

III 464342
BIBLIOTECA

GH. STOICA

**CALCULUL MALLIAVIN
ȘI TEORIA
DEVIĂȚIILOR MARI**

EDITURA UNIVERSITĂȚII DIN BUCUREȘTI
1997



BIBLIOTECA CENTRALĂ
UNIVERSITARĂ
București

Cota

III 464342

Inventar

e. 2164/92

GH. STOICA

146450

ANATOMIEN INSTITUTS KONSTANZ
1998/1999

010 104 11 11

CALCULUL MALLIAVIN ȘI TEORIA DEVIATIILOR MARI

EDITURA UNIVERSITĂȚII DIN BUCUREȘTI

- 1997 -

Referenți științifici : Prof. dr. ION CUCULESCU
Prof. dr. CONSTANTIN TUDOR

BIBLIOTECA CENTRALĂ UNIVERSITĂȚII
BUCUREȘTI
COTA II 464342

423
92

B.C.U. București



C 02164 97

© Editura Universității din București
Șos. Panduri, 90-92. București - 76235; Telefon 410.23.84

ISBN 973 - 575 - 072 - 4

Cuprins

1	INTRODUCERE	3
1.1	GENERALITĂȚI	3
1.2	MIȘCARE BROWNIANĂ	8
1.3	MARTINGALE	11
1.4	INTEGRALA STOCASTICĂ ITÔ	14
1.5	ECUAȚII STOCASTICE ITÔ	20
2	CALCUL MALLIAVIN	29
2.1	HAOS ȘI INTEGRALE WIENER MULTIPLE	29
2.2	OPERATORUL DE DERIVARE	41
2.3	INTEGRALA SKOROHOD	54
2.4	SEMIGRUPUL ORNSTEIN-UHLENBECK	65
2.5	APLICAȚIE LA STUDIUL LEGILOR	77
2.6	APLICAȚIE LA ECUAȚII ITÔ	86
3	DEVIAȚII MARI	109
3.1	REZULTATE GENERALE	109
3.2	CAZUL GAUSIAN	131
3.3	APLICAȚII	140
3.4	PERTURBAȚII ALEATOARE MICI	159
4	INDEX	179

CUVÂNT ÎNAINTE

Cursul se adresează studenților din anul 4, precum și celor ce pregătesc doctoratul și/sau diploma de studii aprofundate.

Pentru calculul Malliavin am urma^t în principal monografia lui D. Nualart: *Malliavin calculus and related topics*, Springer, 1995, iar pentru teoria deviațiilor mari am folosit monografia lui R. Azencott: *Grandes déviations et applications*, Lect. Notes in Math. vol. 774, Springer, 1980. În afară de acestea, am utilizat idei din cursurile ținute la Universitatea Paris 6 (Pierre-et-Marie-Curie) în anii 1992-1995 de A. S. Üstünel (pentru calcul Malliavin) și A. Millet (pentru deviații mari).

În primul capitol am reamintit câteva lucruri de calcul stocastic clasic; am pus accent pe integrala stocastică și ecuațiile stocastice, deoarece aplicația standard (atât a calculului Malliavin cât și a teoriei deviațiilor mari) este la ecuațiile de tip Itô.

Autorul mulțumește d-lor profesori I. Cuculescu, C. Tudor și M. Dumitrescu, care au citit manuscrisul și mi-au precizat noțiunile, rezultatele și aplicațiile importante pe care să pun accent.

Gh. Stoica

București, 1997

INTRODUCERE

1.1 GENERALITĂȚI

Fie $\Omega \neq \emptyset$ o mulțime și \mathcal{K} un corp borelian (sau σ -algebră) pe Ω . O probabilitate P pe (Ω, \mathcal{K}) este o măsură (pozitivă) cu $P(\Omega) = 1$. Tripletul (Ω, \mathcal{K}, P) se numește câmp de probabilitate. Elementele lui \mathcal{K} se numesc evenimente. Funcțiile măsurabile de la Ω la \mathbf{R} se numesc variabile aleatoare (prescurtat v.a.) și se notează cu X, Y, \dots sau cu f, g, \dots . Integrala lui X în raport cu P se numește media lui X și o notăm $E(X) = \int X(\omega) dP(\omega) = \int X dP$. Dacă un eveniment are probabilitatea 1, vom spune că are loc aproape sigur (prescurtat a.s.) sau aproape peste tot (a.p.t.). Vom nota cu 1_A funcția indicator a mulțimii A : $1_A = 1$ pe A și 0 pe A^c (A^c este complementara lui A). Dacă $A_n, n \geq 1$ este un șir de mulțimi, notăm $\limsup_{n \rightarrow +\infty} A_n := \bigcap_{m=1}^{+\infty} \bigcup_{k=m}^{+\infty} A_k$.

1.1.1 Lema Borel-Cantelli I: dacă $\sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n) < +\infty$, atunci $P(\limsup_{n \rightarrow +\infty} A_n) = 0$.

1.1.2 Inegalitatea Cebâșev: dacă $X \geq 0$ a.s., atunci $P(X \geq a) \leq \frac{1}{a} E(X)$.

1.1.3 Inegalitatea Jensen: dacă g este convexă, X și $g(X)$ sunt integrabile, atunci $E[g(X)] \geq g[E(X)]$.

Legea (sau distribuția, repartiția) lui X este probabilitatea $P \circ X^{-1}$ pe \mathbf{R} definită prin $P \circ X^{-1}(A) := P(X \in A)$.

1.1.4 Formula de transport (schimbare de variabilă): dacă f este P -integrabilă, atunci $E[f(X)] = \int f(x) dP \circ X^{-1}(x)$ (integralele există simultan și au aceeași valoare).

Definiția legii și afirmația 1.1.4 se extind în cazul unui vector aleator (i.e. la o aplicație măsurabilă de la Ω la \mathbf{R}^d).

Două evenimente A, B sunt **independente** dacă $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Definiția se extinde la o familie arbitrară de indici: evenimentele $A_i, i \in I$ sunt independente dacă $P(\bigcap_{k=1}^n A_{i_k}) = \prod_{k=1}^n P(A_{i_k})$ pentru orice $\{i_1, \dots, i_n\} \subset I, n \in \mathbf{N}$. Corpul borelian \mathcal{F} este independent de corpul borelian \mathcal{G} dacă orice $A \in \mathcal{F}$ este independent de orice $B \in \mathcal{G}$. Corpul borelian generat de v.a. X , notat $\sigma(X)$, este familia $\{(X \in A), A \text{ boreliană}\}$; două v.a. sunt independente dacă corpurile boreliene generate de ele sunt independente. Similar se definesc independența: unui eveniment și a unei v.a., ca și a unei v.a. cu un corp borelian.

1.1.5 Dacă X, Y, XY sunt integrabile, iar X, Y sunt independente, atunci $E(XY) = E(X)E(Y)$.

Funcția caracteristică a v.a. X este transformarea Fourier a legii ei: $\int e^{itx} dP \circ X^{-1}(x) = E(e^{itX})$.

1.1.6 Criteriu de independență: X, Y sunt v.a. independente dacă și numai dacă $E e^{i(tX+sY)} = E(e^{itX}) E(e^{isY})$ pentru orice t, s reali.

1.1.7 Lema Borel-Cantelli II: fie $A_n, n \geq 1$ evenimente independente. Dacă $\sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n) = +\infty$, atunci $P(\limsup_{n \rightarrow +\infty} A_n) = 1$.

Tipuri de convergență:

- $X_n \rightarrow X$ a.s. (sau a.p.t.) dacă $P(X_n \rightarrow X) = 1$.
- $X_n \rightarrow X$ in probabilitate (sau in măsură) dacă, pentru orice $\epsilon > 0$, avem $P(|X_n - X| > \epsilon) \rightarrow 0$ când $n \rightarrow +\infty$.
- $X_n \rightarrow X$ in L^p ($p \geq 1$) dacă $X_n, X \in L^p$ și $E|X_n - X|^p \rightarrow 0$ când $n \rightarrow +\infty$.
- $X_n \rightarrow X$ in lege (sau in repartiție) dacă $\int f(X_n) dP \rightarrow \int f(X) dP$ când $n \rightarrow +\infty$, pentru orice $f \in C_b(\mathbf{R})$ i.e. continuă și mărginită pe \mathbf{R} . Convergența in lege este echivalentă cu convergența slabă a măsurilor (repartițiilor) $P \circ X_n^{-1} \Rightarrow P \circ X^{-1}$.

Au loc următoarele implicații:

convergența a.s., convergența in L^p

↓

convergența in probabilitate

↓

convergența in lege.

Definițiile și rezultatele de mai sus se extind fără dificultate în cazul vectorilor aleatori.

O familie de v.a. X_n se numește **uniform integrabilă** dacă $\int_{(|X_n| \geq c)} |X_n| dP \rightarrow 0$ când $c \rightarrow +\infty$, uniform în raport cu n .

1.1.8 Teorema de convergență dominată: fie $X_n \in L^p$ cu $X_n \rightarrow X$ în probabilitate. Atunci $X \in L^p$ și $X_n \rightarrow X$ în L^p dacă și numai dacă familia $(|X_n|^p)_{n \geq 1}$ este uniform integrabilă.

O v.a. X este **gaussiană** (sau **normală**), centrată și de dispersie 1 dacă $P(X \in A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_A e^{-x^2/2} dx$, A boreliană. Pe scurt vom spune că X are legea $N(0, 1)$ i.e. are legea normală de medie 0 și dispersie $E[X - E(X)]^2 = 1$. Funcția sa caracteristică este $E(e^{itX}) = e^{-t^2/2}$. Spunem că v.a. X are legea $N(a, b^2)$ dacă $X = bZ + a$, unde Z are legea $N(0, 1)$. Vectorul aleator $X = (X_1, \dots, X_n)$ se numește **gaussian** dacă există un șir Z_1, \dots, Z_m de v.a. independente cu legea $N(0, 1)$ și numere reale b_{ij}, a_i astfel ca $X_i = \sum_{j=1}^m b_{ij} Z_j + a_i$, pentru $i = 1, \dots, n$. În notație matricială $X = BZ + A$. **Covariația** a două v.a. X, Y este $Cov(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))]$. Dacă v.a. gaussiene sunt centrate i.e. $A = O$, matricea de covariație este $Cov(X) = E(XX^t) = E[(BZ)(BZ)^t] = E(BZZ^t B^t) = BB^t$, unde X^t este transpusa vectorului X , iar dacă $Cov(X) = BB^t$ este o matrice diagonală, atunci componentele X_j sunt independente.

1.1.9 Legea numerelor mari: fie $(X_n)_{n \geq 1}$ șir de v.a. independente identic repartizate. Atunci

$$\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \rightarrow E(X_1) \text{ a.s.}$$

dacă și numai dacă v.a. X_n au medie finită.

1.1.10 Teorema limită centrală: fie $(X_n)_{n \geq 1}$ șir de v.a. independente identic repartizate de medie finită și presupunem că $\sigma^2 := E[X_1 - E(X_1)]^2 < \infty$. Atunci

$$\frac{X_1 + \dots + X_n - nE(X_1)}{\sigma\sqrt{n}} \Rightarrow N(0, 1).$$

Dacă $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ sunt corpuri boreliene și X este v.a. \mathcal{G} -măsurabilă și integrabilă, numim **valoarea medie a lui X condiționată**

de \mathcal{F} , orice v.a. Y care satisface $\int_A Y dP = \int_A X dP$ pentru orice $A \in \mathcal{F}$.

1.1.11 Valoarea medie condiționată este unică a.s. Dacă X este integrabilă, atunci valoarea medie condiționată $E[X | \mathcal{F}]$ există. Dacă $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{F}$, X, XY sunt integrabile, Y este v.a. \mathcal{F} -măsurabilă, atunci $E[E[X | \mathcal{F}] | \mathcal{E}] = E[E[X | \mathcal{E}] | \mathcal{F}] = E[X | \mathcal{E}]$ și $E[XY | \mathcal{F}] = YE[X | \mathcal{F}]$.

Se folosește notația $E[X | Y]$ pentru $E[X | \sigma(Y)]$.

1.1.12 Convergența valorilor medii condiționate: fie \mathcal{F}_n un șir crescător de corpuri boreliene și $\mathcal{F}_\infty :=$ corpul borelian generat de $\bigcup_{n \geq 1} \mathcal{F}_n$. Atunci, pentru orice $X \in L^2(P)$, avem

$$E[X | \mathcal{F}_n] \rightarrow E[X | \mathcal{F}_\infty] \text{ în } L^2 \text{ și a.s.}$$

Dacă $X \in L^1(P)$, atunci convergența precedentă are loc în L^1 și a.s. Aceleași afirmații rămân adevărate în cazul descendent i.e. dacă \mathcal{F}_n este șir descrescător de corpuri boreliene și înlocuim \mathcal{F}_∞ cu $\mathcal{F}_{-\infty} := \bigcap_{n \geq 1} \mathcal{F}_n$.

Fie (Ω, \mathcal{K}, P) un câmp de probabilitate și fie \mathcal{B} corpul borelianelor pe $[0, +\infty)$. Un **proces stocastic**, notat $X(t, \omega)$ sau $X_t(\omega)$ sau simplu X_t este o aplicație de la $[0, +\infty) \times \Omega$ la \mathbb{R} , măsurabilă în raport cu produsul corpurilor boreliene $\mathcal{B} \otimes \mathcal{K}$.

Procesul $X = (X_t)_{t \geq 0}$ de v.a. reale se numește **gaussian** dacă orice combinație liniară reală finită cu elemente din X are legea gaussiană. Legea oricărui subsistem finit (X_1, \dots, X_n) al unui proces gaussian are lege gaussiană n -dimensională. Legea unui proces gaussian este complet determinată de mediile sale și de matricea de covariație asociată.

1.1.13 Pentru ca v.a. gausiene X_t , $t \geq 0$ să fie independente, este necesar și suficient ca, pentru orice $t \neq s$ să avem

$$E\{(X_t - E(X_t))(X_s - E(X_s))\} = 0.$$

1.1.14 Pentru un proces gaussian, convergența în probabilitate (deci și cea a.s.) este echivalentă cu convergența în L^2 , iar limita este gaussiană.

Trecutul "minimal" al unui proces stocastic $X = \{X_t, t \geq 0\}$ la timpul s este σ -algebra $\mathcal{F}_s^X = \sigma(X_u, 0 \leq u \leq s)$; indexată

după $t \geq 0$, o astfel de familie crescătoare de σ -algebre se va numi **filtrare**. Intuitiv, procesul X este Markov dacă, vrând să facem predicția la timpul s la ceea ce se va întâmpla în viitor, aceasta se face cunoscând starea procesului X la timpul s și nimic altceva. Acest lucru se scrie

$$P[X_t \in A \mid \mathcal{F}_s^X] = P[X_t \in A \mid \mathcal{X}_s] \text{ a.s.}$$

pentru $0 \leq s \leq t$, $A \subseteq \mathbf{R}$ boreliană,

unde $P[X_t \in A \mid \mathcal{F}_s^X] := E[1_{(X_t \in A)} \mid \mathcal{F}_s^X]$. Dacă, pentru orice $s \leq t$,

$$P_{st}(X_s, A) := P[X_t \in A \mid X_s]$$

sunt **probabilități** (numite de **tranziție**), spunem că procesul X pe (Ω, \mathcal{K}, P) este **Markov** în raport cu filtrarea $\{\mathcal{G}_t, t \geq 0\}$ dacă

$$P[X_t \in A \mid \mathcal{G}_s] = P_{st}[X_s, A] \text{ } P\text{-a.s.,}$$

pentru orice f boreliană mărginită,
 $0 \leq s \leq t$, $A \subseteq \mathbf{R}$ boreliană.

Să observăm că, dacă X este Markov în raport cu \mathcal{G}_t , atunci este Markov și în raport cu \mathcal{F}_t^X .

1.1.15 Definiția procesului Markov este echivalentă cu:

$$E[f(X_t) \mid \mathcal{F}_s^X] = P_{st}f(X_s),$$

pentru orice $s \leq t$, f boreliană mărginită,
unde $P_{st}f(x) := \int f(y)P_{st}(x, dy)$,

și are loc relația Chapman-Kolmogorov:

$$P_{su}(x, A) = \int P_{st}(x, dy)P_{tu}(y, A)$$

pentru orice $0 \leq s \leq t \leq u$, $x \in \mathbf{R}$, $A \subseteq \mathbf{R}$ boreliană.

Probabilitățile P_{st} se numesc omogene dacă depind doar de $t-s$ i.e. $P_{st} = P_{t-s}$, caz în care relația Chapman-Kolmogorov devine $P_{t+s}(x, A) = \int P_s(x, dy)P_t(y, A)$ pentru orice $t, s \geq 0$, $A \subseteq \mathbf{R}$ boreliană, adică $\{P_t, t \geq 0\}$ formează semigrup.

1.1.16 Să presupunem că

$$P_{st}f(x) = \int P_{st}(x, dy)f(y) = \int f(y)p(t, s, x, y) dy$$

pentru orice f boreliană mărginită (sau continuă care se anulează la ∞), unde $p(t, s, x, y)$ sunt densitățile de tranziție i.e. densitățile Radon-Nicodym ale măsurilor P_{st} . In cazul omogen, o rescriere este $P_{t+s}f(x) = P_t(P_s f)(x)$ sau $P_{t+s} = P_t P_s = P_s P_t$, adică operatorii P_t formează un semigrup care, dacă traiectoriile procesului X sunt continue, este tare continuu pe funcțiile continue (i.e. $P_t f \rightarrow P_s f$ uniform dacă f este continuă și $t \searrow s$).

1.1.17 Generatorul infinitezimal \mathcal{L} al semigrupului P_t (a cărui existență este asigurat de teorema Hille-Yosida) conține in domeniul său $Dom(\mathcal{L})$ funcțiile boreliene mărginite (sau continue care se anulează la ∞) și, pe aceste funcții, are loc formula de calcul

$$\mathcal{L}f = \lim_{t \searrow 0} \frac{P_t f - f}{t} \text{ in sens tare.}$$

Derivând ecuația semigrupului in $s = 0$, obținem pentru $f \in Dom(\mathcal{L})$: $\frac{d}{dt} P_t f(x) = P_t(\mathcal{L}f)(x)$ și $\frac{d}{dt} P_t f(x) = \mathcal{L}(P_t f)(x)$, numite ecuația *inainte* (sau Fokker-Planck), respectiv ecuația *inapoi*.

1.2 MIȘCARE BROWNIANĂ

Un proces stocastic W_t se numește **mişcare browniană** (sau **proces Wiener**) care incepe din 0 dacă

- $W_0 = 0$ a.s.,
- pentru orice $0 \leq s \leq t$, $W_t - W_s$ este v.a. gaussiană centrată cu dispersia $t - s$,
- pentru orice $0 \leq s < t$, $W_t - W_s$ este v.a. independentă de $\sigma(W_r, 0 \leq r \leq s)$, i.e. independentă de cel mai mic corp borelian in raport cu care v.a. $W_r, 0 \leq r \leq s$ sunt măsurabile,
- cu probabilitate 1, traiectoriile (i.e. aplicațiile $t \rightarrow W_t(\omega)$) sunt continue.

In particular, covariația mișcării browniene $Cov(W_t, W_s) := E[W_t W_s]$ este egală cu $t \wedge s$.

O mișcare browniană d -dimensională are expresia $W_t = (W_t^1, \dots, W_t^d)$, unde W_t^1, \dots, W_t^d sunt mișcări browniene (de dimensiune 1) independente.

Pentru a defini o mișcare browniană care începe din $x \in \mathbf{R}^d$, este suficient să considerăm procesul $W_t^x = x + W_t$. În loc să avem o singură probabilitate P și mai multe procese W_t^x , va fi mai util să avem un singur proces și mai multe probabilități, în sensul următor. Notăm ad-hoc Z_t mișcarea browniană d -dimensională definită anterior. Fie Ω spațiul funcțiilor continue ω de la $[0, +\infty)$ la \mathbf{R}^d , și definim $W_t(\omega) = \omega(t)$. Considerăm $\mathcal{F} = \sigma(W_t, t < +\infty)$ și definim probabilitățile P^x pe (Ω, \mathcal{F}) prin

$$P^x(W \in A) = P(x + Z \in A), \text{ pentru } x \in \mathbf{R}^d \text{ și } A \in \mathcal{F}.$$

Vom numi perechea (P^x, W_t) ; $x \in \mathbf{R}^d, t \geq 0$ mișcare browniană.

1.2.1 Proprietatea de scaling: dacă (P^x, W_t) este mișcare browniană care începe din x și $a > 0$, atunci $(P^{x/a}, a^{-1}W_{a^2t})$ este mișcare browniană care începe din x/a .

1.2.2 Uniform continuitatea și modulul de continuitate al traiectoriilor browniene: presupunem că $t \in [0, 1]$ și fie $c > 1$ dat. Pentru aproape toți ω , există $\delta = \delta(\omega) > 0$ astfel că, dacă $|t - s| < \delta$, atunci

$$|W_t(\omega) - W_s(\omega)| \leq c[-2|t - s| \log |t - s|]^{1/2}.$$

Pentru orice $\epsilon > 0$, cu probabilitate 1, traiectoriile mișcării browniene sunt Hölder continue de ordin $1/2 - \epsilon$ și nu sunt Hölder continue de ordin $\geq 1/2$.

1.2.3 Nederivabilitatea traiectoriilor browniene: aproape toate traiectoriile mișcării browniene nu sunt nicăieri derivabile i.e. cu probabilitate 1, aplicațiile $t \rightarrow W_t(\omega)$ nu au derivată în nici un punct t .

Fie $\pi(t) = \{t_0 < t_1 < \dots < t_k\}$ o partiție a intervalului $[0, t]$ cu norma $\|\pi(t)\| = \max_{0 \leq i \leq k-1} |t_{i+1} - t_i|$ și $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$ o funcție oarecare. Definim $\text{var}(f, \pi(t)) = \sum_{i=0}^{k-1} |f(t_{i+1}) - f(t_i)|^2$. Fie acum un șir de partiții $\pi_n(t), n \in \mathbf{N}$ ale lui $[0, t]$ din ce în ce mai fine; reamintim că, dacă f este cu variație mărginită pe $[0, t]$ și $\|\pi_n(t)\| \rightarrow 0$ când $n \rightarrow +\infty$, atunci $\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{var}(f, \pi_n(t))$ există și este egală cu 0.

1.2.4 Variația traiectoriilor browniene: dacă $\|\pi_n(t)\| \rightarrow 0$ atunci, pentru aproape toți ω , avem

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{var}(W_t(\omega), \pi_n(t)) = t.$$

In particular: pentru aproape toți ω , traiectoriile mișcării browniene au variație nemărginită pe orice interval $[0, t]$.

Avem că $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{W_t(\omega)}{t} = 0$ a.s.; un rezultat mai precis este

1.2.5 Legea logaritmului iterat la ∞ : pentru aproape toți ω , avem

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{W_t(\omega)}{(2t \log \log t)^{1/2}} = 1 \text{ și } \liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{W_t(\omega)}{(2t \log \log t)^{1/2}} = -1$$

sau, echivalent, legea logaritmului iterat în 0 :

$$\limsup_{t \searrow 0} \frac{W_t(\omega)}{(2t \log \log \frac{1}{t})^{1/2}} = 1 \text{ și } \liminf_{t \searrow 0} \frac{W_t(\omega)}{(2t \log \log \frac{1}{t})^{1/2}} = -1 \text{ a.s.}$$

Considerăm filtrarea (i.e. familia crescătoare de corpuri boreliene) $\mathcal{F}_t^W := \sigma(W_s, s \leq t)$, $t \in [0, +\infty]$. Fie \mathcal{F}_t^0 corpul borelian generat de \mathcal{F}_t^W și de mulțimile P^x -neglijabile pentru orice $x \in \mathbb{R}^d$, iar $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+}^0 = \bigcap_{\epsilon > 0} \mathcal{F}_{t+\epsilon}^0$.

1.2.6 Mișcarea browniană d -dimensională este proces Markov omogen în raport cu filtrările: \mathcal{F}_t^W , $\mathcal{F}_t^0 \equiv \mathcal{F}_t$. Densitățile de tranziție (numite *nuclee gaussiene*) sunt date de

$$p(t, x, y) = (2\pi t)^{-d/2} \exp\left(-\frac{\|y - x\|^2}{2t}\right).$$

Generatorul infinitezimal al mișcării browniene d -dimensionale are ca domeniu funcțiile de clasă $C_0^2(\mathbb{R}^d)$ și pe aceste funcții avem $\mathcal{L}f = (1/2)\Delta$.

Fie $t_0 > 0$; $x, y \in \mathbb{R}$ fixate. Definim *podul brownian* prin: $B_t^{t_0, x, y} := W_t - \frac{t}{t_0} W_{t_0} + \frac{t_0 - t}{t_0} x + \frac{t}{t_0} y$, $0 \leq t \leq t_0$. Acesta este proces Markov, este proces gaussian (determinați media și covariația), și procesele $B_t^{t_0, x, y} B_{t_0 - t}^{t_0, y, x}$, $0 \leq t \leq t_0$ au aceeași lege.

Fie X_t proces stocastic și $\mathcal{F}_t, t \geq 0$ o filtrare continuă la dreapta i.e. $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+} := \bigcap_{\epsilon > 0} \mathcal{F}_{t+\epsilon}$; presupunem că X_t este

adaptat la \mathcal{F}_t i.e. X_t este \mathcal{F}_t -măsurabilă, pentru orice $t \geq 0$. O aplicație $T : \Omega \rightarrow [0, +\infty)$ se numește **timp de stopare** (sau opțională) dacă $(T < t) \in \mathcal{F}_t$ (sau, echivalent, $(T \leq t) \in \mathcal{F}_t$) pentru orice t . Aplicațiile $T_A = \inf \{t > 0 : X_t \in A\}$ și $\tau_A = \inf \{t > 0 : X_t \notin A\}$ le numim **prima intrare** (primul timp de intrare) a procesului X_t în mulțimea A , respectiv **prima ieșire** din A .

1.2.7 Dacă X_t are traiectoriile continue și dacă A este deschisă (sau închisă), atunci T_A este timp de stopare.

Fie acum T un timp de stopare; definim corpul borelian al evenimentelor cunoscute până la timpul T prin

$$\mathcal{F}_T := \{A \in \mathcal{F}_\infty : A \cap (T \leq t) \in \mathcal{F}_t \text{ pentru orice } t > 0\}$$

$$\text{și } X_T(\omega) := X_{T(\omega)}(\omega).$$

Dacă $X_t = W_t$ = mișcare browniană, atunci \mathcal{F}_T este corp borelian și T, B_T sunt \mathcal{F}_T -măsurabile.

1.2.8 Proprietatea tare Markov pentru mișcarea browniană: dacă T este \mathcal{F}_t^W -timp de stopare, atunci

$$P[W_{T+t} \in A \mid \mathcal{F}_T] = P_t[W_T, A] \quad P - \text{a.s. pe } (T < \infty)$$

pentru orice $t \geq 0$, $A \subseteq \mathbf{R}$ boreliană.

sau, echivalent

$$E[f(W_{T+t}) \mid \mathcal{F}_T] = (P_t f)(W_T) \quad P - \text{a.s. pe } (T < \infty)$$

pentru orice $t \geq 0$, $f \in C_b(\mathbf{R})$

sau

$$E[f(W_S) \mid \mathcal{F}_T] = (P_{S-T} f)(W_T) \quad P - \text{a.s. pe } (S < \infty)$$

pentru orice timp de stopare $S \geq T$, $S = \mathcal{F}_T$ -măsurabil și $f \in C_b(\mathbf{R})$.

1.3 MARTINGALE

Fie (Ω, \mathcal{K}, P) câmp de probabilitate și \mathcal{F}_n , $n \in \mathbf{N}$ o filtrare i.e. un șir crescător de σ -algebre. Un șir de v.a. (un proces cu timp discret) M_n , $n \in \mathbf{N}$ se numește adaptat dacă M_n

este \mathcal{F}_n -măsurabilă, pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Similar se definește adaptabilitatea pentru un proces cu timp continuu M_t , $t \geq 0$ în raport cu o filtrare \mathcal{F}_t , $t \geq 0$. Spunem că filtrarea \mathcal{F}_t satisface *condițiile obișnuite* dacă este continuă la dreapta (i.e. $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+}$ pentru orice $t \geq 0$, unde $\mathcal{F}_{t+} := \bigcap_{\epsilon > 0} \mathcal{F}_{t+\epsilon}$) și dacă fiecare \mathcal{F}_t este completă (i.e. fiecare \mathcal{F}_t conține negliabilele). În continuare vom lucra cu o singură probabilitate P și vom presupune că filtrările satisfac condițiile obișnuite.

Spunem că șirul M_n este **martingal** (cu timp discret) dacă M_n este adaptat la \mathcal{F}_n , M_n sunt integrabile pentru orice n și

$$E[M_n | \mathcal{F}_{n-1}] = M_{n-1} \text{ a.s., pentru orice } n = 2, 3, \dots$$

Similar spunem că familia M_t este **martingal** (cu timp continuu) dacă M_t este adaptat la \mathcal{F}_t , M_t sunt integrabile pentru orice t și

$$E[M_t | \mathcal{F}_s] = M_s \text{ a.s., pentru orice } s \leq t.$$

Dacă avem $E[M_t | \mathcal{F}_s] \geq M_s$ a.s., pentru orice $s \leq t$, spunem că M_t este **submartingal**. Dacă avem $E[M_t | \mathcal{F}_s] \leq M_s$ a.s. pentru orice $s \leq t$, avem un **supermartingal**. Submartingalele au tendința să crească; opusul unui submartingal este un supermartingal și reciproc; un proces care este submartingal și supermartingal este martingal.

Exemple Dacă W_t este mișcare browniană, atunci ea este martingal. Similar $W_t^2 - t$ este martingal și, dacă (W^1, \dots, W^d) este mișcare browniană d -dimensională, atunci $W_t^i W_t^j$ este martingal pentru orice $i \neq j$. Un alt exemplu de martingal cu timp continuu este $M_t := E[Z | \mathcal{F}_t]$, unde Z este v.a. integrabilă.

1.3.1 Opționalizare în timp discret: dacă T este timp de stopare mărginit în raport cu \mathcal{F}_n și M_n este martingal, atunci $EM_T = EM_0$. Dacă T este mărginit de k și M_n este submartingal, atunci $EM_T \leq EM_k$.

1.3.2 Opționalizare în timp continuu: dacă M_t este martingal continuu la dreapta (i.e. traiectoriile sunt continue la dreapta) și T este timp de stopare mărginit de k , atunci $EM_T = EM_k = EM_0$. Dacă M_t este submartingal pozitiv, avem $EM_T \leq EM_k$.

Dacă M_n sau M_t sunt martingale, notăm $M_t^* := \sup_{s \leq t} |M_s|$ și similar definim M_n^* .

1.3.3 Inegalitățile lui Doob: dacă M_n este martingal continuu la dreapta, atunci

$$P(M_n^* > a) \leq E |M_n| / a.$$

Dacă $p > 1$, atunci există c care depinde doar de p astfel ca

$$E(M_n^*)^p \leq cE |M_n|^p.$$

1.3.4 Convergența submartingalelor: dacă X_n este submartingal cu $\sup_n E(X_n^+) < +\infty$, atunci X_n converge a.s. când $n \rightarrow +\infty$.

În particular, dacă X_n este supermartingal pozitiv sau martingal mărginit superior sau inferior, atunci X_n converge a.s. Afirmția 1.3.4 rămâne adevărată pentru submartingale cu timp continuu și cu traiectorii continue la dreapta. În particular, dacă X_t este martingal continuu la dreapta cu $\sup_t E |X_t|^p < +\infty$ pentru un $p > 1$, atunci el converge a.s. și în L^p . Similar pentru X_t submartingal continuu la dreapta. Dacă X_t este martingal uniform integrabil cu traiectorii continue la dreapta, atunci convergența este în L^1 . Dacă $X_t \rightarrow X_\infty$ în L^1 , atunci $X_t = E[X_\infty | \mathcal{F}_t]$.

1.3.5 Descompunerea Doob-Meyer în cazul discret: fie Z_k supermartingal. Atunci există un martingal M_k și un proces crescător A_k , astfel că A_{k+1} este F_k -măsurabilă și $Z_k = M_k - A_k$.

1.3.6 Descompunerea Doob-Meyer în cazul supermartingalelor cu timp continuu: fie Z_t supermartingal cu traiectorii continue. Atunci există un martingal M_t și un proces crescător A_t , ambele cu traiectorii continue și adaptate la filtrarea lui Z_t , astfel ca $Z_t = M_t - A_t$. În plus M_t și Z_t sunt unic determinate.

1.3.7 Dacă M_t este martingal continuu de pătrat integrabil (i.e. $E(M_\infty^2) < +\infty$), atunci M_t^2 este submartingal și $-M_t^2$ este supermartingal. Afirmția 1.3.6 spune că există un proces continuu și crescător notat $\langle M \rangle_t$, numit **procesul de variație pătrată** al lui M_t , astfel ca $M_t^2 - \langle M \rangle_t$ să fie martingal. Mai general, variația pătrată $\{\langle X \rangle_t, t \geq 0\}$ a unui proces stocastic $\{X(t), t \geq 0\}$ se definește ca limita în probabilitate a

familiei $\sum_{i=0}^{n-1} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2$, unde $\pi = (0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t)$ parcurge mulțimea partițiilor lui $[0, t]$, când norma partiției $|\pi| = \max_i (t_{i+1} - t_i)$ tinde la 0. În cazul mișcării browniene, avem că $\langle W \rangle_t = t$ a.s. Pentru două martingale M_t, N_t definim $\langle M, N \rangle_t$ prin polarizare:

$$2 \langle M, N \rangle_t = \langle M + N \rangle_t - \langle M \rangle_t - \langle N \rangle_t.$$

1.4 INTEGRALA STOCASTICĂ ITÔ

Am văzut că traiectoriile mișcării browniene (deși continue) nu sunt nicăieri derivabile; aceasta înseamnă că nu putem defini $\int f(s) dW_s$ ca integrală Stieltjes pentru integranzi generali f . Totuși, este posibil să definim o astfel de integrală stocastică în sens L^2 . Vom defini $\int H_s dM_s$, unde $H_s = H_s(\omega)$ este proces adaptat "convenabil" și M_s este martingal continuu, de cele mai multe ori mișcare browniană. Clasa integranzilor este următoarea: fie \mathcal{F}_t filtrare care satisface condițiile obișnuite și $\mathcal{P} = \sigma$ -algebra progresiv măsurabilelor (previzibilelor), generată pe $\Omega \times [0, +\infty)$ de procesele Y_t continue la stânga adaptate la \mathcal{F}_t . Vom cere ca $H_s(\omega)$ să fie măsurabil în raport cu \mathcal{P} ; (echivalent, un proces măsurabil este progresiv măsurabil dacă restricția lui la orice interval $[0, t] \times \Omega$ este $\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$ -măsurabilă). În plus, mai cerem ca $E \int_0^{+\infty} H_s^2 ds < +\infty$ și apoi vom slăbi această ipoteză la $\int_0^{+\infty} H_s^2 ds < +\infty$ a.s.

Să schițăm definiția integralei stocastice în raport cu mișcarea browniană. Să observăm că, dacă H este \mathcal{F}_a -măsurabilă și K este \mathcal{F}_c -măsurabilă, W_t este mișcare browniană și $a \leq b \leq c \leq d$, atunci $E[H(W_b - W_a)K(W_d - W_c)] = 0$. Cum $W_t^2 - t$ este martingal, avem $E[H^2(W_b - W_a)^2] = (b - a)E[H^2]$. Să definim acum $\int_0^1 H_s dW_s$. Dacă H_s este elementară i.e. $H_s(\omega) = H(\omega)1_{[a,b]}(s)$, cu $H = \mathcal{F}_a$ -măsurabilă, atunci definim (ca la integrala Stieltjes) $\int_0^1 H_s dW_s = H(W_b - W_a)$. Dacă H_s este simplă i.e. combinație liniară finită de integranzi elementari, definim $\int_0^1 H_s dW_s$ prin liniaritate. În fine, dacă H_s satisface $E \int_0^1 H_s^2 ds < +\infty$, aproximăm H cu integranzi simpli H^n și definim integrala stocastică ca limita în L^2 a integralelor stocastice cu integranzii

aproximanți H^n . De unde știm că limita în L^2 există și că valoarea ei este independentă de alegerea șirului aproximant H^n ? Dacă H este simplă, putem scrie $H = \sum_{j=1}^n K_j 1_{[a_j, b_j]}(s)$, unde K_j sunt mărginite, \mathcal{F}_{a_j} -măsurabile și $a_1 \leq b_1 \leq a_2 \leq \dots \leq b_n$. Atunci

$$E \left(\int_0^1 H_s dW_s \right)^2 = E \left[\sum_{j=1}^n K_j^2 (W_{b_j} - W_{a_j})^2 \right] \\ + E \left[2 \sum_{i < j} K_i (W_{b_i} - W_{a_i}) K_j (W_{b_j} - W_{a_j}) \right];$$

al doilea sumand este zero și deci

$$E \left(\int_0^1 H_s dW_s \right)^2 = E \left(\int_0^1 H_s^2 ds \right)^2.$$

Aceasta înseamnă că există o izometrie între $\int_0^1 H_s dW_s$ cu norma din $L^2(P)$ și H_s cu norma $L^2 : \left(E \int_0^1 (\cdot)^2 ds \right)^{1/2}$. Acest fapt ajută la a arăta că limita există și este independentă de șirul aproximant ales.

Să revenim la cazul general al martingalelor continue și să dăm detaliile corespunzătoare. Fie M_t martingal continuu de pătrat integrabil i.e. $\sup_t E(M_t^2) < +\infty$. Din inegalitățile lui Doob și teorema de convergența a martingalelor, $M_\infty = \lim_{t \rightarrow +\infty} M_t$ există și $E(M_\infty^2) < +\infty$. Considerăm integrala H previzibilă și a.i. $E \int_0^{+\infty} H_s^2 ds < +\infty$.

1.4.1 Fie K v.a. mărginită și \mathcal{F}_a -măsurabilă; definim

$$I_t = K (M_{t \wedge b} - M_{t \wedge a}).$$

Atunci procesul I_t este martingal continuu,

$$E(I_\infty^2) = E[K^2 (<M>_b - <M>_a)] \\ \text{și } <I>_t = \int_0^t K^2 1_{[a, b]}(s) d<M>_s.$$

Spunem că un proces H_s este simplu dacă poate fi scris în forma $\sum_{j=1}^J H_j 1_{[a_j, b_j]}(s)$, unde H_j este \mathcal{F}_{a_j} -măsurabilă și mărginită, pentru orice j . Pentru un proces simplu H_s , definim

$$I_t = \int_0^t H_s dM_s = \sum_{j=1}^J H_j (M_{t \wedge b_j} - M_{t \wedge a_j}).$$

1.4.2 Dacă H_s^n este șir de procese simple a.i.

$$E \left[\int_0^{+\infty} (H_s^n - H_s^m)^2 d \langle M \rangle_s \right] \rightarrow 0 \text{ când } m, n \rightarrow +\infty,$$

$$\text{atunci } E \left[\sup_{s < +\infty} (I_s^n - I_s^m)^2 \right] \rightarrow 0 \text{ când } m, n \rightarrow +\infty.$$

Observație Un proces H_s adaptat, de pătrat integrabil și cu traiectoria continuă se poate aproxima cu procese simple; de exemplu, șirul de procese

$$H_s^n := \sum_{i=1}^{2^n-1} 2^n \left(\int_{(i-1)2^{-n}}^{i2^{-n}} H_s ds \right) \mathbf{1}_{[i2^{-n}, (i+1)2^{-n}]}(s)$$

converge către H_s în sensul că $E \left[\int_0^{+\infty} (H_s^n - H_s)^2 d \langle M \rangle_s \right] \rightarrow 0$ când $n \rightarrow +\infty$. Mai mult, orice proces adaptat și cu traiectoria continuă H_s admite o versiune progresiv măsurabilă, cu care vom și lucra; în particular, obținem că șirul aproximant H_s^n de mai sus este adaptat.

1.4.3 Fie H_s^n procese simple a.i.

$$E \left[\int_0^{+\infty} (H_s^n - H_s)^2 d \langle M \rangle_s \right] \rightarrow 0 \text{ când } n \rightarrow +\infty.$$

Atunci I_s^n converge în L^2 , uniform în raport cu $s \in [0, +\infty)$, către un martingal continuu. Limita, notată $I_s = \int_0^t H_s dM_s$, este independentă de alegerea șirului H^n care aproximează pe H_s . În particular, $\langle I \rangle_t = \int_0^t H_s^2 d \langle M \rangle_s$.

Extensii ale definiției integralei Itô. Dacă $\int_0^{+\infty} H_s^2 d \langle M \rangle_s < +\infty$ a.s. dar nu este neapărat integrabil, fie

$$T_k = \inf \left\{ t > 0 : \int_0^t H_s^2 d \langle M \rangle_s > k \right\}$$

și definim $\int_0^t H_s dM_s$ ca fiind $\int_0^t H_s dM_{s \wedge T_k}$ dacă $t \leq T_k$. Cum $\langle M \rangle_{s \wedge T_k}$ nu crește pe $[T_k, +\infty)$, putem folosi definiția din cazul integrabil pentru a defini integrala stocastică și cum $T_k \rightarrow +\infty$ când $k \rightarrow +\infty$, definiția este completă pentru orice t . Un proces M_t se numește **martingal local** dacă există un șir de timpi de stopare $S_n \rightarrow +\infty$ astfel că $M_{t \wedge S_n}$ sunt martingale

de pătrat integrabil pentru orice n . Dacă M_t este continuu, timpii de stopare $S_n = \inf \{t > 0 : |M_t| > n\}$ satisfac această condiție, deoarece $M_{t \wedge S_n}$ este mărginit de n (pentru un exemplu de martingal local care nu este martingal de pătrat integrabil, considerați mișcarea browniană). Definim $\int_0^t H_s dM_s$, ca fiind $\int_0^t H_s dM_{s \wedge S_n}$ pentru $t \leq S_n$ și $\langle M \rangle_t$ ca fiind $\langle M \rangle_{t \wedge S_n}$ pentru $t \leq S_n$.

În cazul mișcării browniene, reținem deci următoarele: dacă H_s este previzibil și $\int_0^t H_s^2 ds < +\infty$ a.s., atunci $\int_0^t H_s dW_s$ există și este martingal local și continuu, iar dacă H_s este de pătrat integrabil și $E \left[\int_0^t H_s^2 ds \right] < +\infty$, atunci $\int_0^t H_s dW_s$ este martingal de pătrat integrabil. În plus,

$$\begin{aligned} E \left[\int_0^t H_s dW_s \right] &= 0 \\ E \left[\int_0^t H_r dW_r \int_0^s H_r dW_r \right] &= E \left[\int_0^{t \wedge s} H_r^2 dr \right] \\ \text{și } \langle \int_0^t H_s dW_s \rangle_t &= \int_0^t H_s^2 ds. \end{aligned}$$

Un proces A_t se numește local cu variație mărginită dacă există un șir de timpii de stopare R_n astfel ca $A_{t \wedge R_n}$ să aibă variație mărginită pentru orice n (în cazul continuu, se poate considera șirul $R_n = \inf \{t > 0 : \int_0^t |dA_s| > n\}$). Un semimartingal X_t este suma dintre un martingal local M_t și un proces local cu variație mărginită A_t . Dacă $\int_0^t H_s^2 ds < \langle M \rangle_s + \int_0^t |M_s| |dA_s| < +\infty$ pentru orice t , definim integrala stocastică $\int_0^t H_s dX_s = \int_0^t H_s dM_s + \int_0^t H_s dA_s$, unde prima integrală este Itô (stocastică), iar a doua este Stieltjes.

Pentru un semimartingal $X_t = M_t + A_t$, definim $\langle X \rangle_t \equiv \langle M \rangle_t$. Dacă X, Y sunt semimartingale, definim procesul comun de variație pătrată prin polarizare:

$$\langle X, Y \rangle_t = \frac{1}{2} [\langle X + Y \rangle_t - \langle X \rangle_t - \langle Y \rangle_t].$$

1.4.4 Formula lui Itô: fie $X_t = M_t + A_t$ semimartingal cu traiectoriile continue și $f \in C^2(\mathbf{R})$. Atunci, cu probabilitate unu, avem

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) d\langle X \rangle_s, \quad t \geq 0.$$

Formula lui Itô d -dimensională: fie X_t semimartingal continuu d -dimensional și $f \in C^2(\mathbf{R}^d)$. Atunci:

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t \sum_{i=1}^d \frac{\partial f}{\partial x^i}(X_s) dX_s^i + \frac{1}{2} \int_0^t \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(X_s) d \langle X^i, X^j \rangle_s \quad \text{a.s., pentru } t \geq 0.$$

Mai mult, dacă $f \in C^2(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^d)$, formula lui Itô are forma

$$f(t, X_t) - f(0, X_0) = \int_0^t \sum_{i=1}^d \frac{\partial f}{\partial x^i}(s, X_s) dX_s^i + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial s}(s, X_s) ds + \frac{1}{2} \int_0^t \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(s, X_s) d \langle X^i, X^j \rangle_s \quad \text{a.s., pentru } t \geq 0.$$

1.4.5 În particular, dacă $\{W_t^i, t \geq 0, i = 1, \dots, d\}$ este mișcare browniană d -dimensională, formula lui Itô devine: fie $X_t^j = X_0^j + \sum_{i=1}^d \int_0^t u_s^{ij} dB_s^{Wi} + \int_0^t v_s^j ds, j = 1, \dots, m$, cu u_s^{ij}, v_s^j procese adaptate și măsurabile astfel ca $\int_0^{+\infty} (u_s^{ij})^2 ds < +\infty, \int_0^{+\infty} |v_s^j| ds < +\infty$ a.p.t. și $f \in C^2(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^m)$, atunci

$$f(t, X_t) - f(0, X_0) = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^m \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x^j}(s, X_s) u_s^{ij} dW_s^i + \sum_{j=1}^m \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x^j}(s, X_s) v_s^j ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial s}(s, X_s) ds + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j,l=1}^m \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^l}(s, X_s) u_s^{ij} u_s^{il} ds \quad \text{a.s., pentru } t \geq 0.$$

Observație Deosebirea față de formula clasică de schimbare de variabilă se explică prin faptul că variația pătrată a procesului $X(t)$ este $\int_0^t u^2(s) ds$ și când scriem formula lui Taylor pentru funcția $f(t, X_t)$, obținem o contribuție de la termenul de ordinul 2 care produce integrala suplimentară în formula lui Itô.

1.4.6 Formula de integrare prin părți: fie X, Y semimartingale continue; atunci

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \langle X, Y \rangle_t.$$

1.4.7 Inegalitățile lui Burkholder: fie $p \geq 2$; atunci există $c_p > 0$ astfel ca

$$E [|M_t|^p] \leq c_p E [\langle M \rangle_t^{p/2}], t \in [0, T]$$

pentru orice martingal continuu M_t ; $t \in [0, T]$, cu $E [|M_T|^p] < +\infty$ și $M_0 = 0$.

In particular: $E \left[\left| \int_0^t H_s dW_s \right|^p \right] \leq c_p t^{p/2-1} E \left[\int_0^t |H_s|^p ds \right]$.

1.4.8 Continuitatea și derivabilitatea integralei stocastice în raport cu parametrii: fie $H_t(x)$; $t \in [0, T]$, $x \in A \subseteq \mathbb{R}$ previzibil.

(a) Dacă $H_t(x)$ este continuu în (t, x) și derivabil în x , atunci $\int_0^t H_s(x) dW_s$ are o versiune continuă în (t, x) .

(b) Dacă $H_t(x)$ este continuu în (t, x) și de $m+1$ ori derivabil în x , atunci $\int_0^t H_s(x) dW_s$ are o versiune continuă în (t, x) și de m ori derivabilă în x . În plus $\frac{\partial^k}{\partial x^k} \int_0^t H_s(x) dW_s = \int_0^t \frac{\partial^k}{\partial x^k} H_s(x) dW_s$ pentru $k \leq m$.

