, cu $\hat{\mu}(A) < +\infty$, rezultă că $A \in \widetilde{\mathscr{A}}$ (1).

Fie acum $A \in \mathscr{A}^{\wedge}$ arbitrar. Măsura μ fiind σ-finită, $(\exists)\ (C_n)_{n\geq 1}$ o partiție a lui X, cu mulțimi din $\mathscr{A}$, a.î. $\mu(C_n) < +\infty$, $(\forall)\ n \geq 1$. Atunci,

$$A = \bigcup_{n\geq 1} (A \cap C_n)\ \&\ \hat{\mu}(A \cap C_n) \leq \hat{\mu}(C_n) = \mu(C_n) < +\infty,\ (\forall)\ n \geq 1,$$

deci (cf.(1)) $A \cap C_n \in \widetilde{\mathscr{A}}$, $(\forall)\ n \geq 1$ și deci, $\widetilde{\mathscr{A}}$ fiind σ-algebră, rezultă $A \in \widetilde{\mathscr{A}}$, încât $\mathscr{A}^{\wedge} \subseteq \widetilde{\mathscr{A}}$.

Prin urmare, $(X, \mathscr{A}^{\wedge}, \hat{\mu}) = (X, \widetilde{\mathscr{A}}, \widetilde{\mu})$ și teorema este demonstrată.

2.2.25. Propoziție. *Fie $(X, \mathscr{A})$ un spațiu măsurabil și $\mu_n : \mathscr{A} \to \overline{\mathbf{R}}$ $(n \geq 1)$ un șir monoton crescător de măsuri. Atunci $\mu := \lim_{n\to\infty} \mu_n$ este o măsură.*

Dem. Evident $\mu \geq 0$ și $\mu(\varnothing) = 0$. Fie acum $A, B \in \mathscr{A}$, disjuncte, fixate. Atunci

$$\mu(A \cup B) = \lim_{n\to\infty} \mu_n(A \cup B) = \lim_{n\to\infty} \mu_n(A) + \lim_{n\to\infty} \mu_n(B) = \mu(A) + \mu(B)$$

Așadar, μ este o măsură aditivă.

Fie, mai departe, $(A_j)_{j\geq 1} \subseteq \mathscr{A}$ un șir monoton crescător și $A := \lim_{n\to\infty} A_j$.

Șirurile $(\mu_n)_{n\geq 1}$ și $(A_j)_{j\geq 1}$ fiind monoton crescătoare avem:

$$\mu(A) = \sup_{n\geq 1} \mu_n(A) = \sup_{n\geq 1} (\sup_{j\geq 1} \mu(A_j)) = \sup_{j\geq 1} (\sup_{n\geq 1} \mu_n(A_j)) = \sup_{j\geq 1} \mu(A_j) = \lim_{j\to\infty} \mu(A_j).$$

Prin urmare (P 2.2.7.) μ este o măsură.

Corolar 1. *Fie $(X,\mathscr{A})$ un spaţiu măsurabil şi $\mu_n : \mathscr{A} \to \overline{\mathbf{R}}$ $(n \geq 1)$ un şir de măsuri. Atunci $\mu := \sum_{n\geq 1} \mu_n$ este o măsură.*

Dem. Aplicăm P.2.2.25., ţinând seama că $(\sum_{i=1}^{n} \mu_i)_{n\geq 1}$ este un şir monoton crescător de măsuri, care are limita μ.

Corolar 2. *Fie $(X, \mathscr{A})$ un spaţiu măsurabil şi $\mu_n: \mathscr{A} \to \mathbf{R}$ $(n\geq 1)$ un şir monoton descrescător de măsuri finite.Atunci $\mu = \lim_{n\to\infty} \mu_n$ este o măsură finită.*

Dem. Să observăm, în prealabil, că $(\forall)\mu,\nu: \mathscr{A} \to \mathbf{R}$, două măsuri finite, cu $\mu \geq \nu$, rezultă că $\mu - \nu$ este măsură. Revenind la enunţ , observăm că $(\mu_1 - \mu_n)_{n\geq 1}$ este un şir monoton crescător de măsuri finite, deci (P.2.2.25.) $\mu_1 - \mu = \lim_{n\to\infty} (\mu_1 - \mu_n)$ este o măsură. Cum $\mu \leq \mu_1 < \infty$, rezultă $\mu_1 - \mu < \infty$.

Prin urmare $\mu = \mu_1 - (\mu_1 - \mu)$ este o măsură finită.

Observaţie. Măsura μ din P.2.2.25. are proprietăţile: i)μ finită$\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \sup_{n\geq 1} \mu_n < \infty$; ii) Dacă $(\exists)$ $m \geq 1$, cu μ_m completă, atunci μ completă.

2.2.26. Definiţie. Fie$(X,\mathscr{A})$ un spaţiu masurabil. O aplicaţie $\nu: \mathscr{A} \to \overline{\mathbf{R}}$ se numeşte *măsură generalizată* dacă are proprietăţile:

1^0) $\nu(\emptyset) = 0$; 2^0) ν este numerabil aditivă.

3^0) $\nu(A) \in \overline{\mathbf{R}}^*$, $(\forall)$ $A \in \mathscr{A}$, unde $\overline{\mathbf{R}}^*$ este $[-\infty, \infty)$ sau $(-\infty, \infty]$;

2.2.27. Definiţie. Fie $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un spaţiu cu măsură. O aplicaţie $\nu: \mathscr{A} \to \overline{\mathbf{R}}$ se numeşte *absolut continuă în raport cu μ* şi se notează cu $\nu << \mu$, dacă aplicaţia id.: $(\mathscr{A}, \mu) \to (\mathscr{A}, \nu)$ este absolut continuă, i.e. $(\forall)\varepsilon>0$, $(\exists)$ $\eta>0$, a.î. $|\nu(A)| < \varepsilon$, $(\forall)A \in \mathscr{A}$, $\mu(A) < \eta$.

2.2.28. Propoziţie. *Fie $(X,\mathscr{A},\mu)$ un spaţiu cu măsură finită şi $\nu : \mathscr{A} \to \overline{\mathbf{R}}$ o măsură. Atunci:*

$\nu << \mu \Leftrightarrow id:(\mathscr{A}, \mu) \to (\mathscr{A}, \nu)$ invariază mulţimile neglijabile.

Dem. $(\Rightarrow)$ Fie $A \in \mathscr{A}$, cu $\mu(A) = 0$. Atunci $(\forall)$ $n \geq 1$, rezultă că $\nu(A) \leq 1/n$, deci $\nu(A)=0$, q.e.d.

$(\Leftarrow)$ Presupunem că id. nu este absolut continuă. Atunci $(\exists)$ $\varepsilon > 0$, cu proprietatea:

$$(\forall)\ n \geq 1,\ (\exists)\ A_n \in \mathscr{A},\ \text{a.î. } \mu(A_n) \leq 1/2^n\ \&\ \nu(A_n) \geq \varepsilon.$$

Fie $A := \varliminf_{n\to\infty} A_n$, i.e. $\bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{k\geq n} A_k$. Atunci, $(\forall)\ n \geq 1$, avem:

$$\mu(A) \leq \mu\left(\bigcup_{k\geq n} A_k\right) \leq \sum_{k\geq n}\mu(A_k) \leq \sum_{k\geq n} 1/2^k \leq 1/2^{n+1},$$

de unde rezultă $\mu(A) = 0$, i.e. A este μ-neglijabilă.

Pe de altă parte avem:

$$\nu(A) \geq \inf_{n\geq 1} \nu\left(\bigcup_{k\geq n} A_k\right) \geq \inf_{n\geq 1} \nu(A_n) \geq \varepsilon,$$

deci $\nu(A) \geq \varepsilon$ şi deci A nu este ν-neglijabilă, absurd.

Prin urmare id. este o aplicaţie absolut continuă.

2.3. Măsura Lebesgue pe R şi $\mathbf{R}^m$ $(m \geq 1)$

Am notat în Cap.1. prin $\mathfrak{I}_{\mathbf{R}^m}$, $\mathfrak{I}^0_{\mathbf{R}^m}$, $\mathfrak{I}^c_{\mathbf{R}^m}$, $\mathfrak{I}^d_{\mathbf{R}^m}$, $\mathfrak{I}^i_{\mathbf{R}^m}$, familia *tuturor intervalelor, a intervalelor mărginite, compacte, deschise, resp. închise* din $\mathbf{R}^m$.Cu ℓ_m (I) sau ℓ (I) am notat lungimea (n-dimensională) a unui interval $I\in\mathfrak{I}_{\mathbf{R}^m}$. Analog, prin $\mathscr{E}_{\mathbf{R}^m}$, $\mathscr{E}^0_{\mathbf{R}^m}$, $\mathscr{E}^c_{\mathbf{R}^m}$, $\mathscr{E}^d_{\mathbf{R}^m}$, $\mathscr{E}^i_{\mathbf{R}^m}$ am notat familia *tuturor mulţimilor elementare, a mulţimilor elementare mărginite, compacte, deschise, resp. închise* din $\mathbf{R}^m$ şi cu $\sigma_m(E)$ sau $\sigma(E)$ *aria* (m - *dimensională*) a unei multimi elementare $E\in\mathscr{E}_{\mathbf{R}^m}$. Folosim, în continuare, rezultatele cunoscute din Cap. 1, Secţiunea 1.3.

2.3.1. Teoremă. *Tripletul* $(\mathbf{R}^m, \mathscr{E}_{\mathbf{R}^m}, \sigma_m)$ *are proprietăţile:*

1^0) $\mathscr{E}_{\mathbf{R}^m}$ algebră pe $\mathbf{R}^m$;

2^0) $\sigma_m : \mathscr{E}_{\mathbf{R}^m} \to \overline{\mathbf{R}}$ măsură (numerabil aditivă) σ-finită, invariantă la translaţie.

Dem. 1^0) În prealabil, reamintim afirmaţia:

$$(\forall)\ I, J\in \mathfrak{I}_{\mathbf{R}^m},\ \text{rezultă } I \cap J \in \mathfrak{I}_{\mathbf{R}^m}\ \&\ I\setminus J\in\mathscr{E}_{\mathbf{R}^m} \qquad (1)$$

Să arătăm că $\mathscr{E}_{\mathbf{R}^m}$ este inel pe $\mathbf{R}^m$. Fie deci $E, F\in\mathscr{E}_{\mathbf{R}^m}$ şi $E := \bigcup_{h=1}^{p} I_h$, $F := \bigcup_{k=1}^{q} I_k$, reprezentări canonice ale lui E, resp.F. Evident $E\cup F\in\mathscr{E}_{\mathbf{R}^m}$,

$$E\cap F = \left(\bigcup_{k=1}^{p} I_h\right)\cap\left(\bigcup_{k=1}^{q} J_k\right) = \bigcup_{h,k}(I_h \cap J_k) \in \mathscr{E}_{\mathbf{R}^m}\ (\text{cf. } 1)),$$

deci

$$E \setminus F = \left(\bigcup_{h=1}^{p} I_h\right) \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{q} J_k\right) = \bigcup_{h=1}^{p}\left(\bigcap_{k=1}^{q}(I_h \setminus J_k)\right) \in \mathscr{E}_{\mathbf{R}}.$$

Cum, evident, $\mathbf{R}^m \in \mathscr{E}_{\mathbf{R}^m}$, conchidem că $\mathscr{E}_{\mathbf{R}^m}$ este algebră pe $\mathbf{R}^m$.

2^0) $(\forall) E \in \mathscr{E}_{\mathbf{R}^m}$ şi $E = \bigcup_{k=1}^{n} I_k$ o reprezentare canonică a lui E, să definim $\sigma_m(E) := \sum_{k=1}^{n} \ell_m(I_k)$; notăm ℓ_m şi σ_m prin ℓ, resp. σ. Să arătăm că definiţia funcţiei σ este coerentă. Fie, în acest scop, $E = \bigcup_{h=1}^{p} I_h$ şi $E = \bigcup_{k=1}^{q} J_k$, două reprezentari canonice ale lui E. Evident, avem:

$$I_h = E \cap I_h = \sum_{k=1}^{q}(J_k \cap I_h), \text{ deci } \ell(I_h) = \sum_{h=1}^{q} \ell(J_h \cap I_k),$$

deci $\sum_{h=1}^{p} \ell(J_h) = \sum_{h=1}^{p}\sum_{k=1}^{q} \ell(J_h \cap I_k)$. Analog obţinem $\sum_{k=1}^{q} \ell(I_k) = \sum_{k=1}^{q}\sum_{h=1}^{p} \ell(I_k \cap J_h)$, deci $\sum_{k=1}^{p} \ell(I_h) = \sum_{k=1}^{q} \ell(J_k)$. Aşadar, definiţia lui σ este coerentă. Evident $\sigma(\emptyset)=0$ şi $\sigma \geq 0$. Fie acum E, F $\in \mathscr{E}_{\mathbf{R}^m}$, disjuncte, şi $E = \bigcup_{h=1}^{p} I_h$, $F = \bigcup_{k=1}^{q} J_k$, două reprezentări canonice ale lui E, resp. F. Cum $I^h \cap J^k = \emptyset$, $(\forall)(h, k) \in \overline{1,p} \times \overline{1,q}$, rezultă, în virtutea coerenţei funcţiei σ, că avem:

$$\sigma(E \cup F) = \sigma\left(\left(\bigcup_{k=1}^{p} I_h\right) \cup \left(\bigcup_{k=1}^{q} J_k\right)\right) = \sum_{h=1}^{p} \ell(I_h) + \sum_{k=1}^{q} \ell(J_k) = \sigma(E) + \sigma(F),$$

deci σ aditivă. Aşadar, σ măsură aditivă, deci (P.2.2.4.) σ este monoton crescătoare.

In fine, fie $(E_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathscr{E}_{\mathbf{R}^m}$, şir mutual disjunct, a.î. $E := \bigcup_{n\geq 1} E_n \in \mathscr{E}_{\mathbf{R}^m}$.

Evident avem $\bigcup_{k=1}^{n} E_k \subseteq E$, $(\forall)\, n \geq 1$, deci

$$\sum_{k=1}^{n} \sigma(E_k) = \sigma\left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right) \leq \sigma(E), (\forall)\, n \geq 1,$$

şi deci
$$\sum_{n\geq 1} \sigma(E_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \sigma(E_k) \leq \sigma(E).$$

Aşadar, $\sum_{n\geq 1}\sigma(E_n)\leq\sigma$ (E). Rămâne să arătăm că σ (E) $\leq \sum_{n\geq 1}\sigma(E_n)$ (2).

Presupunem $\sigma(E_n)<\infty$, $(\forall)n\geq 1$, altfel (2) este evidentă. Fixăm $\varepsilon > 0$ şi $K\subset E$, $K \in \mathscr{E}^c_{\mathbf{R}^m}$. Atunci $(\forall)$ $n \geq 1$, $(\exists)$ $D_n \in \mathscr{E}^d_{\mathbf{R}^m}$, $D_n \supseteq E_n$ şi $\sigma(D_n) \leq \sigma(E_n) + \varepsilon/2^n$.

Evident avem $K \subseteq E = \bigcup_{n\geq 1} E_n \subseteq \bigcup_{n\geq 1} D_n$, deci K fiind compactă $(\exists)$ $N \geq 1$, a.î.

$K\subseteq \bigcup_{n=1}^{N} D_n$, deci

$$\sigma(K) \leq \sum_{n=1}^{N}\sigma(D_n) \leq \sum_{n=1}^{N}\left(\sigma(E_n)+\frac{\varepsilon}{2^n}\right) \leq \sum_{n\geq 1}\sigma(E_n)+\sum_{n\geq 1}\frac{\varepsilon}{2^n}$$

şi deci $\sigma(K)\leq\sum_{n\geq 1}\sigma(E_n)+\varepsilon$. Cum $\varepsilon>0$ a fost arbitrar, rezultă $\sigma(K)\leq\sum_{n\geq 1}\sigma(E_n)$, deci

$$\sigma(E) = \sup\{\sigma(K);\ K\in \mathscr{E}^{c}_{\mathbf{R}^m},\ K\subseteq E\} \leq \sum_{n\geq 1}\sigma(E_n).$$

Prin urmare, $\sigma(E) = \sum_{n\geq 1}\sigma(E_n)$, deci σ măsură.

Fie $E\in\mathscr{E}_{\mathbf{R}^m}$ şi $E = \bigcup_{k=1}^{n} I_k$ o reprezentare canonică a lui E. Atunci,$(\forall)$ $c\in\mathbf{R}^m$, avem $E+c \in\mathscr{E}_{\mathbf{R}^m}$ şi are loc următoarea relaţie

$$\sigma(E+c) = \sigma\left(\bigcup_{k=1}^{n}(I_k+c)\right) = \sum_{k=1}^{n}\ell(I_k+c) = \sum_{k=1}^{n}\ell(I_k) = \sigma(E),$$

deci σ este invariantă la translaţii.

Sa considerăm mai departe, cazul particular m = 1. Atunci $\mathbf{R} = \bigcup_{n\geq 1}[-n,n]$; $[-n, n] \in\mathscr{E}_{\mathbf{R}}$ şi $\sigma([-n, n]) < \infty$, $(\forall)$ $n \geq 1$, deci σ este măsură σ- finită.

Corolar 1. *Tripletul ($\mathbf{R}^m$, $\mathscr{E}^0_{\mathbf{R}^m}$, σ_m) are proprietăţile : 1^0) $\mathscr{E}^0_{\mathbf{R}^m}$ inel pe $\mathbf{R}^m$; 2^0) $\sigma_m : \mathscr{E}^0_{\mathbf{R}^m} \to \mathbf{R}$ măsură aditivă, finită, invariantă la translaţii.*

Dem. Aplicăm T.2.3.1.

Corolar 2. (Unicitatea măsurii σ_m).*Fie $\nu : \mathscr{E}_{\mathbf{R}^m} \to \overline{\mathbf{R}}$ o funcţie aditivă cu proprietatea că $\nu(I) = \ell_m(I)$, $(\forall)$ $I\in\mathscr{I}_{\mathbf{R}^m}$. Atunci $\nu = \sigma_m$.*

Dem. Fie $E\in\mathscr{E}_{\mathbf{R}^m}$ şi $E = \bigcup_{k=1}^{n} I_k$ o reprezentare canonică a lui E. Atunci,

$$\nu(E) = \sum_{k=1}^{n} \nu(I_k) = \sum_{k=1}^{n} \ell_m(I) = \sum_{k=1}^{n} \sigma_m(I_k) = \sigma_m(E).$$

Prin urmare, $\nu = \sigma_m$.

Observație. 1^0) $\mathscr{E}_{\mathbf{R}^m}$ nu este σ- inel, deoarece $(\forall)$ $x \in \mathbf{R}^m$, $x \neq 0$, avem $\{1/n, x\} \in \mathscr{E}_{\mathbf{R}^m}$, $(\forall)$ $n \geq 1$ și $A = \bigcup_{n\geq 1} \{1/n, x\} \notin \mathscr{E}_{\mathbf{R}^m}$. Cum $\sigma_m(A) = 0$, rezultă ca σ_m este o *măsură incompletă.* 2^0) $\mathscr{E}_{\mathbf{R}^m}$ nu este σ- inel și nici algebră, deoarece $\mathbf{R}^m \notin \mathscr{E}^0_{\mathbf{R}^m}$, deci $\mathscr{E}^0_{\mathbf{R}^m} \subset \mathscr{E}_{\mathbf{R}^m}$; 3^0) $\mathscr{E}_{\mathbf{R}^m} = a(\mathfrak{I}_{\mathbf{R}^m})$ și $\mathscr{E}^0_{\mathbf{R}^m} = r(\mathfrak{I}^0_{\mathbf{R}^m})$; 4^0) $\mathfrak{I}_{\mathbf{R}^m} \subset \mathscr{E}_{\mathbf{R}^m}$ și $\sigma_m(I) = \ell_m(I)$, $(\forall)$ $I \in \mathfrak{I}_{\mathbf{R}^m}$.

2.3.2. Definiție.Tripletul $(\mathbf{R}^m, \mathfrak{I}_{\mathbf{R}^m}, \ell_m)$ satisface condițiile teoremei T.2.2.9., deci aplicația :

$$2^{\mathbf{R}^m} \ni A \to \inf\{\sum_{n\geq 1} \ell_m(I_n); (I_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathfrak{I}_{\mathbf{R}^m}, \bigcup_{n\geq 1} I_n \supseteq A\},$$

definește o măsură exterioară pe $\mathbf{R}^m$, notată cu λ^*_m, sau simplu $\boldsymbol{\lambda}^*$, numită *măsura exterioară Lebesgue* pe $\mathbf{R}^m$; λ^*_1 se notează întotdeauna cu $\boldsymbol{\lambda}^*$.

a) $\lambda^*_m(\emptyset) = 0$; λ^*_m monoton crescătoare și numerabil subaditivă.

b) $\lambda^*_m(I) = \ell_m(I)$, $(\forall)$ $I \in \mathfrak{I}_{\mathbf{R}^m}$.

2.3.3. Propoziție . *Tripletul $(\mathbf{R}^m, \mathscr{E}_{\mathbf{R}^m}, \sigma_m)$ satisface condițiile din T.2.2.9. și măsură exterioară asociată, să o notăm cu σ^*_m, coincide cu λ^*_m.*

Dem. Considerăm cazul particular $m = 1$. Cum $\mathfrak{I}_{\mathbf{R}} \subseteq \mathscr{E}_{\mathbf{R}}$, rezultă $\sigma^* \leq \lambda^*$. Fie $A \in 2^{\mathbf{R}}$ fixat. Presupunem cazul nebanal, că $\sigma^*(A) < \infty$. Atunci

$$(\forall)\varepsilon > 0, (\exists)(E_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathscr{E}_{\mathbf{R}}, \text{ cu } \bigcup_{n\geq 1} E_n \supseteq A \ \& \ \sum_{n\geq 1} \sigma(E_n) \leq \sigma^*(A) + \varepsilon.$$

Evident, $(\forall)$ $n \geq 1$, $(\exists)$ $\mathscr{F}_n \subseteq \mathfrak{I}_{\mathbf{R}}$, familie finită mutual disjunctă,a.î. $E_n = \bigcup_{I \in \mathscr{F}_m} I$, deci $\sigma(E_n) = \sum_{I \in \mathscr{F}_n} \ell(I)$. Atunci familia $\mathscr{F} := \bigcup_{n\geq 1} \mathscr{F}_n$ este cel mult numerabilă, $\mathscr{F} \subseteq \mathfrak{I}_{\mathbf{R}}$ și $\bigcup_{I \in \mathscr{F}} I \supseteq A$, deci

$$\lambda^*(A) \leq \sum_{I \in \mathscr{F}} \ell(I) = \sum_{n\geq 1} \sum_{I \in \mathscr{F}_n} \ell(I) = \sum_{n\geq 1} \sigma(E_n) \leq \sigma^*(A) + \varepsilon.$$

Cum $\varepsilon > 0$ a fost arbitrar, rezultă $\lambda^*(A) \leq \sigma^*(A)$. Așadar $\lambda^*(A) = \sigma^*(A)$,deci $\lambda^* = \sigma^*$.

Observație. Putem înlocui tripletul ($\mathbf{R}^m$, $\mathscr{C}_{\mathbf{R}^m}$, σ_m) din P.2.3.3. prin tripletul ($\mathbf{R}^m$, $\mathscr{C}$, ℓ_m), unde $\mathscr{C} \in \{\mathfrak{I}^0_{\mathbf{R}^m}, \mathfrak{I}^c_{\mathbf{R}^m}, \mathfrak{I}^d_{\mathbf{R}^m}, \mathfrak{I}^i_{\mathbf{R}^m}\}$

2.3.4. Definiție. Familia mulțimilor λ^*_m – măsurabile (Def. 2.3.2.) din $\mathbf{R}^m$ se notează cu $\mathscr{L}_{\mathbf{R}^m}$; elementele mulțimii $\mathscr{L}_{\mathbf{R}^m}$ se numesc *mulțimi măsurabile Lebesgue (L–măsurabile) din $\boldsymbol{R}^m$*. Cf. T.2.2.11,Cor.1. tripletul ($\mathbf{R}^m$,$\mathscr{L}_{\mathbf{R}^m}$,$\lambda_m$), unde $\lambda_m := \lambda^*_m \big|_{\mathscr{L}_{\mathbf{R}^m}}$, este un spațiu cu măsură completă, i.e. $\mathscr{L}_{\mathbf{R}^m}$ σ-algebră pe $\mathbf{R}^m$ și $\lambda_m : \mathscr{L}_{\mathbf{R}^m} \to \overline{\mathbf{R}}$ măsură completă (i.e. ($\forall$) $A \in \mathbf{R}^m$, cu $\lambda^*_m(A) = 0$, rezultă $A \in \mathscr{L}_{\mathbf{R}^m}$). Măsura λ_m se numește *măsura Lebesgue pe $\boldsymbol{R}^m$*.

2.3.5. Propoziție. *Măsura exterioară Lebesgue pe $\boldsymbol{R}^m$ satisface condiția lui Caratheodory.*

Dem. Considerăm cazul particular m=1. Fie $A,B \subseteq \mathbf{R}$, cu $\delta := d(A,B) > 0$, fixați. Să arătăm că $\lambda^*(A \cup B) \geq \lambda^*(A) + \lambda^*(B)$. Fie în acest scop $\varepsilon > 0$ fixat și să presupunem cazul nebanal $\lambda^*(A \cup B) < \infty$. Din definiția lui λ^* rezultă : $(\exists)$ $\mathscr{F} \subseteq \mathfrak{I}_{\mathbf{R}}$, familie numerabilă, cu $\bigcup_{I\in\mathscr{F}} I \supseteq A \cup B$ & $\sum_{I\in\mathscr{F}} \ell(I) \leq \lambda^*(A \cup B) + \varepsilon$.

Înlocuind fiecare interval $I \in \mathfrak{I}$ cu o familie finită, mutual disjunctă, de intervale din $\mathbf{R}$, având fiecare lungimea $< \delta$, putem presupune că $\ell(I) < \delta$, $(\forall) I \in \mathscr{F}$. Fie acum $\mathscr{F}_1$ (resp. $\mathscr{F}_2$) familia formată din intervalele $I \in \mathscr{F}$, cu proprietatea $I \cap A \neq \emptyset$ (resp. $I \cap B \neq \emptyset$). Atunci avem : $\mathscr{F}_1 \cup \mathscr{F}_2 \subseteq \mathscr{F}$, $\mathscr{F}_1 \cap \mathscr{F}_2 = \emptyset$, $\mathscr{F}_1$ acoperă A, $\mathscr{F}_2$ acoperă B, deci

$$\lambda^*(A) + \lambda^*(B) \leq \sum_{I\in\mathscr{F}_1} \ell(I) + \sum_{I\in\mathscr{F}_2} \ell(I) \leq \sum_{I\in\mathscr{F}} \ell(I) \leq \lambda^*(A \cup B) + \varepsilon,$$

și deci $\lambda^*(A) + \lambda^*(B) \leq \lambda^*(A \cup B) + \varepsilon$. Cum $\varepsilon > 0$ a fost arbitrar, rezultă că

$$\lambda^*(A) + \lambda^*(B) \leq \lambda^*(A \cup B)\text{ , q.e.d.}$$

Corolar 1. $\mathscr{B}_{\mathbf{R}^m} \subseteq \mathscr{L}_{\mathbf{R}^m}$ *și* $\mathscr{B}_{\mathbf{R}^m} \neq \mathscr{L}_{\mathbf{R}^m}$, *deci orice mulțime măsurabilă Borel din $\boldsymbol{R}^m$, este măsurabilă Lebesgue și există mulțimi măsurabile Lebesgue care nu sunt măsurabile Borel.*

Dem. $\mathscr{B}_{\mathbf{R}^m} \subseteq \mathscr{L}_{\mathbf{R}^m}$, rezultă din P.2.3.5.&T.2.2.15.; $\mathscr{B}_{\mathbf{R}^m} \neq \mathscr{L}_{\mathbf{R}^m}$ (Ex.2.77)

2.3.6. Definiție. Fie $\mathscr{B}_{\mathbf{R}^m}$, $\mathscr{L}_{\mathbf{R}^m}$ familia mulțimilor măsurabile Borel, resp. Lebesgue , din $\mathbf{R}^m$ și $\lambda_m : \mathscr{L}_{\mathbf{R}^m} \to \overline{\mathbf{R}}$, măsura Lebesgue pe $\mathbf{R}^m$.

Restricţia lui λ_m la $\mathscr{B}_{\mathbf{R}^m}$, $\lambda_m \mid \mathscr{B}_{\mathbf{R}^m}$, se numeşte *măsura Borel pe* $\boldsymbol{R}^m$ şi se notează cu β_m. Aşadar, tripletul $(\mathbf{R}^m, \mathscr{B}_{\mathbf{R}^m}, \beta_m)$ *este un spaţiu cu măsură.*

a) Măsura Lebesgue pe $\boldsymbol{R}^m$, λ_m, *este* σ*-finită.* Considerăm cazul m=1. Evident, $(\forall)$ $n \geq 1$, avem:

$$A_n := [-n, n] \in \mathscr{B}_{\mathbf{R}} \subseteq \mathscr{L}_{\mathbf{R}},\ \lambda(A_n) = \lambda^*(A_n) = \ell(A_n) = 2n < \infty \ \&\ \bigcup_{n\geq 1} A_n = \mathbf{R}.$$

Prin urmare, λ este σ-finită.

b) $\mathscr{L}_{\mathbf{R}^m} \neq 2^{\mathbf{R}^m}$, *i.e. există mulţimi* $A \in 2^{\mathbf{R}^m}$, *care nu sunt măsurabile Lebesgue în* $\mathbf{R}^m$ (Ex. 2.73.).

c) *O mulţime* $A \in 2^{\mathbf{R}^m}$ *este* L*-neglijabilă, i.e.* $\lambda^*_m(A) = 0 \Leftrightarrow$

$(\forall)\ \varepsilon > 0, (\exists)\ (I_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathfrak{I}_{\mathbf{R}^m}$, cu $\bigcup_{n\geq 1} I_n \supseteq A\ \&\ \sum_{n\geq 1} \ell_m(I_n) < \varepsilon \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow A \in \mathscr{L}_{\mathbf{R}^m}$ şi $\lambda_m(A) = 0$.

In concluzie: $(\mathbf{R}^m, \mathscr{L}_{\mathbf{R}^m}, \lambda_m)$ *este un spaţiu (metric) cu măsură completă,* σ *- finită şi avem* $\mathscr{B}_{\mathbf{R}^m} \subset \mathscr{L}_{\mathbf{R}^m} \subset 2^{\mathbf{R}^m}$.

d) Măsura Borel pe $\mathbf{R}^m$, β_m, este incompletă (Ex.2.77.). In concluzie : $(\mathbf{R}^m, \mathscr{B}_{\mathbf{R}^m}, \beta_m)$ *este un spaţiu (metric) cu măsură incompletă,* σ*-finită şi avem* $\mathscr{E}_{\mathbf{R}^m} \subset \mathscr{B}_{\mathbf{R}^m} \subset \mathscr{L}_{\mathbf{R}^m}$.

2.3.7. Propoziţie (Unicitatea măsurii Borel). *Fie* $\nu : \mathscr{B}_{\mathbf{R}^m} \to \overline{\mathbf{R}}$ *o măsură cu* $\nu(I) = \ell_m(I)$, $(\forall)\ I \in \mathscr{I}_{\mathbf{R}^m}$. *Atunci* $\nu = \beta_m$.

Dem. Tripletul $(\mathbf{R}^m, \mathscr{E}_{\mathbf{R}^m}, \sigma_m)$ este q – s.c.m. (T.2.3.1.). Cum $\sigma^*_m : 2^{\mathbf{R}^m} \to \overline{\mathbf{R}}$, măsura exterioară definită de σ_m, coincide cu λ^*_m (P.2.3.3.), rezultă (T.2.2.17.) că tripletul $(\mathbf{R}^m, \mathscr{E}_{\mathbf{R}^m}, \sigma_m)$ este majorat de tripletul $(\mathbf{R}^m, \mathscr{L}_{\mathbf{R}^m}, \lambda_m)$, i.e. $\mathscr{E}_{\mathbf{R}^m} \subseteq \mathscr{L}_{\mathbf{R}^m}$ şi $\lambda_m \mid \mathscr{E}_{\mathbf{R}^m} = \sigma_m$. Mai mult, măsura σ_m fiind σ-finită, rezultă (T.2.2.17.) că $\lambda_m \mid \sigma(\mathscr{E}_{\mathbf{R}^m})$ este unica măsură pe $\sigma(\mathscr{E}_{\mathbf{R}^m})$, deci pe $\mathscr{B}_{\mathbf{R}^m}$, care prelungeşte pe σ_m. In fine, cum σ_m este unica măsură pe $\mathscr{E}_{\mathbf{R}^m}$ care prelungeşte pe ℓ_m (P.2.3.1,Cor.2), conchidem că β_m este unica măsură pe $\mathscr{B}_{\mathbf{R}^m}$ care prelungeşte pe ℓ_m.

Corolar 1. *Fie* $\nu : \mathscr{E}_{\mathbf{R}^m} \to \overline{\mathbf{R}}$ *o măsură, cu* $\nu(E) = \sigma_m(E)$, $(\forall) E \in \mathscr{E}_{\mathbf{R}^m}$. *Atunci* $\nu = \beta_m$.

2.3.8. Propoziție (Condiții echivalente de λ^*- măsurabilitate).*Fie* $A \subseteq \mathbf{R}$ *o mulțime cu* $\lambda^*(A) < \infty$. *Atunci condițiile* $1^0) - 4^0)$ *sunt echivalente :*

$1^0)$ *A* λ^**- măsurabilă, i.e.* $A \in \mathscr{L}_{\mathbf{R}}$;

$2^0)$ $(\forall)\ \varepsilon > 0$, $(\exists)\ G \subseteq \mathbf{R}$ *deschisă, a.î.* $G \supseteq A\ \&\ \lambda^*(G \setminus A) < \varepsilon$;

$3^0)$ $(\forall)\ \varepsilon > 0$, $(\exists)\ F \subseteq \mathbf{R}$ *închisă, a.î.* $F \subseteq A\ \&\ \lambda^*(A \setminus F) < \varepsilon$;

$4^0)$ $(\forall)\ \varepsilon > 0$, $(\exists)\ F, G \subseteq \mathbf{R}$, *cu F închisă, G deschisă, a.î.* $F \subseteq A \subseteq G\ \&\ \lambda(G \setminus F) < \varepsilon$.

Dem. $1^0) \Rightarrow 2^0)$. Fie $\varepsilon > 0$ fixat. Din 2.3.2., definiția lui λ^*, rezultă :

$$(\exists)\ (I_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathfrak{I}^d_{\mathbf{R}}\ \text{,a.i. } G := \bigcup_{n\geq 1} I_n \supseteq A\ \&\ \sum_{n\geq 1} \ell(I_n) \leq \lambda^*(A) + \varepsilon.$$

Mulțimea A fiind λ^*- măsurabilă și $G = A \cup (G \setminus A)$, avem

$$\lambda^*(G) = \lambda^*(A) + \lambda^*(G \setminus A),$$

deci

$$\lambda^*(G \setminus A) = \lambda^*(G) - \lambda^*(A) \leq \sum_{n\geq 1} \ell(I_n) - \lambda^*(A) \leq \varepsilon.$$

$2^0) \Rightarrow 1^0)$. Cf. $2^0)$ avem :$(\forall) n \geq 1$, $(\exists) G_n \subseteq \mathbf{R}$ deschisă, cu proprietatea $G_n \supseteq A\ \&\ \lambda^*(G_n \setminus A) < 1/n$. Punem $G := \bigcap_{n\geq 1} G_n$; atunci avem :

$$G \supseteq A,\ G \setminus A = \bigcap_{n\geq 1} (G_n \setminus A) \subseteq G_n \setminus A,\ (\forall)\ n \geq 1,$$

deci

$$0 \leq \lambda^*(G \setminus A) \leq \lambda^*(G_n \setminus A) \leq 1/n,\ (\forall)\ n \geq 1,$$

și deci $\lambda^*(G \setminus A) = 0$, i.e. $G \setminus A$ neglijabilă (L) . Cum G este de tip G_δ, deci $G \in \mathscr{L}_{\mathbf{R}}$ și $A = G \setminus (G \setminus A)$, rezultă $A \in \mathscr{L}_{\mathbf{R}}$, q.e.d..

$2^0) \Rightarrow 3^0)$. Fie $\varepsilon > 0$ fixat. Dacă A satisface condiția $2^0)$, cum $2^0) \equiv 1^0)$, rezultă $A \in \mathscr{L}_{\mathbf{R}}$, deci $A^c \in \mathscr{L}_{\mathbf{R}}$ și deci cf. $2^0)$ $(\exists)\ G \subseteq \mathbf{R}$ deschisă, cu $G \supseteq A^c$ și $\lambda^*(G \setminus A^c) < \varepsilon$. Atunci avem G^c închisă, $G^c \subseteq A$ și $G \setminus A^c = A \setminus G^c$, deci

$\lambda^*(A \setminus G^c) = \lambda^*(G \setminus A^c) < \varepsilon$.

In mod analog se arată implicația $3^0) \Rightarrow 2^0)$.

Evident avem : $4^0) \Leftrightarrow 2^0) \wedge 3^0)$.

Corolar 1. *Fie* $A \subseteq \mathbf{R}$ *o mulțime, cu* $\lambda^*(A) < \infty$. *Atunci condițiile* $1^0) - 3^0)$ *sunt echivalente :*

$1^0)$ *A* λ^**- măsurabilă, i.e.* $A \in \mathscr{L}_{\mathbf{R}}$;

2^0) $\inf\{\lambda^*(G \setminus A);\ G$ deschisă, $G \supseteq A\}$;

3^0) $\inf\{\lambda^*(A \setminus F);\ F$ închisă, $F \subseteq A\}$;

4^0) $(\exists)\ G \subseteq \mathbf{R}$, G de tip G_δ, $G \supseteq A$ & $\lambda^*(G \setminus A) = 0$;

5^0) $(\exists)\ F \subseteq \mathbf{R}$, F de tip F_σ, $F \subseteq A$ & $\lambda^*(A \setminus F) = 0$.

Dem. Echivalența cond. 1^0) – 3^0) rezultă din P.2.3.8. cond. 1^0) – 3^0).

$1^0) \Rightarrow 4^0$). $(\forall)\ n\geq 1$, $(\exists)\ G_n \in \tau_{\mathbf{R}}$, cu $G_n \supseteq A$ şi $\lambda^*(G_n \setminus A) \leq 1/n$. Atunci $G := \bigcap_{n\geq 1} G_n$ este de tip G_δ şi $G \subseteq G_n$, $(\forall)\ n\geq 1$, deci

$$\lambda^*(G \setminus A) \leq \lambda^*(G_n \setminus A) \leq 1/n,\ (\forall)\ n \geq 1.$$

Prin urmare $\lambda^*(G \setminus A) = 0$. Implicația $4^0) \Rightarrow 1^0$) este evidentă.

Analog se arată echivalența : $1^0) \Leftrightarrow 5^0$).

Corolar 2. *Fie $A \subset \mathbf{R}$ o mulțime arbitrară. Atunci condițiile 1^0) – 6^0) sunt echivalente :*

1^0) A λ^* - măsurabilă, i.e. $A \in \mathscr{L}_{\mathbf{R}}$;

2^0) $(\exists)\ G \subseteq \mathbf{R}$ de tip G_δ, cu $G \supseteq A$ & $\lambda^*(G \setminus A) = 0$;

3^0) $(\exists)\ G \subseteq \mathbf{R}$ de tip G_δ, $(\exists)\ N \subseteq \mathbf{R}$, L – neglijabilă, cu $A = G \setminus N$;

4^0) $(\exists)\ F \subseteq \mathbf{R}$ de tip F_σ, cu $F \subseteq A$ & $\lambda^*(A \setminus F) = 0$;

5^0) $(\exists)\ F \subseteq \mathbf{R}$ de tip F_σ, $(\exists)\ N \subseteq \mathbf{R}$, L –neglijabilă, cu $A = F \cup N$;

6^0) A diferă de o mulțime boreliană printr-o mulțime L – neglijabilă, i.e. $(\exists)\ B \in \mathscr{B}_{\mathbf{R}}$, $(\exists)\ N \subseteq \mathbf{R}$, L-neglijabilă, a. î. $A = B \cup N$ (resp. $B = A \cup N$).

Dem. Evident avem : $2^0) \Leftrightarrow 3^0$); $4^0) \Leftrightarrow 5^0$); $3^0 \wedge 5^0) \Leftrightarrow 6^0$); $6^0) \Rightarrow 1^0$).

$1^0) \Rightarrow 2^0$). Avem $A = \bigcup_{n\geq 1} A_n$,unde $A_n = A \cap [-n, n]$; A_n este,evident, λ^*- măsurabilă şi $\lambda^*(A_n) < \infty$. Fixăm $\varepsilon > 0$. Din P.2.3.8,2^0), rezultă :

$$(\forall)\ n\geq 1,\ (\exists)\ D_n \in \tau_{\mathbf{R}},\ \text{cu } D_n \supseteq A_n\ \&\ \lambda^*(D_n \setminus A_n) \leq \varepsilon / 2^n.$$

Atunci $G_\varepsilon := \bigcup_{n\geq 1} D_n \in \tau_{\mathbf{R}}$, $G_\varepsilon \supseteq A$ şi avem :

$$G_\varepsilon \setminus A \subseteq \left(\bigcup_{n\geq 1} D_n\right) \setminus \left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) \subseteq \bigcup_{n\geq 1}(D_n \setminus A_n),$$

deci

$$\lambda^*(G_\varepsilon \setminus A) \leq \sum_{n\geq 1} \lambda^*(D_n \setminus A_n) \leq \sum_{n\geq 1} \varepsilon / 2^n = \varepsilon$$

De aici deducem : $(\forall)\ n \geq 1$, $(\exists)\ G_n \in \tau_{\mathbf{R}}$, cu $G_n \supseteq A$ & $\lambda^*(G_n \setminus A) \leq 1/n$. Mulțimea $G := \bigcap_{n\geq 1} G_n$ este de tip G_δ și avem :

$$\lambda^*(G \setminus A) \leq \lambda^*(G_n \setminus A) \leq 1/n,\ (\forall)\ n \geq 1, \text{ deci } \lambda^*(G \setminus A) = 0.$$

$3^0) \Rightarrow 1^0)$. Dacă $A = G \setminus A$, cu G de tip G_δ și N este L – *neglijabilă*, atunci G și N sunt L–măsurabile, deci A este L–măsurabilă.

Echivalența, $2^0) \Leftrightarrow 4^0)$, rezultă din, $2^0) \Leftrightarrow 3^0)$, prin trecere la complementară.

Corolar 3. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime. Atunci A este L – măsurabilă $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow L^-(A) = L^+(A)$, unde $L^-(A) := \sup\{\lambda(F);\ F \in \tau^c_{\mathbf{R}},\ F \subseteq A\}$, $L^+(A) := \inf\{\lambda(G);\ G \in \tau_{\mathbf{R}},\ G \supseteq A\}$; în acest caz avem relația $L^-(A) = \lambda(A) = L^+(A)$.*

Dem. Aplicăm P.2.3.8., $4^0)$ ținând cont de relația :

$$\lambda(F) \leq L^-(A) \leq \lambda^*(A) \leq L^+(A) \leq \lambda(G),\ (\forall)\ F \in \tau^c_{\mathbf{R}},\ (\forall)\ G \in \tau_{\mathbf{R}},\ F \subseteq A \subseteq G \quad (1)$$

Dacă $A \in \mathscr{L}_{\mathbf{R}}$ și $\lambda^*(A) < \infty$, atunci din (1) și P.2.3.8,4^0) rezultă :

$$(\forall)\ \varepsilon > 0,\ L^+(A) - L^-(A) \leq \varepsilon, \text{ deci } L^-(A) = L^+(A) = \lambda(A) \text{ etc.}$$

2.3.9. Propoziție (Unicitatea măsurii Lebesgue).

Fie $\nu : \mathscr{L}_{\mathbf{R}^m} \to \overline{\mathbf{R}}$ o măsură, cu $\nu(I) = \lambda(I)$, $(\forall)\ I \in \mathfrak{I}_{\mathbf{R}^m}$. Atunci $\nu = \lambda_m$.

Dem. Considerăm cazul m = 1. Evident $\nu|\mathscr{B}_{\mathbf{R}}$ este o măsură, și, din ipoteză, rezultă $(\nu|\mathscr{B}_{\mathbf{R}})(I) = \ell(I)$, $(\forall) I \in \mathfrak{I}_{\mathbf{R}}$, deci(P.2.3.7) $\nu|\mathscr{B}_{\mathbf{R}} = \beta = \lambda|\mathscr{B}_{\mathbf{R}}$ (*). Fie acum $A \in \mathscr{L}_{\mathbf{R}}$ fixat. Din P.2.3.8,Cor.2 rezultă: $(\exists)\ B \in \mathscr{B}_{\mathbf{R}}$ și $N \in \mathscr{L}_{\mathbf{R}}$, L-*neglijabilă*, a.î. $A = B \cup N$. Deoarece $A = B \cup (N \setminus B)$, putem presupune $B \cap N = \emptyset$. Fie, mai departe, $\varepsilon > 0$ fixat; atunci

$$(\exists)\ (I_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathfrak{I}_{\mathbf{R}}, \text{ cu } \bigcup_{n\geq 1} I_n \supseteq N \ \& \sum_{n\geq 1} \ell(I_n) \leq \lambda^*(N) + \varepsilon = \varepsilon.$$

deci $0 \leq \nu(N) \leq \sum_{n\geq 1} \nu(I_n) = \sum_{n\geq 1} \ell(I_n) \leq \varepsilon$. Cum $\varepsilon > 0$ a fost arbitrar, rezultă

$$\nu(N) = 0. \text{ Atunci } \nu(A) = \nu(B) + \nu(N) = \nu(B) \overset{(*)}{=} \lambda(B) = \lambda(B \cup N) = \lambda(A).$$

Prin urmare $\nu = \lambda$.

Corolar 1. *Fie $\nu : \mathscr{L}_{\mathbf{R}^m} \to \overline{\mathbf{R}}$ o măsură, cu $\nu(A) = \mu_m(A)$, $(\forall)\ A \in \mathscr{B}_{\mathbf{R}^m}$. Atunci $\nu = \lambda_m$.*

Dem. Cum $(\mathbf{R}^m, \mathfrak{I}_{\mathbf{R}^m}, \ell_m) << (\mathbf{R}^m, \mathscr{B}_{\mathbf{R}^m}, \beta_m) << (\mathbf{R}^m, \mathscr{L}_{\mathbf{R}^m}, \lambda_m)$, din ipoteza rezultă : $\nu(I) = \beta_m(I) = \lambda_m(I), (\forall) I \in \mathfrak{I}_{\mathbf{R}^m}$.

Prin urmare (P.2.3.9.) avem $\nu = \lambda_m$.

2.3.10.Propoziție *Fie* $\nu: \mathscr{E}_{\mathbf{R}^m} \to \overline{\mathbf{R}}$ *o măsură invariantă la translație, cu proprietatea* $\nu((0,1]^m)=1$. *Atunci* $\nu = \sigma_m$.

Dem. Considerăm cazul m = 1. Fixăm n, k $\in \mathbf{N}$. Evident avem :

$$\nu((0,n]) = \nu(\bigcup_{k=1}^{n}(k-1,k]) = \sum_{k=1}^{n}\nu((k-1,k]) = \sum_{k=1}^{n}\nu(k-1+(0,1]) = n.$$

$\nu((0,1]) = \nu(k(0,1/k]) = k\nu((0,1/k]) \Leftrightarrow \nu((0,1/k]) = (1/k)\nu((0,1])$, deci

$$\nu((0,n/k]) = \nu(n(0,1/k]) = n\nu((0,1/k]) = n/k.$$

Aşadar,

$$\nu((0,r] = r\,\nu((0,1]), (\forall)\, r \in \mathbf{Q}_+^* \qquad (1)$$

Fie acum p, q $\in \mathbf{Q}$, p < q, fixați. Din (1) rezultă :

$$\nu((p,q]) = \nu(p+(0,q-p]) = \nu((0,q-p]) = q-p \qquad (2)$$

In fine, fie a, b$\in\mathbf{R}$, a < b, fixati. Atunci $(\exists)\ p_n, q_n \in \mathbf{Q}$, cu $a<p_n<q_n<b$ şi $p_n \to a$, $q_n \to b$. Atunci cf. (2) : $\nu((a,b]) \geq \nu((p_n,q_n]) = q_n - p_n \to b-a$, deci $\nu((a,b]) \geq b-a$. Analog rezultă : $\nu((a,b]) \leq b-a$, deci $\nu((a,b]) = b-a$. (3)

Fie a$\in\mathbf{R}$ fixat. Atunci cf. T.2.2.6. avem :

$$\nu(\{a\}) = \lim_{n\to\infty}\nu((a-(1/n), a]) = \lim_{n\to\infty}(a-(a-(1/n))) = 0 \qquad (4)$$

Din (3) şi (4) rezultă : $\nu(I) = \ell(I), (\forall) I \in \mathfrak{I}_{\mathbf{R}}$. In virtutea unicității măsurii σ (T.2.3.1,Cor.2), rezultă $\sigma = \nu$.

Corolar.1. *Fie* ν *o măsură pe* $\mathscr{B}_{\mathbf{R}^m}$ *(resp.* $\mathscr{L}_{\mathbf{R}^m}$*), cu* $\nu((0,1]^m) = 1$ *şi invariantă la translație. Atunci* ν *coincide cu măsura Borel* β_m *(resp. măsura Lebesgue* λ_m*).*

Dem. Considerăm cazul m = 1 şi notăm $\sigma_1 = \sigma$ şi $\beta_1 = \beta$. Din ipoteză rezultă : $\nu|\mathscr{E}_{\mathbf{R}}$ măsura invariantă la translație şi $(\nu|\mathscr{E}_{\mathbf{R}})((0,1]) = 1$, deci (P.2.3.10.) $\nu|\mathscr{E}_{\mathbf{R}} = \sigma$. Insă (P.2.1.7. Cor.1) $\beta|\mathscr{E}_{\mathbf{R}} = \sigma$, deci $\nu = \sigma$ pe $\mathscr{E}_{\mathbf{R}}$ şi deci $\nu = \beta$ pe $\mathfrak{I}_{\mathbf{R}}$. Prin urmare (P.2.3.4.) $\nu = \beta$. Raționament analog pentru λ_m.

2.3.11.Propoziție *Măsura exterioară Lebesgue pe* $\mathbf{R}^m$, $\lambda_m^*: 2^{\mathbf{R}^m} \to \overline{\mathbf{R}}$, *este simetrică şi invariantă la translație.*

Dem. Considerăm cazul m = 1. Să observăm că $\mathfrak{I}_{\mathbf{R}} = -\mathfrak{I}_{\mathbf{R}}$ şi $x + \mathfrak{I}_{\mathbf{R}} = \mathfrak{I}_{\mathbf{R}}$, $(\forall)$ $x \in \mathbf{R}$. Atunci

$$\lambda^*(-A) = \inf\left\{\sum_{n\geq 1} \ell(I_n);(I_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathfrak{I}_{\mathbf{R}}, \bigcup_{n\geq 1} I_n \supseteq -A\right\} =$$

$$= \inf\left\{\sum_{n\geq 1} \ell(J_n);(J_n)_{n\geq 1} \subseteq -\mathfrak{I}_{\mathbf{R}} = \mathfrak{I}_{\mathbf{R}}, \bigcup_{n\geq 1} J_n \supseteq A\right\} = \lambda^*(A).$$

Fie $x_0 \in \mathbf{R}$ şi $A \subseteq \mathbf{R}$ fixaţi. Atunci,$(\forall)$ $(I_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathfrak{I}_{\mathbf{R}}$,avem

$$A \subseteq \bigcup_{n\geq 1} I_n \Leftrightarrow x_0 + A \subseteq \bigcup_{n\geq 1}(x_0 + I_n),$$

deci

$$\lambda^*(x_0 + A) = \inf\left\{\sum_{n\geq 1} \ell(I_n);(I_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathfrak{I}_{\mathbf{R}}, \bigcup_{n\geq 1} I_n \supseteq x_0 + A\right\} =$$

$$= \inf\left\{\sum_{n\geq 1} \ell(J_n);(J_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathfrak{I}_{\mathbf{R}} - x_0 = \mathfrak{I}_{\mathbf{R}}, \bigcup_{n\geq 1} J_n \supseteq A\right\} = \lambda^*(A).$$

Corolar 1. *Au loc afirmaţiile: 1^0)$(\forall)A \subseteq \boldsymbol{R}^m$, avem: A λ_m^* –măsurabilă $\Leftrightarrow x+A$ λ_m^* –măsurabilă, $(\forall)x \in \boldsymbol{R}^m$; 2^0)$(\forall)A \in \boldsymbol{R}^m$, avem: A este λ_m^* –măsurabilă $\Leftrightarrow -A$ este λ_m^* –măsurabilă ; 3^0) $x \pm \mathscr{L}_{\mathbf{R}^m} = \mathscr{L}_{\mathbf{R}^m}$, $(\forall)$ $x \in \boldsymbol{R}^m$; 4^0) măsurile Borel şi Lebesgue pe $\boldsymbol{R}^m$ sunt simetrice şi invariante la translaţie.*

Dem. Considerăm cazul m = 1.