1.4.9 Caracterizarea mișcării browniene și a martingalelor: fie M_t martingal local continuu cu $\langle M \rangle_t \equiv t$ și $M_0 \equiv 0$. Atunci M_t este mișcare browniană. În particular, dacă X_t este proces d -dimensional cu componentele martingale locale continue, $X_0 \equiv 0$ și $\langle X^i, X^j \rangle_t \equiv \delta_{ij} t$, atunci X_t este mișcare browniană d -dimensională. Fie M_t martingal continuu cu $\langle M \rangle_t$ strict crescător și $\langle M \rangle_\infty = +\infty$. Atunci M_t este o schimbare de timp a mișcării browniene și există o mișcare browniană reală W astfel ca $M_t = W_{\langle M \rangle_t}$ (M_t este o schimbare de timp a lui X_t dacă există un proces crescător $\tau(t)$ astfel ca $M_t = X_{\tau(t)}$). Mai mult, orice martingal continuu este schimbare de timp a unei mișcări browniene, posibil stopată într-un timp de stopare.

1.4.10 Reprezentarea v.a. de pătrat integrabil și a martingalelor de pătrat integrabil, adaptate în raport cu mișcarea browniană: dacă $Y \in L^2$ este \mathcal{F}_t -măsurabilă, atunci există un proces previzibil H_t cu $E \int_0^t H_s^2 ds < +\infty$ și $Y = E(Y) +$

$\int_0^t H_s dW_s$. Dacă M_t este martingal cu $M_0 = 0$ și $E(M_t^2) < +\infty$, atunci există H_t proces previzibil a.i. $M_t = \int_0^t H_s dW_s$ a.s. și pentru orice t . În particular, dacă W_t este mișcare browniană d -dimensională și Y este măsurabilă în raport cu filtrarea \mathcal{F}_t a mișcării browniene și din $L^2(P)$, atunci există $H_t = (H_t^1, \dots, H_t^d)$ previzibil cu $E \int_0^t (H_s^j)^2 ds < +\infty$ pentru orice j și $Y = E(Y) + \int_0^t H_s \cdot dW_s$. Ținând cont că integralele stocastice în raport cu mișcarea browniană au traiectoriile continue, obținem că martingalele adaptate în raport cu mișcarea browniană admit versiuni cu traiectorii continue (două procese se numesc versiuni dacă, pentru orice t , sunt egale a.s.).

1.5 ECUAȚII STOCASTICE ITÔ

Fie (Ω, \mathcal{K}, P) câmpul de probabilitate canonic asociat unei mișcări browniene d -dimensionale $\{W_t^i, t \in [0, T], 1 \leq i \leq d\}$ și \mathcal{F}_t filtrarea mișcării browniene. Se dau $\sigma_j, b: [0, T] \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, $1 \leq j \leq d$ funcții măsurabile. Coeficientul b se numește drift, iar σ coeficient de difuzie.

Prin soluție a ecuației stocastice m -dimensionale cu coeficienții b, σ , înțelegem un proces $X = \{X_t, t \in [0, T]\}$, cu valori în \mathbb{R}^m , \mathcal{F}_t -adaptat, care să verifice

$$X_t = x + \sum_{j=1}^d \int_0^t \sigma_j(s, X_s) dW_s^j + \int_0^t b(s, X_s) ds, \text{ cu } x \in \mathbb{R}^m \text{ dat.} \quad (1.1)$$

Observați că adaptarea soluției la \mathcal{F}_t este necesară pentru ca integralele stocastice din ecuație să aibă sens. Orice soluție a ecuației stocastice se numește proces de difuzie (dacă există, soluția este semimartingal). Dacă coeficienții ecuației nu depind de prima variabilă, ecuația se numește omogenă.

1.5.1 Existență și unicitate globală: dacă coeficienții $b, \sigma_j; j = 1, \dots, m$ sunt global Lipschitz i.e.

$$\|\sigma_j(t, x) - \sigma_j(t, y)\|, \|b(t, x) - b(t, y)\| \leq L \|x - y\|$$

pentru orice $x, y \in \mathbb{R}^m, t \in [0, T], j = 1, \dots, d$, atunci ecuația

(1.1) are o soluție unică a.s. pe $[0, T]$ pentru orice $x \in \mathbb{R}^m$, care este în $L^p, p \geq 2$, este adaptată și martingal de pătrat integrabil (în raport cu \mathcal{F}_t). Dacă lucrăm cu mișcarea browniană pe $[0, +\infty)$, pentru a obține o soluție unică pentru orice $t \geq 0$, trebuie să cerem în plus o condiție de mărginire de tipul

$$\|\sigma_j(t, 0)\|, \|b(t, 0)\| \leq C \text{ pentru } t \geq 0, j = 1, \dots, d.$$

Observații 1. În cazul 1-dimensional, este suficient ca σ să fie Hölder de indice $1/2$.

2. Constanta Lipschitz poate fi funcție de t , crescătoare și finită.

3. Soluția din afirmația 1.5.1. se numește **tare**; există și noțiunea de soluție slabă, ca fiind însăși legea procesului X . De exemplu, dacă considerăm ecuația (1.1) întâi în raport cu mișcarea browniană W_t și apoi în raport cu altă mișcare browniană B_t (ambele ecuații cu aceiași coeficienți și aceleași condiții inițiale), avem:

(i) dacă $B = W$, atunci soluțiile coincid,

(ii) dacă B, W sunt independente, soluțiile sunt și ele independente,

(iii) dacă B, W sunt parțial corelate, cele două soluții nu sunt nici independente, nici egale.

În toate situațiile însă, soluțiile au *aceeași lege*, deci ecuația are soluție slabă unică.

4. Condiția inițială este *deterministă* i.e. este adaptată la \mathcal{F}_0 (deci trebuie să fie constantă). Putem considera că valoarea inițială să fie v.a. independentă de mișcarea browniană, caz în care existența și unicitatea (tare) se păstrează, cu condiția să considerăm soluția adaptată în raport cu filtrarea generată de \mathcal{F}_t și de valoarea inițială.

Vom nota prin $X_t(x)$ soluția ecuației (1.1).

1.5.2 Continuitatea și derivabilitatea soluției în raport cu datele inițiale: în ipotezele afirmației 1.5.1., există versiuni continue în (t, x) ale integralelor stocastice și a lui $X_t(x)$. Fie $\sigma_j, b_j, j = 1, \dots, d$ global Lipschitz; dacă derivatele $\partial\sigma_j/\partial x^k, \partial b_j/\partial x^k, j = 1, \dots, d, k = 1, \dots, m$, sunt continue și mărginite, atunci matricea iacobiană $Y_j^i(t, x) = \partial X_t^i/\partial x^j(x)$ (în sens L^2) există și

satisface ecuația

$$Y_j^i(t, x) = \delta_j^i + \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^d \int_0^t \frac{\partial \sigma_l^i}{\partial x^k}(s, X_s(x)) Y_j^k(s, x) dW_s^l + \sum_{k=1}^m \int_0^t \frac{\partial b}{\partial x^k}(s, X_s(x)) Y_j^k(s, x) ds. \quad (1.2)$$

Are loc un rezultat similar afirmației 1.5.2., în care derivatele de orice ordin ale coeficienților ecuației stocastice sunt continue și mărginite, iar concluzia este că soluția este infinit derivabilă în raport cu x . Se poate determina explicit ecuația satisfăcută de derivate.

1.5.3 Dependența continuă de coeficienți sau stabilitatea ecuațiilor stocastice: fie σ_j^N, b^N global Lipschitz și cu creștere cel mult polinomială cu aceeași constantă K , pentru orice $N \geq 0$. Notăm cu X_t^N soluția ecuației

$$X_t^N = X_0^N + \sum_{j=1}^d \int_0^t \sigma_j^N(s, X_s^N) dW_s^j + \int_0^t b^N(s, X_s^N) ds.$$

Dacă $\lim_{N \rightarrow \infty} E|X_0^N - X_0^0|^2 = 0$ și, pentru orice $a > 0$, $0 \leq t \leq T$, avem $\lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{|x| \leq a} \left\{ \sum_{j=1}^d |\sigma_j^N(t, x) - \sigma_j^0(t, x)| + b^N(t, x) - b^0(t, x) \right\} = 0$, atunci $\lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq t \leq T} E|X_t^N - X_t^0|^2 = 0$ (convergența are loc chiar în probabilitate).

Observație Să considerăm $X_{s,t}(x)$; $s \leq t$, soluția ecuației

$$X_{s,t}(x) = x + \sum_{j=1}^d \int_s^t \sigma_j(r, X_{s,r}(x)) dW_r^j + \int_s^t b(r, X_{s,r}(x)) dr,$$

cu $x \in \mathbf{R}^m$ dat i.e. la momentul s , soluția pleacă din x . Dacă coeficienții sunt global Lipschitz, pentru aproape toți $\omega \in \Omega$, soluția este morfism injectiv pe imagine:

$$X_{r,t}(x, \omega) = X_{s,t}(X_{r,s}(x, \omega), \omega) \text{ pentru orice } r < s < t.$$

Dacă coeficienții sunt de clasă C^∞ , atunci $X_{s,t}(\cdot, \omega) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ este difeomorfism de clasă C^∞ a.s., pentru orice $s < t$.

Presupunem în continuare că σ_j, b satisfac condiția Lipschitz din afirmația 1.5.1. local i.e. satisfac condiția Lipschitz pe domeniile mărginite din \mathbb{R}^m . Procesul $X_t(x)$, $x \in \mathbb{R}^m$, $t \in [0, T_x \wedge T]$, cu valori în \mathbb{R}^d , se numește soluție locală a ecuației (1.1) cu condiția inițială $X_0(x) = x$ dacă

(i) există un timp de stopare T_x și un șir crescător de timpi de stopare T_x^n ; $n = 1, 2, \dots$, \mathcal{F}_t -măsurabili, cu $T_x^n < T_x$ și $T_x^n \nearrow T_x$ pentru orice x , a.s.

(ii) $X_t(x)$ este continuă în (t, x) , este \mathcal{F}_t -semimartingal pentru orice x și satisface ecuația (1.1) pentru orice $t \in [0, T_x]$.

Soluția $X_t(x)$ se numește maximală dacă are loc relația:

$$\lim_{t \nearrow T_x} X_t(x) = +\infty \text{ pe mulțimea } \{T_x(\omega) < +\infty\},$$

iar $T_x(\omega)$ se numește timpul de explozie al soluției.

1.5.4 Dacă σ_j, b sunt local Lipschitz, atunci ecuația (1.1) admite o soluție maximală unică.

Soluția maximală $X_t(x)$ se numește conservativă (sau neexplozivă) dacă $P(T_x = +\infty) = 1$ pentru orice x ; se numește strict conservativă dacă $P(T_x = +\infty \text{ pentru orice } x) = 1$.

1.5.5 Dacă $\|b(x)\|^2 + \|\sigma(x)\|^2 \leq k(1 + \|x\|^2)$, atunci soluția maximală (dacă există) este conservativă.

Observații În general, conservativ nu implică strict conservativ; în dimensiune 1, răspunsul este da. Fie ecuația stocastică

$$X_t = x + \sum_{j=1}^d \int_0^t \sigma_j(X_s) dB_s + \int_0^t b(X_s) ds, \quad t \in [0, T]$$

Presupunem că $\sigma \neq 0$ și fie

$$c(x) = \exp\left(2 \int_0^x \frac{b(s)}{\sigma^2(s)} ds\right), \quad k(x) = \int_0^x \frac{2}{c(r)} \int_0^r \frac{c(s)}{\sigma^2(s)} ds dr.$$

Atunci soluția X_t este strict conservativă dacă și numai dacă $k(+\infty) = k(-\infty) = +\infty$.

Exemple de ecuații stocastice 1. (Ecuații liniare) Soluția ecuației

$$X_t = X_0 + \int_0^t [\sigma_1(s) + \sigma_2(s)X_s]dW_s + \int_0^t [b_1(s) + b_2(s)X_s]ds$$

se poate pune în forma

$$X_t = Y_t \left\{ X_0 + \int_0^t Y_s^{-1} \sigma_1(s) dW_s + \int_0^t Y_s^{-1} [b_1(s) - \sigma_1(s)\sigma_2(s)] ds \right\},$$

unde $Y_t = \exp \left\{ \int_0^t \sigma_2(s) dW_s + \int_0^t [b_2(s) - \frac{1}{2}\sigma_2^2(s)] ds \right\}$.

În cazul multi-dimensional, se poate scrie o formulă similară în care apare matricea fundamentală de soluții a ecuației omogene asociată.

De exemplu,

$$X_t := \alpha e^{-\beta t} \int_0^t e^{\beta s} dW_s, \quad X_0 = 0,$$

numit *procesul Ornstein-Uhlenbeck* este soluția unică a ecuației stocastice Langevin

$$X_t = \alpha W_t - \beta \int_0^t X_s ds.$$

2. Fie $\sigma \in C^2(\mathbf{R})$ cu derivatele de ordine 1 și 2 mărginite, iar b o funcție lipschitziană. Ecuația diferențială stocastică 1-dimensională

$$X_t = x_0 + \int_0^t \sigma(X_s) dW_s + \int_0^t \left[b(X_s) + \frac{1}{2} \sigma(X_s) \sigma'(X_s) \right] ds$$

are o soluție care se poate scrie în forma $X_t = u(W_t, Y_t)$, unde $u(x, y)$ este soluția ecuației diferențiale ordinare

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sigma(u), \quad u(0, y) = y$$

și, pentru orice $\omega \in \Omega$, $\{Y_t(\omega), t \geq 0\}$ este soluția ecuației diferențiale ordinare

$$Y_t'(\omega) = f(W_t(\omega), Y_t(\omega)), \quad Y_0(\omega) = x_0,$$

unde $f(x, y) = b(u(x, y)) \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^{-1}$.

3. Dacă

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\sigma \left\{ \frac{1}{\sigma^2} \frac{\partial \sigma}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{b}{\sigma} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} \right\} \right] = 0,$$

atunci soluția ecuației

$$X_t = X_0 + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s + \int_0^t b(s, X_s) ds$$

se determină prin

$$X_t = k \left(t, h(0, X_0) + \int_0^t \bar{\sigma}(s) dW_s + \int_0^t \bar{b}(s) ds \right),$$

unde $\bar{\sigma}' = \bar{\sigma} \sigma \left\{ \frac{1}{\sigma^2} \frac{\partial \sigma}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{b}{\sigma} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} \right\}$, $\frac{\partial h}{\partial x}(t, x) = \frac{\bar{\sigma}(t)}{\sigma(t, x)}$,

k este inversa lui h (in al doilea argument), iar

$$\bar{b}(t) = \left[\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x} b + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \sigma^2 \right](t, x).$$

4. Dacă M_t este martingal local continuu, atunci

$$Z_t := \exp \left(M_t - \frac{1}{2} \langle M \rangle_t \right)$$

satisface ecuația $Z_t = 1 + \int_0^t Z_s dM_s$.

Martingalul Z_t se numește *martingal exponențial*. În particular, dacă M_t este funcție deterministă de pătrat integrabil, atunci Z_t este martingal de pătrat integrabil și $\exp(W_t - t/2)$ joacă în calculul stocastic rolul exponențialei obișnuite.

5. Ecuația $X_t = x + \int_0^t X_s dW_s + \frac{1}{2} \int_0^t X_s ds$ are soluția $X_s = x \exp(W_t)$, $t \geq 0$.

6. Ecuația $X_t = 1 + \int_0^t X_s^2 dW_s + \int_0^t X_s^3 ds$ are soluția $X_t = (1 - W_t)^{-1}$. Care este timpul de explozie?

7. Podul brownian X^a i.e. mișcarea browniană B pe $[0, 1]$ condiționată de $W_1 = a$, $a \in \mathbb{R}$ dat, este soluția ecuației stocastice

$$X_t^a = W_t + \int_0^t \frac{a - X_s^a}{1 - s} ds \text{ pentru } 0 \leq t < 1.$$

Integrandul "explodează" când $t \rightarrow 1$, deci X^n converge către a la timpul 1.

8. Ecuația stocastică

$$X_t = x + c \int_0^t X_s^{1/2} dW_s + \int_0^t (-aX_s + b) dt,$$

cu $a \in \mathbb{R}, c > 0, b \geq 0$ are soluție unică.

9. Procesele Bessel de ordin d sunt definite prin $X_t := |W_t|$, unde W_t este mișcare browniană d -dimensională. Aceste procese satisfac ecuația stocastică

$$X_t = |W_0| + B_t + \frac{d-1}{2} \int_0^t \frac{ds}{X_s},$$

unde B_t este o mișcare browniană 1-dimensională.

1.5.6 Procesele de difuzie (i.e. soluția $X_t(x)$ a ecuației (1.1)) sunt Markov.

Fie $P_{s,t}(x, dy), s \leq t$ semigrupul probabilităților de tranziție i.e. $P_{s,t}(x, dy)$ este legea lui X_t cunoscând $X_s = x$. Dacă matricile $c(t, x) = \sigma(t, x)\sigma^*(t, x)$ sunt inversabile, atunci $P_{s,t}(x, dy)$ admit densități de probabilitate. Cum $c(t, x)$ este matrice simetrică, deci are valori proprii ≥ 0 , condiția de inversabilitate revine la faptul că valorile proprii sunt > 0 .

Sa considerăm în continuare cazul omogen i.e. coeficienții $\sigma_j, j = 1, \dots, d$ și b nu depind explicit de timp (de primul argument). Fie deci ecuația stocastică

$$X_t = x + \sum_{j=1}^d \int_0^t \sigma_j(X_s) dW_s^j + \int_0^t b(X_s) ds, \text{ cu } X_0 = x \in \mathbb{R}^m. \quad (1.3)$$

cu $\sigma_j, b: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m, 1 \leq j \leq d$. Legea condiționată a lui X_{T+t} , cunoscând că $X_T = x$ este aceeași cu a lui X_t , cunoscând că $X_0 = x$ i.e. procesul Markov X este omogen. Același raționament cu $T =$ timp de stopare finit, arată că X are proprietatea tare Markov.

1.5.7 Generatorul infinitezimal al proceselor de difuzie: fie X_t soluția ecuației (1.3), în ipotezele afirmației 1.5.1. Atunci

funcțiile cu suport compact $C_c^2(\mathbf{R}^d) \subset \text{Dom.}(\mathcal{L})$; pentru aceste funcții avem

$$\mathcal{L}f(x) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m c^{ij}(x) \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(x) + \sum_{i=1}^m b^i(x) \frac{\partial f}{\partial x^i},$$

unde $c(x) = \sigma(x)\sigma^*(x)$, iar

$$M_t := \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^d \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x^i}(X_s) \sigma_j^i(X_s) dW_s^j$$

este martingal local. Dacă b, σ_j sunt mărginite, enunțul rămâne adevărat și pentru funcțiile mărginite $C_b^2(\mathbf{R}^d)$. De exemplu, în cazul mișcării browniene, avem $\mathcal{L} = \Delta/2$ pe $C_b^2(\mathbf{R}^d)$.

1.5.8 Legătura cu teoria ecuațiilor diferențiale ordinare și cu derivate parțiale Fie X_t soluția ecuației (1.3) și să notăm $E^{s,x}$ media condiționată de $X_s = x$. Dacă $f_0 : \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$ este măsurabilă și mărginită, atunci

$$f(s, x) = E^{s,x} [f_0(X_t)] = \int_{\mathbf{R}^m} f_0(y) P(s, t, x, dy)$$

pentru $t \in [0, T]$ fixat și $s < t$, este continuă și mărginită împreună cu derivatele $\partial f / \partial x^i$, $\partial^2 f / \partial x^i \partial x^j$; $i, j = 1, \dots, m$, deci este în domeniul operatorului \mathcal{L} .

Totodată, $f(s, x)$ este diferențiabilă în raport cu s și satisface ecuația *inapoi* $\partial f / \partial s + \mathcal{L}f = 0$ cu condiția la limită $\lim_{s \rightarrow t} f(s, x) = f_0(x)$.

1. În cazul în care $P(s, t, x, \cdot)$ are densitatea $p(s, t, x, y)$ continuă în s și dacă derivatele $\partial p / \partial x^i$, $\partial^2 p / \partial x^i \partial x^j$ există și sunt continue în s , atunci p este soluția fundamentală (în sensul distribuțiilor) a ecuației *inapoi* i.e. cu condiția $\lim_{s \rightarrow t} p(s, t, x, y) = \delta_{x-y}$.

2. În plus, dacă derivatele următoare: $\partial p / \partial t$, $\partial(B^k(t, y)p) / \partial y^k$ și $\partial^2(A^k(t, y)A^l(t, y)p) / \partial y^k \partial y^l$ există și sunt continue, atunci $p(s, t, x, y)$ este soluția fundamentală a ecuației *înainte* (sau ecuația Fokker-Planck) $-\partial p / \partial t + \mathcal{L}^*p = 0$, unde

$$\mathcal{L}^*f = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{k,l=1}^m \frac{\partial^2}{\partial y^k \partial y^l} (\sigma_i^k \sigma_i^l f) + \sum_{k=1}^m \frac{\partial}{\partial y^k} (b^k f)$$

este adjunctul formal al lui \mathcal{L} .

3. Fie D domeniu mărginit în \mathbf{R}^m , $u \in C^2(D)$, u continuă pe \bar{D} și $\Delta u = 0$ pe D . Atunci $u(x) = E^x u(W_{\tau_D})$, unde W este mișcare browniană d -dimensională care pleacă din x și τ_D este prima ieșire a lui W din D . Mai mult, fie $\partial B(x, r)$ frontiera bilei $B(x, r)$ de centru x și rază r în \mathbf{R}^m , f funcție mărginită pe ∂D și $u(x) := E^x f(W_{\tau_D})$. Fie $x \in D$ cu $r < \text{dist}(x, \partial D)$ și $\tau_{B(x, r)}$ prima ieșire a lui W din $B(x, r)$. Atunci $u(x) = E^x u(W_{\tau_{B(x, r)}})$ și rezultă că $u(x)$ este media valorilor ei pe suprafețele bilelor mici centrate în x , deci u este armonică.

4. Să presupunem că următoarele condiții sunt îndeplinite. Fie un domeniu mărginit $D \subset \mathbf{R}^m$ cu frontiera ∂D netedă.

(i) $\sum_{i=1}^d \sum_{k,l=1}^m \sigma_i^k(x) \sigma_i^l(x) \xi_k \xi_l \geq \mu \|\xi\|^2$ cu $\mu > 0$, pentru orice $x \in D$ și $\xi \in \mathbf{R}^m$ i.e. \mathcal{L} este uniform eliptic pe D .

(ii) Funcțiile σ_j , B , g sunt uniform Lipschitz continue pe \bar{D} și f_0 este continuă și mărginită pe ∂D .

Notăm prin τ_D prima ieșire din D a lui X ; în condițiile de mai sus avem $\tau_D < +\infty$ a.s. și problema Dirichlet

$$\mathcal{L}f = g, \quad x \in D; \quad f|_{\partial D} = f_0$$

satisface $f(X_t) \rightarrow f_0(X_{\tau_D})$ când $t \nearrow \tau_D$ și are soluția dată de

$$f(x) = E^x \left[f_0(X_{\tau_D}) - \int_0^{\tau_D} g(X_s) ds \right] \text{ pentru } x \in D,$$

unde $X(t)$ este soluția ecuației (1.3).

5. Să considerăm problema Cauchy

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathcal{L}f(t, \cdot) = g \text{ pe } [0, T) \times \mathbf{R}^d, \quad f(T, x) = f_0(x), \quad x \in \mathbf{R}^d.$$

Atunci

$$f(t, x) = E^{t, x} \left[f_0(X_T) - \int_t^T g(s, X_s) ds \right] \text{ pe } [0, T) \times \mathbf{R}^d.$$

CALCUL MALLIAVIN

2.1 HAOS ȘI INTEGRALE WIENER MULTIPLE

Notăm prin H spațiul Hilbert real și separabil $L^2(\mathcal{T}, \mathcal{B}, \mu)$ înzestrat cu produsul scalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ și norma indusă $\| \cdot \|$, unde $\mathcal{T} = [0, T] \times \{1, \dots, d\}$, $T > 0$, sau $\mathcal{T} = \mathbf{R}_+ \times \{1, \dots, d\}$, \mathcal{B} sunt borelienele pe \mathcal{T} , iar μ este produsul dintre măsura Lebesgue λ și măsura uniformă pe $\{1, \dots, d\}$. Vom folosi identificarea $H \simeq L^2([0, T]; \mathbf{R}^d)$, respectiv $H \simeq L^2(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}^d)$. În aceste condiții există un câmp de probabilitate (Ω, \mathcal{F}, P) și pe el o familie gaussiană de variabile aleatoare $(W(h), h \in H)$ cu proprietățile :

- (a) aplicația $h \rightarrow W(h)$ este liniară
- (b) pentru orice $h \in H$, $W(h)$ este variabilă aleatoare centrată și $E[W(h)^2] = \|h\|^2$.

Intr-adevăr, știm că pentru orice repartiție (i.e. probabilitate pe \mathbf{R}) există un câmp de probabilitate (Ω, \mathcal{F}, P) și un șir $(g_n)_{n \geq 1}$ de variabile aleatoare independente pe Ω , toate având legea dată de acea repartiție. În cazul repartiției $N(0, 1)$, fie $(e_n, n \geq 1)$ o bază în H ; seria $\sum_{n=0}^{\infty} \langle h, e_n \rangle g_n$ este convergentă în $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ către o variabilă aleatoare pe care o notăm $W(h)$. Această serie converge și a.p.t. pentru că, în cazul gaussian, convergența a.p.t. și în L^2 sunt echivalente iar $W(h)$ este de fapt o clasă de echivalență de variabile aleatoare. Mai mult, aplicația $h \rightarrow W(h)$ este o izometrie liniară a lui H pe un subspațiu închis \mathcal{H}_1 al lui $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$; elementele lui \mathcal{H}_1 sunt variabile aleatoare gaussiene centrate. Avem $E(W(h)W(k)) = \langle h, k \rangle$ și cum în spații gaussiene independența este echivalentă cu ortogonalitatea, obținem că $W(h), W(k)$ sunt independente dacă și numai

dacă $h \perp k$ în H . Aplicația W este caracterizată de familia de variabile aleatoare $\{W(A), A \in \mathcal{B}, \mu(A) < \infty\}$, unde $W(A) = (W1_A)$. Să remarcăm că legea lui $W(A)$ este $N(0, \mu(A))$ și că, dacă $A \in \mathcal{B}$ cu $\mu(A) < \infty$ se scrie $A = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ disjunct, atunci $W(A) = \sum_{n=0}^{\infty} W(A_n)$ a.p.t. și în $L^2(\mathcal{T}, \mathcal{B}, \mu)$; totuși, mulțimea de probabilitate 0 depinde de A și de $(A_n)_{n \geq 0}$ deci nu există o măsură veritabilă $m(\omega, \cdot)$ astfel încât $W(A)(\omega) = m(\omega, A)$ a.p.t. pentru orice $A \in \mathcal{B}$. Totodată, pentru A, B în \mathcal{B} disjuncte și de μ -măsură finită, avem că $E[W(A)W(B)] = \mu(A \cap B)$ și că $W(A), W(B)$ sunt necorelate, deci independente.

Aplicația W se numește zgomot alb pe (T, B) , iar familia $\{W_t^i := W([0, t] \times \{i\}), (t, i) \in \mathcal{T}\}$ se numește mișcare browniană d -dimensională sau proces Wiener.

Fie $H_n(x)$ al n -lea polinom Hermite definit prin

$$H_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!} e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2/2}), \quad n \geq 1$$

și $H_0(x) = 1$. Aceste polinoame sunt coeficienții dezvoltării în serie de puteri după t a funcției $F(x, t) = \exp(tx - t^2/2)$. Într-adevăr, avem

$$\begin{aligned} F(x, t) &= \exp \left[\frac{x^2}{2} - \frac{(x-t)^2}{2} \right] & (2.1) \\ &= e^{x^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \left(\frac{d^n}{dt^n} e^{-(x-t)^2/2} \right) \Big|_{t=0} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n H_n(x). \end{aligned}$$

Din această dezvoltare rezultă și următoarele proprietăți.

$$H'_n(x) = H_{n-1}(x), \quad n \geq 1 \quad (2.2)$$

$$(n+1)H_{n+1}(x) = xH_n(x) - H_{n-1}(x), \quad n \geq 1 \quad (2.3)$$

$$H_n(-x) = (-1)^n H_n(x), \quad n \geq 1 \quad (2.4)$$

Într-adevăr, (2.2.) rezultă din $\frac{\partial F}{\partial x} = tF$, (2.3.) din $\frac{\partial F}{\partial t} = (x-t)F$ și (2.4.) din $F(-x, t) = F(x, -t)$. Primele polinoame Hermite sunt $H_1(x) = x$ și $H_2(x) = \frac{x^2-1}{2}$. Din (2.3.) rezultă că termenul de grad maxim al lui $H_n(x)$ este $x^n/n!$. Din dezvoltarea lui

$F(0, t) = \exp(-t^2/2)$ după puterile lui t , obținem că $H_n(0) = 0$ dacă n este impar și $H_{2k}(0) = \frac{(-1)^k}{2^k k!}$ pentru $k \geq 1$.

LEMA 2.1.1 Fie X, Y variabile aleatoare gaussiene centrate i.e. $E(X) = E(Y) = 0$ și reduse i.e. $E(X^2) = E(Y^2) = 1$. Atunci, pentru $m, n \geq 0$, avem

$$E(H_n(X)H_m(Y)) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } n \neq m \\ \frac{1}{n!} (E(XY))^n, & \text{dacă } n = m. \end{cases}$$

Demonstrație. Pentru $s, t \in \mathbb{R}$ avem

$$E \left[\exp \left(sX - \frac{s^2}{2} \right) \exp \left(tY - \frac{t^2}{2} \right) \right] = \exp(st E(XY)).$$

Luăm în ambii membri derivata parțială $\frac{\partial^{n+m}}{\partial s^n \partial t^m}$ calculată în $s = t = 0$ și obținem

$$E(n! m! H_n(X)H_m(Y)) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } n \neq m \\ n! (E(XY))^n & \text{dacă } n = m. \end{cases} \quad \square$$

Pentru $n \geq 1$ notăm \mathcal{H}_n subspațiului închis din $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ generat de variabilele aleatoare $\{H_n(W(h)) ; h \in H, \|h\| = 1\}$. \mathcal{H}_0 este mulțimea constantelor, iar \mathcal{H}_1 coincide cu mulțimea $\{W(h), h \in H\}$. Din lema 2.1.1 rezultă că subspațiile \mathcal{H}_m și \mathcal{H}_n sunt ortogonale pentru $m \neq n$. Spațiul \mathcal{H}_n se va numi haosul de ordin n (în sensul lui Wiener) și are loc următoarea descompunere ortogonală.

TEOREMA 2.1.2 Notăm prin \mathcal{G} σ -algebra generată de variabilele aleatoare $W(h), h \in H$. Atunci spațiul $L^2(\Omega, \mathcal{G}, P)$ se descompune în suma ortogonală infinită a subspațiilor \mathcal{H}_n i.e.

$$L^2(\Omega, \mathcal{G}, P) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n.$$

Demonstrație. Să considerăm $X \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, P)$ ortogonală pe \mathcal{H}_n , pentru orice $n \geq 0$; vrem să arătăm că $X = 0$. Avem $E(XH_n(W(h))) = 0$ pentru orice $h \in H$ cu $\|h\| = 1$. Folosind faptul că x^n se poate scrie ca o combinație liniară de polinoame Hermite $H_r(x)$; $0 \leq r \leq n$, obținem că $E(XW(h)^n) = 0$ pentru

orice $n \geq 0$, deci $E(X \exp(tW(h))) = 0$ pentru orice $t \in \mathbb{R}$ și $h \in H$ de normă 1. Liniaritatea aplicației $h \rightarrow W(h)$ implică

$$E\left(X \exp \sum_{i=1}^m t_i W(h_i)\right) = 0, \quad (2.5)$$

pentru $t_1, \dots, t_m \in \mathbb{R}$, $h_1, \dots, h_m \in H$, $m \geq 1$. Dacă $h_1, \dots, h_m \in H$, $m \geq 1$ sunt fixați, relația (2.5) spune că transformata Laplace a măsurii (cu semn)

$$\nu(B) = E[X \mathbf{1}_B(W(h_1), \dots, W(h_m))],$$

cu B boreliană în \mathbb{R}^m , este identic zero pe \mathbb{R}^m . Aceasta implică $\nu = 0$ și deci $E(X \mathbf{1}_G) = 0$ pentru orice $G \in \mathcal{G}$, adică $X = 0$. \square

Pentru $n \geq 1$ să considerăm spațiul \mathcal{P}_n^0 format din variabilele aleatoare $p(W(h_1), \dots, W(h_k))$ cu $k \geq 1$, $h_1, \dots, h_k \in H$ și p polinom real în k variabile, de grad cel mult egal cu n . Fie \mathcal{P}_n închiderea lui \mathcal{P}_n^0 în $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Atunci are loc

$$\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{H}_n = \mathcal{P}_n.$$

Într-adevăr, incluziunea " \subset " este imediată. Pentru incluziunea inversă este suficient să arătăm că \mathcal{P}_n este ortogonal pe \mathcal{H}_m pentru $m > n$. Vrem să arătăm că

$$E(p(W(h_1), \dots, W(h_k)) H_m(W(h))) = 0,$$

unde $\|h\| = 1$, p este polinom de grad cel mult n și $m > n$. Dacă $\{e_1, \dots, e_j, h\}$ este o familie ortonormală, putem înlocui $p(W(h_1), \dots, W(h_k))$ cu $q(W(e_1), \dots, W(e_j), W(h))$, cu gradul lui q cel mult n . Apoi, din faptul că monomul x^r se poate exprima ca o combinație liniară finită de polinoame Hermite $H_q(x)$; $0 \leq q \leq r$, obținem că $E(W(h)^r H_m(W(h))) = 0$ pentru orice $r \leq n < m$. \square

Fie $(e_i, i \geq 1)$ o bază în H și Λ mulțimea multiindicilor $a = (a_1, a_2, \dots)$; $a_i \in \mathbb{N}$ cu proprietatea că toți termenii sunt nuli cu excepția unui număr finit dintre ei. Pentru $a \in \Lambda$ notăm $a! = \prod_{i=1}^{\infty} a_i!$, $|a| = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$ și definim polinoamele Hermite generalizate $H_a(x)$, $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ prin

$$H_a(x) = \prod_{i=1}^{\infty} H_{a_i}(x_i).$$

Produsul de mai sus este bine definit deoarece $H_0(x) = 1$ și a_i sunt nuli cu excepția unui număr finit dintre ei. Familia $\{\Phi_a = (a!)^{1/2} \prod_{i=1}^{\infty} H_{a_i}(W(e_i)), a \in \Lambda\}$ este sistem ortonormal deoarece, pentru orice $a, b \in \Lambda$ avem

$$\begin{aligned} E \left(\prod_{i=1}^{\infty} H_{a_i}(W(e_i)) H_{b_i}(W(e_i)) \right) \\ = \prod_{i=1}^{\infty} E(H_{a_i}(W(e_i)) H_{b_i}(W(e_i))) \quad (2.6) \\ = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{a_i!} \delta_{a_i, b_i} = \frac{1}{a!} \delta_{a, b}. \end{aligned}$$

PROPOZIȚIA 2.1.3 Pentru $n \geq 1$ fixat, familia de variabile aleatoare

$$\left\{ (a!)^{1/2} \prod_{i=1}^{\infty} H_{a_i}(W(e_i)), a \in \Lambda, |a| = n \right\} \quad (2.7)$$

este o bază în \mathcal{H}_n .

Demonstrație. Din formula (2.6) rezultă că elementele familiei (2.7) sunt mutual ortogonale când n variază. Pe de altă parte, variabilele aleatoare din (2.7) aparțin lui \mathcal{P}_n . Este deci suficient să arătăm că orice variabilă aleatoare polinomială de forma $p(W(h_1), \dots, W(h_k))$ poate fi aproximată cu polinoame în $W(e_i)$, iar acest lucru este clar deoarece $(e_i, i \geq 1)$ este bază a lui H . \square

Exerciții 1. Deduceți următoarea formulă explicită pentru polinoamele Hermite:

$$H_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(-1)^k x^{n-2k}}{k! (n-2k)! 2^k}.$$

Ca aplicație arătați că, dacă Y este variabilă aleatoare cu legea $N(0, \sigma^2)$, atunci

$$E(H_n(Y)) = \begin{cases} \frac{(2m!)^{1/2} (\sigma^2 - 1)^m}{2^m m!}, & \text{dacă } n = 2m \\ 0, & \text{dacă } n \text{ este impar.} \end{cases} \quad \square$$

2. O altă realizare a mișcării browniene este următoarea : $\Omega = C_0([0, T] \times \mathbf{R}^d)$ sau $C_0(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^d)$, P este măsura Wiener pe Ω , \mathcal{F} este σ -algebra borelienelor lui Ω în raport cu P , iar $W_t(\omega) = \omega(t)$. Să observăm că mișcarea browniană este proces cu creșteri independente (chiar de trecut), gaussian centrat cu covariația $E[W_t W_s] = t \wedge s$, cu legea lui $W_t^i - W_s^i$ data de $N(0, t - s)$ și cu traiectoriile continue a.s. Pentru ultima afirmație folosiți criteriul de continuitate al lui Koimogorov, folosind exercitiul precedent și arătând în prealabil că $E(|W_t^i - W_s^i|^{2k}) = \frac{(2k)!}{2^k k!} |t - s|^k$ pentru $i = 1, \dots, d$ și orice $k \in \mathbf{N}^*$.

Cu notațiile precedente, fie $m \geq 1$ și

$$\mathcal{B}_0 = \{A \in \mathcal{B} : \mu(A) < \infty\}.$$

Vrem să definim integralele stocastice multiple $I_m(f)$ pentru $f \in L^2(\mathcal{T}^m, \mathcal{B}^m, \mu^m)$. Notăm \mathcal{E}_m mulțimea funcțiilor elementare de forma

$$f(t_1, \dots, t_m) = \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n a_{i_1, \dots, i_m} \mathbf{1}_{A_{i_1} \times \dots \times A_{i_m}}(t_1, \dots, t_m), \quad (2.8)$$

unde $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{B}_0$ sunt mutual disjuncte și $a_{i_1, \dots, i_m} = 0$ dacă oricare doi indici sunt egali. Observați că f se anulează pe dreptunghiurile care intersectează diagonalele $\{t_i = t_j, i \neq j\}$.

Pentru f de forma (2.8) definim

$$I_m(f) = \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n a_{i_1, \dots, i_m} W(A_{i_1}) \dots W(A_{i_m}).$$

Definiția nu depinde de reprezentarea lui f și au loc următoarele proprietăți.

- (a) I_m este liniară,
 (b) $I_m(f) = I_m(\tilde{f})$, unde \tilde{f} reprezintă regularizarea simetrică a lui f i.e.

$$\tilde{f}(t_1, \dots, t_m) = \frac{1}{m!} \sum_{\sigma} f(t_{\sigma(1)}, \dots, t_{\sigma(m)}),$$

când σ parcurge mulțimea permutărilor lui $\{1, \dots, m\}$ și

$$(c) E(I_m(f)I_q(g)) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } m \neq q \\ m! \langle \tilde{f}, \tilde{g} \rangle_{L^2(T^m)}, & \text{dacă } m = q. \end{cases}$$

Proprietatea (a) este evidentă ; demonstrăm ușor (b) pentru o funcție de tipul $f(t_1, \dots, t_m) = 1_{A_{i_1} \times \dots \times A_{i_m}}(t_1, \dots, t_m)$ și apoi folosim liniaritatea. Pentru $m \neq q$, proprietatea (c) rezultă din faptul că $f \in \mathcal{E}_m$ și $g \in \mathcal{E}_q$ pot fi asociate aceleiași partiții A_1, \dots, A_n . Pentru $m = q$ presupunem f și g elementare și simetrice date de (2.8) respectiv

$$g(t_1, \dots, t_m) = \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n b_{i_1 \dots i_m} 1_{A_{i_1} \times \dots \times A_{i_m}}(t_1, \dots, t_m).$$

Obținem

$$\begin{aligned} E(I_m(f)I_m(g)) &= E \left\{ \left(\sum_{i_1 < \dots < i_m} m! a_{i_1 \dots i_m} W(A_{i_1}) \dots W(A_{i_m}) \right) \right. \\ &\quad \left. \times \left(\sum_{i_1 < \dots < i_m} m! b_{i_1 \dots i_m} W(A_{i_1}) \dots W(A_{i_m}) \right) \right\} \\ &= \sum_{i_1 < \dots < i_m} (m!)^2 a_{i_1 \dots i_m} b_{i_1 \dots i_m} \mu(A_{i_1}) \dots \mu(A_{i_m}) \\ &= m! \langle f, g \rangle_{L^2(T^m)}. \end{aligned}$$

Pentru a putea extinde integralele stocastice multiple la spațiul $L^2(T^m)$, trebuie să demonstrăm că spațiul funcțiilor elementare \mathcal{E}_m este dens în $L^2(T^m)$. Este suficient pentru aceasta să arătăm că funcțiile caracteristice ale oricărei mulțimi de forma $A = A_1 \times \dots \times A_m$, $A_i \in \mathcal{B}_0$, $1 \leq i \leq m$ pot fi approximate cu funcții elementare din \mathcal{E}_m . Întrucât măsura μ nu are atomi, pentru $\epsilon > 0$ există $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}_0$ mutual disjuncte și cu $\mu(B_i) < \epsilon$ pentru $i = 1, \dots, n$, astfel încât fiecare A_i poate fi scrisă ca reuniunea disjunctă a unor B_j . Aceasta este posibil deoarece, pentru orice $A \in \mathcal{B}_0$ de măsură nenulă și pentru orice

$0 < \gamma < \mu(A)$ există o mulțime măsurabilă $B \subset A$ de măsură γ . Punem $\alpha := \mu(\bigcup_{i=1}^m A_i)$ și obținem

$$1_A = \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n \epsilon_{i_1, \dots, i_m} 1_{B_{i_1} \times \dots \times B_{i_m}},$$

unde $\epsilon_{i_1, \dots, i_m}$ este 0 sau 1. Impărțim această sumă în două părți. Fie I mulțimea m -multiinducilor (i_1, \dots, i_m) cu toți indicii diferiți între ei și J complementara lui I . Punem

$$1_B = \sum_{(i_1, \dots, i_m) \in I} \epsilon_{i_1, \dots, i_m} 1_{B_{i_1} \times \dots \times B_{i_m}}.$$

Atunci $1_B \in \mathcal{E}_m$, $B \subset A$ și avem

$$\begin{aligned} \|1_A - 1_B\|_{L^2(\mathcal{T}^m)}^2 &= \sum_{(i_1, \dots, i_m) \in J} \epsilon_{i_1, \dots, i_m} \mu(B_{i_1}) \dots \mu(B_{i_m}) \\ &\leq C_m^2 \sum_{i=1}^n \mu^2(B_i) \left(\sum_{i=1}^n \mu(B_i) \right)^{m-2} \leq C_m^2 \epsilon \alpha^{m-1} \end{aligned}$$

și astfel obținem rezultatul de aproximare căutat.

Luăm $f = g$ în proprietatea (c) și obținem

$$E(I_m(f)^2) = m! \|\tilde{f}\|_{L^2(\mathcal{T}^m)}^2 \leq m! \|f\|_{L^2(\mathcal{T}^m)}^2,$$

deci operatorul I_m poate fi prelungit la un operator liniar și continuu de la $L^2(\mathcal{T}^m)$ la $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, care satisface proprietățile (a), (b), (c). Vom folosi următoarea notație pentru integralele Wiener multiple:

$$I_m(f) = \int_{\mathcal{T}^m} f(t_1, \dots, t_m) W(dt_1) \dots W(dt_m).$$

Are loc următoarea formulă de multiplicare:

PROPOZIȚIA 2.1.4 *Fie $f \in L^2(\mathcal{T}^m)$ și $g \in L^2(\mathcal{T})$. Pentru $1 \leq k \leq m$, definim*

$$\begin{aligned} (f \times_{(k)} g)(t_1, \dots, t_{k-1}, t_{k+1}, \dots, t_m) \\ := \int_{\mathcal{T}} f(t_1, \dots, t_m) g(t_k) \mu(dt_k). \end{aligned}$$

Atunci $f \times_{(k)} g \in L^2(\mathcal{T}^{m-1})$ și

$$I_{m+1}(f \otimes g) = I_m(f)I_1(g) - \sum_{k=1}^m I_{m-1}(f \times_{(k)} g) \quad (2.9)$$

Demonstrație. Faptul că $f \times_{(k)} g \in L^2(\mathcal{T}^{m-1})$ rezultă din inegalitatea Cauchy-Schwartz. Pentru a demonstra (2.9), din densitatea funcțiilor elementare în $L^2(\mathcal{T}^m)$ și din liniaritate, putem presupune că $f = \mathbf{1}_{A_1 \times \dots \times A_m}$, unde $A_j \in \mathcal{B}_0$ sunt mutual disjuncte iar $g = \mathbf{1}_{A_1}$ sau $g = \mathbf{1}_{A_0}$, cu A_0 disjunctă de A_1, \dots, A_m . Cazul $g = \mathbf{1}_{A_0}$ rezultă din faptul că produsul tensorial $f \otimes g \in \mathcal{E}_m$. În cazul $g = \mathbf{1}_{A_1}$, să punem $\beta = \mu(A_1) \dots \mu(A_m)$. Pentru $\epsilon > 0$ dat, să considerăm o partiție măsurabilă $A_1 = \bigcup_{i=1}^n B_i$ astfel ca $\mu(B_i) < \epsilon$. Definim funcția elementară

$$h_\epsilon = \sum_{i \neq j} \mathbf{1}_{B_i \times B_j \times A_2 \times \dots \times A_m}.$$

Obținem

$$\begin{aligned} I_m(f)I_1(g) &= W^2(A_1)W(A_2) \dots W(A_m) \\ &= \sum_{i \neq j} W(B_i)W(B_j)W(A_2) \dots W(A_m) \\ &+ \sum_{i=1}^n \left(W^2(B_i) - \mu(B_i) \right) W(A_2) \dots W(A_m) \\ &\quad + \mu(A_1)W(A_2) \dots W(A_m) \\ &= I_{m+1}(h_\epsilon) + R_\epsilon + \sum_{k=1}^m I_{m-1}(f \times_{(k)} g). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Avem deci

$$\| h_\epsilon - f \otimes g \|_{L^2(\mathcal{T}^{m+1})}^2 = \sum_{i=1}^n \mu^2(B_i) \mu(A_2) \dots \mu(A_m) \leq \epsilon \beta$$

și

$$E(R_\epsilon^2) = 2 \sum_{i=1}^n \mu^2(B_i) \mu(A_2) \dots \mu(A_m) \leq 2\epsilon \beta;$$

În final facem $\epsilon \rightarrow 0$ în (2.10). \square

Observație Dacă funcția f este simetrică, atunci formula (2.9) devine

$$I_{m+1}(f \otimes g) = I_m(f)I_1(g) - mI_{m-1}(f \otimes_1 g), \quad (2.11)$$

unde $f \otimes_1 g$ înseamnă contractia (suprimarea) unui singur indice pentru f și g . În general, dacă $f \in L^2(\mathcal{T}^p)$ și $g \in L^2(\mathcal{T}^q)$ sunt simetrice, pentru $1 \leq r \leq \min(p, q)$ notăm prin $f \otimes_r g$ contractia a r argumente pentru f și g funcția

$$(f \otimes_r g)(t_1, \dots, t_{p+q-2r}) \\ := \int_{\mathcal{T}^r} f(t_1, \dots, t_{p-r}, s)g(t_{p+1}, \dots, t_{p+q-r}, s)\mu^r(ds).$$

Observăm că $f \otimes_r g \in L^2(\mathcal{T}^{p+q-2r})$ și că formula (2.11) se generalizează astfel. Fie $f \in L^2(\mathcal{T}^p)$ și $g \in L^2(\mathcal{T}^q)$ funcții simetrice. Atunci

$$I_p(f)I_q(g) = \sum_{r=0}^{p \wedge q} r! C_p^r C_q^r I_{p+q-2r}(f \otimes_r g). \quad (2.12)$$

Demonstrație. Prin inducție în raport cu q . Pentru $q = 1$ se reduce la (2.11). Presupunem că este adevărată pentru $q - 1$ și, printr-un argument de densitate, putem presupune că g este de forma $g = g_1 \tilde{\otimes} g_2$, unde $\tilde{\otimes}$ înseamnă regularizarea simetrică a produsului tensorial, iar g_1, g_2 sunt funcții simetrice ortogonale de $q - 1$ variabile (resp. o variabilă). Din (2.11) avem că

$$I_q(g_1 \tilde{\otimes} g_2) = I_{q-1}(g_1)I_1(g_2);$$

apoi folosim ipoteza de inducție și din nou (2.11). \square

Legătura dintre polinoamele Hermite și integralele stocastice multiple este dată în rezultatul următor.