1^0) Să observăm în prealabil că $(\forall)$ $A, B \in 2^{\mathbf{R}}$ şi $x \in \mathbf{R}$, avem :

$$x + 2^{\mathbf{R}} = 2^{\mathbf{R}},\ A^c + x = (A + x)^c;\ A \cap B + x = (A + x) \cap (B + x),$$

de unde deducem imediat că

$$A\ \lambda_m^* - \text{măsurabilă} \Leftrightarrow \lambda^*(B) = \lambda^*(B \cap A) + \lambda^*(B \cap A^c),\ (\forall)\ B \in 2^{\mathbf{R}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda^*(B + x) = \lambda^*(B \cap A + x) + \lambda^*(B \cap A^c + x),\ (\forall)\ x \in \mathbf{R},\ (\forall)\ B \in 2^{\mathbf{R}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda^*(B+x) = \lambda^*((B+x) \cap (A+x)) + \lambda^*((B+x) \cap (A+x)^c), (\forall) x \in \mathbf{R}, (\forall)\ B \in 2^{\mathbf{R}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda^*(C) = \lambda^*(C \cap (A + x)) + \lambda^*(C \cap (A + x)^c),\ (\forall) x \in \mathbf{R},\ (\forall) C \in 2^{\mathbf{X}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A + x\ \ \lambda^* - \text{măsurabilă},\ (\forall)\ x \in \mathbf{R}.$$

2^0) Se arată la fel ca 1^0); 3^0) Rezultă din 1^0) şi 2^0);

4^0) Fie $x_0 \in \mathbf{R}$ şi $A \in 2^{\mathbf{R}}$ fixaţi. Dacă $A \in \mathscr{L}_{\mathbf{R}}$, rezultă (cf.$3^0$)) $x \pm A \in \mathscr{L}_{\mathbf{R}}$ şi avem: $\lambda(x \pm A) = \lambda^*(x \pm A) = \lambda^*(A) = \lambda(A)$.

Prin urmare λ este invariantă la translaţie.

Dacă $A \in \mathscr{B}_R$, rezultă $x+A \in \mathscr{B}_R$ (cf. T.2.1.14.Cor.2),deci

$\beta(x \pm A)=\lambda(x \pm A) = \lambda(A) = \beta(B)$, deci β- invariantă la translație.

2.3.12. Propoziție. *Fie $A \subseteq R^m$ o mulțime măsurabilă Jordan. Atunci A este măsurabilă Lebesgue și avem $\lambda_m(A) = \mu_m(A)$, deci*

$$(R^m, J_{R^m}, \mu_m) << (R^m, \mathscr{L}_{R^m}, \lambda_m).$$

Dem. Notăm λ_m, μ_m cu λ resp. μ. Fie $A \in J_{R^m}$ fixat. Atunci din definiția lui μ avem $\mu(A)= \mu^-(A)= \mu^+(A)$ (1), și cf. Def. 1.3.9,Obs. b) avem : $\mu^-(A) = \sup\{\sigma(K) ; K \in \mathscr{E}^c_{R^m}, K \subseteq A\}$, $\mu^+(A) = \inf\{\sigma(D); D \in \mathscr{E}^d_{R^m}, D \supseteq A\}$.

Din P.2.3.8. Cor.3 rezultă : $A \in \mathscr{L}_{R^m} \Leftrightarrow L^-(A) = L^+(A)$ (2) unde

$L^-(A) := \sup\{\lambda(F); F \in \tau^c_{R^m}, F \subseteq A\}$, $L^+(A) := \inf\{\lambda(G); G \in \tau_{R^m}, G \supseteq A\}$.

Deoarece $\mathscr{E}^c_{R^m} \subseteq \tau^c_{R^m}$, $\mathscr{E}^d_{R^m} \subseteq \tau_{R^m}$; $\sigma(K) = \lambda(K)$, $(\forall)\ K \in \mathscr{E}^c_{R^m}$;

$\sigma(G) = \lambda(G)$, $(\forall)\ G \in \mathscr{E}^d_{R^m}$,deci $\mu^-(A) \leq L^-(A) \leq \lambda^*(A) \leq L^+(A) \leq \mu^+(A)$ (3).

Din (1) și (3) deducem: $\mu(A) = L^-(A) = \lambda^*(A) = L^+(A)$ (4), deci (cf. (2)) $A \in \mathscr{L}_{R^m}$, prin urmare (cf. (4)) $\mu(A) = \lambda(A)$.

Corolar 1. *Măsura Jordan μ_m este numerabil aditivă.*

Dem. Ținem seama că λ_m este numerabil aditivă.

Observație. Multimea $A:=[0,1] \cap \mathbf{Q}$ este măsurabilă Lebesgue și nemăsurabilă Jordan, deci $J_R \subset \mathscr{L}_R$.

Observație finală. Din rezultatele precedente rezultă ca funcția „lungime", $\ell_m : \mathfrak{I}^0_{R^m} \to \overline{\mathbf{R}}$,se prelungește în mod natural la o clasa $\mathscr{C}$, destul de largă, de submulțimi din $\mathbf{R}^m$, și prelungirea este unic determinată. Clasa $\mathscr{C}$ este cu atât mai restrictivă cu cât cerem ca prelungirea să aibă mai multe proprietăți. Se pune problema dacă nu putem prelungi ℓ_m la o funcție definită pe 2^{R^m} și aceasta să aibă proprietăți semnificative.

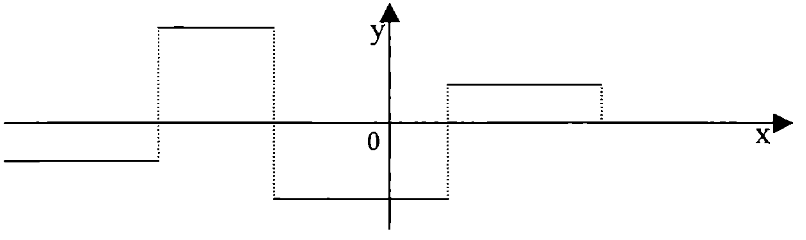
S-a demonstrat că nu există o măsură $\mu : 2^{R^m} \to \mathbf{R}$ invariantă la izometrii și care să prelungească funcția ℓ_m. Dacă m = 1 sau m = 2, există măsuri aditive $\mu : 2^{R^m} \to \mathbf{R}$, invariante la izometrii, și care să prelungească funcția ℓ_m (th. S. Banach) , iar dacă $m \geq 3$, nu există asemenea măsuri (th. F. Hansdorff).

CAPITOLUL 3.

FUNCȚII MĂSURABILE

Am definit noțiunea de *funcție caracteristică a unei mulțimi* și am prezentat câteva proprietăți elementare ale funcțiilor caracteristice în Cap. 1, Secțiunea 1.1. Fie $(X,\mathscr{A})$ un spațiu măsurabil fixat. O funcție $f:X\to\mathbf{R}$ se numește *funcție simplă* dacă se poate scrie ca o combinație liniară de funcții caracteristice,de mulțimi $\mathscr{A}$-măsurabile ,definite pe X. O funcție *măsurabilă* este, în esență, limita a.p.t. a unui șir de funcții simple.

Cele mai simple exemple de funcții simple, definite pe **R** înzestrat cu σ-algebra $\mathscr{B}_{\mathbf{R}}$, sunt funcțiile de forma $f:=\sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_{J_i}$,unde $c_i\in\mathbf{R}$ și $\varphi_{J_i}:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ este o funcție caracteristică a unui interval J_i din **R** $(1\le i\le n)$. Ele se numesc *funcții etajate* și pot fi reprezentate grafic astfel



Vom prezenta în acest capitol câteva rezultate importante din teoria funcțiiilor măsurabile, cu accentul pe funcțiile cu valori reale.

Să semnalăm câteva rezultate: teoreme de caracterizare a funcțiilor măsurabile cu valori în spații topologice, cât și cu valori reale.

Ne vom opri mai îndelung asupra șirurilor convergente (punctual, a.p.t. , aproape uniform, în măsură) de funcții măsurabile cu valori reale și relațiile dintre tipurile de convergență , ca de exemplu: teorema lui Egorov (relația dintre convergența a.p.t. și convergența a.u.) , teorema lui F. Riesz ($(f_n)_{n\ge1}$ este μ-convergent ⇔ $(f_n)_{n\ge1}$ este μ-Cauchy), etc.

3.1. Funcții simple

3.1.1. Definiție. Fie $(X,\mathscr{A})$ un spațiu măsurabil. O funcție $f:X\to\mathbf{R}$ se numeşte *simplă* , mai precis $\mathscr{A}$-simplă , dacă se poate reprezenta sub forma $f=\sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_{A_i}$, unde avem $(c_i)_{i=\overline{1,n}}\subseteq\mathbf{R}$ și $(A_i)_{i=\overline{1,n}}$ este o partiție $\mathscr{A}$-măsurabilă a lui X. Vom nota cu $\mathscr{S}(X,\mathscr{A})$, *mulțimea funcțiilor simple* $f:X\to\mathbf{R}$ și cu $\mathscr{S}^{+}(X,\mathscr{A})$, $\mathscr{S}^{-}(X,\mathscr{A})$ mulțimea funcțiilor simple $f:X\to\mathbf{R}$, *nenegative*, resp. *nepozitive*.

Observație. Condiția ca familia $(A_i)_{i=\overline{1,n}}$ să fie *partiție* a lui X nu este esențială; putem considera $(A_i)_{i=\overline{1,n}}$o acoperire $\mathscr{A}$-măsurabilă arbitrară a lui X, pe care o disjunctăm $\mathscr{A}$-măsurabil. Expresia $\sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_{A_i}$ care defineşte pe f o vom numi adesea o *reprezentare canonică* a lui f. Evident, ea nu este unică decât în cazul când $c_i\neq c_j$ $(i\neq j)$.

Exemple.a) Funcțiile constante sunt simple.b) Funcția signum, funcția parte intreagă (luată pe un interval mărginit) si funcția lui Heaviside, sunt funcții $\mathscr{B}_{\mathbf{R}}$-simple. c)Funcția lui Dirichlet este $\mathscr{B}_{\mathbf{R}}$-simplă; $f=1.\varphi_{\mathbf{Q}}+0.\varphi_{\mathbf{Q}\setminus\mathbf{R}}$. d) Funcția parte intreagă (pe **R**) nu este $\mathscr{B}_{\mathbf{R}}$-simplă.e) Fie $I\subseteq\mathbf{R}$ un interval și $f:I\to\mathbf{R}$ o funcție continuă. Atunci, f $\mathscr{B}_{\mathbf{R}}$ -simplă $\Leftrightarrow$ f este constantă.

3.1.2. Propoziție. (Operatii cu funcții simple) *Fie $(X,\mathscr{A})$ un spațiu măsurabil; $f,g\in\mathscr{S}(X,\mathscr{A})$ și $\alpha\in\mathbf{R}$. Atunci funcțiile $f\pm g$, αf, fg, $|f|$, $f\vee g$, $f\wedge g$ sunt simple, i.e. aparțin mulțimii $\mathscr{S}(X,\mathscr{A})$.*

Dem. Fie $f, g\in\mathscr{S}(X,\mathscr{A})$ și $\alpha\in\mathbf{R}$ fixați și

$$f=\sum_{i=1}^{n} a_i\varphi_{A_i},\quad g=\sum_{j=1}^{m} b_j\,\varphi_{B_j}$$

reprezentări canonice ale lui f, resp. g.

1°) Deoarece $A_i = \bigcup_{j=1}^{m} (A_i \cap B_j)$, rezultă (P.1.1.12) $\varphi_{A_i} = \sum_{j=1}^{m} \varphi_{C_{ij}}$,

unde $C_{ij} = A_i \cap B_j$, deci

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=1}^{m} \varphi_{C_{ij}} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i\varphi_{C_{ij}}. \qquad (1)$$

Analog avem relația

$$g = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} b_j\varphi_{C_{ij}} \qquad (2)$$

Prin urmare, din (1) și (2) rezultă :

$$f \pm g = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (a_i + b_j)\varphi_{C_{ij}} \in \mathscr{S}(X, \mathscr{A})$$

Evident, familia $(C_{ij})_{i=\overline{1,n};\, j=\overline{1,m}}$ constituie o partiție finită $\mathscr{A}$-măsurabilă a lui X.

2°) Cum $A_i \cap A_j = \varnothing$ ($i \neq j$), rezultă (P.1.1.10.) $\varphi_{A_i} \cdot \varphi_{A_j} = 0$, deci

$$f^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\varphi_{A_i}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2\varphi_{A_i}$$

și deci, f^2 este simplă. Deoarece $fg = \frac{1}{2}(f^2 + g^2)$, deducem că fg este simplă.

3°) Evident, avem $|f| = \sum_{i=1}^{n} |a_i|\varphi_{A_i}$, deci $|f|$ este simplă.

4°) f și g fiind simple, din 1°) și 3°) rezultă că $f \pm g$ și $|f \pm g|$ sunt simple. Cum $f \vee g = \frac{1}{2}(f+g+|f-g|)$, deducem că $f \vee g$ este simplă.

Analog, rezultă că $f \wedge g$ este simplă.

Corolar 1. *Fie $(X, \mathscr{A})$ un spațiu măsurabil și $(A_i)_{i=\overline{1,n}} \subseteq \mathscr{A}$, $(c_i)_{i=\overline{1,n}} \subseteq$* ***R****, arbitrare. Atunci, funcția $f = \sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_{A_i}$ este simplă.*

Dem. Prin inducție relativ la n, ținînd seama de faptul că funcția caracteristică $\varphi_A : X \to \mathbf{R}$, cu $A \in \mathscr{A}$, este simplă.

Observația 1. P 1.1.2. rezultă și din P 3.2.15. observînd că funcțiile $f \pm g$, fg, etc., sunt măsurabile și au un număr finit de valori.

Observația 2. Dacă funcția modul $|f|$, este simplă, nu rezultă în mod necesar că f este simplă (Ex.3.4.).

3.2. Funcții măsurabile , Caracterizare.

Operații cu funcții măsurabile.

3.2.1. Definiție. Fie $(X,\mathscr{A},\mu)$ un spațiu cu măsură și $X \ni x \to P(x)$ o funcție propozițională, i.e. $P(x)$ este o propoziție (falsă sau adevarată), $(\forall) x \in X$. Vom spune că P este *adevărată a.p.t.* , dacă $P(x)$ este adevarată, $(\forall)$ $x \in X\setminus A$, cu $A \subseteq X$, neglijabilă.

Exemple. a) Fie $(X,\mathscr{A},\mu)$ un spațiu cu măsură și $f : X \to \mathbf{R}$ o funcție. Vom spune că f este *finită a.p.t.*, dacă $(\exists)$ $A \subseteq X$ neglijabilă, a.î f este finită pe $X\setminus A$, i.e. $|f(x)| < \infty$, $(\forall)$ $x \in X\setminus A$.

b) Fie $(X,\mathscr{A},\mu)$ un spațiu topologic cu măsură și $f:X\to\mathbf{R}$ o funcție. Vom spune că f este *continuă a.p.t.*, dacă $(\exists)$ $A \subseteq X$ neglijabilă, a.î. f este continuă pe $X\setminus A$.

c) Fie $(X,\mathscr{A},\mu)$ un spațiu cu măsură și $A,B \subseteq X$ două mulțimi. Vom spune că a.p.t. avem $A \subseteq B$, dacă $(\exists)N \subseteq X$ neglijabilă, a.î. $A\setminus N \subseteq B\setminus N$.

3.2.2. Propoziție. *Fie $(X,\mathscr{A},\mu)$ un spațiu cu măsură și $(P_n)_{n\geq 1}$ un șir de funcții propozționale definite pe X. Dacă fiecare $P_n(n\geq 1)$ este adevărată a.p.t., atunci $(\exists)A\subseteq X$ neglijabilă, a.î. $P_n(x)$ este adevărată, $(\forall)x \in X\setminus A$ și $n\geq 1$.*

Dem. $(\forall)n \geq 1$, $(\exists)$, cf. ipotezei, $A_n \subseteq X$ neglijabilă, a.î. $P_n(x)$ este adevărată, $(\forall)x\in X\setminus A$. Fie $A:=\bigcup\limits_{n\geq 1} A_n$; cum $\mu^*(A)\leq \sum\limits_{n\geq 1} \mu^*(A_n) = 0$, rezultă $\mu^*(A) = 0$, deci A neglijabilă.Evident, $P_n(x)$ este adevărată,$(\forall)x\in X\setminus A$ și $n \geq 1$.

Corolar 1.*Fie $(X,\mathscr{A},\mu)$ un spațiu cu măsură și $f_n : X\to\overline{\mathbf{R}}(n\geq 1)$ un șir de funcții finite a.p.t.Atunci,$(\exists)A\subseteq X$ neglijabilă,a.î. f_n este finită pe $X\setminus A$,$(\forall)n\geq 1$.*

Clasa funcțiilor simple este prea restrictivă. Să definim acum o clasă mai largă de funcții care joacă un rol esențial in teoria integralei.

3.2.3. Definiție. Fie $(X,\mathscr{A})$ un spațiu măsurabil, Y un spațiu topologic și $f:X\to Y$ o funcție. Vom spune că f este *măsurabilă* ($\mathscr{A}$-măsurabilă), dacă $f^{-1}(\tau_Y) \subseteq \mathscr{A}$, i.e. $f^{-1}(G) \in \mathscr{A}$, $(\forall)G \subseteq Y$ deschisă. Dacă $X=\mathbf{R}$ și $\mathscr{A}:=\mathscr{L}_{\mathbf{R}}$ (resp.$\mathscr{A}=\mathscr{B}_{\mathbf{R}}$),atunci f se numeşte *măsurabilă Lebesgue*(L-măsurabilă)(resp. *măsurabilă Borel* (B-măsurabilă)). Vom spune că f este *măsurabilă pe o mulțime* $M \subseteq X$, (putem presupune (!) că $M\in\mathscr{A}$), dacă $M \cap f^{-1}(G)\in\mathscr{A}$, $(\forall)G\in\tau_Y$, i.e. dacă funcția $f_M:(M, \mathscr{A}/_M)\to Y$ este măsurabilă.Notăm cu $\mathscr{M}(X,\mathscr{A})$ mulțimea funcțiilor $\mathscr{A}$-măsurabile $f:X\to\mathbf{R}$.

Exemple. a) Fie $X:=[0,1]$, $\mathscr{A}:=\{\emptyset,[0,2^{-1}),[2^{-1},1],[0,1]\}$ şi $f:[0,1]\to\mathbf{R}$ definită astfel $f(x)=x^2$. Atunci f nu este $\mathscr{A}$-măsurabilă, deoarece $G:=(0,1)\in\tau_{\mathbf{R}}$ şi $f^{-1}(G)\notin\mathscr{A}$. Totuşi f este $\mathscr{L}_{\mathbf{R}}$-măsurabilă, i.e. $f^{-1}(\tau_{\mathbf{R}})\subseteq\mathscr{B}_{[0,1]}$.

b) Fie $A\in\mathscr{L}_{\mathbf{R}}\setminus\mathscr{B}_{\mathbf{R}}$ fixată, şi $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ funcţia caracteristică a mulţimii A. Atunci *f este măsurabilă Lebesgue şi nemăsurabilă Borel.*

Intr-adevăr $(\forall)$ $G\in\tau_{\mathbf{R}}$, avem că $f^{-1}(G)$ este egală cu $A, A^C, \mathbf{R}, \emptyset$, după cum: $G\ni 1$ & $G\not\ni 0$; $G\ni 0$ & $G\not\ni 1$; $G\ni 0$ & $G\ni 1$; respectiv $G\not\ni 0$ & $G\not\ni 1$.

Aşadar, $f^{-1}(\tau_{\mathbf{R}})=\{A, A^C,\mathbf{R},\emptyset\}\subseteq\mathscr{L}_{\mathbf{R}}$ şi $f^{-1}(\tau_{\mathbf{R}})\subseteq\mathscr{B}_{\mathbf{R}}$, etc.

3.2.4. Propoziţie. *Fie $(X,\mathscr{A})$ un spaţiu măsurabil, Y,Z, două spaţii topologice, $f:X\to Y$ o funcţie măsurabilă şi $g:Y\to Z$ o funcţie continuă. Atunci $g\circ f$ este măsurabilă.*

Dem. g fiind continuă, rezultă (T.1.2.5.) $g^{-1}(\tau_Z)\subseteq\tau_Y$; f fiind măsurabilă, atunci rezultă $f^{-1}(\tau_Y)\subseteq\mathscr{A}$. Prin urmare, $(g\circ f)^{-1}(\tau_Z)=f^{-1}(g^{-1}(\tau_Z))\subseteq f^{-1}(\tau_Y)\subseteq\mathscr{A}$, etc.

Observaţie. Fie $f,g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ două funcţii, cu f continuă şi g măsurabilă (L). De aici nu rezultă în mod necesar că $g\circ f$ este măsurabilă (L).

3.2.5. Propoziţie. *Fie $(X,\mathscr{A})$ un spaţiu topologic măsurabil, cu proprietatea că $\tau_X\subseteq\mathscr{A}$ şi fie Y un spaţiu topologic. Atunci, $(\forall)$ $f:X\to Y$ o funcţie continuă, rezultă f măsurabilă.*

Dem. f fiind continuă, rezultă $f^{-1}(\tau_Y)\subseteq\tau_X$, deci $f^{-1}(\tau_Y)\subseteq\mathscr{A}$.

Corolar 1. *Fie $X\in\mathscr{L}_{\mathbf{R}}$, Y un spaţiu topologic şi $f:X\to Y$ continuă. Atunci, f este măsurabilă Borel (resp. Lebesgue).*

Dem. Cum $f^{-1}(\tau_Y)\subseteq\tau_X\subseteq\mathscr{B}_X\subseteq\mathscr{L}_X$, putem aplica Cor. 1.

3.2.6. Teoremă. *Fie $(X,\mathscr{A})$ un spaţiu măsurabil, Y un spaţiu topologic şi $f:X\to Y$ o funcţie. Atunci, Condiţiile 1°) – 3°) sunt echivalente:*

1°) *f măsurabilă, i.e. $f^{-1}(\tau_Y)\subseteq\mathscr{A}$;* 2°) *$f^{-1}(\mathscr{B}_Y)\subseteq\mathscr{A}$, i.e. $f^{-1}(B)\in\mathscr{A}$, $(\forall)B\in\mathscr{B}_Y$;*

3°) *$(\exists)\mathscr{C}\subseteq 2^Y$, a.î. $\sigma a(\mathscr{C})=\mathscr{B}_Y$ şi $f^{-1}(\mathscr{C})\subseteq\mathscr{A}$;*

4°) *Dacă Y posedă o bază numerabilă $\mathscr{C}$, a.î. $f^{-1}(\mathscr{C})\subseteq\mathscr{A}$, atunci f este măsurabilă*

Dem. 1°) ⇒ 2°) Prin ipoteză avem $f^{-1}(\tau_Y)\subseteq\mathscr{A}$. Atunci, (T.2.1.14.) avem:

$$f^{-1}(\mathscr{B}_Y)=f^{-1}(\sigma a(\tau_Y))=\sigma a(f^{-1}(\tau_Y))\subseteq\sigma a(\mathscr{A})=\mathscr{A}$$

2°) ⇒ 3°). Putem lua, spre exemplu, $\mathscr{C}=\tau_Y$ sau $\mathscr{C}=\tau_Y^c$.

3°) ⇒ 1°). Fie $\mathscr{C}\subseteq 2^Y$, cu $\sigma a(\mathscr{C})=\mathscr{B}_Y$ şi $f^{-1}(\mathscr{C})\subseteq\mathscr{A}$. Atunci, (T.2.1.14.)

$$f^{1}(\tau_Y) \subseteq f^{1}(\sigma a(\tau_Y)) = f^{1}(\mathcal{B}_Y) = f^{1}(\sigma a(\mathcal{C})) = \sigma a(f^{1}(\mathcal{C})) \subseteq \sigma a(\mathcal{A}) = \mathcal{A},$$

deci f este măsurabilă.

$4°) \Rightarrow 1°)$. Fie $\mathcal{C}$ o bază numerabilă a lui Y, a.î. $f^{1}(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{A}$.Atunci, $(\forall)G\in\tau_Y,(\exists)(C_i)_{i\in I}\subseteq\mathcal{C}$,cu $\bigcup_{i\in I} C_i= G$,deci $f^{-1}(G)=\bigcup_{i\in I} f^{-1}(C_i) \in \sigma a(f^{-1}(\mathcal{C}))\subseteq \mathcal{A}$.

Așadar, $f^{1}(\tau_Y) \subseteq \mathcal{A}$, deci f este măsurabilă cf. 1°).

Altfel; fie $\mathcal{C}$ cu proprietatea din enunț.Atunci (T.2.1.14.)$\sigma a(\mathcal{C})=\mathcal{B}_Y$, deci

$$f^{1}(\mathcal{B}_Y) =f^{1}(\sigma a(\mathcal{C})) = \sigma a(f^{-1}(\mathcal{C})) \subseteq \sigma_a(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$$

Așadar $(\exists)\mathcal{C}\subseteq 2^Y$, a.î. $\sigma a(\mathcal{C}) = \mathcal{B}_Y$ și $f^{-1}(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{A}$, i.e. Cond. 3°).

Corolar 1. *Fie $(X,\mathcal{A})$ un spațiu măsurabil, Y un spațiu metric separabil si $f:X\to Y$ o funcție. Atunci, f măsurabilă $\Leftrightarrow$ $(\exists)$ $A=\{a_1,a_2,a_3,...\}$ densă în Y, a.î. $f^{-1}(B_Y(a_n,m^{-1}))\in\mathcal{A}$, $(\forall)n,m\geq 1$.*

Dem. Aplicăm T.3.2.6.(4^0), ținând seama că familia $(B_Y(a_n,m^{-1}))_{n,m\geq 1}$ este o bază numerabilă a lui Y (P.1.2.16.).

3.2.7. Teoremă. *Fie $(X, \mathcal{A})$ un spațiu măsurabil și $f=(f_i)_{i=\overline{1,n}}:X\to \mathbf{R}^n$ o funcție. Atunci f măsurabilă $\Leftrightarrow f_i$ măsurabilă, $(\forall)$ $i=\overline{1,n}$*

Dem.$(\Rightarrow)$ Evident $f_i:=pr_i\circ f$, unde $pr_i:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ este proiecția de indice i $(i=\overline{1,n})$.Din f măsurabilă și pr_i continuă,rezultă (P.3.2.4.) f_i măsurabilă.

$(\Leftarrow)$ Pentru simplificarea expunerii considerăm cazul n = 2. Familia numerabilă $\mathcal{C}:=\{(a_1,b_1)x(a_2,b_2);a_1,b_1,a_2,b_2\in\mathbf{Q}\}$este o bază a spațiului topologic $\mathbf{R}^2$ (P.1.2.27., Cor.2) și $(\forall)$ $I,J\in\mathcal{C}$, avem:

$$f^{1}(IxJ) = \{x\in X;(f_1(x), f_2(x)) \in IxJ \} = f_1^{-1}(I) \cap f_2^{-1}(J)$$

Funcțiile $f_i(i=\overline{1,2})$ fiind măsurabile, avem $f_1^{-1}(I),f_2^{-1}(J)\in \mathcal{A}$, deci $f^{1}(IxJ)$ $\in\mathcal{A}$ și deci,$f^{1}(\mathcal{C}) \subseteq\mathcal{A}$. Aplicând T.3.2.6.$4^0$, conchidem f măsurabilă.

3.2.8. Teoremă. *Fie $(X, \mathcal{A})$ un spațiu măsurabil și $f:X\to\overline{\mathbf{R}}$ o funcție. Atunci Condițiile 1)-3) sunt echivalente:*

1°) *f măsurabilă, i.e. $f^{1}(\tau_{\overline{R}}) \subseteq\mathcal{A}$;* 2°) *$\{x\in X; f(x) >\alpha\}\in\mathcal{A},(\forall)\alpha \in \mathbf{R}$;*

3°) *$\{x\in X;\alpha < f(x) <\beta\}\in\mathcal{A},(\forall)-\infty<\alpha<\beta\leq\infty$.*

Dem. $1°) \Rightarrow 2°)$ Fie $\mathcal{C}:=\{(\alpha,\infty];\alpha\in\mathbf{R}\}$. Evident, $\sigma a(\mathcal{C}) =\mathcal{B}_{\mathbf{R}}$, deci, cf. T.3.2.6.$(3^0)$, rezultă:f măsurabilă $\Leftrightarrow f^{-1}(\mathcal{C})\subseteq\mathcal{A}$. Prin urmare avem:

$1°)\Leftrightarrow f^{1}(\mathcal{C})\subseteq\mathcal{A}\Leftrightarrow f^{1}((\alpha,\infty])\in\mathcal{A},(\forall)\alpha\in\mathbf{R}\Leftrightarrow\{x\in X;f(x)>\alpha\}\in\mathcal{A},(\forall)\alpha\in\mathbf{R}\Leftrightarrow 2°)$.

$1°) \Rightarrow 3°)$ .Același raționament, luând: $\mathcal{C}:=\{ (\alpha,\beta) ; -\infty < \alpha < \beta \leq \infty \}$.

Corolar 1. *Fie $(X,\mathcal{A})$ un spațiu măsurabil, $A\in\mathcal{A}$ o mulțime și $f:X\to\overline{\mathbf{R}}$ o funcție. Atunci f măsurabilă pe $A \Leftrightarrow A\cap\{x\in X; f(x)>\alpha\}\in\mathcal{A}$, $(\forall)\alpha\in\mathbf{R}$.*

Corolar 2. *Fie $(X,\mathcal{A})$ un spațiu măsurabil și $f:X\to\overline{\mathbf{R}}$ o funcție măsurabilă. Atunci, $(\forall)y\in\overline{\mathbf{R}}$, rezultă că $f^{1}(\{y\})\in\mathcal{A}$.*

Dem. Ținem seama că $f^{1}(\{y\}) = \{x\in X; f(x)\geq y\}\cap\{x\in X; f(x)\leq y\}$

Observație. In T.3.2.8. putem înlocui în 2^0) inegalitatea > cu una din inegalitatățile: $\geq$, $<$, sau $\leq$, iar in 3^0) inegalitatile $(<.<)$ cu una din inegalitățile: $(\leq,<)$, $(<,\leq)$, $(\leq,\leq)$, utilizând faptul că $\overline{Q}=\mathbf{R}$ și $\mathcal{A}$ este σ-algebră.

3.2.9. Propoziție. *Fie $(X,\mathcal{A})$ un spațiu măsurabil și $f:X\to\overline{\mathbf{R}}$ o funcție arbitrară. Atunci au loc afirmațiile:*

1) Dacă f constantă, rezultă f măsurabilă;

2) Dacă f măsurabilă (pe X) și $A\in\mathcal{A}$, rezultă f măsurabilă pe A;

3) Dacă $(\exists)$ $(A_k)_{k\in K}\subseteq\mathcal{A}$, o familie cel mult numerabilă, care acoperă X și f este măsurabilă (resp. constantă) pe fiecare A_k $(k\in K)$, rezultă f măsurabilă;

4) Dacă f măsurabilă și $A\in\mathcal{A}$, rezultă $f\varphi_A$ măsurabilă;

5) Dacă f măsurabilă și $\overline{f}:X\to\overline{\mathbf{R}}$, este definită astfel: $\overline{f}(x)=f(x)$, dacă $|f(x)|<\infty$ și $\overline{f}(x)=0$, dacă $|f(x)|=\infty$, rezultă $\overline{f}$ măsurabilă;

6) Dacă f măsurabilă și finită a.p.t. pe X,relativ la o măsură, $\mu:\mathcal{A}\to\overline{\mathbf{R}}$,rezultă că funcția $\overline{f}$,definită mai sus,este măsurabilă și $f=\overline{f}$ a.p.t.;

7) Dacă f este măsurabilă, funcția sign f este măsurabilă.

Dem. 1) Fie $f=c$ și $\alpha\in\mathbf{R}$ fixați. Atunci mulțimea $A:=\{x\in X; f(x)>\alpha\}$ este egală cu $\varnothing$ sau X, deci $A\in\mathcal{A}$ și deci (T.3.2.8.) f măsurabilă.

2)$(\forall)\alpha\in\mathbf{R}$,avem $\{x\in X; f(x)>\alpha\}\in\mathcal{A}$,deci $A\cap\{x\in X; f(x)>\alpha\}\in\mathcal{A}$ etc.

3)$(\forall)\alpha\in\mathbf{R}$,avem: $\{x\in X; f(x)>\alpha\}=\bigcup\limits_{k\in K}\{x\in A_k; f(x)>\alpha\}$.Cum mulțimea $\{x\in A_k; f(x)>\alpha\}\in\mathcal{A}$, $(\forall)k\in K$, deoarece f este măsurabilă pe A_k, rezultă $\{x\in X; f(x)>\alpha\}\in\mathcal{A}$, deci (T.3.2.8.) f este măsurabilă.

4) Fixăm $A\in\mathcal{A}$ și fie $g:=f\varphi_A$. Atunci $g|_{X\setminus A}=0$ și $g|_A=f|_A$, deci $g|_{X\setminus A}$ măsurabilă (cf. 1^0) și (cf. 2^0) și $f|_A$, deci $g|_A$, este măsurabilă (conform 2^0). Din 3^0 rezultă g este măsurabilă.

5) funcția f fiind măsurabilă, rezultă (T.3.2.8.,Cor.2) $A:=\{x\in X; |f(x)|=\infty\}\in\mathcal{A}$,deci $B:=X\setminus A\in\mathcal{A}$. Cum $\overline{f}|_A=0$, rezultă (cf. 1^0) $\overline{f}$ măsurabilă pe A. Deoarece $f|_B$ este măsurabilă (cf.2^0) și $\overline{f}|_B=f|_B$, rezultă $\overline{f}$ măsurabilă pe B. Prin urmare $\overline{f}$ este măsurabilă pe $A\cup B=X$(cf. 3^0).

6) Dacă f finită a.p.t., cu notațiile din 5^0, avem $A\in\mathscr{A}$ și $\mu(A)=0$. Cum $f=\overline{f}$, pe $X\setminus A$, rezultă $f=\overline{f}$, a.p.t.

7) Fie $A:=\{x\in X;\ f(x)>0\}$, $B:=\{x\in X;\ f(x)<0\}$, $C:=X\setminus(A\cup B)$ și $g:=\mathrm{sign}(f)$. Atunci (T.3.2.8) avem $A,B,C\in\mathscr{A}$. Deoarece $A\cup B\cup C=X$ și $g|_A=1$, $g|_B=-1$, $g|_C=0$, din 1) și 3) rezultă g măsurabilă.

Corolar 1. *Fie $(X,\mathscr{A})$ un spațiu măsurabil; $f,g\colon X\to\overline{\mathbf{R}}$ două funcții măsurabile, $A\in\mathscr{A}$ și $h\colon X\to\overline{\mathbf{R}}$ o funcție definită astfel: $h/_A=f/_A$ și $h/_{X\setminus A}=g/_{X\setminus A}$. Atunci h este măsurabilă.*

Dem. Funcțiile $f|_A$ și $g|_{X\setminus A}$ sunt măsurabile (P.3.2.9. 2^0). Atunci $h|_A$ și $h|_{X\setminus A}$ sunt funcții măsurabile, deci (P.3.2.9,3^0)) h măsurabilă.

Corolar 2. *Fie $(X,\mathscr{A})$ un spațiu metric măsurabil, a.î. $\tau_X\subseteq\mathscr{A}$ și fie $f\colon X\to\overline{\mathbf{R}}$ o funcție. Atunci f măsurabilă $\Leftrightarrow$ f măsurabilă pe fiecare mulțime mărginită și închisă (resp. deschisă) din X.*

Dem. ($\Rightarrow$) $(\forall)A\in\mathscr{A}$, în particular $(\forall)\ \bar{A}=A\in\tau_X$, rezultă (P.3.2.9. 2^0) f măsurabilă pe A.

($\Leftarrow$) Fixăm $x_0\in X$. Evident, $X=\bigcup\limits_{n\geq 1}B[x_0,n]$.Cf. ipotezei, f este măsurabila pe fiecare mulțime $B[x_0,n](n\geq 1)$, deci (P3.2.9, 3^0) f măsurabilă pe X.

Corolar 3. *Fie $(X,\mathscr{A},\mu)$ un spațiu cu măsură completă și $f\colon X\to\overline{\mathbf{R}}$ o funcție arbitrară.Atunci f este măsurabilă pe orice mulțime neglijabilă $A\subseteq X$.*

Dem. Fie $A\subseteq X$, neglijabilă, i.e. $\mu^*(A)=0$. Fixăm $\alpha\in\mathbf{R}$;atunci, $M:=\{x\in A;f(x)>\alpha\}\subseteq A$, deci $\mu^*(M)=0$ și deci, μ fiind completă, rezultă $M\in\mathscr{A}$.

Prin urmare,(P.3.2.9) f măsurabilă pe A.

Observația 1. Condiția μ *completă* din Cor. 3 este esențială

Contraexemplu. Fie $X=[0,1]$,$\mathscr{A}=\{\varnothing,\mathscr{A}\}$, $A=[0,2^{-1}]$, $f=\varphi_A$ și $\mu\colon\mathscr{A}\to\mathbf{R}$, $\mu=0$. Atunci, $\mu^*(A)=0$, deci A neglijabilă și $f=0$ pe $X\setminus A$, deci $f=0$(a.p.t.) Totuși, f nu este măsurabilă, deoarece $\{x\in X;\ f(x)>0\}=A\notin\mathscr{A}$.

Observația 2. Proprietățile 1)-3) din P.3.2.9. sunt adevărate și pentru funcții f cu valori într-un spațiu topologic.

3.2.10. Propoziție.*Fie $(X,\mathscr{A})$ un spațiu măsurabil și $A\subseteq X$ o mulțime. Atunci, $A\in\mathscr{A}\Leftrightarrow\varphi_A\colon X\to\mathbf{R}$,funcția caracteristică a lui A, este măsurabilă.*

Dem. ($\Rightarrow$) Fie $M:=\{x\in X;\ f(x)>-1\}$. Atunci (T.3.2.8.) $M\in\mathscr{A}$ și $M=A$.

($\Leftarrow$) Dacă $A\in\mathscr{A}$și $f=\varphi_A$, atunci $(\forall)\alpha\in\mathbf{R}$ mulțimea $\{x\in X;\ f(x)>\alpha\}$ este egală cu $\varnothing$, A,X, după cum $\alpha\geq 1$, $0\leq\alpha<1$, $\alpha<0$ respectiv. Așadar $\{x\in X;\ f(x)>\alpha\}\in\mathscr{A}$, $(\forall)\alpha\in\mathbf{R}$, deci (T.3.2.8,$2^0$)) f măsurabilă.

3.2.11. Propoziție. *Fie $(X,\mathscr{A})$ un spațiu măsurabil și $f:X\to \mathbf{R}$ o funcție. Atunci: f este simplă $\Leftrightarrow$ f este măsurabilă şi f ia un număr finit de valori.*

Dem. ($\Rightarrow$) Fie $f=\sum_{1\le i\le n} c_i\varphi_{A_i}$ o reprezentare canonică a lui f. Atunci $f(X)=\bigcup_{1\le k\le n}\{c_k\}$ și $(\forall)\ \alpha\in\mathbf{R}$, mulțimea $A=\{x\in X;\ f(x)>\alpha\}$ este de forma: $\varnothing$, X, $\bigcup_{j\in J} A_j$, cu $J\subseteq\{1,2,...n\}$. Aşadar, $A\in\mathscr{A}$, deci (T.3.2.8,2^0)) f este măsurabilă.

($\Leftarrow$) Fie f măsurabilă, a.î. să avem $f(X) = \{c_1,c_2,...c_n\}$. Atunci familia $(A_i)_{i=\overline{1,n}}$, unde $A_i:=f^{-1}(\{c_i\})$, este mutual disjunctă, acoperă X şi $A_i\in\mathscr{A}$, $(\forall)\ i\in\overline{1,n}$. Evident avem $f=\sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_{A_i}$, prin urmare f este simplă.

3.2.12. Propoziție. *Fie $(X,\mathscr{A},\mu)$ un spațiu cu măsură completă și $f,g:X\to\overline{\mathbf{R}}$ două funcții egale a.p.t. Dacă f este măsurabilă, atunci g este măsurabilă.*

Dem. Fie $A:=\{x\in X;\ f(x)\neq g(x)\}$. Cf. ipotezei A este neglijabilă, i.e. $\mu^*(A)=0$ deci μ fiind completă, rezultă $A\in\mathscr{A}$. Fixăm $\alpha\in\mathbf{R}$; atunci avem:

$$\{x\in X;\ g(x)>\alpha\}=\{x\in X\backslash A;\ g(x)>\alpha\}\cup\{x\in A;\ g(x)>\alpha\}=$$
$$=(\{x\in X;\ f(x)>\alpha\}\backslash A)\cup\{x\in A; g(x)>\alpha\};$$

f fiind măsurabilă, rezultă că $B:=\{x\in X;\ f(x)>\alpha\}\in\mathscr{A}$, deci $B\backslash A\in\mathscr{A}$. Cum μ este completă şi $C:=\{x\in A; g(x)>\alpha\}\subseteq A$, iar $\mu^*(A)=0$, rezultă $C\in\mathscr{A}$. Aşadar, $\{x\in X;\ g(x)>\alpha\}=(B\backslash A)\cup C\in\mathscr{A}$, deci (T.3.2.8.) g este măsurabilă.

Observație. Condiția μ *completă*, în P.3.2.12, este esențială.

Contraexemplu. Fie spațiul cu măsură $([0,1],\mathscr{B}_{[0,1]},\beta)$, $K\subseteq[0,1]$ mulțimea lui Cantor (Ex.2.74.) și $A\subseteq K$ o mulțime cu proprietatea $A\in\mathscr{L}_{[0,1]}\backslash\mathscr{B}_{[0,1]}$(Ex.2.77.). Atunci funcția, $f:[0,1]\to\mathbf{R}$, unde $f=\varphi_A$, are proprietățile: $f=0$ a.p.t. (deoarece $\beta(K)=\lambda(K)=0$), și mulțimea $\{x\in[0,1];\ f(x)>1/2\}$, care este egală cu A, nu aparține lui $\mathscr{B}_{[0,1]}$. Prin urmare f nu este $\mathscr{B}_{[0,1]}$-măsurabilă.

3.2.13. Propoziție. *Fie $X\in\mathscr{L}_{\mathbf{R}}$ o mulțime și $f:X\to\mathbf{R}$ o funcție continuă a.p.t.; în particular f continuă sau monotonă. Atunci f este măsurabilă Lebesgue pe X.*

Dem. Fie A=Disc(f) ; prin ipoteză A este λ-neglijabilă, i.e. $\lambda^*(A)=0$, deci $A\in\mathscr{L}_{\mathbf{R}}$ şi deci $X\backslash A\in\mathscr{L}_{\mathbf{R}}$. Fixăm $\alpha\in\mathbf{R}$; evident avem:

$\{x\in X;\ f(x)>\alpha\} = \{x\in X\setminus A;\ f(x)>\alpha\} \cup \{x\in A;\ f(x)>\alpha\} = M\cup N$

Cum f este continuă pe X\A, rezultă (P.3.2.5, Cor.1) f măsurabilă pe X\A, deci $M\in\mathscr{L}_X$. Deoarece $N\subseteq A$ şi λ completă, rezultă $N\in\mathscr{L}_X$. Aşadar,avem $\{x\in X;\ f(x)>\alpha\}= M\cup N\in\mathscr{L}_X$, deci (T.3.2.8.) f măsurabilă.

Corolar 1. *Fie $D\subseteq\mathbf{R}$ o mulţime deschisă şi $f:D\to\mathbf{R}$ o funcţie local R-integrabilă. Atunci f este măsurabilă Lebesgue.*

Dem. Fie $I\subseteq\mathbf{R}$, un interval deschis, fixat. Evident, $(\exists)$ $(I_n)_{n\geq 1}$ un şir de intervale compacte din **R**, care acoperă I. Din ipoteză rezultă: $(\forall)n\geq 1$, f este R-integrabila pe I_n, deci (T.1.3.23.) f continuă a.p.t. pe I_n şi deci (P.3.2.13.) f măsurabilă (L) pe I_n. Din (P.3.2.9,3^0) rezultă f măsurabilă (L) pe I.

D fiind deschisă, $(\exists)(I_k)_{k\in K}$, familie cel mult numerabilă de intervale deschise, a.î. $\bigcup_k I_k = D$. Cum f este măsurabilă (L) pe fiecare $I_k (k\in K)$, conchidem că f este măsurabilă (L) pe D.

Observaţie. Fie $f:[0,1]\to\mathbf{R}$ funcţia lui Dirichlet. Atunci f este măsurabilă Lebesgue şi nu este R-integrabilă.

3.2.14. Definiţie. Fie $(X,\mathscr{A},\mu)$ un spaţiu cu măsură şi $f,g:X\to\overline{\mathbf{R}}$ două funcţii măsurabile. Atunci *funcţia sumă $f\oplus g$* se defineşte astfel:

$(\forall)x\in X, (f\oplus g)(x) = f(x)+g(x)$, dacă $f(x)+g(x)$ are sens şi $(f\oplus g)(x) = 0$ dacă $f(x)+g(x)$ nu are sens

a)Dacă funcţiile f şi g sunt finite a.p.t.,atunci avem:$(f\oplus g)(x)=f(x)+g(x)$, a.p.t. pe X, iar dacă $(\exists)$ $x\in X$, cu $f(x) = - g(x) = \pm\infty$, atunci $(f\oplus g)(x) = 0$.

b)Operaţia de adunare astfel definită este comutativă însă nu este în general asociativă, decât a.p.t. şi aceasta numai în cazul în care funcţiile respective sunt finite a.p.t.

Observaţie. Definiţia 3.2.14. este justificată, deoarece funcţiile integrabile sunt finite a.p.t., iar integrala dintr-o funcţie integrabilă f nu se modifică dacă modificăm valorile lui f pe o mulţime neglijabilă. Din acest punct de vedere putem vorbi de o funcţie f definită pe un spaţiu cu măsură X, *dacă* f *este definită a.p.t. pe* X. In continuare vom nota $f\oplus g$ prin $f + g$, semnificaţia sumei rezultând din context.

3.2.15. Teorema. (Operaţii cu funcţii măsurabile) *Fie $(X,\mathscr{A})$ un spaţiu măsurabil şi $\mathscr{M}(X,\mathscr{A})$ mulţimea funcţiilor măsurabile $f:X\to\mathbf{R}$. Atunci avem:*

1^o)$(\forall)$ $f,g\in\mathscr{M}(X,\mathscr{A})$ şi $\alpha\in\mathbf{R}$, rezultă că funcţiile $f\pm g$, αf, $|f|$, $f\vee g$, $f\wedge g$, fg aparţin mulţimii $\mathscr{M}(X,\mathscr{A})$.

2^o)$(\forall)(f_n)_{n\geq 1}\subseteq\mathscr{M}(X,\mathscr{A})$,rezultă că funcţiile $\sup_{n\geq 1}(f_n)$ şi $\inf_{n\geq 1}(f_n)$ aparţin mulţimii $\mathscr{M}(X,\mathscr{A})$

3°) $(\forall)(f_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{M}(X,\mathcal{A})$, cu $f_n \xrightarrow{\Delta} f$, unde $f:X\to\mathbf{R}$, rezultă că $f\in\mathcal{M}(X,\mathcal{A})$

Dem. 1°) Dacă $x\in X, \alpha\in\mathbf{R}$ și $f(x)+g(x)>\alpha$, există $r\in\mathbf{Q}$, cu $f(x)>r>\alpha-g(x)$, i.e. $f(x)>r$ și $g(x)>\alpha-r$, și reciproc. Atunci putem scrie:

$$\{x\in X;\ (f+g)(x)>\alpha\} = \bigcup_{r\in Q} (\{x\in X;\ f(x)>r\} \cap \{x\in X;\ g(x)>\alpha-r\}) \quad (1)$$

Cum f și g sunt măsurabile, rezultă că mulțimile $\{x\in X;\ f(x)>r\}$ și $\{x\in X;\ g(x)>\alpha-r\}$ aparțin lui $\mathcal{A}$, deci intersecția lor aparține lui $\mathcal{A}$ și deci, Q fiind numerabilă, deducem din (1) că $\{x\in X;\ (f+g)(x)>\alpha\}\in\mathcal{A}$, de unde rezultă (T.3.2.8.) f+g măsurabilă.

Evident -g $\in \mathcal{M}(X,\mathcal{A})$, deci f-g $\in \mathcal{M}(X,\mathcal{A})$. Analog $\alpha f \in \mathcal{M}(X,\mathcal{A})$.

Dacă $\alpha\geq 0$, atunci avem:

$\{x\in X;\ |f(x)|>\alpha\} = \{x\in X;\ f(x)>\alpha\} \cup \{x\in X;\ f(x)<-\alpha\}$, deci $\{x\in X;\ |f(x)|>\alpha\}\in\mathcal{A}$, iar dacă $\alpha<0$, avem $\{x\in X;\ |f(x)|>\alpha\} = X\in\mathcal{A}$, de unde rezultă (T.3.2.8.) $|f| \in\mathcal{M}(X,\mathcal{A})$.

Deoarece avem $f\vee g = \frac{1}{2}(f+g+|f-g|)$, din cele de mai sus rezultă că: $f\vee g \in \mathcal{M}(X,\mathcal{A})$. Analog se arată că $f\wedge g \in \mathcal{M}(X,\mathcal{A})$.

Dacă $\alpha \geq 0$, atunci avem:

$\{x\in X;\ |f(x)|^2>\alpha\} = \{x\in X;\ f(x)>\sqrt{\alpha}\} \cup \{x\in X;\ f(x)<-\sqrt{\alpha}\}$, deci $\{x\in X;\ |f(x)|^2>\alpha\}\in A$, iar dacă $\alpha<0$, atunci avem: $\{x\in X;\ |f(x)|^2>\alpha\} = X\in\mathcal{A}$, de unde rezultă (T.3.2.8.) că $|f|^2$ este măsurabilă, i.e. $|f|^2 \in \mathcal{M}(X,\mathcal{A})$.

In fine, din relația evidentă $fg = \frac{1}{4}(|f+g|^2-|f-g|^2)$, deducem că funcția fg este măsurabilă.

2°) Evident, avem relația:

$$\{x\in X;\ \sup f_n(x)>\alpha\} = \bigcup_{n\geq 1} \{x\in X;\ f_n(x)>\alpha\},\ (\forall)\alpha\in\mathbf{R}.$$

Deoarece $\{x\in X; f_n(x)>\alpha\}\in\mathcal{A}, (\forall)n\geq 1$, rezultă $\{x\in X; \sup_{n\geq 1}(f_n)(x)>\alpha\}\in\mathcal{A}$, deci funcția $\sup\limits_{n\geq 1} f_n$ este măsurabilă. Cum avem $\inf\limits_{n\geq 1} f_n = -\sup\limits_{n\geq 1}(-f_n)$, obținem că funcția $\inf\limits_{n\geq 1} f_n$ este măsurabilă. Din cele de mai sus și din relațiile:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} f_n = \inf_{n\to\infty}(\sup_{k\geq n} f_k),\quad \underline{\lim_{n\to\infty}}(f_n) = \sup_{n\to\infty}(\inf_{k\geq n} f_k),$$

deducem că funcțiile $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} f_n$ și $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}(f_n)$ sunt măsurabile.

3) Aplicăm 2) ținând cont că $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} f_n(x) = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} f_n(x)$.

Corolar 1. *Fie $(X, \mathscr{A})$ un spațiu măsurabil și $f,g:X\to\overline{\mathbf{R}}$ două funcții măsurabile. Atunci funcția $f+g$ este măsurabilă.*

Dem. Considerăm mulțimile următoare:

$A_1 = \{x; |f(x)| < \infty,\ |g(x)| < \infty\}$; $A_2 = \{x; |f(x)| < \infty,\ |g(x)| = \infty\}$;

$A_3 = \{x; |f(x)| = \infty, |g(x)| < \infty\}$; $A_4 = \{x; f(x) = g(x) = \pm\infty\}$;

$A_5 = \{x; f(x) = -g(x) = \pm\infty\}$.

Din T.3.2.8. rezultă că mulțimile $A_i(i=\overline{1,5})$ sunt măsurabile iar din T.3.2.15. & P.3.2.9.5^0), rezultă că funcția f+g este măsurabilă pe A_i, $(\forall)i=\overline{1,5}$. Cum $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_j = X$, rezultă că f+g este măsurabilă pe X.

Corolar 2. *Fie $(X,\mathscr{A})$ un spațiu măsurabil și $f : X\to\overline{\mathbf{R}}$ o funcție. Atunci f măsurabilă$\Leftrightarrow$funcțiile $f^+ = f \vee 0$ și $f^- = -(f) \vee 0$ sunt măsurabile.*

Dem. Aplicăm T.3.2.15. ținând seama de relația $f = f^+ - f^-$.