TEOREMA 2.1.5 Fie $H_m(x)$ al m -lea polinom Hermite și fie $h \in H = L^2(\mathcal{T})$ de normă 1. Atunci

$$m! H_m(W(h)) = \int_{\mathcal{T}^m} h(t_1) \dots h(t_m) W(dt_1) \dots W(dt_m). \quad (2.13)$$

În consecință, integrala multiplă I_m aplică $L^2(\mathcal{T}^m)$ pe haosul Wiener \mathcal{H}_m și, conform teoremei 2.1.2, orice funcțională F de mișcarea browniană (i.e. orice variabilă aleatoare de pătrat integrabil $F \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, P)$, unde \mathcal{G} este σ -algebra generată de W) se dezvoltă în serie de integrale stocastice multiple :

$$F = \sum_{m=0}^{\infty} I_m(f_m).$$

Avem că $f_0 = E(F)$ iar I_0 este aplicația identitate pe constante. În plus, funcțiile $f_m \in L^2(\mathcal{T}^m)$ pot fi presupuse simetrice și, în acest caz, sunt unic determinate de F .

Demonstrația teoremei 2.1.5 Prin inducție după m . Pentru $m = 1$ este imediat ; presupunem adevărat pentru $1, 2, \dots, m$. Din formula de recurență pentru polinoamele Hermite (2.3) și din formula pentru produs (2.11) avem

$$\begin{aligned} & I_{m+1}(h^{\otimes(m+1)}) \\ &= I_m(h^{\otimes m}) I_1(h) - m I_{m-1}\left(h^{\otimes(m-1)} \int_{\mathcal{T}} h^2(t) \mu(dt)\right) \\ &= m! H_m(W(h)) W(h) - m(m-1)! H_{m-1}(W(h)) \\ &= m!(m+1) H_{m+1}(W(h)) = (m+1)! H_{m+1}(W(h)), \end{aligned}$$

unde prin $h^{\otimes m}$ am notat $h^{\otimes m}(t_1, \dots, t_m) = h(t_1) \dots h(t_m)$.

Fie S_m subspațiul închis din $L^2(\mathcal{T}^m)$ format din funcțiile simetrice. Integrala multiplă I_m verifică relația $E(I_m(f)^2) = m! \times \|f\|_{L^2(\mathcal{T}^m)}^2$ pe S_m . Imaginea $I_m(S_m)$ este închisă și din (2.13) conține variabilele aleatoare $H_m(W(h))$, $h \in H$, $\|h\| = 1$. În consecință $\mathcal{H}_m \subset I_m(S_m)$. Cum integralele multiple de ordine diferite sunt ortogonale, obținem că $I_m(L^2(\mathcal{T}^m)) = I_m(S_m)$ este ortogonal pe \mathcal{H}_n pentru $n \neq m$ și deci $I_m(L^2(\mathcal{T}^m)) = \mathcal{H}_m$. \square

Aceleași argumente ca mai sus arată că elementele bazei lui \mathcal{H}_m (date în propoziția 2.1.3) verifică

$$(a!)^{1/2} \prod_{i=1}^{\infty} H_{a_i}(W(e_i)) = \prod_{i=1}^{\infty} (a!)^{-1/2} I_{a_i}(e_i^{\otimes a_i})$$

$$= I_{|a|} \left((a!)^{-1/2} e_1^{\otimes a_1} \otimes e_2^{\otimes a_2} \otimes \dots \otimes e_m^{\otimes a_m} \right),$$

unde $|a| = a_1 + \dots + a_m$.

Exerciții Pentru $n \geq 1$ definim polinoamele $H_n(\lambda, x)$ prin

$$H_n(\lambda, x) = \lambda^{n/2} H_n \left(\frac{x}{\lambda^{1/2}} \right), \text{ pentru } x \in \mathbb{R}, \lambda > 0.$$

Arătați că

$$(a) \exp(tx - t^2\lambda/2) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n H_n(\lambda, x).$$

(b) Pentru orice $h \in L^2(\mathcal{T}, \mathcal{B}, \mu)$ avem

$$H_m \left(\|h\|^2, W(h) \right) = \frac{1}{m!} I_m \left(h^{\otimes m} \right).$$

Aplicații la integrala Itô și la ecuații stocastice Itô

1. Fie $f_n : \mathcal{T}^n \rightarrow \mathbb{R}$ funcție simetrică și de pătrat integrabil. Pentru aceste funcții, integrala stocastică multiplă $I_n(f_n)$ în raport cu procesul gaussian $\{W(h) = \int_{\mathcal{T}} h(s) dW_s, h \in L^2(\mathcal{T})\}$ coincide cu o integrală Itô iterată i.e.

$$\begin{aligned} & I_n(f_n) \\ &= n! \int_0^T \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{n-1}} f_n(t_1, \dots, t_n) dW_{t_1} \dots dW_{t_n}. \end{aligned}$$

Într-adevăr, formula se verifică pentru funcțiile elementare, iar în cazul general folosim un argument de densitate și ținem cont că integralele Itô iterate verifică aceeași proprietate de izometrie ca și integralele stocastice multiple.

2. Fie $\{W_t^i, (t, i) \in \mathcal{T}\}$ o mișcare browniană d -dimensională. În acest caz integrala stocastică multiplă $I_n(f_n)$ este bine definită pentru funcții $f_n((t_1, i_1), \dots, (t_n, i_n))$ de pătrat integrabil și simetrice în $(t_j, i_j) \in \mathbb{R}_+ \times \{1, \dots, d\}$, deci se poate exprima ca sumă de integrale Itô iterate :

$$\begin{aligned} I_n(f_n) &= n! \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^d \int_0^T \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{n-1}} f_n((t_1, i_1), \dots, (t_n, i_n)) \\ &\quad \times W^{i_1}(dt_1) \dots W^{i_n}(dt_n). \end{aligned}$$

În particular reținem că, pentru orice $h \in H$, $W(h)$ poate fi obținută ca integrala stocastică $\sum_{i=1}^d \int_0^T h^i(t) dW_t^i$ și că orice $F \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, cu \mathcal{F} este generată de W , se scrie ca serie de integrale stocastice multiple ortogonale.

3. Fie $\{W_t, t \geq 0\}$ o mișcare browniană reală. Am văzut în capitolul 1 că, dacă $h \in L^2[0, \infty)$, atunci

$$M_h(t) = \exp\left(\int_0^t h(s) dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t h^2(s) ds\right)$$

verifică ecuația $M_h(t) = 1 + \int_0^t M_h(s) h(s) dW_s$;

să observăm că avem descompunerea în haos

$$M_h(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \int_0^{t_n} \dots \int_0^{t_2} h(t_1) \dots h(t_n) dW_{t_1} \dots dW_{t_n}.$$

4. Ecuația $X(t) = x + \int_0^t X(s) dW_s + \frac{1}{2} \int_0^t X(s) ds$ are soluția $X(t) = x \exp(W_t)$, $t \geq 0$, iar dezvoltarea ei în serie este $X(t) = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (W_t)^n$ (convergența pentru orice $t \geq 0$).

5. Ecuația $X(t) = 1 + \int_0^t X^2(s) dW_s + \int_0^t X^3(s) ds$ are soluția $X(t) = \frac{1}{1-W_t}$, iar dezvoltarea ei în serie $X(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (W_t)^n$ diverge, cu probabilitate pozitivă și pentru t fixat, deoarece seria $\sum_{n=1}^{\infty} \|(W_t)^n\|_2$ diverge. Totuși, dezvoltarea formală converge pentru $t < \inf\{t : |W_t| = 1\}$.

2.2 OPERATORUL DE DERIVARE

Fie $W = \{W(h), h \in H := L^2(T, \mathcal{B}, \mu)\}$ un zgomot alb. Presupunem că W este definit pe un câmp de probabilitate complet (Ω, \mathcal{F}, P) , cu \mathcal{F} generat de W . Vrem să definim derivata DF pentru variabile aleatoare $F : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ de pătrat integrabil i.e. derivata în raport cu $\omega \in \Omega$. În cazul mișcării browniene d -dimensionale, spațiul Ω este topologic: $\Omega = C_0(\mathbf{R}_+; \mathbf{R}^d)$; totuși, ne va interesa situația mai generală când variabilele aleatoare F sunt definite P -a.p.t. și nu admit versiuni continue; așa cum arată exercițiul următor, și cum vom vedea la soluțiile ecuațiilor stocastice în sens Itô. Acesta este motivul pentru care

vom introduce derivata in sens slab, fără să ținem cont că Ω are structură topologică.

Exercitiu Fie $W = \{W_t, 0 \leq t \leq 1\}$ o mișcare browniană reală și $h \in L^2[0,1]$. Atunci integrala $F = \int_0^1 h(t)W(dt)$ admite o versiune continuă în $C_0[0,1]$ dacă și numai dacă există o măsură cu semn μ pe $[0,1]$ astfel ca $\mu(\{0\}) = 0$ și $h(t) = \mu((t,1])$ pentru orice $t \in [0,1]$, a.p.t. în raport cu măsura Lebesgue.

Indicație Dacă h este dată de o măsură cu semn, rezultatul decurge prin integrare prin părți. Reciproc, arătați că versiunea continuă a lui F trebuie să fie liniară și apoi folosiți teorema lui Riesz de reprezentare a funcționalelor liniare și continue pe $C[0,1]$.

Notăm $C_p^\infty(\mathbb{R}^{dn})$ mulțimea funcțiilor $f: \mathbb{R}^{dn} \rightarrow \mathbb{R}$ de clasă C^∞ astfel încât f și toate derivatele ei au creștere cel mult polinomială (i.e. rapid descrescătoare pe \mathbb{R}^{dn} : $\sup_{x \in \mathbb{R}^{dn}} |x^\alpha \partial^\beta f(x)| < \infty$, pentru orice multiindici α, β). Fie \mathcal{S} clasa variabilelor aleatoare (funcționalelor) netede i.e. de forma

$$F = f(W(h_1), \dots, W(h_n)) \quad (2.14)$$

unde $f \in C_p^\infty(\mathbb{R}^{dn})$ și $h_1, \dots, h_n \in H$. Cu teorema de convergență a martingalelor și teorema clasei monotone, să observăm că \mathcal{S} este subspațiu dens în $L^2(\Omega)$. Vom nota \mathcal{S}_b respectiv \mathcal{S}_c clasele de variabile aleatoare de forma (2.14) astfel încât $f \in C_b^\infty(\mathbb{R}^{dn})$ i.e. f și toate derivatele ei sunt mărginite, respectiv $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{dn})$ i.e. f are suport compact. Vom nota \mathcal{P} clasa variabilelor aleatoare de forma (2.14) cu f funcție polinomială de dn variabile.

Derivata unei variabile aleatoare netede F de forma (2.14) este procesul stocastic $\{D_t F, t \in [0, T], t \in \mathbb{R}_+\}$ definit prin

$$D_t F = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(W(h_1), \dots, W(h_n)) h_i(t). \quad (2.15)$$

Expresia derivatei în această definiție nu depinde de reprezentarea particulară a lui F ca funcțională netedă. În particular: $D_t W(h) = h(t)$. Vom considera DF ca un element în

$L^2([0, T] \times \Omega) \simeq L^2(\Omega; H)$ i.e. DF este proces indexat după T . De fapt $DF \in \bigcap_{p \geq 2} L^p(\Omega; H)$. Pentru a putea interpreta DF ca derivata după o direcție, să observăm că pentru $h \in H$ avem

$$\langle DF, h \rangle = \lim_{\epsilon \searrow 0} \frac{1}{\epsilon} [f((W(h_1) + \epsilon \langle h_1, h \rangle), \dots, W(h_n) + \epsilon \langle h_n, h \rangle) - fW(h_1), \dots, W(h_n)].$$

Formal vorbind, produsul scalar $\langle DF, h \rangle$ este derivata în $\epsilon = 0$ a lui F compusă cu zgomotul alb "translatat" $W(A) + \epsilon \int_A h d\mu$.

Dacă ne limităm la o mișcare browniană d -dimensională pe spațiul $\Omega = C_0([0, T]; \mathbf{R}^d)$, forma funcționalelor netede (2.14) poate fi luată

$$F = f(W_{t_1}, \dots, W_{t_n}),$$

cu $f(x^{11}, \dots, x^{d1}; \dots; x^{1n}, \dots, x^{dn}) \in C_b^\infty(\mathbf{R}^{dn})$ și $t_1, \dots, t_n \in [0, T]$ iar derivata lui F este procesul stocastic d -dimensional

$$(DF)_t^j = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^{ji}}(W_{t_1}, \dots, W_{t_n}) \mathbf{1}_{[0, t_i]}(t)$$

pentru $t \in [0, T]$ și $j = 1, \dots, d$. Derivata DF apare ca variabilă aleatoare cu valori în $H = L^2([0, T]; \mathbf{R}^d)$.

LEMA 2.2.1 Fie F funcțională netedă și $h \in H = L^2(T)$. Atunci avem

$$E(\langle DF, h \rangle) = E(FW(h)). \quad (2.16)$$

Demonstrație. Putem presupune că $d = 1$ și că h are norma 1. Există elemente ortonormale $\{e_1, \dots, e_n\} \subset H$ astfel încât $h = e_1$ și F este de forma

$$F = f(W(e_1), \dots, W(e_n)),$$

cu $f \in C_p^\infty(\mathbf{R}^n)$. Fie $\phi(x)$ densitatea legii normale pe \mathbf{R}^n i.e.

$$\phi(x) = (2\pi)^{-n/2} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_i^2\right);$$

Atunci avem

$$E(\langle DF, h \rangle) = \int_{\mathbf{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \phi(x) dx = \int_{\mathbf{R}^n} f(x) \phi(x) x_1 dx = E(FW(e_1)) = E(FW(h)). \square$$

COROLAR 2.2.2 Fie F, G funcționale netede și $h \in H = L^2(T)$. Atunci avem

$$E(G \langle DF, h \rangle) = E(-F \langle DG, h \rangle + FGW(h)). \quad (2.17)$$

Ca o consecință acestui corolar, obținem că D este operator închizabil de la $L^r(\Omega)$ la $L^r(\Omega; L^2(T))$, pentru orice $r \geq 1$. Într-adevăr, fie $\{F_k, k \geq 1\}$ un șir de variabile aleatoare netede astfel ca $F_k \rightarrow 0$ în $L^r(\Omega)$ și $DF_k \rightarrow \eta$ în $L^r(\Omega; L^2(T))$; vrem să arătăm că $\eta = 0$. Pentru $\epsilon > 0$, fie $\varphi_\epsilon(x) = e^{-\epsilon x^2}$. Atunci, pentru orice $h \in H$ și $F \in \mathcal{S}_b$, avem

$$\begin{aligned} E(\langle \eta, h \rangle F \varphi_\epsilon(W(h))) &= \lim_k E(\langle DF_k, h \rangle \varphi_\epsilon(W(h)) F) \\ &= \lim_k E(-F_k \langle D(\varphi_\epsilon(W(h)) F), h \rangle \\ &\quad + F_k F \varphi_\epsilon(W(h)) W(h)) = 0. \end{aligned}$$

deoarece $F_k \rightarrow 0$ în L^r când $k \rightarrow \infty$, iar variabilele aleatoare

$$\langle D(\varphi_\epsilon(W(h)) F), h \rangle \text{ și } F \varphi_\epsilon(W(h)) W(h)$$

sunt mărginite. Facem $\epsilon \searrow 0$ și obținem $\eta = 0$.

Vom nota prin $\mathbf{D}^{r,1}$ domeniul operatorului D în $L^r(\Omega)$. Mai precis, $\mathbf{D}^{r,1}$ este închiderea clasei \mathcal{S} în raport cu norma

$$\|F\|_{r,1} = \left[E(|F|^r) + \|DF\|_{L^r(\Omega; H)}^r \right]^{1/r}.$$

Să observăm că $\mathbf{D}^{2,1}$ este spațiu Hilbert în raport cu produsul scalar

$$\langle F, G \rangle_{2,1} = E(FG) + E(\langle DF, DG \rangle).$$

Mai general, se pot defini derivatele iterate pentru variabile aleatoare de p ori slab diferentiabile. Să notăm

$$D_{t_1, \dots, t_k}^k F = D_{t_1} D_{t_2} \dots D_{t_k} F,$$

pentru $k \in \mathbb{N}^*$ și $F \in \mathcal{S}$. Derivata $D^k F$ este considerată ca funcție măsurabilă pe spațiul produs $\mathcal{T}^k \times \Omega$ care este definită $\mu^k \times P$ -a.p.t. Pentru $r \geq 1$ și $p \in \mathbb{N}^*$ vom nota $D^{r,p}$ completarea clasei \mathcal{S} în raport cu norma

$$\|F\|_{r,p} = \left[E(\|F\|^r) + \sum_{k=1}^p E(\|D^k F\|_{L^2(\mathcal{T}^k)}^r) \right]^{1/r}.$$

În cazul mișcării browniene d -dimensionale, forma derivatei de ordin k a funcționalei netede F (ca variabilă aleatoare cu valori în $H^{\otimes k}$) este următoarea

$$(D^k F)_{s_1, \dots, s_k}^{j_1, \dots, j_k} =$$

$$\sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n \frac{\partial^k f}{\partial x^{j_1 i_1} \dots \partial x^{j_k i_k}} (W_{t_1}, \dots, W_{t_n}) \mathbf{1}_{[0, t_1]}(s_1) \dots \mathbf{1}_{[0, t_k]}(s_k),$$

pentru $s_1, \dots, s_k \in [0, T]$ și $j_1, \dots, j_k = 1, \dots, d$. Vom scrie $D_t^j F$ pentru $(DF)_t^j$; cu această notație, $(D^k F)_{s_1, \dots, s_k}^{j_1, \dots, j_k}$ coincide cu derivata iterată $D_{s_1}^{j_1} D_{s_2}^{j_2} \dots D_{s_k}^{j_k} F$. Pentru $r \geq 1$ și $p \in \mathbb{N}^*$, să notăm că

$$\|F\|_{r,p} = \|F\|_r + \| \| D^p F \|_{HS} \|_r,$$

unde $\| \cdot \|_{HS}$ înseamnă norma Hilbert-Schmidt pe $H^{\otimes p}$ i.e.

$$\|D^p F\|_{HS}^2 = \sum_{j_1, \dots, j_p=1}^d \int_{[0, T]^p} [(D^p F)_{s_1, \dots, s_p}^{j_1, \dots, j_p}]^2 ds_1 \dots ds_p.$$

Rezultatele următoare arată că normele $\| \cdot \|_{r,p}$ sunt monotone, compatibile și că spațiile $D^{r,p}$ conțin dens clasele \mathcal{S}_c și \mathcal{P} .

(a) $\|F\|_{r,p} \leq \|F\|_{s,q}$ pentru orice $F \in \mathcal{S}$, dacă $p \leq q$ și $r \leq s$.

(b) Fie $\{F_n, n \geq 1\}$ un șir de variabile aleatoare netede astfel ca $\|F_n\|_{r,p}$ converge la 0 când $n \rightarrow \infty$ și $\|F_n - F_m\|_{s,q}$ converge la 0 când $m, n \rightarrow \infty$. Atunci $\|F_n\|_{s,q}$ converge la 0 când $n \rightarrow \infty$.

Intr-adevăr, știm că

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \left\| \left\| D^i F_n - D^i F_m \right\|_{L^2(T^i)} \right\|_s = 0$$

pentru toți $0 \leq i \leq j$. Cum spațiile $L^s(\Omega, L^2(T^i))$ sunt complete, există $G^i \in L^s(\Omega, L^2(T^i))$ astfel ca

$$\left\| \left\| D^i F_n - G^i \right\|_{L^2(T^i)} \right\|_{L^s(\Omega)} \rightarrow 0,$$

când $n \rightarrow \infty$. Să arătăm că $G^i = 0$ pentru orice $0 \leq i \leq j$ prin inducție după i . Avem $G^0 = 0$ deoarece $F_n \rightarrow 0$ în $L^r(\Omega)$ când $n \rightarrow \infty$. Să presupunem că $G^0 = G^1 = \dots = G^{i-1} = 0$. Atunci, pentru orice $F \in \mathcal{S}_b$ și $e_1, \dots, e_n \in H$, avem

$$\begin{aligned} & E \left[F \langle G^i, e_1 \otimes \dots \otimes e_i \rangle_{L^2(T^i)} \right] \\ &= \lim_n E \left[F \langle D^i F_n, e_1 \otimes \dots \otimes e_i \rangle_{L^2(T^i)} \right] \\ &= \lim_n E \left[- \langle DF, e_i \rangle \langle D^{i-1} F_n, e_1 \otimes \dots \otimes e_{i-1} \rangle_{L^2(T^{i-1})} \right. \\ &\quad \left. + F \langle D^{i-1} F_n, e_1 \otimes \dots \otimes e_{i-1} \rangle_{L^2(T^{i-1})} W(e_i) \right] \\ &= E \left[- \langle DF, e_i \rangle \langle G^{i-1}, e_1 \otimes \dots \otimes e_{i-1} \rangle_{L^2(T^{i-1})} \right. \\ &\quad \left. + F \langle G^{i-1}, e_1 \otimes \dots \otimes e_{i-1} \rangle_{L^2(T^{i-1})} W(e_i) \right] = 0, \end{aligned}$$

deci $G^i = 0$.

(c) Clasele \mathcal{S}_c și \mathcal{P} sunt dense în $\mathbf{D}^{r,p}$ pentru orice $r \geq 1$, $p \in \mathbf{N}^*$.

Reamintim că $\mathcal{P} \subset \mathcal{S}$ și $\mathcal{S}_c \subset \mathcal{S}_b \subset \mathcal{S}$. Să considerăm întâi cazul \mathcal{S}_c ; este suficient să arătăm că \mathcal{S}_c este densă în \mathcal{S} pentru orice normă $\| \cdot \|_{r,p}$. Fie $d = 1$ și $F \in \mathcal{S}$ de forma $F = f(W(h_1), \dots, W(h_n))$, cu $f \in C_p^\infty(\mathbf{R}^n)$, $h_1, \dots, h_n \in H$ și $c_k(x) \in C_c^\infty(\mathbf{R}^n)$, $k \geq 1$ astfel ca: $0 \leq c_k \leq 1$,

$$c_k(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } |x| \leq k \\ 0, & \text{dacă } |x| \geq k+1, \end{cases}$$

iar c_k împreună cu toate derivatele sale sunt mărginite uniform. Definim

$$F_k = c_k f(W(h_1), \dots, W(h_n)) .$$

Avem că $F_k \in \mathcal{S}_0$ și F_k converge către F în $\mathbf{D}^{r,p}$ când $k \rightarrow \infty$, pentru orice $r \geq 1$, $p \in \mathbf{N}^*$.

Să arătăm acum că \mathcal{P} este densă în \mathcal{S}_c în raport cu topologia lui $\mathbf{D}^{r,p}$. Fie $F = f(W(h_1), \dots, W(h_n))$ o variabilă aleatoare netedă cu $f \in C_c^\infty(\mathbf{R}^n)$; putem presupune că h_1, \dots, h_n sunt ortonormale. Fie $\hat{f}(y) = \int_{\mathbf{R}^n} e^{i\langle y, x \rangle} f(x) dx$ transformata Fourier a lui f . Stim că

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbf{R}^n} e^{-i\langle y, x \rangle} \hat{f}(y) dy,$$

iar \hat{f} este infinit diferentiabilă pe \mathbf{R}^n și descrește rapid (către 0) la infinit. Punem

$$f_j(x) = \frac{1}{(2\pi)^j} \operatorname{Re} \sum_{k=0}^j \int_{\mathbf{R}^n} \frac{(-i\langle y, x \rangle)^k}{k!} \hat{f}(y) dy.$$

Atunci f_j converge către f în $L^r(\mathbf{R}^n, N(0, 1))$, pentru orice $r \geq 1$. Mai mult, derivatele parțiale ale lui f_j converg către derivatele parțiale corespunzătoare ale lui f în $L^r(\mathbf{R}^n, N(0, 1))$. De fapt această convergență este punctuală și aplicăm teorema de convergență dominată.

Fie F funcțională de mișcarea browniană cu descompunerea ortogonală în haos Wiener

$$F = \sum_{m=0}^{\infty} I_m(f_m), \quad (2.18)$$

unde f_m sunt funcții simetrice pe $L^2(\mathcal{T}^m)$. Ne punem problema în ce condiții asupra lui f_m , variabila aleatoare F se află în domeniul operatorului de derivare și cum putem calcula derivata lui F folosind dezvoltarea în haos. Are loc următorul rezultat.

TEOREMA 2.2.3 Fie F variabilă aleatoare de pătrat integrabil cu dezvoltarea în haos (2.18). Atunci $F \in \mathbf{D}^{2,1}$ dacă și numai dacă

$$\sum_{m=1}^{\infty} m m! \|f_m\|_{L^2(\mathcal{T}^m)}^2 < \infty, \quad (2.19)$$

și în acest caz avem

$$D_t F = \sum_{m=1}^{\infty} m I_{m-1}(f_m(\cdot, t)), \quad (2.20)$$

iar $E \int_T (D_t F)^2 \mu(dt)$ este egală cu suma seriei din (2.19).

Demonstrație. Pasul 1: Să presupunem că f_m este funcție elementară simetrică pe E_m dată de (2.8) și fie $F = I_m(f_m)$. Vrem să arătăm că

$$D_t F = m I_{m-1}(f_m(\cdot, t)). \quad (2.21)$$

Folosind definiția lui $I_m(f_m)$ și simetria lui f_m obținem

$$\begin{aligned} D_t I_m(f_m) &= \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n a_{i_1, \dots, i_m} \sum_{k=1}^m 1_{A_{i_k}} W(A_{i_1}) \dots W(A_{i_{k-1}}) \\ &\quad \times W(A_{i_{k+1}}) \dots W(A_{i_m}) \\ &= m \sum_{i_1, \dots, i_m} a_{i_1, \dots, i_m} W(A_{i_1}) \dots W(A_{i_{m-1}}) 1_{A_{i_m}}(t) \\ &= m I_{m-1}(f_m(\cdot, t)). \end{aligned}$$

Pasul 2: Vom arăta că $H_m \subset \mathbf{D}^{2,1}$ și că formula (2.21) este adevărată pentru integrale multiple de ordinul m . Variabila aleatoare $F \in H_m$ poate fi aproximată în medie patrata printr-un șir de integrale multiple $G^k = I_m(g^k)$ cu $g^k \in \mathcal{E}_m$. Folosind proprietatea de izometrie a integralelor multiple și relația (2.21) aplicată funcțiilor g^k , obținem că derivatele DG^k converg în $L^2(T \times \Omega)$. Aceasta implică $F \in \mathbf{D}^{2,1}$ și că (2.21) este satisfăcută.

Pasul 3: Fie F variabilă aleatoare de pătrat integrabil cu dezvoltarea în haos (2.18) și să presupunem că (2.19) este adevărată. Definim

$$F^k = \sum_{m=0}^k I_m(f_m).$$

Este clar că $F^k \rightarrow F$ în $L^2(\Omega)$ iar pasul 2 ne spune că $F^k \in \mathbf{D}^{2,1}$ și că $D_t F^k = \sum_{m=1}^k m I_{m-1}(f_m(\cdot, t))$. Atunci condiția (2.19)

implică faptul că DF^k converge în $L^2(T \times \Omega)$ către membrul drept din (2.20). Deci $F \in \mathbf{D}^{2,1}$ și (2.20) este satisfăcută.

Pasul 4: Fie $F \in \mathbf{D}^{2,1}$ și G o integrală multiplă de forma $G = I_n(g)$ cu g elementară și simetrică. Să observăm că formula de integrare prin părți (2.17) este adevărată pentru F^k și G . Deci, pentru $h \in H$, avem

$$\begin{aligned} & \lim_{k \rightarrow \infty} E(\langle DF^k, h \rangle G) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} E(-F^k \langle DG, h \rangle + F^k GW(h)) \\ &= E(-F \langle DG, h \rangle + FGW(h)) = E(\langle DF, h \rangle G) \end{aligned}$$

Pentru $k > n$ avem

$$\begin{aligned} & E(\langle DF^k, h \rangle G) \\ &= E\left((n+1)I_n\left(\int_T f_{n+1}(\cdot, t)h(t)\mu(dt)\right)G\right), \end{aligned}$$

Deci proiecția lui $\langle DF, h \rangle$ pe \mathcal{H}_n este egală cu

$$(n+1)I_n\left(\int_T f_{n+1}(\cdot, t)h(t)\mu(dt)\right).$$

În fine, dacă $(e_i, i \geq 1)$ este o bază a lui H , obținem

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{\infty} m m! \|f_m\|_{L^2(T^m)}^2 \\ &= E\left(\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left(m I_{m-1}\left(\int_T f_m(\cdot, t)e_i(t)\mu(dt)\right)\right)^2\right) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} E(\langle DF, e_i \rangle^2) = \|DF\|_{L^2(T \times \Omega)}^2. \square \end{aligned}$$

Pe scurt, teorema 2.2.3 spune lucrul următor: fie F o integrală multiplă de forma următoare

$$F = I_m(f_m) = \int_T \dots \int_T f_m(t_1, \dots, t_m)W(dt_1) \dots W(dt_m)$$

Atunci F aparține întotdeauna domeniului operatorului de derivare și $D_t f$ se obține suprimând una dintre integralele stocastice, lăsând variabila t liberă și înmulțind cu factorul m . Să explicităm acest lucru în cazul mișcării browniene d -dimensionale: cum orice variabilă aleatoare din \mathcal{H}_m se exprimă ca integrală multiplă $I_m(f_m)$ cu $f_m \in L^2([0, T]^m; \mathbf{R}^{dm}) = H^{\otimes m}$ i.e. $f_m((t_1, j_1), \dots, (t_m, j_m))$ este simetrică în $(t_1, j_1), \dots, (t_m, j_m)$, obținem

$$D_t^j (I_m(f_m)) = m I_{m-1}(f_m((\cdot, \cdot), (t, j))),$$

cu $I_0(f_1(t, j)) = f_1(t, j)$, iar spațiul $\mathbf{D}^{2,1}$ coincide cu mulțimea variabilelor aleatoare $F = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n)$ care satisfac

$$E(\|DF\|_{HS}^2) = \sum_{n=1}^{\infty} E(|I_n(f_n)|^2) < \infty.$$

Operatorul de derivare D este liniar, închis, cu domeniul $\mathbf{D}^{2,1}$ și ia valori în $L^2([0, T] \times \Omega; \mathbf{R}^d)$.

Aplicație Dacă $F \in \mathbf{D}^{2,1}$ astfel încât $DF = 0$, atunci din teorema 2.2.3 rezultă că $F = E(F)$.

Fie $h \in H$ fixat. Definim operatorul D^h pe mulțimea \mathcal{S} prin

$$D^h F = \langle DF, h \rangle. \quad (2.22)$$

Din lema 2.2.1 rezultă că acest operator este închizabil de la $L^r(\Omega)$ la $L^r(\Omega)$ pentru orice $r \geq 1$ și are un domeniu dens în $L^2(\Omega)$. În cazul mișcării browniene d -dimensionale, pentru $F \in \mathcal{S}$ și $h \in H$, operatorul D^h are forma

$$D^h F = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^d \int_0^T n I_{n-1}(f_n((\cdot, \cdot), (t, j))) h^j(t) dt$$

(dacă seria converge în $L^2(\Omega)$). Domeniul \mathbf{D}^h al operatorului D^h este spațiul Hilbert obținut prin închiderea lui \mathcal{S} în raport cu norma $(\|F\|_2^2 + \|D^h F\|_2^2)^{1/2}$ și observăm că $\mathbf{D}^{2,1} \subset \mathbf{D}^h$; în plus, dacă $F \in \mathbf{D}^h$ pentru orice $h \in H$ și dacă aplicația

liniară $h \rightarrow D^h F$ definește o variabilă aleatoare de pătrat integrabil cu valori în H , atunci $F \in \mathbf{D}^{2,1}$ și

$$D^h F = \langle DF, h \rangle.$$

Putem interpreta operatorul D^h ca derivata după direcția elementului $\int_0^1 h(s) ds$, care este absolut continuu și de pătrat integrabil: dacă

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left[F \left(\omega + \epsilon \int_0^1 h(s) ds \right) - F(\omega) \right]$$

există în $L^2(\Omega)$ (pentru F netedă), atunci $F \in \mathbf{D}^h$ și limita de mai sus coincide cu $D^h F$. Într-adevăr, (în cazul $d = 1$), avem

$$\begin{aligned} \langle DF, h \rangle &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} (W_{t_1}, \dots, W_{t_n}) \langle \mathbf{1}_{[0, t_i]}, h \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} (W_{t_1}, \dots, W_{t_n}) \int_0^{t_i} h(s) ds \\ &= \frac{d}{d\epsilon} F \left(\omega + \epsilon \int_0^1 h(s) ds \right) \Big|_{\epsilon=0}. \end{aligned}$$

Pe de altă parte, dacă F este diferențiabilă Fréchet și notăm prin λ^F măsura (cu semn) asociată derivatei Fréchet a lui F , atunci $D_t F = \lambda^F((t, 1])$. Mai precis, pentru orice $h \in \mathcal{H}$, avem

$$\begin{aligned} \int_0^1 D_t F h(t) dt &= \langle DF, h \rangle \\ &= \int_0^1 \lambda^F(dt) \left(\int_0^t h(s) ds \right) dt = \int_0^1 \lambda^F((t, 1]) h(t) dt. \end{aligned}$$

Remarcă Dacă H ar fi finit dimensional (i.e. T ar fi finită) atunci spațiile $\mathbf{D}^{r,p}$ se identifică cu spațiile Sobolev uzuale $W^{r,p}$ de funcții pe \mathbb{R}^n care au, împreună cu primele lor derivate parțiale, momente finite de ordinul r în raport cu legea normală standard. Mai precis, fie $\{e_1, \dots, e_n\}$ o bază în H , \mathcal{F}_n σ -algebra generată de $\{W(e_1), \dots, W(e_n)\}$ și F o variabilă aleatoare \mathcal{F}_n -măsurabilă. Atunci $F \in \mathbf{D}^{2,1}$ dacă și numai

dacă există f în spațiul Sobolev $W^{2,1}(\mathbb{R}^n, N(0, I_n))$ astfel încât $F = f(W(e_1), \dots, W(e_n))$. În plus

$$DF = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} (W(e_1), \dots, W(e_n)) e_i.$$

Următorul rezultat reprezintă *regula lanțului* pentru spațiile $D^{r,1}$ și poate fi demonstrat aproximând pe F cu variabile aleatoare netede.

PROPOZIȚIA 2.2.4 Fie $r \geq 1$ fixat, $\varphi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ diferențiabilă, cu derivatele parțiale mărginite și vectorul aleator $F = (F^1, \dots, F^m)$ cu componentele în $D^{r,1}$. Atunci $\varphi(F) \in D^{r,1}$ și

$$D(\varphi(F)) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} (F) DF^i.$$

În continuare vom determina derivata valorii medii condiționate de σ -algebra generată de integralele stocastice gaussiene. Fie $A \in \mathcal{B}$. Notăm prin \mathcal{F}_A σ -algebra generată de familia $\{W(B), B \subset A, B \in \mathcal{B}\}$ și completată în raport cu P .

LEMA 2.2.5 Fie F variabilă aleatoare de pătrat integrabil cu descompunerea în haos (2.18) și $A \in \mathcal{B}$. Atunci

$$E[F | \mathcal{F}_A] = \sum_{m=0}^{\infty} I_m(f_m \mathbf{1}_A^{\otimes m}).$$

Demonstrație. Este suficient să presupunem $F = I_m(f_m)$, cu $f_m \in \mathcal{E}_m$. Din liniaritate, f_m pot fi presupuse de forma $\mathbf{1}_{B_1 \times \dots \times B_m}$ cu B_1, \dots, B_m mutual disjuncte și de măsură finită. În acest caz avem

$$\begin{aligned} E[F | \mathcal{F}_A] &= E[W(B_1) \dots W(B_m) | \mathcal{F}_A] \\ &= E[W(B_1 \cap A) + W(B_1 \cap A^c) \\ &\quad \dots (W(B_m \cap A) + W(B_m \cap A^c)) | \mathcal{F}_A] \\ &= I_m(\mathbf{1}_{(B_1 \cap A) \times \dots \times (B_m \cap A)}). \quad \square \end{aligned}$$

De aici obținem

PROPOZIȚIA 2.2.6 Fie $F \in \mathbf{D}^{2,1}$ și $A \in \mathcal{B}$. Atunci $E[F | \mathcal{F}_A] \in \mathbf{D}^{2,1}$ și

$$D_t(E[F | \mathcal{F}_A]) = E[D_t F | \mathcal{F}_A] \mathbf{1}_A(t) \text{ a.p.t. in } T \times \Omega.$$

Demonstrație. Conform cu lema 2.2.5 și propoziția 2.2.3 avem

$$\begin{aligned} D_t(E[F | \mathcal{F}_A]) &= \sum_{m=1}^{\infty} m I_{m-1} \left(f_m(\cdot, t) \mathbf{1}_A^{\otimes(m-1)} \right) \mathbf{1}_A(t) \\ &= E[D_t F | \mathcal{F}_A] \mathbf{1}_A(t). \square \end{aligned}$$

COROLAR 2.2.7 Dacă $F \in \mathbf{D}^{2,1}$ este \mathcal{F}_A -măsurabilă, atunci $D_t F = 0$ a.p.t. pe $A^c \times \Omega$.

În cazul mișcării browniene d -dimensionale, σ -algebra utilizată în rezultatele 2.2.5-2.2.7 se definește astfel. Fie $A \subset [0, T]$ boreliană și \mathcal{F}_A σ -algebra generată de vectorii aleatori

$$W(G) = \int_0^T \mathbf{1}_G dW, \quad G \subset A, \quad G \text{ boreliană};$$

În plus față de rezultatele demonstrate, se poate arăta că, dacă F este de pătrat integrabil și \mathcal{F}_A -măsurabilă și funcția h din $L^2([0, T]; \mathbb{R}^d)$ se anulează pe A , atunci $F \in \mathbf{D}^h$ și $D^h F = 0$.

Exerciții 1. Fie $f_m \in L^2([0, 1]^m)$. Atunci

$$\begin{aligned} D_t F &= m! \sum_{i=1}^m \int_{\{t_1 < \dots < t_{i-1} < t < t_i < \dots < t_m\}} f_m(t_1, \dots, t_{i-1}, t, \dots, t_m) \\ &\quad \times dW_{t_1} \dots dW_{t_m}. \end{aligned}$$

2. Dacă $F \in \mathbf{D}^{2,p}$ și $F = \sum_{m=0}^{\infty} I_m(f_m)$, atunci

$$D_{t_1, \dots, t_p}^p F$$

$$= \sum_{m=p}^{\infty} m(m-1)\dots(m-p+1) I_{m-p}(f_m(\cdot, t_1, \dots, t_p)).$$

3. Dacă $F = \sum_{m=1}^{\infty} I_m(f_m) \in \mathbf{D}^{2,p}$ pentru orice $p \geq 1$, atunci $f_m = \frac{1}{m!} E(D^m F)$ pentru orice $m \geq 1$.

4. Fie $F = \exp\left(W(h) - \frac{1}{2} \int_T h^2(s) ds\right)$, $h \in L^2(T)$. Calculați derivatele iterate ale lui F și identificați coeficienții f_m din dezvoltarea ei în haos.

5. Arătați că, dacă $A \in \mathcal{F}$, atunci $1_A \in \mathbf{D}^{2,1}$ dacă și numai dacă $P(A) = 0$ sau 1.

Indicație. Avem $D1_A = D(1_A)^2 = 2 1_A D1_A$, deci $D1_A = 0$ deoarece derivata este 0 pe A^c și este egală cu de 2 ori valoarea ei pe A . Obținem $1_A = P(A)$. Observați că am aplicat regula lanțului funcției $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, egală cu x^2 pe $[0, 1]$.

6. Folosind propoziția 2.2.4 arătați că, dacă $F_1, F_2 \in \mathbf{D}^{2,1}$ astfel ca F_1 și $\|DF_1\|$ sunt mărginite, atunci $F_1 F_2 \in \mathbf{D}^{2,1}$ și $D(F_1 F_2) = F_1 DF_2 + F_2 DF_1$.

2.3 INTEGRALA SKOROHOD

Am văzut că operatorul de derivare D este închis și nemărginit, definit pe subspațiul $\mathbf{D}^{2,1}$ dens în $L^2(\Omega)$ și cu valori în $L^2(T \times \Omega)$.

Notăm prin δ adjunctul operatorului D . Acesta este un operator nemărginit pe $L^2(T \times \Omega)$, cu valori în $L^2(\Omega)$ și cu proprietățile următoare:

(a) Domeniul operatorului δ , notat $Dom \delta$, este dat de mulțimea proceselor $u \in L^2(T \times \Omega)$ care satisfac

$$\left| E \left(\int_T D_t F u(t) \mu(dt) \right) \right| \leq c \|F\|_2, \quad (2.23)$$

pentru orice $F \in \mathbf{D}^{2,1}$, iar constanta c depinde de u .

(b) Dacă $u \in Dom \delta$, atunci elementul $\delta(u) \in L^2(\Omega)$ este caracterizat prin

$$E(F \delta(u)) = E \left(\int_T D_t F u(t) \mu(dt) \right), \quad (2.24)$$

pentru $F \in \mathbf{D}^{2,1}$.

Operatorul (închis) δ se va numi **integrala Skorohod** a procesului u . El transformă procese de pătrat integrabil în variabile aleatoare. Vom folosi și notația următoare

$$\delta(u) = \int_T u(t) dW_t.$$

Să vedem cum se calculează explicit acest operator când cunoaștem descompunerea în haos a procesului u , în forma următoare.

LEMA 2.3.1 Fie $u \in L^2(\mathcal{T} \times \Omega)$. Atunci există o familie de funcții deterministe $f_m(t_1, \dots, t_m, t)$, $m \geq 0$, măsurabile, de pătrat integrabil și simetrice în primele m variabile, astfel încât

$$u(t) = \sum_{m=0}^{\infty} I_m(f_m(\cdot, t)), \quad (2.25)$$

cu seria de mai sus convergentă în $L^2(\mathcal{T} \times \Omega)$ și

$$E\left(\int_{\mathcal{T}} u^2(t) \mu(dt)\right) = \sum_{m=0}^{\infty} m! \|f_m\|_{L^2(\mathcal{T}^{m+1})}^2.$$

Demonstrație. Pentru aproape toți t avem $E(u^2(t)) < \infty$, deci variabila aleatoare $u(t)$ se dezvoltă ca sumă de integrale stocastice multiple, iar funcțiile f_m sunt simetrice și depind de parametrul t ; trebuie arătat că aceste funcții pot fi alese măsurabile în raport cu toate variabilele. Aproximăm procesul u în $L^2(\mathcal{T} \times \Omega)$ cu un șir de forma $u^n(t) = \sum_k F_{k,n} g_{k,n}(t)$, cu $g_{k,n} \in L^2(\mathcal{T})$ și $F_{k,n} \in L^2(\Omega)$. Aceste procese au forma $u^n(t) = \sum_{m=0}^{\infty} I_m(f_m^n(\cdot, t))$, iar funcțiile f_m^n au proprietățile dorite. În fine observăm că, pentru orice m , șirul $\{f_m^n, n \geq 1\}$ converge în $L^2(\mathcal{T}^{m+1})$ și definim f_m ca limita acestui șir. \square

PROPOZIȚIA 2.3.2 Fie $u \in L^2(\mathcal{T} \times \Omega)$ cu dezvoltarea (2.25). Atunci $u \in \text{Dom } \delta$ dacă și numai dacă seria

$$\delta(u) = \sum_{m=0}^{\infty} I_{m+1}(\tilde{f}_m) \quad (2.26)$$

converge în $L^2(\Omega)$.

De aici rezultă că $\text{Dom } \delta$ coincide cu clasa proceselor $u \in L^2(\mathcal{T} \times \Omega)$ care satisfac

$$E(\delta^2(u)) = \sum_{m=0}^{\infty} (m+1)! \|\tilde{f}_m\|_{L^2(\mathcal{T}^{m+1})}^2 < \infty. \quad (2.27)$$

Remarcă Funcțiile f_m din formula (2.25) nu sunt simetrice decât în primele m variabile; de aceea trebuie făcută regularizarea lor simetrică i.e.

$$\tilde{f}_m(t_1, \dots, t_m, t) = \frac{1}{m+1} [f_m(t_1, \dots, t_m, t)]$$

$$+ \left. \sum_{i=1}^m f_m(t_1, \dots, t_{i-1}, t, t_{i+1}, \dots, t_m, t_i) \right] .$$

Deoarece $I_{m+1}(f_m) = I_{m+1}(\tilde{f}_m)$ pentru orice m , expresia (2.26) poate fi scrisă fără regularizare simetrică, dar regularizarea simetrică este necesară pentru a calcula norma L^2 a integralelor stocastice (cf. formulei (2.27)). În cazul mișcării browniene d -dimensionale, dacă $u \in L^2([0, T] \times \Omega; \mathbb{R}^d)$ este proces stocastic d -dimensional de pătrat integrabil, atunci funcțiile din descompunerea (2.26) sunt de forma $f_m(s_1, \dots, s_m, t)^{j_1, \dots, j_m, j} \in L^2([0, T]^{m+1}; \mathbb{R}^{d(m+1)})$ simetrice în $(s_1, j_1), \dots, (s_m, j_m)$ pentru orice (t, j) fixat, iar regularizările lor simetrice în cele $m+1$ variabile sunt date de

$$\begin{aligned} & \tilde{f}_m((s_1, j_1), \dots, (s_m, j_m), (t, j)) \\ &= \frac{1}{m+1} [f_m((s_1, j_1), \dots, (s_m, j_m), (t, j)) \\ &+ \sum_{i=1}^m f_m((s_1, j_1), \dots, (s_{i-1}, j_{i-1}), (t, j), \\ & \quad (s_{i+1}, j_{i+1}), \dots, (s_m, j_m), (s_i, j_i))] . \end{aligned}$$

Cu aceste notații, integrala Skorohod a lui u este

$$\delta(u) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j_1, \dots, j_m, j=1}^d \int_{[0, T]^{m+1}} \tilde{f}_m((s_1, j_1), \dots, (s_m, j_m), (t, j)) \times dW_{s_1}^{j_1} \dots dW_{s_m}^{j_m} dW_t^j$$

(când seria converge în $L^2(\Omega)$). Observați că se integrează un proces d -dimensional în raport cu un proces Wiener d -dimensional, iar rezultatul este o variabilă aleatoare reală notată

$$\delta(u) = \int_0^T u(s) dW_s := \sum_{i=1}^d \int_0^T u^i(s) dW_s^i .$$

Demonstrația propoziției 2.3.2 Dacă $G = I_n(g)$ este o integrală stocastică multiplă de ordin n cu g simetrică, atunci

$$E\left(\int_T u(t) D_t G \mu(dt)\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{m=0}^{\infty} \int_{\mathcal{T}} E(I_m(f_m(\cdot, t)) \text{ n } I_{n-1}(g(\cdot, t))) \mu(dt) \\
&= \int_{\mathcal{T}} E(I_{n-1}(f_{n-1}(\cdot, t)) \text{ n } I_{n-1}(g(\cdot, t))) \mu(dt) \\
&= n(n-1)! \int_{\mathcal{T}} \langle f_{n-1}(\cdot, t), g(\cdot, t) \rangle_{L^2(\mathcal{T}^{n-1})} \mu(dt) \\
&= n! \langle f_{n-1}, g \rangle_{L^2(\mathcal{T}^n)} = n! \langle \tilde{f}_{n-1}, g \rangle_{L^2(\mathcal{T}^n)} \\
&= E(I_n(\tilde{f}_{n-1}) I_n(g)) = E(I_n(\tilde{f}_{n-1}) G).
\end{aligned}$$

Fie acum $u \in \text{Dom } \delta$. Din formula (2.25) și din calculele de mai sus obținem că $E(\delta(u)G) = E(I_n(\tilde{f}_{n-1})G)$. Rezultă că $I_n(\tilde{f}_{n-1})$ coincide cu proiecția lui $\delta(u)$ pe al n -lea haos, deci seria din (2.26) converge în $L^2(\Omega)$ și are suma $\delta(u)$. Reciproc, să presupunem că această serie converge și fie V suma ei. Avem

$$E\left(\int_{\mathcal{T}} u(t) D_t \left(\sum_{n=0}^k I_n(g_n)\right) \mu(dt)\right) = E\left(V \sum_{n=0}^k I_n(g_n)\right)$$

pentru $k \geq 1$, deci

$$\left|E\left(\int_{\mathcal{T}} u(t) D_t F \mu(dt)\right)\right| \leq \|V\|_2 \|F\|_2,$$

pentru orice variabilă aleatoare F cu dezvoltare în haos finită. Printr-un argument de densitate, această relație este adevărată pentru orice $F \in \mathbf{D}^{2,1}$ și (cf. definiției), obținem că $u \in \text{Dom } \delta$. \square

Exerciții 1. Arătați că $\text{Dom } \delta$ coincide cu acoperirea liniară închisă a proceselor de forma $u = \sum_{i=1}^n F_i 1_{A_i}$, cu A_i boreliană în $[0, 1]$, $F_i \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_{A_i}, P)$, în raport cu norma $\|u\|_{L^2(\mathcal{T} \times \Omega)} + \|\delta(u)\|_{L^2(\Omega)}$.