Observație. Să prezentăm o variantă mai generală a afirmației 3^0) din T.3.2.15.,convenabilă în aplicații. *Fie* $f_n:X\to\mathbf{R}(n\geq1)$ *un șir convergent (a.p.t.) de funcții măsurabile finite (a.p.t.). Atunci* $(\exists)$ $f:X\to\overline{\mathbf{R}}$ *măsurabilă a.î.* $f_n\xrightarrow{s}f$.

3.2.16. Teoremă. *Fie $(X,\mathscr{A})$ un spațiu măsurabil și $f:X\to\overline{\mathbf{R}}$ o funcție măsurabilă. Atunci $(\exists)$ $f_n:X\to\mathbf{R}(n\geq1)$, un şir de funcții simple, a.î. $f_n \xrightarrow{\ s\ } f$. Dacă f este și mărginită (resp. $f\geq0$), șirul $(f_n)_{n\geq1}$ converge uniform (resp. este monoton crescător).*

Dem. Presupunem, pentru început, $f\geq0$ și fie $f_n:X\to\mathbf{R}(n\geq1)$, un şir de funcții definit astfel:

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{k-1}{2^n}, & \dfrac{k-1}{2^n} \leq f(x) < \dfrac{k}{2^n}, (k = \overline{1, n2^n}) \\ n & , f(x) \geq n \end{cases}$$

Sa notăm $A_0 := \{x\in X;\ f(x)\geq n\}$; $A_k := \{x\in X;\ \dfrac{k-1}{2^n} \leq f(x) < \dfrac{k}{2^n}\}$, $(\forall)k\in\overline{1,n2^n}$, unde $n\geq1$ este fixat. Evident familia $(A_k)_{k\in\overline{0,n2^n}}$ este o partiție măsurabilă a lui X și avem relația:

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n}\varphi_{A_k}(x) + n\varphi_{A_0}(x),\ (\forall)\ x \in X,$$

deci f_n este o funcție simplă. Este clar că $f_{n+1} \geq f_n$, $(\forall)n \geq 1$.

(a) Dacă $x\in X$ și $(\exists)$ N natural, cu $f_n(x) \leq N$, rezultă:

$0 \leq f(x) - f_n(x) \leq 1/2^n$, $(\forall)$ $n\geq N$, deci $f_n(x)\to f(x)$.

b) Dacă $x\in X$ şi $f(x) = \infty$, avem $f(x) \geq n$, $(\forall)n\geq 1$, deci $f_n(x) = n$, $(\forall)n\geq 1$ şi deci $f_n(x)\to \infty = f(x),(n\to \infty)$

Prin urmare, în ambele cazuri, avem : $(\forall)x\in X, f_n(x) \to f(x)$, $(n\to \infty)$.

Presupunem acum f măsurabilă arbitrară. Atunci $f = f^+ - f^-$ şi f^+, f^- sunt măsurabile (T.3.2.15,Cor.1) nenegative. Există, deci, f_n, $g_n:X\to\mathbf{R}(n\geq 1)$ două şiruri de funcţii simple, cu $f_n \xrightarrow{s} f^+$ şi $g_n \xrightarrow{s} f^-$.

Prin urmare, funcţiile $h_n: = f_n - g_n (n\geq 1)$ sunt simple şi avem $h_n \xrightarrow{s} f^+ - f^- = f$.

Corolar1.*Fie$(X,\mathscr{A})$un spaţiu măsurabil şi $f:X\to\overline{\mathbf{R}}$ o funcţie măsurabilă. Atunci $(\exists)f_n:X\to\mathbf{R}(n\geq 1)$, un şir de funcţii simple, a.î. $f_n(x)\uparrow f(x)$, $(\forall)x\in X$.*

3.3. Şiruri convergente de funcţii măsurabile: a.p.t., aproape uniform , în măsură

3.3.1. Definiţie. Fie $(X,\mathscr{A},\mu)$ un spaţiu cu măsură şi $f_n:X\to\mathbf{R}(n \geq 1)$ un şir de funcţii finite a.p.t. Vom spune că $(f_n)_{n\geq 1}$ *converge a.p.t.*(aproape peste tot), dacă $(\exists)$ o funcţie $f:X\to\overline{\mathbf{R}}$, $(\exists)$ $A \subseteq X$ neglijabilă, a.î. şirul $(f_n(x))_{n\geq 1}$ este convergent (în $\overline{\mathbf{R}}$) şi are limita $f(x)$, $(\forall)$ $x\in X\setminus A$; vom scrie atunci $f_n \xrightarrow{\text{a.p.t.}} f$

a) Dacă $(f_n)_{n\geq 1}$ este un şir de funcţii, finite a.p.t., care converge a.p.t., funcţia limită f nu este, în mod necesar, finită a.p.t.

b) Dacă $(f_n)_{n\geq 1}$ este un şir de funcţii, finite a.p.t., care converge a.p.t., atunci funcţia limită este unic determinată a.p.t., i.e. dacă $f_n \xrightarrow{\text{a.p.t.}} f$ şi $f_n \xrightarrow{\text{a.p.t.}} g$, rezultă $f = g$(a.p.t.)

c) Dacă $(f_n)_{n\geq 1}$ este un şir de funcţii finite a.p.t., atunci $(\forall)n \geq 1$, f_n este finită pe $X\setminus A$,unde $A=\bigcup_{n\geq 1} \{x \in X; \mid f_n(x)=\infty\}$, deci $(f_n(x))_{n\geq 1}\subseteq \mathbf{R}$, $(\forall)x\in A^c$.

3.3.2. Propoziţie. *Fie $(X,\mathscr{A},\mu)$ un spaţiu cu măsură completă şi $f_n:X\to\overline{\mathbf{R}}(n\geq 1)$, un şir de funcţii măsurabile, finite a.p.t., care converge a.p.t. Atunci funcţia limită f este măsurabilă.*

Dem. Din ipoteză rezultă că există $A \subseteq X$ neglijabilă a.î. $f_n(x)\to f(x)$, $(\forall)x\in A^c$.Cum fiecare $f_n (n\geq 1)$ este măsurabilă pe A^c, rezultă (T.3.2.15,3^0)) f măsurabilă pe A^c. Măsura μ fiind completă, rezultă (P3.2.9,Cor.3) f măsurabilă pe A, deci (P.3.2.9.,3^0) f măsurabilă pe X.

Observaţie. Condiţia ca μ să fie completă, în P.3.3.2., este esenţială.

Contraexemplu. Fie $X=[0,1]$, $\mathcal{A}=\{\emptyset,X\}$, $\mu=0$, $f=\varphi_{\{0\}}$ şi $f_n=f$, $(\forall)n\geq 1$. Atunci, $f_n \xrightarrow{a.p.t.} f$, a.p.t ,deoarece $\mu(X)=0$, şi f nu este măsurabilă (nefiind constantă).

3.3.3. Definiţie. Fie $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un spaţiu cu măsură şi $f_n:X\to\overline{\mathbf{R}}$ $(n\geq 1)$ un şir de funcţii măsurabile, finite a.p.t. Vom spune că $(f_n)_{n\geq 1}$ converge *aproape uniform* (prescurtat a.u.), dacă $(\exists)f:X\to\overline{\mathbf{R}}$ măsurabilă cu proprietatea: $(\forall)\varepsilon>0$, $(\exists)A_\varepsilon\in\mathcal{A}$, cu $\mu(A_\varepsilon)<\varepsilon$ şi $f_n \xrightarrow{u} f$ pe $X\setminus A_\varepsilon$;vom scrie atunci $f_n \xrightarrow{a.u.} f$.

Observaţia 1.Dacă vorbim de convergenţa uniformă a şirului $(f_n)_{n\geq 1}$ pe mulţimea $X\setminus A_\varepsilon$ către f, putem presupune că f şi fiecare f_n $(n\geq 1)$ sunt finite pe $X\setminus A_\varepsilon$.

Observaţia 2. Dacă $(f_n)_{n\geq 1}$ converge a.u. la f, nu rezultă, în mod necesar,că $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniform a.p.t. (i.e. pe complementara unei mulţimi neglijabile) la f.

Contraexemplu. Fie $f_n:\mathbf{R}\to\mathbf{R}(n\geq 1)$ un şir definit astfel: $f_n=\varphi_{A_n}$, unde $A_n=(n^{-1},2n^{-1})$. Atunci $f_n \xrightarrow{a.u.} 0$ şi $(f_n)_{n\geq 1}$ nu converge uniform a.p.t. la 0.

3.3.4. Propoziţie. *Fie $(X,\mathcal{A},\mu)$ un spaţiu cu măsură, $f_n:X\to\overline{\mathbf{R}}(n\geq 1)$ un şir de funcţii măsurabile, finite a.p.t. şi $f:X\to\overline{\mathbf{R}}$ o funcţie măsurabilă. Dacă $f_n \xrightarrow{a.u.} f$, atunci f finită a.p.t. şi $f_n \xrightarrow{a.p.t.} f$*

Dem. Cf. ipotezei, $f_n \xrightarrow{a.u.} f$, deci $(\forall)k\geq 1$, $(\exists)A_k\in\mathcal{A}$, a.î. $\mu(A_k)\leq 1/k$ şi $f_n \xrightarrow{u} f$ pe $X\setminus A_k$ şi deci $f_n(x)\to f(x)$, $(\forall)x\in X\setminus A_k$. De aici rezultă că $f(x)\in\mathbf{R}$, $(\forall)x\in X\setminus A_k$. Să notăm mai departe $A: = \bigcap_{k\geq 1} A_k$. Evident avem

$$A\in\mathcal{A},\ X\setminus A = \bigcup_{k\geq 1} (X\setminus A_k);\ \mu(A)\leq\mu(A_k)\leq 1/k \to 0,\ (k\to\infty),$$

deci $\mu(A)=0$. Cum avem $f(x)\in\mathbf{R}$, $(\forall)x\in X\setminus A_k$, $(\forall)k\geq 1$, rezultă $f(x)\in\mathbf{R}$, $(\forall)x\in A^c$. Prin urmare f este finită a.p.t. şi $f_n \xrightarrow{a.p.t.} f$

Observaţie. Datorită P.3.3.4., rezultă că putem considera funcţia f din Def. 3.3.3. finită a.p.t.

3.3.5. Teoremă (Egorov).*Fie $(X,\mathcal{A},\mu)$ un spaţiu cu măsură finită şi f, $f_n:X\to\overline{\mathbf{R}}$ $(n\geq 1)$ măsurabile, finite a.p.t. Dacă $f_n \xrightarrow{a.p.t.} f$, atunci $f_n \xrightarrow{a.u.} f$.*

Dem. Din ipoteză rezultă că există o mulţime neglijabilă $A_0\in\mathcal{A}$, cu proprietatea că funcţiile f, $f_n(n\geq 1)$ sunt finite pe $x\in X\setminus A_0$ şi $f_n(x)\to f(x)$, $(\forall)x\in X\setminus A_0$. Să notăm:

$$A_{n,k}: = \bigcap_{i\geq n} \{x\in X;\ |f_i(x)-f(x)|<1/k\}\ (n,k\geq 1),$$

deci

$$x \in A_{n,k} \Leftrightarrow |f_i(x) - f(x)| < 1/k,\ (\forall) i \geq n.$$

Să arătăm că $(\forall)\ k \geq 1$, mulțimea $X \setminus \bigcup_{n\geq 1} A_{n,k}$ este de măsură nulă. Intr-adevăr, deoarece $f_n(x) \to f(x)$, $(\forall) x \in X \setminus A_0$, rezultă:

$$(\forall) x \in X \setminus A_0,\ (\forall) k \geq 1,\ (\exists) n_0 \geq 1, \text{ a.î. } |f_n(x) - f(x)| < 1/k,\ (\forall) n \geq n_0,$$

deci $x \in A_{n_0 k}$. De aici rezultă $X \setminus A_0 \subseteq \bigcup_{n\geq 1} A_{n,k} \subseteq X$, deci $\mathscr{A} \ni X \setminus \bigcup_{n\geq 1} A_{n,k} \subseteq A_0$ și deci, $\mu(X \setminus \bigcup_{n\geq 1} A_{n,k}) \leq \mu(A_0) = 0$, de unde rezultă că mulțimea $X \setminus \bigcup_{n\geq 1} A_{n,k}$, să o notăm cu $A_{0,k}$, este de măsură nulă.

Evident, avem $X = \bigcup_{n\geq 0} A_{n,k}$ și $A_{n,k} \subseteq A_{n+1,k}$, $(\forall) n \geq 1$, deci, μ fiind continuă (T.2.2.6.), rezultă:

$$\mu(X) = \mu(A_{0,k}) + \mu(\bigcup_{n\geq 1} A_{n,k}) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_{n,k}),\ (\forall) k \geq 1.$$

Atunci, $(\forall) \varepsilon > 0$ și $k \geq 1$, $(\exists) n_k \geq 1$, a.î. $\mu(X \setminus A_{n,k}) < \varepsilon/2^k$, $(\forall) n \geq n_k$. Notând $A := \bigcap_{k\geq 1} A_{n_k k}$, avem $A \in \mathscr{A}$ și relația

$$\mu(X \setminus A) = \mu(\bigcup_{k\geq 1} (X \setminus A_{n_k k})) \leq \sum_{k\geq 1} \mu(X \setminus A_{n_k k}) \leq \sum_{k\geq 1} \varepsilon/2^k = \varepsilon.$$

Să arătăm acum că $f_n \xrightarrow[A]{u} f$. Intr-adevăr, $(\forall) k \geq 1$, rezultă:

$$\sup_{i \geq n_k} |f_i(x) - f(x)| \leq 1/k,\quad (\forall)\ x \in A_{n_k,k} \supseteq A,$$

deci

$$\sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \leq 1/k\ ,\ (\forall)\ n \geq n_k,\ (\forall)\ k \geq 1.$$

Prin urmare $f_n \xrightarrow[A]{u} f$, i.e. $f_n \xrightarrow{a.u.} f$.

Corolar 1. *Fie $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un spațiu cu măsură finită și $f, f_n : X \to \overline{\mathbf{R}} (n \geq 1)$, măsurabile, finite a.p.t. Atunci, $f_n \xrightarrow{\text{a.p.t.}} f \Leftrightarrow f_n \xrightarrow{a.u.} f$*

Dem. Aplicăm P.3.3.4. și T.3.3.5.

Observație. Dacă μ nu este finită, atunci T.3.3.5. nu este, în mod necesar, adevărată

Contraexemplu. Fie spațiul cu măsură $(\mathbf{R}, \mathscr{L}_\mathbf{R}, \lambda)$ și $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R} (n \geq 1)$ un șir definit astfel, $f_n := \varphi_{A_n}$, unde $A_n = [n, n+1]$. Atunci $f_n \xrightarrow{s} 0$, deci $f_n \xrightarrow{\text{a.p.t.}} 0$, și $(f_n)_{n\geq 1}$ nu converge aproape uniform la 0.

Lema 1. *Fie $X\subseteq\mathbf{R}$ o multime măsurabilă Lebesgue şi $f:X\to\boldsymbol{R}$ o funcţie $\mathscr{L}_{\mathbf{R}}$-simplă. Atunci $(\forall)$ $\varepsilon>0$, $(\exists)$ $A_\varepsilon\subseteq X$ închisă (în* **R***), a.î. $\lambda(X\setminus A_\varepsilon)<\varepsilon$ şi $f/_{A\varepsilon}$ continuă.*

Dem. Avem $f=\sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_{B_k}$, cu $(c_k)_{k=\overline{1,n}}\subseteq\mathbf{R}$ şi $(B_k)_{k=\overline{1,n}}$ o partiţie $\mathscr{L}_{\mathbf{R}}$-măsurabilă a lui X. Fixăm $\varepsilon>0$. Din P.2.3.8.rezultă: $(\forall)k=\overline{1,n}$ există $A_k\subseteq B_k$ închisă (în **R**) cu $\lambda(B_k\setminus A_k)<\varepsilon/n$. Evident, familia $(A_k)_{k=\overline{1,n}}$ este mutual disjunctă şi $f|A_k=c_k$, deci funcţia $f|A_k$ este continuă, $(\forall)k=\overline{1,n}$ şi deci mulţimea $A:=\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ este închisă şi funcţia $f|_A$ este continuă. In fine, observăm că

$$\lambda(X\setminus A)\le\lambda\left(\bigcup_{k=1}^{n}(B_k\setminus A_k)\right)\le\sum_{k=1}^{n}\lambda(B_k\setminus A_k)\le n(\varepsilon/n)=\varepsilon$$

Luăm mai departe $A_\varepsilon=A$.

Lema 2. *Fie $X\in\mathscr{L}_{\mathbf{R}}$ o multime, cu $\lambda(X)<\infty$, şi $f:X\to\boldsymbol{R}$ o funcţie L – măsurabilă, finită a.p.t. Atunci $(\forall)$ $\varepsilon>0$, $(\exists)A_\varepsilon\subseteq X$ închisă (în* **R***) a.î. $\lambda(X\setminus A_\varepsilon)<\varepsilon$ & $f/_{A\varepsilon}$ continuă.*

Dem. Din T.3.2.16. rezultă: $(\exists)$ $f_n:X\to\mathbf{R}(n\ge1)$, un şir de funcţii simple, cu $f_n\xrightarrow{s}f$. Din Lema 1 deducem: $(\forall)n\ge1$, $(\exists)A_n\subseteq X$ închisă (în **R**), a.î. $\lambda(X\setminus A_n)<\varepsilon/2^{n+1}$ & $f|A_n$ continuă. Notăm $A:=\bigcap_{n\ge1} A_n$; atunci A este închisă, $f_n|_A$ continuă, $(\forall)$ $n\ge1$ şi avem:

$$\lambda(X\setminus A)=\lambda\left(\bigcup_{n\ge1} X\setminus A_n\right)\le\sum_{n\ge1}\lambda(X\setminus A_n)\le\sum_{n\ge1}\varepsilon/2^{n+1}=\varepsilon/2$$

Aplicând T 3.3.5 şirului $(f_n|_A)_{n\ge1}$, rezultă că $(\exists)$ $A_0\subseteq A$ o mulţime L - măsurabilă, cu $\lambda(A\setminus A_0)<\varepsilon/2$ şi $f_n|_A\xrightarrow[A_0]{u}f|_A$ Cum fiecare funcţie $f_n|_A(n\ge1)$ este continuă, putem presupune mulţimea A_0 închisă. Deoarece convergenţa uniformă păstrează continuitatea (T.1.2.39.), rezultă că $f|A_0$ este continuă. In fine, observăm că

$$\lambda(X\setminus A_0)\le\lambda(X\setminus A)+\lambda(A\setminus A_0)\le\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon.$$

Punem mai departe $A_\varepsilon=A_0$

3.3.6. Teoremă (N. Luzin). *Fie $X\in\mathscr{L}_{\mathbf{R}}$ o multime şi $f:X\to\overline{\boldsymbol{R}}$ o funcţie L – măsurabilă, finită a.p.t. Atunci, $(\forall)$ $\varepsilon>0$, $(\exists)$ $A_\varepsilon\subseteq X$ închisă (în* **R***), cu $\lambda(X\setminus A_\varepsilon)<\varepsilon$ şi f/A_ε continuă.*

Dem. Fie $(I_n)_{n\ge1}$ o enumerare a familiei numerabile $((k,k+1])_{k\in\mathbf{Z}}$. Evident avem: $X=\bigcup_{n\ge1} B_n$, unde $B_n=X\cap I_n$ şi $\lambda(B_n)\le1$. Din Lema 2 rezultă: $(\forall)n\ge1$,

$(\exists)A_n \subseteq B_n$ închisă (în **R**) cu $\lambda(B_n \setminus A_n) < \varepsilon/2^n$ şi $f|A_n$ continuă. Şirul $(A_n)_{n\geq 1}$ format cu mulţimi închise, este, evident, local finit şi mutual disjunct, deci $A := \bigcup_{n\geq 1} A_n$ este o mulţime închisă (P.1.2.9.) şi cum fiecare funcţie $f|A_n (n\geq 1)$ este continuă, rezultă , cf P.1.2.10., că $f|_A$ este continuă. In fine, observăm că

$$X\setminus A = (\bigcup_{n\geq 1} B_n)\setminus(\bigcup_{n\geq 1} A_n) = \bigcup_{n\geq 1} (B_n \setminus A_n),$$

de unde deducem că

$$\lambda (X\setminus A) \leq \sum_{n\geq 1} \lambda(B_n \setminus A_n) \leq \sum_{n\geq 1} \varepsilon/2^n = \varepsilon.$$

Luăm mai departe, $A_\varepsilon = A$.

Corolar 1. *Fie $X \in \mathscr{L}_{\mathbf{R}}$ o mulţime şi fie $f : X \to \overline{\mathbf{R}}$ o funcţie L - măsurabilă, finită a.p.t. Atunci $(\forall)$ $\varepsilon>0$, $(\exists) A_\varepsilon \subseteq X$ închisă (în **R**), $(\exists)$ $g:X\to\mathbf{R}$ continuă, a.î. $\lambda(X\setminus A_\varepsilon) < \varepsilon$ şi $f=g$ pe $A\varepsilon$, deci $\lambda(\{x\in X;\, f(x) \neq g(x)\}) < \varepsilon$.*

Dem. Fie $\varepsilon>0$ fixat şi $A_\varepsilon \subseteq X$ cu proprietatile din T.3.3.6. Prelungim apoi funcţia $f|_{A\varepsilon}$ la o funcţie continuă $g:X\to\mathbf{R}$, care, evident, satisface condiţiile din enunţ.

Formalizând proprietatea pe care o au funcţiile măsurabile Lebesgue, dat de teorema lui Luzin, putem introduce următoarea definiţie.

3.3.7. Definiţie. Fie $X \in \mathscr{L}_{\mathbf{R}}$ o mulţime măsurabilă Lebesgue. O funcţie $f:X\to\overline{\mathbf{R}}$ o vom numi *aproape continuă*, dacă, $(\forall)$ $\varepsilon>0$, $(\exists)$ $A\varepsilon \subseteq X$, închisă în **R**, cu $\lambda(X\setminus A\varepsilon) < \varepsilon$ şi $f|_{A\varepsilon}$ continuă.

Cu aceasta, teorema lui Luzin şi reciproca sa pot fi reformulate astfel.

Corolar 2. *Fie $X \in \mathscr{L}_{\mathbf{R}}$ o multime şi $f:X\to\overline{\mathbf{R}}$ o funcţie finită a.p.t. Atunci f este măsurabilă Lebesgue $\Leftrightarrow f$ aproape continuă.*

Dem. Implicaţia $(\Rightarrow)$ este T.3.3.6. reformulată.

$(\Leftarrow)(\forall)n\geq 1$, cf ipotezei, $(\exists)A_n \subseteq X$, închisă în **R**, a.î. $\lambda(X\setminus A_n) \leq 1/n$ şi $f|A_n$ continuă, deci f este L-măsurabilă pe A_n(P.3.2.13). Notăm $A := \bigcup_{n\geq 1} A_n$; atunci (P.3.2.9,$3^0$)) f este L-măsurabilă pe A şi avem:

$$\lambda (X \setminus A) = \lambda (\bigcap_{n\geq 1} (X \setminus A_n)) \leq \lambda (X \setminus A_n) \leq 1/n, (\forall)n\geq 1,$$

deci $\lambda (X\setminus A)=0$, i.e. $X \setminus A$ este L-neglijabilă. Din P.3.2.9., Cor.3, rezultă că f este L-măsurabilă pe $X\setminus A$, deci şi pe X (P.3.2.9, 3^0)).

Observaţia 1. Pentru a înţelege mai exact sensul teoremei lui Luzin, să observăm că există funcţii $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ măsurabile Lebesgue şi care sunt discontinue în fiecare punct, ca de exemplu funcţia lui Dirichlet.

Observația 2. Funcția g din Cor. 2 are proprietatea:

$$\sup\{\,|g(x)|;\ x\in A_\varepsilon\} = \sup\{\,|g(x)|\ ;\ x\in X\,\}.$$

3.3.8. Definiție. Fie $(X,\mathscr{A},\mu)$un spațiu cu măsură și $f_n:X\to\overline{\mathbf{R}}$ $(n\geq 1)$ un şir de funcții măsurabile, finite a.p.t. Vom spune că:

- $(f_n)_{n\geq 1}$ este *convergent în măsură*, dacă $(\exists)f:X\to\overline{\mathbf{R}}$ măsurabilă, a.î.

$$(\forall)\ \varepsilon>0\ ,\ \mu\left(\{x\in X;\ |f(x) - f_n(x)| > \varepsilon\}\right)\to 0\ (n\to\infty);$$

în acest caz vom scrie $f_n \xrightarrow{\mu} f$;

- $(f_n)_{n\geq 1}$ este *Cauchy (fundamental) în măsură*, dacă

$$(\forall)\ \varepsilon>0\ ,\ \mu(\{x\in X;|f_n(x)-f_m(x)|>\varepsilon\})\to 0\ (n,m\to\infty);$$

a) $f_n \xrightarrow{\mu} f \Leftrightarrow (\forall)\ \varepsilon>0, (\exists)n_\varepsilon\geq 1$, a.î. $\mu\left(\{x\in X;\ |f(x) - f_n(x)| > \varepsilon\}\right)< \varepsilon$, $(\forall)n\geq n_\varepsilon \Leftrightarrow (\forall)\varepsilon, \delta>0, (\exists)n_{\varepsilon,\delta}\geq 1$, a.î. $\mu(\{x\in X;\ |f(x) - f_n(x)| > \varepsilon\})< \delta$, $(\forall)n\geq n_{\varepsilon,\delta}$;

b) $(f_n)_{n\geq 1}$, Cauchy în măsură $\Leftrightarrow (\forall)\ \varepsilon,\delta>0, (\exists)\ n_{\varepsilon,\delta}\geq 1$, a.î.:

$$\mu(\{x\in X;|f_n(x) - f_m(x)| > \varepsilon\}) < \delta,\ (\forall)\ n,m \geq n_{\varepsilon,\delta} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\forall)\ \varepsilon>0, (\exists)\ n_\varepsilon \geq 1, \text{ a.î. } \mu(\{x\in X;|f_n(x)-f_m(x)| > \varepsilon\}) < \varepsilon,\ (\forall)\ n,m\geq n_\varepsilon.$$

Observația 1. In loc de "convergent în măsură " vom mai spune "μ-convergent"; în loc de "Cauchy în măsură" vom mai spune "μ-Cauchy".

Observația 2. Deoarece fiecare funcție $f_n(n\geq 1)$ este finită a.p.t., rezultă că mulțimea $\bigcup\limits_{n\geq 1}\{x\in X;|f_n(x)| = \infty\}$este neglijabilă, deci $(\forall)n,m\geq 1$, avem a.p.t. relațiile:

$$(f - f_n)(x) = f(x) - f_n(x);\ (f_n - f_m)(x) = f_n(x) - f_m(x).$$

Observația 3. Funcția limită f din Def 3.3.8. este finită a.p.t. .

Intr-adevăr, $(\forall)\ k \geq 1$, $(\exists)\ n_k \geq 1$, a.î. $\mu(\{x;|f(x) - f(x)|>1\})\leq 1/n$.Fie $A:=\bigcap\limits_{k\geq 1}A_{n_k}$;evident $\mu(A)\leq 1/k,(\forall)k\geq 1$,deci $\mu(A)=0$.Atunci$(\forall)k\geq 1$,funcția $|f-f_{n_k}|$ este majorată de 1 pe $X\setminus A_{n_k}$.Cum mulțimea $\bigcup\limits_{k\geq 1}\{x\in X;|f_{n_k}(x)| = \infty\}$ este neglijabilă, rezultă că f este finită a.p.t. pe mulțimea $X\setminus A_{n_k}$,deci finită a.p.t. pe $\bigcup\limits_{k\geq 1}(X\setminus A_{n_k}) = X\setminus A$. Prin urmare f finită a.p.t. pe X.

3.3.9. Propoziție. *Fie $(X,\mathscr{A},\mu)$ un spațiu cu măsură și $f,g,f_n:X\to\overline{\mathbf{R}}$ $(n\geq 1)$ funcții măsurabile, finite a.p.t. Dacă $f_n\xrightarrow{\mu} f$ și $f_n\xrightarrow{\mu} g$, atunci $f = g$ (a.p.t.).*

Dem. Fie $\varepsilon>0$ fixat. Din relația:

$$|f(x) - g(x)| \leq |f(x) - f_n(x)|+|g(x) - f_n(x)|,\ \text{a.p.t pe } X,$$

rezultă că a.p.t. avem:

$$\{x\in X;|f(x)-g(x)|\geq\varepsilon\}\subseteq\{x\in X;|f(x)-f_n(x)|\geq\varepsilon/2\}\cup\{x\in X;|g(x)-f_n(x)|\geq\varepsilon/2\},$$

deci

$$\mu(\{x\in X;\ |f(x)-g(x)|>\varepsilon\}\le\mu(\{x\in X; |f(x)-f_n(x)|\ge \varepsilon/2\}+$$
$$+\mu(\{x\in X; |g(x)-f_n(x)|\ge \varepsilon/2\}\to 0(n\to\infty)$$

şi deci, $\mu(\{x\in X; |f(x)-g(x)|\ge\varepsilon\})=0$. Atunci avem:

$$\{x\in X;\ f(x)\ne g(x)\} = \bigcup_{k\ge 1} \{x\in X; |f(x) - g(x)| \ge 1/k\},$$

deci

$$\mu(\{x\in X; f(x)\ne g(x)\}) \le \sum_{k\ge 1} \mu(\{x\in X; |f(x)-g(x)|\ge 1/k\}) = 0,$$

de unde rezultă că $\mu(\{x\in X;\ f(x)\ne g(x)\})=0$, i.e. $f=g$(a.p.t.)

Corolar 1. *Fie $(X,\mathscr{A},\mu)$ un spaţiu cu măsură şi $f_n:X\to\overline{\boldsymbol{R}}(n\ge 1)$ un şir de funcţii măsurabile, finite a.p.t., convergent în măsură. Atunci limita sa este o funcţie unic determinată a.p.t.*

3.3.10. Teoremă. *Fie $(X,\mathscr{A},\mu)$ un spaţiu cu măsură şi $f, f_n:X\to\overline{\boldsymbol{R}}(n\ge 1)$ funcţii măsurabile, finite a.p.t. Dacă $f_n \xrightarrow{a.u.} f$, atunci $f_n \xrightarrow{\mu} f$.*

Dem. Fie $\varepsilon>0$ fixat. Cf. ipotezei $(\exists)$ $A_\varepsilon\in\mathscr{A}$, cu $\mu(A\varepsilon) < \varepsilon$ şi $(f_n)_{n\ge 1}$ uniform convergent pe $X\setminus A_\varepsilon$ la f, deci $(\exists)n_\varepsilon\ge 1$, a.î. $|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon$, $(\forall)x\in X\setminus A_\varepsilon$, $n\ge n_\varepsilon$. Atunci avem:

$$X \setminus A_\varepsilon \subseteq \{x\in X; |f(x)-f_n(x)|<\varepsilon\},\ (\forall)n\ge n_\varepsilon,$$

deci

$$\{x\in X; |f(x)-f_n(x)|\ge \varepsilon\} \subseteq A_\varepsilon,\ (\forall)n\ge n_\varepsilon$$

şi deci

$$\mu(\{x\in X; |f(x)-f_n(x)|\ge \varepsilon\}) \le \mu(A_\varepsilon) \le \varepsilon,\ (\forall)\ n\ge n_\varepsilon.$$

Prin urmare $f_n \xrightarrow{\mu} f$.

Corolar 1 (H. Lebesgue). *Fie $(X,\mathscr{A},\mu)$ un spaţiu cu măsură finită şi $f,f_n:X\to\overline{\boldsymbol{R}}$ $(n \ge 1)$ funcţii măsurabile, finite a.p.t. Dacă $f_n \xrightarrow{\text{a.p.t.}} f$, atunci* $f_n \xrightarrow{\mu} f$..

Dem. Din T.3.3.5. rezultă $f_n \xrightarrow{a.u.} f$, deci putem aplica T.3.3.10.

Observaţie. Reciproca T.3.3.10. nu este,în mod necesar,adevărată.

Contraexemplu. Considerăm spaţiul cu măsură $([0,1], \mathscr{L}_{[0,1]}, \lambda)$ şi $f_n: [0,1]\to\mathbf{R}$ $(n\ge 1)$ un şir de funcţii definit astfel:

$$(f_n)_{n\ge 1}\equiv(\varphi_{[0,1]}\ ;\ \varphi_{[0,1/2]},\varphi_{[1/2,1]}\ ;\ \varphi_{[0,1/3]},\varphi_{[1/3,2/3]},\varphi_{[2/3,1]}\ ;\ \ldots\ldots).$$

Aşadar avem $f_n \xrightarrow{\mu} 0$, $f_n \xrightarrow{\text{a.p.t.}} 0$ şi $f_n \not\xrightarrow{a.u.} 0$

3.3.11. Propoziție. *Fie $(X,\mathcal{A},\mu)$ un spațiu cu măsură și $f_n:X\to\overline{\mathbf{R}}$ $(n\geq 1)$ un șir de funcții măsurabile, finite a.p.t. Atunci: $(f_n)_{n\geq 1}$ convergent în măsură dacă și numai dacă satisface condițiile:*

1^0) $(f_n)_{n\geq 1}$ este Cauchy în măsură;

2^0) $(f_n)_{n\geq 1}$ posedă un subșir $(f_{n_k})_{k\geq 1}$ convergent în măsură.

Dem. ($\Rightarrow$) Fie $f:X\to\overline{\mathbf{R}}$ măsurabilă,finită a.p.t., cu $f_n\xrightarrow{\mu}f$. Atunci($\forall$) $\varepsilon>0$, a.p.t. pe X avem relațiile:

$$\{x\in X; |f_n(x) - f_m(x)| > \varepsilon\} \subseteq \{x\in X; |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon/2\}\cup$$
$$\cup\ \{x\in X; |f_m(x) - f(x)| > \varepsilon/2\},$$

deci

$$\mu(\{x\in X; |f_n(x)-f_m(x)| > \varepsilon\}) \leq \mu(\{x\in X; |f_n(x)-f(x)| > \varepsilon/2\})+$$
$$+\ \mu(\{x\in X; |f_m(x)-f(x)| > \varepsilon/2\})$$

și deci $\lim\limits_{n,m\to\infty} \mu(\{x\in X; |f_n(x) - f_m(x)| > \varepsilon\}) = 0.$

Prin urmare $(f_n)_{n\geq 1}$ este μ-Cauchy.

($\Leftarrow$) Fie $\varepsilon>0$ fixat. Cf. 1^0) ($\exists$) $n_\varepsilon\geq 1$, a.î.

$$\mu(\{x\in X; |f_n(x) - f_m(x)| > \varepsilon/2\}) < \varepsilon/2,\ (\forall)n,m \geq n_\varepsilon \qquad (1)$$

Din 2^0) rezultă: ($\exists$) $k_0\geq 1$, a.î.

$$\mu(\{x\in X; |f_{n_k}(x) - f(x)| > \varepsilon/2\}) < \varepsilon/2,\ (\forall)k\geq k_0 \qquad (2)$$

Evident, putem presupune $n_{k_0} \geq n_\varepsilon$. Cum avem a.p.t.

$$\{x\in X; |f(x) - f_n(x)| > \varepsilon\} \subseteq \{x\in X; |f(x) - f_{n_{k0}}(x)| > \varepsilon/2\} \cup$$
$$\cup\ \{x\in X; |f_{n_{k0}}(x) - f_n(x)| > \varepsilon/2\},$$

din (1)și(2) rezultă:

$$\mu(\{x\in X; |f(x)-f_n(x)| > \varepsilon\}) \leq \varepsilon/2+ \varepsilon/2= \varepsilon,\ (\forall)\ n \geq n_\varepsilon.$$

Prin urmare, $(f_n)_{n\geq 1}$ este μ-convergent la f.

3.3.12. Teoremă (F. Riesz). *Fie $(X,\mathcal{A},\mu)$ un spațiu cu măsură și $f_n:X\to\overline{\mathbf{R}}$ $(n\geq 1)$ un șir de funcții măsurabile, finite a.p.t. Dacă $(f_n)_{n\geq 1}$ este Cauchy în măsură, atunci el posedă un subșir $(f_{nk})_{k\geq 1}$ convergent aproape uniform, deci convergent a.p.t.*

Dem. Deoarece $(f_n)_{n\geq 1}$ este μ-Cauchy, rezultă: $(\forall)\ k \geq 1, (\exists)\ n_k \geq 1$, a.î.

$$\mu(\{x\in X; |f_n(x) - f_{n_k}(x)| > 1/2^k\}) < 1/2^k,\ (\forall)\ n \geq n_k,$$

deci, $(\exists)\ n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$, naturale, cu proprietatea:

$$\mu(\{x\in X; |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| > 1/2^k\}) < 1/2^k,\ (\forall)\ k\geq 1.$$

Notăm $A_m := \bigcup_{k\geq m} \{x\in X; |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| > 1/2^k\}$ $(m\geq 1)$.

Atunci,

$$\mu(A_m) \leq \sum_{k>m} \mu(\{x\in X; |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| > 1/2^k\}) \leq \sum_{k>m} 1/2^k = 1/2^m.$$

Evident, $(\forall) m\geq 1$, avem: $\sup_{k\geq m} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| \leq 1/2^m$, $(\forall)\ x\in X\setminus A_m$, deci $(f_{n_k})_{k\geq 1}$ este uniform Cauchy şi deci uniform convergent pe mulţimea $X\setminus A_m$ către o funcţie $g_m: X\setminus A_m \to \mathbf{R}$.

Dacă $A := \bigcap_{m\geq 1} A_m$, avem $A\in\mathscr{A}$ şi $\mu(A)\leq\mu(A_m)\leq 1/2^m\to 0$, $(m\to\infty)$, deci $\mu(A)=0$. Cum, evident, avem $A_m\supseteq A_{m+1}, (\forall) m\geq 1$, rezultă $X\setminus A_m\subseteq X\setminus A_{m+1}$, deci, în virtutea unicităţii limitei unui şir uniform convergent, rezultă $g_{m+1}|X\setminus A_m = g_m, (\forall) m\geq 1$. De aici deducem că este corect definită funcţia, $f: X\to\mathbf{R}$, prin relaţia $f(x)=g_m(x)$, dacă $x\in X\setminus A$, $m\geq 1$ şi $f(x)=0$ dacă $x\in A$. Din P.3.2.9,3^0) rezultă f măsurabilă. Deoarece şirul $(f_{n_k})_{k\geq 1}$ converge uniform, pe mulţimea $X\setminus A_m$, la f, pentru orice $m\geq 1$, deducem că $(f_{n_k})_{k\geq 1}$ converge aproape uniform la f. Ultima parte din enunţ rezultă din P.3.3.4.

Corolar 1. *Fie $(X,\mathscr{A},\mu)$ un spaţiu cu măsură şi $f_n: X\to\overline{\mathbf{R}}$ $(n\geq 1)$ un şir de funcţii măsurabile, finite a.p.t. Atunci, $(f_n)_{n\geq 1}$ este convergent în măsură $\Leftrightarrow$ $(f_n)_{n\geq 1}$ este Cauchy în măsură.*

Dem. Implicaţia $(\Rightarrow)$ rezultă din P.3.3.11.

$(\Leftarrow)$ Dacă $(f_n)_{n\geq 1}$ este μ-Cauchy, atunci (T.3.3.12.)$(\exists) f: X\to\overline{\mathbf{R}}$ măsurabilă şi $(\exists)(f_{n_k})_{k\geq 1}\subseteq(f_n)_{n\geq 1}$, a.î. $f_{n_k} \xrightarrow{a.u.} f$, deci (T.3.3.10) $f_{n_k} \xrightarrow{\mu} f$. Din P.3.3.11. rezultă $f_n \xrightarrow{\mu} f$.

Corolar 2. *Fie $(X,\mathscr{A},\mu)$ un spaţiu cu măsură şi $f_n: X\to\overline{\mathbf{R}}$ $(n\geq 1)$ un şir de funcţii măsurabile, finite a.p.t. Dacă există $f,g: X\to\overline{\mathbf{R}}$ două funcţii măsurabile, a.î. $f_n \xrightarrow{\mu} f$ şi $f_n \xrightarrow{\text{a.p.t.}} g$, (resp. $f_n \xrightarrow{a.u.} g$), atunci $f=g$(a.p.t.).*

Dem. Din T.3.3.12. rezultă: $(\exists)\ (f_{n_k})_{k\geq 1}$ un subşir al şirului $(f_n)_{n\geq 1}$ care converge aproape uniform, deci a.p.t., la f. Aşadar avem: $f_{n_k} \xrightarrow{\text{a.p.t.}} f$ şi $f_{n_k} \xrightarrow{\text{a.p.t.}} g$, deci $f=g$ (a.p.t.).

Corolar 3. *Fie* $(X,\mathscr{A},\mu)$ *un spaţiu cu măsură şi* $f,f_n:X\to\overline{\mathbf{R}}(n\geq1)$ *măsurabile,finite p.t. Dacă* $f_n\xrightarrow{\mu}f$, *atunci* $(\exists)(f_{n_k})_{k\geq1}\subseteq(f_n)_{n\geq1}$, *a.î.* $f_{n_k}\xrightarrow{a.p.t.}f$.

3.3.13 Propozitie. *Fie* $(X,\mathscr{A},\mu)$ *un spaţiu cu măsură finită şi* $f,f_n:X\to\overline{\mathbf{R}}$ $(n\geq1)$ *funcţii măsurabile, finite a.p.t. Atunci* $f_n\xrightarrow{\mu}f \Leftrightarrow$ *orice subşir al şirului* $(f_n)_{n\geq1}$ *conţine cel putin un subşir convergent a.p.t. la f.*

Dem. $(\Rightarrow)$ Fie $(g_n)_{n\geq1}$ un subşir al şirului $(f_n)_{n\geq1}$. Evident, $g_n\xrightarrow{\mu}f$, deci (T.3.3.12,Cor.3) $(\exists)(g_{n_k})_{k\geq1}\subseteq(g_n)_{n\geq1}$, cu $g_{n_k}\xrightarrow{a.p.t.}f$.

$(\Leftarrow)$ Fie $\alpha>0$ fixat, $A_n:=\{x\in X;|f(x)-f_n(x)|\geq\alpha\}$ şi $c_n:=\mu(A_n)$ $(n\geq1)$. Cf. ipotezei $(\forall)(g_n)_{n\geq1}$ un subşir al şirului $(f_n)_{n\geq1}$, există $(g_{n_k})_{k\geq1}$ un subşir al şirului $(g_n)_{n\geq1}$, convergent a.p.t. la f. Cum $\mu(X)<\infty$, rezultă (T.3.3.10,Cor.1) $g_{n_k}\xrightarrow{\mu}f$, deci $\mu(A_{n_k})\to0$ $(k\to\infty)$. Aşadar, orice subşir al şirului numeric $(c_n)_{n\geq1}$ conține cel puțin un subşir convergent la 0, de unde rezultă imediat că $c_n\to0$, deci $\mu(A_n)\to0$.

Prin urmare $f_n\xrightarrow{\mu}f$.

3.3.14. Teoremă. *Fie* $X\in\mathscr{L}_{\mathbf{R}}$ *o mulţime şi* $f:X\to\overline{\mathbf{R}}$ *o funcţie măsurabilă Lebesgue, finită (a.p.t.). Atunci* $(\exists)$ $f_n:X\to\mathbf{R}$ $(n\geq1)$ *un şir de funcţii continue, a.î.* $f_n\xrightarrow{\lambda}f$.

Dem. Fie $(\varepsilon_n)_{n\geq1}\subseteq(0,\infty)$, $\varepsilon_n\to0$, fixat. Din T.3.3.6,Cor.1 rezultă: $(\forall)$ $n\geq1$, $(\exists)$ $f_n:X\to\mathbf{R}$ continuă, a.î. $\lambda(\{x\in X;\ f(x)\neq f_n(x)\})<\varepsilon_n$.

Să arătăm că $f_n\xrightarrow{\lambda}f$. Intr-adevăr, fie $\varepsilon>0$, fixat şi $n_\varepsilon\geq1$, a.î. $\varepsilon_n<\varepsilon$, $(\forall)$ $n\geq1$. Evident avem a.p.t.:

$\{x\in X;|f(x)-f_n(x)|>\varepsilon\}\subseteq\{x\in X;|f(x)-f_n(x)|>\varepsilon_n\}\subseteq\{x\in X;\ f(x)\neq f_n(x)\},(\forall)n\geq n_\varepsilon$, deci

$$\lambda(\{x\in X;|f(x)-f_n(x)|>\varepsilon\})\subseteq\lambda(\{x\in X;\ f(x)\neq f_n(x)\})\leq\varepsilon_n,\ (\forall)\ n\geq n_\varepsilon,$$

şi deci

$$\lambda(\{x\in X;|f(x)-f_n(x)|>\varepsilon\})\to0\ (n\to\infty).\text{ Prin urmare, } f_n\xrightarrow{\lambda}f.$$

Corolar 1 (M. Fréchet). *Fie* $X\in\mathscr{L}_{\mathbf{R}}$ *o mulţime şi* $f:X\to\overline{\mathbf{R}}$ *o funcţie măsurabilă Lebesgue, finită (a.p.t.). Atunci* $(\exists)$ $f_n:X\to\mathbf{R}$ $(n\geq1)$, *un şir de funcţii continue, a.î.* $f_n\xrightarrow{a.p.t.}f$.

Dem. Din T.3.3.14. rezultă că $(\exists)$ $f_n:X\to\mathbf{R}$ $(n\geq1)$, un şir de funcţii continuă, a.î. $f_n\xrightarrow{\lambda}f$, iar din T.3.3.12,Cor.3, rezultă că şirul $(f_n)_{n\geq1}$ posedă un subşir $(f_{n_k})_{k\geq1}$, cu proprietatea că $f_{n_k}\xrightarrow{a.p.t.}f$.

CAPITOLUL 4
FUNCTII INTEGRABILE

Integrala Lebesgue este o generalizare a integralei Riemann. Integrala Lebesgue are la bază următoarea idee simplă, sugerată de definiția integralei Riemann. Să o prezentăm, parțial, grafic.

Fie $[a,b] \subseteq \mathbf{R}$ un interval, $\mathscr{L}_{\mathbf{R}}$ familia mulțimilor măsurabile Lebesgue din $\mathbf{R}$, $\lambda: \mathscr{L}_{\mathbf{R}} \to \overline{\mathbf{R}}$ măsura Lebesgue şi $f: [a,b] \to \mathbf{R}_+$ o funcție cu proprietatea:

$$(\forall)\ [c,d] \subseteq \mathbf{R}_+ \Rightarrow \{x \in [a,b];\ c \leq f(x) < d\} \in \mathscr{L}_{\mathbf{R}} \qquad (1)$$

Fie mai departe $\Delta = (y_i)_{i \in \overline{0,n}}$ o diviziune a lui $\mathbf{R}_+$ (nu a lui [a,b]!) şi suma

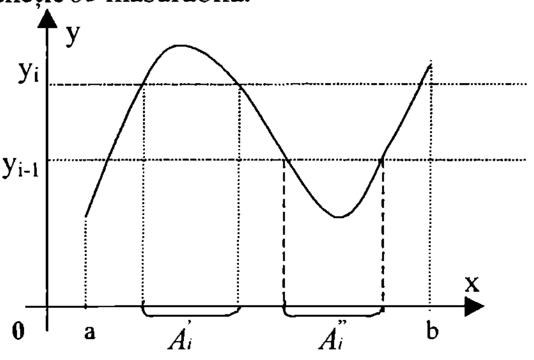
$$\sigma_f(\Delta) := \sum_{1 \leq i \leq n} y_{i-1} \lambda(\{x \in [a,b];\ y_{i-1} \leq f(x) < y_i\}) \qquad (2)$$

(sumă care corespunde sumei $\sigma_f(\Delta, \xi_\Delta)$! din integrala Riemann).

Atunci $\qquad \int_{[a,b]} f d\lambda := \sup.\{\sigma_f(\Delta);\ \Delta \in \operatorname{Div}[0,\infty]\}$

Dacă $f: [a,b] \to \mathbf{R}$, atunci $\int_{[a,b]} f d\lambda := \int_{[a,b]} f^+ \,d\lambda - \int_{[a,b]} f^- \,d\lambda \qquad (3)$

Cazul general al teoriei integralei se obține luând în locul tripletului $([a,b], \mathscr{L}_{\mathbf{R}}, \lambda)$ un spațiu cu măsură $(X, \mathscr{A}, \mu)$ şi funcția $f: X \to \overline{\mathbf{R}}$ este o funcție $\mathscr{A}$ măsurabilă.



$A_i := \{x \in [a,b];\ y_{i-1} \leq f(x) < y_i\} =$
$= A_i' \cup A_i''$

Să observăm că proprietatea (1) este necesară pentru a avea sens suma din (2). Relația (3) poate să nu aiba sens şi atunci vom spune că funcția f *nu are integrală.*

*

Fie $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un spațiu cu măsură. Vom nota cu $\mathscr{S}(X, \mathscr{A})$, $\mathscr{M}(X, \mathscr{A})$ *mulțimea functiilor simple*, resp.*măsurabile* $f: X \to \overline{\mathbf{R}}$ şi cu $\mathscr{S}_+(X, \mathscr{A})$, $\mathscr{M}_+(X, \mathscr{A})$ *mulțimea functiilor simple nenegative*, resp. *măsurabile nenegative* $f: X \to \overline{\mathbf{R}}$.

Vom defini integrala unei functii $f : X \to \overline{\mathbf{R}}$ în trei etape succesive. Mai întâi, pentru funcțiile simple, apoi pentru funcțiile măsurabile nenegative şi, în fine, pentru funcțiile *măsurabile arbitrare*. Deoarece, $\mathcal{S}_+(X,\mathcal{A})\subseteq\mathcal{M}_+(X,\mathcal{A})\subseteq\mathcal{M}(X, \mathcal{A})$ va trebui să arătăm că fiecare definiție este coerentă cu cea precedentă. Vom demonstra mai întâi proprietățile integralei $\int_X f d\mu$ pentru $f\in\mathcal{S}(X,\mathcal{A})$, din care vom deduce proprietățile integralei $\int_X f d\mu$ pentru $f\in\mathcal{M}_+(X,\mathcal{A})$, din care vom deduce mai departe, proprietățile integralei $\int_X f d\mu$ pentru $f \in\mathcal{M}(X,\mathcal{A})$

Printre rezultatele mai importante din acest capitol semnalez: proprietăți ale integralei: *monotonie, liniaritate, absolut continuitate; criterii de integrabilitate; trecerea la limită subsemnul integral* (teorema Beppo Levi a convergenței monotone, lema lui Fatou, teorema Lebesgue a convergenței dominate); *relația dintre integrala Riemann şi integrala Lebesgue*; teoremele de *descompunere* ale lui Hahn, Jordan, Lebesgue; teorema de *reprezentare* a lui Radon-Nikodim; teoremele Tonelli şi Fubini de *calcul a integralelor multiple.*

4.1. Definiția integralei. Proprietăți elementare.

4.1.1. Definiție. Fie $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un spațiu cu măsură, $f : X \to \mathbf{R}$ o funcție simplă şi $\sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_{A_i}$ o reprezentare canonică a lui f. Dacă expresia $\sum_{i=1}^{n} c_i \mu(A_i)$ are sens, se notează cu $\int_X f(x)d\mu$, $\int_X f d\mu$, $\int f d\mu$ etc. şi se numeşte *integrala din* f (pe X); vom spune atunci că f are *integrală*. Dacă f are integrală şi integrala sa este finită, i.e. $\left|\int_X f d\mu\right| < \infty$, f se numeşte *integrabilă* (pe X). Vom spune că f are *integrală* pe $A\in\mathcal{A}$, dacă functia $f\varphi_A$ are integrală; integrala $\int_X f\varphi_A d\mu$ se notează cu $\int_A f d\mu$ şi se numeşte *integrala* din f pe A. Dacă în plus, $\left|\int_A f d\mu\right|<+\infty$, f se numeşte *integrabilă* pe A. Dacă $(X,\mathcal{A},\mu) = (\mathbf{R},\mathcal{L}_{\mathbf{R}}, \lambda)$ integrala din f , $\int_{\mathbf{R}} f d\lambda$, definită mai sus,se numeşte *integrala Lebesgue* pe $\mathbf{R}$ etc. Vom nota cu $\mathcal{S}^1(X,\mathcal{A},\mu)$ *mulțimea functiilor simple integrabile* $f:X \to \mathbf{R}$.

Exemple 1) Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ funcția lui Dinichlet, deci $f=1\cdot\varphi_{\mathbb{Q}}+0\cdot \varphi_{\mathbf{R}\setminus\mathbb{Q}}$ şi deci $\int_{\mathbf{R}} f d\lambda =1\cdot\lambda(\mathbb{Q})+0\cdot\lambda(\mathbf{R}\setminus\mathbb{Q})=0$, prin urmare, f este integrabilă Lebesgue.

2) Fie $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ funcţia lui Heaviside, i.e. $f(x) = 1$, dacă $x \geq 0$ şi $f(x) = 0$, dacă $x < 0$. Atunci, $f=1 \bullet \varphi_{\mathbf{R}_+} + 0 \bullet \varphi_{\mathbf{R}^*_-}$, deci $\int_R f d\lambda = 1 \bullet \lambda(\mathbf{R}_+) + 0 \bullet \lambda(\mathbf{R}^*_-) = \infty$. Aşadar, f are integrală însă, nu este integrabilă Lebesgue. Se vede imediat că $\int_{[-1,1]} f d\lambda = 1$, deci f este integrabilă Lebesgue pe $[-1,1]$.

3)Fie spaţiul cu măsură $(\mathbf{N}, 2^{\mathbf{N}}, \mu)$ unde μ este măsura de numărare. Atunci, $(\forall)$ $A \subseteq \mathbf{N}$ şi $f: \mathbf{N} \to \mathbf{R}$, funcţia caracteristică a mulţimii A, avem $\int_A f d\mu = \text{card}(A)$, deci: f integrabilă $\Leftrightarrow \text{card}(A) < \infty$.

4)Fie $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ funcţia signum, deci $f = -1 \bullet \varphi_{\mathbf{R}^*_-} + 0 \bullet \varphi_{\{0\}} + 1 \bullet \varphi_{\mathbf{R}^*_+}$. Atunci, suma : $-1 \bullet \lambda(\mathbf{R}^*_-) + 0 \bullet \lambda(\{0\}) + 1 \bullet \lambda(\mathbf{R}^*_+)$ nu are sens, deci functia f nu are integrală Lebesgue. Să observăm că f are integrală Lebesgue pe $\mathbf{R}_+$ ca şi pe $\mathbf{R}_-$, fără să fie integrabilă şi că f este integrabilă Lebesgue pe orice interval mărginit $I \subseteq \mathbf{R}$ şi avem $\int_I f d\lambda = \ell(I \cap \mathbf{R}_+) - \ell(I \cap \mathbf{R}_-)$.

4.1.2.Propoziţie (Unicitatea integralei). *Fie $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un spaţiu cu măsură şi $f: X \to \mathbf{R}$ o funcţie simplă care are integrală. Atunci, integrala din f este un număr unic determinat de f.*

Dem. Fie $\sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_{A_i}$ şi $\sum_{j=1}^{m} b_j \varphi_{B_j}$ două reprezentări canonice ale lui f. Atunci, (P.3.1.2.) avem:

$$f = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i \varphi_{C_{ij}} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} b_j \varphi_{C_{ij}}, \qquad (1)$$

unde $C_{ij} := A_i \cap B_j$. Evident familia $(C_{ij})_{i=\overline{1,n},\, j=\overline{1,m}}$ constituie o partiţie finită $\mathscr{A}$-măsurabilă a lui X. Dacă $C_{ij} \neq \varnothing$ şi $x_0 \in C_{ij}$, avem (cf (1)) $f(x_0) = a_i = b_j$, deci coeficienţii lui $\varphi_{C_{ij}}$, cu $C_{ij} \neq \varnothing$, în cele două sume din (1), sunt egali, de unde deducem :

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i \mu(C_{ij}) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} b_j \mu(C_{ij})$$

Evident însă avem :

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i \mu(C_{ij}) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i), \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} b_j \mu(C_{ij}) = \sum_{j=1}^{m} b_j \mu(B_j),$$

deci $\sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i) = \sum_{j=1}^{m} b_j \mu(B_j)$ şi deci unicitatea integralei din f este arătată.

4.1.3. Propoziţie. *Fie $(X,\mathscr{A},\mu)$ un spaţiu cu măsură şi $f:X\to\mathbf{R}$ o funcţie simplă. Atunci f integrabilă $\Leftrightarrow |f|$ integrabilă.*

Dem. Fie $f=\sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_{A_i}$ o reprezentare canonică a lui f. Evident, $|f| =$ $=\sum_{i=1}^{n}|c_i|\,\varphi_{A_i}$. Atunci avem : f integrabilă $\Leftrightarrow(\forall)i=\overline{1,n}$, cu $\mu(A_i)=\infty$, rezultă $c_i=0$ $\Leftrightarrow (\forall)$ $i = \overline{1,n}$, cu $\mu(A_i)=\infty$, rezultă $|c_i|=0 \Leftrightarrow |f|$ integrabilă.

4.1.4.Propoziţie (Proprietăţi elementare ale integralei).*Fie $(X,\mathscr{A},\mu)$ un spaţiu cu măsură şi $f=\sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_{A_i}$ o funcţie simplă definită pe X. Atunci au loc, cu conveţia $0\cdot(\pm\infty) = 0$, afirmaţiile :*

1^0) f integrabilă $\Leftrightarrow (\forall)$ $i\in\overline{1,n}$, cu $\mu(A_i)=\infty$, rezultă $c_i=0 \Leftrightarrow (\forall) i\in\overline{1,n}$, cu $c_i\neq 0$, avem $\mu(A_i)<\infty$.

2^0) $\int_X f d\mu = \sum_{i=1}^{n}{}' c_i\mu(A_i)$, unde $\sum{}'$ este extinsă la toţi indicii i, $i=\overline{1,n}$, cu proprietatea că $c_i= 0$ sau $\mu(A_i) = 0$

3^0) Dacă $f\geq 0$ (resp. ≤ 0), rezultă că $\int_X f d\mu$ are sens şi avem $\int_X f d\mu\geq 0$ (resp. ≤ 0), deci : f integrabilă $\Leftrightarrow \int_X f d\mu < \infty$ (resp. $> -\infty$).

Intr-adevăr, dacă $f \geq 0$, rezultă $c_i \geq 0$, $(\forall)$ $i = \overline{1,n}$, deci suma $\sum_{i=1}^{n} c_i\mu(A_i)$ are sens şi este ≥ 0, etc.

4^0) Dacă f este integrabilă (pe X), rezultă că f este integrabilă pe orice mulţime $A\in\mathscr{A}$.

Fixăm $A\in\mathscr{A}$; $f\varphi_A = \sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_{A\cap A_i}$. Dacă $(\exists)$ $i=\overline{1,n}$, $\mu(A\cap A_i)=\infty$, rezultă $\mu(A_i)=\infty$. Cum f este integrabilă, rezultă (cf.1^0) $c_i = 0$, deci (cf.1^0) $f\varphi_A$ este integrabilă.

5^0) Dacă $A\in\mathscr{A}$ şi $\mu(A)<\infty$, în particular, dacă $\mu(X)<\infty$, rezultă că f este integrabilă pe A.

Fie $A\in\mathscr{A}$, cu $\mu(A)<\infty$. Din 4^0) rezultă $\int_A f d\mu = \sum_{i=1}^{n} c_i\mu(A\cap A_i)$. Cum

$\mu(A\cap A_i)\le\mu(A)<\infty$, $(\forall)\ i\in\overline{1,n}$, rezultă $\left|\int_A f d\mu\right| \le \sum_{i=1}^{n}|c_i|\mu(A_i)<\infty$ etc.

6⁰) Dacă $A\in\mathscr{A}$ şi $\mu(A)=0$, rezultă f integrabilă pe A şi avem $\int_A f d\mu=0$.

Intr-adevăr, $f\varphi_A=\sum_{i=1}^{n}c_i\,\varphi_{A\cap A_i}$ şi $\mu(A\cap A_i)=0$, $(\forall)\ I\in\overline{1,n}$ deci

$$\int_A f d\mu=\sum_{i=1}^{n}c_i\,\mu(A\cap A_i)=0$$

7⁰) Dacă $A\in\mathscr{A}$ şi $f=\varphi_A$, avem $\int_X f d\mu=\mu(A)$, deci : f integrabilă $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\mu(A)<\infty$.

Scriem $f=1\bullet\varphi_A+0\bullet\varphi_{X\setminus A}$ şi aplicăm definiţia integralei.

8⁰) $\int_X|f|\,d\mu$ există şi avem : $\int_X|f|\,d\mu=0\Leftrightarrow f=0$ (a.p.t.).

$|f|=\sum_{i=1}^{n}|c_i|\,\varphi_{A_i}$, deci cf.3⁰) $\int_X|f|\,d\mu$ există. Evident avem : $\int_X|f|\,d\mu=0$ $\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{n}|c_i|\mu(A_i)=0\Leftrightarrow|c_i|\,\mu(A_i)=0$, $(\forall)\ i=\overline{1,n}\Leftrightarrow(\forall)\ i=\overline{1,n}$, avem $c_i=0$ sau $\mu(A_i)=0\Leftrightarrow f=0$ (a.p.t.).

9⁰) f integrabilă $\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{n}|c_i|\,\mu(A_i)<\infty$.

f integrabilă $\Leftrightarrow|f|$ integrabilă $\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{n}|c_i|\mu(A_i)=\int_X|f|\,d\mu<\infty$.

4.1.5.Teoremă (Operaţii algebrice cu funcţii integrabile simple). *Fie $(X,\mathscr{A},\mu)$ un spaţiu cu măsură, $f,g: X\to\mathbf{R}$ două funcţii simple, integrabile (resp. nenegative). Atunci funcţiile $f+g$, αf $(\alpha\in\mathbf{R})$ sunt simple integrabile (resp. nenegative) şi avem relaţiile :*

$$\int_X(f+g)d\mu=\int_X f d\mu+\int_X g d\mu\,;\quad\int_X(\alpha f)d\mu=\alpha\int_X f d\mu$$

Dem. 1⁰) Fie $\sum_{i=1}^{n}a_i\varphi_{A_i},\ \sum_{j=1}^{m}b_j\varphi_{B_j}$ două reprezentări canonice ale lui f şi g respectiv,presupuse integrabile. Atunci (P.3.1.2.) :

$$f=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_i\varphi_{C_{ij}}\,,\ g=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}b_j\varphi_{C_{ij}}\ \ (C_{ij}=A_i\cap B_j),$$

deci $$\text{f+g} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(a_i + b_j)\varphi_{C_{ij}}$$

şi familia $(C_{ij})_{i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,m}}$ *constituie o partiţie măsurabilă a lui X.*

Dacă $\mu(C_{ij}) = \infty$, *rezultă* $\mu(A_i) = \mu(B_j) = \infty$, *deci* $a_i = b_j = 0$ *şi deci* $a_i+b_j=0$, *prin urmare* $f+g$ *este integrabilă. Mai departe avem*

$$\int_X (f+g)d\mu = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(a_i + b_j)\mu(C_{ij}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_i\mu(C_{ij}) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}b_j\mu(C_{ij}) = \int_X fd\mu + \int_X gd\mu$$

2^0) $\alpha f = \sum_{i=1}^{n}\alpha a_i\varphi_{A_i}$ *Dacă* $\mu(A_i) = \infty$, *rezultă* $a_i = 0$, *deci* $\alpha a_i = 0$ *şi deci* αf *integrabilă. In fine, avem :*

$$\int_X \alpha f d\mu = \sum_{i=1}^{n}\alpha a_i\mu(A_i) = \alpha\sum_{i=1}^{n}a_i\mu(A_i) = \alpha\int_X fd\mu.$$

Raţionament analog când f şi g sunt simple nenegative.

Corolar 1.*Fie (X, $\mathscr{A}$, μ) un spaţiu cu măsură şi f,g: X→**R** două funcţii simple, integrabile (resp. nenegative), cu* $f \le g$. *Atunci* $\int_X fd\mu \le \int_X gd\mu$.

Dem. Functia h=g-f este simplă, integrabilă (resp. nenegativă) şi g=f+h. Atunci (T.4.1.5.):

$$\int_X gd\mu = \int_X fd\mu + \int_X hd\mu \ge \int_X fd\mu$$

Corolar 2.*Fie (X, $\mathscr{A}$,μ) un spaţiu cu măsură şi f,g : X→**R** două funcţii simple, cu* $|f| \le g$ *şi g integrabilă. Atunci f este integrabilă.*

Dem. Din Cor.1 rezultă $\int_X |f| \le \int_X gd\mu < \infty$, deci $|f|$ integrabilă şi deci f integrabilă (P.4.1.3.)

Corolar 3. *Fie (X,$\mathscr{A}$,μ) un spaţiu cu măsură. Atunci operaţiile vectoriale naturale f+g, αf, definesc pe* $\mathscr{S}^1(X,\mathscr{A},\mu)$ *o structură de **R**-spaţiu vectorial, iar integrala* $\int_X : \mathscr{S}^1(X,\mathscr{A},\mu) \to \mathbf{R}$ *este o functională liniară monoton crescătoare.*

Dem. Aplicăm T. 4.1.5. şi Cor.1

4.1.6.Propoziţie.*Fie (X,$\mathscr{A}$,μ) un spaţiu cu măsură şi f: X→**R** o funcţie simplă, nenegativă. Atunci avem :*

$$\int_X fd\mu = \sup\{\int_X hd\mu\ ;\ 0 \le h \le f,\ h \text{ simplă}\}$$

Dem. Fie $0 \leq h < f$, h simplă fixată. Atunci (T.4.1.5.,Cor.1) avem $\int_X hd\mu \leq \int_X fd\mu$,deci

$$\sup\{ \int_X hd\mu ; 0 \leq h \leq f, \text{ h simplă}\} \leq \int_X fd\mu .$$

Cum $0 \leq h \leq f$ şi f simplă este adevărată şi inegalitatea contrară.

4.1.7.Teoremă.*Fie $(X,\mathscr{A}, \mu)$ un spaţiu cu măsură şi $f : X \to \mathbf{R}$ o funcţie simplă. Atunci, avem :*

$$f \geq 0 \ (a.p.t.) \Leftrightarrow \int_A fd\mu \geq 0, (\forall)\ A \in \mathscr{A}$$

Dem. ($\Rightarrow$) Fie $N:=\{x\in X;\ f(x)< 0\}$. Cum f măsurabilă, avem(T.3.2.8.) $N\in\mathscr{A}$, deci cf. ipotezei rezultă $\mu(N)=0$ şi deci (P.4.1.4,6^0)) $\int_N fd\mu=0$. Deoarece $f \geq 0$ pe $X\setminus A$, rezultă $\int_{X\setminus A} fd\mu \geq 0$,deci (T.4.1.5.)

$$\int_X fd\mu = \int_X f(\varphi_N + \varphi_{X\setminus N})d\mu = \int_N fd\mu + \int_{X\setminus N} fd\mu \geq 0 .$$

Fie acum $A\in\mathscr{A}$. Atunci functia $f\varphi_A$ este simplă şi $f\varphi_A \geq 0$ (a.p.t.), deci $\int_A fd\mu = \int_X f\varphi_A d\mu \geq 0$.

($\Leftarrow$) Fie $\sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_{A_i}$ o reprezentare canonică a lui f. Cf. ipotezei avem $\int_{A_i} fd\mu \geq 0, (\forall) c = \overline{1,n}$, deci $c_i\mu(A_i) = \int_{A_i} fd\mu \geq 0, (\forall) i = \overline{1,n}$ şi deci $(\forall)\ i = \overline{1,n}$, cu $c_i < 0$, avem $\mu(A_i) = 0$. Atunci mulţimea

$$\{x\in X;\ f(x) < 0\} = \bigcup \{A_i;\ i = \overline{1,n},\ c_i < 0\}$$

este de măsură nulă, i.e. $f \geq 0$ (a.p.t.)

Corolar 1.*Fie $(X ,\mathscr{A},\mu)$ un spaţiu cu măsură şi $f,g : \to \mathbf{R}$ două funcţii simple integrabile. Atunci avem :*

1^0) $f \leq g \ (a.p.t.) \Leftrightarrow \int_A fd\mu \leq \int_A gd\mu$, $(\forall)\ A \in\mathscr{A}$;

2^0) $f = g \ (a.p.t.) \Leftrightarrow \int_A fd\mu = \int_A gd\mu , (\forall)\ A \in\mathscr{A}$;

3^0) $f = 0 \ (a.p.t.) \Leftrightarrow \int_A fd\mu = 0, (\forall)\ A \in\mathscr{A}$.

Dem. 1^0) Fie $h := g - f$. Cf. T.4.1.5. h este simplă integrabilă, deci (T.4.1.7.) avem :

$f \leq g$ (a.p.t.) $\Leftrightarrow h \geq 0$ (a.p.t.) $\Leftrightarrow \int_A (g - f)d\mu \geq 0$, $(\forall)\ A\in\mathscr{A}$ etc.

2^0) rezultă din 1^0) şi 3^0) rezultă din 2^0).

4.1.8.Propoziție. *Fie $(X,\mathscr{A},\mu)$ un spațiu cu măsură și $f:X\to\mathbf{R}$ o funcție simplă, integrabilă (resp. nenegativă). Atunci $(\forall)(A_n)_{n\geq 1}\subseteq\mathscr{A}$ un şir mutual disjunct şi $A=\bigcup_{n\geq 1}A_n$, avem relația $\int_A fd\mu=\sum_{n\geq 1}\int_{A_n}fd\mu$.*

Dem. Presupunem f integrabilă şi fie $\sum_{i=1}^{m}c_i\varphi_{B_i}$ o reprezentare canonică a lui f. Atunci avem :

$$\int_A fd\mu=\int_X f\varphi_A d\mu=\int_X\left(\sum_{i=1}^{m}c_i\varphi_{A\cap B_i}\right)d\mu=\sum_{i=1}^{m}c_i\mu(A\cap B_i)$$

Analog avem :

$$\int_{A_n}fd\mu=\sum_{i=1}^{m}c_i\mu(A_n\cap B_i),\ (\forall)\ n\geq 1.$$

Şirul $(A_n\cap B_i)_{n\geq 1}$ fiind mutual disjunct şi $\bigcup_{n\geq 1}(A_n\cap B_i)=A\cap B_i$, rezultă

$$\mu(A\cap B_i)=\sum_{n\geq 1}\mu(A_n\cap B_i),(\forall)i\in\overline{1,m}\ ,$$

deci

$$\int_A fd\mu=\sum_{i=1}^{m}c_i\mu(A\cap B_i)=\sum_{i=1}^{m}c_i\left(\sum_{n\geq 1}\mu(A_n\cap B_i)\right)=\sum_{n\geq 1}\left(\sum_{i=1}^{m}c_i\mu(A_n\cap B_i)\right)=\sum_{n\geq 1}\int_{A_n}fd\mu.$$

Corolar 1. *Fie $(X,\mathscr{A},\mu)$ un spațiu cu măsură și $f:X\to\mathbf{R}$ o funcție simplă integrabilă nenegativă. Atunci relația $\nu_f(A):=\int_A fd\mu, A\in\mathscr{A}$, definește o măsură finită pe X.*

Dem. Evident $\nu_f(\emptyset)=0$, $\nu_f\geq 0$ şi cf. P.4.1.8. ν_f este numerabil aditivă. Cum $\nu_f(X)=\int_X fd\mu<\infty$, rezultă ν_f finită.

Corolar 2. *Fie $(X,\mathscr{A},\mu)$ un spațiu cu măsură și $f:X\to\mathbf{R}$ o funcție simplă integrabilă. Atunci aplicația, $\nu_f:\mathscr{A}\to\mathbf{R}$, definită astfel $\nu_f(A):=\int_A fd\mu$, este continuă (necondiționat) și numerabil aditivă.*

Dem. Funcțiile f^+ şi f^- sunt simple integrabile nenegative, deci (Cor.1) ν_{f^+} şi ν_{f^-} sunt măsuri finite, deci sunt continue (T.2.2.6.) şi numerabil aditive pe $\mathscr{A}$. In fine avem :

$$\nu_f(A)=\int_A fd\mu=\int_A f^+d\mu-\int_A f^-d\mu=\nu_{f^+}(A)-\nu_{f^-}(A),\ (\forall)\ A\in\mathscr{A},$$

deci $\nu_f=\nu_{f^+}-\nu_{f^-}$ şi deci ν_f este continuă şi numerabil aditivă.

4.1.9.Definiție. Fie $(X,\mathscr{A},\mu)$ un spațiu cu măsură și $f:X\to\overline{\mathbf{R}}$ o funcție ; distingem următorii doi pași :

i) f *măsurabilă nenegativă.* Atunci *integrala din* f *pe* X se definește prin relația :

$$\int_X f d\mu := \sup\left\{\int_X h d\mu ; h \in \mathscr{S}_f^+(X,\mathscr{A})\right\},$$

unde cu $\mathscr{S}_f^+(X,A)$ am notat mulțimea functiilor simple $h : X\to\mathbf{R}$, $0 \le h \le f$.

Dacă $\int_X fd\mu<\infty$, funcția f se numește *integrabilă* (pe X), iar dacă $\int_X fd\mu=\infty$, vom spune că f *are integrală* (pe X).

ii) f *măsurabilă arbitrară.* Atunci *integrala din* f *pe* X se definește prin relația :

$$\int_X f d\mu := \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu ,$$

dacă cel puțin una din cele două integrale este finită. Dacă $\left|\int_X fd\mu\right| < \infty$, functia f se numește *integrabilă* (pe X), iar dacă $\left|\int_X fd\mu\right| = \infty$, vom spune că f *are integrală* pe X. Vom nota cu $\mathscr{L}^1(X,\mathscr{A},\mu)$ *mulțimea funcțiilor integrabile* $f:X\to\overline{\mathbf{R}}$.Fixăm $A\in\mathscr{A}$. *Integrala din* f *pe mulțimea* A se definește prin relația $\int_A fd\mu := \int_X f\varphi_A d\mu$,dacă functia $f\varphi_A$ are integrală (pe X). Dacă $\left|\int_A fd\mu\right| < \infty$, funcția f se numește *inegrabilă* pe A

a) Dacă f este măsurabilă și $f\ge 0$ (resp. $f\le 0$), atunci f are integrală și $\int_X fd\mu \in [0,\infty]$ (resp.$[-\infty, 0]$).

b) Dacă f este măsurabilă, atunci avem :

$$f \text{ integrabilă} \Leftrightarrow \int_X f^+ d\mu<\infty \;\&\; \int_X f^- d\mu<\infty .$$

4.1.10. Propoziție (Proprietăți elementare ale integralei). *Fie $(X,\mathscr{A},\mu)$ un spațiu cu măsură. Atunci au loc următoarele proprietăți :*

1^0) Fie $f : X\to\overline{\mathbf{R}}$ o funcție măsurabilă. Dacă f este integrabilă (resp. are integrală), atunci integrala $\int_X fd\mu$ este unic determinată.

Unicitatea integralei din funcții simple (P.4.1.2.) implică unicitatea integralei din funcții măsurabile nenegative, de unde rezultă unicitatea integralei din funcțiile f^+ și f^- etc.

2^0) Fie $f : X\to\mathbf{R}$ o funcție simplă. Din relația $f = f^+ - f^-$ și din P.4.1.6. rezultă că cele două definiții ale integralei $\int_X fd\mu$ (D.4.1.1. și D.4.1.9.) sunt compatibile între ele.

Ținem seama că funcțiile simple sunt măsurabile (P.3.2.11.)

3^0) Fie $f : X \to \overline{\mathbf{R}}$ o funcție măsurabilă nenegativă. Atunci f are întotdeauna integrală, dar nu este în mod necesar integrabilă (v. Funcția $f(x)=[x]$, $x \in \mathbf{R}_+$)

Ținem seama că orice mulțime de numere reale are margine superioară în $\overline{\mathbf{R}}$.

4^0) Există funcții măsurabile $f : X \to \overline{\mathbf{R}}$ care au integrală, resp. care nu au integrală (v. funcția sign pe [-1, 1], resp. pe **R**).

5^0) Fie $f, g : X \to \overline{\mathbf{R}}$ două funcții măsurabile nenegative, cu $f \le g$. Atunci $\int_X f d\mu \le \int_X g d\mu$. În particular, dacă g este integrabilă rezultă f integrabilă.

Fie $\mathscr{S}_f^+, \mathscr{S}_g^+$ mulțimea funcțiilor simple nenegative, h:X→ **R**, majorate de f, resp. g. Atunci $\mathscr{S}_f^+ \subseteq \mathscr{S}_g^+$, deci

$$\int_X f d\mu = \sup\left\{\int_X h d\mu; h \in S_f^+\right\} \le \sup\left\{\int_X h d\mu; h \in S_g^+\right\} = \int_X g d\mu$$

6^0) Fie $f : X \to \overline{\mathbf{R}}$ o funcție măsurabilă nenegativă și $A, B \in \mathscr{A}$, $A \subseteq B$. Atunci $\int_A f d\mu \le \int_B f d\mu$.

Funcțiile $f\varphi_A$, $f\varphi_B$ sunt măsurabile (T.3.2.15.) nenegative și $f\varphi_A \le f\varphi_B$. Atunci cf. 5^0) rezultă :

$$\int_A f d\mu = \int_X f\varphi_A d\mu \le \int_X f\varphi_B d\mu = \int_B f d\mu$$

7^0) Fie $f : X \to \overline{\mathbf{R}}$ o funcție integrabilă (resp. măsurabilă nenegativă). Atunci f este integrabilă (resp. are integrală) pe orice mulțime $A \in \mathscr{A}$.

Distingem trei cazuri posibile.

i) *f integrabilă nenegativă.* Atunci $0 \le f\varphi_A \le f$ și $f\varphi_A$ este măsurabilă (T.3.2.15.), deci cf.5^0) $\int_X f\varphi_A d\mu \le \int_X f d\mu < \infty$ și deci $\int_A f d\mu < \infty$. Așadar, f este integrabilă pe A.

ii) *f integrabilă arbitrară.* Atunci f^+ și f^- sunt integrabile, deci (cf.i)) $f^+\varphi_A$ și $f^-\varphi_A$ sunt integrabile. Cum $(f\varphi_A)^+ = f^+\varphi_A$ și $(f\varphi_A)^- = f^-\varphi_A$, rezultă $f\varphi_A$ integrabilă, i.e. f integrabilă pe A.

iii) *f măsurabilă nenegativă.* Atunci $f\varphi_A$ este măsurabilă nenegativă, deci (cf.3^0))$f\varphi_A$ are integrală și deci f are integrală pe A.

8^0) Fie $f: X \to \overline{\mathbf{R}}$ o funcție măsurabilă nenegativă. Atunci $\int_A f d\mu \geq 0$, $(\forall)\ A \in \mathscr{A}$.

Intr-adevăr, $f\varphi_A$ este o funcție măsurabilă nenegativă, deci $\int_X f\varphi_A d\mu \geq 0$, i.e. $\int_A f d\mu \geq 0$.

9^0) Fie $f: X \to \overline{\mathbf{R}}$ o funcție măsurabilă, cu $f = 0$ (a.p.t.). Atunci f este integrabilă și $\int_A f d\mu = 0$, $(\forall)\ A \in \mathscr{A}$.

Funcțiile f^+ și f^- sunt măsurabile nenegative și, cf. ipotezei, sunt nule a.p.t. Dacă $0 \leq h \leq f^+$, h simplă, atunci $h = 0$ (a.p.t.), deci (T.4.1.7.,Cor.1) $\int_A h d\mu = 0$ și deci

$$\int_X f^+ d\mu = \sup\left\{\int_X h d\mu; 0 \leq h \leq f^+, h \text{ simplă}\right\} = 0$$

Analog se arată că $\int_X f^- d\mu = 0$, deci $\int_X f d\mu = 0$.

Fie acum $A \in \mathscr{A}$ fixat. Atunci $f\varphi_A$ este măsurabilă (T.3.2.15.) și, evident, $f\varphi_A = 0$ (a.p.t.), deci $\int_X f\varphi_A d\mu = 0$ și deci $\int_A f d\mu = 0$.

10^0) Fie $f: X \to \overline{\mathbf{R}}$ o funcție măsurabilă, cu $f \geq 0$ (a.p.t.). Atunci $\int_X f d\mu$ există și este nenegativă.

Intr-adevăr, din $f \geq 0$ (a.p.t.) rezultă $f^- = 0$ (a.p.t.), deci (cf. 9^0))avem $\int_X f^- d\mu = 0$.Mai departe, f^+ este măsurabilă și $f^+ \geq 0$, deci (cf. 8^0)) $\int_X f^+ d\mu \geq 0$.

Prin urmare :

$$\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu = \int_{Xf} f^+ d\mu \geq 0$$

11^0) Fie $f: X \to \overline{\mathbf{R}}$ o funcție măsurabilă. Atunci f este integrabilă pe orice mulțime $A \in \mathscr{A}$ de măsură nulă și avem $\int_A f d\mu = 0$.

Fie $A \in \mathscr{A}$, cu $\mu(A) = 0$, fixată. Atunci functia $f\varphi_A$ este măsurabilă și nulă a.p.t., deci (cf. 9^0)) $f\varphi_A$ este integrabilă și avem $\int_X f\varphi_A d\mu = 0$, i.e. $\int_A f d\mu = 0$.

12^0)Fie $f: X \to \overline{\mathbf{R}}$ o funcție măsurabilă nenegativă. Atunci avem relația $\int_A (-f)\, d\mu = -\int_A f d\mu$, $(\forall)\ A \in \mathscr{A}$.

Evident avem $(-f)^+ = 0$ și $(-f)^- = f$, deci

$$\int_A (-f)d\mu = \int_A (-f)^+ d\mu - \int_A (-f)^- d\mu = -\int_A f d\mu$$

13^0) Fie $f: X \to \overline{\mathbf{R}}$ o funcție măsurabilă. Atunci avem $\int_X |f| d\mu = 0 \Leftrightarrow f = 0$ (a.p.t.)

($\Rightarrow$) Fie c > 0 fixat şi A : = $\{x \in X;\ |f(x)| \geq c\}$. Evident avem $c\varphi_A \leq |f|$, deci $c\mu(A) \leq \int_X |f| d\mu = 0$ şi deci $\mu(A) = 0$. Deoarece,

$$\{x \in X; f(x) \neq 0\} = \bigcup_{n \geq 1} \left\{x \in X; |f(x)| \geq \frac{1}{n}\right\},$$

rezultă că $\mu(\{x \in X; f(x) \neq 0\}) = 0$, deci f este nulă a.p.t.

4.1.11.Propoziție.*Fie $(X,\mathscr{A},\mu)$ un spațiu cu măsură și $f: X \to \overline{\mathbf{R}}$ o funcție măsurabilă. Atunci f este integrabilă $\Leftrightarrow |f|$ este integrabilă.*

Dem.($\Rightarrow$) Fie $h: X \to \mathbf{R}$ simplă, $0 \leq h \leq |f|$, fixată. Fie mulțimea $A := \{x \in X;\ f(x) \geq 0\}$ şi $B = X \setminus A$. Evident funcțiile $h\varphi_A$, $h\varphi_B$ sunt simple şi avem $0 \leq h\varphi_A \leq f^+$, $0 \leq h\varphi_B \leq f^-$, $h = h\varphi_A + h\varphi_B$. Atunci (T.4.1.5.)

$$\int_X h d\mu = \int_X h\varphi_A d\mu + \int_X h\varphi_B d\mu \leq \int_X f^+ d\mu + \int_X f^- d\mu = M < \infty$$

Prin urmare,

$$\int_X |f| d\mu = \sup\left\{\int_X h d\mu; 0 \leq h \leq |f|, h \text{ simplă}\right\} < \infty,$$

deci $|f|$ este integrabilă.

($\Leftarrow$) Evident $0 \leq f^+, f^- \leq |f|$, deci (P.4.1.10, 5^0)) f^+ şi f^- sunt integrabile şi deci f este integrabilă.

Corolar 1. *Fie $(X,\mathscr{A},\mu)$ un spațiu cu măsură și $f: X \to \overline{\mathbf{R}}$ o funcție măsurabilă. Atunci f integrabilă $\Leftrightarrow (\exists)\ g: X \to \overline{\mathbf{R}}$ integrabilă, a.î. $|f| \leq g$.*

Dem. ($\Leftarrow$) Din P.4.1.10,5^0) rezultă $\int_X |f| d\mu \leq \int_X g d\mu < \infty$, deci $|f|$ este integrabilă şi deci (P.4.1.11.) f este integrabilă.

Corolar 2. *Fie $(X,\mathscr{A},\mu)$ un spațiu cu măsură și $f, g: X \to \overline{\mathbf{R}}$ două functii măsurabile, cu g mărginită. Atunci functia fg este integrabilă.*

Dem. fg este măsurabilă şi $\int_X |fg| d\mu \leq \|g\|_\infty \int_X |f| d\mu < \infty$

Corolar 3.*Fie $(X,\mathscr{A},\mu)$ un spațiu cu măsură finită și $f: X \to \overline{\mathbf{R}}$ o funcție măsurabilă. Atunci $\int_A |f| d\mu \leq \|f\|_\infty \mu(A)$, $(\forall) A \in \mathscr{A}$*

Dem. $\int_A |f| d\mu = \int_X |f\varphi_A| d\mu \leq \|f\|_\infty \int_X \varphi_A d\mu = \|f\|_\infty \mu(A)$, $(\forall) A \in \mathscr{A}$.

4.1.12. Propoziție. *Fie $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un spațiu cu măsură și $f, g : X \to \overline{\mathbf{R}}$ două funcții măsurabile, nenegative. Atunci au loc afirmațiile :*

1^0) $f \le g$ (a.p.t.) $\Rightarrow \int_A f d\mu \le \int_A g d\mu$, $(\forall)\ A \in \mathscr{A}$;

2^0) $f = g$ (a.p.t.) $\Rightarrow \int_A f d\mu = \int_A g d\mu$, $(\forall)\ A \in \mathscr{A}$.

Dem. 1^0) Fie $\mathscr{S}_f^+$ și $\mathscr{S}_g^+$ mulțimea funcțiilor $h \in \mathscr{S}^+(X, \mathscr{A}, \mu)$, a.î. $0 \le h \le f$, resp. $0 \le h \le g$. Să notăm $A := \{x \in X;\ f(x) \le g(x)\}$; cf. ipotezei rezultă (T.3.2.8.) $A \in \mathscr{A}$. și $\mu(X \setminus A) = 0$. Fixăm $h \in \mathscr{S}_f^+$. Cum $A \in \mathscr{A}$ și $\mu(X \setminus A) = 0$, rezultă $h\varphi_A$ simplă (P.3.1.2.), $0 \le h\varphi_A \le g$ și $h\varphi_A = h$ (a.p.t.), deci (T.4.1.7,Cor.1) : $\int_X h d\mu = \int_X h\varphi_A d\mu \le \int_X g d\mu$. Așadar avem : $\int_X h d\mu \le \int_X g d\mu$, $(\forall)\ h \in \mathscr{S}_f^+$.

Prin urmare,

$$\int_X f d\mu = \sup\left\{\int_X h d\mu;\ h \in \mathscr{S}_f^+\right\} \le \int_X g d\mu,$$

deci $$\int_A f d\mu = \int_X f\varphi_A d\mu \le \int_X g\varphi_A d\mu = \int_A g d\mu,\ (\forall) A \in \mathscr{A}.$$

2^0) Dacă $f = g$ (a.p.t.), rezultă cf. 1^0) că $\int_X f d\mu \underset{\ge}{\overset{\le}{-}} \int_X g d\mu$ etc.

Corolar 1. *Fie $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un spațiu cu măsură; $f, g : X \to \overline{\mathbf{R}}$ două funcții, cu f măsurabilă, g integrabilă nenegativă și $|f| \le g$ (a.p.t.). Atunci f este integrabilă.*

Dem. Funcția f^+ este măsurabilă (T.3.2.15,Cor.2) nenegativă și avem $f^+ \le g$ (a.p.t.), deci (P.4.1.12.) $\int_X f^+ d\mu \le \int_X g d\mu < \infty$ și deci f^+ este integrabilă.

Analog se arată că f^- este integrabilă, prin urmare f este integrabilă.

Corolar 2. *Fie $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un spațiu cu măsură și $f, g : X \to \overline{\mathbf{R}}$ două funcții integrabile. Atunci au loc afirmațiile :*

1^0) $f \le g$ (a.p.t.) $\Rightarrow \int_A f d\mu \le \int_A g d\mu$, $(\forall) A \in \mathscr{A}$;

2^0) $f = g$ (a.p.t.) $\Rightarrow \int_A f d\mu = \int_A g d\mu$, $(\forall) A \in \mathscr{A}$;

Dem. 1^0) Din $f \le g$ (a.p.t.) rezultă $f^+ \le g^+$ (a.p.t.) și $f^- \ge g^-$ (a.p.t.), deci $\int_A f d\mu = \int_A f^+ d\mu - \int_A f^- d\mu \le \int_A g^+ d\mu - \int_A g^- d\mu = \int_A g d\mu$, $(\forall)\ A \in \mathscr{A}$

2^0) rezultă din 1^0)

4.1.13. Teoremă. *Fie $(X,\mathscr{A},\mu)$ un spațiu cu măsură completă și $f,g:X\to\overline{\mathbf{R}}$ două funcții egale a.p.t.. Dacă g este integrabilă, atunci f este integrabilă și avem:* $$\int_A f d\mu = \int_A g d\mu,\ (\forall) A\in\mathscr{A}.$$

Dem. Din P.3.2.12. rezultă f măsurabilă. Evident avem $|f|=|g|$ (a.p.t.). Cum $|g|$ este integrabilă cf. P.4.1.11., rezultă (P.4.1.11, Cor.1) f integrabilă.

Aşadar, f,g sunt funcții integrabile, egale a.p.t., deci (4.1.12.,Cor.2)
$$\int_A f d\mu = \int_A g d\mu,\ (\forall)A\in\mathscr{A}.$$

4.1.14. Teoremă. *Fie $(X,\mathscr{A},\mu)$ un spațiu cu măsură și $f: X\to\overline{\mathbf{R}}$ o funcție integrabilă. Atunci au loc afirmațiile :*

1^0) $f\geq 0$ (a.p.t.) $\Leftrightarrow \int_A f d\mu \geq 0,\ (\forall)A\in\mathscr{A}$;

2^0) $f=0$ (a.p.t.) $\Leftrightarrow \int_A f d\mu = 0,\ (\forall)A\in\mathscr{A}$;

3^0) $f=0$ (a.p.t.) $\Leftrightarrow \int_X |f| d\mu = 0.$

Dem. Implicațiile ($\Rightarrow$) din 1^0)-3^0) rezultă din P.4.1.12,Cor.2.

1^0) ($\Leftarrow$) Fie $r > 0$ şi $A:=\{x\in X;\ f(x)<-r\}$. Evident avem $f\varphi_A \leq -r\varphi_A$, deci (P.4.1.12,Cor.2) $\int_A f d\mu \leq -r\mu(A)$. Cum prin ipoteză $\int_A f d\mu \geq 0$, rezultă $-r\mu(A)\geq 0$, deci $\mu(A) = 0$. Atunci $(\forall)\ n\geq 1$, mulțimea $A_n := \{x\in X;\ f(x) <-1/n\}$ este μ-nulă, deci mulțimea $N := \{x\in X;\ f(x) < 0\} = \bigcup_{n\geq 1} A_n$, este μ-nulă.

Prin urmare $f\geq 0$ pe $X\setminus N$, i.e. $f\geq 0$ (a.p.t.)

2^0) ($\Leftarrow$)Din ipoteză rezultă $\int_A(\pm f)d\mu=0,(\forall)A\in\mathscr{A}$, deci cf. 1^0) avem $\pm f\geq 0$ (a.p.t.) şi deci $f=0$ (a.p.t.).

3^0)($\Leftarrow$)Din relația $\int_X |f| d\mu=0$,rezultă $\int_A |f| d\mu=0,(\forall)A\in\mathscr{A}$, deci cf. 2^0) avem $|f|=0$ (a.p.t.) şi deci $f=0$ (a.p.t.).

4.1.15. Propoziție. *Fie $(X,\mathscr{A},\mu)$ un spațiu cu măsură și $f: X\to\overline{\mathbf{R}}$ o funcție integrabilă. Atunci avem :*
$$\left|\int_A f d\mu\right| \leq \int_A |f| d\mu \leq \sup_{x\in A}|f(x)|\mu(A),\ (\forall)A\in\mathscr{A}$$

Dem. Evident avem : $-|f| \leq f \leq |f|$. Cum $|f|$ este integrabilă (P.4.1.11.), rezultă (P.4.1.10,12^0)) :

$$-\int_A |f| d\mu = \int_A (-|f|) d\mu \leq \int_A f d\mu \leq \int_A |f| d\mu, \ (\forall) A \in \mathscr{A},$$

deci

$$\left| \int_A f d\mu \right| \leq \int_A |f| d\mu, \ (\forall) A \in \mathscr{A}$$

Mai departe, fixăm $A \in \mathscr{A}$ şi fie c:= $\sup\limits_{x \in A} |f(x)|$. Dacă c=$\infty$ inegalitatea din enunț este evidentă. Să presupunem c < ∞. Atunci $|f| \varphi_A \leq c \varphi_A$, deci

$$\int_A |f| d\mu = \int_X |f| \varphi_A d\mu \leq \int_X c \varphi_A d\mu = c\mu(A)$$

Observație. P.4.1.15. are loc dacă presupunem numai că f are integrală. Considerăm succesiv $\int_A |f| d\mu$, finită, apoi $+\infty$.

4.1.16. Definiție. Fie (X, $\mathscr{A}$, μ) un spațiu cu măsură. O funcție măsurabilă $f : X \to \overline{\mathbf{R}}$ se numeşte *esențial mărginită*, dacă există $A \in \mathscr{A}$, cu μ (A) = 0, a.î. f este mărginită pe A^c. *Adevăratul maxim* al funcției $|f|$ se defineşte astfel :

$$\text{ad. max } |f| := \inf_{\mu(A)=0} \left(\sup_{x \in C_A} |f(x)| \right).$$

4.1.17. Propoziție. *Fie (X,$\mathscr{A}$,μ) un spațiu cu măsură finită şi f : X→$\overline{\mathbf{R}}$ o funcție măsurabilă esențial mărginită, în particular f mărginită. Atunci f este integrabilă şi avem* $\int_X |f| d\mu \leq \mu(X) ad.\max.|f|$.

Dem. Fie M:=ad.max.$|f|$. Evident avem $|f(x)| \leq M$ (a.p.t.), deci cf. P.4.1.12 avem $\int_X |f| d\mu \leq M\mu(X) < \infty$ şi deci $|f|$ integrabilă.

Prin urmare f este integrabilă (P.4.1.11.)

4.1.18. Propoziție. *Fie (X, $\mathscr{A}$, μ) un spațiu cu măsură şi f : X→$\overline{\mathbf{R}}$ o funcție măsurabilă. Atunci au loc proprietățile :*

1^0) (∀) $\alpha \geq 0$ şi A : = {x∈X; $|f(x)| \geq \alpha$} ⇒ $\alpha\mu(A) \leq \int_A |f| d\mu \leq \int_X |f| d\mu$;

2^0) (∀) $\beta \geq 0$ şi B : = {x∈X; $|f(x)| \leq \beta$} ⇒ $\beta\mu(B) \geq \int_B |f| d\mu$;

3^0) (∀)$0 \leq \alpha \leq \beta$ şi C:={x∈X; $\alpha \leq |f(x)| \leq \beta$} ⇒ $\alpha\mu(C) \leq \int_C |f| d\mu \leq \beta\mu(C)$.

Dem. 1^0) $\alpha\varphi_A \le |f|\varphi_A$, deci $\alpha\mu(A) \le \int_X |f|\varphi_A d\mu = \int_A |f| d\mu$;

2^0) $\beta\varphi_B \ge |f|\varphi_B$, deci $\beta\mu(B) \ge \int_X |f|\varphi_B d\mu = \int_B |f| d\mu$;

3^0) $\alpha\varphi_C \le |f|\varphi_C \le \beta\varphi_C$, deci $\alpha\varphi(C) \le \int_C |f| d\mu \le \beta\mu(C)$.

Corolar 1. *Fie $(X,\mathcal{A},\mu)$ un spațiu cu măsură și $f : X \to \overline{\mathbf{R}}$ o funcție integrabilă. Atunci au loc afirmațiile :*

1^0) $(\forall)\ \varepsilon > 0$, $(\exists)\ \alpha > 0$, a.î. $\mu(\{x \in X;\ |f(x)| \ge \alpha\}) < \varepsilon$;

2^0) $(\forall)\ \alpha > 0$, $\mu(\{x \in X;\ |f(x)| \ge \alpha\}) < \infty$;

3^0) $\mu(\{x \in X;\ |f(x)| = \infty\}) = 0$, i.e. f finită a.p.t..

Dem. 1^0) Fie $\varepsilon > 0$ fixat. Atunci $(\forall)\ \alpha > 0$, avem :

$$\mu(\{x \in X;\ |f(x)| \ge \alpha\}) \le \alpha^{-1} \cdot \int_X |f| d\mu,$$

deci pentru $\alpha \ge \varepsilon^{-1} \int_X |f| d\mu$ rezultă inegalitatea din enunț.

2^0) rezultă din P.1.1.18, 1^0).

3^0) Dacă $A := \{x \in X; |f(x)| = +\infty\}$ și $A_n := \{x \in X; |f(x)| \ge n\} \Rightarrow A = \bigcap_{n \ge 1} A_n$,

deci

$$0 \le \mu(A) \le \mu(A_n) \le (1/n) \int_X |f| d\mu \to 0\ (n \to \infty)$$

și deci $\mu(A) = 0$.

Observația 1. Există funcții măsurabile, finite a.p.t. și neintegrabile, ca de exemplu funcția 1 pe **R**.

Observația 2. Inegalitatea 1^0) și 2^0) din P.4.1.18. se utilizează adesea sub forma

$$\int_{|f(x)| \ge \alpha} |f| d\mu \ge \alpha\mu(\{|f(x)| \ge \alpha\});\ \int_{|f(x)| \le \beta} |f| d\mu \le \beta\mu(\{|f(x)| \le \beta\}).$$

Observație. Fie $(X,\mathcal{A},\mu)$ un spațiu cu măsură și f o funcție definită μ-a.p.t. pe X și care este restricția unei funcții μ-integrabile $g : X \to \overline{\mathbf{R}}$. Atunci prin definiție $\int_X f d\mu := \int_X g d\mu$. Definiția dată este coerentă. Într-adevăr, fie $g_1, g_2 : X \to \overline{\mathbf{R}}$ două funcții integrabile, care prelungesc pe f. Atunci $g_1 = g_2$ (a.p.t.), deci (P.4.1.12.) $\int_X g_1 d\mu = \int_X g_2 d\mu$, deci definiția integralei $\int_X f d\mu$ nu depinde de funcția integrabilă g:X→$\overline{\mathbf{R}}$ care prelungește pe f. Cum orice funcție integrabilă este finită a.p.t. (P.4.1.18,Cor.1), identificând funcțiile integrabile egale intre ele a.p.t., putem identifica o funcție integrabilă g definită pe X și cu valori in $\overline{\mathbf{R}}$, cu o funcție integrabilă f definită pe X sau a.p.t. pe X, și cu valori finite.

4.2. Șiruri de funcții integrabile

4.2.1.Teoremă(Beppo Levi–teorema convergenței monotone)*Fie $(X,\mathscr{A},\mu)$ un spațiu cu măsură, $f_n : X\to\overline{\mathbf{R}}$ $(n \geq 1)$, un șir monoton crescător de funcții măsurabile nenegative și $f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, $(\forall)$ $x\in X$. Atunci f este măsurabilă și avem :*

$$\lim_{n\to\infty}\int_A f_n d\mu = \int_A f d\mu\,,\ (\forall)\ A\in\mathscr{A}$$

Dem.Din T.3.2.15. rezultă f măsurabilă. Fixăm $A\in\mathscr{A}$. Deoarece $f_n\leq f_{n+1}\leq f$, $(\forall)n\geq 1$, rezultă (P.4.1.12.)

$$0\leq \int_A f_n d\mu \leq \int_A f_{n+1}d\mu \leq \int_A f d\mu\,,\ (\forall)\ n\geq 1,$$

deci $\left(\int_A f_n d\mu\right)_{n\geq 1}$ este un șir monoton crescător de elemente din $\overline{\mathbf{R}}_+$, deci are limită și avem

$$L := \lim_{n\to\infty}\int_A f_n d\mu \leq \int_A f d\mu$$

Pentru a arată inegalitatea contrară, fie h:X→**R**, o funcție simplă, $0\leq h\leq f$, și $0 < \alpha < 1$, fixați. Fie $A_n := \{x\in A;\ \alpha h(x) \leq f_n(x)\}$ $(n \geq 1)$. Evident $A_n \subseteq A_{n+1}$, $(\forall)$ $n \geq 1$. Să aratăm că $\bigcup\limits_{n\geq 1} A_n$ = A. Fie in acest scop $x\in A$ fixat.

i) $h(x)>0 \Rightarrow \alpha h(x) < f(x)$, deci $(\exists)m\geq 1$, cu $\alpha h(x) \leq f_m(x)$ și deci $x\in A_m$.

ii) $h(x)= 0\Rightarrow \alpha h(x) \leq f_n(x)$, $(\forall)$ $n \geq 1$; deci $x\in A_n$, $(\forall)$ $n \geq 1$.

Așadar, $A = \bigcup\limits_{n\geq 1} A_n$, deci $A_n\uparrow A$.Din T.2.2.6. rezultă $\mu(A_n)\to\mu(A)$.

Este clar că $\alpha h\varphi_{A_n} \leq f_n\varphi_{A_n} \leq f_n\varphi_A$, $(\forall)$ $n \geq 1$, deci

$$\int_{A_n}\alpha h d\mu = \int_X \alpha h\varphi_{A_n}d\mu \leq \int_X f_n\varphi_A d\mu = \int_A f_n d\mu\,,(\forall)\ n\geq 1$$

și deci (P.4.1.8,Cor.2.) avem :

$$\alpha \int_A h d\mu = \lim_{n\to\infty} \alpha \int_{A_n} h d\mu \le \lim_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu = L.$$

Cum α nu depinde de h, rezultă $\int_A h d\mu = \lim_{\alpha\uparrow 1} \alpha \int_A h d\mu \le L$, deci

$$\int_A f d\mu = \sup\left\{\int_A h d\mu; 0 \le h \le f, h \text{ simplă}\right\} \le L.$$

Prin urmare, $\int_A f d\mu = L = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu$.

Corolar 1. *Fie $(X,\mathcal{A},\mu)$ un spațiu cu măsură și $f:X\to\overline{\mathbf{R}}$ o funcție măsurabilă nenegativă. Atunci $(\forall)(A_n)_{n>1}\subseteq\mathcal{A}$, $A_n \uparrow A$, rezultă* $\lim_{n\to\infty} \int_{A_n} f d\mu = \int_A f d\mu$.

Dem. Fie $f_n := f\varphi_{A_n}$ $(n \ge 1)$. Evident $(f_n)_{n>1}$ este un şir monoton crescător de funcții măsurabile nenegative şi $f_n \xrightarrow{p} f\varphi_A$. Atunci (T.4.2.1.) rezultă $\int_X f_n d\mu \to \int_X f\varphi_A d\mu$, deci

$$\int_A f d\mu = \int_X f\varphi_A d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{A_n} f d\mu$$

Corolar 2. *Fie $(X,\mathcal{A},\mu)$ un spațiu cu măsură și $f,g:X\to\overline{\mathbf{R}}$ două funcții măsurabile nenegative și α, $\beta > 0$. Atunci*

$$\int_A (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int_A f d\mu + \beta \int_A g d\mu,\ (\forall)\ A \in \mathcal{A}.$$

Dem. Din T.3.2.16. rezultă : $(\exists)$ $f_n, g_n:X\to\mathbf{R}$ $(n \ge 1)$ două şiruri monoton crescătoare de funcții simple a.î. $f_n \xrightarrow{p} f$ & $g_n \xrightarrow{p} g$. Atunci (T.4.1.5.)

$$\int_A (\alpha f_n + \beta g_n) d\mu = \alpha \int_A f_n d\mu + \beta \int_A g_n d\mu,\ (\forall)\ n \ge 1. \qquad (1)$$

Cum $(\alpha f_n + \beta g_n)_{n\ge 1}$ este, evident, un şir monoton crescător de funcții măsurabile (T.3.2.15.), nenegative, punctual convergent la $\alpha f + \beta g$, trecând în relația (1) la limită, $n\to\infty$, şi ținând cont de T.4.2.1, deducem :

$$\int_A (\alpha f + \beta g) d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_A (\alpha f_n + \beta g_n) d\mu = \alpha \lim_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu + \beta \lim_{n\to\infty} \int_A g_n d\mu = \alpha \int_A f d\mu + \beta \int_A g d\mu$$

Corolar 3. *Fie $(X,\mathcal{A},\mu)$ un spațiu cu măsură și $f_n : X\to\overline{\mathbf{R}}$ $(n \ge 1)$ un şir de funcții măsurabile nenegative. Atunci funcția, $f := \sum_{n\ge 1} f_n$, este măsurabilă şi avem relația :*

$$\int_A f d\mu = \sum_{n\ge 1} \int_A f_n d\mu,\ (\forall) A \in \mathcal{A}.$$

Dem. Fie $s_n := \sum_{k=1}^{n} f_k$ (n ≥ 1). Evident $(s_n)_{n\geq 1}$ este un şir monoton crescător de funcţii măsurabile (T.3.2.15.), nenegative,punctual convergent la f. Din T.4.2.1. rezultă f măsurabilă şi $\int_A s_n d\mu \to \int_A f d\mu$, deci ,cf. Cor.2, rezultă

$$\sum_{k=1}^{n} \int_A f_k d\mu = \int_A \left(\sum_{k=1}^{n} f_k \right) d\mu = \int_A s_n d\mu \to \int_A f d\mu .$$

Prin urmare seria $\sum_{n\geq 1} \int_A f_n d\mu$ este convergentă şi are suma $\int_A f d\mu$

Observaţia 1. *Teorema convergenţei monotone* (T.C.M.) ne dă condiţii suficiente de trecere la limită sub semnul integral.