2. Dacă $F \in \mathbf{D}^{2,1}$ cu $E(|F|^{-2}) < \infty$, atunci $P(F > 0) = 0$ sau 1.

Indicație Folosind formula (2.24) și propoziția 2.2.4, estimați $E(\varphi_\epsilon(F)\delta(u))$, unde φ_ϵ este o aproximare a funcției sign, iar $u \in \text{Dom } \delta$ este un proces mărginit.

Să vedem în continuare proprietățile integralei Skorohod.

(a) Operatorul δ este liniar pe $Dom \delta$ și are media 0 i.e. $E(\delta(u)) = 0$ pentru $u \in Dom \delta$.

(b) Integrarea proceselor elementare netede

Să notăm prin \mathcal{S}_H clasa proceselor elementare netede i.e. de forma

$$u(t) = \sum_{j=1}^n F_j h_j(t)$$

unde F_j sunt variabile aleatoare netede iar $h_j \in H := L^2(T)$. Din formula de integrare prin părți din corolarul 2.16 deducem că procesele elementare netede sunt integrabile Shorohod și

$$\delta(u) = \sum_{j=1}^n F_j W(h_j) - \sum_{j=1}^n \int_T D_t F_j h_j(t) \mu(dt). \quad (2.28)$$

Să observăm că, dacă h_j sunt de forma 1_{A_j} , cu $A_j \in \mathcal{B}_0$ și dacă F_j sunt $\mathcal{F}_{A_j^c}$ -măsurabile, atunci conform corolarului 2.2.7 rezultă că a doua sumă din (2.28) este 0.

Notăm prin $\mathbb{L}^{2,1}$ clasa proceselor $u \in L^2(T \times \Omega)$, cu $u(t) \in \mathbb{D}^{2,1}$ pentru aproape toți t , iar procesul (cu doi indici) $D_s u(t)$ admite o versiune măsurabilă care satisface

$$E\left(\int_T \int_T |D_s u(t)|^2 \mu(ds) \mu(dt)\right) < \infty.$$

Dacă procesul u admite descompunerea (2.25), faptul că $u \in \mathbb{L}^{2,1}$ este echivalent cu convergența seriei

$$\begin{aligned} \int_T \int_T E\left(\left|\sum_{m=1}^{\infty} m I_{m-1}(f_m(\cdot, s, t))\right|^2\right) \mu(ds) \mu(dt) \\ = \sum_{m=1}^{\infty} m^2 (m-1)! \|f_m\|_{L^2(T^{m+1})}^2. \end{aligned}$$

Observăm că $\mathbb{L}^{2,1}$ este spațiu Hilbert în raport cu norma

$$\|u\|_{\mathbb{L}^{2,1}}^2 = \|u\|_{L^2(T \times \Omega)}^2 + \|Du\|_{L^2(T^2 \times \Omega)}^2$$

și este izomorf cu $L^2(T; \mathbf{D}^{2,1})$. Din relația (2.27) și din inegalitatea

$$\|\tilde{f}_m\|_{L^2(\mathcal{T}^{m+1})} \leq \|f_m\|_{L^2(\mathcal{T}^{m+1})}$$

rezultă că $\mathbf{L}^{2,1} \subset \text{Dom } \delta$. În cazul mișcării browniene d -dimensionale, norma pe spațiul $\mathbf{L}^{2,1}$ are forma

$$\|u\|_{2,1} = \left(E \int_0^T |u(s)|^2 ds \right)^{1/2} + \left(E \int_0^T \int_0^T \|D_s u(t)\|^2 ds dt \right)^{1/2},$$

unde $\|D_s u(t)\|$ înseamnă norma matricei $(D_s^i u^j(t))$.

(c) *Relația de comutare între derivată și integrala Skorohod*

Fie $u \in \mathbf{L}^{2,1}$; presupunem că procesul $\{D_t u(\cdot)\}$ este integrabil Skorohod și există o versiune în $L^2(\mathcal{T} \times \Omega)$ a procesului $\{\int_{\mathcal{T}} D_s u(s) dW_s\}$. Atunci $\delta(u) \in \mathbf{D}^{2,1}$ și

$$D_t(\delta(u)) = u(t) + \int_{\mathcal{T}} D_t u(s) dW_s \quad (2.29)$$

Intr-adevăr, fie $u(t) = \sum_{m=0}^{\infty} I_m(f_m(\cdot, t))$ ca în lema 2.3.1. Atunci

$$\begin{aligned} D_t(\delta(u)) &= D_t \left(\sum_{m=0}^{\infty} I_{m+1}(\tilde{f}_m) \right) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) I_m(\tilde{f}_m(\cdot, t)) = \sum_{m=0}^{\infty} I_m(f_m(\cdot, t)) \\ &+ \sum_{m=0}^{\infty} I_m \left(\sum_{i=1}^m f_m(t_1, \dots, \hat{t}_i, \dots, t_m, t, t_i) \right) \\ &= u(t) + \sum_{m=0}^{\infty} m I_m(f_m^s(\cdot, t, \cdot)) \end{aligned} \quad (2.30)$$

unde $f_m^s(\cdot, t, \cdot)$ înseamnă regularizarea simetrică a funcției

$$(t_1, \dots, t_m) \rightarrow f_m(t_1, \dots, t_{m-1}, t, t_m)$$

Pe de altă parte avem

$$\int_{\mathcal{T}} D_t u(s) dW_s = \int_{\mathcal{T}} \left(\sum_{m=1}^{\infty} m I_{m-1}(f_m(\cdot, t, s)) \right) dW_s,$$

care coincide cu al doilea sumand in (2.30), conform cu (2.26)

Formula (2.29) este o relație de comutare de tip Heisenberg, care poate fi scrisă “ $[D, \delta]u = u$ ”.

(d) *Covariația integralelor Skorohod*

Fie $u, v \in L^{2,1}$. Atunci

$$\begin{aligned} E(\delta(u)\delta(v)) &= \int_{\mathcal{T}} E(u(t)v(t))\mu(dt) \quad (2.31) \\ &+ \int_{\mathcal{T}} \int_{\mathcal{T}} E(D_s u(t)D_t v(s))\mu(ds)\mu(dt). \end{aligned}$$

(formula (2.31) poate să nu aibă sens pentru procese in $Dom \delta$).

Intr-adevăr, putem presupune că u admite o dezvoltare in haos finită ; atunci $\delta(u) \in \mathbf{D}^{2,1}$ (din proprietatea (c)), iar din (2.24) și (2.29) obținem

$$\begin{aligned} E(\delta(u)\delta(v)) &= E\left(\int_{\mathcal{T}} v(t)D_t(\delta(u))\mu(dt)\right) \\ &= E\left(\int_{\mathcal{T}} v(t)\left(u(t) + \int_{\mathcal{T}} D_t u(s)dW_s\right)\mu(dt)\right) \end{aligned}$$

și aplicăm din nou (2.24).

(e) *Integrala Skorohod a produsului dintre un proces și o variabilă aleatoare*

Fie u proces integrabil Skorohod și $F \in \mathbf{D}^{2,1}$ astfel ca

$$E\left(F^2 \int_{\mathcal{T}} u^2(t)\mu(dt)\right) < \infty.$$

Atunci avem

$$\int_{\mathcal{T}} F u(t) dW_t = F \int_{\mathcal{T}} u(t) dW_t - \int_{\mathcal{T}} u(t)(D_t F)\mu(dt), \quad (2.32)$$

in sensul că $Fu(t)$ este integrabil Skorohod dacă și numai dacă membrul drept din (2.32) este in $L^2(\Omega)$.

Intr-adevăr, fie $G = g(W(h_1), \dots, W(h_n))$ o funcțională nedată in care g are suport compact. Din regula lanțului pentru operatorul de derivare (propoziția 2.18) și formula (2.24) obținem

$$\begin{aligned} & E\left(\int_T (D_t G) Fu(t) \mu(dt)\right) \\ &= \int_T E(u(t)(D_t(FG) - GD_t F)) \mu(dt) \\ &= E\left(G\left(F\delta(u) - \int_T u(t)D_t F \mu(dt)\right)\right) \end{aligned}$$

(f) *Procese stocastice care sunt gradienti*

PROPOZIȚIA 2.3.3 *Fie $u \in L^2(T \times \Omega)$. Atunci există $F \in \mathbf{D}^{2,1}$ cu $DF = u$ dacă și numai dacă funcțiile f_m din descompunerea (2.25) sunt simetrice in raport cu toate variabilele.*

Demonstrație. Pentru suficiență, definim

$$F = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m+1} I_{m+1}(f_m);$$

seria converge in $L^2(\Omega)$ (chiar in $\mathbf{D}^{2,1}$) deoarece

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(m+1)(m+1)!}{(m+1)^2} \|f_m\|_{L^2(T^{m+1})}^2 = \|u\|_{L^2(T \times \Omega)}^2 < \infty$$

și $DF = u$. \square

PROPOZIȚIA 2.3.4 *Orice proces $u \in L^2(T \times \Omega)$ admite o descompunere ortogonală unică $u = DF + u^0$, cu $F \in \mathbf{D}^{2,1}$ și $E(\langle DG, u^0 \rangle) = 0$ pentru orice $G \in \mathbf{D}^{2,1}$. In plus, u^0 este integrabil Skorohod și $\delta(u^0) = 0$.*

Demonstrație. Din propoziția 2.3.3 rezultă că elementele de forma DF cu $F \in \mathbf{D}^{2,1}$ formează un subspațiu închis in $L^2(T \times \Omega)$, deci orice proces u admite o unică descompunere ca in enunț cu $u^0 \perp DG$ pentru orice $G \in \mathbf{D}^{2,1}$. \square

Rezultatul următor ne arată cum putem construi procese din $\text{Dom } \delta$ care să nu fie in $L^{2,1}$.

LEMA 2.3.5 Fie $A \in \mathcal{B}_0$. Dacă F este variabilă aleatoare \mathcal{F}_A -măsurabilă și de pătrat integrabil, atunci procesul $F1_A$ este integrabil Skorohod și

$$\delta(F1_A) = FW(A).$$

Demonstrație. Dacă $F \in \mathcal{D}^{2,1}$, din formula (2.32) și corolarul 2.21 rezultă :

$$\delta(F1_A) = FW(A) - \int_T D_t F1_A(t) \mu(dt) = FW(A).$$

Cazul general se obține prin trecere la limită și din faptul că δ este închis. \square

Aplicații la integrala Itô Pentru $t \geq 0$ vom nota prin \mathcal{F}_t σ -algebra generată de $\{W_s, 0 \leq s \leq t\}$ și de mulțimile de probabilitate nulă din \mathcal{F} , unde $W = \{W_t, t \geq 0\}$ este o mișcare browniană reală. Pentru un interval de timp T care poate fi $[0, T]$ sau \mathbb{R}_+ , notăm prin $L^2(T \times \Omega) = L^2(T \times \Omega, \mathcal{B}(T) \otimes \mathcal{F}, \lambda \times P)$ mulțimea proceselor de pătrat integrabil și prin $L_a^2(T \times \Omega)$ subspațiul proceselor adaptate.

Sa observăm ca, dacă ambele procese din formula (2.31) de calcul a covariației integralelor Skorohod sunt adaptate în raport cu filtrarea generată de mișcarea browniană reală, din corolarul 2.2.7 rezultă că $D_s u(t) = 0$ pentru aproape toți s, t cu $s > t$, deoarece $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{[0,t]}$. Deci al doilea termen în formula (2.31) se anulează și astfel regăsim proprietatea de izometrie a integralei Itô.

Folosind lema 2.3.5 putem să arătăm că operatorul δ este o extensie a integralei Itô. Intuitiv, aceasta se bazează pe faptul că, dacă $u \in L_a^2$, atunci regularizările \tilde{f}_m din formula (2.26) pot fi alese cu proprietatea : $\tilde{f}_m(t_1, \dots, t_m, t) = 0$ pentru $t \geq t_1 \vee \dots \vee t_m$.

PROPOZIȚIA 2.3.6 Avem $L_a^2 \subset \text{Dom } \delta$ și operatorul δ restricționat la L_a^2 coincide cu integrala Itô i.e.

$$\delta(u) = \sum_{i=1}^d \int_0^1 u^i(t) dW_t^i.$$

Demonstrație. Dacă u este proces elementar adaptat de forma

$$u(t) = \sum_{j=1}^n F_j \mathbf{1}_{(t_j, t_{j+1}]}(t),$$

cu $F_j \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_{t_j}, P; \mathbb{R}^d)$ și $0 \leq t_1 < \dots < t_{n+1} \leq 1$ (reamintim că în acest caz $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{[0,t]}$), din lema 2.3.5 obținem că $u \in \text{Dom } \delta$ și

$$\delta(u) = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^n F_j^i (W_{t_{j+1}}^i - W_{t_j}^i). \quad (2.33)$$

Cum orice proces $u \in L_a^2$ poate fi aproximat în sensul normei din $L^2(\mathcal{T} \times \Omega)$ cu un șir de procese elementare adaptate u^n , din formula (2.33) rezultă că $\delta(u^n)$ coincide cu integrala Itô a lui u^n și converge în $L^2(\Omega)$ către integrala Itô a lui u . Cum δ este operator închis, deducem că $u \in \text{Dom } \delta$ și că $\delta(u)$ coincide cu integrala Itô a lui u . \square

Am văzut la afirmația 1.4.11 că orice variabilă aleatoare F de pătrat integrabil, măsurabilă în raport cu W poate fi scrisă astfel

$$F = E(F) + \int_0^1 u(t) dW_t,$$

unde $u \in L_a^2$. Vom vedea în continuare că, dacă F este slab diferentiabilă, atunci procesul u se poate determina explicit.

PROPOZIȚIA 2.3.7 Fie $F \in \mathbf{D}^{2,1}$ și W o mișcare browniană reală. Atunci

$$F = E(F) + \int_0^1 E[D_t F | \mathcal{F}_t] dW_t.$$

Demonstrație. Dacă $F = \sum_{m=0}^{\infty} I_m(f_m)$, din formula 2.20 și lema 2.2.5 obținem

$$\begin{aligned} E[D_t F | \mathcal{F}_t] &= \sum_{m=1}^{\infty} m E[I_{m-1}(f_m(t, \cdot)) | \mathcal{F}_t] \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} m I_{m-1}(f_m(t_1, \dots, t_{m-1}, t) \mathbf{1}_{\{t_1 \vee \dots \vee t_{m-1} \leq t\}}) \end{aligned}$$

Punem $u(t) = E[D_t F | \mathcal{F}_t]$. Calculăm $\delta(u)$ folosind expresia precedentă pentru u și formula (2.26); obținem

$$\delta(u) = \sum_{m=1}^{\infty} I_m(f_m) = F - E(F),$$

care dă rezultatul căutat, deoarece $\delta(u)$ coincide cu integrala stocastică Itô a lui u . \square

Următorul rezultat arată că integrala Itô este diferențiabilă dacă și numai dacă integrandul este diferențiabil. Mai precis, avem

PROPOZIȚIA 2.3.8 Fie $W = \{W_t, t \in [0, 1]\}$ o mișcare browniană reală, $u = \{u(t), t \in [0, 1]\}$ un proces adaptat de pătrat integrabil și notăm $X(t) = \int_0^t u(s) dW_s$. Atunci $u \in \mathbf{L}^{2,1}$ dacă și numai dacă $X(1) \in \mathbf{D}^{2,1}$. In acest caz procesul $X \in \mathbf{L}^{2,1}$ și

$$\begin{aligned} & \int_0^t E(|D_s X(t)|^2) ds \\ &= \int_0^t E(u^2(s)) ds + \int_0^t \int_0^s E(|D_r u(s)|^2) dr ds \end{aligned} \quad (2.34)$$

pentru orice $t \in [0, 1]$.

Demonstrație. Fie $u \in \mathbf{L}^{2,1}$. Deoarece este adaptat și de pătrat integrabil, procesul $\{D_t u(s), s \in [t, 1]\}$ este integrabil Skorohod. In plus, datorită proprietății de izometrie a integralei Itô, avem

$$E\left(\int_0^1 \left|\int_t^1 D_t u(s) dW_s\right|^2 dt\right) = \int_0^1 \int_t^1 E(|D_t u(s)|^2) ds dt < \infty.$$

Obținem deci că $X(t) \in \mathbf{D}^{2,1}$ pentru orice t și

$$D_s X(t) = u(s) \mathbf{1}_{\{s \leq t\}} + \int_s^t D_s u(r) dW_r.$$

Luăm media pătratului expresiei precedente și obținem formula (2.34) și că $X \in \mathbf{L}^{2,1}$.

Reciproc, dacă $X(1) \in \mathbf{D}^{2,1}$, pentru orice k notăm u^k proiecția procesului u pe suma primelor k haosuri și fie $X^k(t) = \int_0^t u^k(s) dW_s$. Atunci X^k este proiecția lui X pe suma primelor

k haosuri și deci $X^k(1)$ converge în topologia lui $L^{2,1}$ către $X(1)$. Rămâne să observăm că

$$\int_0^1 E(|D_s X^k(1)|^2) ds = \int_0^1 E(|u^k(s)|^2) ds \\ + \int_0^1 \int_0^s E(|D_r u^k(s)|^2) dr ds \geq \int_0^1 \int_0^s E(|D_r u^k(s)|^2) dr ds. \square$$

Să observăm că integrala Skorohod nedefinită a unui proces $u \in L^{2,1}$ în raport cu o mișcare browniană d -dimensională :

$$\left\{ \int_0^t u(s) dW_s := \delta(u1_{[0,t]}) , 0 \leq t \leq T \right\}$$

este continuă în medie pătrată, deci măsurabilă. Se poate arăta că, pentru integranți suficienți de netezi, integrala Skorohod nedefinită admite o versiune continuă și că variația sa pătratică este integrala Lebesgue a pătratului integrandului. Dar, spre deosebire de integrala Itô, nu are nici o proprietate de martingal din lipsă de adaptare. Totodată, are loc o formulă de tip Itô, mai generală decât afirmațiile 1.4.4-1.4.5.

2.4 SEMIGRUPUL ORNSTEIN-UHLENBECK

Vom considera un zgomot alb $\{W(h), h \in H\}$ asociat spațiului Hilbert $H = L^2(T, \mathcal{B}, \mu)$. Vom nota J_n proiecția ortogonală pe cel de-al n -lea haos i.e. dacă $F = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n)$ este o variabilă aleatoare de pătrat integrabil, atunci $J_n(F) = I_n(f_n)$.

Semigrupul de contracții $\{T_t, t \geq 0\}$ definit prin

$$T_t(F) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nt} J_n(F) \quad (2.35)$$

pentru $F \in L^2(\Omega)$ se numește **semigrupul Ornstein-Uhlenbeck**.

O modalitate probabilistă de a introduce acest semigrup este următoarea. Fie $\{W'(h), h \in H\}$ o copie independentă a lui $\{W(h), h \in H\}$. Vom presupune că W și W' sunt definite

pe spațiul produs $(\Omega \times \Omega', \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}', P \times P')$. Pentru $t > 0$, definim procesul $Z = \{Z(h), h \in H\}$ prin

$$Z(h) = e^{-t}W(h) + (1 - e^{-2t})^{1/2} W'(h).$$

Acest proces este gaussian, centrat și cu aceeași covariație ca și W . Mai precis,

$$\begin{aligned} E((Z(h_1)Z(h_2))) \\ = e^{-2t} \langle h_1, h_2 \rangle + (1 - e^{-2t}) \langle h_1, h_2 \rangle = \langle h_1, h_2 \rangle. \end{aligned}$$

Fie $W, W' : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^H$ aplicațiile canonice asociate proceselor W, W' . Pentru $F \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, putem scrie $F = \psi_F \circ W$, unde ψ_F este o funcție măsurabilă de la \mathbf{R}^H la \mathbf{R} și este determinată $P \circ W^{-1}$ -a.p.t. În consecință, variabila aleatoare

$$\psi_F(Z) = \psi_F(e^{-t}W + (1 - e^{-2t})^{1/2} W')$$

este bine definită $P \times P'$ -a.p.t. Pentru $t > 0$, definim

$$T_t(F) = E'(\psi_F(e^{-t}W + (1 - e^{-2t})^{1/2} W')) \quad (2.36)$$

unde E' înseamnă media în raport cu P' . Să arătăm că formulele (2.35) și (2.36) sunt echivalente. Mai întâi, să observăm că în ambele definiții, operatorii sunt contracții liniare pe $L^2(\Omega, \mathcal{F}; P)$: în (2.36) avem

$$E(|T_t(F)|^p)$$

$$\leq E(E'(|\psi_F(e^{-t}W + (1 - e^{-2t})^{1/2} W')|^p)) = E(|F|^p).$$

Apoi, este suficient să considerăm $F = H_n(W(h))$ cu $\|h\| = 1$. În relația

$$\begin{aligned} E' \left(\exp \left(-\frac{1}{2} s^2 + s e^{-t} W(h) + s (1 - e^{-2t})^{1/2} W'(h) \right) \right) \\ = \exp \left(-\frac{s^2}{2} e^{-2t} + s e^{-t} W(h) \right), \end{aligned}$$

dezvoltăm după puterile lui $s \in \mathbb{R}$. În dreapta, coeficientul lui s^n este $e^{-nt}H_n(W(h))$, iar derivata $\frac{d^n}{ds^n}$ membrului stâng calculată în $s = 0$ este egală cu

$$E'(H_n(e^{-t}W(h) + (1 - e^{-2t})^{1/2}W'(h))).$$

Operatorii T_t au următoarele proprietăți :

- (a) sunt pozitivi i.e. $F \geq 0 \implies T_t(F) \geq 0$.
 (b) sunt simetrice i.e.

$$E(GT_t(F)) = E(FT_t(G)) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nt} E(J_n(F)J_n(G)).$$

Pentru $F \in L^2(\Omega)$, definim operatorul L prin

$$LF = \sum_{n=0}^{\infty} -nJ_n(F),$$

dacă seria din dreapta converge în $L^2(\Omega)$ i.e. domeniul $Dom L$ al operatorului L este

$$\left\{ F \in L^2(\Omega), F = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n) : \sum_{n=1}^{\infty} n^2 n! \|f_n\|_{L^2(\mathcal{T}^n)}^2 < \infty \right\}.$$

În particular $Dom L \subset \mathbf{D}^{2,1}$. Observăm că L este un operator nemărginit și simetric pe $L^2(\Omega)$ i.e. $E(FLG) = E(GLF)$ pentru $F, G \in Dom L$. Următoarea propoziție spune că L este generatorul infinitezimal al semigrupului Ornstein-Uhlenbeck; în particular, L este autoadjunct, deci închis.

PROPOZIȚIA 2.4.1 Operatorul L coincide cu generatorul infinitezimal al semigrupului Ornstein-Uhlenbeck $\{T_t, t \geq 0\}$.

Demonstrație. Avem de arătat că $F \in Dom L$ dacă și numai dacă $\lim_{t \searrow 0} \frac{T_t(F) - F}{t}$ există în $L^2(\Omega)$ și este egală cu LF . Dacă $F \in Dom L$, atunci

$$E\left(\left|\frac{T_t(F) - F}{t} - LF\right|^2\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{e^{-nt} - 1}{t} + n\right]^2 E(|J_n(F)|^2)$$

care converge la 0 când $t \searrow 0$. Reciproc, dacă $\lim_{t \searrow 0} \frac{T_t(F) - F}{t} = G$ în $L^2(\Omega)$, atunci

$$J_n(G) = \lim_{t \searrow 0} \frac{T_t(J_n(F)) - J_n(F)}{t} = -nJ_n(F),$$

deci $F \in \text{Dom } L$ și $LF = G$. \square

Legătura între operatorii D, δ, L este dată în

PROPOZIȚIA 2.4.2 Fie $F \in L^2(\Omega)$. Afirmatia $F \in \text{Dom } L$ este echivalentă cu $F \in \text{Dom } \delta D$ (i.e. $F \in \mathbf{D}^{2,1}$ și $DF \in \text{Dom } \delta$). În acest caz avem $\delta DF = -LF$.

Demonstrație. Dacă $F = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n) \in \mathbf{D}^{2,1}$ și $DF \in \text{Dom } \delta$, atunci, pentru $G = I_n(g) \in \mathcal{H}_n$, avem

$$E(G\delta DF) = E(\langle DG, DF \rangle)$$

$$= n^2(n-1)! \langle g, f_n \rangle_{L^2(\mathcal{T}^n)} = n E(GJ_n(F)),$$

deci $J_n(\delta DF) = n J_n(F)$, ceea ce implică $F \in \text{Dom } L$ și $\delta DF = -LF$.

Reciproc, dacă $F \in \text{Dom } L$ atunci $F \in \mathbf{D}^{2,1}$ și pentru orice $G = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(g_n) \in \mathbf{D}^{2,1}$, avem

$$\begin{aligned} E(\langle DG, DF \rangle) &= \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (n-1)! \langle g_n, f_n \rangle_{L^2(\mathcal{T}^n)} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n E(J_n(G)J_n(F)) = -E(GLF), \end{aligned}$$

deci $DF \in \text{Dom } L$ și $\delta DF = -LF$. \square

În rezultatul următor vedem că operatorul L acționează pe variabilele aleatoare netede ca un operator diferențial de ordinul doi.

PROPOZIȚIA 2.4.3 Avem $S \subset \text{Dom } L$ și pentru $F = f(W(h_1), \dots, W(h_n))$ în S , $f \in C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$, avem

$$\begin{aligned} LF &= \sum_{i,j=1}^n \partial_i \partial_j f(W(h_1), \dots, W(h_n)) \langle h_i, h_j \rangle \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \partial_i f(W(h_1), \dots, W(h_n)) W(h_i). \end{aligned}$$

In plus, \mathcal{S} este densă in $Dom L$ in raport cu norma $\|F\|_L = [E(F^2) + E(|LF|^2)]^{1/2}$.

Demonstrație. Știm că $F \in \mathbf{D}^{2,1}$ și că

$$D_t F = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} (W(h_1), \dots, W(h_n)) h_i(t).$$

In consecință $DF \in \mathcal{S}_H \subset Dom \delta$ și din formula (2.28) obținem

$$\begin{aligned} \delta DF &= \sum_{i=1}^n \partial_i f (W(h_1), \dots, W(h_n)) W(h_i) \\ &- \sum_{i,j=1}^n \partial_i \partial_j f (W(h_1), \dots, W(h_n)) \langle h_i, h_j \rangle. \end{aligned}$$

Rămâne de aplicat propoziția 2.4.2. Ultima afirmație se obține aproximând F cu o sumă finită de integrale stocastice multiple, in care f_n sunt funcții elementare. \square

Mai general, se poate arăta că, dacă $F = (F^1, \dots, F^m)$ are componentele in $Dom L$ și $\varphi \in C^2(\mathbf{R}^m)$ cu derivatele parțiale de ordin 1 și 2 mărginite, atunci $\varphi(F) \in Dom L$ și

$$\begin{aligned} L(\varphi(F)) &= \sum_{i,j=1}^m (\partial_i \partial_j \varphi)(F) \langle DF^i, DF^j \rangle + \sum_{i=1}^m (\partial_i \varphi)(F) LF^i. \end{aligned}$$

Să observăm că $Dom L = \mathbf{D}^{2,2}$ și că normele $\|\cdot\|_L$ și $\|\cdot\|_{2,2}$ coincid. De fapt, dacă $F = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n)$, atunci

$$\begin{aligned} E(F^2) + E(|LF|^2) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + 1) n! \|f_n\|_{L^2(\mathcal{T}^n)}^2 \\ &= E(F^2) + E(\|DF\|_{L^2(\mathcal{T})}^2) + E(\|D^2F\|_{L^2(\mathcal{T}^2)}^2). \end{aligned}$$

Exerciții 1. Pentru $0 < \epsilon < 1$ notăm $F_{1-\epsilon} = \sum_{n=0}^{\infty} (1 - \epsilon)^n J_n(F)$ și $F^\epsilon = \frac{F_{1-\epsilon} - F}{\epsilon}$. Atunci LF există dacă și numai dacă F^ϵ converge in $L^2(\Omega)$ când $\epsilon \searrow 0$ și in acest caz avem $LF = \lim_{\epsilon \searrow 0} F^\epsilon$.

2. Fie $F = \exp\left(W(h) - \frac{1}{2} \|h\|^2\right)$, $h \in H$. Arătați că $LF = -(W(h) - \|h\|^2)F$.

Am văzut că T_t sunt contracții pe $L^r(\Omega)$ pentru orice $r \geq 1$. Acești operatori verifică o proprietate mai tare, numită de hipercontractivitate.

TEOREMA 2.4.4 Fie $r > 1$. Dacă $F \in L^{s(t)}(\Omega, \mathcal{F}, P)$, unde $s(t) := e^{2t}(r-1) + 1$, atunci

$$\|T_t(F)\|_{s(t)} \leq \|F\|_r.$$

Demonstrație. Notăm $s = s(t)$ și fie s' conjugatul lui s . Din dualitatea spațiilor $L^s, L^{s'}$, este suficient să arătăm că

$$|E[(T_t(F))G]| \leq \|F\|_r \|G\|_{s'}$$

pentru orice $F \in L^r$ și $G \in L^{s'}$. Printr-un argument de aproximare, putem presupune că $0 < a \leq F, G \leq b < \infty$, cu $a \leq b$ și $F = f(W(h_1), \dots, W(h_n))$, $G = g(W(h_1), \dots, W(h_n))$, cu $f, g \in C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$. Fie $\{W_t^i, 0 \leq t \leq 1, i = 1, 2\}$ mișcări browniene independente și $\Phi_1, \dots, \Phi_n \in L^2[0, 1]$ astfel ca $\langle \Phi_i, \Phi_j \rangle_{L^2[0,1]} = \langle h_i, h_j \rangle$. Atunci vectorii gaussieni

$$(W(h_1), \dots, W(h_n)), \left(\int_0^1 \Phi_1 dW^1, \dots, \int_0^1 \Phi_n dW^1\right)$$

au aceeași lege. Intrucât

$$E[(T_t(F))G] = E\left[f\left(e^{-t} \int_0^1 \Phi_1 dW^1\right.\right.$$

$$\left.+(1 - e^{-2t})^{1/2} \int_0^1 \Phi_1 dW^2, \dots, e^{-t} \int_0^1 \Phi_n dW^1\right.$$

$$\left.+(1 - e^{-2t})^{1/2} \int_0^1 \Phi_n dW^2\right) \times g\left(\int_0^1 \Phi_1 dW^1, \dots, \int_0^1 \Phi_n dW^1\right)\Big],$$

problema se reduce la a arăta că

$$E[XY] \leq \|X\|_r \|Y\|_{s'},$$

cu $0 < a \leq X, Y \leq b < \infty$, iar X, Y sunt variabile aleatoare măsurabile în raport cu σ -algebrele generate de mișcările browniene $W_\alpha^3 = e^{-t}W_\alpha^1 + (1 - e^{-2t})^{1/2} W_\alpha^2$ respectiv W_α^1 ; cf. afirmației 1.4.11, aceste variabile aleatoare se scriu

$$X^r = E[X^r] + \int_0^1 u(\alpha) dW_\alpha^3, \quad Y^{s'} = E[Y^{s'}] + \int_0^1 v(\alpha) dW_\alpha^1.$$

Aplicăm formula lui Itô (afirmația 1.4.4) martingalelor mărginite

$$M_\alpha = E[X^r] + \int_0^\alpha u dW^3, \quad N_\alpha = E[Y^{s'}] + \int_0^\alpha v dW^1$$

și funcției $f(x, y) = x^{1/r} y^{1/s'}$; obținem

$$\begin{aligned} XY &= \|X\|_r \|Y\|_{s'} + \int_0^1 \left(\frac{1}{r} M_\alpha^{1/r-1} N_\alpha^{1/s'} dM_\alpha \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{s'} M_\alpha^{1/r} N_\alpha^{1/s'-1} dN_\alpha \right) + \frac{1}{2} \int_0^1 M_\alpha^{1/r} N_\alpha^{1/s'} A_\alpha d\alpha, \end{aligned}$$

unde

$$\begin{aligned} A_\alpha &= \frac{1}{p} \left(\frac{1}{p} - 1 \right) M_\alpha^{-2} u(\alpha)^2 + \frac{1}{s'} \left(\frac{1}{s'} - 1 \right) N_\alpha^{-2} v(\alpha)^2 \\ &\quad + 2 \frac{1}{p s'} M_\alpha^{-1} N_\alpha^{-1} u(\alpha) v(\alpha) e^{-t}. \end{aligned}$$

Luăm mediile și obținem

$$E[XY] = \|X\|_r \|Y\|_{s'} + \frac{1}{2} \int_0^1 E[M_\alpha^{1/r} N_\alpha^{1/s'} A_\alpha] d\alpha,$$

deci este suficient să observăm că $A_\alpha \leq 0$. \square

Ca o consecință a teoremei 2.4.4, să arătăm că, pentru orice $r < s$ în $(1, \infty)$, normele $\|\cdot\|_r$ și $\|\cdot\|_s$ sunt echivalente pe orice haos \mathcal{H}_n . Fie $t > 0$ astfel ca $s = 1 + e^{2t}(r - 1)$; pentru orice $F \in \mathcal{H}_n$, avem

$$e^{-nt} \|F\|_s = \|T_t(F)\|_s \leq \|F\|_r.$$

Pe de altă parte, operatorii J_n sunt mărginiți în L^r , $r > 1$. Intr-adevăr, fie $r > 2$ și $t > 0$ astfel ca $r - 1 = e^{2t}$

Din proprietatea de hipercontractivitate cu exponenții r și 2 , obținem

$$\begin{aligned} \|J_n(F)\|_2 &= e^{nt} \|T_t(J_n(F))\|_r \\ &\leq e^{nt} \|J_n(F)\|_2 \leq e^{nt} \|F\|_2 \leq e^{nt} \|F\|_r. \end{aligned}$$

Pentru $r < 2$ folosim un argument de dualitate :

$$\begin{aligned} \|J_n(F)\|_r &= \sup_{\|G\|_s \leq 1} E(J_n(FG)) \\ &\leq \|F\|_r \sup_{\|G\|_s \leq 1} \|J_n(G)\|_s \leq e^{2t} \|F\|_r, \end{aligned}$$

unde s este conjugatul lui r și $s - 1 = e^{2t}$. \square

Să remarcăm că spațiul $\mathbf{D}^{2,1}$ se poate caracteriza ca domeniul operatorului $C := -(-L)^{1/2}$. Mai precis, dacă $F = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n)$, atunci operatorul C este definit prin

$$CF = \sum_{n=0}^{\infty} -n^{1/2} J_n(F);$$

ca și în cazul operatorului L , se poate arăta că C este generatorul infinitezimal al semigrupului de operatori (semigrupul Cauchy) dat de

$$Q_t F = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(nt)^{1/2}} J_n(F). \quad (2.37)$$

Observăm că $\text{Dom } C = \mathbf{D}^{2,1}$ și că, pentru $F \in \text{Dom } C$, avem

$$E((CF)^2) = \sum_{n=1}^{\infty} n n! \|f_n\|_{L^2(\mathcal{T}^n)}^2 = E(|DF|^2).$$

Fie $\{\phi(n), n \geq 0\}$ un șir de numere reale cu $\phi(0) = 0$. Acesta determină un operator liniar $T_\phi : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ prin

$$T_\phi(F) = \sum_{n=0}^{\infty} \phi(n) J_n(F), \quad F \in \mathcal{P}. \quad (2.38)$$

Are loc următorul rezultat de mărginire în L^r , $r > 1$, numit teorema multiplicatorului.

TEOREMA 2.4.5 Fie $\{\phi(n), n \geq 0\}$ un șir de numere reale astfel încât $\phi(0) = 0$ și $\phi(n) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k n^{-k}$ pentru $n \geq N$. Dacă $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| N^{-k} < \infty$, atunci operatorul (2.38) este mărginit în L^r pentru orice $1 < r < \infty$.

Să observăm că ipotezele acestei teoreme sunt echivalente cu existența unei funcții $h(x)$ analitică în jurul originii și cu proprietatea $\phi(n) = h(n^{-1})$ pentru $n \geq N$.

Exemple de aplicare :

$$\phi(n) = \left(\frac{1+n^{1/2}}{(1+n)^{1/2}} \right)^s, \text{ cu } s \in \mathbf{R}, \phi(n) = \left(\frac{1+n}{2+n} \right)^{1/2}.$$

De asemenea, observăm că operatorii T_t, Q_t, L, C satisfac aceste ipoteze.

Să considerăm clasa \mathcal{S}_H variabilelor aleatoare netede cu valori în H i.e. de forma

$$F = \sum_{j=1}^n F_j v_j, v_j \in H, F_j \in \mathcal{S}.$$

Pentru $p \in \mathbf{N}^*$ și $r \geq 1$, definim spațiile $D^{r,p}(H)$ ca fiind completarea clasei \mathcal{S}_H în raport cu normele

$$\|F\|_{r,p,H} = \left[E(\|F\|_H^r) + \sum_{j=1}^p E(\|D^j F\|_{L^2(T_j; H)}^r) \right]^{1/r}.$$

Proprietățile de monotonie, compatibilitate și densitate de la normele $\|\cdot\|_{r,p}$ rămân adevărate pentru variabile aleatoare cu valori în H .

Definim

$$D^\infty = \bigcap_{p \in \mathbf{N}^*, r \geq 1} D^{r,p}.$$

Atunci D^∞ este un spațiu metric numărabil complet; similar definim $D^\infty(H)$. Observăm că operatorul D este continuu de la $D^{r,p}$ la $D^{r-1,p}(H)$ pentru orice p, r . În consecință, D este operator liniar continuu de la D^∞ la $D^\infty(H)$. Mai mult, dacă $F, G \in D^\infty$, atunci $\langle DF, DG \rangle \in D^\infty$.

Aproximând componentele lui $F = (F^1, \dots, F^m)$, $F^i \in \mathbf{D}^\infty$, cu variabile aleatoare netede, pentru $\varphi \in C_p^\infty(\mathbf{R}^m)$ obținem că $\varphi(F) \in \mathbf{D}^\infty$ și

$$D(\varphi(F)) = \sum_{i=1}^m (\partial_i \varphi)(F) DF^i,$$

$$L(\varphi(F)) = \sum_{i,j=1}^m (\partial_i \partial_j \varphi) \langle DF^i, DF^j \rangle + \sum_{i=1}^m (\partial_i \varphi)(F) LF^i.$$

În particular deducem că \mathbf{D}^∞ este o algebră.

Exemplu Fie $\{W_t, t \in [0, 1]\}$ o mișcare browniană reală. Pentru $0 < \gamma < \frac{1}{2}$ și $p > 1$ cu $\gamma < \frac{1}{2} - \frac{1}{2p}$, variabila aleatoare

$$\|W\|_{p,\gamma} = \left(\int_{[0,1]^2} \frac{|W_t - W_s|^{2p}}{|t-s|^{1+2p\gamma}} dsdt \right)^{1/2p} \in \mathbf{D}^\infty.$$

În continuare vom vedea că operatorul L este continuu de la \mathbf{D}^∞ la \mathbf{D}^∞ și că operatorul δ este continuu de la $\mathbf{D}^\infty(H)$ la \mathbf{D}^∞ . Aceste rezultate se demonstrează utilizând inegalitățile lui Meyer, care arată echivalența normelor $\|\cdot\|_r$ ale lui CF și $|DF|$, pentru $r > 1$. La rândul ei, echivalența normelor va rezulta din faptul că operatorul DC^{-1} este mărginit în L^r , $r > 1$. Mai precis, avem

TEOREMA 2.4.6 Fie $r > 1$ și $p \in \mathbf{N}^*$. Atunci există constantele $a_r^p, b_r^p > 0$ astfel încât, pentru orice variabilă aleatoare polinomială F , avem

$$\begin{aligned} a_r^p E \left(\|D^p F\|_{L^2(\mathcal{T}_p)}^r \right) &\leq E \left(\|C^p F\|^r \right) \\ &\leq b_r^p \left[E \left(\|D^p F\|_{L^2(\mathcal{T}_p)}^r \right) + E \left(\|F\|^r \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.39)$$

În cazul $p = 1$, aceste inegalități se scriu mai simplu în forma

$$a_r \|DF\|_r \leq \|CF\|_r \leq b_r \|DF\|_r, \quad (2.40)$$

pentru orice $r > 1$. De fapt, formula (2.39) rezultă din (2.40) și din inegalitățile lui Hincin pentru funcții Rademacher, cf. P.-A. Meyer, *Lect. Notes in Math.* 1059, 1984, p.179-193.

PROPOZIȚIA 2.4.7 Operatorul δ este mărginit de la $D^{r,p}(H)$ la $D^{r,p-1}$, pentru orice $r > 1$ și $p \geq 2$, iar operatorul L este mărginit de la $D^{r,p}(H)$ la $D^{r,p-2}$ pentru orice $r > 1$ și $p \geq 3$.

Demonstrație. Vom arăta numai că δ este continuu de la $D^{r,1}(H)$ la L^r . Fie s conjugatul lui r ; pentru $u \in D^{r,1}(H)$ și variabila aleatoare polinomială G cu $E(G) = 0$, avem

$$\begin{aligned} E(\delta(u)G) &= E(\langle u, DG \rangle) \\ &= E(\langle \tilde{u}, DG \rangle) + E(\langle E(u), DG \rangle). \end{aligned}$$

Al doilea sumand în expresia de mai sus este mărginit de o constantă înmulțită cu $\| |u| \|_r \|G\|_s$. Putem deci presupune $E(u) = E(DG) = 0$ și obținem

$$\begin{aligned} |E(\delta(u)G)| &= |E(\langle u, DG \rangle)| \\ &= |E(\langle Cu, CC^{-2}DG \rangle)| = |E(\langle Du, DC^{-2}DG \rangle_{L^2(T^2)})| \\ &\leq \|Du\|_{L^r(\Omega; H \otimes H)} \|DC^{-2}DG\|_{L^s(\Omega; H \otimes H)} \\ &\leq c_r \|Du\|_{L^r(\Omega; H)} \|G\|_s; \end{aligned}$$

am folosit inegalitățile lui Meyer pentru a evalua termenul $DC^{-2}DG$. \square

În capitolul următor vom avea nevoie de aplicațiile următoare ale inegalităților lui Meyer. Fie \mathcal{P}_H clasa variabilelor aleatoare polinomiale cu valori în H . Atunci operatorul $L^{-1/2}\delta : \mathcal{P}_H \rightarrow \mathcal{P}$ este mărginit în $L^r(\Omega; H)$ pentru orice $r > 1$. Într-adevăr, pentru orice $G \in \mathcal{P}$ cu $E(G) = 0$ și $u \in \mathcal{P}_H$, folosind formula (2.40), avem

$$\begin{aligned} |E(L^{-1/2}\delta(u)G)| &= |E(\langle u, DL^{-1/2}G \rangle)| \\ &\leq \|u\|_{L^r(\Omega; H)} \|DL^{-1/2}G\|_{L^s(\Omega; H)} \leq c_r \|u\|_{L^r(\Omega; H)} \|G\|_{L^s(\Omega)}, \end{aligned}$$

unde s este conjugatul lui r . Folosind din nou relația (2.40), obținem că $DL^{-1}\delta$ este mărginit de la $L^r(\Omega; H)$ la $L^r(\Omega; H)$:

$$E(\langle DL^{-1}\delta u, v \rangle) = E(L^{-1}\delta(u)\delta(v))$$

$$\begin{aligned}
&= E\left(L^{-1/2}\delta(u)L^{-1/2}\delta(v)\right) \\
&\leq \|L^{-1/2}\delta(u)\|_{L^r(\Omega)} \|L^{-1/2}\delta(v)\|_{L^s(\Omega)} \\
&\leq c_r \|u\|_{L^r(\Omega; H)} ; \|v\|_{L^s(\Omega; H)}.
\end{aligned}$$

PROPOZIȚIA 2.4.8 Fie $F \in \mathbf{D}^{\alpha,1}$ cu $\alpha > 1$. Dacă $F \in L^r(\Omega)$ și $DF \in L^r(\Omega; H)$ pentru un $r > \alpha$, atunci $F \in \mathbf{D}^{r,1}$.

Demonstrație. Presupunem că $E(F) = 0$. Există un șir de variabile aleatoare polinomiale η_n cu valori în H care converge către DF în $L^r(\Omega; H)$. Observăm că $-L^{-1}\delta D = (I - J_0)$. Folosind descompunerea $\eta_n = DG_n + u_n$ dată de propoziția 2.3.4, în care $\delta(u_n) = 0$ și mărginirea în L^r a operatorului $L^{-1}\delta$, obținem că $F - G_n = L^{-1}\delta(\eta_n - DF)$ converge la 0 în $L^r(\Omega)$ când $n \rightarrow \infty$. Pe de altă parte

$$\begin{aligned}
\|DF - DG_n\|_{L^r(\Omega; H)} &= \|DL^{-1}\delta(\eta_n - DF)\|_{L^r(\Omega; H)} \\
&\leq \|\eta_n - DF\|_{L^r(\Omega; H)}
\end{aligned}$$

deci $|DG_n - DF|$ converge la 0 în $L^r(\Omega)$ când $n \rightarrow \infty$. Avem că $G_n \in \mathbf{D}^{r,1}$ deoarece au dezvoltări în haos finite, deci $F \in \mathbf{D}^{r,1}$. \square

PROPOZIȚIA 2.4.9 Fie $F_n \in \mathbf{D}^{r,p}$ cu $p \geq 1$ și $r \geq 2$. Dacă F_n converge către F în $L^r(\Omega)$ și $\sup_n \|F_n\|_{r,p} < \infty$, atunci $F \in \mathbf{D}^{r,p}$.

Demonstrație. Fie s conjugatul lui r . Există un subșir $\{F_{n_i}, i \geq 1\}$ astfel încât derivatele $D^j F_{n_i}$ converg în topologia slabă $\sigma(L^r(\Omega, L^2(\mathcal{T}^j)), L^s(\Omega, L^2(\mathcal{T}^j)))$, către un $\alpha_j \in L^r(\Omega, L^2(\mathcal{T}^j))$, pentru $j = 1, \dots, p$. Luăm $r = 2$ și obținem că, pentru $h_1, \dots, h_j \in H$, proiecțiile lui $\langle D(F_{n_i}), h_1 \otimes \dots \otimes h_j \rangle$ pe orice haos converg în topologia $\sigma(L^2(\mathcal{T} \times \Omega))$, când $i \rightarrow \infty$, către proiecțiile corespunzătoare ale lui $\langle \alpha, h_1 \otimes \dots \otimes h_j \rangle$. În consecință $F \in \mathbf{D}^{2,p}$ și $\alpha_j = D^j F$ pentru orice $j = 1, \dots, p$. Concluzionăm ca în propoziția 2.4.8. \square

COROLAR 2.4.10 Fie $F_n \in \mathbf{D}^{2,1}$, $n \geq 1$ un șir de variabile aleatoare care converge către F în $L^2(\Omega)$ și astfel ca $\sup_n E(|DF_n|^2) < \infty$, atunci $F \in \mathbf{D}^{2,1}$ și $\{DF_n, n \geq 1\}$ converge către DF în topologia slabă a lui $L^2(\mathcal{T} \times \Omega)$.

Cu acest ultim rezultat putem extinde regula lanțului (propoziția 2.2.4) la funcțiile lipschitziene.

PROPOZIȚIA 2.4.11 Fie $\varphi : \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$ cu proprietatea

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq K |x - y|,$$

pentru $x, y \in \mathbf{R}^m$ și un $K > 0$. Dacă $F = (F^1, \dots, F^m)$ are componentele în $\mathbf{D}^{2,1}$, atunci $\varphi(F) \in \mathbf{D}^{2,1}$ și există un vector $G = (G^1, \dots, G^m)$ mărginit de K astfel încât

$$D(\varphi(F)) = \sum_{i=1}^m G^i DF^i. \quad (2.41)$$

Demonstrație. Fie $\alpha \in C_0^\infty(\mathbf{R}^m)$ o funcție nenegativă cu suportul în bila unitate și $\int_{\mathbf{R}^m} \alpha(x) dx = 1$. Definim $\alpha_n(x) = n^m \alpha(nx)$ și $\varphi_n = \varphi * \alpha_n$. Atunci avem $\lim_n \varphi_n(x) = \varphi(x)$ uniform în raport cu x , funcțiile φ_n sunt de clasă C^∞ cu $|\nabla \varphi_n| \leq K$ și, pentru orice n avem

$$D(\varphi_n(F)) = \sum_{i=1}^m (\partial_i \varphi_n)(F) DF^i. \quad (2.42)$$

Din corolarul 2.4.10 rezultă că $\varphi(F) \in \mathbf{D}^{2,1}$ și că există un subsir $\{(\nabla \varphi_{n_k})(F), k \geq 1\}$ care converge în topologia slabă a lui $L^2(\mathcal{T} \times \Omega)$ către $D(\varphi(F))$. De aici rezultă că există un subsir $\{(\nabla \varphi_{n_{k_i}})(F), i \geq 1\}$ care converge către un G ca în enunț, în topologia slabă $\sigma(L^r(\Omega; \mathbf{R}^m), L^r(\Omega; \mathbf{R}^m))$, pentru orice $r \geq 2$, unde s este conjugatul lui r . Obținem că G este mărginit de K și apoi trecem la limită în relația (2.42) \square

Cu ajutorul propoziției 2.4.8, observăm că propoziția 2.4.11 rămâne valabilă în spațiile L^r , $r \geq 2$.

2.5 APLICAȚIE LA STUDIUL LEGILOR

Să considerăm $W = \{W(h), h \in H\}$ un zgomot alb asociat spațiului Hilbert $H = L^2(T, \mathcal{B}, \mu)$ și definit pe spațiul de probabilitate complet $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, cu \mathcal{F} generat de W .

Pentru a ilustra metodologia care va fi utilizată în acest capitol, să considerăm pentru început cazul variabilelor aleatoare 1-dimensionale.

PROPOZIȚIA 2.5.1 Fie $F \in \mathbf{D}^{2,1}$ cu proprietatea că $\frac{DF}{\|DF\|} \in \text{Dom } \delta$. Atunci legea lui F admite o densitate continuă dată de

$$f(x) = E \left[\mathbf{1}_{\{F > x\}} \delta \left(\frac{DF}{\|DF\|} \right) \right]. \quad (2.43)$$

Demonstrație. Pentru $x \in \mathbf{R}$ fixat și $\epsilon > 0$, fie funcțiile

$$\psi_\epsilon(y) = \frac{1}{2\epsilon} \mathbf{1}_{[x-\epsilon, x+\epsilon]}(y)$$

și $\varphi_\epsilon(y) = \int_{-\infty}^y \psi_\epsilon(z) dz$. Știm că $\varphi_\epsilon(F) \in \mathbf{D}^{2,1}$ și făcând produsul scalar dintre derivata ei și DF , obținem

$$\langle D\varphi_\epsilon(F), DF \rangle = \psi_\epsilon(F) \|DF\|^2.$$

Această formulă permite calculul lui $\psi_\epsilon(F)$ și, folosind formula (2.24), obținem

$$\begin{aligned} E[\psi_\epsilon(F)] &= E \left[\left\langle D\varphi_\epsilon(F), \frac{DF}{\|DF\|^2} \right\rangle \right] \\ &= E \left[\varphi_\epsilon(F) \delta \left(\frac{DF}{\|DF\|^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.44)$$

De aici rezultă că legea lui F este absolut continuă, deoarece este dominată de măsura Lebesgue înmulțită cu constanta $E \left[\delta \left(\frac{DF}{\|DF\|^2} \right) \right]$. În fine, facem $\epsilon \searrow 0$ în (2.44) și obținem expresia densității lui F . \square

Exerciții 1. Fie $F \in \mathbf{D}^{2,1}$ și $h \in H$ cu următoarele proprietăți $\langle DF, h \rangle \neq 0$ a.p.t. și $\frac{h}{\langle DF, h \rangle} \in \text{Dom } \delta$. Atunci F admite o densitate continuă și mărginită dată de

$$f(x) = E \left[\mathbf{1}_{\{F > x\}} \delta \left(\frac{h}{\langle DF, h \rangle} \right) \right].$$

2. Fie $F \in \mathbf{D}^{4,2}$ astfel încât $E(\|DF\|^{-4}) < \infty$. Atunci $\frac{DF}{\|DF\|^2} \in \text{Dom } \delta$.

Fie $F = (F^1, \dots, F^m)$ un vector aleator cu componentele în $\mathbf{D}^{1,1}$. Următoarea matrice aleatoare simetrică și pozitiv definită

$$\gamma_F := \left(\langle DF^i, DF^j \rangle \right)_{1 \leq i, j \leq m}$$

se va numi **matricea Mallivin** asociată lui F . Are loc următorul rezultat.

TEOREMA 2.5.2 Fie $F = (F^1, \dots, F^m)$ un vector aleator cu următoarele proprietăți :

(a) $F^i \in \mathbf{D}^{2,1}$, $\langle DF^i, DF^j \rangle \in \mathbf{D}^{2,1}$ și $DF^i \in \text{Dom } \delta$, pentru orice $i, j = 1, \dots, m$.

(b) matricea γ_F este inversabilă a.p.t.

Atunci legea lui F este absolut continuă în raport cu măsura Lebesgue pe \mathbf{R}^m .

Pentru demonstrație vom avea nevoie de următoarea lemă de analiză reală.

LEMA 2.5.3 Fie μ o măsură finită pe \mathbf{R}^m . Dacă

$$\left| \int_{\mathbf{R}^m} \partial_i \varphi \, d\mu \right| \leq c_i \|\varphi\|_\infty \quad (2.45)$$

pentru $i = 1, \dots, m$ și $\varphi \in C_b^\infty(\mathbf{R}^m)$ (unde ∂_i înseamnă $\frac{\partial}{\partial x_i}$), atunci μ este absolut continuă în raport cu măsura Lebesgue.

Demonstrație. Dacă $m = 1$, pentru $a < b$ considerăm funcția

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{dacă } a < x < b \\ 1, & \text{dacă } x \geq b \end{cases}$$

care, deși nu este infinit diferențiabilă, poate fi aproximată cu funcții din $C_b^\infty(\mathbf{R})$ astfel încât formula (2.45) să aibă loc. Obținem că $\mu((a, b)) \leq c_1(b-a)$, deci μ este absolut continuă.

Dacă $m > 1$, să considerăm o aproximare a identității i.e. funcțiile ψ_ϵ pe \mathbf{R}^m definite prin

$$\psi_\epsilon(x) = (2\pi\epsilon)^{-m/2} \exp\left(-\frac{1}{2\epsilon} \|x\|^2\right)$$

pentru $\epsilon > 0$ și fie $c_k(x)$, $k \geq 1$ un șir de funcții din $C_0^\infty(\mathbf{R}^m)$ cu proprietățile

$$c_k(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } |x| \leq k \\ 0, & \text{dacă } |x| \geq k+1, \end{cases}$$

$0 \leq c_k \leq 1$ și toate derivatele lui c_k sunt uniform mărginite în raport cu k . Atunci funcțiile

$$c_k(x) (\psi_\epsilon * \mu)(x) = c_k(x) \int_{\mathbf{R}^m} \psi_\epsilon(x-y) \mu(dy)$$

sunt în $C_0^\infty(\mathbf{R}^m)$. Din inegalitățile Gagliardo-Nirenberg (cf. E.M.Stein, *Singular Integrals and Differentiability of Functions*, Princeton, 1970. p.129) aplicate acestor funcții, obținem

$$\|c_k(\psi_\epsilon * \mu)\|_{L^{m/m-1}} \leq \prod_{i=1}^m \|\partial_i(c_k(\psi_\epsilon * \mu))\|_{L^1}^{1/m}. \quad (2.46)$$

Inegalitatea (2.45) implică deci că aplicația $\varphi \rightarrow \int_{\mathbf{R}^m} \partial_i \varphi d\mu$, definită pe $C_0^\infty(\mathbf{R}^m)$, este o măsură cu semn pe care o vom nota $\nu_i, 1 \leq i \leq m$. Obținem

$$\begin{aligned} \|\partial_i(c_k(\psi_\epsilon * \mu))\|_{L^1} &\leq c_k(x) \left| \int_{\mathbf{R}^m} \partial_i \psi_\epsilon(x-y) \mu(dy) \right| dx \\ &+ \int_{\mathbf{R}^m} |\partial_i c_k(x)| \left(\int_{\mathbf{R}^m} \psi_\epsilon(x-y) \mu(dy) \right) dx \\ &= \int_{\mathbf{R}^m} c_k(x) \left(\int_{\mathbf{R}^m} \psi_\epsilon(x-y) \nu_i(dy) \right) dx \\ &+ \int_{\mathbf{R}^m} |\partial_i c_k(x)| \left(\int_{\mathbf{R}^m} \psi_\epsilon(x-y) \mu(dy) \right) dx \leq K, \end{aligned}$$

cu K independentă de k și de ϵ . Deci familia de funcții $\{c_k(\psi_\epsilon * \mu), k \geq 1, \epsilon > 0\}$ este mărginită în $L^{m/m-1}$. Rămâne să aplicăm faptul că bila unitate din $L^{m/m-1}$ este slab compactă. \square

Demonstrația teoremei 2.5.2 Fie $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^m)$ o funcție test fixată. Din propoziția 2.2.4 rezultă că $\varphi(F) \in \mathbf{D}^{2,1}$ și

$$D(\varphi(F)) = \sum_{i=1}^m \partial_i \varphi(F) DF^i.$$

Deci

$$\langle D(\varphi(F)), DF^i \rangle = \sum_{i=1}^m \partial_i \varphi(F) \gamma_F^i,$$

adică

$$\partial_i \varphi(F) = \sum_{j=1}^m \langle D(\varphi(F)), DF^j \rangle (\gamma_F^{-1})^{ji}. \quad (2.47)$$

Inversa matricei γ_F poate să nu aibă momente și de aceea vom folosi un argument de localizare. Pentru $k \geq 1$ natural, fie $\Psi_k \in C_0^\infty(\mathbf{R}^m \otimes \mathbf{R}^m)$ cu proprietățile

$$\Psi_k(\sigma) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } \sigma \in K_k, \\ \Psi_k(\sigma) = 0, & \text{dacă } \sigma \notin K_{k+1}, \end{cases}$$

unde

$$K_k = \left\{ \sigma \in \mathbf{R}^m \otimes \mathbf{R}^m : |\sigma^{ij}| \leq k \text{ pentru orice } i, j \right. \\ \left. \text{și } |\det \sigma| \geq 1/k \right\}.$$

Observăm că K_k este compactă în $GL(m) \subset \mathbf{R}^m \otimes \mathbf{R}^m$. Înmulțim relația (2.47) cu $\Psi_k(\gamma_F)$ și obținem

$$E[\Psi_k(\gamma_F) \partial_i \varphi(F)] \\ = \sum_{j=1}^m E[\Psi_k(\gamma_F) \langle D(\varphi(F)), DF^j \rangle (\gamma_F^{-1})^{ji}]. \quad (2.48)$$

Din condiția (a) obținem că $\Psi_k(\gamma_F)(\gamma_F^{-1})^{ji} DF^j \in \text{Dom } \delta$, deoarece $\Psi_k(\gamma_F)(\gamma_F^{-1})^{ji} \in \mathbf{D}^{2,1}$ (este egală cu compunerea dintre o funcție C_0^∞ și variabile aleatoare din $\mathbf{D}^{2,1}$, iar toate sunt mărginite. Folosind relația (2.24) obținem

$$E[\Psi_k(\gamma_F) \partial_i \varphi(F)] = \left\| E \left[\varphi(F) \sum_{j=1}^m \delta(\Psi_k(\gamma_F)(\gamma_F^{-1})^{ji} DF^j) \right] \right\| \\ \leq E \left(\left\| \sum_{j=1}^m \delta(\Psi_k(\gamma_F)(\gamma_F^{-1})^{ji} DF^j) \right\| \right) \|\varphi\|_\infty.$$

Din lema 2.5.3 rezultă că măsura $[\Psi_k(\gamma_F) \cdot P] \circ F^{-1}$ este absolut continuă în raport cu măsura Lebesgue pe \mathbf{R}^m i.e. pentru orice boreliană $A \subset \mathbf{R}^m$ de măsură Lebesgue nulă, avem

$$\int_{F^{-1}(A)} \Psi_k(\gamma_F) dP = 0 .$$

Facem $k \rightarrow \infty$ și folosind ipoteza (b) din enunț, obținem $P(F^{-1}(A)) = 0$. \square

Remarcă Condiția (a) din teorema 2.5.2 este satisfăcută dacă, e.g. $F^i \in \mathbf{D}^{4,2}$. Totodată, concluzia teoremei 2.5.2 rămâne adevărată dacă înlocuim condiția (a) prin

$$(a') F^i \in \mathbf{D}^{r,1}, r > 1 \text{ pentru toți } i = 1, \dots, m.$$

In cazul v.a. 1-dimensionale are loc următorul rezultat.

TEOREMA 2.5.4 Fie $F \in \mathbf{D}^{1,1}$ astfel încât $|DF| > 0$ a.p.t. Atunci legea lui F este absolut continuă în raport cu măsura Lebesgue pe \mathbf{R} .

Demonstrație. Putem presupune că F este mărginită e.g. $|F| < 1$. Vrem să arătăm că, pentru orice funcție măsurabilă $g : (-1, 1) \rightarrow [0, 1]$ cu $\int_{-1}^1 g(y) dy = 0$, avem $E(g(F)) = 0$. Există un șir $g^n : (-1, 1) \rightarrow [0, 1]$ de funcții diferentiabile și cu derivatele mărginite astfel ca $g^n(y)$ să convergă către $g(y)$ pentru aproape toți y în raport cu măsura $P \circ F^{-1} + \lambda$. Punem

$$\psi^n(y) = \int_{-1}^y g^n(x) dx$$

și

$$\psi(y) = \int_{-1}^y g(x) dx .$$

Din regula lanțului obținem că $\psi^n(F) \in \mathbf{D}^{1,1}$ și $D[\psi^n(F)] = g^n(F)DF$. Avem că $\psi^n(F)$ converge către $\psi(F)$ a.p.t. deoarece g^n converge către g a.p.t. în raport cu măsura Lebesgue. Această convergență are loc și în $L^1(\Omega)$, din teorema de convergență dominată. Pe de altă parte, $D\psi^n(F)$ converge a.p.t. către $g(F)DF$ deoarece g^n converge către g a.p.t. în raport cu legea lui F . Din nou din teorema de convergență dominată obținem că această din urmă convergență are loc și în $L^1(\Omega; L^2(\mathcal{T}))$. Să observăm că $\psi(F) = 0$ a.p.t. și să folosim faptul că operatorul D este închis pentru a deduce că $g(F)DF = 0$ a.p.t. În consecință $g(F) = 0$ a.p.t. \square

Exercițiu Fie $u = \{u(t), t \in [0, 1]\} \in L^{2,1}$ astfel încât există un $\alpha > 0$ cu proprietatea $\int_0^1 \int_0^1 (E |D_s u(t)|^2)^\alpha ds dt < \infty$. Arătați că variabila aleatoare $F = \int_0^1 u(s) dW_s$ are legea absolut continuă.

Criteriul uzual de diferențiabilitate a densităților este dat în rezultatul următor.

TEOREMA 2.5.5 Fie $F = (F^1, \dots, F^m)$ un vector aleator cu componentele $F^i \in \mathbf{D}^\infty$. Dacă matricea Mallivin satisface condiția

$$(\det \gamma_F)^{-1} \in \bigcap_{p>1} L^p(\Omega), \quad (2.49)$$

atunci densitatea lui F este infinit diferențiabilă.

Pentru demonstrație avem nevoie de două leme tehnice.

LEMA 2.5.6 Fie μ măsură finită pe \mathbf{R}^m astfel încât

$$\left| \int_{\mathbf{R}^m} \partial_\alpha \varphi d\mu \right| \leq c_\alpha \|\varphi\|_\infty \quad (2.50)$$

pentru orice $\varphi \in C^\infty(\mathbf{R}^m)$ cu suport compact, orice multiindice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \{1, \dots, m\}^k$ și $k \geq 1$, unde ∂_α înseamnă $\frac{\partial^k}{\partial x_{\alpha_1} \dots \partial x_{\alpha_k}}$. Atunci μ este absolut continuă în raport cu măsura Lebesgue și are o densitate infinit diferențiabilă.

Demonstrație. Fie $x_0 \in \mathbf{R}^m$ fixat; este suficient să arătăm că restricția lui μ la orice bilă deschisă $B_r(x_0)$ admite o densitate infinit diferențiabilă. Fie $\beta \in C^\infty(\mathbf{R}^m)$ astfel ca $0 \leq \beta(x) \leq 1$, $\beta(x) = 1$ pe $B_r(x_0)$ și $\beta(x) = 0$ pe $B_r^c(x_0)$. Definim măsura $\nu(dx) = \beta(x)\mu(dx)$; pentru orice multiindice α ca în enunț, există o constantă d_α astfel ca, pentru orice $\varphi \in C_b^\infty(\mathbf{R}^m)$ să avem

$$\left| \int_{\mathbf{R}^m} \partial_\alpha \varphi d\nu \right| \leq d_\alpha \|\varphi\|_\infty. \quad (2.51)$$

(din (2.50) și definiția lui ν).

Fie $\hat{\nu}(y) = \int_{\mathbf{R}^m} e^{i\langle y, x \rangle} \nu(dx)$ transformarea Fourier a lui ν . Pentru $\varphi(x) = e^{i\langle y, x \rangle}$, $y \in \mathbf{R}^m$, $\alpha = (1, \dots, 1)$, din inegalitatea (2.51) obținem

$$|y_1 \dots y_m \hat{\nu}(y)| \leq d_\alpha,$$

deci $\hat{\nu}(y)$ este de pătrat integrabil și, ca o consecință, are o densitate dată de transformarea Fourier inversă

$$f(x) = (2\pi)^{-m} \int_{\mathbf{R}^m} e^{-i\langle y, x \rangle} \hat{\nu}(y) dy. \quad (2.52)$$

Mai mult, funcția $|y|^n |\hat{\nu}(y)|$ este integrabilă pentru orice n , deci putem deriva sub semnul integralei în (2.52) de oricâte ori dorim. În consecință, f este infinit diferențiabilă și deci μ are o densitate infinit diferențiabilă. \square

LEMA 2.5.7 Fie G o matrice aleatoare de tip $m \times m$, inversabilă a.p.t. astfel încât $(\det G)^{-1} \in L^r$, pentru orice $r \geq 2$. Dacă $G^{ij} \in \mathbf{D}^\infty$, atunci $(G^{-1})^{ij} \in \mathbf{D}^\infty$ și

$$D((G^{-1})^{ij}) = \sum_{k,l=1}^m (G^{-1})^{ik} (G^{-1})^{jl} D(G^{kl}).$$

Demonstrație. Cum probabilitatea mulțimii $\{\det G > 0\}$ este 0 sau 1, putem presupune că $\det G > 0$ a.p.t. Pentru $\epsilon > 0$, fie G_ϵ matricea dată de

$$G_\epsilon G = \frac{\det G}{\det G + \epsilon}.$$

Observăm că $(\det G + \epsilon)^{-1} \in \mathbf{D}^\infty$ deoarece este compunerea dintre $\det G$ și o funcție din $C_p^\infty(\mathbf{R})$. Deci componentele lui $G_\epsilon \in \mathbf{D}^\infty$. În plus, pentru orice i, j , șirul G_ϵ^{ij} converge către $(G^{-1})^{ij}$ în L^r când $\epsilon \searrow 0$. Conform propoziției 2.4.9, este suficient să probăm că derivatele iterate ale lui G_ϵ^{ij} sunt mărginite în L^r , uniform în raport cu $r \geq 2$. Într-adevăr, aceasta rezultă din faptul că $(\det G)G^{-1} \in \mathbf{D}^\infty$ și din faptul că $(\det G + \epsilon)^{-1}$ este mărginit în normele $\|\cdot\|_{r,p}$ pentru orice r, p . Ultima relație din lemă se obține aplicând operatorul D în definiția lui G_ϵ și făcând $\epsilon \searrow 0$. \square

Demonstrația teoremei 2.5.5 Fie $\varphi \in C^\infty(\mathbf{R}^m)$ o funcție test cu suport compact. Utilizând regula lanțului, obținem

$$\begin{aligned} & \langle D(\varphi(F)), DF^j \rangle \\ &= \sum_{i=1}^m \partial_i \varphi(F) \langle DF^i, DF^j \rangle = \sum_{i=1}^m \partial_i \varphi(F) \gamma_F^{ij}, \end{aligned}$$

deci

$$\partial_i \varphi(F) = \sum_{j=1}^m \langle D(\varphi(F)), DF^j \rangle (\gamma_F^{-1})^{j_i}.$$

Fie $R \in \mathbf{D}^\infty$ fixat ; avem că

$$\begin{aligned} E[R(\partial_i \varphi)(F)] &= \sum_{j=1}^m E \left[R \langle D(\varphi(F)), (\gamma_F^{-1})^{j_i} DF^j \rangle \right] \\ &= E[\varphi(F) \Phi_i(R)], \end{aligned}$$

unde

$$\Phi_i(R) = \sum_{j=1}^m \delta \left(R DF^j (\gamma_F^{-1})^{j_i} \right).$$

Din lema 2.5.7 rezultă că $(\gamma_F^{-1})^{j_i} \in \mathbf{D}^\infty$ deci, din ipotezele teoremei, obținem că $\Phi_i(R) \in \mathbf{D}^\infty$ și că este linear în R . Fie α un multiindice ca în enunț ; aplicăm recursiv ultima relație pentru $i = \alpha_1, \dots, \alpha_k$ și $R = 1, \Phi_{\alpha_1}(1), \Phi_{\alpha_2}(\Phi_{\alpha_1}(1)), \dots, \Phi_{\alpha_k}(\Phi_{\alpha_{k-1}}(\dots(1)\dots))$; obținem

$$\begin{aligned} |E(\partial_\alpha \varphi(F))| &= \left| E(\varphi(F)) \Phi_{\alpha_k}(\Phi_{\alpha_{k-1}}(\dots(1)\dots)) \right| \\ &\leq c_\alpha \|\varphi\|_\infty. \end{aligned}$$

Rămâne să aplicăm lema 2.5.6. \square

Exerciții 1. În ipotezele teoremei 2.5.5, pentru $f \in C_0^\infty(\mathbf{R}^m)$ definim

$$g(x_1, \dots, x_m) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_m} f(y_1, \dots, y_m) dy_1 \dots dy_m.$$

Arătați că

$$\begin{aligned} E[f(F)] &= E \left[g(F) \delta \left((DF \gamma_F)^{-1} \right)_m \delta \left((DF \gamma_F)^{-1} \right)_{m-1} \dots \right. \\ &\quad \left. \delta \left((DF \gamma_F)^{-1} \right)_1 \right] \end{aligned}$$

și deduceți de aici o expresie pentru densitatea lui F similară lui (2.5.1).

2. Fie $W = \{W_t, t \geq 0\}$ o mișcare browniană reală și $F \in \mathbf{D}^{2,1}$. Arătați că pentru toți $t \geq 0$, cu excepția unui număr finit de timpi, $F + W_t$ are legea absolut continuă.

2.6 APLICAȚIE LA ECUAȚII ITÔ

În acest capitol vom aplica rezultatele din capitolele precedente pentru a studia regularitatea soluțiilor ecuațiilor stocastice (vezi 1.5) și a legilor acestora.

Fie (Ω, \mathcal{F}, P) câmpul de probabilitate canonic asociat unei mișcări browniene d -dimensionale $\{W_t^i, t \in [0, T], 1 \leq i \leq d\}$. Ne vom limita la un interval de timp finit $[0, T]$, deci lucrăm pe spațiul Hilbert $H = L^2([0, T]; \mathbf{R}^d)$. Fie $\sigma_j, b: [0, T] \times \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^m, 1 \leq j \leq d$ funcții măsurabile care sunt global Lipschitz, și să notăm prin $X = \{X(t), t \in [0, T]\}$ soluția următoarei ecuații diferențiale stocastice m -dimensionale:

$$X(t) = x_0 + \sum_{j=1}^d \int_0^t \sigma_j(s, X(s)) dW_s^j + \int_0^t b(s, X(s)) ds, \quad (2.53)$$

unde $x_0 \in \mathbf{R}^m$ este valoarea inițială a procesului X (vezi și 1.5.1). Reținem că, atunci când există, soluția ecuației (2.53) admite o versiune continuă, care se află în orice $L^r, r \geq 2$, i.e.

$$E \left(\sup_{0 \leq t \leq T} |X(t)|^r \right) < c_1, \quad (2.54)$$

pentru orice $r \geq 2$, unde c_1 depinde de r, T, x_0 și de constanta Lipschitz a coeficienților.

În continuare vom studia regularitatea soluției $X(t)$, absolut continuitatea legii acesteia în raport cu măsura Lebesgue și regularitatea densității asociate.

Să notăm

$$\mathbf{D}^{\infty,1} := \bigcap_{r \geq 1} \mathbf{D}^{r,1}$$

și $D_t^j(F), t \in [0, T], j = 1, \dots, d$, derivata unei variabile aleatoare F privită ca element în $L^2([0, T] \times \Omega; \mathbf{R}^d) \simeq L^2(\Omega; H)$, unde $H = L^2([0, T]; \mathbf{R}^d)$.

TEOREMA 2.6.1 *În ipotezele afirmației 1.5.1 avem că $X^i(t) \in \mathbf{D}^{\infty,1}$ pentru orice $t \in [0, T]$ și $i = 1, \dots, m$. În plus*

$$\sup_{0 \leq v \leq t} E \left(\sup_{v \leq s \leq t} |D_v^j X^i(s)|^r \right) < \infty,$$

iar derivatele $D_v^j X^i(t)$ satisfac ecuația liniară

$$D_v^j X(t) = \sigma_j(v, X(v)) + \sum_{k=1}^m \sum_{\alpha=1}^d \int_v^t \bar{A}_{k,\alpha}(s) D_v^j (X^k(s)) dW_s^\alpha + \sum_{k=1}^d \int_v^t \bar{B}_k(s) D_v^j X^k(s) ds \quad (2.55)$$

pentru $v \leq t$ și $D_v^j X(t) = 0$ pentru $v > t$, unde $\bar{A}_{k,\alpha}(s)$ și $\bar{B}_k(s)$ sunt procese adaptate m -dimensionale uniform mărginite.

Demonstrație. Vom folosi convenția de sumare a indicilor inferiori și superiori. Să considerăm aproximațiile Picard: $X_0(t) = x$, și

$$X_{n+1}(t) = x + \int_0^t \sigma_j(s, X_n(s)) dW_s^j + \int_0^t b(s, X_n(s)) ds, \quad n \geq 0.$$

Vom demonstra că $X_n^i(t) \in \mathbf{D}^{\infty,1}$ pentru toți $i = 1, \dots, m$; $n \geq 0$, $t \in [0, T]$ și că

$$\sup_{0 \leq v \leq t} E \left(\sum_{v \leq s \leq t} |D_v X_n(s)|^r \right) \leq c(r, T), \quad (2.56)$$

în care constantele $c(r, T)$ nu depind de n .

Fie $n \geq 1$ fixat. Presupunem că $X_n^i(s) \in \mathbf{D}^{1,\infty}$ pentru orice $i = 1, \dots, m$ și $s \in [0, T]$. Aplicăm propoziția 2.4.11 variabilelor aleatoare $X_n(s)$ și funcțiilor σ_j^i , b^i ; obținem că $\sigma_j^i(s, X_n(s))$, $b^i(s, X_n(s)) \in \mathbf{D}^{2,1}$ și că există procesele adaptate m -dimensionale $\bar{A}_j^{n,i}(s) = (\bar{A}_{j,1}^{n,i}(s), \dots, \bar{A}_{j,m}^{n,i}(s))$ și $\bar{B}^{n,i}(s) = (\bar{B}_1^{n,i}(s), \dots, \bar{B}_m^{n,i}(s))$ uniform mărginite de K astfel încât

$$D_v [\sigma_j^i(s, X_n(s))] = \bar{A}_{j,k}^{n,i}(s) D_v (X_n^k(s)) \mathbf{1}_{\{v \leq s\}} \quad (2.57)$$

și

$$D_v [b^i(s, X_n(s))] = \bar{B}_k^{n,i}(s) D_v (X_n^k(s)) \mathbf{1}_{\{v \leq s\}}. \quad (2.58)$$

De fapt aceste procese se obțin ca limite slabe ale șirurilor

$$\left\{ \partial_k [\sigma_j^i * \alpha_m](s, X_n(s)), \quad m \geq 1 \right\},$$

$$\left\{ \partial_k [b^i * \alpha_m] (s, X_n(s)), m \geq 1 \right\},$$

unde α_m este o aproximare a identității ; se verifică ușor că aceste limite slabe sunt măsurabile. Din propoziția 2.4.8 deducem că procesele $\sigma_j^i(s, X_n(s)), b^i(s, X_n(s)) \in \mathbf{D}^{\infty,1}$. Deci procesele

$$\left\{ D_v^l [\sigma_j^i(s, X_n(s))] , s \geq v \right\},$$

$$\left\{ D_v^l [b^i(s, X_n(s))] , s \geq v \right\}$$

sunt de pătrat integrabil și adaptate, iar din relațiile (2.57)-(2.58) rezultă

$$\left\{ \frac{|D_v [\sigma_j^i(s, X_n(s))]|}{|D_v [b^i(s, X_n(s))]|} \right\} \leq K |D_v X_n(s)|. \quad (2.59)$$

Deducem că $\int_0^t \sigma_j^i(s, X_n(s)) dW_s^j, \int_0^t b^i(s, X_n(s)) ds \in \mathbf{D}^{2,1}$ (din propoziția 2.3.6) și că, pentru $v \leq t$, avem

$$D_v^l \left[\int_0^t \sigma_j^i(s, X_n(s)) dW_s^j \right] = \sigma_j^i(v, X_n(v))$$

$$+ \int_v^t D_v^l [\sigma_j^i(s, X_n(s))] dW_s^j \quad (2.60)$$

și

$$D_v^l \left[\int_0^t b^i(s, X_n(s)) ds \right] = \int_v^t D_v^l [b_j^i(s, X_n(s))] ds. \quad (2.61)$$

Din aceste egalități rezultă că $X_{n+1}^i \in \mathbf{D}^{\infty,1}$ și că estimarea din enunț este satisfăcută pentru toți X_n . Într-adevăr, fie

$$\gamma_r = \sup_{0 \leq t \leq T} \sup_{n,j} E(|\sigma_j(t, X_n(t))|^r).$$

Din (2.60)-(2.61) obținem

$$E \left(\sup_{v \leq s \leq t} |D_v^j X_n(s)|^r \right)$$

$$\leq c(r) \left[\gamma_r + T^{r-1} \int_v^t E(|D_v^j X_n(s)|^r) ds \right]$$

și apoi aplicăm lema lui Gronwall. Intrucât

$$E \left(\sup_{0 \leq s \leq T} |X_n(s) - X(s)|^r \right) \rightarrow 0$$

când $n \rightarrow \infty$; cum derivatele șirului $X_n^i(t)$ sunt mărginite uniform în $L^r(\Omega; H)$ pentru orice $r \geq 2$, folosim argumentele propozițiilor 2.4.11 și 2.4.8 pentru a obține că $X^i(t) \in \mathbf{D}^{\infty,1}$. În fine, aplicăm operatorul D în ecuația (2.53) și deducem forma ecuației diferențiale stocastice liniare (2.55) satisfăcută de derivatele lui $X^i(t)$. \square

Observație Dacă coeficienții ecuației diferențiale stocastice (2.53) sunt diferențiabili, atunci procesele adaptate și mărginite care apar în formula (2.55) sunt date de

$$\bar{A}_{k,l}^i(s) = \frac{\partial \sigma_l^i}{\partial x^k}(s, X(s)) \text{ și}$$

$$\bar{B}_k^i(s) = \frac{\partial b^i}{\partial x^k}(s, X(s)).$$

Vom vedea în continuare ce condiții trebuie să îndeplinească coeficienții ecuației (2.53) pentru ca $X^i(t) \in \mathbf{D}^\infty$. Să considerăm procesele adaptate și continue $\alpha = \{\alpha(v, t), t \in [v, t]\}$, $V = \{V_j(t), t \in [0, T], j = 0, \dots, d\}$ astfel încât α este m -dimensional iar V_j ia valori în mulțimea matricelor de ordin $m \times m$. Presupunem că $\alpha^i(v, t), V_j^{kl}(t) \in \mathbf{D}^{\infty,1}$ pentru orice i, j, k, l și că satisfac următoarele estimări

$$E \left(\sup_{0 \leq t \leq T} |V_j(t)|^r \right) < \infty,$$

$$\sup_{0 \leq v \leq T} E \left(\sup_{v \leq t \leq T} |\alpha(v, t)|^r \right) < \infty,$$

$$\sup_{0 \leq s \leq t} E \left(\sup_{0 \leq t \leq T} |D_s V_j(t)|^r \right) < \infty,$$

$$\sup_{0 \leq s \leq t} \sup_{0 \leq v \leq T} E \left(\sup_{v \leq t \leq T} |D_s \alpha(v, t)|^r \right) < \infty,$$

pentru orice $r \geq 2$ și $j = 1, \dots, d$.

LEMA 2.6.2 Fie $Y = \{Y(t), v \leq t \leq T\}$ soluția ecuației diferențiale stocastice liniare

$$Y(t) = \alpha(v, t) + \sum_{j=1}^d \int_v^t V_j(s) Y(s) dW_s^j \quad (2.62)$$

$$+ \int_v^t V_0(s) Y(s) ds .$$

Atunci $Y^i(t) \in \mathbf{D}^{\infty,1}$ pentru orice $i = 1, \dots, m$ și derivata $D_s Y^i(t)$ satisface, pentru $s \leq t$, următoarea ecuație liniară

$$D_s^j Y(t) = D_s \alpha(v, t) + V_j(s) Y(s) \mathbf{1}_{\{v \leq s \leq t\}}$$

$$+ \sum_{j=1}^d \int_v^t \left[D_s^j V_l(u) Y(u) + V_l(u) D_s^j Y(u) \right] dW_u^l$$

$$+ \int_v^t \left[D_s^j V_0(u) Y(u) + V_0(s) D_s^j Y(u) \right] du .$$

Ideea este de a aplica afirmația 1.5.2: prin inducție, arătăm că aproximațiile Picard $\in \mathbf{D}^{\infty,1}$ și că verifică ecuația de mai sus. Să remarcăm că, în ipotezele date, soluția ecuației (2.62) satisface următoarele estimări

$$\sup_{0 \leq v \leq T} E \left(\sup_{v \leq t \leq T} |Y(t)|^r \right) < \infty ,$$

$$\sup_{0 \leq s \leq t} \sup_{0 \leq v \leq T} E \left(\sup_{v \leq t \leq T} |D_s Y(t)|^r \right) < \infty ,$$

pentru orice $r \geq 2$.

TEOREMA 2.6.3 Fie $X(t)$ soluția ecuației diferențiale stocastice (2.53). Dacă coeficienții σ_j^i , b^i sunt infinit diferențiabili cu derivatele de orice ordin mărginite, atunci $X^i(t) \in \mathbf{D}^\infty$ pentru orice $t \in [0, T]$ și $i = 1, \dots, m$.

Demonstrație. Știm din teorema 2.6.1 că, pentru $i = 1, \dots, m$ și $t \in [0, T]$, avem $X^i(t) \in \mathbf{D}^{r,1}$ pentru orice $r \geq 2$. În plus,

derivatele $D_v^j X^i(t)$ satisfac următoarea ecuație diferențială stocastică liniară

$$D_v^j X^i(t) = \sigma_j^i(v, X(v)) + \int_v^t (\partial_k \sigma_j^i)(s, X(s)) D_v^j X^k(s) dW_s^i + \int_v^t (\partial_k b^i)(s, X(s)) D_v^j X^k(s) ds. \quad (2.63)$$

Să notăm prin $D_{v_1, \dots, v_p}^{j_1, \dots, j_p}(X(t))$, derivata iterată de ordinul p a lui $X(t)$. Pentru o submulțime $K = \{\epsilon_1 < \dots < \epsilon_p\} \subset \{1, \dots, p\}$, notăm $j(K) = j_{\epsilon_1}, \dots, j_{\epsilon_p}$ și $v(K) = v_{\epsilon_1}, \dots, v_{\epsilon_p}$. Fie

$$\alpha_{I, j_1, \dots, j_p}^i(s, v_1, \dots, v_p)$$

$$= \sum (\partial_{k_1} \dots \partial_{k_p} \sigma_j^i)(s, X(s)) D_{v(I_1)}^{j(I_1)} [X^{k_1}(s)] \dots D_{v(I_p)}^{j(I_p)} [X^{k_p}(s)]$$

și

$$\beta_{j_1, \dots, j_p}^i(s, v_1, \dots, v_p)$$

$$= \sum (\partial_{k_1} \dots \partial_{k_p} b^i)(s, X(s)) D_{v(I_1)}^{j(I_1)} [X^{k_1}(s)] \dots D_{v(I_p)}^{j(I_p)} [X^{k_p}(s)],$$

unde sumele se referă la mulțimea partițiilor $\{1, \dots, p\} = I_1 \cup \dots \cup I_p$. Fie deasemeni $\alpha_j^i(s) = \sigma_j^i(s, X(s))$. Cu aceste notații, au loc următoarele proprietăți pentru orice $p \in \mathbb{N}^*$:

(a) Pentru orice $t \in [0, T]$, $r \geq 2$, $i = 1, \dots, m$, avem $X^i(t) \in \mathbf{D}^{r,p}$ și

$$\sup_{v_1, \dots, v_p \in [0, T]} E \left(\sup_{r_1 \vee \dots \vee r_p \leq t \leq T} |D_{v_1, \dots, v_p}(X(t))|^r \right) < \infty$$

(b) Derivata de ordin p satisface ecuația liniară

$$D_{v_1, \dots, v_p}^{j_1, \dots, j_p} = \sum_{\epsilon=1}^p \alpha_{j_\epsilon, j_1, \dots, j_{\epsilon-1}, j_{\epsilon+1}, \dots, j_p}^i(v_\epsilon, v_1, \dots, v_{\epsilon-1}, v_{\epsilon+1}, \dots, v_p)$$

$$+ \int_{v_1 \vee \dots \vee v_p}^t [\alpha_{I, j_1, \dots, j_p}^i(s, v_1, \dots, v_p) dW_s^i + \beta_{j_1, \dots, j_p}^i(s, v_1, \dots, v_p) ds]$$

dacă $t \geq v_1 \vee \dots \vee v_p$ și $D_{v_1, \dots, v_p}^{j_1, \dots, j_p}(X(t)) = 0$ dacă $t < v_1 \vee \dots \vee v_p$.

Conform teoremei 2.6.1, aceste proprietăți au loc pentru $p = 1$; presupunem că sunt adevărate până la indicele p și să observăm că $\alpha_{I, j_1, \dots, j_p}^i(s, v_1, \dots, v_p)$ se compune din

$(\partial_k \sigma_j^i)(s, X(s)) D_{v_1, \dots, v_p}^{j_1, \dots, j_p} (X^k(s))$ (acest termen corespunde lui $\nu = 1$ la care se adaugă un polinom în derivatele $(\partial_{k_1} \dots \partial_{k_\nu} \sigma_j^i)(s, X(s))$ cu $\nu \geq 2$ aplicate proceselor $D_{v(I)}^{j(I)} (X^k(s))$ cu $\text{card}(I) \leq p - 1$. Aplicăm lema 2.6.3 proceselor

$$Y(t) = D_{v_1, \dots, v_p}^{j_1, \dots, j_p} (X(t)), \quad t \geq v$$

$$V_j^{ik}(t) = (\partial_k \sigma_j^i)(t, X(t)), \quad 1 \leq i, k \leq m, \quad j = 1, \dots, d,$$

unde $v = v_1 \vee \dots \vee v_p$, $\alpha(v, t)$ reprezintă termenii rămași în termenul din dreapta al ecuației din (b) și ținem cont că

$$D_v^j [\alpha_{i, j_1, \dots, j_p}^i(t, v_1, \dots, v_p)] = \alpha_{i, j_1, \dots, j_p, j}^i(t, v_1, \dots, v_p, v)$$

și că

$$D_v^j [\beta_{j_1, \dots, j_p}^i(t, v_1, \dots, v_p)] = \beta_{j_1, \dots, j_p, j}^i(t, v_1, \dots, v_p, v).$$

Obținem că proprietatea (b) este adevărată pentru $p + 1$; similar procedăm cu proprietatea (a). \square

Exerciții 1. Fie σ, b funcții derivabile pe \mathbf{R} și cu derivatele mărginite. Notăm $\{X(t), t \in [0, T]\}$ soluția ecuației diferențiale stocastice

$$X(t) = x_0 + \int_0^t \sigma(X(s)) dW_s + \int_0^t b(X(s)) ds.$$

Arătați că, pentru $0 \leq s \leq t$, avem

$$\begin{aligned} D_s X(t) &= \exp \left(\int_s^t \sigma'(X(r)) dW_r \right) \\ &+ \int_s^t \left[b' - \frac{1}{2} (\sigma')^2 \right] (X(r)) dr. \end{aligned}$$

2. Fie $\sigma \in C^2(\mathbf{R})$ cu derivatele de ordine 1 și 2 mărginite, iar b o funcție lipschitziană. Arătați că soluția ecuației

$$\begin{aligned} X(t) &= x_0 + \int_0^t \sigma(X(s)) dW_s \\ &+ \int_0^t \left[b(X(s)) + \frac{1}{2} \sigma(X(s)) \sigma'(X(s)) \right] ds \end{aligned}$$

satisfacă $X(t) \in D^{1,r}$ pentru orice $r \geq 2$ și determinate derivatele $D_s X(t)$.

3. Fie $W = \{(W_t^1, W_t^2), t \geq 0\}$ o mișcare browniană 2-dimensională. Arătați că "aria lui Lévy" i.e. v.a.

$$F = \int_0^1 [W_s^1 dW_s^2 - W_s^2 dW_s^1]$$

nu este funcțională continuă de mișcarea browniană.

În continuare vom presupune că $\sigma_j, b : \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^m$ i.e. coeficienții ecuației (2.53) nu depind explicit de timp. Ne vor interesa condițiile în care soluția ecuației

$$X(t) = x_0 + \sum_{j=1}^d \int_0^t \sigma_j(X(s)) dW_s^j + \int_0^t b(X(s)) ds \quad (2.64)$$

are densitate regulată. Să observăm că, dacă subspațiul generat de $\{\sigma_j(y), b(y); 1 \leq j \leq d, y \in \mathbf{R}^m\}$ are dimensiunea strict mai mică decât m , atunci legea lui $X(t)$, pentru orice $t \geq 0$, este singulară în raport cu măsura Lebesgue. Vom avea nevoie de următoarea ipoteză de nedegenerare, cunoscută sub numele de **condiția lui Hörmander**:

(H) Spațiul vectorial generat în punctul x_0 de câmpurile de vectori

$$\begin{aligned} & \sigma_1, \dots, \sigma_d, \\ & [\sigma_i, \sigma_j], 0 \leq i, j \leq d, \\ & [\sigma_i, [\sigma_j, \sigma_k]], 0 \leq i, j, k \leq d, \dots \end{aligned}$$

este \mathbf{R}^m .

Exemple Dacă matricea de difuzie

$$a(x) = \sum_{j=1}^d \sum_{k,l=1}^m \sigma_j^k(x) \sigma_j^l(x)$$

este eliptică în x_0 i.e. $a(x_0) > 0$, atunci condiția lui Hörmander este satisfăcută pentru orice $t > 0$. Aplicațiile devin interesante când $a(x_0)$ este degenerată.

1. Fie $m = d = 1$, $\sigma_1^1(x) = \sigma(x)$, $b^1(x) = b(x)$, atunci condiția lui Hörmander spune ori că $\sigma(x_0) \neq 0$, ori există $n \geq 1$ astfel încât $\sigma^{(n)}(x_0)b(x_0) \neq 0$.

2. Fie $m = d = 2$, $X(0) = 0$, $B = 0$ și câmpurile de vectori

$$\sigma_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

În acest caz, matricea de difuzie $a(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x_1^2 \end{pmatrix}$ este degenerată de-a lungul lui $x_1 = 0$. Cum paranteza Lie $[\sigma_1, \sigma_2] = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, câmpurile de vectori σ_1 , $[\sigma_1, \sigma_2]$ generează \mathbb{R}^2 și condiția lui Hörmander este satisfăcută.

TEOREMA 2.6.4 *Dacă coeficienții ecuației (2.64) sunt infinit diferentiabili și cu derivatele mărginite iar condiția (H) este îndeplinită, atunci soluția $X(t)$ are legea absolut continuă în raport cu măsura Lebesgue și, pentru orice $t > 0$, densitatea acestei legi este infinit diferentiabilă.*

Comentariu Acest rezultat poate fi considerat ca o versiune probabilistă a teoremei de hipoelipticitate a lui L. Hörmander. Mai precis, am văzut la 1.5 că legea lui $X(t)$ satisface ecuația Kolmogorov "înainte" în sensul distribuțiilor. În consecință, faptul că această lege are o densitate de clasă C^∞ este în legătură cu caracterul hipoeliptic al operatorului $\frac{\partial}{\partial t} - \mathcal{L}^*$, iar teorema lui Hörmander implică hipoelipticitatea acestui operator sub ipoteza (H).