Observaţia 2.Teorema Beppo Levi rămâne valabilă dacă presupunem $f_n \leq f_{n+1}$(a.p.t.), (∀) n ≥ 1, şi $f_n \xrightarrow{a.p.t.} f$, cu f măsurabilă.

Observaţia 3 Relaţia din Cor.3 se traduce asfel : integrala este o aplicaţie numerabil aditivă pe mulţimea $\mathcal{M}_+(X, \mathcal{A}, \mu)$ a funcţiilor măsurabile nenegative.

4.2.2. Teoremă (Operaţii algebrice cu funcţii integrabile). *Fie $(X,\mathcal{A},\mu)$ un spaţiu cu măsură; $f,g: X \to \overline{\mathbf{R}}$ două funcţii integrabile şi $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Atunci funcţia $\alpha f + \beta g$ este integrabilă şi avem relaţia :*

$$\int_A (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int_A f d\mu + \beta \int_A g d\mu \text{, } (\forall) A \in \mathcal{A}.$$

Dem. Vom demonstra teorema în mai multe etape.

(I) f ≥ 0, g ≥ 0; α > 0, β > 0. *Atunci* αf + βg *este integrabilă şi are loc relaţia din enunţ.* Am văzut (T.4.2.1.,Cor.1) că are loc relaţia :

$$\int_A (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int_A f d\mu + \beta \int_A g d\mu \qquad (1)$$

Termenul din dreapta relaţiei (1) este finit, deoarece f şi g sunt integrabile, deci şi termenul din stânga este finit şi deci αf + βg este integrabilă.

(II) f ≥ 0, g ≥ 0. *Atunci* f – g *este integrabilă şi avem relaţia* :

$$\int_A (f - g) d\mu = \int_A f d\mu - \int_A g d\mu .$$

Într-adevăr, fie h:=f–g. Cum $|h| \leq f+g$ şi cf.(I) f+g este integrabilă, rezultă (P.4.1.11,Cor.1) h integrabilă. Deoarece $h^+ - h^- = f - g \Leftrightarrow h^+ + g = h^- + f$,din (I) rezultă

$$\int_A h^+ d\mu + \int_A g d\mu = \int_A h^- d\mu + \int_A f d\mu ,$$

deci

$$\int_A h d\mu = \int_A h^+ d\mu - \int_A h^- d\mu = \int_A f d\mu - \int_A g d\mu$$

(III) f,g *arbitrare.Atunci* f + g *este integrabilă şi avem relaţia* :

$$\int_A (f+g) d\mu = \int_A f d\mu + \int_A g d\mu .$$

Într-adevăr, f + g = ($f^+ + g^+$) – ($f^- + g^-$) şi $f^+ + g^+$, $f^- + g^-$ sunt nenegative şi cf. (I) sunt integrabile, deci cf. (II) f + g este integrabilă şi avem :

$$\int_A (f+g) d\mu = \int_A (f^+ + g^+) d\mu - \int_A (f^- + g^-) d\mu \overset{(I)}{=}$$

$$= \int_A f^+ d\mu + \int_A g^+ d\mu - \int_A f^- d\mu - \int_A g^- d\mu = \int_A f d\mu + \int_A g d\mu .$$

(IV) f *arbitrară,* c > 0. *Atunci* $\pm$cf *este integrabilă şi avem relaţia* : $\int_A (\pm cf) d\mu = \pm c \int_A f d\mu$.Într-adevăr, $(cf)^+ = cf^+$, $(cf)^- = cf^-$,deci (cf. I) $(cf)^+$ şi $(cf)^-$ sunt integrabile şi avem :

$$\int_A (cf)^+ d\mu = c \int_A f^+ d\mu < \infty, \int_A (cf)^- d\mu = c \int_A f^- d\mu < \infty$$

De aici rezultă că funcţia *cf* este integrabilă şi avem :

$$\int_A (cf) d\mu = c \int_A f^+ d\mu - c \int_A f^- d\mu = c \int_A f d\mu .$$

Deoarece $-f = f^- - f^+$ şi f^-, f^+ sunt integrabile, rezultă (cf.II) că –f este integrabilă şi

$$\int_A (-f) d\mu = \int_A f^- d\mu - \int_A f^+ d\mu = -\int_A f d\mu .$$

In fine, $\int_A (-cf) d\mu = -\int_A cf d\mu = -c \int_A f d\mu$.

(V) f, g *şi* α, β *arbitrare. Atunci* αf + βg *este integrabilă şi avem relaţia din enunţ.* Într-adevăr, αf şi βg sunt integrabile (cf.IV), deci αf + βg este integrabilă (cf. III). De asemenea avem :

$$\int_A (\alpha f + \beta g) d\mu \overset{(III)}{=} \int_A (\alpha f) d\mu + \int_A (\beta g) d\mu \overset{(IV)}{=} \alpha \int_A f d\mu + \beta \int_A g d\mu$$

Cu aceasta teorema este complet demonstrată.

Corolar 1. *Fie (X,$\mathscr{A}$,μ) un spaţiu cu măsură şi f, g : X→$\overline{\mathbf{R}}$, două funcţii integrabile. Atunci funcţiile $f \vee g$ şi $f \wedge g$ sunt integrabile.*

Dem. $f \vee g = \frac{1}{2}(f + g + |f-g|)$, $f \wedge g = \frac{1}{2}(f + g - |f-g|)$.

Din T.4.1.2. rezultă $f \pm g$ integrabile, deci (P.4.1.11.) $|f \pm g|$ integrabilă şi deci (T.4.2.2.) $f \vee g$ şi $f \wedge g$ integrabile.

4.2.3. Teoremă (Proprietatea de monotonie a integralei). *Fie $(X,\mathscr{A},\mu)$ un spaţiu cu măsură şi $f,g:X \to \overline{\mathbf{R}}$ două funcţii integrabile. Atunci au loc afirmaţiile:*

1^0) $f \le g$ (a.p.t.) $\Leftrightarrow \int_A f d\mu \le \int_A g d\mu$, $(\forall) A \in \mathscr{A}$.

2^0) $f = g$ (a.p.t.) $\Leftrightarrow \int_A f d\mu = \int_A g d\mu$, $(\forall) A \in \mathscr{A}$.

Dem. 1^0) ($\Rightarrow$) Funcţia $h := g - f$ este integrabilă şi cf. T.4.2.2 avem

$$\int_A h d\mu = \int_A g d\mu - \int_A f d\mu, (\forall) A \in \mathscr{A}.$$

Cum $h \ge 0$ (a.p.t.), rezultă (P.4.1.12.) $\int_A h d\mu \ge 0$, deci $\int_A g d\mu \ge \int_A f d\mu$, q.e.d.

($\Leftarrow$)Fie $h := g - f$. Din ipoteză rezultă $\int_A h d\mu \ge 0$, $(\forall)$ $A \in \mathscr{A}$. Fie $A := \{x \in X; h(x) < 0\}$ şi $B := X \setminus A$. Atunci $0 \le \int_A h d\mu = \int_A h^+ d\mu - \int_A h^- d\mu$ .Deoarece $h \ge 0$ pe X, deci şi pe A şi $h^+ = 0$ pe A, rezultă $0 \le -\int_A h^- d\mu \le 0$, deci $\int_A h^- d\mu = 0$ şi deci (P.4.1.10,13^0)) $h^- = 0$ (a.p.t.) pe A. Cum însă $h^- = 0$ pe B, conchidem că $h^- = 0$ (a.p.t.) pe $A \cup B$, deci pe X. Prin urmare $h \ge 0$ (a.p.t.), i.e. $f \le g$ (a.p.t.).

2^0) Rezultă din 1^0).

4.2.4. Teoremă (Măsuri definite de funcţii). *Fie $(X,\mathscr{A},\mu)$ un spaţiu cu măsură şi $f:X \to \overline{\mathbf{R}}$ o funcţie măsurabilă nenegativă (resp. integrabilă nenegativă). Atunci relaţia $\nu_f(A) := \int_A f d\mu, A \in \mathscr{A}$, defineşte o măsură (resp. măsură finită) pe X.*

Dem. Fie $(A_n)_{n \ge 1} \subseteq \mathscr{A}$ un şir mutual disjunct şi $A := \bigcup_{n \ge 1} A_n$ .Atunci $f\varphi_A = \sum_{n \le 1} f\varphi_{A_n}$ şi fiecare funcţie $f\varphi_{A_n}$ ($n \ge 1$) este măsurabilă nenegativă, deci (T.4.2.1,Cor.3) avem :

$$\int_A f d\mu = \int_X f\varphi_A d\mu = \sum_{n \ge 1} \int_A f\varphi_{A_n} d\mu = \sum_{n \ge 1} \int_{A_n} f d\mu ,$$

şi deci $\nu_f(A) = \sum_{n \ge 1} \nu_f(A_n)$. Prin urmare, ν_f este numerabil aditivă.

Cum, evident, $\nu_f(\emptyset) = 0$ şi $\nu_f \ge 0$, conchidem că ν_f este o măsură.

Dacă f este integrabilă, $\int_A fd\mu < \infty$, $A\in\mathscr{A}$, deci $\nu_f(A)<\infty$, $A\in\mathscr{A}$ şi deci ν_f este o măsură finită.

Corolar 1. *Fie $(X,\mathscr{A},\mu)$ un spaţiu cu măsură şi $f: X\to\overline{\mathbf{R}}$ o funcţie care are integrală şi $\nu_f(A):=\int_A fd\mu$, $A\in\mathscr{A}$. Atunci $\nu_f=\nu_{f^+}-\nu_{f^-}$ şi ν_{f^+},ν_{f^-} sunt măsuri în care cel puţin una este finită. Aşadar avem :*

1^0) $\nu_f(\varnothing)=0$; 2^0) $\nu_f(A)\in\overline{\mathbf{R}}^*$, $(\forall)A\in\mathscr{A}$;

3^0) ν_f este numerabil aditivă, i.e. ν_f este o măsură generalizată pe X.

Dem. Cum f are integrală, rezultă : f^+,f^- sunt măsurabile nenegative şi f^+ sau f^- este integrabilă. Atunci (T.4.2.4.) ν_{f^+}, ν_{f^-} sunt măsuri şi cel puţin una este finită, deci putem scrie,

$$\nu_f(A)=\int_A fd\mu=\int_A f^+d\mu-\int_A f^-d\mu=\nu_{f^+}(A)-\nu_{f^-}(A),\ (\forall)A\in\mathscr{A},$$

şi deci $\nu_f=\nu_{f^+}-\nu_{f^-}$. Dacă ν_{f^+} (resp. ν_{f^-}) este finită, rezultă că $\nu_f(A)<+\infty$ (resp. $\nu_f(A)>-\infty$), $(\forall)A\in\mathscr{A}$, deci $\nu_f(A)\in\overline{\mathbf{R}}^*$, $(\forall)A\in\mathscr{A}$.

Deoarece ν_{f^+} şi ν_{f^-} sunt măsuri, şi cel puţin una este finită, rezultă ν_f numerabil aditivă.

Corolar 2. *Fie $(X,\mathscr{A},\mu)$ un spaţiu cu măsură şi $f:X\to\overline{\mathbf{R}}$ o funcţie integrabilă. Atunci relaţia $\nu_f(A):=\int_A fd\mu$, $A\in\mathscr{A}$, defineşte o măsură generalizată finită pe X, absolut continuă în raport cu μ, i.e. $\nu_f<<\mu$.*

Dem. Din Cor.1 rezultă $\nu_f=\nu_{f^+}-\nu_{f^-}$. Cum ν_{f^+} şi ν_{f^-} sunt măsuri finite (T.4.2.1.)rezultă ν_f este o măsură generalizată finită. Evident avem $|\nu_f|\le\nu_{f^+}+\nu_{f^-}=\nu_{|f|}$ şi cf. T.4.2.2. $\nu_{|f|}$ este o măsură finită. Dacă $A\in\mathscr{A}$ şi $\mu(A)=0$, rezultă (P.4.1.10,11^0)) $\nu_{|f|}(A)=\int_A|f|d\mu=0$, deci (P.2.2.28.) $\nu_{|f|}<<\mu$.

Rămâne să aratăm că $\nu_f<<\mu$. Fie în acest scop $\varepsilon>0$ fixat. Atunci :

$$(\exists)\ \eta>0,\ \text{a.î.}\ \nu_{|f|}(A)\le\varepsilon,\ (\forall)A\in\mathscr{A},\ \mu(A)\le\eta,$$

deci
$$|\nu_f(A)|\le\nu_{|f|}(A)\le\varepsilon,\ (\forall)A\in\mathscr{A},\ \mu(A)\le\eta.$$

Prin urmare ν_f este absolut continuă în raport cu μ.

Corolar 3. *Fie $(X,\mathcal{A},\mu)$ un spațiu cu măsură și $f:X\to\overline{\mathbf{R}}$ o funcție integrabilă. Atunci au loc afirmațiile :*

1^0) $(\forall)$ $(A_n)_{n\geq 1}\subseteq\mathcal{A}$, un șir monoton, $A_n\to A$, rezultă $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{An} fd\mu=\int_A fd\mu$.

2^0) $(\forall)$ $(A_n)_{n\geq 1}\subseteq\mathcal{A}$, un șir mutual disjunct, ș i $A=\bigcup\limits_{n\geq 1} A_n$, rezultă

relația: $\int_A fd\mu=\sum\limits_{n\geq 1}\int_{An} fd\mu$.

Dem. 1^0) Am arătat (T.4.2.4.) că ν_{f^+} și ν_{f^-} sunt măsuri finite pe X, deci (T.2.2.6.)continue pe $\mathcal{A}$.Cum $\nu_f=\nu_{f^+}-\nu_{f^-}$(Cor.1), rezultă că ν_f este continuă pe $\mathcal{A}$. Așadar $(\forall)(A_n)_{n\geq 1}\subseteq\mathcal{A}$, un șir monoton, $A_n\to A$, rezultă

$$\int_{An} fd\mu=\nu_f(A_n)\to\nu_f(A)=\int_A fd\mu .$$

2^0) Deoarece ν_f este numerabil aditivă (Cor.1), rezultă

$$\int_A fd\mu=\nu_f(A)=\sum_{n\geq 1}\nu_f(A_n)=\sum_{n\geq 1}\int_{An} fd\mu .$$

Corolar 4. *Fie $(X,\mathcal{A},\mu)$ un spațiu cu măsură și $f:X\to\overline{\mathbf{R}}$ o funcție integrabilă. Atunci $(\forall)$ $(A_i)_{i\in I}\subseteq\mathcal{A}$, o partiție cel mult numerabilă a lui X, are loc relația :* $\int_X fd\mu=\sum\limits_{i\in I}\int_{Ai} fd\mu$.

Observația 1. Dacă funcția f din Cor.1 este integrabilă, atunci avem :

$$\nu_f \text{ măsură} \Leftrightarrow \nu_{f^+}\geq\nu_{f^-}\Leftrightarrow f^+\geq f^- \text{ (a.p.t.)}.$$

Observația 2. Relația 2^0)din Cor.2 se traduce astfel: *integrala este aplicație numerabil aditivă ca funcție de mulțime.*

4.2.5. Teoremă (Absolut continuitatea integralei). *Fie $(X,\mathcal{A},\mu)$ un spațiu cu măsură și $f: X\to\overline{\mathbf{R}}$ o funcție integrabilă. Atunci* $\lim\limits_{\mu(A)\to 0}\int_A fd\mu=0$, *i.e.*

$$(\forall)\ \varepsilon>0,\ (\exists)\delta>0,\ \text{a.î.}\ \left|\int_A fd\mu\right|<\varepsilon,\ (\forall)A\in\mathcal{A},\ \mu(A)<\delta.$$

Dem. Deoarece $\left|\int_A fd\mu\right|\leq\int_A|f|d\mu$, $(\forall)A\in\mathcal{A}$,este suficient să arătăm că $\lim\limits_{\mu(A)\to 0}\int_A|f|d\mu=0$. Funcția $|f|$ fiind integrabilă și nenegativă, rezultă

(T.4.2.4,Cor.2) că aplicația $\nu_{|f|}:\mathcal{A}\to\mathbf{R}$, definită astfel $\nu_{|f|}(A) = \int_A |f| d\mu$, este o măsură finită, absolut continuă în raport cu μ . Așadar avem :

$$(\forall)\varepsilon>0,\ (\exists)\delta>0,\ \text{a.î. } \nu_{|f|}(A)<\varepsilon,\ (\forall)A\in\mathcal{A},\ \mu(A)<\eta,\ \text{ i.e.}$$

$$\int_A |f| d\mu<\varepsilon, (\forall)A\in\mathcal{A},\ \mu(A)<\eta\ .$$

Corolar 1. *Fie $(X,\mathcal{A},\mu)$ un spațiu cu măsură și $f:X\to\overline{\mathbf{R}}$ o funcție integrabilă. Atunci $(\forall)(A_n)_{n\geq 1}\subseteq\mathcal{A}$, cu $\mu(A_n)\to 0$, rezultă că $\int_{A_n}|f|d\mu\to 0$.*

4.2.6. Teoremă. *Fie $(X,\mathcal{A},\mu)$ un spațiu cu măsură și $f:X\to\overline{\mathbf{R}}$ o funcție integrabilă. Atunci $(\forall)\varepsilon>0$, $(\exists)A\in\mathcal{A}$, cu $\mu(A)<\infty$, a.î. f este mărginită pe A și $\int_{A^c}|f|d\mu<\varepsilon$*

Dem. Fie $A_n:=\{x\in X;(1/n)\leq |f(x)|<n\}$ $(n\geq 1)$. Atunci $(A_n)_{n\geq 1}$ este un șir ascendent de mulțimi măsurabile, cu $A_n\uparrow X\setminus A_0$, unde $A_0:=\{x\in X;|f(x)|=0 \text{ sau } \infty\}$, deci (T.4.2.1,Cor.1.) :

$$\int_{A_n}|f|d\mu\to\int_{X\setminus A_0}|f|d\mu=\int_X|f|d\mu\left(\int_{A_0}|f|d\mu=0\right)$$

și deci
$$\int_{\complement A_n}|f|d\mu=\int_X|f|d\mu-\int_{A_n}|f|d\mu\to 0\ (n\to\infty).$$

Așadar, $(\forall)\varepsilon>0,(\exists)m\geq 1$, a.î. $\int_{\complement A_m}|f|d\mu\leq\varepsilon$. Evident însă avem (P.4.1.18,3^0)):

$$(1/m)\mu(A_m)\leq\int_{A_m}|f|d\mu\leq\int_X|f|d\mu<+\infty,$$

deci $\mu(A_m)<\infty$, iar din definiția lui A_m rezultă $|f(x)|\leq m$, $(\forall)x\in A_m$, i.e. f este mărginită pe A_m. Mulțimea $A:=A_m$ satisface condițiile din enunț.

Corolar 1. *Fie $(X,\mathcal{A},\mu)$ un spațiu cu măsură și $f:X\to\overline{\mathbf{R}}$ o funcție integrabilă. Atunci $(\forall)\varepsilon>0$, $(\exists)$ $g:X\to\mathbf{R}$, o funcție integrabilă mărginită, a.î. $\int_X|f-g|d\mu<\varepsilon$*

Dem. Folosim notațiile din T.4.2.6. Funcția $g:=f\varphi_A$, este integrabilă, mărginită și verifică condiția din enunț:

$$\int_X|f-g|d\mu=\int_A|f-g|d\mu+\int_{A^c}|f-g|d\mu=\int_{A^c}|f|\leq\varepsilon.$$

4.2.7. Teoremă. *Fie $(X,\mathcal{A},\mu)$ un spațiu cu măsură și $f_n : X \to \overline{\mathbf{R}}$ $(n \geq 1)$ un șir monoton crescător de funcții măsurabile nenegative, a.î.* $\sup_{n\geq 1} \int_X f_n d\mu < \infty$. *Atunci există $f : X \to \mathbf{R}$ integrabilă, cu proprietățile:*

$$f_n \xrightarrow{a.p.t.} f \;\&\; \int_X f_n d\mu \to \int_X f d\mu.$$

Dem. Fie $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x), (\forall)\, x \in X$. Atunci f este măsurabilă (T.3.2.15.) nenegativă, deci (T.4.2.1.) $\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$. Șirul $(f_n)_{n\geq 1}$ fiind monoton crescător, rezultă (P.4.1.12.) că șirul numeric $(\int_X f_n d\mu)_{n\geq 1}$ este monoton crescător, deci avem :

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \sup_{n\geq 1} \int_X f_n d\mu < \infty$$

și deci $\int_X f d\mu < \infty$. De aici rezultă f integrabilă, deci (P.4.1.18,Cor.1) există $A \in \mathcal{A}$, μ-nulă, cu f finită pe X\A. Modificând valorile lui f pe A cu valoarea 0, obținem o funcție, să o notăm tot cu f, care are proprietățile din enunț.

4.2.8. Teoremă (Condiții suficiente de integrabilitate). *Fie $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un spațiu cu măsură și $f : X \to \overline{\mathbf{R}}$ o funcție arbitrară.*

1^0) $(\forall)(A_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{A}$, $A_n \uparrow X$, cu f măsurabilă pe $A_n (\forall) n \geq 1$, rezultă f măsurabilă pe X și avem :

$$\int_X |f| d\mu = \sup_{n\geq 1} \int_{A_n} |f| d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{A_n} |f| d\mu,$$

deci

$$f \textit{ integrabilă} \Leftrightarrow \sup_{n\geq 1} \int_{A_n} |f| d\mu < \infty$$

2^0) $(\forall)(A_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{A}$, un șir mutual disjunct care acoperă X, cu f măsurabilă pe A_n, rezultă f măsurabilă pe X și avem: $\int_X |f| d\mu = \sum_{n\geq 1} \int_{A_n} |f| d\mu$, *deci*

$$f \textit{ integrabilă} \Leftrightarrow \sum_{n\geq 1} \int_{A_n} |f| d\mu < \infty$$

Dem. 1^0) Din $A_n \uparrow X$, rezultă $\bigcup_{n\geq 1} A_n = X$, deci (P.3.2.9,$3^0$)) f este măsurabilă pe X. Fie $f_n := |f| \varphi_{A_n}$ $(n\geq 1)$. Evident $(f_n)_{n\geq 1}$ este un șir monoton crescător de funcții măsurabile nenegative și $f_n \xrightarrow{s} |f|$. Din T.4.2.1,Cor.1 rezultă $\int_X f_n d\mu \to \int_X |f| d\mu$.

Şirul numeric $(\int_{A_n}|f|d\mu)_{n\geq 1}$ fiind monoton crescător, limita sa este egală cu $\sup\limits_{n\geq 1}\int_{A_n}|f|d\mu$, deci

$$\int_X |f|d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_{A_n}|f|d\mu = \sup_{n\geq 1}\int_{A_n}|f|d\mu$$

2^0) Din P.3.2.9,3^0) rezultă f măsurabilă pe X. Fie $f_n := |f|\varphi_{A_n}$ $(n\geq 1)$. Evident $(f_n)_{n\geq 1}$ este un şir de funcţii măsurabile nenegative şi $\sum\limits_{n\geq 1} f_n = |f|$.

Atunci din T.4.2.1,Cor.3 rezultă relaţia :

$$\int_X |f|d\mu = \sum_{n\geq 1}\int_X f_n d\mu = \sum_{n\geq 1}\int_{A_n}|f|d\mu < \infty$$

Prin urmare, f este integrabilă $\Leftrightarrow \int_X |f|d\mu = \sum\limits_{n\geq 1}\int_{A_n}|f|d\mu < \infty$.

Corolar 1. *Fie $(X,\mathscr{A},\mu)$ un spaţiu cu măsură şi $f:X\to\overline{\mathbf{R}}$ o funcţie arbitrară.*

1^0) $(\forall)$ $(A_n)_{n\geq 1}\subseteq\mathscr{A}$, $A_n\uparrow A\subseteq X$, şi f măsurabilă pe A_n $(\forall)n\geq 1$, rezultă f măsurabilă pe A şi avem:

$$\int_A |f|d\mu = \sup_{n\geq 1}\int_{A_n}|f|d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_{A_n}|f|d\mu,$$

deci $\quad$ *f integrabilă pe A* $\Leftrightarrow \sup\limits_{n\geq 1}\int_{A_n}|f|d\mu < \infty$.

2^0) $(\forall)(A_n)_{n\geq 1}\subseteq\mathscr{A}$, un şir mutual disjunct, $A=\bigcup\limits_{n\geq 1}A_n$, şi f măsurabilă pe A_n, $(\forall)n\geq 1$, rezultă f măsurabilă pe A şi avem: $\int_A |f|d\mu = \sum\limits_{n\geq 1}\int_{A_n}|f|d\mu$, *deci*

$$f \text{ integrabilă pe } A \Leftrightarrow \sum_{n\geq 1}\int_{A_n}|f|d\mu < \infty.$$

Dem. Aplicăm T.4.2.8 pentru funcţia $g = f\varphi_A$.

Corolar 2. *Fie $(X,\mathscr{A},\mu)$ un spaţiu cu măsură şi $f:X\to\overline{\mathbf{R}}$ o funcţie. Atunci: f integrabilă $\Leftrightarrow$ $(\exists)(A_i)_{i\in I}\subseteq\mathscr{A}$ familie cel mult numerabilă, care acoperă X, cu f măsurabilă pe A_i, $(\forall)i\in I$ şi $\sum\limits_{i\in I}\int_{A_i}|f|d\mu < \infty$.*

Dem. Implicaţia $(\Rightarrow)$este evidentă : luăm $A_{i_0} = X$ şi $A_i = \emptyset$, $(\forall)$ $i\neq i_0$.

$(\Leftarrow)$ Considerăm familia din enunţ numerabilă:$\{A_1,A_2,A_3,\ldots\}$.Fie $B_n :=$ $=\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$ $(n\geq 1)$. Atunci $(B_n)_{n\geq 1}\subseteq\mathscr{A}$, $B_n\uparrow X$, f măsurabilă pe B_n,$(\forall)n\geq 1$, şi avem :

$$\int_{B_n}|f|d\mu \le \sum_{i=1}^{n}\int_{A_i}|f|d\mu \le \sum_{i\ge 1}\int_{A_i}|f|d\mu\text{ , n} \ge 1,$$

deci $\sup_{n\ge 1}\int_{B_n}|f|d\mu < \infty$ şi deci (T.4.2.8,1^0)) f este integrabilă şi are loc relaţia :

$$\int_{X}|f|d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_{B_n}|f|d\mu \le \sum_{i\ge 1}\int_{A_i}|f|d\mu .$$

Raţionament analog în cazul familiei finite.

4.2.9. Teoremă (Lema lui Fatou). *Fie $(X,\mathscr{A},\mu)$ un spaţiu cu măsură şi $f_n:X\to\overline{\mathbf{R}}$ $(n\ge 1)$, un şir de funcţii măsurabile, nenegative . Atunci $\underline{\lim}_{n\to\infty} f_n$ este o funcţie măsurabilă nenegativă şi avem :*

$$\int_A \underline{\lim}_{n\to\infty} f_n d\mu \le \underline{\lim}_{n\to\infty}\int_A f_n d\mu\text{ , }(\forall)A\in\mathscr{A}.$$

Dem. Punem $f:=\underline{\lim}_{n\to\infty} f_n$ şi $g_n:=\inf_{k\ge n} f_k$ $(n\ge 1)$. Atunci

$g_n \le f_n$, $0\le g_n\le g_{n+1}$, g_n măsurabilă (T.3.2.15) , $(\forall)$ $n\ge 1$ şi

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \sup_{n\ge 1} g_n(x) = \sup_{n\ge 1}\left(\inf_{k\ge n} f_k(x)\right) = f(x),\ (\forall)\ x\in X,$$

deci (P.4.1.12.) $\int_A g_n d\mu \le \int_A f_n d\mu$ şi deci (T.4.2.1.) avem :

$$\int_A f d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_A g_n d\mu = \underline{\lim}_{n\to\infty}\int_A g_n d\mu \le \underline{\lim}_{n\to\infty}\int_A f_n d\mu .$$

Prin urmare, $\int_A f d\mu \le \underline{\lim}_{n\to\infty}\int_A f_n d\mu$.

Corolar 1. *Fie $(X,\mathscr{A},\mu)$ un spaţiu cu măsură completă şi $f_n:X\to\overline{\mathbf{R}}$ $(n\ge 1)$, un şir de funcţii măsurabile nenegative, care tinde a.p.t. către o funcţie f, $f:X\to\overline{\mathbf{R}}$, cu $f_n\le f$ (a.p.t.), $(\forall)$ $n\ge 1$. Atunci $\lim_{n\to\infty}\int_A f_n d\mu = \int_A f d\mu$, $(\forall)$ $A\in\mathscr{A}$.*

Dem. Cf. T.3.2.15 f este măsurabilă. Deoarece $f_n \xrightarrow{\text{a.p.t.}} f$, rezultă $f(x)=\underline{\lim}_{n\to\infty} f_n(x)$ (a.p.t.) pe X, deci (T.4.2.9.), $\int_A f d\mu \le \underline{\lim}_{n\to\infty}\int_A f_n d\mu$. Cum avem $f_n\le f$ (a.p.t.), $(\forall)n\ge 1$, deducem (P.4.1.11.)

$$\int_A f_n d\mu \le \int_A f d\mu\text{, }(\forall)n\ge 1\text{, deci }\overline{\lim}_{n\to\infty}\int_A f_n d\mu \le \int_A f d\mu$$

şi deci

$$\int_A f d\mu \le \underline{\lim}_{n\to\infty}\int_A f_n d\mu \le \overline{\lim}_{n\to\infty}\int_A f_n d\mu \le \int_A f d\mu .$$

Prin urmare, şirul ($\int_A f_n d\mu$)$_{n\ge 1}$ are limită şi ea este egală cu $\int_A f d\mu$.

Observația 1. Putem presupune că funcțiile $f_n(n\geq 1)$ din Cor.1 sunt de semn arbitrar, și au integrală, descompunând fiecare f_n în f_n^+ și f_n^-.

Observația 2. In Lema lui Fatou nu avem în mod necesar egalitate.

Contraexemplu. Considerăm spațiul cu măsură $((0,1),\mathscr{L}|_{(0,1)}, \lambda)$ și $f_n:(0,1)\to\mathbf{R}$, unde $f_n:=n\,\varphi_{(0,1/n)}$ $(n\geq 1)$. Atunci $f_n \xrightarrow{s} 0$, deci $\int_{(0,1)} \varliminf_{n\to\infty} f_n d\lambda = 0$.

Pe de altă parte însă avem $\int_{(0,1)} f_n d\lambda = 1, (\forall) n\geq 1$, deci $\varliminf_{n\to\infty} \int_{(0,1)} f_n d\lambda = 1$ și deci inegalitatea $\leq$ din Lema lui Fatou este strictă.

Observația 3. Condiția ca funcțiile f_n $(n\geq 1)$ din Lema lui Fatou să fie nenegative este esențială.

Contraexemplu. Considerăm spațiul cu măsură $(\mathbf{R}, \mathscr{L}_{\mathbf{R}}, \lambda)$ și $f_n:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, unde $f_n := -(1/n)\varphi_{[0,n]}$ $(n\geq 1)$. Atunci $f_n \xrightarrow{s} 0$ și avem $\int_{\mathbf{R}} f_n d\lambda = -(1/n)\int_{[0,n]} d\lambda = -1$, deci

$$\int_{\mathbf{R}} \varliminf_{n\to\infty} f_n d\lambda > \varliminf_{n\to\infty} \int_{\mathbf{R}} f_n d\lambda .$$

4.2.10. Teoremă (Lebesgue-teorema convergenței dominate). *Fie $(X,\mathscr{A},\mu)$ un spațiu cu măsură și f, $f_n : X\to\overline{\mathbf{R}}$ $(n\geq 1)$ măsurabile, a.î. $f_n \xrightarrow{a.p.t.} f$ și $(\exists) g:X\to\overline{\mathbf{R}}$ integrabilă, cu $|f_n|\leq g$ (a.p.t.), $(\forall) n\geq 1$. Atunci f este integrabilă și $\lim_{n\to\infty}\int_A f_n d\mu = \int_A f d\mu$, $(\forall)\, A\in\mathscr{A}$.*

Dem. Din relația $|f_n| \leq g$ (a.p.t.), $(\forall)$ $n\geq 1$, prin trecere la limită, $n\to\infty$, rezultă că $|f| \leq g$ (a.p.t.), deci funcțiile f, f_n $(n\geq 1)$ sunt integrabile (P.4.1.11, Cor.1) și deci finite a.p.t. (P.4.1.18, Cor.1).

Evident avem $g \pm f_n \geq 0$ (a.p.t.), $(\forall)$ $n \geq 1$ și $g \pm f_n \xrightarrow{a.p.t.} g \pm f$. Atunci (T.4.2.9 & T.4.2.2.) rezultă :

$$\int_A g d\mu + \int_A f d\mu = \int_A (g+f) d\mu \leq \varliminf_{n\to\infty} \int_A (g+f_n) d\mu = \int_A g d\mu + \varliminf_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu ,$$

deci

$$\int_A f d\mu \leq \varliminf_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu \qquad (1)$$

In mod analog, obținem

$$\int_A g d\mu - \int_A f d\mu = \int_A (g-f) d\mu \leq \varliminf_{n\to\infty} \int_A (g-f_n) d\mu =$$

$$=\int_A g d\mu+\varliminf_{n\to\infty}\int_A(-f_n)d\mu=\int_A g d\mu-\varlimsup_{n\to\infty}\int_A f_n d\mu,$$

deci
$$\int_A f d\mu \geq \varlimsup_{n\to\infty}\int_A f_n d\mu \qquad (2)$$

Din (1) şi (2) deducem că :
$$\varlimsup_{n\to\infty}\int_A f_n d\mu \leq \int_A f d\mu \leq \varliminf_{n\to\infty}\int_A f_n d\mu .$$

Prin urmare şirul ($\int_A f_n d\mu)_{n\geq 1}$ are limită şi avem $\lim_{n\to\infty}\int_A f_n d\mu=\int_A f d\mu$

Corolar 1. *Fie $(X,\mathscr{A},\mu)$ un spaţiu cu măsură finită şi $f_n:X\to\overline{\mathbf{R}}$ $(n\geq 1)$, un şir de funcţii măsurabile, convergent (a.p.t.) către o funcţie măsurabilă f şi dominat de o funcţie esenţial mărginită g. Atunci f este integrabilă şi $\int_A f_n d\mu \to \int_A f\, d\mu$, $(\forall)\ A\in\mathscr{A}$.*

Dem. Conform P.4.1.17. funcţia g este integrabilă. Cum avem $|f_n(x)|\leq|g(x)|$ (a.p.t.), $(\forall)$ $n\geq 1$, putem aplica mai departe T.4.2.10.

Observaţie.Teorema convergenţei dominate (T.C.D.) ne oferă condiţii suficiente de trecere la limită sub semnul integral. Vom prezenta şi alte variante ale acestei teoreme fundamentale, în Cap.5. şi sub formă de exerciţii.

4.2.11. Teoremă. *Fie $(X,\mathscr{A},\mu)$ un spaţiu cu măsură şi $f:X\to\overline{\mathbf{R}}$ o funcţie integrabilă. Atunci $(\exists)$ $f_n:X\to\mathbf{R}$ $(n\geq 1)$, un şir de funcţii simple integrabile, a.î. $\int_X|f-f_n|d\mu\to 0$.*

Dem. $f=f^+-f^-$. Cum f^+ şi f^- sunt funcţii măsurabile nenegative, rezultă (T.3.2.16) $(\exists)\varphi_n,\psi_n$: $X\to\overline{\mathbf{R}}$, $(n\geq 1)$, două şiruri monoton crescătoare de funcţii simple nenegative, a.î. $\varphi_n\uparrow f^+$, $\psi_n\uparrow f^-$. Din T.4.2.1. sau T.4.2.10. rezultă :

$$\int_X\varphi_n d\mu\to\int_X f^+d\mu,\ \int_X\psi_n d\mu\to\int_X f^- \qquad (1)$$

Notăm $f_n:=\varphi_n-\psi_n$ $(n\geq 1)$. Atunci $(f_n)_{n\geq 1}$ este un şir de funcţii simple integrabile(T.4.1.5),deoarece φ_n,ψ_n sunt funcţii simple integrabile.Cum avem

$$|f-f_n|\leq(f^+-\varphi_n)+(f^--\psi_n),\ (\forall)\ n\geq 1,$$

din P.4.2.1 & T.4.2.2 rezultă

$$\int_X|f-f_n|d\mu\leq\left(\int_X f^+d\mu-\int_X\varphi_n d\mu\right)+\left(\int_X f^-d\mu-\int_X\psi_n d\mu\right),\ (\forall)\ n\geq 1,$$

de unde prin trecere la limită, $n\to\infty$, şi ţinând cont de (1), rezultă că $\lim_{n\to\infty}\int_X|f-f_n|d\mu=0$.

Corolar 1. *Fie $(X,\mathcal{A},\mu)$ un spaţiu cu măsură şi $f:X\to\overline{\mathbf{R}}$ o funcţie măsurabilă. Atunci f este integrabilă $\Leftrightarrow$ $(\exists)$ $f_n:X\to\mathbf{R}$ $(n\geq 1)$, un şir de funcţii simple integrabile a.î.* $\int_X |f-f_n| d\mu \to 0$.

Dem. Implicaţia ($\Rightarrow$) rezultă din T.4.2.11.

($\Leftarrow$) Fie $(f_n)_{n\geq 1}$ un şir cu proprietăţile din enunţ. Atunci $(\exists)N\geq 1$, a.î. $\int_X |f-f_N| d\mu \leq 1$, deci

$$\int_X |f| d\mu \leq \int_X |f-f_N| d\mu + \int_X |f_N| d\mu \leq 1 + \int_X |f_N| d\mu < \infty$$

şi deci f este integrabilă.

*

Să revenim asupra definiţiei 1.3.18.Fie $\Omega \in J_{\mathbf{R}^m}$, o mulţime J-măsurabilă (D.1.3.9.); $f:\Omega\to\mathbf{R}$ o funcţie mărginită; $\Delta=(\Omega_i)_{i=\overline{1,p}} \in \mathrm{Div}(\Omega)$, o diviziune a lui Ω; $s_f(\Delta)=\sum_{i=1}^{p} m_i \mu(\Omega_i)$, $S_f(\Delta)=\sum_{i=1}^{p} M_i \mu(\Omega_i)$ - *sumele Darboux inferioară,* resp. *superioară;* $\varphi_f(\Delta):=\sum_{i=1}^{p} m_i \varphi_{\Omega_i}$, $\psi_f(\Delta):=\sum_{i=1}^{p} M_i \varphi_{\Omega_i}$ - *funcţiile Darboux inferioară,*resp. *superioară,asociate lui f şi Δ.*

a) φ_f, ψ_f sunt funcţii elementare, L- integrabile şi avem :

$$\varphi_f(\Delta) \leq f \leq \psi_f(\Delta),\ (\forall)\ \Delta \in \mathrm{Div}(\Omega).$$

b) Dacă Δ creşte, functia φ_f creşte, iar ψ_f descreşte.

c) $s_f(\Delta)=\int_\Omega \varphi_f(\Delta) d\lambda$, $S_f(\Delta)=\int_\Omega \psi_f(\Delta) d\lambda$, $(\forall)$ $\Delta\in\mathrm{Div}(\Omega)$.

4.2.12. Teoremă (Relaţia dintre integrala Riemann şi Lebesgue).*Fie $\Omega\in J_{\mathbf{R}^m}$ o mulţime şi $f:\Omega\to\mathbf{R}$ o funcţie mărginită, R-integrabilă. Atunci f este L-integrabilă şi avem relaţia :* $\int_\Omega f d\lambda = \int_\Omega f dx$.

Dem. Fie $(\Delta_j)_{j\geq 1} \subseteq \mathrm{Div}(\Omega)$ un şir monoton crescător de diviziuni de normă tinzând la 0 şi φ_j, ψ_j $(j\geq 1)$ funcţiile Darboux inferioară, resp. superioară asociate lui f şi Δ_j. Funcţiile φ_j, ψ_j fiind L-măsurabile, aplicând (T.3.2.15), rezultă $(\exists)$ φ, ψ $:\Omega\to\mathbf{R}$, funcţii L-măsurabile, a.î $\varphi_j \uparrow \varphi$, $\psi_j \downarrow \psi$. Evident avem $\varphi \leq f \leq \psi$; $|\varphi_j|, |\psi_j| \leq \|f\|_\infty \cdot \mu(\Omega)$, $(\forall)$ $j\geq 1$, deci

$$S_f(\Delta_j) - s_f(\Delta_j) = \int_\Omega (\psi_j - \varphi_j) d\lambda \xrightarrow[j\to\infty]{} \int_\Omega (\psi-\varphi) d\lambda \quad \text{(cf. T.4.2.10.)} \qquad (1)$$

Cum prin ipoteză f este R-integrabilă, alegând şirul $(\Delta_j)_{j\geq 1}$ convenabil, rezultă:

$$S_f(\Delta_j) - s_f(\Delta_j) \to 0 \ (j\to\infty) \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \int_\Omega (\psi - \varphi) d\lambda = 0 \Leftrightarrow \psi - \varphi = 0 \text{ (a.p.t.)},$$

deci $\varphi = f = \psi$ (a.p.t.). De asemenea avem relaţia :

$$\lim_{j\to\infty} s_f(\Delta_j) = \lim_{j\to\infty} S_f(\Delta_j) = \int_\Omega f dx .$$

Din $f=\varphi$(a.p.t.), rezultă (P.3.2.12) f L-măsurabilă, deci, f şi Ω fiind mărginite, rezultă (P.4.1.17.) f L-integrabilă şi deci (T.4.2.10.) $\int_\Omega \varphi_j d\lambda \xrightarrow[j\to\infty]{} \int_\Omega f d\lambda$

Prin urmare

$$\int_\Omega f d\lambda = \lim_{j\to\infty} \int_\Omega \varphi_j d\lambda = \lim_{j\to\infty} s_f(\Delta_j) = \int_\Omega f dx .$$

Corolar 1 (Lebesgue – criteriul de integrabilitate Riemann). *Fie $\Omega \subseteq \boldsymbol{R}^m$ o mulţime măsurabilă Jordan şi $f:\Omega\to\boldsymbol{R}$ o funcţie mărginită. Atunci f este integrabilă Riemann $\Leftrightarrow$ f continuă (a.p.t.).*

Dem. Fie $\Delta_j, \varphi_j, \psi_j (j\geq 1)$ consideraţi mai sus. Pentru orice $\Delta = (\Omega_i)_{i=\overline{1,p}} \in \mathrm{Div}(\Omega)$, notăm $\Delta^o := \bigcup_{i=1}^{p} \Omega_i^o$; evident mulţimea $\Omega \setminus \Delta^o$ este L-neglijabilă, deci mulţimea $\Omega \setminus \bigcup_{j\geq 1} \Delta_j^o$ este L-neglijabilă. Atunci:

f R-integrabilă $\Leftrightarrow \psi_j(x)-\varphi_j(x)\downarrow 0$(a.p.t.) pe $\Omega \Leftrightarrow \psi_j(x)-\varphi_j(x)\downarrow 0$(a.p.t.) pe $\bigcup_{j\geq 1} \Delta_j^o$.

Însă $(\forall)$ $x \in \bigcup_{j\geq 1} \Delta_j^o$, $(\forall)$ $j \geq 1$, avem $\psi_j(x) - \varphi_j(x) = \mathrm{dia}(f(\Omega_x^j))$, unde Ω_x^j este unicul element din Δ_j care conţine pe x în interior, deci este o vecinătate a lui x. Cum avem, evident, $\mathrm{dia}(\Omega_x^j) \leq \|\Delta_j\| \to 0$ $(j\to\infty)$, rezultă că $(\Omega_x^j)_{j\geq 1}$ este o bază de vecinătăţi a lui x. De aici deducem:

$$\text{f R-integrabilă} \Leftrightarrow \inf_{j\geq 1} (\psi_j(x)-\varphi_j(x)) = 0 \text{(a.p.t.) pe } \bigcup_{j\geq 1} \Delta_j^o \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \omega_f(x) = \inf_{j\geq 1} (\mathrm{dia}\, f(\Omega_x^j)) = 0 \text{(a.p.t.) pe } \bigcup_{j\geq 1} \Delta_j^o \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \omega_f(x) = 0 \text{(a.p.t.) pe } \Omega \Leftrightarrow \text{f continuă (a.p.t.) pe } \Omega.$$

Corolar 2. *Fie $\Omega \subseteq \mathbf{R}^m$ o mulțime măsurabilă Jordan și $f : \Omega \to \mathbf{R}$ o funcție. Atunci f este integrabilă Riemann $\Leftrightarrow f$ continuă (a.p.t.) și esențial mărginită.*

Dem ($\Rightarrow$) f fiind R- integrabilă este mărginită pe $\overset{o}{\Omega}$, deci (Cor.1) $f\,|\,\overset{o}{\Omega}$ este continuă (a.p.t.) și deci f este continuă (a.p.t.) pe $\overset{o}{\Omega}$. Cum $\Omega \setminus \overset{o}{\Omega}$ este neglijabilă, conchidem că f este continuă (a.p.t.) pe Ω și esențial mărginită etc.

4.3. Măsuri generalizate. Teoremele Jordan, Hahn, Lebesgue – Radon – Nikodym

Fie $(X,\mathcal{A},\mu)$ un spațiu cu măsură și $f:X\to\overline{\mathbf{R}}$ o funcție integrabilă. Am văzut (T.4.2.4.) că aplicația

$$\nu_f(A) := \int_A f d\mu,\ (\forall)A\in\mathcal{A} \qquad (1)$$

are o serie de proprietăți remarcabile:

1^0) $\nu_f(\emptyset)=0$; 2^0) ν_f are valori în $\overline{\mathbf{R}}^*$; 3^0) ν_f numerabil aditivă. In plus, ν_f mai are următoarele două proprietăți : 4^0) $(\forall)A\in\mathcal{A}$, cu $\mu(A)=0$, rezultă că $\nu_f(A)=0$; 5^0) $\nu_f = \nu_f^+ - \nu_f^-$, unde ν_f^+ și ν_f^- sunt măsuri pe X.

Apar acum cât se poate de natural două probleme : o funcție arbitrară $\nu:\mathcal{A}\to\overline{\mathbf{R}}$, cu proprietățile 1^0) – 3^0), admite ea o reprezentare integrală de forma (1), i.e. $(\exists)f:X\to\overline{\mathbf{R}}$ integrabilă a.î. $\nu=\nu_f$? Putem descompune o funcție $\nu:\mathcal{A}\to\overline{\mathbf{R}}$ cu proprietățile 1^0) – 3^0),ca diferență a două măsuri ν_1, $\nu_2:\mathcal{A}\to\overline{\mathbf{R}}$? Cele două probleme sunt legate intre ele și proprietatea 4^0) ne sugerează calea pe care trebuie mers.

Observație. Prin $\overline{\mathbf{R}}^*$ notăm mulțimea $(-\infty,\infty]$ sau $[-\infty,\infty)$.

4.3.1. Definiție. Fie $(X,\mathcal{A})$ un spațiu masurabil. O aplicație $\nu:X\to\overline{\mathbf{R}}$ se numește *măsură generalizată* pe X dacă are proprietățile : 1^0) $\nu(\emptyset) = 0$; 2^0) ν are valori în $\overline{\mathbf{R}}^*$; 3^0) ν numerabil aditivă. Tripletul $(X,\mathcal{A},\nu)$ se numește atunci *spațiu cu măsură generalizată*.

a) Condiția 2^0) din D.4.3.1. este echivalentă cu condiția $\mu(A)>-\infty$, $(\forall)A\in\mathcal{A}$ sau $\mu(A)<\infty$, $(\forall)A\in\mathcal{A}$.

b) Orice măsură pe $\mathcal{A}$ este o măsură generalizată. Reciproca nu este în general adevărată.

c) Fie $(X,\mathcal{A},\nu)$ un spațiu cu măsură generalizată și $M\in\mathcal{A}$. Atunci restricția lui ν la $\mathcal{A}|M$ este o măsură generalizată.

d) Fie $(X,\mathscr{A})$ un spaţiu măsurabil şi $\mu,\nu:\mathscr{A}\to\overline{\mathbf{R}}$, cu μ măsură şi ν măsură generalizată,a.î. $\mu+\nu\geq 0$. Atunci $\mu+\nu$ este o măsură generalizată.

e) Fie $(X,\mathscr{A})$ un spaţiu măsurabil şi $\nu_1,\nu_2:\mathscr{A}\to\overline{\mathbf{R}}^*$, două măsuri generalizate. Dacă $\nu_1,\nu_2>-\infty$ sau $\nu_1,\nu_2<+\infty$, atunci $\nu_1+\nu_2$ este o măsură generalizată. Dacă ν_1 sau ν_2 este finită, atunci $\nu_1 - \nu_2$ este o măsură generalizată.

f) Orice măsură generalizată este finit aditivă.

4.3.2. Propoziţie. *Fie $(X,\mathscr{A},\nu)$ un spaţiu cu măsură generalizată. Atunci $(\forall)A,B\in\mathscr{A}$, cu $A\subseteq B$ & $|\nu(B)|<\infty$, rezultă $|\nu(A)|<\infty$ şi avem $\nu(B\setminus A)=\nu(B)-\nu(A)$.*

Dem. Perechea $\{A,B\setminus A\}$ este o partiţie măsurabilă a lui B, deci $\nu(B)=\nu(A)+\nu(B\setminus A)$. Dacă $\nu(B)\in\mathbf{R}$, rezultă imediat că $\nu(A)$ şi $\nu(B\setminus A)$ sunt finite, deci $\nu(B)-\nu(A)=\nu(B\setminus A)$.

4.3.3. Definiţie. Fie $(X,\mathscr{A},\nu)$ un spaţiu cu măsură generalizată. Vom spune că mulţimea $M\in\mathscr{A}$ este *ν-pozitivă* (resp. *ν-negativă*) dacă $\nu(A\cap M)\geq 0$ (resp. ≤ 0), $(\forall)A\in\mathscr{A}$.

a) $M\in\mathscr{A}$ este ν-pozitivă (resp. ν-negativă)$\Leftrightarrow(\forall)A\in\mathscr{A}$, $A\subseteq M$, avem $\nu(A)\geq 0$ (resp. ≤ 0).

b) $M\in\mathscr{A}$ este ν-pozitivă (resp. ν-negativă) $\Leftrightarrow$ restricţia lui ν (resp.$-\nu$) pe $\mathscr{A}\,|_M$ este (o măsură) nenegativă.

c) Dacă $M\in\mathscr{A}$ este ν-pozitivă (resp.ν-negativă) şi $\mathscr{A}\ni N\subseteq M$, rezultă N ν- pozitivă (resp.ν-negativă).

4.3.4. Definiţie. Fie $(X,\mathscr{A},\nu)$ un spaţiu cu măsură generalizată. Se numeşte *ν-descompunere Hahn* a lui X o partiţie măsurabilă $\{P,Q\}$ a lui X cu proprietatea că P este ν-pozitivă şi Q ν-negativă.

4.3.5. Propoziţie. *Fie $(X,\mathscr{A},\nu)$ un spaţiu cu măsură generalizată. Atunci $(\forall)(P_n)_{n\geq 1}\subseteq\mathscr{A}$ un şir de mulţimi ν- pozitive, rezultă $P:=\bigcup_{n\geq 1}P_n$ ν- pozitivă.*

Dem. Presupunem $(P_n)_{n\geq 1}$ mutual disjunct şi fie $A\in\mathscr{A}$ fixat. Atunci :

$$\nu(A\cap P)=\mu\Big(\bigcup_{n\geq 1}(A\cap P_n)\Big)=\sum_{n\geq 1}\nu(A\cap P_n)\geq 0,$$

deci P este ν- pozitivă.

Fie acum $(P_n)_{n\geq 1}\subseteq\mathscr{A}$ arbitrar. Punem $Q_1:=P_1$ şi $Q_n:=P_n\setminus\bigcup_{i=1}^{n-1}P_i$, $(\forall)n\geq 2$.

Evident $(Q_n)_{n\geq 1}$ este o partiţie măsurabilă a lui P şi $Q_n\subseteq P_n$, $(\forall)$ $n\geq 1$.

Cum P_n este ν-pozitivă, rezultă Q_n ν-pozitivă, $(\forall)n\geq 1$, deci $\bigcup_{n\geq 1} Q_n$ este ν-pozitivă şi deci P este ν-pozitivă.

Corolar 1. *In acelaşi cadru : putem înlocui ν- pozitivă prin ν- negativă.*

4.3.6. Teoremă (O. Hahn). *Fie $(X,\mathscr{A},\nu)$ un spaţiu cu măsură generalizată. Atunci* X *admite o ν-descompunere Hahn.*

Dem. Presupunem $\nu:\mathscr{A}\to\mathbf{R}\cup\{-\infty\}$; cazul $\nu:\mathscr{A}\to\mathbf{R}\cup\{-\infty\}$ se reduce la primul înlocuind ν prin $-\nu$. Fie $\delta=\sup\{\nu(P);\mathscr{A}\ni P,\nu\text{-pozitivă}\}$ şi fie $(P_n)_{n\geq 1}\subseteq\mathscr{A}$, cu P_n ν- pozitive, a.î. $\nu(P_n)\to\delta$; evident $\delta\geq 0$. Atunci $P:=\bigcup_{n\geq 1} P_n$ este ν-pozitivă cf(P.4.3.5.) şi avem (P.4.3.2.) :

$$\delta \geq \nu(P) = \nu(P_n) + \nu(P\setminus P_n) \geq \nu(P_n) \to \delta (n\to\infty),$$

deci $\delta = \nu(P)$. Să arătăm că $Q:= X\setminus P$ este ν-negativă. Presupunem contrariul. Atunci $(\exists)\mathscr{A}\ni A\subseteq Q$, cu $\nu(A)>0$. Cum $\nu(A\cup P)=\nu(A)+\nu(P)>\delta$, rezultă că $A\cup P$ nu este ν-pozitivă, deci P fiind ν-pozitivă, rezultă că A nu este ν-pozitivă (P.4.3.5.). Fie $n_1\geq 1$ minim, a.î. $(\exists)\mathscr{A}\ni A_1\subseteq A$, cu $\nu(A_1)\leq -1/n_1$. Aşadar, $(\exists)$ $n_1\geq 1$ şi $A_1\in\mathscr{A}$ cu proprietatea :

$$A_1\subseteq A, \nu(A_1)\leq -1/n_1 ;\ \nu(B) > -1/(n_1-1),\ (\forall)\mathscr{A}\ni B\subseteq A.$$

Deoarece $\nu(A)\in\mathbf{R}$, rezultă (P.4.3.2.) că :

$$\nu(A_1)\in\mathbf{R}\ \&\ \nu(A\setminus A_1) = \nu(A)-\nu(A_1),$$

deci $\nu(A\setminus A_1)>0$ şi deci $\nu(P\cup(A\setminus A_1))>\nu(P)=\delta$. De unde rezultă că $A\setminus A_1$ nu este ν-pozitivă. Fie $n_2\geq 1$ şi $A_2\in\mathscr{A}$ cu proprietatea :

$$A_2\subseteq A\setminus A_1,\ \nu(A_2)\leq -1/n_2;\ \nu(B)>-1/(n_2-1),\ (\forall)\mathscr{A}\ni B\subseteq A\setminus A_1$$

Inductiv construim două şiruri $(n_k)_{k\geq 1}\subseteq \mathbf{N}$ şi $(A_k)_{k\geq 1}\subseteq\mathscr{A}$ cu proprietatea :

$$A_k\subseteq A\setminus\bigcup_{i=1}^{k-1}A_i,\ \nu(A_k)\leq -1/n_k;\ \nu(B)>-1/(n_k-1),\ (\forall)\mathscr{A}\ni B\subseteq A\setminus\bigcup_{i=1}^{k-1}A_i,\ (\forall)k\geq 1$$

Cum $\bigcup_{k\geq 1}A_k\subseteq A$, avem (P.4.3.2.) :

$$\nu(A\setminus\bigcup_{k\geq 1}A_k)=\nu(A)-\nu(\bigcup_{k\geq 1}A_k)=\nu(A)-\sum_{k\geq 1}\nu(A_k)\geq\nu(A)+\sum_{k\geq 1}1/n_k>0, \quad (1)$$

deci

$$\nu(P\cup(A\setminus\bigcup_{k\geq 1}A_k)) = \nu(P)+\nu(A\setminus\bigcup_{k\geq 1}A_k) > \nu(P) = \alpha$$

şi deci, ca mai sus, deducem că $A\setminus\bigcup_{k\geq 1}A_k$ nu este o mulţime ν-pozitivă. Atunci avem : $(\exists)\mathscr{A}\ni\ C\subseteq A\setminus\bigcup_{k\geq 1}A_k$, cu $\nu(C)<0$.

Cum $\nu<\infty$, din relaţia (1) rezultă $\sum_{k\geq 1}1/n_k<+\infty$, deci $(1/n_k)\to 0$ şi deci $n_k\to\infty$.

Fie $n_{k_0}>1$, cu $\mu(C)\leq(-1/n_{k_0})$. Cum avem :

$$A_{k_0}\cup C\subseteq\left(A\setminus\bigcup_{i=1}^{k_0-1}A_i\right)\cup\left(A\setminus\bigcup_{i\geq 1}A_i\right)=A\setminus\bigcup_{i=1}^{k_0-1}A_i,$$

deducem

$$(-1/n_{k_0}-1)<\nu(A_{k_0}\cup C)=\nu(A_{k_0})+\nu(C)<-2/n_{k_0},$$

deci $n_{k_0}<2$, absurd. Prin urmare Q este ν-negativă, deci {P, Q} constituie o ν-descompunere Hahn a lui X.

4.3.7. Definiţie. Fie $(X,\mathscr{A})$ un spaţiu masurabil şi $\mu_1,\mu_2:\mathscr{A}\to\overline{\mathbf{R}}$ două măsuri. Vom spune că μ_1, μ_2 sunt *mutual singulare* (μ_1 singulară în raport cu μ_2) şi vom scrie $\mu_1\perp\mu_2$, dacă $(\exists)\ A\in\mathscr{A}$, a.î. $\mu_1(A)=\mu_2(X\setminus A)=0$.

a) $\mu_1\perp\mu_2\Leftrightarrow(\exists)\{P,Q\}$ o partiţie măsurabilă a lui X, a.î. $\mu_1(P)=\mu_2(Q)=0$.

b) $\mu_1\perp\mu_2\Leftrightarrow(\exists)\{P,Q\}$o partiţie măsurabilă a lui X, a.î. $\mu_1(A)=\mu_1(A\cap P)$ şi $\mu_2(A)=\mu_2(A\cap Q)$, $(\forall)A\in\mathscr{A}$.

Intr-adevăr: $\mu_1\perp\mu_2\Leftrightarrow(\exists)\{P,Q\}$ o partiţie măsurabilă a lui X, a.î. $\mu_1(Q)=\mu_2(P)=0$.Atunci $(\forall)A\in\mathscr{A}$, avem: $\mu_1(A)=\mu_1(A\cap P)+\mu_1(A\cap Q)=\mu_1(A\cap P)$

Analog $\mu_2(A)=\mu_2(A\cap Q)$ etc.

4.3.8. Definiţie. Fie $(X,\mathscr{A},\nu)$ un spaţiu cu măsură generalizată. Se numeşte *descompunere Jordan* a lui ν o pereche de măsuri mutual singulare, $\nu_1,\nu_2:\mathscr{A}\to\overline{\mathbf{R}}$, cu proprietatea că $\nu=\nu_1-\nu_2$.

4.3.9.Teoremă. *Fie $(X,\mathscr{A},\nu)$ un spaţiu cu măsură generalizată şi {P,Q} o ν-descompunere Hahn a lui X. Atunci funcţiile $\nu^+,\nu^-:\mathscr{A}\to\overline{\mathbf{R}}$ definite astfel*

$$\nu^+(A):=\nu(A\cap P),\ A\in\mathscr{A};\ \nu^-(A):=-\nu(A\cap Q),\ A\in\mathscr{A},$$

sunt măsuri mutual singulare în care cel puţin una este finită şi $\nu=\nu^+-\nu^-$.

Dem. Evident $\nu^+(\emptyset)=0$ şi $\nu^+\geq 0$. Mai departe $(\forall)(A_n)_{n\geq 1}\subseteq\mathscr{A}$, mutual disjunct, avem:

$$\nu^+\left(\bigcup_{n\geq 1}A_n\right)=\nu\left(\bigcup_{n\geq 1}(A_n\cap P)\right)=\sum_{n\geq 1}\nu(A_n\cap P)=\sum_{n\geq 1}\nu^+(A_n),$$

deci ν^+ este măsură. Analog, se arată că ν^- este măsură.

Deoarece $\nu^+(\mathbf{Q})=\nu(\emptyset)=0$ şi $\nu^-(P)=\nu(\emptyset)=0$, rezultă că ν^+ şi ν^- sunt mutual singulare.

Dacă $\infty \notin \cup\{\nu(A);\ A\in\mathscr{A}\}$, atunci $\nu^+(X)=\nu(P)\in[0,\infty)$, deci ν^+ este finită.

Dacă $-\infty \notin \cup\{\nu(A);A\in\mathscr{A}\}$, rezultă că ν^- este finită. Atunci $(\forall)A \in\mathscr{A}$, avem

$$\nu(A)=\nu(A\cap P)+\nu(A\cap Q)=\nu^+(A)-\nu^-(A).$$

In fine, deoarece $\nu^+(Q)=\nu^-(P)=0$, rezultă $\nu^+\perp\nu^-$.

Corolar 1 (Existenţa descompunerii Jordan). *Fie $(X,\mathscr{A},\nu)$ un spaţiu cu măsură generalizată. Atunci ν admite cel puţin o descompunere Jordan.*

4.3.10. Definiţie. Măsurile ν^+,ν^- se numesc *variaţia pozitivă*, resp. *variaţia negativă* a lui ν, iar măsura $\nu^+ + \nu^-$ se numeşte *variaţia totală* a lui ν şi se notează cu $|\nu|$. Să facem câteva precizări asupra măsurilor $\nu^+,\nu^-,|\nu|$.

4.3.11. Propoziţie. *Fie $(X,\mathscr{A},\nu)$ un spaţiu cu măsură generalizată. Atunci au loc afirmaţiile următoare :*

1^0) Orice două ν-descompuneri Hahn ale lui X definesc o aceeaşi descompunere Jordan a lui ν.

2^0) Orice descompunere Jordan a lui ν este definită de o ν-descompunere Hahn a lui X.

Dem. 1^0) Din T.4.3.9. avem că orice ν-descompunere Hahn a lui X defineşte o descompunere Jordan a lui ν. Fie $\{P, Q\}$, $\{P_1, Q_1\}$ două ν- descompuneri Hahn ale lui X. Evident $(\forall)A \in\mathscr{A}$, avem :

$$\left.\begin{array}{l}\nu(A\cap P)=\nu((A\cap P)\cap P_1)+\nu((A\cap P)\cap Q_1)\\ \nu(A\cap P_1)=\nu((A\cap P_1)\cap P)+\nu((A\cap P_1)\cap Q)\end{array}\right\} \quad (1).$$

Deoarece mulţimile P, P_1 sunt ν-pozitive şi mulţimile Q,Q_1 sunt ν-negative, rezultă că mulţimile $(A\cap P)\cap Q_1$ şi $(A\cap P_1)\cap Q$ sunt ν-nule, deci din (1) rezultă $\nu(A\cap P)=\nu(A\cap P_1)$. Analog deducem că $\nu(A\cap Q)=\nu(A\cap Q_1)$, deci cele două ν- descompuneri Hahn definesc aceeaşi descompunere Jordan a lui ν.

2^0) Fie acum ν_1,ν_2: $\mathscr{A}\to\overline{\mathbf{R}}$, două măsuri mutual singulare, cu $\nu=\nu_1-\nu_2$. Cf. definiţiei $(\exists)\{P,Q\}$ o partiţie măsurabilă a lui X, a.î. $\nu_1(Q)=\nu_2(P)=0$. Fie $\nu=\nu^+-\nu^-$ descompunerea Jordan definită de $\{P,Q\}$(T.4.3.9). Atunci $(\forall)A\in\mathscr{A}$, deoarece $\nu_1(A\cap Q) = \nu_2(A\cap P) = 0$, rezultă:

$$\nu^+(A)=\nu(A\cap P)=\nu_1(A\cap P)-\nu_2(A\cap P)=\nu_1(A\cap P)=\nu_1(A\cap P)+\nu_1(A\cap Q)=\nu_1(A).$$

Aşadar, $\nu^+= \nu_1$ şi analog $\nu^- = \nu_2$. Prin urmare, ν-descompunerea Hahn $\{P,Q\}$, defineşte descompunerea Jordan $\nu = \nu_1-\nu_2$.

Corolar 1 (Unicitatea descompunerii Jordan). *Fie $(X, \mathscr{A}, \nu)$ un spațiu cu măsură generalizată. Atunci ν admite o descompunere Jordan şi numai una singură.*

Observație. Descompunerea unei măsuri generalizate ν în diferența a două măsuri (arbitrare) nu este unică. Intr-adevăr, dacă $\nu=\nu_1-\nu_2$, unde ν_1,ν_2 măsuri, atunci avem $\nu=(\nu_1+\nu_0)-(\nu_2+\nu_0)$, pentru orice măsură finită ν_0.

4.3.12. Propoziție. *Fie $(X, \mathscr{A}, \nu)$ un spațiu cu măsură generalizată şi $\nu_1, \nu_2 : \mathscr{A} \to \overline{\mathbf{R}}$ două măsuri, a.î. $\nu=\nu_1-\nu_2$. Atunci $\nu^+\leq\nu_1$ şi $\nu^-\leq\nu_2$, deci ν^+, ν^- sunt măsuri minimale, cu proprietatea că $\nu = \nu^+ - \nu^-$.*

Dem. Fie $\{P, Q\}$ o ν-descompunere Hahn a lui X. Din T.4.3.9 rezultă:

$$\nu^+(A)=\nu(A\cap P)=\nu_1(A\cap P)-\nu_2(A\cap P)\leq\nu_1(A\cap P)\leq\nu_1(A),\ (\forall)A\in\mathscr{A},$$

deci $\nu^+\leq\nu_1$. Analog se arată că $\nu^-\leq\nu_2$.

4.3.13. Propoziție. *Fie $(X, \mathscr{A}, \nu)$ un spațiu cu măsură generalizată şi ν^+, ν^-, $|\nu|$ variațiile pozitivă, negativă, resp. totală a lui ν. Atunci $(\forall)A\in\mathscr{A}$ avem:*

1^0) $\nu^+(A) = \sup\{\nu(B);\ \mathscr{A}\ni B\subseteq A\}$, $\nu^-(A) = -\inf\{\nu(B);\ \mathscr{A}\ni B\subseteq A\}$.

2^0) $|\nu|(A) = \sup\left\{\sum_{i=1}^{n}|\nu(A_i)|;\ (A_i)_{i=\overline{1,n}}\right.$ partiție $\mathscr{A}$-măsurabilă a lui $A\}$.

Dem. 1^0) Fie $\{P,Q\}$ o ν-descompunere Hahn a lui X. Atunci avem :

$$\nu^+(A) = \nu(A\cap P)\leq \sup\{\nu(B);\ \mathscr{A}\ni B\subseteq A\}.$$

Reciproc, $(\forall)\mathscr{A}\ni B\subseteq A$, rezultă

$$\nu(B) = \nu(B\cap P) + \nu(P\cap Q) \leq \nu(B\cap Q) = \nu^+(B) \leq \nu^+(A),$$

deci $\sup\{\nu(B);\ \mathscr{A}\ni B\subseteq A\} \leq \nu^+(A)$ etc.

2^0) Fie $A\in\mathscr{A}$ fixat. Să notăm cu α expresia din dreapta. Evident avem :

$$|\nu|(A) = \nu^+(A) + \nu^-(A) = \nu(A\cap P) - \nu(A\cap Q) = |\nu(A\cap P)| + |\nu(A\cap Q)|,$$

deci $|\nu|(A) \leq \alpha$. Fie mai departe $(A_i)_{i=\overline{1,n}}$ o $\mathscr{A}$–partiție a lui A. Atunci $(\exists)k\in\overline{1,n}$, a.î. $\nu(A_i)\geq0$, $(\forall)i=\overline{1,n}$, $i\leq k$ şi $\nu(A_i)\leq 0$, $(\forall)i=\overline{1,n}$, $i>k$, deci

$$\sum_{i=1}^{n}|\nu(A_i)| = \sum_{i\leq k}\nu(A_i) - \sum_{i>k}\nu(A_i) = \nu(\bigcup_{i\leq k}A_i) - \nu(\bigcup_{i>k}A_i) \leq \nu^+(A) + \nu^-(A) \text{ (cf. } 1^0)),$$

şi deci

$$\sum_{i=1}^{n}|\nu(A_i)| \leq |\nu|(A),$$ de unde rezultă $\alpha \leq |\nu|(A)$. Prin urmare $|\nu|(A) = \alpha$.

4.3.14. Teoremă (Lebesgue–Radon–Nikodim). *Fie $(X,\mathscr{A},\mu)$ un spațiu cu măsură σ-finită și $\nu:\mathscr{A}\to\overline{\mathbf{R}}$ o măsură generalizată absolut continuă în raport cu μ (i.e. $\nu << \mu$). Atunci $(\exists)\, f:X\to\overline{\mathbf{R}}$ unic determinată (μ-a.p.t.), μ - integrabilă, a.î. $\nu = \nu_f$, i.e. $\nu(A)= \int_A fd\mu$, $(\forall)A\in\mathscr{A}$.*

Dem. Fie $f,g:X\to\overline{\mathbf{R}}$, două funcții integrabile, a.î. $\int_A fd\mu = \int_A gd\mu$, $(\forall)A\in\mathscr{A}$. Atunci (P.4.2.3.) $f=g$ (μ - a.p.t.), deci funcția f, dacă există, este unic determinată (μ - a.p.t.).

Caz I. $\nu \geq 0$ și $\mu(X) < \infty$. Notăm $\mu^* = \mu + \nu$. Evident μ^* este o măsură (P.2.2.5) finită, $\nu \leq \mu^*$ și avem (P.5.3.9. Cor.1, P.5.3.10.) :

$$L^2(X,\mathscr{A},\mu^*) \subseteq L^2(X,\mathscr{A},\nu) \subseteq L^1(X,\mathscr{A},\nu).$$

Fie funcționala $F(f):= \int_X fd\nu$, $f\in L^2(X,\mathscr{A},\mu^+)$. Să arătăm că $F\in(L^2(X,\mathscr{A},\mu^*))'$.

Evident F este liniară și avem (P.4.1.15.) :

$$|F(f)| \leq \int_X |f|d\nu \leq \int_X |f|d\mu^* = \int_X 1\cdot|f|d\mu^* \underset{\text{cf.Hölder}}{\leq}$$

$$\leq \left(\int_X |f|^2 d\mu^*\right)^{1/2} \cdot \left(\int_X 1^2 d\mu^*\right)^{1/2} = \sqrt{\mu^*(X)}\cdot\|f\|_p, (\forall)\ f\in L^2(X,\mathscr{A},\mu^*).$$

De aici rezultă (T.1.2.50.) F continuă, deci $F \in (L^2(X,\mathscr{A},\mu^*))'$. Aplicând T.5.3.13,Cor.1, rezultă că $(\exists)\ g \in L^2(X,\mathscr{A},\mu^*)$,a.î.

$$F(f) = \langle f, g\rangle_{L^2(X,\mathscr{A},\mu^*)}, (\forall)f\in L^2(X,\mathscr{A},\mu^*),$$

deci

$$\int_X fd\nu = \int_X fgd\mu^*, (\forall)\ f\in L^2(X,\mathscr{A},\mu^*) \qquad (1)$$

Înlocuind în (1) pe f cu φ_A, cu $A\in\mathscr{A}$ fixat, rezultă următoarea relație :

$$\nu(A) = \int_A gd\mu^*, (\forall)\ A\in\mathscr{A} \qquad (2)$$

Deoarece $\nu \geq 0$, avem $\int_A gd\mu^* \geq 0$, $(\forall)\ A\in\mathscr{A}$, deci (P.4.2.3.) $g \geq 0$ (μ^*- a.p.t.).

Dacă $A_0:= \{x\in X;\ g(x) \geq 1\}$, din (2) rezultă:

$$\nu(A_0) = \int_{A_0} gd\mu^* \geq \int_{A_0} 1\cdot d\mu^* = \mu^*(A_0) = \mu(A_0) + \nu(A_0),$$

de unde deducem că $\mu(A_0) = 0$ și cum $\nu << \mu$, avem $\nu(A_0) = 0$.

Așadar, $0\leq g<1$ (a.p.t.) relativ la μ și ν. Fixăm mai departe $A\in\mathscr{A}$, $n\geq 1$ și fie funcția $h_n=(1+g+\ldots+g^n)\varphi_A$. Evident $h_n\in\mathscr{M}(X,\mathscr{A})$ și avem $(1-g)h_n=(1-g^{n+1})\varphi_A$. Înlocuind în (1) pe f cu h_n obținem :

$$\int_X h_n d\nu = \int_X h_n g d\mu^* = \int_X h_n g d\mu + \int_X h_n g d\nu ,$$

deci

$$\int_X (1-g) h_n d\nu = \int_X h_n g d\mu$$

şi deci

$$\int_A (1-g^{n+1}) d\nu = \int_A (1+g+\ldots+g^n) g d\mu \qquad (3)$$

Cum $(1-g^{n+1})_{n\geq 1}$ şi $(g+g^2+\ldots+g^n)_{n\geq 1}$ sunt şiruri monoton crescătoare de funcții măsurabile nenegative, primul convergent ν-a.p.t. la 1, iar al doilea convergent μ-a.p.t. la $f=g/(1-g)$, din (3) prin trecere la limită, $n\to\infty$, obținem (T.4.2.10,Cor.1) :

$$\int_A d\nu = \int_A f d\mu \text{, deci } \nu(A)= \int_A f d\mu .$$

Prin urmare,$(\exists)f:X\to\overline{\mathbf{R}}$, o funcție μ-integrabilă,cu $f\geq 0$ (μ-a.p.t.), a.î.

$$\nu(A) = \int_A f d\mu , \ (\forall)\ A\in\mathscr{A}.$$

Caz II $\nu\geq 0$, μ *σ-finită*.Atunci $(\exists)$ $(A_n)_{n\geq 1}\subseteq\mathscr{A}$ un şir mutual disjunct, cu $X=\bigcup\limits_{n\geq 1} A_n$ & $\mu(A_n)<\infty,(\forall)n\geq 1$.Notăm $\mathscr{A}_n:=\mathscr{A}|_{A_n}$, $\mu_n:=\mu|_{\mathscr{A}_n}$ şi $\nu_n:=\nu|_{\mathscr{A}_n}$ $(n\geq 1)$.

Evident $\nu_n<<\mu_n$, deci (cf.(I)) $(\exists)$ $f_n:A_n\to\overline{\mathbf{R}}$ o funcție μ_n-integrabilă nenegativă (μ_n – a.p.t.), a.î.

$$\nu_n(A)= \int_A f_n d\mu_n , (\forall)A\in\mathscr{A}_n \qquad (4)$$

Fie acum $f:X\to\overline{\mathbf{R}}$ o funcție definită astfel $f|_{A_n}= f_n$, $(\forall)n\geq 1$. Atunci cf. (4) avem :

$$\sum_{n\geq 1}\int_{A_n} f d\mu = \sum_{n\geq 1}\int_{A_n} f_n d\mu_n = \sum_{n\geq 1}\nu_n(A_n) = \sum_{n\geq 1}\nu(A_n) = \nu(X) < \infty,$$

deci (T.4.2.8., 2^0)) f este μ- integrabilă.

In fine, fie $A\in\mathscr{A}$ fixat. Atunci $A\cap A_n\in\mathscr{A}_n$, $(\forall)n\geq 1$ şi avem $A=\bigcup\limits_{n\geq 1}(A\cap A_n)$. Cum avem (cf. (4)) :

$$\nu(A\cap A_n) = \nu_n(A\cap A_n) = \int_{A\cap A_n} f_n d\mu_n = \int_{A\cap A_n} f d\mu , (\forall)n\geq 1,$$

rezultă :

$$\nu(A) = \sum_{n\geq 1}\nu(A\cap A_n) = \sum_{n\geq 1}\int_{A\cap A_n} f d\mu = \int_A f d\mu$$

Aşadar, $(\exists)$ $f: X\to\overline{\mathbf{R}}$ o funcție μ - integrabilă a.î. $\nu = \nu_f$.

Caz III . ν-*arbitrară*, μ σ - *finită*. Atunci (T.4.3.9.) ($\exists$) două măsuri ν_1, ν_2 : $X \to \overline{\mathbf{R}}$ a.î. $\nu = \nu_1 - \nu_2$. Cf.(II) ($\exists$) $f_i : X \to \overline{\mathbf{R}}$ o funcție μ-integrabilă,a.î. $\nu_i = \nu_{f_i}$ $(i=\overline{1,2})$. Evident avem $\nu = \nu_1 - \nu_2 = \nu_{f_1} - \nu_{f_2} = \nu_{f_1 - f_2} = \nu_f$.

Teorema este complet demonstrată.

4.3.15. Teoremă (Descompunerea Lebesgue). *Fie(X,$\mathscr{A}$) un spațiu măsurabil și $\nu, \mu : \mathscr{A} \to \overline{\mathbf{R}}$ două măsuri σ-finite. Atunci ($\exists!$) două măsuri ν_1, $\nu_2 : \mathscr{A} \to \overline{\mathbf{R}}$, a.î. $\nu = \nu_1 + \nu_2$, $\nu_1 \perp \mu$ și $\nu_2 << \mu$.*

Dem.*Existența*: Evident $\lambda := \nu + \mu$ este o măsură σ-finită și avem $\mu << \lambda$, $\nu << \lambda$. Din T.4.3.14. rezultă că există $f,g : X \to \overline{\mathbf{R}}$ două funcții măsurabile nenegative,a.î.

$$\mu(A) = \int_A f d\lambda,\ \nu(A) = \int_A g d\lambda,\ (\forall) A \in \mathscr{A}.$$

Fie $P := \{x \in X;\ f(x) > 0\}$ și $Q := \{x \in X;\ f(x) = 0\}$. Atunci $\{P, Q\}$ este o partiție măsurabilă a lui X. Să notăm :

$$\nu_1(A) := \nu(A \cap Q),\ \nu_2(A) = \nu(A \cap P),\ A \in \mathscr{A}.$$

Evident ν_1, ν_2 sunt măsuri și avem :

$$\nu_1(A) + \nu_2(A) = \nu(A \cap Q) + \nu(A \cap P) = \nu(A),\ (\forall)\ A \in \mathscr{A}.$$

Mai departe, $\mu(Q) = \int_Q f d\lambda = 0$ și $\nu_1(P) = \nu(\emptyset) = 0$, deci $\mu \perp \nu$. In fine, fie $A \in \mathscr{A}$, cu $\mu(A) = 0$, deci $\int_A f d\lambda = 0$ și deci (T.4.1.14.), $f = 0$, pe A, cu excepția unei mulțimi B λ–nule. Evident $A \cap P \subseteq B$, deci $\lambda(A \cap P) = \lambda(B) = 0$ și deci

$$\nu_2(A) = \nu(A \cap P) = \int_{A \cap P} g d\lambda = 0.$$

Așadar, $(\forall) A \in \mathscr{A}$, cu $\mu(A) = 0$, rezultă $\nu_2(A) = 0$, deci $\nu_2 << \mu$.

Unicitatea: Fie $\{\nu_1, \nu_2\}$, $\{\nu_1', \nu_2'\}$, două perechi de măsuri cu proprietațile : $\nu = \nu_1 + \nu_2 = \nu_1' + \nu_2'$, $\nu_1 << \mu$, $\nu_1' << \mu$, $\nu_2 \perp \mu$, $\nu_2' \perp \mu$. Atunci ($\exists$)M, N $\in \mathscr{A}$, a.î. $\nu_1(M) = \mu(X \setminus M) = 0$ & $\nu_1'(N) = \mu(X \setminus N)$. Fixăm $A \in \mathscr{A}$.

Dacă $A \subseteq M \cap N$, rezultă $\nu_2(A) = \nu_2'(A) = 0$, deci

$$\nu_1(A) = \nu_1(A) + \nu_2(A) = \nu(A) = \nu_1'(A) + \nu_2'(A) = \nu_1'(A).$$

Dacă $A \subseteq (M \cap N)^c = M^c \cup N^c$, rezultă $\mu(A) = \mu(A \cap (X \setminus M)) + \mu(A \cap (X \setminus N)) = 0$.

Cum $\nu_1 << \mu$ & $\nu_1' << \mu$, rezultă $\nu_1(A) = \nu_1'(A) = 0$, deci

$$\nu_2(A) = \nu_1(A) + \nu_2(A) = \nu_1'(A) + \nu_2'(A) = \nu_2'(A).$$

Așadar, $\nu_1 = \nu_1'$ & $\nu_2 = \nu_2'$, pe $\mathscr{A}_{M \cap N}$ ca și pe $\mathscr{A}_{(M \cap N)^c}$, de unde deducem imediat că $\nu_1 = \nu_1'$ & $\nu_2 = \nu_2'$ pe $\mathscr{A}$.

4.4. Măsură şi integrală pe spaţii produs

Fie $(X, \mathscr{A}, \mu)$, $(Y, \mathscr{B}, \nu)$ două spaţii cu măsură. Se pune problema de a defini o σ-algebră $\mathscr{C}$ pe mulţimea $X\times Y$ legată de $\mathscr{A}$ şi $\mathscr{B}$, apoi o măsură $\pi:\mathscr{C}\to\overline{\mathbf{R}}$, legată de măsurile μ şi ν. Spaţiul cu măsură astfel definit $(X\times Y,\mathscr{C},\pi)$ se va numi *spaţiul cu măsură produs* al celor două spaţii cu măsură $(X, \mathscr{A}, \mu)$ şi $(Y, \mathscr{B}, \nu)$.

Pe spaţiul cu măsură astfel definit, $(X\times Y,\mathscr{C},\pi)$, se consideră funcţii π-integrabile, $f:X\times Y\to\overline{\mathbf{R}}$, deci funcţii integrabile de două variabile x şi y. Se demonstrează aici teoremele lui Tonelli şi Fubini care reduc calculul integralei $\iint_{X\times Y} f d\pi$ la calculul succesiv a două integrale simple de o variabilă.

In loc de produsul a două spaţii cu măsură se poate considera produsul unui număr finit sau chiar infinit de spaţii cu măsură.

Pe spatiul $\mathbf{R}^n$ putem astfel defini măsura Lebesgue ca şi integrala Lebesgue, în două moduri diferite. Definim, în prealabil, măsura exterioară Lebesgue n – dimensională, $\lambda_n^*: 2^{\mathbf{R}^n}\to\overline{\mathbf{R}}$, utilizând intervale n–dimensionale, în locul celor 1–dimensionale,utilizate pentru definirea măsurii Lebesgue pe $\mathbf{R}$. In continuare se procedează după schema standard utilizată până acum. A doua posibilitate este să identificam pe $\mathbf{R}^n$ cu produsul a n spaţii cu măsură identice $(\mathbf{R}, \mathscr{L}_{\mathbf{R}},\lambda)$ etc.

4.4.1. Definiţie. Fie X, Y două mulţimi şi C o submulţime a lui $X\times Y$. Atunci $(\forall)x\in X$, mulţimea $\{y\in Y; (x,y)\in C\}$ se notează cu C_x şi se numeşte *secţiunea lui C prin x*; analog $(\forall)y\in Y$, se defineşte mulţimea $C^y:=\{x\in X;(x,y)\in C\}$, *secţiunea lui C prin y*. Sectiunile C_x, C^y se mai notează cu $C[x]$, resp. $C[y]$:

a) $(\forall)C:=A\times B\subseteq X\times Y$, avem: $C_x=B$, dacă $x\in A$ şi $C_x=\emptyset$, dacă $x\in X\setminus A$; $C^y = A$, dacă $y\in B$ şi $C^y = \emptyset$, dacă $y\in Y\setminus B$.

b) Fie $C,C_n\subseteq X\times Y(n\geq1)$. Atunci $\left(\bigcup_{n\geq1}C_n\right)_x=\bigcup_{n\geq1}(C_n)_x$ şi $\left(\bigcap_{n\geq1}C_n\right)_x=\bigcap_{n\geq1}(C_n)_x$, $(\forall)x\in X$. Dacă $C_n\uparrow C$, rezultă $(C_n)_x\uparrow C_x$, $(\forall)x\in X$. Dacă $C_n\downarrow C$, rezultă $(C_n)_x\downarrow C_x$, $(\forall)$ $x\in X$. Afirmaţii analoage pentru secţiunea prin y din Y.

c) Dacă $C,D\subseteq X\times Y$,avem$(C\setminus D)_x=C_x\setminus D_x$, $(\forall)x\in X$. Dacă în plus $C\subseteq D$, avem $C_x \subseteq D_x, (\forall) x \in X$. Afirmații analoage pentru secțiunea prin y din Y.

d) Fie $(X,\mathscr{A},\mu)$ și $(Y,\mathscr{B},\nu)$ două spații cu măsură.

$(\forall) C := A\times B \in \mathscr{A}\times\mathscr{B} \Rightarrow C_x \in \mathscr{B}$ & $\nu(C_x)=\nu(B)\varphi_A(x), (\forall) x\in X$;

$C^y \in \mathscr{A}$ & $\mu(C^y)=\mu(A)\varphi_B(y), (\forall) y\in Y$. Dacă $(C_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathscr{A}\times\mathscr{B}$ și $C=\bigcup\limits_{n\geq 1} C_n$,avem:

$$C_x \in \mathscr{B} \ \& \ \nu(C_x) \leq \sum_{n\geq 1} \nu((C_n)_x), (\forall)\, x\in X;$$

$$C^y \in \mathscr{A} \ \& \ \mu(C^y) \leq \sum_{n\geq 1} \mu((C_n)^y), (\forall)\, y\in Y.$$

Dacă șirul $(C_n)_{n\geq 1}$ este mutual disjunct, inegalitățile $\leq$ devin egalități =.

4.4.2. Definiție. Fie X,Y două mulțimi și $f: X\times Y \to \overline{\mathbf{R}}$ o funcție. Pentru fiecare $x\in X$, fie $f_x: Y\to\overline{\mathbf{R}}$ o funcție definită astfel $f_x(y) = f(x,y), (\forall) y\in Y$; funcția f_x se numește *secțiunea lui f prin x.* Analog pentru orice $y\in Y$, funcția $f^y: X\to\overline{\mathbf{R}}$ definită prin relația $f^y(x) = f(x, y), (\forall) x\in X$, se numește *secțiunea lui f prin y.* Funcțiile f_x, f^y, $(x,y)\in X\times Y$, se mai numesc *funcțiile parțiale ale funcției f*; ele se mai notează cu $f(x,\cdot)$, resp. $f(\cdot,y)$

a) $(\forall) C\subseteq X\times Y \Rightarrow (\varphi_C)_x=\varphi_{C_x}, (\forall) x\in X$ & $(\varphi_C)^y=\varphi_{C^y}, (\forall) y\in Y$.

b) Fie $f,g: X\times Y \to \overline{\mathbf{R}}$, două funcții și $\alpha, \beta\in\mathbf{R}$. Atunci

$(\alpha f+\beta g)_x = \alpha f_x + \beta g_x, (\forall)\, x\in X; (\alpha f+\beta g)^y = \alpha f^y + \beta g^y, (\forall)\, y\in Y$,

dacă operațiile algebrice au sens.

c) $(\forall) f: X\times Y\to\overline{\mathbf{R}} \Rightarrow f_x = f_x^+ - f_x^-, (\forall) x\in X; f^y=(f^+)^y-(f^-)^y, (\forall) y\in Y$.

d) Fie f, $f_n: X\times Y\to\overline{\mathbf{R}}$ $(n\geq 1)$, un șir de funcții. Dacă $f_n \xrightarrow{s} f$, atunci

$$(f_n)_x \xrightarrow{s} f_x, (\forall) x\in X \ \& \ (f_n)^y \xrightarrow{s} f^y, (\forall)\, y\in Y.$$

4.4.3. Definiție. Fie X,Y două mulțimi și $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ două inele pe X și Y resp.. Inelul pe $X\times Y$ generat de familia $\mathscr{A}\times\mathscr{B}$ se numește *inelul produs al lui $\mathscr{A}$ cu $\mathscr{B}$* și se notează cu $\mathscr{A}\otimes\mathscr{B}$, adică $\mathscr{A}\otimes\mathscr{B} := r(\mathscr{A}\times\mathscr{B})$. Analog vom defini *$\sigma$-inelul produs* prin relația $\mathscr{A}\otimes\mathscr{B} := \sigma r(\mathscr{A}\times\mathscr{B})$, dacă $\mathscr{A}$ și $\mathscr{B}$ sunt σ-inele; *σ-algebra produs*, $\mathscr{A}\otimes\mathscr{B} := \sigma\, a\,(\mathscr{A}\times\mathscr{B})$, dacă $\mathscr{A}$ și $\mathscr{B}$ sunt σ-algebre. In cazul σ-algebrelor produs, perechea $(X\times Y, \mathscr{A}\otimes\mathscr{B})$ se numește *spațiu măsurabil produs al spațiilor măsurabile $(X, \mathscr{A})$ și $(Y,\mathscr{B})$.*

a) $\sigma r(\mathscr{A}\times\mathscr{B})$ este cel mai puțin fin σ-inel pe $X\times Y$ cu proprietatea că funcțiile proiecție $pr_1: X\times Y\to X$ și $pr_2: X\times Y\to Y$ sunt măsurabile.

b) $\mathscr{A}\times\mathscr{B}$ este o parte cofinală în $\mathscr{A}\otimes\mathscr{B}$,ordonată prin incluziune "$\subseteq$", i.e. $(\forall)C\in\mathscr{A}\otimes\mathscr{B}$, $(\exists)A\times B\in\mathscr{A}\times\mathscr{B}$, a.î. $C\subseteq A\times B$.

Fie, spre exemplu, $\mathscr{A}$ şi $\mathscr{B}$ σ-inele şi $C\in\mathscr{A}\otimes\mathscr{B}:=\sigma r(\mathscr{A}\times\mathscr{B})$ fixat. Atunci $(\exists)(A_n\times B_n)_{n\geq 1}\subseteq\mathscr{A}\times\mathscr{B}$,a.î. $C\subseteq\bigcup_{n\geq 1}(A_n\times B_n)$, deci

$$C\subseteq\left(\bigcup_{n\geq 1}A_n\right)\times\left(\bigcup_{n\geq 1}B_n\right)=A\times B\in\mathscr{A}\times\mathscr{B}.$$

c) $\sigma r(\mathscr{G}\times\mathscr{H})=\sigma r(\mathscr{G})\otimes\sigma r(\mathscr{H})$, $(\forall)\mathscr{G}\subseteq 2^X$ & $\mathscr{H}\in 2^Y$.

d) $\sigma r(\mathscr{A}\times\mathscr{B})|_{A\times B}=\sigma r(\mathscr{A}|_A)\otimes\sigma r(\mathscr{B}|_B)$, $(\forall)\ A\times B\subseteq X\times Y$.

4.4.4.Propoziţie*Fie* $(X,\mathscr{A}),(Y,\mathscr{B})$ *două spaţii măsurabile şi* $(X\times Y,\mathscr{A}\otimes\mathscr{B})$ *spaţiul măsurabil produs. Atunci* $\mathscr{A}\otimes\mathscr{B}$ *este cea mai slabă (mai puţin fină)* σ*-algebră pe* $Z:=X\times Y$, *cu proprietatea că funcţiile proiecţie*

$$pr_X:(Z,\mathscr{A}\otimes\mathscr{B})\to(X,\mathscr{A}),\ pr_Y:(Z,\mathscr{A}\otimes\mathscr{B})\to(Y,\mathscr{B})$$

sunt măsurabile.

Dem. Fie $\mathscr{C}:=\mathscr{A}\otimes\mathscr{B}$. Atunci $(\forall)A\in\mathscr{A}$ avem :

$$pr_X^{-1}(A)=A\times Y\in\mathscr{A}\otimes\mathscr{B}\subseteq\mathscr{C},\text{ deci } pr_X^{-1}(\mathscr{A})\subseteq\mathscr{C}$$

şi deci pr_X este măsurabilă.

Analog se arată că şi pr_Y este măsurabilă.

Fie acum $\mathscr{C}$`o σ-algebră pe Z, cu proprietatea că proiecţiile

$$pr_X:(Z,\mathscr{C}`)\to(X,\mathscr{A}),\ pr_Y:(Z,\mathscr{C}`)\to(Y,\mathscr{B})$$

sunt măsurabile. Atunci,

$$(\forall)(A,B)\in\mathscr{A}\times\mathscr{B}\Rightarrow A\times Y=pr_X^{-1}(A)\in\mathscr{C}`\ \&\ X\times B=pr_Y^{-1}(B)\in\mathscr{C}`,$$

deci $A\times B=(A\times Y)\cap(X\times B)\in\mathscr{C}`$ şi deci $\mathscr{A}\times\mathscr{B}\subseteq\mathscr{C}`$.

Aşadar $\mathscr{A}\otimes\mathscr{B}=\sigma a(\mathscr{A}\times\mathscr{B})\subseteq\mathscr{C}`$, prin urmare $\mathscr{A}\otimes\mathscr{B}$ este cea mai slabă σ-algebră pe Z pentru care proiecţiile pr_X şi pr_Y sunt măsurabile.

Observatie. P.4.4.4. este adevărată şi în cazul general al unui produs numerabil de spaţii măsurabile.

4.4.5. Teoremă. *Fie X,Y două spaţii topologice. Atunci avem* $\mathscr{B}_X\otimes\mathscr{B}_Y\subseteq\mathscr{B}_{X\times Y}$, *cu egalitate, dacă X şi Y sunt cu bază numerabilă.*

Dem. $(X,\mathscr{B}_X)$ şi $(Y,\mathscr{B}_Y)$ sunt spaţii măsurabile. Inzestrând $Z:=X\times Y$ cu topologia produs, proiecţiile $pr_X: Z\to X$, $pr_Y: Z\to Y$ sunt funcţii continue, deci (T.1.2.5.) avem :

$$pr_X^{-1}(\tau_X)\subseteq\tau_Z\subseteq\mathscr{B}_X,\ pr_Y^{-1}(\tau_Y)\subseteq\tau_Z\subseteq\mathscr{B}_Z,$$

deci

$pr_X^{-1}(\mathcal{B}_X)=\sigma a\,(pr_X^{-1}(\tau_X))\subseteq\mathcal{B}_Z$; $pr_Y^{-1}(\mathcal{B}_Y)=\sigma a\,(pr_Y^{-1}(\tau_Y)\subseteq\mathcal{B}_Z$,

şi deci aplicaţiile

$$pr_X: (Z,\mathcal{B}_Z)\to(X, \mathcal{B}_X);\ pr_Y: (Z,\mathcal{B}_Z)\to(Y,\mathcal{B}_Y)$$

sunt funcţii măsurabile şi deci (P.4.4.4.) $\mathcal{B}_X\otimes\mathcal{B}_Y\subseteq\mathcal{B}_{X\times Y}=\mathcal{B}_Z$.

Presupunem acum X şi Y cu bază numerabilă şi fie $\mathcal{D}_1,\mathcal{D}_2$ baze numerabile în X resp. Y. Atunci $\mathcal{D}_1\times\mathcal{D}_2$ este o bază numerabilă a lui Z (P.1.2.29), deci (T.2.1.11,3^0)) $\sigma a(\mathcal{D}_1\times\mathcal{D}_2)=\mathcal{B}_Z$. Cum $\mathcal{D}_1\times\mathcal{D}_2\subseteq\mathcal{B}_X\otimes\mathcal{B}_Y$, rezultă $\mathcal{B}_Z\subseteq\mathcal{B}_X\otimes\mathcal{B}_Y$. Prin urmare $\mathcal{B}_X\otimes\mathcal{B}_Y=\mathcal{B}_Z$.

Corolar 1. $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}\otimes\mathcal{B}_{\mathbb{R}^m}=\mathcal{B}_{\mathbb{R}^{n+m}}$, $(\forall)n,m\geq1$.

Dem. Aplicăm T.4.4.5. ţinând seama că $\mathbf{R}^n$ şi $\mathbf{R}^m$ sunt spaţii metrice separabile, deci cu bază numerabilă.

4.4.6. Propoziţie. *Fie $(X,\mathcal{A}),(Y,\mathcal{B})$ două spaţii măsurabile şi $C\in\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ o mulţime. Atunci $C_x\in\mathcal{B}$, $(\forall)x\in X$ şi $C^y\in\mathcal{A}$, $(\forall)y\in Y$.*

Dem. Fie $\mathcal{C}:=\{C\in\mathcal{A}\otimes\mathcal{B};\ C_x\in\mathcal{B},\ (\forall)x\in X\}$. Dacă $C=A\times B\in\mathcal{A}\times\mathcal{B}$, avem $C_x=B$, dacă $x\in A$ şi $C_x=\emptyset$, dacă $x\in X\setminus A$, deci $C_x\in\mathcal{B}$ şi deci $\mathcal{A}\times\mathcal{B}\subseteq\mathcal{C}$.

Fie mai departe $(C_n)_{n\geq1}\subseteq\mathcal{C}$ fixat şi $C:=\bigcup\limits_{n\geq1}C_n$. Atunci, evident, avem: $C_x=\bigcup\limits_{n\geq1}(C_n)_x\in\mathcal{B}$, $(\forall)\ x\in X$, deci $C\in\mathcal{C}$. In fine, $(\forall)C\in\mathcal{C}$ şi $x\in X$ avem :

$$(X\times Y\setminus C)_x=Y\setminus C_x\in\mathcal{B},\ \text{deci}\ X\times Y\setminus C\in\mathcal{C}.$$

Aşadar, $\mathcal{C}$ este o σ-algebră, deci $\sigma a\,(\mathcal{A}\times\mathcal{B})\subseteq\mathcal{C}$ şi cum

$$\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}:=\sigma a(\mathcal{A}\times\mathcal{B})\subseteq\mathcal{C}\subseteq\mathcal{A}\otimes\mathcal{B},\ \text{rezultă}\ \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}=\mathcal{C}.$$

Prin urmare, $C_x\in\mathcal{B}$, $(\forall)x\in X$ etc.

Corolar 1. *In acelaşi cadru avem: $(\forall)C\in\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$, de forma $C=A\times B\subseteq X\times Y$, rezultă $A\in\mathcal{A}$ şi $B\in\mathcal{B}$, i.e. orice dreptunghi $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$-măsurabil este egal cu produsul cartezian dintre o mulţime $\mathcal{A}$-măsurabilă şi o mulţime $\mathcal{B}$-măsurabilă.*

Dem. Fie $a\in A$ fixat. Atunci (P.4.4.6.) $B=(A\times B)_a\in\mathcal{B}$ etc.

Corolar 2. *Fie $(X,\mathcal{A})$, $(Y,\mathcal{B})$ două spaţii măsurabile şi $f:X\times Y\to\overline{\mathbf{R}}$ o funcţie $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$-măsurabilă. Atunci f este separat măsurabilă, i.e. $(\forall)x\in X$, funcţia $f_x:Y\to\overline{\mathbf{R}}$ este $\mathcal{B}$-măsurabilă şi $(\forall)\ y\in Y$, funcţia $f^y:X\to\overline{\mathbf{R}}$ este $\mathcal{A}$-măsurabilă.*

Dem. Fie $\alpha\in\overline{\mathbf{R}}$ fixat. Din ipoteză rezultă (T.3.2.8.) :

$$C := \{(x, y) \in X \times Y;\ f(x, y) > \alpha\} \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$$

Evident, $(\forall)$ $x \in X$, avem $C_x = \{y \in Y;\ f_x(y) > \alpha\}$ şi cf.P.4.4.6. $C_x \in \mathscr{B}$, deci $\{y \in Y; f_x(y) > \alpha\} \in \mathscr{B}$ şi deci (T.3.2.8.) f_x este $\mathscr{B}$ - măsurabilă.

Analog se procedează şi pentru funcţia f^y.

4.4.7. Propoziţie. *Fie X, Y două mulţimi, $\mathscr{A}$ un inel pe X şi $\mathscr{B}$ un inel pe Y. Atunci $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B} := r(\mathscr{A} \times \mathscr{B})$ coincide cu familia $\mathscr{C}$ a reuniunilor finite mutual disjuncte de elelmente din $\mathscr{A} \times \mathscr{B}$.*

Dem. Să arătăm că $\mathscr{C}$ este inel pe $X \times Y$. Fie în acest scop $C := \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \times B_i)$ şi $D := \bigcup_{j=1}^{m} (A'_j \times B'_j)$ din $\mathscr{C}$, fixaţi. Atunci (P.1.1.2):

a) $C \cap D = \bigcup_{i,j} (A_i \times B_i) \cap (A'_j \times B'_j) = \bigcup_{i,j} (A_i \cap A'_j) \times (B_i \cap B'_j)$.

Cum familia $(A_i \times B_i)_{i=\overline{1,n}}$ (resp. $(A'_j \times B'_j)_{j=\overline{1,m}}$) este mutual disjunctă, rezultă imediat că familia $((A_i \cap A'_j) \times (B_i \cap B'_j))_{(i,j) \in \overline{1,n} \times \overline{1,m}}$ de elemente din $\mathscr{A} \times \mathscr{B}$, este mutual disjunctă, deci $C \cap D \in \mathscr{C}$.

b) Dacă $C \cap D = \varnothing$, rezultă că $C \cup D \in \mathscr{C}$.

c) $C \setminus D = \bigcup_i \bigcap_j ((A_i \times B_i) \setminus (A'_j \times \mathscr{B}'_j))$.

Însă $(\forall)$ $i, j \in \overline{1,n} \times \overline{1,m}$, mulţimea $C_{ij} = (A_i \times B_i) \setminus (A'_j \times B'_j)$ coincide cu reuniunea mulţimilor disjuncte $(A_i \setminus A'_j) \times B_i$ şi $(A_i \cap A'_j) \times (B_i \setminus B'_j)$, care aparţin familiei $\mathscr{A} \times \mathscr{B}$, inclusă în $\mathscr{C}$, deci (cf. b)) $C_{ij} \in \mathscr{C}$. Atunci (cf.a))

$C_i := \bigcap_j C_{ij} \in \mathscr{C}, (\forall) i = \overline{1,n}$ şi cum familia $(C_i)_{i=\overline{1,n}}$ este mutual disjunctă, deoarece $C_i \subseteq A_i \times B_i$, $(\forall)$ $i = \overline{1,n}$, deducem (din b)) că $C \setminus D = \bigcup_{i=1}^{n} C_i \in \mathscr{C}$.

d) $C \cup D = (C \setminus D) \cup (D \setminus C) \cup (C \cap D)$.

Deoarece,

$$C \cap D \in \mathscr{C} \text{ (cf.a)) \& } C \setminus D,\ D \setminus C \in \mathscr{C} \text{ (cf. c))}$$

şi mulţimile $C \cap D$, $C \setminus D$, $D \setminus C$ fiind disjuncte, rezultă (cf. b)) că $C \cup D \in \mathscr{C}$.

Prin urmare, $\mathscr{C}$ este un inel şi cum $\mathscr{A} \times \mathscr{B} \subseteq \mathscr{C} \subseteq r(\mathscr{A} \times \mathscr{B})$, rezultă $r(\mathscr{A} \times \mathscr{B}) \subseteq \mathscr{C}$, deci avem egalitatea $r(\mathscr{A} \times \mathscr{B}) = \mathscr{C}$.

Corolar 1. *In acelaşi cadru avem : $r(\mathscr{A} \times \mathscr{B})$ coincide cu familia reuniunilor finite arbitrare de elemente din $(\mathscr{A} \times \mathscr{B})$.*

Corolar 2. *Fie tripletele $(X,\mathscr{A},\mu),(Y,\mathscr{B},\nu)$, unde X,Y sunt mulţimi; $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ inele pe X, resp. Y; μ, ν măsuri finit aditive pe $\mathscr{A}$, resp. $\mathscr{B}$. Atunci* $(\exists)$ *cel mult o măsură finit aditivă $\pi: r(\mathscr{A}\times\mathscr{B}) \to \overline{\mathbf{R}}$, a.î. $\pi(A\times B)=\mu(A)\cdot\nu(B), (\forall) A\times B \in \mathscr{A}\times\mathscr{B}$.*

Dem. Intr-adevăr, fie π şi $\pi`$ două măsuri finit aditive cu proprietăţile din enunţ. Fixăm $C:=\bigcup_{i=1}^{n}(A_i \times B_i) \in r(\mathscr{A}\times\mathscr{B})$, cu $A_i\times B_i$ $(i=\overline{1,n})$ mutual disjuncte. Atunci ,

$$\pi(C) = \sum_i \pi(A_i \times B_i) = \sum_i \mu(A_i) \cdot \nu(B_i) = \sum_i \pi`(A_i \times B_i) = \pi(C) \text{ etc.}$$

4.4.8. Teoremă. *Fie $(X,\mathscr{A},\mu)$ şi $(Y,\mathscr{B},\nu)$ două spaţii cu măsură σ-finită. Atunci $(\forall)$ $C \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ au loc afirmaţiile:*

1^0) Funcţia, $X \ni x \to \nu(C_x)$, este $\mathscr{A}$– măsurabilă;

2^0) Funcţia, $Y \ni y \to \mu(C^y)$, este $\mathscr{B}$- măsurabilă.