Demonstrația teoremei 2.6.4 Fie $Y(t)$ matricea Iacobiană $\frac{\partial X(t)}{\partial x}$ care verifică ecuația stocastică

$$Y_j^i(t) = \delta_j^i + \int_0^t (\partial_k \sigma_i^j)(X(s)) Y_j^k(s) dW_s^i + \int_0^t (\partial_k b^i)(X(s)) Y_j^k(s) ds$$

(cf. afirmației 1.5.2). Aplicând formula lui Itô, obținem că

$$Y^{-1}(t) = I - \sum_{k=1}^d \int_0^t Y^{-1}(s) \partial \sigma_k(X(s)) dW_s^k$$

$$-\int_0^t Y^{-1}(s) \left[\partial b(X(s)) - \sum_{k=1}^d \partial \sigma_k(X(s)) \partial \sigma_k(X(s)) \right] ds,$$

unde $\partial \sigma_k$, ∂b sunt matricile iacobiene $\left(\frac{\partial \sigma_k^i}{\partial x_j} \right)$, $\left(\frac{\partial b^i}{\partial x_j} \right)$; $i, j = 1, \dots, m$. De aici rezultă că

$$D_r^i X^i(t) = Y_i^i(t) Y^{-1}(r)_k^i \sigma_j^k(X(r)). \quad (2.65)$$

Intr-adevăr,

$$\begin{aligned} \sigma_j^i(X(r)) + \int_r^t (\partial_k \sigma_i^i)(X(s)) \{ Y_\alpha^k(s) Y^{-1}(r)_\beta^\alpha \sigma_j^\beta(X(r)) \} dW_s^i \\ + \int_r^t (\partial_k b^i)(X(s)) \{ Y_\alpha^k(s) Y^{-1}(r)_\beta^\alpha \sigma_j^\beta(X(r)) \} ds \\ = Y_i^i(t) Y^{-1}(r)_k^i \sigma_j^k(X(r)). \end{aligned}$$

Să notăm

$$Q^{ij}(t) = \langle DX^i(t), DX^j(t) \rangle = \sum_{k=1}^d \int_0^t D_r^k X^i(t) D_r^k X^j(t) dr$$

matricea Malliavin corespunzătoare lui $X(t)$. Din formula (2.65), rezultă că

$$Q(t) = Y(t) C(t) Y^T(t),$$

unde

$$C^{ij}(t) = \sum_{l=1}^d \int_0^t Y^{-1}(s)_k^i \sigma_l^k(X(s)) Y^{-1}(s)_j^l \sigma_l^j(X(s)) ds,$$

Să considerăm un câmp de vectori $V(x) = V^i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$ de clasă C^∞ pe \mathbb{R}^m . Atunci

$$\begin{aligned} Y^{-1}(t) V(X(t)) = V(x_0) + \int_0^t Y^{-1}(s) [\sigma_k, V](X(s)) dW_s^k \\ + \int_0^t Y^{-1}(s) \left\{ [\sigma_0, V] + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^d [\sigma_k, [\sigma_k, V]] \right\} (X(s)) ds. \quad (2.66) \end{aligned}$$

Această formulă rezultă din calculele următoare : din formula lui Itô obținem

$$\begin{aligned}
 & Y^{-1}(t)V(X(t)) \\
 &= V(x_0) + \int_0^t Y^{-1}(s) \sum_{k=1}^d (\partial V \sigma_k - \partial \sigma_k V)(X(s)) dW_s^k \\
 &\quad + \int_0^t Y^{-1}(s) (\partial V b - \partial b V)(X(s)) ds \\
 &\quad + \int_0^t Y^{-1}(s) \sum_{k=1}^d (\partial \sigma_k \partial \sigma_k V)(X(s)) ds \\
 &+ \frac{1}{2} \int_0^t Y^{-1}(s) \sum_{i,j=1}^m \partial_i \partial_j V(X(s)) \sum_{k=1}^d \sigma_k^i(X(s)) \sigma_k^j(X(s)) ds \\
 &\quad - \int_0^t Y^{-1}(s) \sum_{k=1}^d (\partial \sigma_k \partial V \sigma_k)(X(s)) ds .
 \end{aligned}$$

și apoi

$$\begin{aligned}
 & [\sigma_0, V] + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^d [\sigma_k, [\sigma_k, V]] \\
 &= \left[-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^d \sigma_k^\nabla \sigma_k, V \right] + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^d [\sigma_k, [\sigma_k, V]] \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^d \left\{ -(\sigma_k^\nabla \sigma_k)^\nabla + V^\nabla (\sigma_k^\nabla \sigma_k) + \sigma_k^\nabla (\sigma_k^\nabla V) \right. \\
 &\quad \left. - \sigma_k^\nabla (V^\nabla \sigma_k) - (\sigma_k^\nabla V)^\nabla \sigma_k + (V^\nabla \sigma_k)^\nabla \sigma_k \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^d \left\{ -\sigma_k^i \partial_i \sigma_k^l \partial_l V + V^i \partial_i \sigma_k^l \partial_l \sigma_k + V^i \sigma_k^l \partial_i \partial_l \sigma_k \right. \\
 &\quad \left. + \sigma_k^i \partial_i \sigma_k^l \partial_l V + \sigma_k^i \sigma_k^l \partial_i \partial_l V - \sigma_k^i \partial_i V^l \partial_l \sigma_k \right. \\
 &\quad \left. - \sigma_k^i V^l \partial_i \partial_l \sigma_k - \sigma_k^i \partial_i V^l \partial_l \sigma_k + V^i \partial_i \sigma_k^l \partial_l \sigma_k \right\} \\
 &= \sum_{k=1}^d \left\{ V^i \partial_i \sigma_k^l \partial_l \sigma_k + \frac{1}{2} \sigma_k^i \sigma_k^l \partial_i \partial_l V - \sigma_k^i \partial_i V^l \partial_l \sigma_k \right\}
 \end{aligned}$$

deoarece

$$\partial V \sigma_k - \partial \sigma_k V = [\sigma_k, V] \text{ și } \partial V b - \partial b V = [b, V].$$

Pentru prima parte a teoremei, conform cu propoziția 2.5.1 (sau teorema 2.5.2), este suficient să arătăm că matricea $C(t)$ este inversabilă a.p.t. Să presupunem prin reducere la absurd că $P\{\det C(t) = 0\} > 0$. Fie K_s subspațiul liniar generat în \mathbf{R}^m de $\{Y^{-1}(u)\sigma_k(X(u)); 0 \leq u \leq s, k = 1, \dots, d\}$. Familia $\{K_s, s \geq 0\}$ este crescătoare și, din legea 0-1, subspațiul $K_{0+} := \bigcap_{s>0} K_s$ este determinist cu probabilitate 1. Definim timpul de stopare

$$\tau = \inf \{s > 0 : \dim K_s > \dim K_{0+}\}.$$

Observăm că $P(\tau > 0) = 1$ și, pentru orice $v \in \mathbf{R}^m$ de normă 1, avem

$$v^T C(t)v = \sum_{k=1}^d \int_0^t |v^T Y^{-1}(s)\sigma_k(X(s))|^2 ds$$

În consecință, printr-un argument de continuitate, obținem că

$$v^T C(t)v = 0 \implies v^T Y^{-1}(s)\sigma_k(X(s)) = 0$$

pentru orice $0 \leq s \leq t$ și orice $k = 1, \dots, d$. Deci $K_{0+} \neq \mathbf{R}^m$ pentru că, în caz contrar ar rezulta $K_s = \mathbf{R}^m$ pentru orice $s > 0$ și orice vector v care satisface $v^T C(t)v = 0$ ar fi egal cu 0, adică $C(t)$ ar fi inversabilă, deci contradicție.

Fie acum $v \neq 0$ fixat și ortogonal pe K_{0+} . Observăm că $v \perp K_s$ pentru $s < \tau$ i.e.

$$v^T Y^{-1}(s)\sigma_k(X(s)) = 0,$$

$$\text{pentru } k = 1, \dots, d \text{ și } s < \tau. \quad (2.67)$$

Să introducem următoarele mulțimi de câmpuri de vectori

$$\mathcal{S}_0 = \{\sigma_1, \dots, \sigma_d\};$$

$$\mathcal{S}_n = \{[\sigma_k, V], k = 1, \dots, d, V \in \mathcal{S}_{n-1}\}, \text{ pentru } n \geq 1;$$

$$\mathcal{S} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{S}_n$$

și

$$\mathcal{S}'_0 = \mathcal{S}_0 ;$$

$$\mathcal{S}'_n = \left\{ [\sigma_k, V], k = 1, \dots, d, V \in \mathcal{S}'_{n-1} ; \right.$$

$$\left. [\sigma_0, V] + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^d [\sigma_j, [\sigma_j, V]], V \in \mathcal{S}'_{n-1}, \right\} ;$$

$$\mathcal{S}' = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{S}'_n .$$

Vom nota prin $\mathcal{S}_n(x)$ submulțimea lui \mathbf{R}^m obținută prin "inghețarea" lui x în câmpurile de vectori din \mathcal{S}_n . Spațiile vectoriale generate de $\mathcal{S}(x)$ sau de $\mathcal{S}'(x)$ coincid cu \mathbf{R}^m . Vom arăta că, pentru orice $n \geq 0$, vectorul v este ortogonal pe $\mathcal{S}'_n(x_0)$, ceea ce este în contradicție cu condiția lui Hörmander. Aceasta va rezulta din următoarea proprietate de ortogonalitate

$$v^T Y^{-1}(s) V(X(s)) = 0, \quad (2.68)$$

pentru orice $s < \tau$, $V \in \mathcal{S}'_n$, $n \geq 0$.

Intr-adevăr, pentru $s = 0$, avem $Y^{-1}(0) V(X(0)) = V(x_0)$. Formula (2.68) se demonstrează prin inducție. Pentru $n = 0$, se reduce la (2.67). Să presupunem că are loc pentru $n - 1$ și fie $V \in \mathcal{S}'_{n-1}$. Folosind formula (2.66) și ipoteza de inducție, obținem

$$\int_0^s v^T Y^{-1}(u) \left\{ [\sigma_0, V] + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^d [\sigma_k, [\sigma_k, V]] \right\} (X(u)) du$$

$$+ \int_0^s v^T Y^{-1}(u) [\sigma_k, V] (X(u)) dW_u^k = 0$$

pentru $s < \tau$. De aici rezultă că cei doi integranzi din ultima formulă sunt 0 pentru orice $u < \tau$, deoarece un semimartingal continuu care se anulează pe un interval aleator $[0, \tau)$ are atât partea de variație mărginită, cât și variația pătratică a părții martingal, nule.

Pentru partea a doua a teoremei 2.6.4, vom avea nevoie de următoarele două leme.

LEMA 2.6.5 *Fie $C(\omega)$ o matrice aleatoare $m \times m$, simetrică, pozitiv definită, astfel ca elementele ei C^{ij} să aibă momente de orice ordin și, pentru orice $p \geq 2$, există $\epsilon_0(p)$ cu proprietatea*

$$\sup_{|v|=1} P \left\{ v^T C v \leq \epsilon \right\} \leq \epsilon^p \text{ pentru } \epsilon \leq \epsilon(p).$$

Atunci $(\det C(t))^{-1} \in L^p$ pentru orice p .

Demonstrație. Fie $\lambda = \inf_{|v|=1} v^T C v$ cea mai mică valoare proprie a lui C . Stim că $\lambda^m \leq \det C$, deci este suficient să arătăm ca $E(\lambda^{-p}) < \infty$ pentru orice $p \geq 2$. Notăm $|C| = [\sum_{i,j=1}^m (C^{ij})^2]^{1/2}$; pentru $\epsilon > 0$ fixat, fie v_1, \dots, v_N vectori unitari cu proprietatea că bilelele cu centrele în aceste puncte și de rază $\epsilon^2/2$ acoperă sfera unitate S^{m-1} . Obținem

$$\begin{aligned} P\{\lambda < \epsilon\} &= P\left\{\inf_{|v|=1} v^T C v < \epsilon\right\} \\ &\leq P\left\{\inf_{|v|=1} v^T C v < \epsilon, |C| \leq \frac{1}{\epsilon}\right\} + P\left\{|C| > \frac{1}{\epsilon}\right\} \quad (2.69) \end{aligned}$$

Să presupunem că $|C(\omega)| \leq \frac{1}{\epsilon}$ și $v_k^T C v_k \geq 2\epsilon$ pentru $k = 1, \dots, N$. Pentru orice vector unitar v există un v_k astfel ca $|v - v_k| \leq \epsilon^2/2$, și de aici obținem

$$\begin{aligned} v^T C v &\geq v_k^T C v_k - |v^T C v - v_k^T C v_k| \\ &\geq 2\epsilon - [|v^T C v - v_k^T C v_k| + |v_k^T C v_k - v_k^T C v_k|] \\ &\geq 2\epsilon - 2|C||v - v_k| \geq \epsilon. \end{aligned}$$

În consecință, (2.69) este mărginită de

$$P\left(\bigcup_{k=1}^N \{v_k^T C v_k < 2\epsilon\}\right) + P\left\{|C| > \frac{1}{\epsilon}\right\}$$

$$\leq N(2\epsilon)^{p+2m} + \epsilon^p E(|C|^p), \text{ dacă } \epsilon \leq \frac{1}{2}\epsilon_0(p+2m).$$

Numărul N depinde de ϵ , dar este dominat de o constantă înmulțită cu ϵ^{-2m} . Obținem $P\{\lambda < \epsilon\} \leq \text{const. } \epsilon^p$ pentru orice $\epsilon \leq \epsilon_1(p)$ și orice $p \geq 2$, deci λ^{-1} are momente de orice ordin. \square

LEMA 2.6.6 Fie $\alpha, \gamma \in \mathbf{R}$ și $\beta(t), \gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_d(t))$, $u(t) = (u_1(t), \dots, u_d(t))$ procese adaptate. Punem

$$a(t) = \alpha + \int_0^t \beta(s) ds + \int_0^t \gamma_i(s) dW_s^i$$

$$Y(t) = y + \int_0^t a(s) ds + \int_0^t u_i(s) dW_s^i,$$

și presupunem că există $t_0 > 0$ și $p \geq 2$ astfel ca

$$c = E \left(\sup_{0 \leq t \leq t_0} (|\beta(t)| + |\gamma(t)| + |a(t)| + |u(t)|)^p \right) < \infty. \quad (2.70)$$

Atunci, pentru orice $q > 8$ și pentru orice $r, \nu > 0$ cu $18r + 9\nu < q - 8$, există $\epsilon_0 = \epsilon_0(t_0, q, r, \nu)$ astfel ca, pentru orice $\epsilon \leq \epsilon_0$, să avem

$$P \left\{ \int_0^{t_0} Y^2(s) dt < \epsilon^q, \int_0^{t_0} (|a(t)|^2 + |u(t)|^2) dt \geq \epsilon \right\} \quad (2.71)$$

$$\leq c\epsilon^{rp} + e^{-\epsilon^{-\nu}}.$$

Interpretarea acestei leme este următoarea. Se știe că, dacă procesele de variație pătratică și cel cu variație mărginită asociate unui semimartingal continuu se anulează într-un interval, atunci semimartingalul se anulează și el pe acel interval. Inegalitatea (2.71) furnizează o versiune calitativă a acestui rezultat i.e. dacă procesul de variație pătratică sau cel cu variație mărginită asociate unui semimartingal continuu sunt mari, atunci semimartingalul este mic cu o probabilitate exponențială mică.

Demonstrația lemei 2.6.6 Notăm $\theta_t = |\beta(t)| + |\gamma(t)| + |a(t)| + |u(t)|$, fixăm $q > 8$, r, ν cu $19r + 9\nu < q - 8$ și definim timpul de stopare

$$T = \inf_{s \geq 0} \left\{ \sup_{0 \leq u \leq s} \theta_u > \epsilon^{-r} \right\} \wedge t_0.$$

Avem

$$P \left\{ \int_0^{t_0} Y^2(s) dt < \epsilon^q, \int_0^{t_0} (|a(t)|^2 + |u(t)|^2) dt \geq \epsilon \right\} \leq A_1 + A_2,$$

unde $A_1 = P \{T < t_0\}$ și $A_2 =$

$$P \left\{ \int_0^{t_0} Y^2(s) dt < \epsilon^q, \int_0^{t_0} (|a(t)|^2 + |u(t)|^2) dt \geq \epsilon, T = t_0 \right\}.$$

Din definiția lui T și din condiția (2.70), obținem

$$A_1 \leq P \left\{ \sup_{0 \leq s \leq t_0} \theta_s > \epsilon^{-r} \right\} \leq \epsilon^{rP} E \left[\sup_{0 \leq s \leq t_0} \theta_s^p \right] \leq c \epsilon^{rP}.$$

Să notăm

$$A_t = \int_0^t a(s) ds, \quad M_t = \int_0^t u_i(s) dW_s^i,$$

$$N_t = \int_0^t Y(s) u_i(s) dW_s^i, \quad Q_t = \int_0^t A(s) \gamma_i(s) dW_s^i.$$

și definim pentru orice $\rho_i, \delta_i > 0, i = 1, 2, 3$:

$$B_1 = \left\{ \langle N \rangle_T < \rho_1, \sup_{0 \leq s \leq T} |N_s| \geq \delta_1 \right\},$$

$$B_2 = \left\{ \langle M \rangle_T < \rho_2, \sup_{0 \leq s \leq T} |M_s| \geq \delta_2 \right\}$$

$$B_3 = \left\{ \langle Q \rangle_T < \rho_3, \sup_{0 \leq s \leq T} |Q_s| \geq \delta_3 \right\}.$$

Conform inegalității exponențiale pentru martingale, obținem

$$P(B_i) \leq 2 \exp(-\delta_i^2 / 2\rho_i), \quad (2.72)$$

pentru $i = 1, 2, 3$. Să presupunem pentru moment că am demonstrat

$$\left\{ \int_0^T Y^2(t) dt < \epsilon^q, \int_0^T (|a(t)|^2 + |u(t)|^2) dt \geq \epsilon, T = t_0 \right\} \\ \subset B_1 \cup B_2 \cup B_3, \quad (2.73)$$

pentru alegerea particulară a lui δ_i și ρ_i :

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \epsilon^{q_1}, \quad q_1 = \frac{q}{2} - r - \frac{\nu}{2}, \quad \rho_1 = \epsilon^{-2r+q} \\ \delta_2 &= \epsilon^{q_2}, \quad q_2 = \frac{q}{8} - \frac{5r}{4} - \frac{5\nu}{8}, \quad \rho_2 = (1 + \epsilon^{-2r})(2t_0 + 1)^{1/2} \epsilon^{q_1/2} \\ \delta_3 &= \epsilon^{q_3}, \quad q_3 = \frac{q}{8} - \frac{9r}{4} - \frac{9\nu}{8}, \quad \rho_3 = 36\epsilon^{-2r+2q_2} t_0. \end{aligned}$$

Din inegalitatea (2.72) și incluziunea (2.73) obținem

$$\begin{aligned}
 A_2 &\leq 2 \exp \left(\exp \left(-\delta_1^2/2\rho_1 \right) + \exp \left(-\delta_2^2/2\rho_2 \right) + \exp \left(-\delta_3^2/2\rho_3 \right) \right) \\
 &\leq 2 \left(\exp \left(-\frac{1}{2}\epsilon^{-\nu} \right) + \exp \left(-\frac{1}{4\sqrt{1+2t_0}}\epsilon^{-\nu} \right) + \exp \left(-\frac{1}{72t_0}\epsilon^{-\nu} \right) \right) \\
 &\leq \exp \left(-\epsilon^{-\nu} \right) \text{ pentru } \epsilon \leq \epsilon_0,
 \end{aligned}$$

deoarece $2q_1 + 2r - q = 2q_2 + 2r - \frac{q_1}{2} = 2q_3 + 2r - 2q_2 = -\nu$, ceea ce incheie demonstrația. Rămâne de demonstrat deci formula (2.73). Fie $\omega \notin B_1 \cup B_2 \cup B_3$, $T(\omega) = t_0$ și $\int_0^T Y^2(t) dt < \epsilon^q$. Atunci

$$\langle N \rangle_T = \int_0^T Y^2(t) |u(t)|^2 dt < \epsilon^{-2r+q} = \rho_1.$$

Cum $\omega \notin B_1$, avem $\sup_{0 \leq s \leq T} \left| \int_0^T Y(s) |u^i(s)| dW_s^i \right| < \delta_1 = \epsilon^{q_1}$. De asemenea, avem

$$\sup_{0 \leq s \leq T} \left| \int_0^t Y(s) a(s) ds \right| \leq \left(t_0 \int_0^T Y^2(t) a(t)^2 dt \right)^{1/2} < t_0^{1/2} \epsilon^{-r+q/2},$$

deci

$$\sup_{0 \leq s \leq T} \left| \int_0^t Y(s) dY(s) \right| < t_0^{1/2} \epsilon^{-r+q/2} + \epsilon^{q_1}.$$

Din formula lui Itô avem $Y^2(t) = y^2 + 2 \int_0^t Y(s) dY(s) + \langle M \rangle_t$, deci

$$\begin{aligned}
 \int_0^T \langle M \rangle_t dt &= \int_0^T Y^2(t) dt - Ty^2 - 2 \int_0^T \left(\int_0^t Y(s) dY(s) \right) dt \\
 &< \epsilon^q + 2t_0 \left(t_0^{1/2} \epsilon^{-r+q/2} + \epsilon^{q_1} \right) < (2t_0 + 1) \epsilon^{q_1}, \text{ pentru } \epsilon \leq \epsilon_0.
 \end{aligned}$$

Cum $\langle M \rangle_t$ este proces crescător, pentru orice $0 < \gamma < T$ avem $\gamma < M \rangle_{T-\gamma} < (2t_0 + 1) \epsilon^{q_1}$ și deci $\langle M \rangle_T <$

$(2t_0 + 1) \epsilon^{q_1} + \gamma \epsilon^{-2r}$. Alegând $\gamma = \delta_2$, obținem $\langle M \rangle_T < \rho_2$.

Cum $\omega \notin B_1$, obținem $\sup_{0 \leq s \leq T} |M_t| < \delta_2 = \epsilon^{q_2}$. Reamintim că $\int_0^T Y^2(t) dt < \epsilon^q$ deci, din inegalitatea lui Cebîșev, obținem

$$\lambda \{t \in [0, T] : |Y(t)| \geq \epsilon^{q/3}\} \leq \epsilon^{q/3},$$

deci

$$\lambda \{t \in [0, T] : |y + A(t)| \geq \epsilon^{q/3} + \epsilon^{q_2}\} \leq \epsilon^{q/3}.$$

Putem presupune că $\epsilon^{q/3} < t_0/2$ dacă $\epsilon < \epsilon_0$ și deci, pentru orice $t \in [0, T]$, există $s \in [0, T]$ astfel ca $|s - t| \leq \epsilon^{q/3}$ și $|y + A(s)| < \epsilon^{q/3} + \epsilon^{q_2}$. În consecință,

$$|y + A(t)| \leq |y + A(s)| + \left| \int_s^t a(r) dr \right| < (1 + \epsilon^{-r}) \epsilon^{q/3} + \epsilon^{q_2}.$$

În particular, $|y| < (1 + \epsilon^{-r}) \epsilon^{q/3} + \epsilon^{q_2}$ și pentru orice $t \in [0, T]$ avem

$$|A(t)| < 2 \left((1 + \epsilon^{-r}) \epsilon^{q/3} + \epsilon^{q_2} \right) \leq 6\epsilon^{q_2},$$

deoarece $q_2 < \frac{2}{3} - r$. Aceasta implică

$$\langle Q \rangle_t = \int_0^t A^2(t) |\gamma(t)|^2 dt < 36t_0 \epsilon^{2q_2 - 2r} = \rho_3.$$

Cum $\omega \notin B_3$, avem

$$|Q_T| = \left| \int_0^T A(t) \gamma_i(t) dW_i(t) \right| < \delta_3 = \epsilon^{q_3}.$$

Din formula lui Itô avem

$$\begin{aligned} \int_0^T a^2(t) dt &= \int_0^T a(t) dA(t) \\ &= a_T A_T - \int_0^T A(t) (\beta(t) dt + \gamma_i(t) dW_i(t)), \end{aligned}$$

și obținem estimarea

$$\int_0^T a^2(t) dt < 6(t_0 + 1) \epsilon^{q_2 - r} + \epsilon^{q_3} < 2\epsilon^{q_3} \text{ pentru } \epsilon \leq \epsilon_0.$$

În fine, obținem

$$\int_0^T (a^2(t) + |u(t)|^2) dt$$

$$< 2\epsilon^{q_3} + (1 + \epsilon^{-r})(2t_0 + 1)^{1/2} \epsilon^{q_1/2} < \epsilon \text{ pentru } \epsilon \leq \epsilon_0. \square$$

Demonstrația părții a doua a teoremei 2.6.4 Fixăm $t > 0$ și vrem să arătăm că $E[(\det C(t))^{-p}] < \infty$ pentru orice $p \geq 2$. Conform lemei 2.6.5, este suficient să arătăm că, pentru orice $p \geq 2$ avem

$$\sup_{|v|=1} P\{v^T C(t)v \leq \epsilon\} \leq \epsilon^p \text{ pentru orice } \epsilon \leq \epsilon(p).$$

Reamintim următoarea expresie pentru forma pătratică asociată matricii $C(t)$:

$$v^T C(t)v = \sum_{j=1}^d \int_0^t |v^T Y^{-1}(s)\sigma_j(X(s))|^2 ds.$$

Din condiția lui Hörmander, există un întreg $j_0 \geq 0$ astfel ca spațiul liniar generat de câmpurile de vectori $\cup_{j=0}^{j_0} \mathcal{S}'_j(x)$ în punctul x_0 să aibă dimensiunea m . În consecință, există constantele $R, c > 0$ astfel ca

$$\sum_{j=0}^{j_0} \sum_{V \in \mathcal{S}'_j} (v^T V(y))^2 \geq c, \text{ pentru orice } |v| = 1 \text{ și } |y - x| < R.$$

Pentru $j = 0, 1, \dots, j_0$ punem $m(j) = 2^{-4j}$ și definim mulțimile

$$E_j = \left\{ \sum_{V \in \mathcal{S}'_j} \int_0^t (v^T Y^{-1}(s)V(X(s)))^2 ds \leq \epsilon^{m(j)} \right\}.$$

Observăm că $\{v^T C(t)v \leq \epsilon\} = E_0$ deoarece $m(0) = 1$. Fie descompunerea

$$E_0 \subset (E_0 \cap E_1^c) \cup (E_1 \cap E_2^c) \cup \dots \cup (E_{j_0-1} \cap E_{j_0}^c) \cup F,$$

unde $F = E_0 \cup E_1 \cup \dots \cup E_{j_0}$. Atunci, pentru orice vector unitar v avem

$$P\{v^T C(t)v \leq \epsilon\} = P(E_0) \leq P(F) + \sum_{j=0}^{j_0} P(E_{j-1} \cap E_j^c)$$

Vom estima acum termenii acestei sume.

Pasul 1. Fie timpul de stopare S definit prin

$$\inf_{\sigma \geq 0} \left\{ \sup_{0 \leq s \leq \sigma} |X(s) - x_0| \geq R \text{ sau } \sup_{0 \leq s \leq \sigma} |Y^{-1}(s) - I| \geq \frac{1}{2} \right\} \wedge t.$$

Putem scrie

$$P(F) \leq P(F \cap \{S \geq \epsilon^\beta\}) + P\{S < \epsilon^\beta\},$$

unde $0 < \beta < m(j_0)$. Pentru ϵ suficient de mic, intersecția $F \cap \{S \geq \epsilon^\beta\}$ este vidă. Într-adevăr, dacă $S \geq \epsilon^\beta$, atunci

$$\sum_{j=0}^{j_0} \sum_{V \in S'_j} \int_0^t (v^T Y^{-1}(s) V(X(s)))^2 ds \quad (2.74)$$

$$\geq \sum_{j=0}^{j_0} \sum_{V \in S'_j} \int_0^S \left(\frac{v^T Y^{-1}(s) V(X(s))}{|v^T Y^{-1}(s)|} \right)^2 |v^T Y^{-1}(s)|^2 ds \geq \frac{c\epsilon^\beta}{4},$$

deoarece $s < S$ implică $|v^T Y^{-1}(s)| \geq 1 - |I - Y^{-1}(s)| \geq \frac{1}{2}$. Pe de altă parte, expresia (2.74) este dominată de $(j_0 + 1)\epsilon^{m(j_0)}$ pe mulțimea F și deci, pentru ϵ suficient de mic avem $F \cap \{S \geq \epsilon^\beta\} = \emptyset$. Mai mult, are loc

$$\begin{aligned} & P\{S < \epsilon^\beta\} \\ & \leq P\left\{ \sup_{0 \leq s \leq \epsilon^\beta} |X(s) - x_0| \geq R \right\} + P\left\{ \sup_{0 \leq s \leq \epsilon^\beta} |Y^{-1}(s) - I| \geq \frac{1}{2} \right\} \\ & \leq R^{-q} E \left[\sup_{0 \leq s \leq \epsilon^\beta} |X(s) - x_0|^q \right] + 2^q E \left[\sup_{0 \leq s \leq \epsilon^\beta} |Y^{-1}(s) - I|^q \right], \end{aligned}$$

pentru orice $q \geq 2$. Din inegalitățile lui Burkholder și Hölder deducem că $P\{S < \epsilon^\beta\} \leq C\epsilon^{q\beta/2}$ pentru orice $q \geq 2$, ceea ce dă o estimare pentru $P(F)$.

Pasul 2. Pentru orice $j = 0, \dots, j_0$ definim probabilitatea următoare

$$P(E_{j-1} \cap E_j^c) = P\left\{ \sum_{V \in S'_{j-1}} \int_0^t (v^T Y^{-1}(s) V(X(s)))^2 ds \leq \epsilon^{m(j-1)} \right\},$$

$$\left. \sum_{V \in \mathcal{S}'_j} \int_0^t (v^T Y^{-1}(s) V(X(s)))^2 ds > \epsilon^{m(j)} \right\}$$

$$\leq \sum_{V \in \mathcal{S}'_{j-1}} P \left\{ \int_0^t (v^T Y^{-1}(s) V(X(s)))^2 ds \leq \epsilon^{m(j-1)} \right\},$$

$$\sum_{k=1}^d \int_0^t (v^T Y^{-1}(s) [\sigma_k, V](X(s)))^2 ds + \int_0^t (v^T Y^{-1}(s) ([\sigma_0, V] +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^d [\sigma_j, [\sigma_j, V]](X(s)))^2 ds > \frac{\epsilon^{m(j)}}{2n(j-1)} \Bigg\},$$

unde $n(j)$ inseamnă card \mathcal{S}'_j . Fie semimartingalul continuu $\{v^T Y^{-1}(s) V(X(s)), s \geq 0\}$; procesul de variație pătratică asociat lui este

$$\sum_{k=1}^d \int_0^s (v^T Y^{-1}(\sigma) [\sigma_k, V](X(\sigma)))^2 d\sigma,$$

iar procesul de variație mărginită asociat este dat de

$$\int_0^s v^T Y^{-1}(\sigma) \left\{ [\sigma_0, V] + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^d [\sigma_j, [\sigma_j, V]] \right\} (X(\sigma)) d\sigma.$$

Tinând cont că $8m(j) < m(j-1)$, obținem estimarea căutată din lemă 2.6.6 aplicată semimartingalului

$$Y(t) = v^T Y^{-1}(t) V(X(t))$$

și demonstrația se încheie. \square

Exemple 1. Fie $W = \{(W_t^1, W_t^2), t \geq 0\}$ o mișcare browniană 2-dimensională și procesul $X = \{X(t), t \geq 0\}$ dat de

$$\begin{cases} X^1(t) = W_t^1 \\ X^2(t) = \int_0^t W_s^1 dW_s^2. \end{cases}$$

Determinați matricea Malliavin $Q(t)$ corespunzătoare lui $X(t)$ și arătați că

$$\det Q(t) \geq t \int_0^t (W_s^1)^2 ds.$$

Se poate arăta că $E \left| \int_0^t (W_s^1)^2 ds \right|^{-r} < \infty$ pentru orice $r \geq 2$ și de aici rezultă că, pentru orice $t > 0$, $X(t)$ are densitatea infinit derivabilă.

2. Fie $f(t, s)$ de pătrat integrabil pe $[0, 1]^2$ și fie $F = I_2(f)$. Arătați că

$$\| DF \|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 W(e_n)^2,$$

unde λ_n , e_n sunt valorile și vectorii proprii corespunzători operatorului asociat lui f . În cazul particular $\lambda_n = (\pi n)^{-2}$, se poate arăta că

$$P \left(\| DF \|^2 < \epsilon \right) \leq c \exp \left(-\frac{d}{\epsilon} \right),$$

cu $c, d > 0$ și deci F are densitatea infinit derivabilă.

DEVIAȚII MARI

3.1 REZULTATE GENERALE

Pe câmpul de probabilitate (Ω, \mathcal{K}, P) vom considera un șir de variabile aleatoare reale $\{X_n, n \geq 1\}$ independente și identic reparate, cu repartiția (legea) μ . Să notăm

$$\bar{X}_n := \frac{1}{n} (X_1 + \dots + X_n). \quad (3.1)$$

Comportamentul asimptotic al probabilităților

$$P(\bar{X}_n \in A), A \text{ boreliană din } \mathbf{R}, \text{ când } n \rightarrow \infty$$

este descris, în ipoteza $\int |x| d\mu(x) < \infty$, de legea tare a numerelor mari. Mai precis, întrucât $\bar{X}_n \rightarrow m := \int x d\mu(x)$ aproape sigur, obținem că $\lim_{n \rightarrow \infty} P(\bar{X}_n \in A) = 1$ dacă A conține o vecinătate a lui m , în timp ce $\lim_{n \rightarrow \infty} P(\bar{X}_n \in A) = 0$ dacă $m \notin A$.

Pentru n mare, un eveniment de tipul $\{\bar{X}_n \in A\}$ cu $m \notin A$ reprezintă o situație de **deviație mare** în raport cu m (sau de la media m). Calificativul "mare" se referă la faptul că \bar{X}_n evită o vecinătate a lui m a căreia mărime nu tinde la 0 când $n \rightarrow \infty$.

Mai general, după mărime, deviațiile corespund evenimentelor de tipul $(\frac{X_1 + \dots + X_n}{a_n} \in A)$, $A \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$, astfel

Tip de deviații	Definiție
mari	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} \in [1, \infty]$
moderate (medii)	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}} \in [1, \infty]$, și $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = 0$
mici	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}} \in (0, 1]$.

În particular, legile slabă și tare a numerelor mari (cu $a_n = n$) se încadrează la deviații mari, iar teorema limită centrală (cu $a_n = n^{1/2}$) și legea logaritmului iterat (cu $a_n = (2n \log \log n)^{1/2}$) se încadrează la deviații moderate.

În acest curs vom prezenta teoria deviațiilor mari clasice (i.e. pentru $a_n = n$), în dimensiune finită și infinită (i.e. când X_n iau valori într-un spațiu Banach real și separabil).

Vom prezenta în continuare deviațiile mari în cazul în care multimea A de mai sus este o semi-dreaptă reală.

Notăm transformarea Laplace a repartiției μ aplicația $\hat{\mu} : \mathbf{R} \rightarrow (0, +\infty]$ dată de

$$\hat{\mu}(t) = \int_{\mathbf{R}} e^{tx} d\mu(x) \quad (3.2)$$

și transformarea Cramer $\lambda : \mathbf{R} \rightarrow [0, +\infty]$ a lui μ aplicația

$$\lambda(x) = \sup_{t \in \mathbf{R}} [tx - \log \hat{\mu}(t)], \quad x \in \mathbf{R}. \quad (3.3)$$

Observații 1. Ca anvelopă superioară de funcții liniare, λ este convexă și inferior semi-continuu.

Dacă are loc $\int |x| d\mu(x) < \infty$, atunci

2. $\hat{\mu}(t) \equiv +\infty$ pentru orice $t > 0 \iff \lambda(x) \equiv 0$ pentru orice $x \geq 0$.

3. Există $t > 0$ astfel ca $\hat{\mu}(t) < \infty \iff \lim_{x \rightarrow \infty} \lambda(x) = +\infty$.

Intr-adevăr, dacă $\hat{\mu}(t) \equiv +\infty$ pentru orice $t > 0$, din relația (3.3) obținem că $\lambda(x) = \sup_{t \leq 0} [tx - \log \hat{\mu}(t)]$ și deci $\lambda(x) \equiv 0$ pentru orice $x \geq 0$. Dacă există $t > 0$ astfel ca $\hat{\mu}(t) < \infty$, relația $\lambda(x) \geq tx - \log \hat{\mu}(t)$ arată că $\lim_{x \rightarrow \infty} \lambda(x) = +\infty$. Implicațiile reciproce din (2) și (3) rezultă din implicațiile directe din (3) resp. (2).

Rezultatele 1,2 și 3 rămân adevărate dacă înlocuim $t, x > 0$, $x \rightarrow +\infty$ prin $t, x < 0$, $x \rightarrow -\infty$

4. Dacă $\hat{\mu}$ este finită într-o vecinătate a lui 0, atunci funcția λ își atinge minimumul în punctul $m = \int_{\mathbf{R}} x d\mu(x)$, iar $\lambda''(m) = 1/\sigma^2$, unde σ^2 este dispersia lui μ .

Exemple 1. Dacă $\mu = p\delta_u + (1-p)\delta_v$ cu $u < v$ și $0 < p < 1$, avem

$$\lambda(x) = \begin{cases} \frac{x-u}{v-u} \log \frac{x-u}{1-p} + \frac{v-x}{v-u} \log \frac{v-x}{p} - \log(v-u), & \text{dacă } u < x < v \\ +\infty, & \text{dacă } x < u \text{ sau } x > v \\ -\log p & \text{pentru } x = u \\ -\log(1-p) & \text{pentru } x = v. \end{cases}$$

2. Dacă μ este repartiția exponențială e_1 , atunci

$$\lambda(x) = \begin{cases} x - 1 - \log x, & \text{dacă } x > 0 \\ +\infty, & \text{dacă } x \leq 0. \end{cases}$$

3. Dacă μ este repartiția normală (gaussiană) $N(m, \sigma^2)$, atunci $\lambda(x) = \frac{1}{2\sigma^2} (x - m)^2$, $x \in \mathbf{R}$.

TEOREMA 3.1.1 Fie $\{X_n, n \geq 1\}$ șir de variabile aleatoare reale independente și identic repartizate, cu aceeași repartiție μ . Fie $\bar{X}_n := \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$ și λ transformarea Cramer a lui μ . Atunci, pentru orice $a \in \mathbf{R}$, avem

$$-\lambda(a) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log P(\bar{X}_n \leq a) \quad (3.4)$$

$$-\lambda(a) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log P(\bar{X}_n \geq a).$$

Dacă $\int |x| d\mu(x) < \infty$, atunci au loc și inegalitățile următoare, valabile pentru orice $n \geq 1$:

$$\frac{1}{n} \log P(\bar{X}_n \leq a) \leq -\lambda(a), \text{ pentru } a \leq \int x d\mu(x) \quad (3.5)$$

$$\frac{1}{n} \log P(\bar{X}_n \geq a) \leq -\lambda(a), \text{ pentru } a \geq \int x d\mu(x).$$

Demonstrație. Legile variabilelor aleatoare $Y_n := X_n - a$ și $Z_n := -X_n$ au ca transformate Cramer funcțiile $x \rightarrow \lambda(x+a)$ resp. $x \rightarrow \lambda(-x)$. Este suficient deci de tratat cazul $\{a=0\}$ și de demonstrat numai inegalitățile privind $P(\bar{X}_n \geq 0)$.

Să arătăm formulele (3.5). Presupunem că $\int x d\mu(x) \leq 0$; definiția lui λ devine

$$\lambda(0) = \sup_{t \in \mathbf{R}} [-\log \hat{\mu}(t)] = \sup_{t \geq 0} [-\log \hat{\mu}(t)].$$

Pentru $t \geq 0$, putem scrie

$$\begin{aligned} P(\bar{X}_n \geq 0) &= P[e^{t(X_1 + \dots + X_n)} \geq 1] \\ &\leq E[e^{t(X_1 + \dots + X_n)}] = [\hat{\mu}(t)]^n; \end{aligned}$$

deci

$$\frac{1}{n} \log P(\bar{X}_n \geq 0) \leq \inf_{t \geq 0} [\log \hat{\mu}(t)] = -\lambda(0),$$

adică (3.5).

Demonstrația formulelor (3.4) folosește următoarea lemnă tehnică (cazul în care μ este "cu suport finit").

LEMA 3.1.2 Fie x_i, p_i ($1 \leq i \leq k$) numere reale astfel ca $p_i > 0$ și $\min_i x_i < 0 < \max_i x_i$. Notăm

$$b = \inf_{t \in \mathbf{R}} \left(\sum_{i=1}^k p_i e^{tx_i} \right) \text{ și } f(n_1, \dots, n_k) = n! \prod_{i=1}^k \frac{p_i^{n_i}}{n_i!}.$$

Atunci există o constantă $c > 0$ și un număr natural N astfel ca orice $n \geq N$ se poate scrie ca $n = n_1 + \dots + n_k$, unde numerele naturale n_i verifică

$$\sum_{i=1}^k n_i x_i \geq 0 \text{ și } f(n_1, \dots, n_k) \geq cn^{-k/2} b^n.$$

Demonstrația lemei 3.1.2 Conform formulei lui Stirling, pentru $z_i \in [1, \infty)$, obținem

$$f(z_1, \dots, z_k) \geq n^{-k/2} \prod_{i=1}^k \left(\frac{np_i}{z_i} \right)^{z_i} =: g(z_1, \dots, z_k)$$

Să fixăm $s \in \mathbf{R}$ astfel ca $b = \sum_{1 \leq i \leq k} p_i e^{sx_i}$. Atunci numerele reale $u_i = np_i e^{sx_i} / b$ verifică

$$\sum_{i=1}^k u_i = n, \quad \sum_{i=1}^k u_i x_i = 0,$$

$$g(u_1, \dots, u_k) = n^{-k/2} b^n.$$

Fără a pierde generalitatea, putem presupune că $x_i \leq x_k$ pentru orice i . Punem $N_i = [u_i]$ și $N_k = n - \sum_{i < k} u_i$. Pentru $A > 0$ fixat și B variind într-un interval mărginit fixat, există o constantă c_1 cu proprietatea

$$\left(\frac{v}{Av+B}\right)^{Av+B} \geq c_1 \left(\frac{v}{Av}\right)^{Av}$$

pentru orice $v \geq 1$ și $Av+B \geq 1$. De aici rezultă existența unei constante c_2 astfel ca $(np_i/N_i)^{N_i} \geq c_2 (np_i/u_i)^{u_i}$ pentru orice i și orice n suficient de mare. Deci, pentru n suficient de mare, cu $c_3 = c_2^k$, avem

$$\sum_{i=1}^k N_i = n, \quad \sum_{i=1}^k N_i x_i \geq 0, \\ g(N_1, \dots, N_k) \geq c_3 n^{-k/2} b^n,$$

și lema este demonstrată.

Demonstrația formulelor (3.4). Putem presupune că $\mu((0, \infty))$ și $\mu((-\infty, 0))$ sunt $\neq 0$. Fie $\mu = \sum_{i \geq 1} p_i \delta_{x_i}$ (suma cel mult numărabilă) și $p_i > 0$ pentru orice i . Pentru k suficient de mare, vom avea

$$\min_{1 \leq i \leq k} x_i < 0 < \max_{1 \leq i \leq k} x_i.$$

Sirul monoton de funcții $f_k(t) = \sum_{1 \leq i \leq k} p_i e^{tx_i}$ converge către $\hat{\mu}(t)$ când $k \rightarrow \infty$, deci converge uniform converge către $\hat{\mu}(t)$ pe orice compact inclus în $\{t \mid \hat{\mu}(t) < \infty\}$. Cum $f_k(t)$ tinde către $+\infty$ odată cu $|t|$, avem

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left[\inf_t f_k(t) \right] = \inf_t \hat{\mu}(t) = e^{-\lambda(0)}.$$

Punem $b_k = \inf_t f_k(t)$ și fixăm k . Cu notațiile din lema 3.1.2 obținem, pentru orice n

$$P(\bar{X}_n \geq 0) \geq f(n_1, \dots, n_k) \geq c_k n^{-k/2} b_k^n$$

și deci

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log P(\bar{X}_n \geq 0) \geq \log b_k.$$

Facem $k \rightarrow \infty$ și obținem formulele (3.4).

Să trecem la cazul general. Punem $Y_n^{(s)} = \frac{i}{s}$ pentru $\frac{i-1}{s} \leq X_n \leq \frac{i}{s}$. Fie μ_s legea comună a $Y_n^{(s)}$ -urilor și λ_s transformarea Cramer a lui μ_s . Construcția lui μ_s implică

$$\hat{\mu}_s(t) \geq e^{-|t|/s} \hat{\mu}(t) \text{ pentru orice } t, s > 0.$$

Cum $(0, +\infty)$ și $(-\infty, 0)$ nu sunt μ -neglijabile, avem că $\hat{\mu}(t) \geq Ae^{B|t|}$, cu A, B constante strict pozitive. Putem scrie

$$e^{-\lambda_s(1/s)} = \inf_t [e^{-t/s} \hat{\mu}_s(t)] \geq \inf_t [e^{-2|t|/s} \hat{\mu}(t)].$$

Sirul de funcții $g_s(t) = e^{-2|t|/s} \hat{\mu}(t)$ converge crescător către $\hat{\mu}(t)$ când $s \rightarrow \infty$ și către $+\infty$ când $|t| \rightarrow \infty$, pentru $s > 2/B$. Ca mai sus, aceasta implică

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \left[\inf_t g_s(t) \right] = \inf_t \hat{\mu}(t) = e^{-\lambda(0)}$$

și deci $\lim_{s \rightarrow \infty} [-\lambda_s(1/s)] \geq -\lambda(0)$.

Din cazul discret, pentru s fixat, obținem

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log P \left(\bar{Y}_n^{(-s)} \geq 1/s \right) \geq -\lambda_s(1/s)$$

și ținând cont de incluziunea $\left\{ \bar{Y}_n^{(-s)} \geq 1/s \right\} \subseteq \left\{ \bar{X}_n \geq 0 \right\}$ obținem că

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log P \left(\bar{X}_n \geq 0 \right) \geq -\lambda_s(1/s);$$

facem $s \rightarrow \infty$ și obținem formula (1.4). \square

Observații 1. În formulele (3.5), restricțiile asupra semnului expresiei $[a - \int x d\mu(x)]$ nu sunt puse decât pentru a formula simplu singurul rezultat netrivial. Într-adevăr, dacă $\int x d\mu(x) < a$, avem de exemplu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log P \left(\bar{X}_n \leq a \right) = \sup_{n \geq 1} \frac{1}{n} \log P \left(\bar{X}_n \leq a \right) = 0.$$

2. Teorema 3.1.1 sugerează că probabilitatea de a găsi \bar{X}_n în vecinătatea lui x "are ordinul" $e^{-n\lambda(x)}$; în această formă,

rezultatul este fals, dar acest enunț exprimă conținutul intuitiv al teoremei 3.1.1, după cum vom preciza mai departe. Să reținem pentru moment că valorile mari ale lui λ corespund punctelor în care aparițiile lui \bar{X}_n sunt puțin probabile.

PROPOZITIA 3.1.3 Fie $[u, v] \subset [-\infty, +\infty]$ anvelopa convexă închisă a suportului repartiției μ cu $\int |x| d\mu(x) < +\infty$. Atunci $\lambda(x) = +\infty$ pentru $x \notin [u, v]$ în timp ce $\lambda(x)$ este finită și continuă pentru $x \in (u, v)$. În plus, λ este continuă la stânga în v (dacă v este finit) și continuă la dreapta în u (dacă u este finit). Pentru v finit, relația $\lambda(v) = +\infty$ este echivalentă cu $\mu(\{v\}) = 0$ (rezultat analog pentru u finit). În particular avem

$$\int_{\mathbb{R}} e^{s\lambda(x)} d\mu(x) < \infty \text{ pentru orice } s < 1 \quad (3.6)$$

și

$$\hat{\mu}(t) < \infty \text{ pentru orice } t > 0 \iff \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\lambda(x)}{x} = +\infty \quad (3.7)$$

(rezultat analog pentru $t < 0$, $x \rightarrow -\infty$).

Demonstrație. Deoarece $\bar{X}_n \in [u, v]$ aproape sigur, formulele (1.4) aplicate cu $a < u$ și $a > v$ arată că $\lambda(a) = +\infty$ pentru $a \notin [u, v]$. Reciproc, fie $m = \int x d\mu(x)$; dacă $a \geq m$ și $\lambda(a) = +\infty$, formulele (3.5) arată că $P(\bar{X}_n \geq a) = 0$ și deci $\mu(\{a\}) = 0$, ceea ce implică $a \geq v$. Argument analog pentru $a \leq m$. Deci λ este finită pe (u, v) ; în plus am văzut că $\lambda(v) = +\infty$ implică $\mu(\{v\}) = 0$, iar formulele (3.4) demonstrează reciproca. Toate proprietățile de continuitate ale lui λ sunt consecințe simple ale faptului că λ este convexă și inferior semi-continuă.

Formula (3.6) este evidentă dacă $\hat{\mu}(t) = +\infty$ pentru orice $t > 0$ sau dacă v este finit. În cazul contrar, întrucât λ este convexă și continuă pe $(u, +\infty)$, derivata ei λ' există pe $(u, +\infty)$ (mai puțin, eventual, pe o mulțime numărabilă). O integrare prin părți împreună cu condiția $\lim_{x \rightarrow +\infty} \lambda(x) = +\infty$ arată că $\int_m^{+\infty} e^{s\lambda(x)} d\mu(x)$ este finită dacă integrala

$$I := \int_m^{+\infty} e^{s\lambda(x)} \lambda'(x) \mu([x, +\infty)) dx$$

este finită. Din formulele (3.5) aplicate pentru $n = 1$, obținem că $\mu([x, +\infty)) \leq e^{-\lambda(x)}$ pentru $x \geq m$, deci

$$I \leq \int_m^{+\infty} e^{(s-1)\lambda(x)} \lambda'(x) dx < +\infty \text{ pentru } s < 1.$$

Raționăm analog pentru $\int_{-\infty}^m$ și formula (3.6) este demonstrată.

Să demonstrăm formula (3.7). Dacă $\hat{\mu}(t)$ este finită pentru orice $t > 0$, din definiția transformării Cramer rezultă, pentru $t, x > 0$, că $\frac{\lambda(x)}{x} \geq t - \frac{1}{x} \log \hat{\mu}(t)$ și deci $\liminf_{x \rightarrow +\infty} \frac{\lambda(x)}{x} \geq t$. Cum t este arbitrar, obținem că $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\lambda(x)}{x} = +\infty$.

Reciproc, pentru orice $t > 0$ fixat, are loc majorarea $tx \leq \frac{1}{2}\lambda(x)$ pentru x suficient de mare. Din formula (3.6), obținem

$$\int_A^{+\infty} e^{tx} d\mu(x) \leq \int_A^{+\infty} e^{1/2\lambda(x)} d\mu(x) < +\infty,$$

deci $\hat{\mu}(t)$ este finită. \square

Remarcă In formula (3.6), condiția $s < 1$ nu poate fi îmbunătățită (in general). De exemplu, dacă μ este gaussiană sau exponențială, atunci $\int_{\mathbf{R}} e^{\lambda(x)} d\mu(x) = +\infty$. Acest fapt rămâne adevărat pentru orice probabilitate μ pe \mathbf{R} cu suport necompact astfel ca $\hat{\mu}(t)$ să fie finită cel puțin într-un $t \neq 0$. In acest caz, λ ar putea fi caracterizată ca funcția convexă "cea mai mare la ∞ " astfel ca $\int_{\mathbf{R}} e^{s\lambda(x)} d\mu(x)$ este finită pentru $s < 1$ și infinită pentru $s = 1$.

Fie \mathbf{E} spațiu Banach real și separabil inzestrat cu borelienele $\mathcal{B}(\mathbf{E})$, iar μ o probabilitate pe \mathbf{E} . Fie (Ω, P) câmp de probabilitate complet și $X_n : \Omega \rightarrow \mathbf{E}$ șir de variabile aleatoare independente și identic repartizate, cu legea μ . Punem $\bar{X}_n = \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$.

Pentru orice $A \in \mathcal{B}(\mathbf{E})$, notăm

$$\underline{l}(A) = \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log P(\bar{X}_n \in A),$$

$$\bar{l}(A) = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log P(\bar{X}_n \in A)$$

și observăm că $-\infty \leq \underline{l}(A) \leq \bar{l}(A) \leq 0$.

Dacă $l(A) = \bar{l}(A)$, notăm

$$l(A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log P(\bar{X}_n \in A).$$

PROPOZITIA 3.1.4 *Limita $l(A)$ există pentru orice parte $A \in \mathcal{B}(\mathbf{E})$ convexă. Oricare ar fi $A, B \in \mathcal{B}(\mathbf{E})$, avem*

$$\max[l(A), l(B)] \leq l(A \cup B) \leq \bar{l}(A \cup B) \leq \max[\bar{l}(A), \bar{l}(B)].$$

In particular, dacă $l(A_i)$ există pentru $i = 1, \dots, n$, atunci există $l(A_1 \cup \dots \cup A_n)$ și este egală cu $\max[l(A_1), \dots, l(A_n)]$.

Demonstrație. Punem

$$X = \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n) \text{ și } Y = \frac{1}{m}(X_{n+1} + \dots + X_{n+m});$$

atunci $\bar{X}_{n+m} = \frac{n}{n+m}X + \frac{m}{n+m}Y$, iar convexitatea lui A implică $(X \in A) \cap (Y \in A) \subset (\bar{X}_{n+m} \in A)$. Deducem că $\mu_n(A)\mu_m(A) \leq \mu_{n+m}(A)$, unde μ_n este legea lui \bar{X}_n , deci funcția $f: \mathbf{N} \rightarrow [0, \infty]$, $f(n) = -\log \mu_n(A)$ este subaditivă, și deci există $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{n}$.

Apoi folosim faptul că l și \bar{l} sunt funcții crescătoare și că, pentru $c > \max[\bar{l}(A), \bar{l}(B)]$ și n mare, $\mu_n(A)$ și $\mu_n(B)$ sunt majorate de e^{nc} , deci $\mu_n(A \cup B) \leq 2e^{nc}$, adică $\bar{l}(A \cup B) \leq c$. \square

Vom numi **transformarea Cramer** a măsurii μ aplicația $\lambda: \mathbf{E} \rightarrow [0, +\infty]$, dată de

$$\lambda(x) = -\inf \{l(A), A \text{ deschisă și convexă, cu } x \in A\}. \quad (3.8)$$

Exercițiu Cu notațiile de mai sus, arătați că

$$\lambda(x) = -\lim_{\delta \rightarrow 0} l(B(x, \delta)),$$

unde $B(x, \delta)$ este bila din \mathbf{E} de centru x și rază δ .

A priori, această definiție nu coincide cu definiția din cazul $\mathbf{E} = \mathbf{R}$. Vom vedea că acest lucru se întâmplă în cazul în care momentele de ordinul 1 ale tuturor proiecțiilor (continue) 1-dimensionale ale lui μ sunt finite.

LEMA 3.1.5 *Transformata Cramer λ a lui μ este funcție convexă și inferior semi-continuu.*

Demonstrație. Intr-adevăr, pentru $x \in \mathbf{E}$ și $c < \lambda(x)$ date, există o vecinătate deschisă și convexă A a lui x astfel ca $c < -l(A)$. Pentru orice $y \in A$, vom avea

$$\lambda(y) = \sup \{-l(B), B \text{ vecinătate deschisă și convexă a lui } y\},$$

deci $\lambda(y) \geq -l(A) > c$. Funcția λ este inferior semicontinuu deoarece verifică relația $\lambda(x) \leq \liminf_{y \rightarrow x} \lambda(y)$.

Convexitatea se verifică pe dreptele spațiului, deci este suficient de arătat că $\lambda(\frac{x+y}{2}) \leq \frac{1}{2}\lambda(x) + \frac{1}{2}\lambda(y)$ pentru orice $x, y \in \mathbf{E}$. Pentru orice deschis convex care conține $\frac{x+y}{2}$, există deschisi convexi B, C care conțin x respectiv y și astfel ca $(\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C) \subset A$. Să punem $X = \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$ și $Y = \frac{1}{n}(X_{n+1} + \dots + X_{2n})$; incluziunea $(X \in B) \cup (Y \in C) \subset (\bar{X}_{2n} \in A)$ implică $\mu_n(B) \mu_n(C) \leq \mu_{2n}(A)$, unde μ_n este legea lui \bar{X}_n . Trecem la limită după n și obținem

$$\frac{1}{2}l(B) + \frac{1}{2}l(C) \leq l(A),$$

deci $-\frac{1}{2}\lambda(x) - \frac{1}{2}\lambda(y) \leq l(A)$ iar apoi luăm inf după A în membrul drept. \square

Fie (E, μ) ca mai înainte și λ transformarea Cramer a lui μ . Numim **funcționala Cramer** a lui μ aplicația $\Lambda : \mathcal{P}(E) \rightarrow [0, +\infty]$ definită prin

$$\Lambda(A) = \inf_{x \in A} \lambda(x), \quad A \subset E. \quad (3.9)$$

Să observăm că a cunoaște λ este echivalent cu a cunoaște Λ .

TEOREMA 3.1.6 Fie $X_n : \Omega \rightarrow E$ șir de variabile aleatoare independente și cu aceeași lege μ , iar Λ funcționala Cramer asociată lui μ . Atunci

(a) Pentru orice $A \in \mathcal{B}(E)$ avem

$$-\Lambda \left(\overset{\circ}{A} \right) \leq l(A). \quad (3.10)$$

(b) Dacă \bar{A} este compact, atunci

$$\bar{l}(A) \leq -\Lambda \left(\bar{A} \right). \quad (3.11)$$

(c) Pentru orice reuniune finită A de deschise convexe ale lui E , avem

$$l(A) = -\Lambda(A). \quad (3.12)$$

Demonstrație. Dacă $x \in \overset{\circ}{A}$, există o vecinătate deschisă și convexă C a lui x astfel ca $C \subset \overset{\circ}{A}$ și avem $l(A) \geq l(C) = l(C) \geq -\lambda(x)$. Luăm sup după $x \in \overset{\circ}{A}$ și obținem formula (3.10).

Intrucât \bar{l} este monotonă, avem $\bar{l}(A) \leq \bar{l}(\bar{A})$, deci putem presupune A compact pentru a demonstra (3.11). Fie $a > -\Lambda(A)$; pentru orice $x \in A$ avem $a > -\lambda(x)$ și deci există un deschis convex $C_x \ni x$ astfel ca $a > l(C_x)$. Fie $C_{x_i}, i = 1, \dots, k$ o acoperire finită a lui A . Din propoziția 3.1.4 știm că

$$\bar{l}(A) \leq \max_{i=1, \dots, k} l(C_{x_i}) < a$$

și cum a este arbitrar, obținem (3.11).

Din definiția lui Λ , avem întotdeauna $\Lambda(A \cup B) = \inf[\Lambda(A), \Lambda(B)]$. Conform propoziției 3.1.4 putem presupune A deschisă și convexă pentru a demonstra formula (3.12). Din (3.10) rezultă că $-\Lambda(A) \leq l(A)$, deci este suficient de demonstrat inegalitatea inversă când $l(A)$ este finită.

Pentru $\epsilon > 0$ dat, putem găsi $N \in \mathbb{N}$ astfel ca

$$\frac{1}{n} \log \mu_n(A) \geq l(A) - \epsilon \text{ pentru } n \geq N.$$

Intrucât A este deschis și convex, există un compact convex K inclus în A astfel ca $\mu(A \setminus K) \leq \epsilon$, deci

$$\frac{1}{N} \log \mu_N(A) - \frac{1}{N} \log \mu_N(K) \leq \epsilon.$$

Aceasta înseamnă că funcția $f(n) = -\log \mu_n(K)$ verifică $f(N) \leq -[l(A) - 2\epsilon]N$ și, întrucât K este convex, rezultă că f este subaditivă (vezi propoziția 3.1.4). În particular avem $f(pN) \leq -[l(A) - 2\epsilon]Np$ pentru orice $p \in \mathbb{N}^*$ și deci

$$-l(K) = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{f(pN)}{pN} \leq -l(A) + 2\epsilon.$$

Formula (3.11) arată inegalitatea $\Lambda(K) \leq -l(K)$. Ultimele două inegalități, împreună cu $\Lambda(A) \leq \Lambda(K)$ implică $\Lambda(A) \leq -l(A) + 2\epsilon$ și cum ϵ este arbitrar, obținem $\Lambda(A) \leq -l(A)$. \square

PROPOZITIA 3.1.7 Transformarea Cramer asociată lui μ se poate calcula cu formula

$$\lambda(x) = \sup \{ -l(H), H \text{ semi-spațiu deschis, cu } x \in H \}.$$

Demonstratie. Fie $a < \lambda(x)$. Mulțimea convexă și închisă $C = \{y; \lambda(y) \leq a\}$ nu-l conține pe x . Există deci un semi-spațiu deschis H al lui \mathbf{E} astfel ca $H \cap C = \emptyset$ și $x \in H$. În particular $\Lambda(H) \geq a$. Din relația $-l(H) = \Lambda(H)$ obținem că $-l(H) \geq a$, deci $r = \sup \{ -l(H), H \text{ semi-spațiu deschis, cu } x \in H \}$ este $\geq a$ pentru $a < \lambda(x)$ i.e. $r \geq \lambda(x)$. Inegalitatea opusă rezultă direct din definiția lui $\lambda(x)$. \square

Observație Propoziția 3.1.7 reduce calculul lui λ la calculul lui $l(H)$ cu H semi-spațiu deschis, iar aceasta este o problemă 1-dimensională, apropiată de cea rezolvată anterior. Acest fapt ne va permite să calculăm λ în orice dimensiune, pornind de la $\hat{\mu}$ (transformata Laplace a lui μ) iar funcționala Λ devine în principiu calculabilă.

Fie μ probabilitate pe $\mathcal{B}(\mathbf{E})$. Notăm $\hat{\mu}(t) := \int_{\mathbf{E}} e^{\langle t, x \rangle} d\mu(x)$, $t \in \mathbf{E}'$ (dualul lui \mathbf{E}), transformarea Laplace a lui μ . Funcția $\log \hat{\mu}(t)$ este definită pe \mathbf{E}' , cu valori în $[0, +\infty]$, este convexă și inferior semi-continuuă (\mathbf{E}' este inzestrat cu topologia slabă $\sigma(\mathbf{E}', \mathbf{E})$). Are loc următorul rezultat.

PROPOZITIA 3.1.8 Cu notațiile precedente, dacă

$$\int_{\mathbf{E}} |\langle t, x \rangle| d\mu(x) \text{ este finită pentru orice } t \in \mathbf{E}',$$

atunci

$$\lambda(x) = \sup_{t \in \mathbf{E}'} [\langle t, x \rangle - \log \hat{\mu}(t)], \quad x \in \mathbf{E}.$$

Demonstratie. Să considerăm μ centrată și $\mathbf{E} = \mathbf{R}$ (cazul în care μ nu este centrată se reduce prin translație la calculele ce urmează). Avem de arătat că

$$f(x) := \sup_{t \in \mathbf{R}} [tx - \log \hat{\mu}(t)]$$

coincide cu

$$g(x) := -\lim_{\epsilon \searrow 0} l((x - 2\epsilon, x + 2\epsilon)), \quad x \in \mathbf{R}.$$

Cum μ este centrată, formulele (3.5) implică pentru $x \geq 0$

$$\begin{aligned} l((x - 2\epsilon, x + 2\epsilon)) &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log P(\bar{X}_n \geq x - 2\epsilon) \\ &\leq -f(x - 2\epsilon), \end{aligned}$$

deci

$$g(x) \geq \lim_{\epsilon \searrow 0} f(x - 2\epsilon) \text{ pentru } x \geq 0. \quad (3.13)$$

Formulele (3.4) implică pentru $x \geq 0$

$$-f(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log P(\bar{X}_n \geq x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log P(\bar{X}_n > x)$$

și, conform formulei 3.12, obținem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log P(\bar{X}_n > x) = -\Lambda((x, +\infty)) = -\inf_{y > x} g(y),$$

deci

$$f(x) \geq \inf_{y > x} g(y) \text{ pentru } x \geq 0.$$

Legea numerelor mari arată că $g(0) = 0$ și cum g este convexă, inferior semicontinuuă și pozitivă, avem $\inf_{y > x} g(y) = \lim_{\epsilon \searrow 0} g(x + \epsilon)$ pentru $x \geq 0$, deci

$$f(x) \geq \lim_{\epsilon \searrow 0} g(x + \epsilon) \quad (3.14)$$

Pot avea loc următoarele situații. Există $a, b \in [0, +\infty]$ astfel ca f, g să fie respectiv

- 1) continue finite pe $[0, a), [0, b)$
- 2) $\equiv +\infty$ pe $(a, +\infty), (b, +\infty)$
- 3) continue la stânga în a pentru a finit (în b pentru b finit).

Cu inegalitățile (3.13), (3.14), arătăm succesiv că $a = b$, apoi că f și g coincid pe $[0, +\infty) \setminus \{a\}$, deci coincid pe $[0, +\infty)$. Similar tratăm problema comparării lui f și g pe $(-\infty, 0]$.

In cazul general, fie $x \in \mathbf{E}$. Orice semi-spațiu deschis care-l conține pe x se scrie

$$H_{t,r}^+ = \{y \in \mathbf{E} ; \langle t, y \rangle - r > 0\}, \text{ cu} \\ \langle t, x \rangle - r > 0 \text{ pentru } t \in \mathbf{E}', r \in \mathbf{R}$$

sau

$$H_{t,r}^- = \{y \in \mathbf{E} ; \langle t, y \rangle - r < 0\}, \text{ cu} \\ \langle t, x \rangle - r < 0 \text{ pentru } t \in \mathbf{E}', r \in \mathbf{R}.$$

Fie $t : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{R}$ forma liniară asociată lui $t \in \mathbf{E}'$ și să notăm $Y_n = t(X_n)$, $L_r^+ = t(H_{t,r}^+) = (r, +\infty)$ și $L_r^- = t(H_{t,r}^-) = (-\infty, r)$, $u = t(x)$, $\mu_t = t(\mu)$, $l_t(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log P(\bar{Y}_n \in A) = l[t^{-1}(A)]$, unde A este deschis și convex în \mathbf{R} . Conform propoziției 3.1.7, notând transformarea Cramer a lui μ_t prin λ_t , obținem

$$\lambda_t(u) = \max \left\{ \left[\sup_{r < u} -l_t(L_r^+) \right], \left[\sup_{r > u} -l_t(L_r^-) \right] \right\}$$

de unde, ținând cont că $l_t(L_r^\pm) = l | t^{-1}(L_r^\pm) | = l(H_{t,r}^\pm)$, obținem

$$\lambda_t(u) = \max \left\{ \left[\sup_{r < t(x)} -l(H_{t,r}^+) \right], \left[\sup_{r > t(x)} -l(H_{t,r}^-) \right] \right\}.$$

Luăm sup în membrul drept din ultima inegalitate după $t \in \mathbf{E}'$ și obținem $\sup \{-l(H), H \text{ semi-spațiu deschis, cu } x \in H\}$, care este egal (cf. propoziției 3.1.7) cu $\lambda(x)$. Obținem deci

$$\lambda(x) = \sup_{t \in \mathbf{E}'} \lambda_t(\langle t, x \rangle) = \sup_{t \in \mathbf{E}'} \lambda_{t(\mu)}[t(x)].$$

Din cazul $\mathbf{E} = \mathbf{R}$ (studiat anterior) avem

$$\lambda_t[t(x)] = \varphi_t[t(x)] = \sup_{s \in \mathbf{R}} [s \cdot t(x) - \log \hat{\mu}_t(s)].$$

Cum însă $\hat{\mu}_t(s) = \hat{\mu}(st)$ pentru $s \in \mathbf{R}$, $t \in \mathbf{E}'$, obținem $\lambda(x) = \sup_{t \in \mathbf{E}'} \sup_{s \in \mathbf{R}} [s \cdot t(x) - \log \hat{\mu}(st)]$, ceea ce arată că $\lambda(x) = \sup_{t \in \mathbf{E}'} [\langle t, x \rangle - \log \hat{\mu}(t)]$. \square

Exemple 1. $\mathbf{E} = \mathbf{R}^d$, μ este gaussiană de medie M și matrice de covariație Σ (presupusă inversabilă). Atunci

$$\lambda(x) = \frac{1}{2} (x - M)^* \Sigma^{-1} (x - M).$$

2. $\mathbf{E} = \mathbf{R}^d$, $d\mu(x) = f(x)dx$ cu $f(x) \sim \frac{c}{|x|^r}$ când $|x| \rightarrow +\infty$. Atunci $\hat{\mu}(t) = +\infty$ pentru orice $t \neq 0$, deci $\lambda \equiv 0$ (cf. propoziției 3.1.8).

Observații 1. Din teorema 3.1.6 rezultă că λ este identic nulă \Leftrightarrow pentru orice parte boreliană A a lui \mathbf{E} , de interior nevid, are loc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log P(\bar{X}_n \in A) = 0,$$

deci situația $\lambda \equiv 0$ necesită o descriere mai fină a comportamentului asimptotic al $P(\bar{X}_n \in A)$, care poate converge către 0 (atunci când $\int_{\mathbf{E}} x d\mu(x) \notin \bar{A}$) e.g. cu viteză polinomială în $\frac{1}{n}$.

2. Fie $\mathbf{E} = \mathbf{R}^d$, μ probabilitate pe \mathbf{E} astfel ca $\int_{\mathbf{E}} |x| d\mu(x) < +\infty$ și μ nu încarcă nici un subspațiu afin (propriu) al lui \mathbf{R}^d . Dacă λ este transformata Cramer a lui μ , atunci corespondența dintre λ și μ este biunivocă.

3. În teoria funcțiilor convexe (în dualitate) pe $\mathbf{E} = \mathbf{R}^d$, se arată că mulțimea $D(\lambda) := \{x \in \mathbf{R}^d; \lambda(x) \text{ finită}\}$ are interiorul nevid și că λ este diferențiabilă pe $\overset{\circ}{D}(\lambda)$. În plus, dacă $y \in \partial \overset{\circ}{D}(\lambda)$, atunci $\lim_{x \rightarrow y, x \in \overset{\circ}{D}(\lambda)} \|\lambda'(x)\| = +\infty$.

4. Tot în cazul $\mathbf{E} = \mathbf{R}^d$, se poate arăta că funcția $\log \hat{\mu}$ este diferențiabilă pe $\overset{\circ}{D}(\log \hat{\mu})$. În plus, dacă $\hat{\mu}(t)$ este finită pentru orice $t \in \mathbf{R}^d$, atunci putem scrie $\lambda(x) = \langle z, x \rangle - \log \hat{\mu}(z)$, pentru orice $x \in \overset{\circ}{D}(\lambda)$, unde z este soluția (unică) a ecuației $\frac{\hat{\mu}'}{\hat{\mu}}(z) = x$.

Evaluarea lui $l(A)$ se bazează pe teorema 3.1.6; restricția " \bar{A} compact" pentru validitatea formulei $\bar{l}(A) \leq -\Lambda(\bar{A})$ este prea puternică în majoritatea aplicațiilor. În vedea în continuare situații când această condiție devine inutilă.

LEMA 3.1.9 Fie μ probabilitate pe spatiul Banach real și separabil \mathbf{E} , X_n ($n \geq 1$) șir de variabile aleatoare independente de lege μ , cu valori în \mathbf{E} . Dacă, pentru orice $a > 0$ există un compact $K_a \subset \mathbf{E}$ astfel ca $P(\bar{X}_n \notin K_a) \leq e^{-na}$ pentru orice $n \geq N(a)$, atunci, pentru orice $B \in \mathcal{B}(\mathbf{E})$ avem

$$\bar{l}(B) \leq -\Lambda(\bar{B}).$$

In plus, dacă λ este transformarea Cramer a lui μ , atunci mulțimile $\{x \in \mathbf{E}; \lambda(x) \leq b\}$ sunt convexe și compacte, pentru orice $b > 0$.

Demonstrație. Este clar că $\bar{l}(\mathbf{E} \setminus K_a) \leq -a$. Avem

$$\begin{aligned} \bar{l}(B) &\leq \max\{\bar{l}(B \cap K_a), \bar{l}(B \cap (\mathbf{E} \setminus K_a))\} \\ &\leq \max\{\bar{l}(\bar{B} \cap K_a), -a\}. \end{aligned}$$

Cum $\bar{B} \cap K_a$ este compact, teorema 3.1.6 implică

$$\bar{l}(\bar{B} \cap K_a) \leq -\Lambda(\bar{B} \cap K_a) \leq -\Lambda(\bar{B}),$$

deci $\bar{l}(B) \leq \max\{-\Lambda(\bar{B}), -a\}$ pentru orice $a > 0$, deci $\bar{l}(B) \leq -\Lambda(\bar{B})$.

Fie $b > 0$ și $a > b$ fixat. Mulțimea $\mathbf{E} \setminus K_a$ este deschisă, deci teorema 3.1.6 implică

$$-\Lambda(\mathbf{E} \setminus K_a) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log P(\bar{X}_n \in (\mathbf{E} \setminus K_a)),$$

deci, din definiția lui K_a rezultă $-\Lambda(\mathbf{E} \setminus K_a) \leq -a$. În particular avem $\lambda(x) \geq a$ pentru $x \notin K_a$, deci $\{x \in \mathbf{E}; \lambda(x) \leq b\} \subset K_a$ și apoi folosim faptul că λ este inferior semicontinuu. Observați că $\{x \in \mathbf{E}; \lambda(x) \leq b\}$ este și convexă (deoarece λ este convexă). \square

Observație Demonstrația lemei 3.1.9 funcționează în ipoteza \mathbf{E} =spatiu vectorial topologic.

PROPOZITIA 3.1.10 Fie \mathbf{E} dualul unui spatiu Banach \mathbf{F} și μ probabilitate pe $\mathcal{B}(\mathbf{E})$ astfel ca

$$\int_{\mathbf{E}} e^{s\|x\|} d\mu(x) \text{ este finită pentru } s \text{ într-o vecinătate a lui } 0.$$

Atunci, dacă Λ este transformata Cramer a lui μ , pentru orice $A \in \mathcal{B}(\mathbf{E})$ avem

$$\begin{aligned} -\Lambda \left(\overset{\circ}{A} \right) &\leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log P \left(\overline{X}_n \in A \right) \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log P \left(\overline{X}_n \in A \right) \leq -\Lambda \left(\overline{A} \right), \end{aligned} \quad (3.15)$$

unde $\overset{\circ}{A}$, \overline{A} sunt în raport cu topologia slabă $\sigma(\mathbf{E}, \mathbf{F})$ pe \mathbf{E} . În plus, mulțimile $\{x \in \mathbf{E}; \lambda(x) \leq b\}$ sunt compacte (slabe) pentru orice $b > 0$.

Demonstrație Formulele (3.15) vor rezulta din teorema 3.1.6 după construcția compactilor K_a din lema 3.1.9 Fie B_a bila închisă de rază a din \mathbf{E} , care este slab compactă. Din formulele (3.5) obținem

$$\begin{aligned} P \left(\overline{X}_n \in B_a \right) &= P \left(\|X_n\| > a \right) \\ &\leq P \left\{ \frac{1}{n} \left(\|X_n\| + \dots + \|X_n\| \right) > a \right\} \leq e^{-n\alpha(a)}, \end{aligned}$$

unde α este transformarea Cramer a lui $\nu =$ legea lui $\|X_n\|$.

Prin ipoteza $\hat{\nu}$ este finită într-o vecinătate a lui 0, deci $\lim_{a \rightarrow +\infty} \alpha(a) = +\infty$. Rămâne să aplicăm lema 3.1.9 \square

COROLAR 3.1.11 Fie $\mathbf{E} = \mathbf{R}^d$ și μ probabilitate pe $\mathcal{B}(\mathbf{E})$ astfel ca $\hat{\mu}(t)$ să fie finită pentru orice t într-o vecinătate a lui 0. Atunci, pentru orice $A \in \mathcal{B}(\mathbf{E})$ avem

$$\begin{aligned} -\Lambda \left(\overset{\circ}{A} \right) &\leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log P \left(\overline{X}_n \in A \right) \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log P \left(\overline{X}_n \in A \right) \leq -\Lambda \left(\overline{A} \right). \end{aligned}$$

In plus, $\lambda(x) \rightarrow +\infty$ când $x \rightarrow \infty$ in \mathbf{R}^d .

Observații 1. Dacă $\mathbf{E} = \mathbf{F}'$, atunci $\mathcal{B}(\mathbf{E})$ este același pentru orice topologie între topologia normei și cea slabă. În particular, transformarea Cramer λ și funcționala Cramer Λ sunt aceleași pentru topologiile normei și slabă. Să reamintim că dualul lui \mathbf{E} cu topologia slabă este \mathbf{F} ; în particular spațiul $C[0, 1]$ nu este dual de spațiu Banach.

2. Interiorul unei mulțimi $B \in \mathcal{B}(\mathbf{E})$ este mai mare în topologia tare decât în cea slabă, în timp ce aderența ei este mai mică. Deci, valorile $-\Lambda(\overset{\circ}{B})$ și $-\Lambda(\bar{B})$ se îmbunătățesc când trecem de la topologia slabă la cea a normei. Propoziția 3.1.10 nu permite utilizarea acestor valori decât pentru topologia slabă, cel puțin în ce-l privește pe $-\Lambda(\bar{B})$. În continuare vom întări ipotezele, pentru a putea utiliza topologia tare.

Fie Γ spațiu topologic polonez; în acest curs vom considera $\Gamma = \mathbf{R}^d$ ($d \geq 1$) sau $\Gamma = \mathbf{E}$ (spațiu Banach separabil). Fie $\mathcal{M}(\Gamma)$ spațiul măsurilor mărginite pe $\mathcal{B}(\Gamma)$ și $\mathcal{M}_1(\Gamma)$ submulțimea convexă și închisă a probabilităților pe $\mathcal{B}(\Gamma)$. Spațiul $\mathcal{M}(\Gamma)$ îl considerăm înzestrat cu topologia convergenței slabe: $\mu_n \Rightarrow \mu$ dacă $\int f d\mu_n \rightarrow \int f d\mu$ pentru orice $f \in C_b(\Gamma)$. O parte $\mathcal{C} \subset \mathcal{M}(\Gamma)$ este relativ compactă dacă, pentru orice $\epsilon > 0$, există K_ϵ compact în Γ astfel ca $\mu^\pm(\Gamma \setminus K_\epsilon) \leq \epsilon$, pentru orice $\mu = \mu^+ - \mu^- \in \mathcal{C}$.

Fie $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbf{E})$ cu $\int_{\mathbf{E}} \|x\| d\mu(x) < +\infty$. Atunci există și este unic un element notat $b(\mu) \in \mathbf{E}$ astfel ca

$$\langle t, b(\mu) \rangle = \int_{\mathbf{E}} \langle t, x \rangle d\mu(x) \text{ pentru orice } t \in \mathbf{E}',$$

numit *baricentrul* lui μ . Au loc următoarele proprietăți:

1. Dacă $\mu(C) = 1$ atunci $b(\mu) \in C$, unde C este convex închis din \mathbf{E} .

2. Fie $\mu_n \in \mathcal{M}_1(\mathbf{E})$ convergent către $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbf{E})$. Dacă B este o bilă închisă din \mathbf{E} astfel ca $\mu_n(B) = 1$ pentru orice n , atunci $b(\mu_n) \rightarrow b(\mu)$ când $n \rightarrow +\infty$.

LEMA 3.1.12 Fie $f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ funcție continuă cu $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(t)}{t} = +\infty$. Atunci mulțimea

$$\mathcal{F}(f, a) := \left\{ \mu \in \mathcal{M}_1(\mathbf{E}) ; \int_{\mathbf{E}} f(\|x\|) d\mu(x) \leq a \right\}$$

este închisă în $\mathcal{M}(\mathbf{E})$. Aplicația $\mu \rightarrow b(\mu)$ este bine-definită și continuă pe $\mathcal{F}(f, a)$.

Demonstrație. Lema lui Fatou arată că $\mathcal{F}(f, a)$ este închisă. Pe de altă parte, pentru $\mu \in \mathcal{F}(f, a)$ și $r > 0$, avem

$$\begin{aligned} \left\| \int_{\|x\| \geq r} x d\mu(x) \right\| &\leq \int_{\|x\| \geq r} \|x\| d\mu(x) \\ &\leq \epsilon(r) \int_{\|x\| \geq r} f(\|x\|) d\mu(x) \leq a\epsilon(r), \end{aligned}$$

unde $\epsilon(r) = \sup_{\|x\| \geq r} [\|x\| / f(\|x\|)]$; observăm că $\lim_{r \rightarrow +\infty} \epsilon(r) = 0$ și aplicăm proprietatea 2 de mai sus a baricentrelor pentru a obține continuitatea aplicației $\mu \rightarrow b(\mu)$ pe $\mathcal{F}(f, a)$. \square

LEMA 3.1.13 Fie Γ spațiu topologic polonez și X_n șir de variabile aleatoare independente cu valori în Γ , cu aceeași lege μ . Să considerăm legea empirică a eșantionului X_1, \dots, X_n i.e. variabila aleatoare $Z_n = \frac{1}{n}(\delta_{X_1} + \dots + \delta_{X_n})$ cu valori în $\mathcal{M}_1(\Gamma)$. Atunci, pentru orice $a > 0$, există un compact \mathcal{K}_a în $\mathcal{M}_1(\Gamma)$ și un număr natural $N(a)$, astfel ca

$$P(Z_n \notin \mathcal{K}_a) \leq e^{-na}.$$

Demonstrație. Fie b_p, ϵ_p șiruri de numere pozitive care converg către 0. Pentru fiecare p alegem un compact K_p în Γ astfel ca $\mu(\Gamma \setminus K_p) \leq b_p$. Notăm

$$\mathcal{F}_p = \{ \nu \in \mathcal{M}_1(\Gamma) \text{ cu } \nu(\Gamma \setminus K_p) \leq b_p \}.$$

Să arătăm că

$$P(Z_n \notin \mathcal{F}_p) \leq \left(\frac{b_p}{\epsilon_p}\right)^{1/2n\epsilon_p} \text{ pentru orice } n, p. \quad (3.16)$$

Dacă acest lucru este arătat atunci, cu notația $\mathcal{K} := \bigcap_{p \geq 1} \mathcal{F}_p$ (care este compact în $\mathcal{M}_1(\Gamma)$) și cu formula (3.16), obținem

$$P(Z_n \notin \mathcal{K}) \leq \sum_{p \geq 1} P(Z_n \notin \mathcal{F}_p) \leq \sum_{p \geq 1} \left(\frac{b_p}{\epsilon_p}\right)^{1/2n\epsilon_p}.$$

Este suficient apoi de considerat $b_p = \epsilon_p u^{2p/\epsilon_p}$ cu $0 < u < 1/2$ pentru a obține

$$P(Z_n \notin \mathcal{K}) \leq \sum_{p \geq 1} u^{np} \leq 2u^n$$

și lema este demonstrată. Rămâne de arătat formula (3.16). Suprimăm indicele p pentru ușurința calculelor. Are loc

$$\begin{aligned} & P(Z_n \notin \mathcal{F}) \\ &= P\left\{\frac{1}{n}[\mathbf{1}_{K^c}(X_1) + \dots + \mathbf{1}_{K^c}(X_n)] > \epsilon\right\} \\ &= P(\bar{U}_n > \epsilon), \end{aligned}$$

unde $U_i = \mathbf{1}_{K^c}(X_i)$ este variabila aleatoare cu legea binomială $\alpha\delta_1 + (1 - \alpha)\delta_0$, cu $\alpha = \mu(K^c)$ și a cărei transformare Cramer o notăm cu λ . După formulele (3.5) avem

$$P(Z_n \notin \mathcal{F}) \leq e^{-n\lambda(\epsilon)}. \quad (3.17)$$

Dar, pentru $\epsilon \in (0, 1)$ avem

$$\lambda(\epsilon) = \epsilon \log \frac{\epsilon}{\alpha} + (1 - \epsilon) \log \frac{1 - \epsilon}{1 - \alpha}$$

și luăm $b_p < \epsilon_p$ (deci $\alpha \leq b_p < \epsilon_p$) și $\epsilon_p \leq \frac{1}{2}$ pentru a obține $\lambda(\epsilon_p) \geq \epsilon_p \log \frac{\epsilon_p}{b_p} + \frac{1}{2} \log \frac{1}{2}$. Impunem condiția $\frac{1}{2}\epsilon_p \log \frac{\epsilon_p}{b_p} \geq \frac{1}{2} \log \frac{1}{2}$ pentru a obține

$$\lambda(\epsilon_p) \geq \frac{1}{2}\epsilon_p \log \frac{\epsilon_p}{b_p},$$

ceea ce, împreună cu (23.17), demonstrează (3.16). \square

TEOREMA 3.1.14 Fie \mathbf{E} spațiu Banach real, separabil și μ probabilitate pe \mathbf{E} astfel ca

$$\int_{\mathbf{E}} e^{s\|x\|} d\mu(x) \text{ este finită pentru orice } s \in \mathbf{R}.$$

Atunci, pentru orice $A \in \mathcal{B}(\mathbf{E})$ avem

$$\begin{aligned} -\Lambda \left(\overset{\circ}{A} \right) &\leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log P \left(\bar{X}_n \in A \right) \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log P \left(\bar{X}_n \in A \right) \leq -\Lambda \left(\bar{A} \right), \end{aligned}$$

unde Λ este funcționala Cramer asociată lui μ . In plus, mulțimile $\{x \in \mathbf{E}; \lambda(x) \leq b\}$ sunt compacte pentru orice $b > 0$ finit.

Demonstrație. Fie ν legea comună a variabilelor $\|X_n\|$ și să notăm $m = \int_{\mathbf{R}} x d\nu(x)$. Vom arăta existența unei funcții f continuă și convexă pe $[0, +\infty)$ astfel ca

$$f(x) = 0 \text{ pentru } 0 \leq x \leq m$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \quad (3.18)$$

$$\int_0^{+\infty} e^{sf(x)} d\nu(x) \text{ este finită pentru } s < 1.$$

Cum $\hat{\nu}$ este finită pe \mathbf{R} (din ipoteză), putem lua $f(x) = \lambda_{\nu}(x)$ pentru $x \in [m, +\infty)$, unde λ_{ν} este transformarea Cramer a lui ν și $f(x) = 0$ pentru $x \in [0, m]$. Cu notațiile din lemele 3.1.12 și 3.1.13, avem

$$\begin{aligned} P(Z_n \notin \mathcal{F}(f, a)) &= P \left\{ \frac{1}{n} [f(\|X_1\|) + \dots + f(\|X_n\|)] > a \right\} \\ &\leq e^{-n\lambda_{\theta}(a)}, \end{aligned}$$

unde prin λ_{θ} am notat transformarea Cramer asociată lui θ , legea lui $f(\|X_1\|)$. Conform formulelor (3.18), $\hat{\theta}(s)$ este finită în

vecinătatea lui 0, deci $\lambda_\theta(a)$ converge către $+\infty$ când $a \rightarrow +\infty$. Deci, pentru orice $A > 0$ există a_A astfel ca

$$P(Z_n \notin \mathcal{F}(f, a)) \leq e^{-nA}.$$

Fie acum $\mathcal{L}_A := \mathcal{K}_A \cap \mathcal{F}(f, a)$, unde \mathcal{K}_A este compactul din lema 3.1.13. Conform acestei leme și a ultimei formule, obținem

$$P(Z_n \notin \mathcal{L}_A) \leq 2e^{-nA} \text{ pentru } n \geq N(A).$$

În plus, conform lemei 3.1.12, \mathcal{L}_A este compact în $\mathcal{M}_1(\mathbf{E})$, pe care aplicația $\pi \rightarrow b(\pi)$ este bine-definită și continuă. Deci imaginea $L_A = b(\mathcal{L}_A)$ este compactă în \mathbf{E} și

$$P(X_n \notin L_A) = P(b(Z_n) \notin b(\mathcal{L}_A)) \leq P(Z_n \notin \mathcal{L}_A) \leq 2e^{-nA}$$

pentru $n \geq N(A)$. Rămân de aplicat lema 3.1.9 și teorema 3.1.6□

Exemplu Fie repartițiile $\mu_\epsilon(dx) = (2\pi/\epsilon)^{-1/2} \exp(-x^2/2\epsilon) dx$. Arătați că

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \log \mu_\epsilon(A) = - \operatorname{ess\,inf}_{x \in A} x^2/2$$

pentru orice boreliană reală A .

Observații 1. În ipotezele corolarului 3.1.11, se observă că relația $\Lambda \left(\overset{\circ}{A} \right) = \Lambda \left(\bar{A} \right)$ (care implică $\Lambda \left(\overset{\circ}{A} \right) = \Lambda \left(\bar{A} \right) = \Lambda(A)$) este suficientă pentru existența lui $l(A)$ precum și a relației $l(A) = -\Lambda(A)$. Reciproca este falsă: fie $\mathbf{E} = \mathbf{R}$, $\mu = \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_1$ și $A = (0, +\infty)$. Atunci avem $l(A) = -\Lambda(A)$ deoarece A este deschis convex, în timp ce $\Lambda(A) = \Lambda \left(\overset{\circ}{A} \right) = +\infty$ iar $\Lambda \left(\bar{A} \right) = \lambda(1) = \log 2$.

2. Dacă $A \subset \mathbf{E}$ este mulțime deschisă și satisface

$$\Lambda(A) = \Lambda \left(\bar{A} \right), \quad (3.19)$$

în ipotezele propoziției 3.1.10, ale corolarului 3.1.11 sau ale teoremei 3.1.14 avem că

$$\text{există } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log P(\bar{X}_n \in A) \text{ și este egală cu } -\Lambda(A). \quad (3.20)$$

Dacă $\dim \mathbf{E} < \infty$, atunci $\lambda(\cdot)$ este continuă, deci relațiile (3.19) și (3.20) sunt satisfăcute.

3. În cazul $\mathbf{E} = \mathbf{R}^d$, relația (3.20) pentru orice $A \subset \mathbf{R}^d$ boreliană este fals; se poate construi o mulțime A închisă cu interior nevid, astfel ca $\Lambda(A) < +\infty$ și

$$P(\bar{X}_n \in A) = 0, \text{ pentru } n = 1, 2, \dots$$

4. Din propoziția 3.1.4 rezultă că relația (3.19) este satisfăcută pentru orice $A \subset \mathbf{E}$ deschisă și convexă; se poate arăta că (3.19) este satisfăcută pentru $\mathbf{E} \setminus \bar{A}$, unde $A \subset \mathbf{E}$ este deschisă și convexă.

3.2 CAZUL GAUSIAN

Fie \mathbf{E} spațiu Banach separabil. O probabilitate μ pe $\mathcal{B}(\mathbf{E})$ se numește **gaussiană** dacă, pentru orice funcțională liniară și continuă $t : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{R}$, legea $t(\mu)$ este gaussiană pe \mathbf{R} . Dacă în plus $t(\mu)$ este centrată pentru orice $t \in \mathbf{E}'$, spunem că μ este **centrată**.

TEOREMA 3.2.1 *Dacă μ este probabilitate gaussiană centrată pe \mathbf{E} , atunci $\int_{\mathbf{E}} e^{s\|x\|} d\mu(x)$ este finită pentru orice $s \in \mathbf{R}$. În particular, $\int_{\mathbf{E}} \|x\|^2 d\mu(x)$ este finită.*

Demonstrație. Putem presupune μ centrată. Fie x, x_1, \dots, x_n variabile aleatoare independente din \mathbf{E} , toate având legea μ . Să observăm că, pentru $n \geq 1$, legea lui $\frac{1}{n^{1/2}} \sum_{k=1}^n x_k$ în raport cu μ^n este aceeași cu legea lui x în raport cu μ . Vom arăta că este suficient ca $\int_{\mathbf{E}} e^{s\|x\|} d\mu(x)$ să fie finită pentru un singur $s \in \mathbf{R}$. Într-adevăr, dacă este așa, atunci

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbf{E}} e^{n^{1/2}s\|x\|} d\mu(x) \\ &= \int_{\mathbf{E}} \exp\left(n^{1/2} \frac{s}{n^{1/2}} \left\| \sum_{k=1}^n x_k \right\| \right) \mu^n(dx_1, \dots, dx_n) \\ &\leq \left(\int_{\mathbf{E}} e^{s\|x\|} d\mu(x) \right)^n. \end{aligned}$$

Acum să observăm că, dacă x, y sunt variabile aleatoare pe \mathbf{E} , independente și cu legea μ , atunci $\left(\frac{x+y}{2^{1/2}}, \frac{x-y}{2^{1/2}}\right)$ are aceeași lege sub μ^2 ca și (x, y) . Pentru $0 < s < t$, avem

$$\mu^2 \left((x, y) \in \mathbf{E}^2 : \|x\| \leq s, \|y\| \geq t \right),$$

$$\begin{aligned} &= \mu^2 \left((x, y) \in \mathbf{E}^2 : \|x - y\| \leq 2^{1/2}s, \|x + y\| \geq 2^{1/2}t \right) \\ &\leq \mu^2 \left((x, y) \in \mathbf{E}^2 : \left| \|x\| - \|y\| \right| \leq 2^{1/2}s, \|x\| + \|y\| \geq 2^{1/2}t \right) \\ &\leq \mu^2 \left((x, y) \in \mathbf{E}^2 : \|x\| \wedge \|y\| \geq \frac{t-s}{2^{1/2}} \right), \end{aligned}$$

deci

$$\begin{aligned} &\mu(x \in \mathbf{E} : \|x\| \leq s) \mu(x \in \mathbf{E} : \|x\| \geq t) \\ &\leq \left(\mu \left(x \in \mathbf{E} : \|x\| \geq \frac{t-s}{2^{1/2}} \right) \right)^2. \end{aligned}$$

Luăm $t_0 = s$ și $t_{n+1} = s + 2^{1/2}t_n$ pentru a obține

$$\begin{aligned} &\mu(x \in \mathbf{E} : \|x\| \geq t_{n+1}) / \mu(x \in \mathbf{E} : \|x\| \leq s) \\ &\leq (\mu(x \in \mathbf{E} : \|x\| \geq t_n) / \mu(x \in \mathbf{E} : \|x\| \leq s))^2. \end{aligned}$$

Deci

$$\begin{aligned} &\mu(x \in \mathbf{E} : \|x\| \geq t_n) \\ &\leq \mu(x \in \mathbf{E} : \|x\| \leq s) \times \exp \left[2^n \log \frac{\mu(x \in \mathbf{E} : \|x\| \geq s)}{\mu(x \in \mathbf{E} : \|x\| \leq s)} \right] \end{aligned}$$

pentru orice $0 < s < t$ și $n \geq 0$. În particular, alegem pe s astfel ca $\mu(x \in \mathbf{E} : \|x\| \geq s) / \mu(x \in \mathbf{E} : \|x\| \leq s) = \rho < 1$; obținem

$$\mu \left(x \in \mathbf{E} : \|x\| \geq \frac{2^{(n+1)/2} - 1}{2^{1/2} - 1} s \right) \leq e^{2^n \log \rho}. \square$$

Să notăm \mathbf{E}' dualul lui \mathbf{E} și $\langle t, x \rangle$ dualitatea dintre $t \in \mathbf{E}'$ și $x \in \mathbf{E}$. Pentru μ centrată, definim covariația lui μ prin $K : \mathbf{E}' \times \mathbf{E}' \rightarrow \mathbf{R}$,

$$K(s, t) = \int_{\mathbf{E}} \langle s, x \rangle \langle t, x \rangle d\mu(x); \quad s, t \in \mathbf{E}'.$$

Intrucât $|K(s, t)| \leq c^2 \|s\| \|t\|$ cu $c^2 = \int \|x\|^2 d\mu(x)$, observăm că aplicația K este biliniară și continuă pe $\mathbf{E}' \times \mathbf{E}'$ iar $K(s, t) \geq 0$ pentru $t \in \mathbf{E}'$.