Dem $\boxed{\nu(Y)<\infty}$. 1^0)Considerăm mulţimea următoare :

$$\mathscr{C}:=\{C\in\mathscr{A}\otimes\mathscr{B};\ \text{funcţia}, X\ni x\to\nu(C_x), \text{este } \mathscr{A}\text{-măsurabilă}\}.$$

Dacă $C:=A\times B\in\mathscr{A}\times\mathscr{B}$, avem $C_x \in \mathscr{B}$ & $\nu(C_x) = \nu(B)\varphi_A(x)$, $(\forall)$ $x\in X$. Cum funcţia φ_A este $\mathscr{A}$-măsurabilă , rezultă că funcţia, $X\ni x\to\nu(C_x)$, este $\mathscr{A}$-măsurabilă , deci $C\in\mathscr{C}$ şi deci $\mathscr{A}\times\mathscr{B}\subseteq\mathscr{C}$; în particular, $X\times Y\in\mathscr{C}$. Fie acum $C,D\in\mathscr{C}$, $C\subseteq D$, fixaţi. Atunci $(\forall) x\in X$,avem $(D\setminus C)_x = D_x\setminus C_x$,deci $\nu((D\setminus C)_x) = \nu(D_x)\setminus\nu(C_x)$, şi deci funcţia, $X\ni x\to\nu((D\setminus C)_x)$,este $\mathscr{A}$-măsurabilă, ca diferenţă a două funcţii $\mathscr{A}$-măsurabile, încât $D\setminus C \in\mathscr{C}$.

Fie mai departe $(C_n)_{n\geq1}\subseteq\mathscr{C}$,un şir mutual disjunct, şi $C=\bigcup_{n\geq1} C_n$ .Atunci :

$$\nu(C_x) = \nu(\bigcup_{n\geq1}(C_n)_x) = \sum_{n\geq1}\nu((C_n)_x), (\forall)\ x\in X \qquad (1)$$

Cum fiecare funcţie, $X\ni x\to\nu((C_n)_x)$, este $\mathscr{A}$ -măsurabilă, rezultă din (1) că funcţia, $X\ni x \to\nu(C_x)$, este $\mathscr{A}$-măsurabilă, deci $C\in$ $\mathscr{C}$.

Aşadar, $\mathscr{C}$ este un sistem Dinkin şi $\mathscr{A}\times\mathscr{B}\subseteq\mathscr{C}$, deci

$$\delta(\mathscr{A}\times\mathscr{B})\subseteq\mathscr{C} \text{ şi deci } \delta(\mathscr{A}\times\mathscr{B})\subseteq\mathscr{C}\subseteq\mathscr{A}\otimes\mathscr{B}.$$

Pe de altă parte, $(\forall)$ $C=A\times B$ şi $C`=A`\times B`$ din $\mathscr{A}\times\mathscr{B}$, avem $C\cap C` = (A\cap A`)\times(B\cap B`)\in\mathscr{A}\times\mathscr{B}$, deci (Ex.2.16.) $\delta(\mathscr{A}\times\mathscr{B}) = \sigma a(\mathscr{A}\times\mathscr{B}) = \mathscr{A}\otimes\mathscr{B}$

şi deci $\delta(\mathcal{A}\times\mathcal{B})=\mathcal{C}=\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$. Cu aceasta am arătat că $(\forall)C\in\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ funcţia, $X\ni x\to\nu(C_x)$, este $\mathcal{A}$-măsurabilă.

$\boxed{\nu(Y)=\infty}$ Deoarece ν este σ-finită, $(\exists)$ $(B_n)_{n\geq 1}\subseteq\mathcal{B}$ un şir de mulţimi, mutual disjunct, care acoperă Y, a.î. $\nu(B_n)<\infty$, $(\forall)n\geq 1$. Atunci

$(\forall)C\in\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ şi $n\geq 1$,avem: $C\cap(X\times B_n)\in\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}\supseteq\mathcal{A}\otimes(\mathcal{B}|_{B_n})$,
deci conform celor de mai sus avem că funcţia

$$X\ni x\to\nu_{B_n}((C\cap(X\times B_n))_x)=\nu((C\cap(X\times B_n))_x),$$

este $\mathcal{A}$-măsurabilă şi deci funcţia,

$$X\ni x\to\nu(C_x)=\sum_{n\geq 1}\nu((C\cap(X\times B_n))_x),$$

este $\mathcal{A}$-măsurabilă, ca sumă a unei serii de funcţii măsurabile (T.3.2.15.).

Prin urmare afirmaţia 1^0) este arătată.

2^0) Se procedează la fel ca la 1^0).

Corolar 1. *In acelaşi cadru avem: $(\forall)C\in\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$, integralele $\int_X\nu(C_x)dx$ şi $\int_Y\mu(C^y)dy$ există şi sunt nenegative.*

Observaţie. Vom arăta în teorema următoare că integralele din Cor.1 sunt egale şi ele definesc *măsura produs* a mulţimii C.

4.4.9. Teoremă (Teorema de existenţă a măsurii produs). *Fie $(X,\mathcal{A},\mu)$ si $(Y,\mathcal{B},\nu)$ două spaţii cu măsură σ-finită. Atunci există o unică măsură pe $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$, notată cu $\mu\otimes\nu$, cu proprietatea că :*

$$(\mu\otimes\nu)(A\times B)=\mu(A)\cdot\nu(B),\ (\forall)\ A\times B\in\mathcal{A}\times\mathcal{B} \qquad (1)$$

Măsura $\mu\otimes\nu$ este σ-finită şi avem relaţia :

$$(\mu\otimes\nu)(C)=\int_X\nu(C_x)d\mu=\int_Y\mu(C^y)d\nu,(\forall)C\in\mathcal{A}\otimes\mathcal{B} \qquad (2)$$

Dem. Din T.4.4.8,Cor.1 rezultă că are sens funcţia

$$\pi(C):=\int_X\nu(C_x)d\mu,\ C\in\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$$

şi este nenegativă. Evident $\pi(\varnothing)=0$. Fie $(C_n)_{n\geq 1}\subseteq\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ un şir mutual disjunct şi $C:=\bigcup_{n\geq 1}C_n$. Atunci $(\forall)x\in X$, $((C_n)_x)_{n\geq 1}$ este un şir mutual disjunct, $\mathcal{B}$–măsurabil (P.4.4.6.) şi avem $C_x=\bigcup_{n\geq 1}(C_n)_x$,deci $\nu(C_x)=\bigcup_{n\geq 1}\nu((C_n)_x)$. Însă funcţiile, $X\ni x\to\nu((C_n)_x)(n\geq 1)$, sunt $\mathcal{A}$-măsurabile (T.4.4.8.) şi nenegative, deci putem scrie (T.4.4.8,Cor.1) relaţia:

$$\pi(C)=\int_X\nu(C_x)d\mu=\sum_{n\geq 1}\int_X\nu((C_n)_x)d\mu=\sum_{n\geq 1}\pi(C_n)$$

Aşadar,π este numerabil aditivă, deci o măsură.

La fel se arată că funcția

$$\pi`(C) := \int_Y \mu(C^y)d\nu,\ C\in\mathscr{A}\otimes\mathscr{B},$$

este de asemenea o măsură pe $X\times Y$

Fie mai departe $C=A\times B\in\mathscr{A}\otimes\mathscr{B}$ fixat. Atunci $(\forall)x\in X$, avem

$$\nu(C_x)=\nu(B)\varphi_A(x),\ \text{deci}\ \pi(C)=\int_X \nu(B)\varphi_A(x)d\mu=\nu(B)\cdot\mu(A)$$

şi analog $\pi`(C)=\mu(A)\cdot\nu(B)$, de unde rezultă $\pi=\pi`$ pe $\mathscr{A}\otimes\mathscr{B}$.

Din P.4.4.7.Cor.2 rezultă că $\pi=\pi`$ pe $a(\mathscr{A}\times\mathscr{B})$.

Cum μ şi ν sunt σ-finite, $(\exists)(A_n)_{n\geq1}$ o partiție $\mathscr{A}$-măsurabilă a lui X, $(\exists)(B_n)_{n\geq1}$ o partiție $\mathscr{B}$-măsurabilă a lui Y, a.î. $\mu(A_n)<\infty$ & $\nu(B_n)<\infty$, $(\forall)n\geq1$. Atunci, evident, $(A_n\times B_n)_{n\geq1}$ este o partiție $\mathscr{A}\otimes\mathscr{B}$ -măsurabilă a lui $X\times Y$ şi avem $\pi(A_n\times B_n)<\infty$, $(\forall)n\geq1$, deci π şi analog şi $\pi`$ sunt măsuri σ-finite.

Deoarece măsurile π şi $\pi`$ coincid pe algebra $a(\mathscr{A}\times\mathscr{B})$, rezultă (T.2.1.18.) că ele coincid şi pe $\sigma a(\mathscr{A}\times\mathscr{B})$, deci pe $\mathscr{A}\otimes\mathscr{B}$ şi deci $\pi=\pi`$. Tot de aici rezultă că pentru orice măsură α pe $\mathscr{A}\otimes\mathscr{B}$, cu proprietatea (1) din enunț, avem $\alpha=\pi=\pi`$.

4.4.10. Definiție. Fie $(X,\mathscr{A},\mu)$ şi $(Y,\mathscr{B},\nu)$ două spații cu măsură σ-finită. Atunci măsura $\mu\otimes\nu:\mathscr{A}\otimes\mathscr{B}\to\overline{\mathbf{R}}$ se numeşte *măsura produs a măsurilor μ şi ν*, iar tripletul $(X\times Y,\mathscr{A}\otimes\mathscr{B},\mu\otimes\nu)$ se numeşte *spațiu cu măsură produs al celor două spații date.*

Corolar 1. *In acelaşi cadru avem relația :*

$$(\mu\otimes\nu)(C)=\int_{pr_X(C)}\left(\int_{C_x}d\nu\right)d\mu=\int_{pr_Y(C)}\left(\int_{C^y}d\mu\right)d\nu,\ (\forall)C\in\mathscr{A}\otimes\mathscr{B}.$$

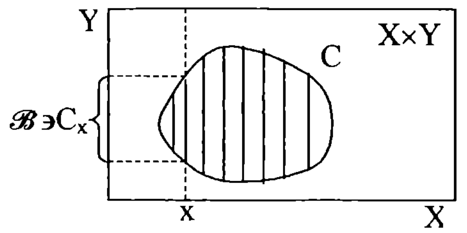
Dem. Deoarece $C_x=\varnothing$, $(\forall)x\notin pr_X(C)$, avem $\nu(C_x)=\nu(C_x)\varphi_{pr_X(C)}(x)$, $(\forall)x\in X$, deci avem :

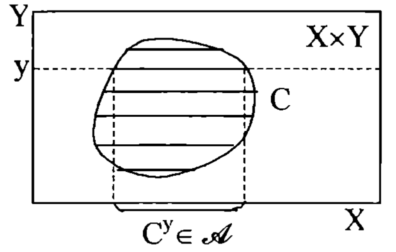
$$(\mu\otimes\nu)(C)=\int_X\nu(C_x)d\mu=\int_{pr_X(C)}\nu(C_x)d\mu=\int_{pr_X(C)}\left(\int_{C_x}d\nu\right)d\mu\ \text{etc.}$$

Să ilustrăm grafic mulțimile: C_x , $x\in X$; C_y , $y\in Y$

Fie $(X,\mathscr{A},\mu)$ şi $(Y,\mathscr{B},\nu)$ două spații cu măsură σ-finită şi

$\mathscr{A}\otimes\mathscr{B}:=\sigma a(\mathscr{A}\times\mathscr{B})$ σ-algebra produs. Fixăm $C\in\mathscr{A}\otimes\mathscr{B}$





Fie $x\in X$; mulțimea $C_x\in\mathscr{B}$; calculăm $\nu(C_x)$ pentru orice x din X şi „sumăm" rezultatele obținute, i.e. integrăm funcția $\mathscr{A}$-măsurabilă nenegativă $X\ni x\to\nu(C_x)$; numărul astfel obținut, $\int_X \nu(C_x)d\mu$, reprezintă o măsură lui C.

Fie $y\in Y$; mulțimea $C^y\in\mathscr{A}$; calculăm $\mu(C^y)$ pentru orice y din Y şi „sumăm" rezultatele obținute, i.e. integrăm funcția $\mathscr{B}$ -măsurabilă nenegativă $Y\ni y\to\nu(C^y)$; numărul astfel obținut, $\int_Y \mu(C^y)d\nu$, reprezintă o măsură lui C.

Arătăm mai departe egalitatea $\int_X \nu(C_x)d\mu=\int_Y \mu(C^y)d\nu$, deci cele două măsurători conduc la acelaşi rezultat. *Măsura produs* $\mu\otimes\nu$ se defineşte prin relația :

$$(\mu\otimes\nu)(C):=\int_X \nu(C_x)d\mu=\int_Y \mu(C^y)d\nu,\ (\forall)C\in\mathscr{A}\otimes\mathscr{B}.$$

Deoarece $(\forall)x\notin pr_X C$ avem $C_x=\varnothing$, deci $\nu(C_x)=0$; analog,$(\forall)y\notin pr_Y C$ avem $C^y=\varnothing$, deci $\mu(C^y)=0$. Prin urmare rezultă relația :

$$(\mu\otimes\nu)(C)=\int_{pr_X(C)} \nu(C_x)d\mu=\int_{pr_Y(C)} \mu(C^y)d\nu,\ (\forall)C\in\mathscr{A}\otimes\mathscr{B}.$$

4.4.11. Teoremă (Tonelli). *Fie $(X,\mathscr{A},\mu)$ şi $(Y,\mathscr{B},\nu)$ două spații cu măsură σ-finită şi $f:X\times Y\to\overline{\mathbf{R}}$ o funcție $\mathscr{A}\otimes\mathscr{B}$-măsurabilă şi nenegativă. Atunci au loc urmatoarele afirmații :*

(a) Funcția , $X\ni x\longmapsto \int_Y f_x d\nu$, este $\mathscr{A}$–măsurabilă;

(b) Funcția , $Y\ni y\longmapsto \int_X f^y d\mu$, este $\mathscr{B}$- măsurabilă;

(c) $$\iint_{X\times Y} fd(\mu\otimes\nu)=\int_X\left(\int_Y f_x d\nu\right)d\mu=\int_Y\left(\int_X f^y d\mu\right)d\nu. \qquad (*)$$

Dem. Să observăm mai întâi că $(\forall)x\in X$, funcția parțială f_x este

$\mathscr{B}$-măsurabilă (P.4.4.6,Cor.2) şi nenegativă, deci funcţia, $X \ni x \to \int_Y f_x d\nu$, din (a) are sens; afirmaţie analoagă pentru funcţia din (b). Vom arată mai departe că aceste funcţii sunt $\mathscr{A}$ respectiv $\mathscr{B}$ –măsurabile şi are loc relaţia (*).

(I) *f funcţie caracteristică.* Fie $f=\varphi_C$, $C \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$. Atunci $f_x=\varphi_{C_x}$ şi $f^y=\varphi_{C^y}$, $(\forall)(x,y) \in X \times Y$, deci funcţia, $X \ni x \to \int_Y f_x d\nu = \nu(C_x)$, este $\mathscr{A}$-măsurabilă, iar funcţia, $Y \ni y \to \int_X f^y d\mu = \mu(C^y)$, este $\mathscr{B}$-măsurabilă (T.4.4.8.) şi avem :

$$\int_X \left(\int_Y f_x d\nu\right) d\mu = \int_X \nu(C_x) d\mu, \quad \int_Y \left(\int_X f^y d\mu\right) d\nu = \int_Y \mu(C^y) d\nu.$$

Pe de altă parte, $\iint_{X\times Y} f d(\mu \otimes \nu) = (\mu \otimes \nu)(C)$, deci (T.4.4.9. (2)) :

$$\iint_{X\times Y} f d(\mu \otimes \nu) = \int_X \left(\int_Y f_x d\nu\right) d\mu = \int_Y \left(\int_X f^y d\mu\right) d\nu$$

(II) *f simplă nenegativă.* Fie $\sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_{C_i}$ o reprezentare canonică a lui f, notăm φ_{C_i} cu f^i $(i=\overline{1,n})$. Atunci $\int_Y f_x d\nu = \sum_{i=1}^{n} c_i \int_Y f_x^i d\nu$, $(\forall) x \in X$, deci (cf.I) funcţia, $X \ni x \to \int_Y f_x d\nu$, este $\mathscr{A}$-măsurabilă nenegativă, ca sumă de funcţii $\mathscr{A}$-măsurabile nenegative, şi avem :

$$\iint_{X\times Y} f d(\mu \otimes \nu) = \sum_{i=1}^{n} c_i \iint_{X\times Y} f^i d(\mu \otimes \nu) \overset{(I)}{=} \sum_{i=1}^{n} c_i \int_X \left(\int_Y f_x^i d\nu\right) d\mu =$$
$$= \int_X \left(\int_Y \sum_{i=1}^{n} c_i f_x^i d\nu \right) d\mu = \int_X \left(\int_Y f_x d\nu\right) d\mu$$

Analog, funcţia, $Y \ni y \to \int_X f^y d\mu$, este $\mathscr{B}$-măsurabilă şi avem :

$$\iint_{X\times Y} f d(\mu \otimes \nu) = \int_Y \left(\int_X f^y d\mu\right) d\nu,$$

de unde rezultă relaţia :

$$\iint_{X\times Y} f d(\mu \otimes \nu) = \int_X \left(\int_Y f_x d\nu \right) d\mu = \int_Y \left(\int_X f^y d\mu\right) d\nu.$$

(III) *f măsurabilă nenegativă.* Cf. T.3.2.16.$(\exists)(f_n)_{n\geq 1}$ un şir monoton crescător de funcţii $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ – simple definite pe $X \times Y$, a.î. $f_n(x,y) \nearrow f(x,y)$, $(\forall)(x,y) \in X \times Y$. Din T.4.2.1. rezultă

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{X\times Y} f_n d(\mu \otimes \nu) = \iint_{X\times Y} f d(\mu \otimes \nu)$$

Mai departe, $(\forall)\ x\in X$, $(f_n)_x \nearrow f_x$; $(\forall)\ y\in Y$, $f_n^y \nearrow f^y$, deci (T.4.2.1)

$$\int_Y (f_n)_x d\nu \nearrow \int_Y f_x d\nu \text{ şi } \int_X f_n^y d\mu \nearrow \int_X f^y d\mu .$$

Cf. II, $(\forall)n\geq 1$, funcţia nenegativă , $X\ni x\rightarrow \int_Y (f_n)_x d\nu$, este $\mathscr{A}$–măsurabilă, iar funcţia nenegativă ,$Y\ni y\rightarrow \int_X f_n^y d\mu$, este $\mathscr{B}$- măsurabilă, deci (T.4.2.1) avem :

$$\lim_{n\to\infty} \int_X \left(\int_Y (f_n)_x d\nu\right) d\mu = \int_X \left(\int_Y f_x d\nu\right) d\mu \qquad (2)$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_Y \left(\int_X f_n^y d\mu\right) d\nu = \int_Y \left(\int_X f^y d\mu\right) d\nu \qquad (3)$$

De asemenea din II rezultă relaţia :

$$\iint_{X\times Y} f_n d(\mu\otimes\nu) = \int_X \left(\int_Y (f_n)_x d\nu\right) d\mu = \int_Y \left(\int_X f_n^y d\mu\right) d\nu ,$$

de unde prin trecere la limită, $n\rightarrow\infty$,rezultă, ţinând seama de (2)&(3),relaţia c)

Corolar 1. *Fie $(X, \mathscr{A}, \mu)$, $(Y, \mathscr{B}, \nu)$ două spaţii cu măsură σ-finită şi $f: X\times Y\rightarrow \overline{\mathbf{R}}$ o funcţie $\mu\otimes\nu$-integrabilă nenegativă. Atunci au loc afirmaţiile :*

a) Funcţia, $f_x : Y\rightarrow \overline{\mathbf{R}}$, este $\mathscr{B}$-măsurabilă nenegativă , deci are ν-integrală $(\forall)\ x\in X$, şi este ν-integrabilă pentru μ-aproape toţi x din X, i.e. pentru orice $x\in X\setminus A$, cu $\mu(A)=0$.

b) Funcţia , $X\ni x \rightarrow \int_Y f_x d\nu$,este μ - integrabilă.

c) Funcţia, $f^y: X\rightarrow \overline{\mathbf{R}}$, este $\mathscr{A}$-măsurabilă nenegativă, deci are μ - integrală $(\forall)\ y\in Y$, şi este μ-integrabilă pentru ν-aproape toti y din Y,. i.e. pentru orice $y\in Y\setminus B$, cu $\nu(B) = 0$.

d) Funcţia , $Y\ni y\rightarrow \int_X f^y d\mu$, este ν-integrabilă.

Dem. Din P.4.4.6,Cor.2, rezultă că funcţiile f_x, f^y sunt: $\mathscr{B}$ -măsurabilă, resp. $\mathscr{A}$ –măsurabilă. Ţinând seama că f este nenegativă , integrabilă, deci $\mathscr{A}\otimes\mathscr{B}$ - măsurabilă, din T.4.4.11(c) rezultă relaţia :

$$\int_X \left(\int_Y f_x d\nu\right) d\mu = \iint_{X\times Y} f d(\mu\otimes\nu) < \infty,$$

deci funcţia, $X\ni x\rightarrow \int_Y f_x d\nu$, este μ-integrabilă şi deci (P.4.1.18,Cor.1) $\int_Y f_x d\nu < \infty$(a.p.t.) pe X şi deci f_x este ν-integrabilă pentru μ-aproape toţi x din X. Cu aceasta am demonstrat pe a) şi b).

Analog se arată c) şi d) inversând rolul lui x cu y.

Observație. Presupunem funcția $f: X \times Y \to \overline{\mathbf{R}}$ integrabilă cu valori de semn contrar. Atunci funcțiile $f^+(x,\bullet)$ și $f^-(x,\bullet)$ sunt $\mathscr{B}$-măsurabile nenegative $(\forall)\ x \in X$ și ν-integrabile $(\forall) x \in X \setminus A$, cu $\mu(A)=0$, deci

$$\int_Y f^+(x,\bullet)d\nu = \int_Y f^-(x,\bullet)d\nu = \infty,\ (\forall)\ x \in \mathbf{A}$$

și deci funcția $x \to \int_Y f(x,\bullet)d\nu$, este definită numai pe $X \setminus A$, i.e. μ-a.p.t. pe X.

Afirmatii analoage pentru funcția $f(\bullet, y)$.

Corolar 2. *Fie $(X, \mathscr{A}, \mu)$, $(Y, \mathscr{B}, \nu)$ două spații cu măsură σ-finită, $C \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ o mulțime și $f: C \to \overline{\mathbf{R}}$ o funcție $\mu \otimes \nu$-integrabilă nenegativă. Atunci au loc afirmațiile :*

a) $pr_X(C) \in \mathscr{A}$ și funcția, $pr_X(C) \ni x \to \int_{C[x]} f(x,\bullet)d\nu$, este $\mathscr{A}$-măsurabilă;

b) $pr_Y(C) \in \mathscr{B}$ și funcția, $pr_Y(C) \ni y \to \int_{C[y]} f(\bullet,y)d\mu$, este $\mathscr{B}$-măsurabilă;

c) $$\iint_C f d(\mu \otimes \nu) = \int_{pr_X(C)} \left(\int_{C[x]} f(x,\bullet)d\nu \right) d\mu = \int_{pr_Y(C)} \left(\int_{C[y]} f(\bullet,y)d\mu \right) d\nu.$$

Dem. a) și b) rezultă din P.4.4.6. și (T.4.4.11,a) și b)).

c) $$\iint_C f d(\mu \otimes \nu) = \iint_{X \times Y} f\varphi_C d(\mu \otimes \nu) = \int_X \left(\int f(x,\bullet)\varphi_C(x,\bullet)d\nu \right) d\mu =$$

(cf. relației $\varphi_C(x,\bullet) = \varphi_{C[x]}(\bullet)$, $(\forall)\ x \in X$)

$$= \int_X \left(\int f(x,\bullet)\varphi_{C[x]}(\bullet)d\nu \right) d\mu = \int_X \left(\int_{C[x]} f(x,\bullet)d\nu \right) d\mu$$

Cum $C[x] = \varnothing$, dacă $x \notin pr_X(C)$, rezultă că funcția, $X \ni x \to \int_{C[x]} f(x, \cdot)d\nu$, este nulă dacă $x \notin pr_X(C)$, deci

$$\int_{C[x]} f(x,\bullet)d\nu = \varphi_{pr_X(C)} \cdot \int_{C[x]} f(x,\bullet)d\nu,\ (\forall) x \in X$$

și deci

$$\iint_C f d(\mu \otimes \nu) = \int_X \left(\varphi_{pr_X(C)} \cdot \int_{C[x]} f(x,\bullet)d\nu \right) d\mu = \int_{pr_X(C)} \left(\int_{C[x]} f(x,\bullet)d\nu \right) d\mu.$$

Relație analoagă schimbând rolul lui x cu y.

Observație. Relația c) din Cor.2, să o numim *formula lui Tonelli,* se scrie, dacă revenim la notațiile anterioare, astfel

$$\iint_C f d(\mu \otimes \nu) = \int_{pr_X(C)} \left(\int_{C_x} f_x d\nu \right) d\mu = \int_{pr_Y(C)} \left(\int_{C^y} f^y d\mu \right) d\nu$$

sau sub forma :

$$\iint_C f(x,y)d(\mu \otimes \nu) = \int_{pr_X(C)} \left(\int_{C[x]} f(x,y)d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_{pr_Y(C)} \left(\int_{C[y]} f(x,y)d\mu(x) \right) d\nu(y),$$

unde notațiile $\mu(x)$, $\nu(y)$ pun în evidență variabilele x, y în raport cu care integrăm funcția f(x, y), în raport cu μ, respectiv ν.

Observație. Teorema lui Tonelli poate fi rezumată simplist astfel : $(\forall)x\in X$, funcția nenegativă $f(x,\bullet)$ este $\mathscr{B}$-măsurabilă, deci$(\exists)$ $\int_Y f(x,\bullet)d\mu$; funcția rezultată , $X\ni x\rightarrow \int_Y f(x,\bullet)d\nu \in \overline{\mathbf{R}}_+$, este $\mathscr{A}$-măsurabilă, deci $(\exists)\int_X\left(\int_Y f(x,\bullet)d\nu\right)d\mu$; integrala obținută este egală cu $\iint_{X\times Y} fd(\mu\otimes\nu)$. Afirmație analoagă și pentru funcția $f(\bullet, y)$.

Semnificația grafică a formulei lui Tonelli.

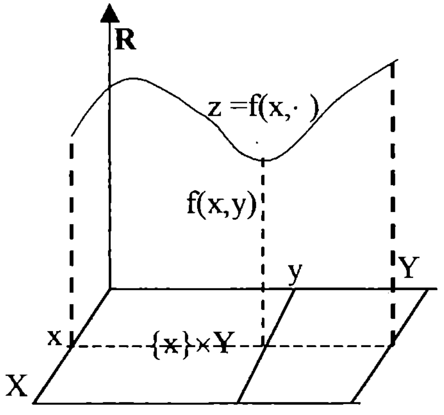
a) Fixăm $x\in X$; funcția $f(x,\bullet)$ este definită pe mulțimea $\{x\}\times Y$ și are subgraficul porțiunea hașurată a cărei arie este integrala $\int_Y f(x,\bullet)d\nu \in \overline{\mathbf{R}}_+$.

Repetăm calculul pentru orice $x\in X$ și apoi „sumăm" rezultatele obținute (i.e. integrăm funcția $X\ni x\rightarrow \int_Y f(x,\bullet)d\nu$); obținem astfel numărul $\int_X\left(\int_Y f(x,\bullet)d\nu\right)d\mu$ care reprezintă volumul lui Γ_f, subgraficul lui f, deci integrala $\int_{X\times Y} fd(\mu\otimes\nu)$.

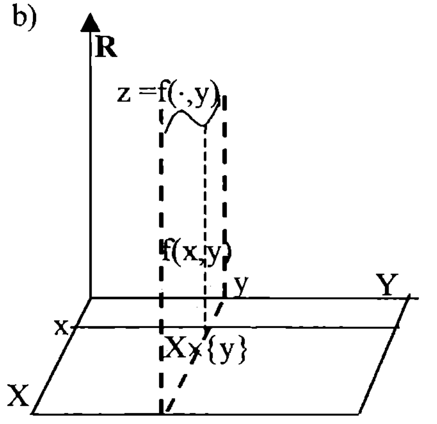
b) Fixăm $y\in Y$; funcția $f(\bullet, y)$ este definită pe mulțimea $X\times\{y\}$ și are subgraficul porțiunea hașurată a cărei arie este integrala $\int_X f(\bullet,y)d\mu \in \overline{\mathbf{R}}_+$.

Repetăm calculul pentru orice $y\in Y$ și apoi „sumăm" rezultatele obținute (i.e. integrăm funcția $Y\ni y\rightarrow \int_X f(\bullet,y)d\mu$); obținem astfel numărul $\int_Y\left(\int_X f(\bullet,y)d\mu\right)d\nu$ care reprezintă volumul lui Γ_f, subgraficul lui f, deci integrala $\iint_{X\times Y} fd(\mu\otimes\nu)$.

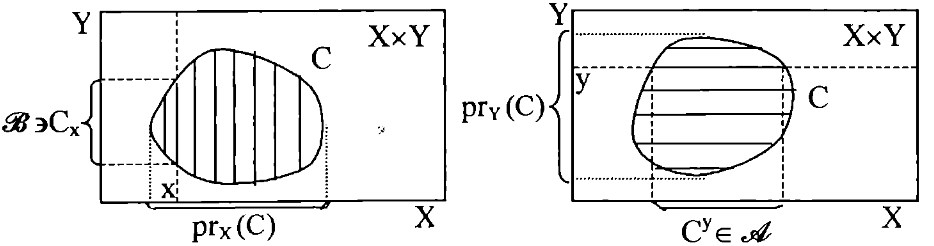
a)



b)



c) Fie $C \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ fixat. Atunci avem graficele :



4.4.12. Teoremă (Fubini)**.** *Fie $(X, \mathscr{A}, \mu)$, $(Y, \mathscr{B}, \nu)$ două spații cu măsură σ-finită și $f: X \times Y \to \overline{\mathbf{R}}$ o funcție $\mu \otimes \nu$ integrabilă. Atunci au loc afirmațiile :*

a) Functia parțială, $f_x : Y \to \overline{\mathbf{R}}$, este ν- integrabilă pentru μ- aproape toti x din X, i.e. $(\exists)\ A \subseteq X$ μ-neglijabilă, a.î. f_x este ν- integrabilă $(\forall) x \in X \setminus A$;

b) Functia, $X \setminus A \ni x \to \int_Y f_x d\nu$, este restricția unei funcții μ- integrabile definită pe X, deci are sens integrala $\int_X \left(\int_Y f_x d\nu \right) d\mu$; în plus avem relația

$$\iint_{X \times Y} f d(\mu \otimes \nu) = \int_X \left(\int_Y f_x d\nu \right) d\mu$$

c) Functia parțială, $f^y : X \to \overline{\mathbf{R}}$, este μ- integrabilă pentru ν -aproape toți y din Y, i.e. $(\exists)\ B \subseteq Y$ ν- neglijabilă, a.î. f^y este μ- integrabilă $(\forall) y \in Y \setminus B$;

d) Functia , $Y \setminus B \ni y \to \int_X f^y d\mu$, este restricția unei funcții ν- integrabile definită pe Y, deci are sens integrala $\int_Y \left(\int_X f^y d\mu \right) d\nu$, în plus are loc relația :

$$\iint_{X \times Y} f d(\mu \otimes \nu) = \int_Y \left(\int_X f^y d\mu \right) d\nu$$

Dem. Notăm $\mu \otimes \nu$ cu π. Funcția f fiind π- integrabilă, rezultă prin definiție că funcțiile f^+ și f^- sunt π- integrabile și avem relația :

$$\iint_{X \times Y} f d\pi = \iint_{X \times Y} f^+ d\pi - \iint_{X \times Y} f^- d\pi \qquad (1)$$

Funcția f^+ fiind π-integrabilă și nenegativă, din T.4.1.18,Cor.1 deducem : funcția $f_x^+ : Y \to \overline{\mathbf{R}}$ este ν-integrabilă pentru μ-aproape toți x din X; funcția , $X \ni x \to \int_Y f_x^+ d\nu$, definită μ-a.p.t. este μ-integrabilă și avem relația

$$\iint_{X \times Y} f^+ d\pi = \int_X \left(\int_Y f_x^+ d\nu \right) d\mu \qquad (2)$$

Analog rezultă : funcția $f_x^-: Y \to \overline{\mathbf{R}}$ este ν- integrabilă pentru μ- aproape toți x din X ; funcția , $X \ni x \to \int_Y f_x^- d\nu$,definită μ- a.p.t. este μ- integrabilă şi avem relația

$$\iint_{X\times Y} f^- d\pi = \int_X \left(\int_Y f_x^- d\nu\right) d\mu \qquad (3)$$

Din (1), (2), (3) deducem :

$$\iint_{X\times Y} f d\pi = \int_X \left(\int_Y f_x^+ d\nu - \int_Y f_x^- d\nu\right) d\mu \qquad (4)$$

Funcțiile f_x^+, f_x^-: $Y \to \overline{\mathbf{R}}$ fiind ν- integrabile pentru μ- aproape toți x din X, i.e. cu excepția unei mulțimi $A \subseteq X$ μ-neglijabile, rezultă că funcția $f_x = f_x^+ - f_x^-$ este ν- integrabilă pentru $(\forall) x \in X \setminus A$ şi avem relația :

$$\int_Y f_x d\nu = \int_Y f_x^+ d\mu - \int_Y f_x^- d\nu, \ (\forall) x \in X\setminus A \qquad (5)$$

Din(5)rezultă că funcția,$X\setminus A \ni x \to \int_Y f_x d\nu$,este restricția funcției μ-integrabile $X \ni x \to \int_Y f_x^+ d\nu - \int_Y f_x^- d\nu$, deci are sens integrala sa pe X şi avem relația :

$$\int_X \left(\int_Y f_x d\nu\right) d\mu = \int_X \left(\int_Y f_x^+ d\nu - \int_Y f_x^- d\nu\right) d\mu \qquad (6)$$

Din (4) şi (6) obținem relația:

$$\iint_{X\times Y} f d\pi = \int_X \left(\int_X f_x d\nu\right) d\mu .$$

Analog se arată şi afirmațiile c) – d) schimbând rolul lui x cu y.

Corolar 1. *In acelaşi cadru, pentru orice* $C \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ *avem relația :*

$$\iint_C f d(\mu\otimes\nu) = \int_{pr_X(C)} \left(\int_{C_x} f_x d\nu\right) d\mu = \int_{pr_Y(C)} \left(\int_{C^y} f^y d\mu\right) d\nu .$$

Dem. $\iint_C f d(\mu\otimes\nu) = \iint_{X\times Y} \varphi_C f d(\mu\otimes\nu) = \int_X \left(\int_Y \varphi_{C_x} f_x d\nu\right) d\mu =$

$$= \int_X \left(\int_{C_x} f_x d\nu\right) d\mu = \int_{pr_X(C)} \left(\int_{C_x} f_x d\nu\right) d\mu ,$$

deoarece avem:

$$\int_{C_x} f_x d\nu = \varphi_{pr_X(C)}(x) \cdot \int_{C_x} f_x d\nu , \ (\forall)\ x \in X \text{ etc.}$$

Observație. Relația

$$\iint_{X\times Y} fd(\mu\otimes\nu)=\int_X\left(\int_Y f_x d\nu\right)d\mu=\int_Y\left(\int_X f^y d\mu\right)d\nu,$$

numită *formula lui Fubini*, se scrie adeseori sub forma :

$$\iint_{X\times Y} fd(\mu\otimes\nu)=\int_X\left(\int_Y f(x,y)d\nu(y)\right)d\mu(x)=\int_Y\left(\int_X f(x,y)d\mu(x)\right)d\nu(y),$$

notațiile $\mu(x)$, $\nu(y)$ pun în evidență variabilele x, y în raport cu care integrăm funcția f(x, y),în raport cu măsura μ,resp.ν.

Formula lui Fubini în cazul când X×Y se înlocuieşte cu mulțimea $C\in\mathscr{A}\otimes\mathscr{B}$ se scrie astfel :

$$\iint_C \mathrm{f}d(\mu\otimes\nu)=\int_{\mathrm{pr}_X(C)}\left(\int_{C_x}\mathrm{f}(x,y)d\nu(y)\right)d\mu(x)=\int_{\mathrm{pr}_Y(C)}\left(\int_{C_y}\mathrm{f}(x,y)d\mu(x)\right)d\nu(y)$$

4.4.13.Definiție. Fie $(X,\mathscr{A},\mu)$, $(Y,\mathscr{B},\nu)$ două spații cu măsură, $(X\times Y,\ \mathscr{A}\otimes\mathscr{B},\mu\otimes\nu)$ spațiul cu măsură produs şi $f: X\times Y\to\overline{\mathbf{R}}$ o funcție cu proprietățile : 1^0) Funcția parțială $f_x: Y\to\overline{\mathbf{R}}$ este ν- integrabilă pentru μ- aproape toți x din X; 2^0) Funcția rezultată $\int_Y f_x d\nu$, definită μ- a.p.t. pe X, este restricția unei funcții integrabile definită pe X, deci are sens integrala $\int_X\left(\int_Y f_x d\nu\right)d\mu$. Vom spune atunci că f *admite (posedă) integrala iterată* $\int_X\left(\int_Y f_x d\nu\right)d\mu$. Analog se defineşte integrala iterată $\int_Y\left(\int_X f^y d\mu\right)d\nu$.

Integralele iterate definite mai sus se notează adesea astfel

$$\int_X\left(\int_Y f(x,y)d\nu(y)\right)d\mu(x),\ \text{resp.}\ \int_Y\left(\int_X f(x,y)d\mu(x)\right)d\nu(y),$$

iar în cazul când $\mu=\nu=\lambda$ (măsura Lebesque pe **R**), se folosesc notații şi mai simple ,sub forma:

$$\int_X\left(\int_Y f(x,y)dy\right)dx,\ \text{resp.}\ \int_Y\left(\int_X f(x,y)dx\right)dy.$$

Observație. Teoremele Tonelli şi Fubini dau condiții suficiente ca o funcție $f: X\times Y\to\overline{\mathbf{R}}$ să admită ambele integrale iterate şi acestea să fie egale intre ele. In general, aceste condiții sunt *suficiente* şi *nu necesare*, i.e. există funcții f care admit ambele integrale iterate, acestea sunt egale intre ele şi totuşi f nu este integrabilă în raport cu măsura produs.

CAPITOLUL 5.

SPAȚII DE FUNCȚII INTEGRABILE

5.1. Spațiul $L^p = L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$, $1 \leq p < \infty$

Spațiul lui Lebesgue L^p este unul dintre cele mai importante spații din Analiză. Pentru cazuri particulare ale lui p este normat complet, respectiv Hilbert, reflexiv, uniform convex, cu bază Schauder etc.

Spațiul L^p $(0 < p < 1)$ este sursa a numeroase contraexemple din Analiză. L^p este suportul unor teorii matematice şi are importante aplicații în cele mai diverse ramuri ale matematicii actuale.

5.1.1. Definiție. Fie $(X,\mathcal{A},\mu)$ un spațiu cu măsură şi $0<p<\infty$ un număr. Prin $\mathcal{L}^p(X,\mathcal{A},\mu)$, sau simplu $\mathcal{L}^p$, vom nota *mulțimea funcțiilor* $f: X \to \mathbf{R}$. $\mathcal{A}$ *-măsurabile, p–integrabile, i.e.* $\int_X |f|^p d\mu < \infty$.

Prin $L^p(X,\mathcal{A},\mu)$ sau simplu L^p, vom nota *mulțimea funcțiilor* $\mathcal{A}$ *-măsurabile*, p-*integrabile*, $f:X\to \mathbf{R}$, *în care am identificat funcțiile egale între ele* μ-(a.p.t.). Cum funcțiile integrabile sunt finite (a.p.t.), putem presupu -ne că elementele lui L^p sunt funcții cu valori finite. Dacă $X\in\mathcal{L}_{\mathbf{R}}$, atunci $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{L}_X,\lambda)$, resp. $L^p(X, \mathcal{L}_X,\lambda)$, se notează adesea cu $\mathcal{L}^p(X)$, resp. $L^p(X)$.

a) Fie $f:X\to \overline{\mathbf{R}}$ o funcție măsurabilă. Atunci $f\in\mathcal{L}^p \Leftrightarrow |f| \in \mathcal{L}^p \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow |f|^p \in \mathcal{L}^1 \Leftrightarrow \int_X |f|^p d\mu<\infty$

b) Fie $f: X \to \mathbf{R}$ o funcție măsurabila şi $r>0$. Atunci $|f|^r \in \mathcal{L}^p \Leftrightarrow f \in \mathcal{L}^{pr}$.

5.1.2. Propoziție. *Fie* $(X,\mathcal{A},\mu)$ *un spațiu cu măsură,* $0 < p < \infty$ *un număr şi* $L^p = L^p(X,\mathcal{A},\mu)$. *Atunci operațiile vectoriale naturale* $f+g$, αf, *definesc pe* L^p *o structură de* $\mathbf{R}$ *– spațiu vectorial.*

Dem. Fie $f, g \in L^p$ fixați. Atunci $f + g$ este măsurabilă (T.3.2.15) şi, evident, avem inegalitatea:

$$|f(x)+g(x)|^p \leq 2^p(|f(x)|^p + |g(x)|^p), (\forall)\ x \in X.$$

deci

$$\int_X |f+g|^p d\mu \leq 2^p \left(\int_X |f|^p d\mu + \int_X |g|^p d\mu\right) < \infty$$

şi deci f+g este p-integrabilă. Rezultă $f+g\in L^p$. Analog arătăm că $\alpha f\in L^p$ etc.

Observație. În primul rând vom lua în considerație spațiul L^p, cu $1 \le p < \infty$, pe care vom defini o normă și vom studia apoi proprietățile sale. Spațiul L^∞ îl vom studia separat.

Pe spațiul vectorial L^p, cu $0 < p < 1$, nu se poate defini o normă convenabilă ca în cazul $1 \le p \le \infty$, ci doar o metrică d cu proprietatea că topologia τ_d este liniară. Spațiul L^p, cu $0<p<1$, astfel structurat este important prin faptul că el furnizează o serie de contraexemple interesante în Analiză.

5.1.3. Propoziție *(Inegalitatea lui Holder- var. I). Fie* $(X, \mathcal{A},\mu)$ *un spațiu cu măsură și* $p,q \in (1,\infty)$ *conjugate armonic. Atunci* $(\forall)\ f \in L^p(X,\mathcal{A},\mu)$ *și* $g \in L^q(X,\mathcal{A},\mu)$, *rezultă* $fg \in L^1(X,\mathcal{A},\mu)$ *și avem inegalitatea:*

$$\int_X |fg|\,d\mu \le \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{1/p} \left(\int_X |g|^q\, d\mu\right)^{1/q} \qquad (1)$$

Dem. Plecăm de la inegalitatea cunoscută

$$|ab| \le \frac{|a|^p}{p} + \frac{|b|^q}{q},\ (\forall)\ a,b \in \mathbf{R} \qquad (2)$$

Dacă $N_p(f) := \left(\int_X |f|^p\, d\mu\right)^{1/p} = 0$ sau $N_q(g) := \left(\int_X |g|^q\, d\mu\right)^{1/q} = 0$,

atunci (T.4.1.10,13°) $f = 0$ (a.p.t.) sau $g = 0$ (a.p.t.), deci $fg = 0$ (a.p.t.) și deci (1) este evidentă .

Presupunem acum $N_p(f) > 0$ și $N_q(g) > 0$. Dacă înlocuim în (2) $a = \frac{|f|}{N_p(f)}$ și $b = \frac{|g|}{N_q(g)}$ obținem : $\frac{|fg|}{N_p(f)N_q(g)} \le \frac{|f|^p}{pN_p^p(f)} + \frac{|g|^q}{qN_q^q(g)}$,

de unde prin integrare rezultă:

$$\frac{1}{N_p(f)N_q(g)} \int_X |fg|\,d\mu \le \frac{1}{pN_p^p(f)} \int_X |f|^p d\mu + \frac{1}{qN_q^q(g)} \int_X |g|^q\, d\mu = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

$$\Leftrightarrow \int_X |fg|\,d\mu \le N_p(f)N_q(g).$$

Din (1) rezultă că $\int_X |fg|\,d\mu < \infty$, i.e. $fg \in L^1(X, \mathcal{A},\mu)$.

Corolar 1. *Fie* $(X,\mathcal{A},\mu)$ *un spațiu cu măsură și* $f,g \in L^2(X,\mathcal{A},\mu)$. *Atunci* $fg \in L^1(X,\mathcal{A},\mu)$ *și avem inegalitatea :*

$$\int_X |fg|\,d\mu \le \left(\int_X |f|^2 d\mu\right)^{1/2} \left(\int_X |g|^2 d\mu\right)^{1/2}$$

5.1.4. Propoziție (Ineg. Minkowski). *Fie* $(X,\mathcal{A},\mu)$ *un spațiu cu măsură,* $1 \le p < \infty$ *și* $f,g \in L^p(X,\mathcal{A},\mu)$. *Atunci avem inegalitatea:*

$$\left(\int_X |f+g|^p d\mu\right)^{1/p} \le \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{1/p} + \left(\int_X |g|^p d\mu\right)^{1/p}$$

Dem. Dacă p=1 sau $\int_X |f+g|^p d\mu = 0$, inegalitatea este evidentă.

Presupunem deci p>1 şi $\int_X |f+g|^p d\mu > 0$

Evident avem : $|f+g|^p \le |f|\,|f+g|^{p-1} + |g|\,|f+g|^{p-1}$

Notăm cu q conjugatul armonic al lui p. Cum $f+g \in L^p$ (P.5.1.2.), avem $|f+g|^p \in L^1$, deci $|f+g|^{(p-1)q} = |f+g|^p \in L^1$ şi deci $|f+g|^{p-1} \in L^q$.

Aplicând inegalitatea Hölder pentru funcţiile $|f|$ (resp $|g|$) şi $|f+g|^{p-1}$, obţinem :

$$\int_X |f+g|^p d\mu \le \int_X |f|\,|f+g|^{p-1} d\mu + \int_X |g|\,|f+g|^{p-1} d\mu \le$$

$$\le \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{1/p}\left(\int_X |f+g|^{(p-1)q} d\mu\right)^{1/q} + \left(\int_X |g|^p d\mu\right)^{1/p}\left(\int_X |f+g|^{(p-1)q} d\mu\right)^{1/q}$$

Cum $(p-1)\,q = p$, prin simplificare cu $\left(\int_X |f+g|^p d\mu\right)^{1/q}$, rezultă :

$$\left(\int_X |f+g|^p d\mu\right)^{1-1/q} \le \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{1/p} + \left(\int_X |g|^p d\mu\right)^{1/p}$$

Înlocuim mai departe pe 1-1/q prin 1/p.

5.1.5. Teoremă . *Fie* $(X,\mathscr{A},\mu)$ *un spaţiu cu măsură şi* $L^p = L^p(X,\mathscr{A},\mu)$, $1 \le p < \infty$. *Atunci relaţia,* $\|f\|_p := \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{1/p}$*,defineşte pe* L^p *o normă.*

Dem. $\|f\|_p = 0 \Leftrightarrow \int_X |f|^p d\mu = 0 \Leftrightarrow f = 0$ (a.p.t.). Egalitatea $\|\alpha f\|_p = |\alpha|\,\|f\|_p$, $(\forall)\ \alpha \in \mathbf{R}$ şi $f \in L^p$,este evidentă iar inegalitatea triunghiului rezultă din P. 5.1.4.

Observaţie. Relaţia $N_p(f) = \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{1/p}$ defineşte pe $\mathcal{L}^p(X,\mathscr{A},\mu)$ o seminormă .

5.2. Spaţiul $L^{\infty}(X,\mathscr{A},\mu)$

5.2.1. Definiţie. Fie $(X,\mathscr{A},\mu)$ un spaţiu cu măsură şi $f:X\to\overline{\mathbf{R}}$ o funcţie măsurabilă. Numărul (finit sau $+\infty$), $\inf\limits_{\mu(A)=0}(\sup\{|f(x)|; x \in A^c\})$ se numeşte *adevăratul maxim* al lui $|f|$ şi se notează cu ad.max.$|f|$, vrai max.$|f|$, ess.sup$|f|$,$\|f\|_\infty$. Funcţia f se numeşte *esenţial mărginită*,dacă ad.max$|f|<\infty$.

Exemple. a) Fie f(x) = 1, dacă $x\in[0,1] \setminus \{1,1/2,1/3,...\}$ şi f(1/n) = n, $(\forall) n\in\mathbf{N}$. Atunci, ad.max.$|f|$=1 şi sup. $\{|f(x)|; 0 \le x \le 1\} = \infty$.

b) Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ funcția lui Dirichlet. Atunci, ad.max. $|f|=0$ și

$$\sup\{|f(x)|;\ x\in\mathbf{R}\}=1$$

c) Fie $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ o funcție continuă. Atunci

$$\text{ad.max.}\,|f|=\max\{|f(x)|;a\le x\le b\}.$$

d) Fie $f:X\to\mathbf{R}$ o funcție măsurabilă finită (a.p.t.) și $g:X\to\mathbf{R}$ definită astfel: $g(x)=f(x)$, dacă $|f(x)|<\infty$ și $g(x)=0$, dacă $|f(x)|=\infty$. Dacă măsura μ este completă, atunci g este măsurabilă și avem ad.max. $|f|$ = ad.max. $|g|$.

5.2.2. Definiție. Fie $(X,\mathscr{A},\mu)$ un spațiu cu măsură. Mulțimea tuturor funcțiilor măsurabile, esențial mărginite, $f:X\to\overline{\mathbf{R}}$, se notează cu $\mathscr{L}^\infty(X,\mathscr{A},\mu)$, respectiv cu $L^\infty(X,\mathscr{A},\mu)$, dacă am identificat funcțiile egale între ele μ-a.p.t. Dacă $X\in\mathscr{L}_R$, spațiul $\mathscr{L}^p(X,\mathscr{L}_X,\lambda)$ se notează cu $\mathscr{L}^p(X)$ iar spațiul $L^\infty(X,\mathscr{L}_X,\lambda)$ se notează cu $L^\infty(X)$.

a) $f\in L^\infty \Leftrightarrow f$ măsurabilă și ad.max. $|f|<\infty$.

b) $f\in L^\infty\Leftrightarrow |f|\in L^\infty \Leftrightarrow (\exists)A\in\mathscr{A}$, μ-nulă, a.î. $\sup\{|f(x)|;x\in A^c\}<\infty$.

5.2.3. Propoziție. *Fie* $(X,\mathscr{A},\mu)$ *un spațiu cu măsură și* $f:X\to\overline{\mathbf{R}}$ *o funcție măsurabilă. Atunci au loc afirmațiile următoare:*

1^0) ad.max. $|f|\le \sup\limits_{x\in X}|f(x)|$; 2^0) $|f(x)|\le$ ad.max. $|f|$, a.p.t. pe X;

3^0) ad.max $|f|=\inf\{\alpha>0;|f(x)|\le\alpha$, a.p.t. pe X$\}$ =

$$=\inf\{\alpha>0;\mu(\{x\in X;|f(x)|>\alpha\})=0\};$$

4^0) ad.max. $|f|=0\Leftrightarrow f=0$ (a.p.t.);

5^0) ad.max. $|f|<\infty\Rightarrow f$ finită a.p.t. Reciproca nu este în mod necesar adevărată;

6^0) ad.max. $|f|\le k\Leftrightarrow(\exists)A\in\mathscr{A}$, cu $\mu(A)=0$, a.î. $\sup\{|f(x)|;x\in A^c\}\le k$;

7^0) dacă ad.max. $|f|>0$ și $0\le\alpha<$ ad.max. $|f|$, rezultă că

$$\mu(\{x\in X;|f(x)|\ge\alpha\})>0.$$

Dem. 1^0) Evident. Să notăm în continuare ad.max. $|f|$ cu M.

2^0) Fie $E:=\{\alpha>0;|f(x)|\le\alpha$, a.p.t.$\}$. Fixăm $\alpha\in E$; evident $(\exists)$ $A\in\mathscr{A}$, cu $\mu(A)=0$, a î $|f(x)|\le\alpha$, $(\forall)x\in A^c$, deci $\sup\{|f(x)|;x\in A^c\}\le\alpha$, de unde rezultă că $M\le\alpha$ și deci $M\le\inf.E$.

Fie acum $\alpha>M$ fixat. Atunci $(\exists)$ $A\in\mathscr{A}$, cu $\mu(A)=0$ și $\sup\{|f(x)|;x\in A^c\}\le\alpha$, deci $|f(x)|\le\alpha$ (a.p.t.) și deci $\alpha\in E$. De aici rezultă $(M,\infty)\subseteq E$, deci $\inf.E\le M$. Prin urmare $M=\inf.E$.

3^0) Cf. 2^0) $(\exists)$ $\alpha_n\downarrow M$, cu $|f(x)|\le\alpha_n$ (a.p.t.), $(\forall)$ $n\ge1$, deci $(\exists)$ $(A_n)_{n\ge1}\subseteq\mathscr{A}$, un șir de mulțimi neglijabile, cu $|f|\le\alpha_n$, pe A_n^c, $(\forall)n\ge1$.

Atunci mulțimea ,$A := \bigcup_{n \geq 1} A_n \in \mathscr{A}$,este neglijabilă şi avem următoarea relație:

$$|f(x)| \leq \inf_{n>1} \alpha_n = M, (\forall)\ x \in \bigcap_{n \geq 1} A_n^c = A^c$$

Prin urmare $|f(x)| \leq M$, a.p.t.

4^0) rezultă din 2^0) şi 3^0) iar 5^0) rezultă din 3^0).

6^0) ($\Rightarrow$) Fie $M \leq k$. Din 3^0) rezultă: ($\exists$) $A \in \mathscr{A}$, cu $\mu(A)=0$ şi $|f(x)| \leq M$, $(\forall) x \in A^c$, deci $\sup\{|f(x)|; x \in A^c\} \leq k$. Implicația reciprocă, ($\Leftarrow$),este evidentă.

7^0) Presupunem că ($\exists$) $0 \leq \alpha_0 < M$, cu $\mu(\{x \in X; |f(x)| \geq \alpha_0\}) = 0$. Atunci $|f| \leq \alpha_0$(a.p.t.) , deci, conform 2^0), ad.max.$|f| \leq \alpha_0$, absurd. Rămâne că ($\forall$) $0 \leq \alpha < M$, rezultă $\mu(\{x \in X; |f(x)| > \alpha\}) > 0$.

5.2.4. Propoziție. *Fie* $(X, \mathscr{A}, \mu)$ *un spațiu cu măsură şi* $f,g: X \to \overline{\mathbf{R}}$ *două funcții măsurabile, egale a.p.t. Atunci avem:*

1^0) ad.max. $|f|$ = *ad.max.* $|g|$.

2^0) f *esențial mărginită* $\Leftrightarrow$ g *esențial mărginită.*

Dem. 1^0) Fie M := ad.max. $|f|$. Din P.5.2.3. (3^0) rezultă că $|f(x)| \leq M$ (a.p.t.) şi cum f=g(a.p.t.) , conchidem că $|g(x)| \leq M$(a.p.t.) , deci cf. (P.5.2.3,6^0)), ad.max. $|g| \leq M$.

Analog se arată că ad. max. $|f| \leq$ ad.max. $|g|$, deci egalitate.

2^0) rezultă din 1^0).

Corolar 1. *Fie* $(X, \mathscr{A}, \mu)$ *un spațiu cu măsură completă şi* $f,g: X \to \overline{\mathbf{R}}$ *doua functii egale a.p.t. Dacă* f *este măsurabilă, atunci* g *este măsurabilă şi avem* ad.max. $|f|$ = ad.max. $|g|$.

Observaţie. Vom nota $||f||_\infty$:= ad.max. $|f|$,($\forall$) $f \in L^\infty$ şi vom arăta că relația $f \to ||f||_\infty$ definește o normă pe L^p; relația,$\mathscr{L}^\infty \ni f \to$ ad.max. $|f|$, este o seminormă şi nu o normă pe $\mathscr{L}^\infty$, de aceea o vom nota cu $N_\infty(f)$,i .e.

$$N_\infty(f) := \text{ad.max.} |f|, (\forall)\ f \in \mathscr{L}^\infty.$$

5.2.5. Propoziție. *Fie* $(X, \mathscr{A}, \mu)$ *un spațiu cu măsură şi* $L^\infty = L^\infty(X, \mathscr{A}, \mu)$. *Atunci operațiile vectoriale naturale* f + g, αf *şi relația* $||f||_\infty$: = ad.max. $|f|$, *definesc pe* L^∞ *o structură de spațiu normat.*

Dem. Fie $f,g \in L^\infty$ fixați. Evident, f+g este măsurabilă şi din definiția lui L^∞ avem $||f||_\infty < \infty$ şi $||g||_\infty < \infty$. Cf. P.5.2.3., ($\exists$) $A_0 \in \mathscr{A}$, a.î. $\mu(A_0) = 0$ și

$$|f(x)| \leq \text{ad.max.} |f|,\ |g(x)| \leq \text{ad.max.} |g|, (\forall)\ x \in A_0^c,$$

deci

$$|f(x)+g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq ||f||_\infty + ||g||_\infty, (\forall)\ x \in A_0^c$$

şi deci

$$\sup_{x\in A^C} |f(x)+g(x)| \le \|f\|_\infty + \|g\|_\infty ,$$

de unde rezultă

$$\|f+g\|_\infty = \inf_{\mu(A)=0} \left(\sup_{x\in A^C} |f(x)+g(x)| \right) \le \sup_{x\in A^C} |f(x)+g(x)| \le \|f\|_\infty + \|g\|_\infty < \infty.$$

De aici deducem că $f+g \in L^\infty$ şi că aplicaţia $\|\ \|_\infty$ este subaditivă.

Analog se arată că $\|\alpha f\|_\infty = |\alpha|\ \|f\|_\infty$, $(\forall)\ \alpha \in \mathbf{R}$, $f\in L^\infty$.

Aşadar, L^∞ este un **R**-spatiu vectorial şi $\|\ \|_\infty$ este o seminormă pe L^∞.

In fine, dacă $f \in L^\infty$ şi $\|f\|_\infty = 0$, deci ad.max.$|f| = 0$, atunci cf. (P.5.2.3. ,4°)) $f = 0$ (a.p.t.), deci f este elementul nul din L^∞.

Prin urmare, L^∞ este spaţiu normat.

Corolar 1. *Relaţia* $f\to$ ad.max.$|f|$, *defineşte pe* $\mathcal{L}^\infty(X,\mathcal{A},\mu)$ *o seminormă, pe care o vom nota cu* N_∞.

5.3. Proprietăţi generale ale spaţiilor $L^p(1 \le p \le \infty)$

Fie $(X,\mathcal{A},\mu)$ un spaţiu cu măsură. Am definit anterior spaţiile $L^p := L^p(X,\mathcal{A},\mu)$ $(1\le p\le \infty)$ mai întâi pentru $1 \le p < \infty$, apoi pentru $p = \infty$. Am arătat că L^p este un spaţiu normat, cu norma $\|\ \|_p$ definită astfel:

$$\|f\|_p := \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{1/p}, \text{dacă } 1\le p<\infty \ ;\ \|f\|_\infty = \text{ad.max}|f|\ ,(\forall)\ f \in L^p$$

5.3.1. Propoziţie (Ineg. Holder - Var.II). *Fie* $(X,\mathcal{A},\mu)$ *un spaţiu cu măsură şi* $p,q \in [1,\infty]$ *două numere armonic conjugate. Atunci* $(\forall)$ $f \in L^p(X,\mathcal{A},\mu)$ şi $g \in L^q(X,\mathcal{A},\mu)$, *rezultă că* $fg \in L^1(X,\mathcal{A},\mu)$ *şi avem inegalitatea:* $\|fg\|_1 \le \|f\|_p \|g\|_q$.

Dem. 1^0) dacă $p,q \in (1,\infty)$ aplicăsm P.5.1.3.

2^0) dacă $p = 1$ şi $q = \infty$, avem $|g(x)| \le$ ad.max.$|g| = \|g\|_\infty$ (a.p.t.), deci

$$|fg(x)| \le |f(x)|\ \|g\|_\infty \text{ (a.p.t.)}$$

si deci

$$\|fg\|_1 = \int_X |fg|\,d\mu \le \int_X |f|\ \|g\|_\infty d\mu = \|f\|_1\ \|g\|_\infty$$

Cum $f \in L^1$ şi $g \in L^\infty$, avem $\|f\|_1 < \infty$ şi $\|g\|_\infty < \infty$, deci $\|fg\|_1 < \infty$ şi $fg\in L^1$.

Măsurabilitatea funcţiei fg rezultă din T 3.2.15.

5.3.2. Teoremă (Riesz-Fischer). *Fie* $(X,\mathcal{A},\mu)$ *un spaţiu cu măsură şi* $1\le p<\infty$. *Atunci* $L^p := L^p(X,\mathcal{A},\mu)$ *este un spaţiu normat complet.*

Dem. Fie $\sum_{n\geq 1} f_n$ o serie absolut convergentă cu elemente din L^p,

i.e. $\sum_{n\geq 1} \| f_n \|_p \leq M < \infty$. Să notăm $g_n := \sum_{k=1}^{n} | f_k |$, $(n \geq 1)$. Evident avem $(g_n)_{n\geq 1} \subseteq L^p$ şi $(\forall)$ $x\in X$ şirul numeric $(g_n(x))_{n\geq 1}$ este monoton crescător, deci $(\exists)$ $g:X\to\overline{\mathbf{R}}_+$, măsurabilă cu $g_n \xrightarrow{s} g$ şi deci, $\sum_{n\geq 1} | f_n(x) | = g(x)$, $(\forall)$ $x\in X$.

Evident avem:

$$\|g_n\|_p \leq \sum_{k=1}^{n} \|f_k\|_p \leq \sum_{k=1}^{n} \|f_k\|_p \leq M \text{ , } (\forall)\ n \geq 1,$$

deci, $\int_X g_n^p \, d\mu \leq M^p$, $(\forall)$ $n \geq 1$. Deoarece $g_n^p \xrightarrow{s} g^p$, din T.4.2.1. rezultă:

$$\int_X g^p d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int_X g_n^p d\mu \leq M^p,$$

deci (P. 4.1.18.)g^p este finită (a.p.t.) şi deci g este finită (a.p.t.).De aici rezultă că a.p.t. pe X seria $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ este absolut convergentă, deci este convergentă. Fie $f:X\to\mathbf{R}$ definită astfel:

$$f(x)=\sum_{n\geq 1} f_n(x), \text{ dacă } g(x)<\infty \text{ şi } f(x)=0, \text{ dacă } g(x)=\infty.$$

Atunci, a.p.t. pe X,avem $f(x)=\sum_{n\geq 1} f_n(x)$. De aici şi din definiţia lui f rezultă (T 3.2.15 .) f măsurabilă. Cum avem:

$$\sum_{k=1}^{n} | f_k | \leq \sum_{k=1}^{n} | f_k | \leq g, \ (\forall)\ n \geq 1 \Rightarrow |f| \leq g \text{ (a.p.t.)},$$

deci

$$\int_X |f|^p d\mu \leq \int_X g^p d\mu \leq M^p < \infty \Rightarrow f \in L^p.$$

Să arătăm acum că $\|f-\sum_{k=1}^{n} f_k\|_p\to 0$ $(n\to\infty)$. Cum

$$| f - \sum_{k=1}^{n} f_k | \xrightarrow{a.p.t.} 0, \text{ rezultă } | f-\sum_{k=1}^{p} f_k |^p \xrightarrow{a.p.t.} 0 (n\to\infty).$$

De asemenea, a.p.t. pe X, avem:

$$|f - \sum_{k=1}^{n} f_k|^p \le (|f| + \sum_{k=1}^{n} |f_k|)^p \le (g+g)^p = 2^p g^p, (\forall)\, n \ge 1$$

Aşadar, $(|f - \sum_{k=1}^{n} f_k|)_{n\ge 1}$ este un şir de funcţii măsurabile, egal majorat de funcţia integrabilă $2^p g^p$, deci (T 4.2.10.) avem :

$$\int_X |f - \sum_{k=1}^{n} f_k|^p \, d\mu \to 0 \; (n\to\infty) \text{ şi deci } \|f - \sum_{k=1}^{n} f_k\|_p \to 0 \; (n\to\infty).$$

Prin urmare,seria $\sum_{n\ge 1} f_n$ este convergentă în norma $\| \, \|_p$ şi are suma f, deci (T.1.2.55.) L^p este complet.

Corolar 1. spaţiul $L^2 = L^2 (X, \mathscr{A}, \mu)$ *este spaţiu Hilbert.*

Dem. relaţia $<f,g> : = \int_X |f|^2 d\mu$, $(f, g) \in L^2 \times L^2$, evident,defineşte un produs scalar pe L^2 şi avem:

$$\sqrt{< f, f >} = \left(\int_X |f|^2 d\mu \right)^{1/2} = \|f\|_{(2)}, (\forall)\, f \in L^2$$

Aşadar,norma (standard) a lui L^2 provine dintr-un produs scalar.

Cum $(L^2, \| \, \|_2)$ este un spaţiu Banach (T.5.1.2.), conchidem că el este un spaţiu Hilbert.

Corolar 2. $L^p [0,1]$ *este Hilbert* $\Leftrightarrow$ p=2.

Dem. $(\Rightarrow)$ Dacă $L^p[0,1]$ este Hilbert, norma sa satisface relaţia paralelogramului:

$$\|f + g\|^2_p + \|f - g\|^2_p = 2\|f\|^2_p + 2\|g\|^2_p, (\forall)\, f,g \in L^p [0,1] \qquad (1)$$

Considerăm funcţiile particulare :

$$f(x) = \begin{cases} 1, x \in [0,1/2] \\ 0, x \in (1/2,1] \end{cases} ; \quad g(x) = \begin{cases} 0, x \in [0,1/2] \\ 1, x \in (1/2,1] \end{cases}$$

Atunci, $|f - g| = |f + g| = 1$, deci $\|f - g\|_p = \|f + g\|_p = 1$, $\|f\|_p = \|g\|_p = (2^{-1})^{1/p}$ şi deci, cf. (1) avem:

$$1 + 1 = 2\,(2^{-1})^{2/p} + 2(2^{-1})^{2/p} \Leftrightarrow 2 = 4\, 2^{-2/p} \Leftrightarrow p = 2$$

Implicaţia $(\Leftarrow)$ rezultă din Corolar 1.

5.3.3. Propoziţie. *Fie* $(X, \mathscr{A}, \mu)$ *un spaţiu cu măsură şi* $\mathscr{L}^\infty = \mathscr{L}^\infty (X, \mathscr{A}, \mu)$. *Atunci* $(\forall)$ $f, f_n \in \mathscr{L}^\infty$, $n \ge 1$, *avem :*

$$N_\infty (f - f_n) \longrightarrow 0 \Leftrightarrow f_n \xrightarrow{u} f \text{(a.p.t.)}.$$

Dem.($\Rightarrow$)Fie $k \geq 1$ fixat . Deoarece $N_\infty(f - f_n) < 1/k$, $(\forall)$ $k \geq 1$, $(\exists)$ $n_k \geq 1$, a.î. $N_\infty(f - f_n) < 1/k$, $(\forall)$ $n \geq n_k$, deci $(\forall) n \geq n_k$, $(\exists) A_n \in \mathscr{A}$ de măsură nulă, cu proprietatea $\sup\limits_{x \notin A_n} |f(x) - f_n(x)| < 1/k$. Evident mulțimea, $B_k := \bigcup\limits_{n \geq n_k} A_n \in \mathscr{A}$, are măsura nulă și avem :

$$\sup_{x \notin B_k} |f(x) - f_n(x)| < 1/k, (\forall)\ n \geq n_k$$

Mulțimea,$A := \bigcup\limits_{k \geq 1} B_k \in \mathscr{A}$,are măsura nulă;să arătăm că șirul $(f_n)_{n \geq 1}$ converge uniform pe A^c la f.Fie în acest scop $\varepsilon > 0$ fixat și $k_0 \geq 1$,cu$1/k_0 < \varepsilon$.Atunci,

$$\sup_{x \notin A} |f(x) - f_n(x)| \leq \sup_{x \notin B_{k_0}} |f(x) - f_n(x)| < (1/k_0) < \varepsilon\ (\forall)\ n \geq n_{k_0}.$$

Așadar,$(f_n)_{n \geq 1}$ converge uniform pe A^c la f, deci $f_n \xrightarrow{u} f$ (a.p.t.).

($\Rightarrow$)Presupunem că $f_n \xrightarrow{u} f$ (a.p.t.), deci $(\exists)$ $A \in \mathscr{A}$ de măsură nulă,a.î.$(f_n)_{n \geq 1}$converge uniform pe A^c la f. Atunci $(\forall)\ \varepsilon > 0$,$(\exists) n_\varepsilon \geq 1$, a.î.

$$N_\infty(f - f_n) \leq \sup_{x \notin A} |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon,\ (\forall)\ n \geq n_\varepsilon . \frac{1}{k_0}$$

Prin urmare, $N_\infty(f - f_n) \to 0$ $(n \to \infty)$.

Corolar 1. *Fie* $(X, \mathscr{A}, \mu)$ *un spațiu cu măsură,* $L^\infty := L^\infty(X, \mathscr{A}, \mu)$ *și* $f, f_n \in L^\infty (n \geq 1)$. *Atunci:*

$$\|f - f_n\|_\infty \to 0 \Leftrightarrow f_n \xrightarrow{u} f \text{ (a.p.t.)}$$

Corolar 2. *Fie* $(X, \mathscr{A}, \mu)$ *un spațiu cu măsură și* $(f_n)_{n \geq 1} \subseteq \mathscr{L}^\infty :=$ $= \mathscr{L}^\infty(X, \mathscr{A}, \mu)$ *un șir uniform convergent (a.p.t.). Atunci*

$$(\exists)\ f \in \mathscr{L}^\infty, \text{ a.î. } N_\infty(f - f_n) \to 0 (n \to 0).$$

Dem. Conform ipotezei,$(\exists)$ $A_0 \in \mathscr{A}$o mulțime μ-nulă și $g : X \to \overline{\mathbf{R}}$,a.î. $f_n \xrightarrow{u} g$ pe A_o^c .Cum fiecare funcție $f_n (n \geq 1)$ este esențial mărginită, $(\exists)$ $A_n \in \mathscr{A}$ o mulțime μ-nulă, a.î. f_n este mărginită pe $X \setminus A_n$. Atunci $A: = \bigcup\limits_{n \geq 0} A_n \in \mathscr{A}$, $\mu(A) = 0$, fiecare funcție $f_n (n \geq 1)$ este mărginită pe A^c și $f_n \xrightarrow{u} g$ pe A_o^c Definim mai departe $f(x) = g(x)$, dacă $x \in A^c$ și $f(x) = 0$, dacă $x \in A$. Din T.3.2.16 . rezultă f măsurabilă pe A^c, deci (P.3.2.9) f măsurabilă şi, evident, f mărginită pe A^c, încât avem $f \in \mathcal{L}^\infty$. Deoarece $f_n \xrightarrow{u} f$ (a.p.t.),conchidem că $N_\infty(f - f_n) \to 0$ $(n \to \infty)$.

5.3.4. Teoremă. *Fie* $(X, \mathscr{A}, \mu)$ *un spaţiu cu măsură. Atunci* $L^\infty = L^\infty(X, \mathscr{A}, \mu)$ *este un spaţiu normat complet.*

Dem. Fie $(f_n)_{n\geq 1}$ un şir Cauchy cu elemente din L^∞, deci $\|f_n - f_m\|_\infty \to 0$ $(n,m \to \infty)$ şi deci (P5.3.3.) $f_n - f_m \xrightarrow{u} 0$ (a.p.t.) $(n,m \to \infty)$. De aici rezultă că $(f_n)_{n\geq 1}$ este uniform Cauchy pe complementara unei multimi μ-nule, deci este uniform convergent (a.p.t.). Din P 5.3.3.,Cor. 2, deducem că $(\exists) f \in L^\infty$, a.î. $\|f - f_n\|_\infty \to 0$, prin urmare L^∞ este complet.

5.3.5. Propoziţie. *Fie* $f, f_n \in L^p = L^p(X, \mathscr{A}, \mu)$, $n \geq 1$, $(1 \leq p < +\infty)$, cu $\| f - f_n \|_p \to 0$ $(n \to \infty)$. *Atunci* $f_n \xrightarrow{\mu} f$, *i.e. convergenţa în medie de ordin p implică convergenţa în măsură.*

Dem. Fie $\varepsilon > 0$ fixat. Atunci,

$$\{x \in X; |f(x) - f_n(x)| \geq \varepsilon\} = \{x \in X; |f(x) - f_n(x)|^p \geq \varepsilon^p\},$$

deci (P4.1.18)

$$\mu(\{x \in X; |f(x) - f_n(x)| \geq \varepsilon\}) \leq \varepsilon^{-p} \int_X |f(x) - f_n(x)|^p d\mu =$$

$$= \varepsilon^{-p} \| f - f_n \|_p \to 0 \ (p \to \infty)$$

şi deci

$$\mu(\{ x \in X; |f(x) - f_n(x)| \geq \varepsilon \}) \to 0 \ (n \to \infty).$$

Prin urmare, $f_n \xrightarrow{\mu} f$.

Corolar 1. *In acelaşi cadru: dacă* $\| f - f_n \|_p \to 0$ $(n \to 0)$, *atunci* $(f_n)_{n\geq 1}$ *posedă un subşir care converge* a.p.t. *la* f.

Dem. Aplicăm P 5.3.5. şi T 3.3.12, Cor 3.

5.3.6. Propoziţie. *Fie* $(X, \mathscr{A}, \mu)$ *un spaţiu cu măsură completă finită şi* $L^p = L^p(X, \mathscr{A}, \mu)$, $p \in [1, \infty]$. *Atunci* $(\forall)$ $f \in L^\infty$, *avem* $\| f \|_{(p)} \to \|f\|_\infty$, $(p \to \infty)$.

Dem. Fie $f \in L^\infty$ fixat, $M := \|f\|_\infty$ şi $A_\varepsilon = \{x \in X; |f(x)| \geq M - \varepsilon\} (\varepsilon > 0)$. Din P5.2.3. rezultă $\mu(A_\varepsilon) > 0$, $(\forall) \varepsilon > 0$. Atunci:

$$\| f \|_{(p)} = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p} \geq \left(\int_{A_\varepsilon} |f|^p d\mu \right)^{1/p} \geq (M - \varepsilon)(\mu(A_\varepsilon))^{1/p},$$

deci $$\underline{\lim}_{p\to\infty} \| f \|_{(p)} \geq (M - \varepsilon) \underline{\lim}_{p\to\infty} (\mu(A_\varepsilon))^{1/p} = M - \varepsilon$$

şi deci $$\underline{\lim}_{p\to\infty} \|f\|_{(p)} \geq M \qquad (1)$$

Pe de altă parte, $|f(x)| \leq M$ (a.p.t.) pe X,

deci

$$\|f\|_{(p)} \leq M\left(\int_X 1^p d\mu\right)^{1/p} = M(\mu(X))^{1/p}, (\forall)\ p\geq 1,$$

şi deci

$$\overline{\lim_{p\to\infty}} \|f\|_{(p)} \leq M \overline{\lim_{p\to\infty}} (\mu(X))^{1/p} = M \qquad (2)$$

Din (1) şi (2) deducem (P.1.1.31) că $\lim_{p\to\infty} \|f\|_{(p)} = M$.

Corolar 1. *Fie* $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ *o funcţie continuă. Atunci avem*:

$$\lim_{p\to\infty} \left(\int_a^b |f|^p d\mu\right)^{1/p} = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$$

Dem.Funcţia f fiind continuă,avem ad $\max|f| = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$,etc.

5.3.7. Propoziţie. *Fie* $(X,\mathscr{A},\mu)$ *un spaţiu cu măsură completă şi* $L^p=L^p(X,\mathscr{A},\mu), p\in[1,\infty)$. *Atunci mulţimea* $\mathscr{S}^1=\mathscr{S}^1(X,\mathscr{A},\mu)$,*a funcţiilor simple integrabile definite pe* X, *este un subspaţiu liniar, dens în* L^p.

Dem. Evident $\mathscr{S}^1$este un subspaţiu liniar în L^p. Fie acum $f\in L^p$, $f\geq 0$, fixat. Atunci (T.3.2.16.),(∃) $f_n:X\to\mathbf{R}(n\geq 0)$,un şir monoton crescător de funcţii simple, nenegative, a.î., $f_n \xrightarrow{s} f$, de unde rezultă că

$$|f-f_n|^p \leq f^p \text{ (a.p.t.) } \& \ |f-f_n|^p \xrightarrow{s} 0\ (n\to\infty),$$

deci

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f - f_n|^p d\mu = 0 \Leftrightarrow \| f - f_n\|_{(p)} \to 0\ (n\to\infty)$$

Cum avem $0 \leq f_n^p \leq f^p,(\forall)n\geq 1$,rezultă că $f_n\in\mathscr{S}^1$.Conchidem că $f\in \overline{\mathscr{S}^1}$.

In fine, fie $f\in L^p$ fixat, arbitrar. Evident, avem $f^+, f^- \in L^p$. Din cele de mai sus rezultă: $f^+, f^- \in \overline{\mathscr{S}^1}$, deci $f = f^+ - f^- \in \overline{\mathscr{S}^1}$ (P1.2.44).

Prin urmare, $L^p \subseteq \overline{\mathscr{S}^1}$, i.e. $L^p = \overline{\mathscr{S}^1}$.

5.3.8. Propoziţie. *Fie* $1\leq p< \infty$ şi $[a,b]\subseteq\mathbf{R}$.*Atunci* $\mathscr{C}([a,b])$*este densă în spaţiul* $L^p([a,b])$.

Dem. Fie $f \in L^p([a,b])$ şi $\varepsilon>0$ fixaţi. Din P.5.3.6. rezultă că (∃) $g:[a,b]\to\mathbf{R}$ simplă cu $\| f - g \|_{(p)} \leq \frac{\varepsilon}{2}$; evident, g este mărginită, fie $c = \| g \|_\infty$.

Din T.3.3.6. rezultă că (∃) $A \subseteq [a,b]$, cu $\lambda([a,b]\setminus A) < (\varepsilon/4c)^p$ şi $g|_A$ continuă; prelungim $g|_A$ la o funcţie continuă, $h : [a,b]\to\mathbf{R}$, cu proprietatea că $\sup_{x\in[a,b]} |h(x)| = \sup_{x\in A} |g(x)|$. Atunci $h|_A = g|_A$ şi avem

$$|g-h|^p \le (|g|+|h|)^p \le (2c)^p,$$

deci

$$\|g-h\|_{(p)}^p = \int_{[a,b]} |g-h|^p d\lambda = \int_{[a,b]\setminus A} |g-h|^p d\lambda \le (2c)^p(\varepsilon/4c)^p = (\varepsilon/2)^p$$

şi deci, $\|g-h\|_{(p)} \le \varepsilon/2$, de unde deducem:

$$\|f-h\|_{(p)} \le \|f-g\|_{(p)} + \|g-h\|_{(p)} \le \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$

deci $f\in \overline{\mathscr{C}[a,b]}$. Prin urmare $\overline{\mathscr{C}[a,b]} = L^p[a,b]$.

Corolar 1. *Fie* $1\le p<\infty$ *şi* $[a,b] \subseteq \mathbf{R}$. *Atunci* $\mathscr{C}^\infty([a,b])$ *este un subspaţiu liniar dens în* $L^p([a,b])$.

Dem. Fie $f \in L^p([a,b])$ şi $\varepsilon>0$ fixaţi. Din P 5.3.8. rezultă că există $g \in \mathscr{C}([a,b])$, cu $\|f-g\|_{(p)} < \varepsilon$. Aplicînd (T.1.2.41), rezultă că $(\exists)$ $h:[a,b]\to\mathbf{R}$ o funcţie polinomială, deci indefinit derivabilă, a. î. $\|g-h\|_n \le \varepsilon$. Atunci:

$$\|g-h\|_{(p)}^p = \int_{[a,b]} |g-h|^p d\lambda \le \|g-h\|_n^p \lambda([a,b]) \le \varepsilon^p(b-a),$$

deci $\|g-h\|_{(p)} \le \varepsilon(b-a)^{1/p}$ şi deci

$$\|f-h\|_{(p)} \le \|f-g\|_{(p)} + \|g-h\|_{(p)} \le (1+(b-a)^{1/p})\varepsilon$$

Prin urmare (P1.2.16), $\mathscr{C}^\infty([a,b])$ este densă în $L^p([a,b])$.

5.3.9. Propoziţie. *Fie* X *o mulţime* , $\mathscr{A}$ *o algebră pe* X *şi* $\mu_1,\mu_2: \mathscr{A} \to \overline{\mathbf{R}}$ *două măsuri, cu* $\mu_1 \le \mu_2$. *Atunci* $\int_X |f| d\mu_1 \le \int_X |f| d\mu_2$, $(\forall) f\in\mathscr{M}(X,\mathscr{A})$.

Dem. Fie $h = \sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_{A_i} \in \mathscr{S}^+(X,\mathscr{A})$ fixată. Atunci

$$\int_X h d\mu_1 = \sum_{i=1}^{n} c_i\mu_1(A_i) \le \sum_{i=1}^{n} c_i\mu_2(A_i) = \int_X h d\mu_2,$$

deci $(\forall) f \in \mathscr{M}(X,\mathscr{A})$ fixat, avem:

$$\int_X |f| d\mu_1 = \sup\{\int_X h d\mu_1;\ h\in \mathscr{S}^+(X,\mathscr{A}),\ h\le |f|\} \le$$

$$\le \sup\{\int_X h d\mu_2;\ h\in \mathscr{S}^+(X,\mathscr{A}),\ h\le |f|\} = \int_X |f| d\mu_2.$$

Corolar 1. *In acelaşi cadru avem:* $L^p(X,\mathscr{A},\mu_1) \supseteq L^p(X,\mathscr{A},\mu_2)$, $(\forall) p\ge 1$.

Dem. Aplicăm P.5.3.9. pentru funcţia $|f|^p$, cu $f \in L^p(X,\mathscr{A},\mu)$ fixat.

Corolar 2. *Fie* $(X,\mathscr{A})$ *un spaţiu măsurabil şi* $\mu_1,\mu_2: \mathscr{A} \to \overline{\mathbf{R}}$ *două măsuri. Atunci au loc afirmaţiile:*

1) $L^p(X,\mathscr{A},\mu_1) \cap L^p(X,\mathscr{A},\mu_2) = L^p(X,\mathscr{A},\mu_1+\mu_2)$, $(\forall)$ $p\ge 1$.

2) $(\forall)$ $f\in L^1(X,\mathscr{A},\mu_1) \cap L^1(X,\mathscr{A},\mu_2)$ *rezultă*

$$\int_X f d(\mu_1+\mu_2) = \int_X f d\mu_1 + \int_X f d\mu_2$$

Dem. Fie $f \in \mathscr{S}^1(X,\mathscr{A},\mu_1) \cap \mathscr{S}^1(X,\mathscr{A},\mu_2) = \mathscr{S}^1(X,\mathscr{A},\mu_1+\mu_2)$, $f = \sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_{A_i}$, fixată. Atunci avem:

$$\int_X fd(\mu_1+\mu_2) = \sum_{i=1}^{n} c_i(\mu_1+\mu_2)(A_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} c_i\mu_1(A_i) + \sum_{i=1}^{n} c_i\mu_2(A_i) = \int_X fd\mu_1 + \int_X fd\mu_2 \qquad (1)$$

Fie acum $f \in L^1(X,\mathscr{A},\mu_1) \cap L^1(X,\mathscr{A},\mu_2)$, $f \geq 0$, fixat. Atunci (T.3.2.16) $(\exists)(f_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathscr{S}^+(X,\mathscr{A})$; $f_n \uparrow f$(a.p.t.), deci (T.4.2.1):

$$\int_X fd(\mu_1+\mu_2) = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d(\mu_1+\mu_2) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu_1 + \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu_2 = \int_X fd\mu_1 + \int_X fd\mu_2 \qquad (2)$$

Dacă f nu este ≥ 0,scriem $f = f^+ - f^-$ şi aplicăm relaţia (2) pentru f^+ şi f^- şi scădem apoi între ele relaţiile obţinute, etc.

5.3.10. Propoziţie. *Fie* $(X,\mathscr{A},\mu)$ *un spaţiu cu măsură finită şi* $1 \leq p < q \leq \infty$. *Atunci* $L^q(X,\mathscr{A},\mu) \subseteq L^p(X,\mathscr{A},\mu)$ *şi avem relaţia:*

$$\| f \|_p \leq (\mu(X))^{1/p-1/q} \| f \|_q, \ (\forall)\ f \in L^q(X,\mathscr{A},\mu)$$

Dem. 1) Fie $1 < p < q < \infty$ fixaţi,deci $r := q/p \geq 1$. Atunci $(\forall) f \in L^q$ avem $|f|^q \in L^1$,deci $|f|^p = (|f|^q)^{1/r} \in L^r$. Notând cu r' conjugatul armonic al lui r şi ţinând seama că funcţia $1 \in L^{r'}$, rezultă (P5.3.1.) că $|f|^p = |f|^p \cdot 1 \in L^1$, deci $f \in L^p$. Aşadar, $L^q \subseteq L^p$. Mai departe, $(\forall) f \in L^q$, aplicând din nou inegalitatea lui Holder (P5.3.1.), deducem:

$$\| f \|^p{}_p = \int_X |f|^p d\mu \leq \left(\int_X (|f|^p)^r d\mu\right)^{1/r} \cdot \left(\int_X 1^{r'} d\mu\right)^{1/r'} =$$

$$= \left(\int_X |f|^q d\mu\right)^{p/q} \cdot (\mu(X))^{1-1/r} = \| f \|^q (\mu(X))^{1-p/q}.$$

Prin urmare, $\| f \|_p \leq \| f \|_q (\mu(X))^{1/p-1/q}$.

2) dacă $f \in L^\infty$, avem $|f(x)| \leq \| f \|_\infty$ (a.p.t.) , deci

$$\| f \|_p^p = \int_X |f|^p d\mu \leq \| f \|^p_\infty \mu(X),\text{etc.}$$

Corolar 1. *In acelaşi cadru au loc afirmaţiile:*

1) Injecţia canonică, $L^q(X,\mathscr{A},\mu) \to L^p(X,\mathscr{A},\mu)$, *este continuă, deci convergenţa în norma* $\|\cdot\|_q$ *implică convergenţa în norma* $\|\cdot\|_p$.

2) aplicaţia, $[1,\infty) \ni p \to M_p(f) = (1/\mu(X) \int_X |f|^p d\mu)^{1/p}$, *este monoton crescătoare.*

Dem. 1) Injecția canonică fiind liniară, din P5.3.10. & T1.2.50. rezultă că ea este continuă.

2) Fie $1 \le p < q < \infty$ fixați. Atunci (P5.3.10):

$$M_p(f) = (1/\mu(X))^{1/p}\| f\|_p \le (1/\mu(X))^{1/p}(\mu(X))^{1/p-1/q}\| f\|_q = M_q(f)$$

Observație. Dacă $\mu(X) = \infty$, atunci între L^p și L^q nu avem, în mod necesar, o relație de incluziune (Ex.6.15.).

5.3.11. Definiție. Fie $(X,\mathscr{A},\mu)$ un spațiu cu măsură și $f_i:X\to\mathbf{R}$ $(i\in I)$ o familie de funcții integrabile. Vom spune că familia de integrale, $\left(\int_X |f_i|\,d\mu\right)_{i\in I}$, *este absolut echicontinuă*, dacă $\lim\limits_{\mu(A)\to 0}\int_A |f_i|\,d\mu=0$,

uniform relativ la $i\in I$, i.e.

$$(\forall)\varepsilon > 0,(\exists)\ \delta > 0, \text{ a.î. } \int_A |f_i|\,d\mu \le \varepsilon, (\forall)A\in\mathscr{A}, \mu(A) \le \delta; (\forall)\ i\in I.$$

a) Fie $f_i:X\to\mathbf{R}$ $(i\in I)$ o familie de funcții integrabile. Atunci familia de integrale, $\left(\int_X |f_i|\,d\mu\right)_{i\in I}$, este absolut echicontinuă, dacă și numai dacă :

$$(\forall)\ \varepsilon > 0, (\exists)\ \delta > 0, \text{ a.î. } \sup_{i\in I}\int_A |f_i|\,d\mu \le \varepsilon, (\forall)A\in\mathscr{A}, \mu(A) < \delta.$$

b) Fie $f_i:X\to\mathbf{R}$ $(i\in I)$ o familie de funcții integrabile, finită sau egal majorată de o funcție integrabilă. Atunci familia de integrale, $\left(\int_X |f_i|\,d\mu\right)_{i\in I}$, este absolut echicontinuă.

5.3.12. Teoremă (Vitalli). *Fie* $(X,\mathscr{A},\mu)$ *un spațiu cu măsură finită și* $f_n:X\to\mathbf{R}$ $(n\ge 1)$ *un șir de funcții integrabile, convergent în măsură către o funcție măsurabilă* f, $f:X\to\mathbf{R}$. *Atunci condițiile* 1) - 2) *sunt echivalente.*

1) *f integrabilă și* $\int_X |f - f_n|\,d\mu \to 0$ $(n\to\infty)$;

2) $\lim\limits_{\mu(A)\to 0}\int_A |f_n|\,d\mu = 0$, *uniform relativ la* $n\in\mathbf{N}$.

Dem. 1)$\Rightarrow$2) Fie $\varepsilon>0$ fixat. Cum $\int_X |f - f_n|\,d\mu \to 0$, rezultă

$$(\exists)\ N \ge 1, \text{ a.î. } \int_X |f-f_n|\,d\mu \le \varepsilon/2, (\forall)\ n \ge N,$$

deci

$$\int_A |f - f_n|\,d\mu \le \varepsilon/2, (\forall)\ n \ge N, (\forall)\ A \in\mathscr{A}. \tag{1}$$

Funcțiile f și $f - f_k$ $(k\in \overline{1,N})$ fiind integrabile, rezultă (T.4.2.5):

$$\lim_{\mu(A)\to 0}\int_A |f|\,d\mu = 0;\ \lim_{\mu(A)\to 0}\int_A |f - f_k|\,d\mu = 0, (\forall)\ k \in \overline{1,N},$$

deci, $(\exists)\ \delta > 0$, a.î.

$\int_A |f|d\mu \le \varepsilon/2$ & $\int_A |f\text{-}f_k|d\mu \le \varepsilon/2$, $(\forall)\ A\in\mathscr{A}$, $\mu(A) < \delta$; $(\forall)\ k \in \overline{1,N}$ (2)

Din (1) şi (2) deducem:

$$\int_A |f_n|d\mu \le \int_A |f\text{-}f_n|d\mu + \int_A |f|d\mu \le \varepsilon/2 + \varepsilon/2,\ (\forall)\ \mu(A) < \delta,\ (\forall)\ n \ge 1$$

Prin urmare, $\lim\limits_{\mu(A)\to 0} \int_A |f_n|d\mu = 0$, uniform relativ la $n \ge 1$.

2)⇒1) Fie $\varepsilon > 0$ fixat; cf. ipotezei $(\exists)\ \delta>0$, a.î.

$$\int_A |f_n|d\mu \le \varepsilon,\ (\forall)\ A \in\mathscr{A},\ \mu(A) < \delta;\ (\forall)\ n \ge 1 \qquad (3)$$

Fie $(f_{n_k})_{k\ge1} \subseteq (f_n)_{n\ge1}$ fixat. Cf. P.3.2.12,Cor3 $(\exists)(f_{n_{k_i}})_{i\ge1}$ un subşir al şirului $(f_{n_k})_{k\ge1}$, convergent (a.p.t) la f. Din T 3.3.5. rezultă:

$$(\exists)\ A\in\mathscr{A},\ \text{cu}\ \mu(A) < \delta\ \&\ f_{n_{k_i}} \xrightarrow{u.} f\ \text{ pe } A^c,$$

deci

$$(\exists)\ i_0\ge1,\ \text{a.î.}\ |f(x) - f_{n_{k_i}}(x)| \le \varepsilon,\ (\forall)\ i\ge i_0,\ (\forall)\ x \in A^c. \qquad (4)$$

Din T 4.2.9. rezultă:

$$\int_A |f|d\mu = \int_A \underline{\lim}_{i\to\infty} |f_{n_{k_i}}| \le \underline{\lim}_{i\to\infty} \int_A |f_{n_{k_i}}|d\mu \le \varepsilon, \qquad (5)$$

Ţinând seama de (3), (4), (5) în ordinea (5), (3), (4), deducem:

$$\int_X |f- f_{n_{k_i}}|d\mu = \int_A |f- f_{n_{k_i}}|d\mu + \int_{A^c} |f- f_{n_{k_i}}|d\mu \le$$

$$\le \int_A |f|d\mu + \int_A |f_{n_{k_i}}|d\mu + \int_{A^c} |f\text{-}f_{n_{k_i}}|d\mu \le$$

$$\le \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon\mu(A^c) = \varepsilon(2+\mu(A^c)),\ (\forall) i\ge i_0.$$

De aici rezultă că $f-f_{n_{k_i}}$ $(i\ge i_0)$ este integrabilă, deci f este integrabilă, şi avem:

$$\|f-f_{n_{k_i}}\|_1 \to 0\ \ (i\to\infty).$$

Aşadar, $(\exists)\ f\in L^1 := L^1(X,\mathscr{A},\mu)$, cu proprietatea:Orice subşir al şirului $(f_n)_{n\ge1}$ posedă un subşir convergent, în norma $\|\ \|_1$, la f, deci (P.1.2.17):

$$\|f - f_n\|_1\to0,\ \ \text{i.e.} \int_X |f\text{-}f_n|d\mu\to0.$$

Corolar 1.*Fie* $(X,\mathscr{A},\mu)$ *un spaţiu cu măsură finită şi* $f_n:X\to\mathbf{R}$ *(*$n\ge1$*) un şir de functii măsurabile (resp. integrabile), egal majorat de o funcţie integrabilă(resp. şirul de integrale,*$(\int_X f_n d\mu)_{n\ge1}$*,este absolut echicontinuu).*

Dacă $(\exists)$ $f:X\to\mathbf{R}$ *măsurabilă, a. î.* $f_n \xrightarrow{\mu} f$, *atunci f este integrabilă şi* $\int_X |f\text{-}f_n|d\mu \to 0$.

Dem. Presupunem că $(\exists)g:X\to\mathbf{R}$ integrabilă,a.î. $|f_n|\le g$ (a.p.t.)$(\forall)n\ge1$.

Fixăm $\varepsilon>0$; atunci (T4.2.5.) $(\exists)\ \delta>0$, a.î. $\int_A g d\mu \le \varepsilon$, $(\forall)\ A\in \mathscr{A}, \mu(A)<\delta$, deci

$$\int_A |f_n| d\mu \le \int_A g d\mu \le \mu,\ (\forall)\ A\in\mathscr{A},\ (\forall)\ A\in \mathscr{A}, \mu(A)<\delta,\ (\forall) n\ge 1,$$

deci șirul de integrale $(\int_X |f_n| d\mu)_{n\ge 1}$ este absolut echicontinuu. Aplicăm mai departe (T.5.3.12).

Observația 1. În T.5.3.12. putem înlocui funcțiile integrabile,prin funcții p-integrabile ; mai precis : *Fie* $(X, \mathscr{A}, \mu)$ *un spațiu cu măsură finită și* $(f_n)_{n\ge 1} \subseteq L^p := L^p(X, \mathscr{A}, \mu)$ $(p \ge 1)$ *un șir convergent în măsură către o funcție măsurabilă* $f: X \to \mathbf{R}$. *Atunci avem*:

$$f \in L^p \ \&\ \| f - f_n\|_p \to 0 \Leftrightarrow \lim_{\mu(A)\to 0} \int_A |f_n|^p d\mu = 0, \textit{ uniform relativ la } n\in\mathbf{N}.$$

Observația 2. T.5.3.12. ne dă *cadrul optim în care convergența în măsură, a unui șir de functii integrabile, implică convergența în medie.* Implicația reciprocă este adevărată fără nici o restricție cf.(P.5.3.5.).

Lema 1.*Fie p,q două numere armonic conjugate,*$(X, \mathscr{A}, \mu)$ *un spațiu cu măsură finită și* $g:X\to\mathbf{R}$ *,o funcție integrabilă, cu proprietatea:*

$$(\exists) M>0, \textit{ a. î. } \left|\int_X ghd\mu\right| \le M\, \|h\|_p, (\forall) h\in\mathscr{S}(X, \mathscr{A}).$$

Atunci $g\in L^q := L^q(X,\mathscr{A},\mu)$

Dem. Cf. T.4.2.16 $(\exists)\ (g_n)_{n\ge 1} \subseteq \mathscr{S}(X, \mathscr{A})$,un şir de funcții nenegative, a.î. $g_n \uparrow |g|^q$; fie $h_n := g_n^{1/p}\ \mathrm{sgn}\ g (n\ge 1)$. Atunci $(\forall)\ n \ge 1$, avem:

$$h_n g = g_n^{1/p}\ \mathrm{sgn}\ g.g = g_n^{1/p} |g| \ge g_n^{1/p} g_n^{1/q} = g_n,$$

deci

$$\int_X g_n d\mu \le \int_X h_n g d\mu \le M\,\|h_n\|p = M(\int_X g_n d\mu)^{1/p}$$

și deci

$$(\int_X g_n d\mu)^{1-1/p} \le M \Leftrightarrow \int_X g_n d\mu \le M^q, \text{ de unde rezultă (T 4.2.10.):}$$

$$\int_X |g|^q d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X g_n d\mu \le M^q, \text{ prin urmare } g \in L^q.$$

Lema 2.*Fie* $(X, \mathscr{A}, \mu)$ *un spațiu cu măsură finită ,* $(A_n)_{n\ge 1}\subseteq \mathscr{A}$ *un şir mutual disjunct şi* $A := \bigcup_{n\ge 1} A_n$. *Atunci seria de funcții* $\sum_{n\ge 1} \varphi_{A_n}$ *este convergentă în spațiul* $L^p := L^p(X, \mathscr{A}, \mu)$ $(p\ge 1)$ *şi are suma* φ_A.

Dem. Fie $S_n=\bigcup_{i\le n} A_i$ şi $R_n=\bigcup_{i>n} A_i$ $(n\ge 1)$.Atunci avem

$$\varphi_A(x) - \varphi_{S_n}(x)=\varphi_{R_n}(x),\ (\forall) x\in X,\ (\forall) n\ge 1,$$

deci,

$$|\varphi_A(x) - \varphi_{S_n}(x)|^p = \varphi_{R_n}(x),\ (\forall) x \in X,\ (\forall) n \geq 1$$

şi deci

$$\int_X |\varphi_A(x) - \varphi_{S_n}(x)|^p d\mu = \int_X \varphi_{R_n}(x)\, d\mu = \mu(R_n) \to 0,\ (n \to \infty)$$

Prin urmare, $\| \varphi_A - \sum_{i=1}^{n} \varphi_{A_i} \|_p \to 0\ (n \to \infty)$.

5.3.13.Teoremă (F.Riesz). *Fie* $(X, \mathscr{A}, \mu)$ *un spaţiu cu măsură finită* ; p,q *două numere armonic conjugate şi* $L^p := L^p(X, \mathscr{A}, \mu)$, $L^q := L^q(X, \mathscr{A}, \mu)$. *Atunci,* $(\forall) F \in (L^p)'$, $(\exists !) g \in L^q$, a.î. $F(f) = \int_X f \cdot g\, d\mu$, $(\forall) f \in L^p$ şi $\|F\| = \|g\|_q$; *corespondenţa,* $(L^p)' \ni F \to g \in L^q$, *defineşte un izomorfism de spaţii normate, i.e.* $(L^p)' \approx L^q$.

Dem. Fie $g \in L^q$ fixat şi $F_g(f) := \int_X f \cdot g\, d\mu$, $(\forall) f \in L^p$. Evident fg este măsurabilă şi avem (P.5.3.1.):

$$\int_X |fg|\, d\mu \leq \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p} \cdot \left(\int_X |g|^q d\mu \right)^{1/q} = \|f\|_p \cdot \|g\|_q,\ (\forall) f \in L^p,$$

deci, fg este integrabilă şi deci F_g are sens.Evident, F_g este liniară şi avem:

$$|F_g(f)| \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q,\ (\forall) f \in L^p,$$

deci (T.1.2.50.) F este continuă, i.e. $F_g \in (L^p)'$ şi $\|F_g\| \leq \|g\|_q$.

Mai departe considerăm functia $f_0 := (\operatorname{sgn} g)|g|^{q-1}$. Functia f_0 este măsurabilă şi avem:

$$\int_X |f_o|^p d\mu \leq \int_X |g|^{p(q-1)} d\mu = \int_X |g|^q d\mu = \|g\|_q,$$

deci, $f_o \in L^p$ şi $\|f_0\|_p = \left(\int_X |g|^p d\mu \right)^{1/p}$.Cum avem :

$$F_g(f_o) = \int_X (\operatorname{sgn} g)\, |g|^{q-1} |g|\, d\mu = \int_X |g|^q d\mu,$$

rezultă

$$\left(\int_X |g|^q d\mu \right)^1 = F_g(f_o) \leq \|F_g\| \cdot \|f_0\|_p = \|F_g\| \left(\int_X |g|^q d\mu \right)^{1/p};$$

deci

$$\|g\|_q = \left(\int_X |g|^q d\mu \right)^{1/q} = \left(\int_X |g|^q d\mu \right)^{1-1/p} \leq \|F_g\|.$$

Cu aceasta am arătat că $\|F_g\| = \|g\|_q$, deci corespondenţa $L^q \ni g \to F_g \in (L^p)'$ defineşte o aplicaţie izometrică şi evident liniară, deci injectivă .

Fie acum $F \in (L^p)'$ fixat şi $\nu(A) := F(h_A)$, $(\forall) A \in \mathscr{A}$, unde

$h_A: X \to \mathbf{R}$ este funcția caracteristică a mulțimii A. Evident, $\nu(\emptyset) = 0$; să arătăm că ν este numerabil aditivă. Fie $(A_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathscr{A}$ un şir mutual disjunct și $A = \bigcup\limits_{n\geq 1} A_n$. Din Lema 2. rezultă că seria $\sum\limits_{n\geq 1} h_{A_n}$ este convergentă în L^p şi are suma h_A. Cum F este liniară şi continuă, rezultă

$$F(h_A) = \sum_{n\geq 1} F(h_{A_n}), \text{ deci } \nu(A) = \sum_{n\geq 1} \nu(A_n)$$

și deci ν este numerabil aditivă. Deoarece $\nu(A) \in \mathbf{R}$, $(\forall)\ A \in \mathscr{A}$, conchidem că ν este măsură generalizată. Dacă $A \in \mathscr{A}$ şi $\mu(A) = 0$, rezultă h_A nulă μ-a.p.t., deci h_A este elementul nul din L^p şi deci $\nu(A) = F(h_A) = 0$, ceea ce înseamnă că ν este absolut continuă în raport cu μ. Din T.4.3.14. rezultă $(\exists)$ g: $X \to \overline{\mathbf{R}}$, μ-integrabilă, cu proprietatea :

$$\nu(A) = \int_A g d\mu, \ (\forall)\ A \in \mathscr{A}.$$

Fie $f \in \mathscr{S}(X, \mathscr{A})$ fixat şi $\sum\limits_{i=1}^{n} c_i h_{A_i}$ o reprezentare canonică a lui f. Atunci,

$$\int_X fg\ d\mu = \int_X \sum_{i=1}^{n} c_i h_{A_i} g\ d\mu = \sum_{i=1}^{n} c_i \int_{A_i} g d\mu = \sum_{i=1}^{n} c_i F(h_{A_i}) = F\Big(\sum_{i=1}^{n} c_i h_{A_i}\Big) = F(f),$$

deci

$$\int_X fg\ d\mu = F(f), (\forall) f \in \mathscr{S}(X, \mathscr{A}),$$

și deci

$$\left|\int_X fg\ d\mu\right| \leq \|F\| \cdot \|f\|_p, (\forall) f \in \mathscr{S}(X, \mathscr{A}),$$

de unde rezultă, cf. Lemei 1., că $g \in L^q$. Fie F_g funcționala definită de g. Deoarece $F(f) = F_g(f) = \int_X fg\ d\mu$, $(\forall)$ $f \in \mathscr{S}(X, \mathscr{A})$, şi cum $\mathscr{S}(X, \mathscr{A})$ este densă în L^p, iar $F, F_g \in (L^p)'$, deducem că $F = F_g$.

Prin urmare , aplicația , $L^q \ni g \to F_g \in (L^p)'$, este şi surjectivă , deci un izomorfism de spații normate.

Bibliografie

[1] BOBOC, N. , BUCUR, GH., Măsură şi Capacitate,
Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti (1985)

[2] BERBERIAN, S.K. , Measure and Integration,
New-York , Chelsea (1970)

[3] BERTRAND GELBAUM , Problems in Analysis,
Springer-Verlag, New-York, Berlin (1982)

[4] CHIŢESCU, I., SECELEAN, N.-A. , Elemente de teoria măsurii
şi integralei, Edit.Fundaţiei "România de Mâine" (1999)

[5] HALMOS, P.R., Measure Theory,
Springer-Verlag, New-York (1974)

[6] MUKHERJEA, A., POTHOVEN, K., Real and Functional Analysis,
Plenum Press : New-York and London (1978)

[7] NICOLESCU, M., Funcţii reale şi Elemente de Topologie,
Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti (1968)

[8] OXTOBY, J.C., Measure and Chategory,
Springer-Verlag, New-York (1971)

[9] ŞABAC, M., Analiză reală (Capitole de teoria măsurii şi integralei),
Tipografia Universităţii din Bucureşti (1993)

[10] SIREŢCHI, GH., Topologie generală,
Tipografia Universităţii din Bucureşti (1983)

[11] TOLSTOV, G.P., Măsură şi Integrală (în limba rusă),
Izdatelistvo Nauka, Moskwa (1976)

[12] VULIKH, B.Z., A Brief Course in the Theory of Functions of
Real Variable, Mir Publishers Moscow (1976)

Tiparul s-a executat sub cda 913/2002
la Tipografia Editurii Universității din București

ISBN 973-575-638-2
ISBN 973-575-639-0

Lei 88000