Spațiul \mathbf{E}' se scufundă într-un spațiu Hilbert \mathbf{H} în felul următor. Fiecarei $t \in \mathbf{E}'$ îi asociem variabila aleatoare gaussiană reală Z^t definită pe câmpul de probabilitate $(\mathbf{E}, \mathcal{B}(\mathbf{E}), \mu)$ prin $Z^t(x) = \langle t, x \rangle$. Fie \mathbf{H} închiderea în $L^2(\mathbf{E}, \mathcal{B}(\mathbf{E}), \mu)$ a spațiului vectorial $\{Z^t, t \in \mathbf{E}'\}$. Aplicația $Z : \mathbf{E}' \rightarrow \mathbf{H}$ este liniară, continuă și de imagine densă. În plus, dacă notăm $[\cdot, \cdot]$ produsul scalar din $L^2(\mathbf{E}, \mathcal{B}(\mathbf{E}), \mu)$ (deci și din \mathbf{H}), avem

$$K(s, t) = [Z^s, Z^t] \text{ pentru orice } s, t \in \mathbf{E}' .$$

Să observăm că, dacă $v \in L^2(\mathbf{E}, \mathcal{B}(\mathbf{E}), \mu)$, atunci

$$\int_{\mathbf{E}} \|x\| |v(x)| d\mu(x) \leq c \|v\|_{L^2(\mathbf{E}, \mathcal{B}(\mathbf{E}), \mu)}$$

deci formula

$$Sv = \int_{\mathbf{E}} xv(x) d\mu(x)$$

definește un operator liniar și continuu $S : L^2(\mathbf{E}, \mathcal{B}(\mathbf{E}), \mu) \rightarrow \mathbf{E}$. Din construcție avem

$\int_{\mathbf{E}} Z^s(x)v(x) d\mu(x) = \int_{\mathbf{E}} \langle s, x \rangle v(x) d\mu(x) = \langle s, \int_{\mathbf{E}} xv(x) d\mu(x) \rangle$ și deci

$$[Z^t, v] = \langle t, Sv \rangle \text{ pentru } t \in \mathbf{E}', v \in L^2(\mathbf{E}, \mathcal{B}(\mathbf{E}), \mu),$$

ceea ce arată că restricția lui S la \mathbf{H} este injectivă.

În concluzie, dată fiind o probabilitate gaussiană μ pe spațiul Banach separabil \mathbf{E} , îi putem asocia un spațiu Hilbert separabil \mathbf{H} cu produsul scalar notat $[\cdot, \cdot]_{\mathbf{H}}$, o injecție liniară și continuă $S : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{E}$, o aplicație liniară și continuă (de imagine densă) $Z : \mathbf{E}' \rightarrow \mathbf{H}$ astfel ca

$$[Z^t, v]_{\mathbf{H}} = \langle t, Sv \rangle \text{ pentru } t \in \mathbf{E}', v \in \mathbf{H},$$

$$[Z^t, Z^s]_{\mathbf{H}} = K(t, s) \text{ pentru } t, s \in \mathbf{E}' .$$

PROPOZITIA 3.2.2 Fie μ probabilitate gaussiană centrată pe spațiul Banach separabil \mathbf{E} . Fie \mathbf{H} spațiu Hilbert și $S : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{E}$ injecția liniară și continuă asociate lui μ ca mai înainte. Atunci transformarea Cramer λ a lui μ este dată de

$$\lambda(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \|S^{-1}x\|_{\mathbf{H}}^2 & \text{dacă } x \in S(\mathbf{H}) \\ +\infty, & \text{dacă } x \in \mathbf{E} \setminus S(\mathbf{H}). \end{cases}$$

In plus, operatorul S este compact.

Demonstrație. Transformarea Laplace $\hat{\mu}(t)$ se scrie

$$\hat{\mu}(t) = \int_{\mathbf{E}} e^{\langle t, x \rangle} d\mu(x) = E[\exp(Z^t)],$$

deci $\log \hat{\mu}(t) = \frac{1}{2} [Z^t, Z^t]_{\mathbf{H}} = \frac{1}{2} K(t, t)$. Propoziția 3.1.8 arată că

$$\lambda(x) = \sup_{t \in \mathbf{E}'} \left[\langle t, x \rangle - \frac{1}{2} K(t, t) \right], \quad x \in \mathbf{E}, \text{ deci}$$

$$\lambda(x) = \sup_{t \in \mathbf{E}'} \left[\langle t, x \rangle - \frac{1}{2} \|Z^t\|^2 \right]. \quad (3.21)$$

Fie acum $x \in \mathbf{E}$ fixat astfel ca $\lambda(x) < +\infty$. Pentru $t \in \text{Ker } Z$ și orice $a \in \mathbf{R}$, conform formulei (3.21), avem $\lambda(x) \geq a \langle t, x \rangle$, ceea ce implică $\langle t, x \rangle = 0$. Aceasta înseamnă că există o aplicație liniară $g : \text{Im } Z \rightarrow \mathbf{R}$ astfel ca $g(Z^t) = \langle t, x \rangle$ pentru orice $t \in \mathbf{E}'$. Tot din formula (3.21) rezultă

$$|g(v)| \leq \lambda(x) + \frac{1}{2} \|v\|_{\mathbf{H}}^2 \text{ pentru } v \in \text{Im } Z,$$

deci g este marginită pe intersecția dintre $\text{Im } Z$ și bila unitate din \mathbf{H} . Cum $\text{Im } Z$ este densă în \mathbf{H} , aplicația g se prelungește (unic) la o funcțională liniară și continuă pe \mathbf{H} i.e. există $w \in \mathbf{H}$ astfel ca $g(v) = [v, w]_{\mathbf{H}}$ pentru orice $v \in \mathbf{H}$. În particular $\langle t, x \rangle = g(Z^t) = [Z^t, w]_{\mathbf{H}} = \langle t, Sw \rangle$ pentru orice $t \in \mathbf{E}'$, deci $x = Sw$ i.e. $x \in S(\mathbf{H})$.

Reciproc, fie $x \in S(\mathbf{H})$ și să scriem $x = Sw$ cu $w \in \mathbf{H}$. Conform formulei (3.21), avem

$$\lambda(x) = \sup_{t \in \mathbf{E}'} \left\{ [Z^t, w]_{\mathbf{H}} - \frac{1}{2} \|Z^t\|_{\mathbf{H}}^2 \right\}$$

și cum $\text{Im } Z$ este densă în \mathbf{H} , obținem

$$\lambda(x) = \sup_{v \in \mathbf{H}} \left\{ [v, w]_{\mathbf{H}} - \frac{1}{2} \|v\|_{\mathbf{H}}^2 \right\}.$$

Pentru $\|v\|_{\mathbf{H}} = a$ fixat, $\sup [v, w]_{\mathbf{H}}$ este atins și este egal cu $a \|w\|_{\mathbf{H}}$. Cum $\sup (a \|w\|_{\mathbf{H}} - \frac{1}{2} a^2)$ este egal cu $\frac{1}{2} \|w\|_{\mathbf{H}}^2$, obținem $\lambda(x) = \frac{1}{2} \|w\|_{\mathbf{H}}^2 = \frac{1}{2} \|S^{-1}x\|_{\mathbf{H}}^2$ și în particular $\lambda(x) < +\infty$.

Calculul lui λ arată că imaginea prin S a bilei unitate din \mathbf{H} este $\{x \in \mathbf{E} : \lambda(x) \leq 1\}$. Această mulțime este compactă (cf. teoremei 3.1.14), deci S este operator compact. \square

TEOREMA 3.2.3 *Fie μ probabilitate gaussiană centrată pe spațiul Banach separabil \mathbf{E} . Fie $X : \Omega \rightarrow \mathbf{E}$ variabilă aleatoare de lege μ . Fie Λ funcționala Cramer asociată lui μ . Atunci, pentru orice $A \in \mathcal{B}(\mathbf{E})$ avem*

$$\begin{aligned} -\Lambda \left(\overset{\circ}{A} \right) &\leq \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^2 \log P(\epsilon X \in A) \\ &\leq \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^2 \log P(\epsilon X \in A) \leq -\Lambda \left(\bar{A} \right). \end{aligned}$$

Demonstrație. Fie $\epsilon \in (0, 1)$ și notăm $n(\epsilon)$ partea întreagă a lui $1/\epsilon^2$. Putem scrie

$$\epsilon = \frac{b(\epsilon)}{n(\epsilon)^{1/2}}, \text{ cu } 1 - \epsilon^2 \leq b^2(\epsilon) \leq 1. \quad (3.22)$$

Fie $X_p : \Omega \rightarrow \mathbf{E}$ șir de variabile aleatoare independente, toate cu legea μ . Întrucât μ este gaussiană, media normalizată $p^{1/2} \bar{X}_p$ are aceeași lege ca și X pentru orice p . În consecință

$$\begin{aligned} P(\epsilon X \in A) &= P(\epsilon n(\epsilon)^{1/2} \bar{X}_{n(\epsilon)} \in A) \\ &= P\left(\bar{X}_{n(\epsilon)} \in \frac{1}{b(\epsilon)} A\right) \end{aligned} \quad (3.23)$$

Să notăm $F = \left\{x \in \mathbf{E} : x = ay, 1 \leq a \leq 2, y \in \bar{A}\right\}$. Din definiția lui Λ și remarcând că transformarea Cramer λ a lui μ satisface $\lambda(ax) = a^2 \lambda(x)$ pentru orice $a \in \mathbf{R}$, $x \in \mathbf{E}$, obținem

$$\Lambda(F) = \inf_{x \in F} \lambda(x) \quad (3.24)$$

$$= \inf_{y \in \bar{A}} \inf_{1 \leq a \leq 2} a^2 \lambda(y) = \inf_{y \in \bar{A}} \lambda(y) = \Lambda(\bar{A}).$$

Pe de altă parte, $\frac{1}{b(\epsilon)}A \subset F$ dacă ϵ este suficient de mic (F este închisă) și cum $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} n(\epsilon) = +\infty$, teorema 3.1.14 implică

$$\begin{aligned} & \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{n(\epsilon)} \log P \left(\bar{X}_{n(\epsilon)} \in \frac{1}{b(\epsilon)}A \right) \\ & \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log P (\bar{X}_n \in F) \leq -\Lambda(F), \end{aligned}$$

ceea ce, împreună cu formulele (3.22)-(3.24) dau a doua inegalitate din concluzia teoremei.

Fie $x \in \overset{\circ}{A}$. Există o vecinătate deschisă și convexă V a lui x astfel ca, pentru ϵ suficient de mic, să avem $V \subset \frac{1}{b(\epsilon)}A$. Conform aceleiași teoreme 3.1.14, avem

$$\begin{aligned} \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^2 \log P (\epsilon X \in A) & \geq \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{b^2(\epsilon)}{n(\epsilon)} \log P (\bar{X}_{n(\epsilon)} \in V) \\ & = -\Lambda(V) \geq -\lambda(x). \end{aligned}$$

Luăm sup in membrul drept din ultima inegalitate după $x \in \overset{\circ}{A}$ și obținem prima inegalitate din concluzia teoremei. \square

Sa considerăm acum \mathbf{E} spațiu Hilbert separabil și μ probabilitate gaussiană (centrată) pe $\mathcal{B}(\mathbf{E})$. Are loc $\mathbf{E} \simeq \mathbf{E}'$, iar covariația $K(s, t)$ asociată lui μ se scrie

$$K(s, t) = \langle s, Tt \rangle = \langle Ts, t \rangle \text{ pentru } s, t \in \mathbf{E},$$

unde $T : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}$ este operator liniar, continuu, autoadjunct, pozitiv și de urmă finită. Aceasta înseamnă ca există o bază ortonormală e_n a lui \mathbf{E} și numere pozitive r_n astfel ca $\sum_{n=1}^{+\infty} r_n < +\infty$ și

$$Tx = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle x, e_n \rangle r_n e_n \text{ pentru } x \in \mathbf{E}.$$

Vom nota $T^{1/2}$ rădăcina pătrată (unică) auto-adjunctă a lui T , definită prin

$$T^{1/2}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle x, e_n \rangle r_n^{1/2} e_n \text{ pentru } x \in \mathbf{E}$$

și \mathbf{H} închiderea lui $T^{1/2}(\mathbf{E})$. Atunci \mathbf{H} este ortogonalul lui $\text{Ker } T$ în \mathbf{E} , iar $\text{Ker } T$, \mathbf{H} sunt nucleul și aderența imaginii lui $T^{1/2}$. În particular, restricția lui $T^{1/2}$ la subspațiul închis \mathbf{H} este injectivă și $T^{1/2}(\mathbf{E}) = T^{1/2}(\mathbf{H})$.

PROPOZIȚIA 3.2.4 Fie μ probabilitate gaussiană (centrată) pe spațiul Hilbert separabil \mathbf{E} , $T : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}$ operatorul de covariație asociat lui μ ca mai înainte și \mathbf{H} ortogonalul lui $\text{Ker } T$ în \mathbf{E} . Notăm cu S restricția lui $T^{1/2}$ la \mathbf{H} , deci $S : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{E}$ este injectiv și aplică \mathbf{H} pe $T^{1/2}(\mathbf{E})$. Atunci transformarea Cramer λ a lui μ este dată de

$$\lambda(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \|S^{-1}x\|_{\mathbf{H}}^2 & \text{dacă } x \in T^{1/2}(\mathbf{E}) \\ +\infty, & \text{dacă } x \notin T^{1/2}(\mathbf{E}). \end{cases}$$

Demonstrație. Pentru orice $s \in \mathbf{E}' = \mathbf{E}$, notăm $Z^s = T^{1/2}s$. Intrucât operatorul $T^{1/2}$ lasă pe \mathbf{H} invariant și verifică $\overline{T^{1/2}(\mathbf{E})} = \mathbf{H}$, obținem că $Z : \mathbf{E}' \rightarrow \mathbf{H}$ este operator liniar, continuu, de imagine densă, în timp ce $S : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{E}$ este injectiv. Rămâne de aplicat propoziția 3.2.2, observând că $S(\mathbf{H}) = T^{1/2}(\mathbf{E})$. \square

Fie $X_t : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$, $t \in [0, 1]$ proces gaussian centrat cu traiectoriile continue a.s. Atunci covariația ρ i.e.

$$\rho(s, t) = \int_{\Omega} X_s(\omega) X_t(\omega) dP(\omega), \text{ pentru } s, t \in [0, 1],$$

este continuă în (s, t) . Reciproc, dacă ρ satisface condiția Hölder

$$|\rho(s, t) - \rho(s', t')| \leq ct. [|s - s'|^\alpha + |t - t'|^\alpha]$$

pentru $s, t, s', t' \in [0, 1]$, atunci procesul X_t admite o versiune cu traiectoriile continue a.s. Mai mult, deindată ce procesul X_t admite o versiune cu traiectoriile continue a.s., putem găsi o versiune a procesului cu traiectoriile continue peste tot. Obținem

astfel o aplicație măsurabilă $X : \Omega \rightarrow C[0, 1]$, unde $X(\omega)$ este funcția care lui $t \in [0, 1]$ îi asociază $X_t(\omega)$, iar $C[0, 1]$ este spațiul funcțiilor continue pe $[0, 1]$ inzestrat cu corpul borelienelor.

Fie μ imaginea probabilității P (dată pe Ω) prin aplicația X , i.e. legea procesului X_t . Atunci μ este probabilitate gaussiană centrată pe $(\mathbf{E}, \mathcal{B}(\mathbf{E}))$, unde $\mathbf{E} = C[0, 1]$ inzestrat cu structura sa uzuală de spațiu Banach.

Intr-adevar, \mathbf{E}' este spațiul măsurilor Radon mărginite pe $[0, 1]$; pentru orice $\pi \in \mathbf{E}'$, variabila aleatoare $Z^\pi : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{R}$ definită prin

$$Z^\pi(f) = \langle \pi, f \rangle = \int_{[0,1]} f(t) d\pi(t), \text{ pentru } f \in \mathbf{E}$$

are aceeași lege (atunci când \mathbf{E} este inzestrat cu probabilitatea μ) ca și variabila aleatoare $Y : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ definită prin

$$Y(\omega) = \int_{[0,1]} X_t(\omega) d\pi(t).$$

Deci imaginea măsurii μ prin orice funcțională liniară și continuă este gaussiană centrată, deci μ este gaussiană centrată.

Covariația K a lui μ este dată de

$$\begin{aligned} K(\pi, \eta) &= \text{Cov} \left[\int_{[0,1]} X_t d\pi(t), \int_{[0,1]} X_t d\eta(t) \right] \\ &= \iint_{[0,1] \times [0,1]} \rho(s, t) d\pi(s) d\eta(t). \end{aligned}$$

PROPOZITIA 3.2.5 Fie $X_t : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$, $t \in [0, 1]$ proces gaussian centrat cu traiectoriile continue a.s., de covariație $\rho(s, t)$, $s, t \in [0, 1]$. Să definim operatorul $R : L^2[0, 1] \rightarrow L^2[0, 1]$ prin $Rf(t) = \int_0^1 \rho(t, s) f(s) ds$. Atunci R ia valori în $C[0, 1]$, este auto-adjunct, pozitiv, compact și de urmă finită. Fie \mathbf{H} ortogonalul lui $\text{Ker } R$ în $L^2[0, 1]$ și S restricția la \mathbf{H} a operatorului $R^{1/2}$, deci $S : \mathbf{H} \rightarrow L^2[0, 1]$ este injectiv și aplică \mathbf{H} pe $R^{1/2}(L^2[0, 1])$.

Fie μ legea procesului X_t . Atunci transformarea Cramer λ a lui μ este dată (pentru $f \in C[0, 1]$) de :

$$\lambda(f) = \begin{cases} \frac{1}{2} \|S^{-1}f\|_{L^2[0,1]}^2 & \text{dacă } f \in R^{1/2}(L^2[0, 1]) \\ +\infty, & \text{dacă } f \notin R^{1/2}(L^2[0, 1]). \end{cases}$$

Demonstrația se va baza pe lema următoare.

LEMA 3.2.6 Fie C, L spații Banach separabile și μ probabilitate gaussiană centrată pe C . Dacă există o injecție continuă $i : C \rightarrow L$, atunci transformările Cramer ale măsurilor μ și $i(\mu)$ sunt legate prin relația

$$\lambda_\mu = \lambda_{i(\mu)} \circ i.$$

Demonstrația lemei 3.2.6 Fie $i^* : L^* \rightarrow C^*$ aplicația duală a lui i . Din definiția covariației obținem

$$K_{i(\mu)}(s, t) = K_\mu(i^*(s), i^*(t)) \text{ pentru } s, t \in L^*.$$

Cum i este injectivă, $i^*(L^*)$ este densă în C^* și deci, pentru $x \in C$, avem

$$\begin{aligned} \lambda_\mu(x) &= \sup_{t \in C^*} \left[\langle t, x \rangle - \frac{1}{2} K_\mu(t, t) \right] \\ &= \sup_{s \in L^*} \left[\langle i^*(s), x \rangle - \frac{1}{2} K_\mu(i^*(s), i^*(s)) \right] \\ &= \sup_{s \in L^*} \left[\langle s, i(x) \rangle - \frac{1}{2} K_{i(\mu)}(s, s) \right] \end{aligned}$$

i.e. $\lambda_\mu(x) = \lambda_{i(\mu)}(i(x))$. \square

Demonstrația propoziției 3.2.5 Luăm $C := C[0, 1]$ și $L := L^2[0, 1]$; dacă i este injecția canonică, lema 3.2.6 arată că, pentru $f \in C[0, 1]$ avem $\lambda_\mu(f) = \lambda_{i(\mu)}(f)$ unde prin abuz de limbaj am identificat f și $i(f)$. Apoi, covariația lui $i(\mu)$ este dată de $K_{i(\mu)}(f, g) = \langle Rf, g \rangle_{L^2[0,1]}$, iar calculul lui $\lambda_{i(\mu)}$ pentru spațiul Hilbert L a fost făcut în propoziția 3.2.4 Folosim în final că λ este "restricția" lui $\lambda_{i(\mu)}$ la C . \square

3.3 APLICAȚII

**APLICAȚIE LA MIȘCAREA BROWNIANĂ,
MĂSURI ȘI PROCESE GAUSIENE**

PROPOZIȚIA 3.3.1 Fie $W_t : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$, $t \in [0, 1]$ mișcare browniană cu $W_0 = 0$ a.s. Fie μ legea traiectoriilor mișcării browniene W_t pe $C_0[0, 1]$, spațiul Banach al funcțiilor continue pe $[0, 1]$ și nule în 0. Atunci transformarea Cramer λ a lui μ este dată, pentru $f \in C_0[0, 1]$, prin

$$\lambda(f) = \frac{1}{2} \int_0^1 f'(t)^2 dt$$

dacă f este absolut continuă cu derivata (Lebesgue) f' , respectiv $\lambda(f) = +\infty$, dacă f nu este absolut continuă.

Demonstrație. Vom aplica propoziția 3.2.5 spațiului $C_0[0, 1]$ în loc de $C[0, 1]$, ceea ce nu modifică nimic. Avem $\rho(s, t) = s \wedge t$, iar operatorul $R : L^2[0, 1] \rightarrow L^2[0, 1]$ este dat de

$$Rg(t) = \int_0^1 (s \wedge t) g(s) ds = \int_0^t s g(s) ds + t \int_t^1 g(s) ds.$$

Este clar că, dacă f este continuă, nulă în 0 și $f = Rg$, atunci f admite derivată continuă $f'(t) = \int_t^1 g(s) ds$ nulă în 1 și admite derivată de ordinul doi $f'' = -g$ de pătrat integrabil. De aici rezultă că R este injectiv, că $R(L^2[0, 1])$ este mulțimea $f \in C_0[0, 1]$ de două ori derivabile, astfel ca $f'' \in L^2[0, 1]$ și $f'(1) = 0$. În fine, pentru $f \in R(L^2[0, 1])$, avem $R^{-1}f = -f''$.

Fie $f \in R(L^2[0, 1])$; din $f = -Rf''$, obținem

$$\begin{aligned} \|R^{-1/2}f\|_{L^2[0,1]}^2 &= \|R^{1/2}f''\|_{L^2[0,1]}^2 = \langle Rf'', f'' \rangle_{L^2[0,1]} \\ &= -\langle f, f'' \rangle_{L^2[0,1]} = \|f'\|_{L^2[0,1]}^2, \end{aligned}$$

in care ultima egalitate s-a obținut prin integrare prin părți, deoarece $f(0) = f'(1) = 0$. Conform propoziției 3.2.5 avem

$$\lambda(f) = \frac{1}{2} \| R^{-1/2} f \|_{L^2[0,1]}^2 = \frac{1}{2} \| f' \|_{L^2[0,1]}^2,$$

pentru $f \in R(L^2[0,1])$. Acest rezultat trebuie extins la $f \in R^{1/2}(L^2[0,1])$. Fie deci $f = R^{1/2}g$ cu $g \in L^2[0,1]$, $f \in C_0[0,1]$. Cum R este injectiv, și $R^{1/2}$ este injectiv, deci $R^{1/2}(L^2[0,1])$ este dens în $L^2[0,1]$. Există un șir $h_n \in L^2[0,1]$ astfel ca $R^{1/2}h_n = g_n$ converge către g în $L^2[0,1]$, ceea ce implică convergența lui $f_n = R^{1/2}g_n = Rh_n$ către f în $C_0[0,1]$. Cum $f_n \in R(L^2[0,1])$, avem

$$\| g_n \|_{L^2[0,1]} = \| R^{-1/2} f_n \|_{L^2[0,1]} = \| f'_n \|_{L^2[0,1]}$$

și cum g_n converge către g , se obține că f'_n este șir mărginit în $L^2[0,1]$. Putem deci extrage un subșir (notat tot f'_n) convergent slab către $k \in L^2[0,1]$. În consecință, $f_n(t) = \langle f'_n, 1_{[0,t]} \rangle_{L^2[0,1]}$ converge pentru orice $t \in [0,1]$ către

$$\bar{k}(t) = \langle k, 1_{[0,t]} \rangle_{L^2[0,1]} = \int_0^t k(s) ds.$$

Cum f_n converge către f în $C_0[0,1]$, rezultă că $f = \bar{k}$, deci există $k = f' \in L^2[0,1]$. În plus, cum f'_n converge slab către f' în $L^2[0,1]$, avem

$$\| f' \|_{L^2[0,1]} \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \| f'_n \|_{L^2[0,1]}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \| g_n \|_{L^2[0,1]} = \| g \|_{L^2[0,1]} = \| R^{-1/2} f \|_{L^2[0,1]}$$

adică, ținând cont de propoziția 3.2.5:

$$\frac{1}{2} \| f' \|_{L^2[0,1]}^2 \leq \lambda(f) \text{ pentru } f \in C_0[0,1] \cap R^{1/2}(L^2[0,1]).$$

În plus, am văzut că $f \in C_0[0,1] \cap R^{1/2}(L^2[0,1])$ implică existența lui f' și $f' \in L^2[0,1]$.

Reciproc, fie $f \in C_0[0,1]$ astfel că f' există și $f' \in L^2[0,1]$. Aproximăm f' în $L^2[0,1]$ cu funcții de clasă C^1 și obținem

existența unui șir $v_n \in C_0[0, 1]$ astfel că v'_n , v''_n există, $v''_n \in L^2[0, 1]$, $v'_n(1) = 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v'_n = f'$ în $L^2[0, 1]$ și $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = f$ în $C_0[0, 1]$. Semi-continuitatea inferioară a lui λ implică $\lambda(f) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \lambda(v_n)$. Pe de altă parte, întrucât $v_n \in R(L^2[0, 1])$, avem $\lambda(v_n) = \frac{1}{2} \|v'_n\|_{L^2[0,1]}$, deci

$$\lambda(f) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \|v'_n\|_{L^2[0,1]} = \frac{1}{2} \|f'\|_{L^2[0,1]}^2.$$

În particular $\lambda < +\infty$, ceea ce implică $f \in R^{1/2}(L^2[0, 1])$.

Am identificat deci $C_0[0, 1] \cap R^{1/2}(L^2[0, 1])$ cu mulțimea $f \in C_0[0, 1]$ astfel că f' există și $\in L^2[0, 1]$, am demonstrat că $\lambda(f) = \frac{1}{2} \|f'\|_{L^2[0,1]}^2$ pentru $f \in C_0[0, 1] \cap R^{1/2}(L^2[0, 1])$, în timp ce $\lambda = +\infty$ în afara acestui subspațiu. \square

Exerciții 1. Fie procesul Ornstein-Uhlenbeck real definit prin

$$V_t = \alpha e^{-\beta t} \int_0^t e^{\beta s} dW_s, \quad V_0 = 0,$$

sau ca soluția unică a ecuației stocastice Langevin

$$V_t = \alpha W_t - \beta \int_0^t V_s ds.$$

Folosind metoda din propoziția 3.3.1, arătați că transformarea Cramer a acestui proces este, pentru $f \in C_0[0, 1]$

$$\lambda(f) = \frac{1}{2\alpha^2} \int_0^1 [f'(t) + \beta f(t)]^2 dt$$

dacă f este absolut continuă cu derivata (Lebesgue) f' , respectiv $\lambda(f) = +\infty$, dacă f nu este absolut continuă.

2. Fie λ transformarea Cramer a legii traiectoriilor mișcării browniene și $f \in C_0[0, 1]$ cu $\lambda(f) < +\infty$. Arătați că

$$\begin{aligned} & \lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^2 \log P \left\{ \sup_{[0,1]} |\epsilon W - f| < \delta \right\} \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^2 \log P \left\{ \sup_{[0,1]} |\epsilon W - f| < \delta \right\} = -\lambda(f). \end{aligned}$$

3. În cazul unui proces gaussian X_t (vezi propoziția 3.2.5), pentru $f \in R^{1/2}(L^2[0, 1])$, arătați că

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{P \left\{ \sup_{[0,1]} |\epsilon X - f| < \delta \right\}}{P \left\{ \sup_{[0,1]} |\epsilon X| < \delta \right\}} = \exp \left\{ -\epsilon^{-2} \lambda(f) \right\}.$$

4. Arătați că afirmațiile de la 2 și 3 rămân adevărate în cazul unei variabile aleatoare cu valori într-un spațiu Banach (sau a unei probabilități cu valori într-un spațiu Banach). Mai precis, fie λ transformarea Cramer a unei variabile aleatoare $X : \Omega \rightarrow \mathbf{E}$, cu \mathbf{E} spațiu Banach separabil, cu legea gaussiană centrată. Atunci, pentru orice $S(\mathbf{H})$ (vezi notațiile din propoziția 3.2.2 și teorema 3.2.3), avem

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^2 \log P(\|\epsilon X - x\| < \delta) = -\lambda(x)$$

și

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{P(\|\epsilon X - x\| < \delta)}{P(\|\epsilon X\| < \delta)} = \exp \left\{ -\epsilon^{-2} \lambda(x) \right\}.$$

Indicație. Arătați că, în ipoteza

$\Phi(t) := \{\lambda(x) \leq t\}$ sunt mulțimi compacte pentru orice $t > 0$,

următoarele afirmații sunt echivalente.

a) Pentru orice $A \subset \mathbf{E}$ deschisă avem

$$\liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^2 \log P(\epsilon X \in A) \geq -\Lambda(A).$$

a') Pentru orice $\delta, \gamma > 0, x \in \mathbf{E}$, există $\epsilon_0 > 0$ astfel ca

$$P(\|\epsilon X - x\| < \delta) \geq \exp(-\epsilon^{-2}[\lambda(x) + \gamma]) \text{ pentru } \epsilon \leq \epsilon_0.$$

Similar, următoarele afirmații sunt echivalente.

b) Pentru orice $A \subset \mathbf{E}$ închisă avem

$$\limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^2 \log P(\epsilon X \in A) \leq -\Lambda(A).$$

b') Pentru orice $\delta, \gamma, s > 0$, există $\epsilon_0 > 0$ astfel ca

$$P(\|\epsilon X - \Phi(s)\| \geq \delta) \leq \exp(-\epsilon^{-2}(s - \gamma)) \text{ pentru } \epsilon \leq \epsilon_0.$$

LEMA 3.3.2 Fie E spațiu Banach separabil, λ transformarea Cramer a unei variabile aleatoare $X : \Omega \rightarrow E$ și $A \subset E$ astfel ca

$$\inf_{x \in \overset{\circ}{A}} \lambda(x) = \inf_{x \in \bar{A}} \lambda(x),$$

iar valoarea comună este atinsă într-un punct unic $x_0 \in E$. Atunci, pentru orice $\delta > 0$,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{P\{(\epsilon X \in A) \cap (\|x - x_0\| < \delta)\}}{P(\epsilon X \in A)} = 1 \quad (3.25)$$

Demonstrație. Să observăm că

$$\inf \left\{ \lambda(x), x \in \bar{A}, \|x - x_0\| < \delta \right\} > \lambda(x_0).$$

Apoi

$$\begin{aligned} & \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^2 \log P((\epsilon X \in A) \cap (\|x - x_0\| \geq \delta)) \\ & \leq \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^2 \log P\left(\left(\epsilon X \in \bar{A}\right) \cap (\|x - x_0\| \geq \delta)\right) \\ & < -\lambda(x_0). \end{aligned}$$

Aceasta înseamnă că $P((\epsilon X \in A) \cap (\|x - x_0\| \geq \delta))$ converge către 0 mai repede ca numitorul din (3.25). \square

Exemplu Fie procesul stocastic X_t^ϵ pe intervalul $[0, 1]$ care satisface ecuația liniară

$$P\left(\frac{d}{dt}\right) X_t^\epsilon \equiv \sum_{k=0}^n \frac{d^k X_t^\epsilon}{dt^k} = \epsilon \dot{W}_t,$$

împreună cu n condiții la frontieră, liniare, omogene și deterministe, unde W_t este o mișcare browniană. Avem

$$X_t^\epsilon = \epsilon \int_0^1 G(s, t) dW_s,$$

unde $G(s, t)$ este funcția Green a problemei la frontieră asociată operatorului $P(d/dt)$ și condițiilor la frontieră date. Transformarea Cramer asociată traiectoriilor procesului X_t^ϵ este $\lambda(f) =$

$+\infty$ dacă f nu satisface condițiile la frontieră sau dacă derivata $d^{n-1} f_t/dt^{n-1}$ nu este absolut continuă, respectiv

$$\lambda(f) = \frac{1}{2} \int_0^1 \left| P \left(\frac{d}{dt} \right) f \right|^2 dt$$

in caz contrar. Arătați că mulțimea $A = \{f \in L^2[0, 1] : \|f\| > c\}$ satisface ipotezele lemei 3.3.2 și deduceți că

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^2 \log P \{ \|X^\epsilon\| > c \} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^2 \log P \{ \|X^\epsilon\| \geq c \} \\ &= -\inf \left\{ \frac{1}{2} \left\| P \left(\frac{d}{dt} \right) f \right\|^2 \right\}, \end{aligned}$$

unde inf-ul se ia după toate funcțiile f care satisfac condițiile la frontieră și $\|f\| = c$. In cazul particular in care $P(d/dt)$ este autoadjunct in $L^2[0, 1]$, avem

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^2 \log P \{ \|X^\epsilon\| > c \} = -\frac{c^2}{2} \zeta^2,$$

unde ζ este valoarea proprie cea mai mica in valoare absolută a lui $P(d/dt)$.

Observație Vom vedea in capitolul următor un alt exemplu de aplicare al lemei 3.3.2 in cazul difuziilor (soluțiile ecuațiilor stocastice), la evaluarea asimptotică a probabilității ca difuzia să rămâna într-un domeniu și a primului timp de ieșire a difuziei dintr-un domeniu.

PROPOZITIA 3.3.3 *Fie μ probabilitate gaussiană centrată pe spațiul Banach separabil \mathbf{E} . Fie λ transformata ei Cramer și K covariația ei. Atunci numerele*

$$a = \inf \{ \lambda(x) : x \in \mathbf{E}, \|x\| = 1 \}$$

și

$$b = \sup \{ K(t, t) : t \in \mathbf{E}', \|t\| = 1 \}$$

sunt finite și avem

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{r^2} \log \mu \{x \in \mathbf{E}, \|x\| \geq r\} = -a = -\frac{1}{2b}.$$

Demonstrație. Fie $B = \{x \in \mathbf{E}, \|x\| \geq 1\}$. Relația $\lambda(\alpha x) = \alpha^2 \lambda(x)$ pentru $\alpha \in \mathbf{R}, x \in \mathbf{E}$ implică

$$\Lambda(B) = \inf_{x \in B} \lambda(x) = \inf_{\|y\|=1} \inf_{\alpha > 1} \alpha^2 \lambda(y) = a.$$

$$\Lambda\left(\overset{\circ}{B}\right) = \inf_{\|y\|=1} \inf_{\alpha > 1} \alpha^2 \lambda(y) = a.$$

Cum B este închisă, teorema 3.2.3 implică

$$\begin{aligned} & \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{r^2} \log \mu \{x \in \mathbf{E}, \|x\| \geq r\} \\ &= \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{r^2} \log P\left(\frac{1}{r}X \in B\right) = -a, \end{aligned}$$

unde $X : (\Omega, P) \rightarrow \mathbf{E}$ este variabilă aleatoare cu legea μ .

Rămân de comparat numerele a și $1/2b$. Pentru $x \in \mathbf{E}, t \in \mathbf{E}'$ și $s \geq 0$, avem $\lambda(x) \geq s \langle t, x \rangle - \frac{1}{2} s^2 K(t, t)$. Fie $x \in \mathbf{E}$ cu $\|x\| = 1$ fixat. Conform teoremei Hahn-Banach, există $t_0 \in \mathbf{E}'$ cu $\|t_0\| = 1$ astfel ca $\langle t_0, x \rangle = 1$. Obținem

$$\lambda(x) \geq \sup_{s \geq 0} \left[s - \frac{1}{2} s^2 K(t_0, t_0) \right] = \frac{1}{2K(t_0, t_0)} \geq \frac{1}{2b}$$

și de aici obținem $a \geq \frac{1}{2b}$. Fie acum $t \in \mathbf{E}'$ cu $\|t\| = 1$; avem $t^{-1}[1, +\infty) \subset B$. Fie $X_n : \Omega \rightarrow \mathbf{E}$ variabile aleatoare cu legea μ . Atunci

$$P\left(\overline{t(X_n)} \in [1, +\infty)\right) \leq P\left(\overline{X_n} \in B\right).$$

În această inegalitate aplicăm log, facem $n \rightarrow +\infty$ și, dacă notăm $\lambda_{t(\mu)}$ transformata Cramer a lui $t(\mu)$, obținem

$$-\frac{1}{2K(t, t)} = -\lambda_{t(\mu)}(1) = -\Lambda_{t(\mu)}[1, +\infty) \leq -\Lambda(B) = -a$$

și de aici rezultă $a \leq \frac{1}{2b}$.

Cum K este biliniară și continuă, rezultă că $b < +\infty$ și deci $a > 0$. Calculul lui λ arată că $a < +\infty$ și deci $b > 0$. \square

Vom vedea în cazul proceselor gaussiene situații în care atât λ cât și numerele a, b se pot determina explicit.

PROPOZIȚIA 3.3.4 Fie $X_t : \Omega \rightarrow \mathbf{R}, t \in [0, 1]$ proces gaussian centrat cu traiectoriile continue a.s., de covariație $\rho(s, t), s, t \in [0, 1]$. Dacă notăm $b = \sup_{t \in [0, 1]} \rho(t, t)$, atunci

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{r^2} \log P \left\{ \sup_{t \in [0, 1]} |X_t| \geq r \right\} = -\frac{1}{2b}.$$

Demonstrație. Conform propoziției 3.3.3, este suficient de verificat că

$$\sup \{K(\eta, \eta); \eta \in \mathbf{E}', \|\eta\| = 1\} = b.$$

Fie $\eta \in \mathbf{E}'$ cu $\|\eta\| = 1$. Putem scrie $\eta = \eta^+ - \eta^-$, $\tilde{\eta} = \eta^+ + \eta^-$ și $\|\tilde{\eta}\| = \|\eta\| = 1$, deci

$$\begin{aligned} K(\eta, \eta) &= \iint_{[0, 1] \times [0, 1]} \rho(s, t) d\eta(s) d\eta(t) \\ &\leq \iint_{[0, 1] \times [0, 1]} |\rho(s, t)| d\tilde{\eta}(s) d\tilde{\eta}(t). \end{aligned}$$

Funcția ρ este pozitiv definită, deci $\rho(s, t)^2 \leq \rho(s, s)\rho(t, t)$ și deci $\sup_{s, t \in [0, 1]} |\rho(s, t)| = b$, ceea ce arată că $K(\eta, \eta) \leq b$. Pe de altă parte, din compactitate, există $t \in [0, 1]$ astfel ca $\rho(t, t) = b$, ceea ce dă $K(\delta_t, \delta_t) = b$. \square

Remarcă Dacă procesul gaussian X_t are traiectoriile a.s. în $L^p[0, 1]$, cu $p \geq 1$, propoziția 3.3.3 arată că

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{r^2} \log P \left\{ \left(\int_0^1 |X_t|^p dt \right)^{1/p} \geq r \right\}$$

există, dar calculul acestei limite, plecând de la ρ , nu este posibilă "explicit" în general. \square

LEGEA STRASSEN A LOGARITMULUI ITERAT

Fie $W_t : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$, $t \in [0, 1]$ o mișcare browniană cu $W_0 = 0$ a.s. Fie μ legea traiectoriilor mișcării browniene W_t pe $C_0[0, 1]$, spațiul Banach al funcțiilor continue pe $[0, 1]$ și nule în 0. Reamintim că $tW_{1/t}$, $t \in [1, +\infty)$ este încă mișcare browniană, deci putem considera mișcarea browniană B_t definită pentru $t \in [0, +\infty)$.

Vom prezenta în continuare forma "funcțională" a legii logaritmului iterat pentru mișcarea browniană. Notăm prin $AC[0, 1]$ spațiul funcțiilor $g \in C[0, 1]$ cu proprietatea că, pentru orice $t \in [0, 1]$, derivata (Lebesgue) g' a lui g există și este de pătrat integrabil pe $[0, t]$, înzestrat cu topologia indusă de $C[0, 1]$.

TEOREMA 3.3.5 *Sirul de procese*

$$\left\{ (2n \log \log n)^{-1/2} W_{nt}, t \in [0, 1], n \geq 2 \right\},$$

(cu traiectoriile în $C_0[0, 1]$), este relativ compact în $C_0[0, 1]$ cu μ -probabilitate 1 și mulțimea punctelor sale limită este dată de

$$\mathcal{S} = \left\{ f \in AC[0, 1], f(0) = 0, \int_0^1 f'(x)^2 dx \leq 1 \right\}.$$

Această înseamnă că există $\Omega_0 \subset \Omega$ de probabilitate 0 cu proprietățile următoare.

1. Pentru orice $\omega \notin \Omega_0$ și orice șir de numere naturale $n_1 < n_2 < \dots$, există un subsir $n_{k_j} = n_{k_j}(\omega)$ și o funcție $f \in \mathcal{S}$ astfel ca

$$(2n_{k_j} \log \log n_{k_j})^{-1/2} W_{n_{k_j}, t}(\omega) \rightarrow f(t) \text{ uniform în } t \in [0, 1], \text{ și}$$

2. Pentru orice $f \in \mathcal{S}$ și $\omega \notin \Omega_0$, există un șir $n_k = n_k(\omega, f)$ astfel ca

$$(2n_k \log \log n_k)^{-1/2} W_{n_k, t}(\omega) \rightarrow f(t) \text{ uniform în } t \in [0, 1].$$

Conform propoziției 3.3.1, mulțimea limită \mathcal{S} coincide cu $\{f \in AC[0, 1], f(0) = 0, 2\lambda(f) \leq 1\}$.

COROLAR 3.3.6 Dacă $\Phi : C_0[0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ este funcțională liniară și continuă, atunci

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \Phi \left((2n \log \log n)^{-1/2} W_n \right) = \sup_{f \in \mathcal{S}} \Phi(f) \quad \mu - \text{a.s.}$$

In particular, pentru $\Phi(f) = f(1)$, obținem legea clasică a logaritmului iterat :

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \pm (2n \log \log n)^{-1/2} W_n = 1 \quad \mu - \text{a.s.}$$

Observație Folosind un rezultat al lui Skorohod, care afirmă că un șir de variabile aleatoare se poate obține redefinind o mișcare browniană, din teorema 3.3.5 se poate obține forma "funcțională" a legii Hartman-Wintner-Hincin a logaritmului iterat pentru variabile aleatoare identic repartizate. Mai precis, fie X'_1, X'_2, \dots independente, identic repartizate pe $(\Omega', \mathcal{K}', P')$, cu media 0 și dispersia 1. Atunci (Skorohod) există un câmp de probabilitate (Ω, \mathcal{K}, P) și pe el un șir de variabile aleatoare X_1, X_2, \dots independente, identic repartizate, cu media 0 și dispersia 1, și cu

$$\{X_n, n \geq 1\} = \{X'_n, n \geq 1\} \text{ in lege,}$$

precum și o mișcare browniană $\{W_t, t \geq 0\}$ pe (Ω, \mathcal{K}, P) astfel încât

$$\sup_{t \geq 0} |S_t - W_t| \rightarrow 0 \text{ in } P - \text{probabilitate,}$$

unde am notat $S_0 = 0$ și

$$S_t = \begin{cases} \sum_{k=1}^n X_k & \text{dacă } t \in \mathbf{N}^* \\ (1-t-[t])S_{[t]} + (t-[t])S_{[t]+1} & \text{in caz contrar.} \end{cases}$$

Atunci (Hartman-Wintner-Hincin) șirul de procese

$$\left\{ (2n \log \log n)^{-1/2} S_{nt}, t \in [0, 1], n \geq 2 \right\},$$

este relativ compact in $C_0[0, 1]$ cu P -probabilitate 1 și mulțimea punctelor sale limită este dată de \mathcal{S} . In particular, procedând ca in corolarul 3.3.6, obținem

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \pm (2n \log \log n)^{-1/2} \sum_{k=1}^n X_k = 1 \text{ } P - \text{ a.s.}$$

Cu notațiile de mai sus, fie μ_n legea lui $S_{nt}/n^{1/2}$. Arătați că $\mu_n \rightarrow \mu$ slab, unde μ este legea traiectoriilor mișcării browniene. (*Principiul de invariantă* al lui Donsker).

Pentru a face demonstrația teoremei 3.3.5, vom avea nevoie de

LEMA 3.3.7 Fie $K \subset C_0[0, 1]$ compact, $g \in C_0[0, 1]$ și $I \subset (1, +\infty)$, $1 \in \bar{I}$. Notăm $g_n(t) = g(nt)/(2 \log \log n)^{1/2}$ pentru $n \geq 2$, $t \in [0, 1]$. Pentru $i > 1$, notăm $i_n = [i^n]$. Dacă

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \|g_{i_n} - K\| = 0 \text{ pentru orice } i \in I,$$

atunci șirul $\{g_n, n \geq 2\}$ este relativ compact și orice subșir convergent al său converge către un element din K .

Demonstrație. Intrucât K este compact, există $M > 0$ și $\rho : (0, 1] \rightarrow (0, +\infty)$ nedescrescătoare cu $\lim_{t \searrow 0} \rho(t) = 0$ și

$$\sup_{f \in K} \|f\| \leq M, \quad \sup_{f \in K} |f(t) - f(s)| \leq \rho(t - s), \quad 0 \leq s < t \leq 1.$$

Dat fiind $\epsilon > 0$, să alegem $i \in I$ cu $\rho(1 - 1/i) < \epsilon$ și $(i - 1) \times (M + \epsilon) < \epsilon$. Apoi alegem un număr natural $L \geq 2$ astfel ca $\log \log ix / \log \log x \leq i$ pentru $x \geq L$. In fine, fie $n(i, \epsilon)$ cu $\|g_{i_n} - K\| < \epsilon$ pentru $n \geq n(i, \epsilon)$; notăm $n(\epsilon) = L \vee n(i, \epsilon)$. Pentru $n \geq n(\epsilon)$, să alegem m astfel ca $i^m \leq n \leq i^{m+1}$ și notăm $N = [i^{m+1}]$; cum $m \geq n(i, \epsilon)$, știm că $\|g_N - K\| < \epsilon$. Deci $\|g_n - K\| < \epsilon + \|g_n - g_N\|$. Observând că

$$\begin{aligned} g_n(t) &= g\left(\frac{n}{N}Nt\right) / (2 \log \log n)^{1/2} \\ &= g_N\left(\frac{n}{N}t\right) (2 \log \log N)^{1/2} / (2 \log \log n)^{1/2} \end{aligned}$$

obținem

$$\begin{aligned} \|g_n - g_N\| &= \sup_{0 \leq t \leq 1} \left| \frac{(2 \log \log N)^{1/2}}{(2 \log \log n)^{1/2}} g_N \left(\frac{n}{N} t \right) - g_N(t) \right| \\ &\leq \left| \frac{(2 \log \log N)^{1/2}}{(2 \log \log n)^{1/2}} - 1 \right| \|g_N\| + \sup_{0 \leq t \leq 1} \left| g_N \left(\frac{n}{N} t \right) - g_N(t) \right| \\ &\leq \left| \frac{(2 \log \log N)^{1/2}}{(2 \log \log n)^{1/2}} - 1 \right| (M + \epsilon) + 2\epsilon + \rho \left(1 - \frac{n}{N} \right). \end{aligned}$$

Cum $n \leq N \leq \lambda n$, avem

$$1 \leq \frac{(2 \log \log N)^{1/2}}{(2 \log \log n)^{1/2}} \leq \frac{(2 \log \log \lambda n)^{1/2}}{(2 \log \log n)^{1/2}} \leq \lambda,$$

deci

$$\left| \frac{(2 \log \log N)^{1/2}}{(2 \log \log n)^{1/2}} - 1 \right| (M + \epsilon) \leq (\lambda - 1)(M + \epsilon) \leq \epsilon.$$

În același timp avem $\rho(1 - n/N) \leq \rho(1 - 1/\lambda) < \epsilon$, deci

$\|g_n - K\| < 5\epsilon$ pentru $n \geq n(\epsilon)$. \square

Demonstrația teoremei 3.3.5 Fie $i > 1$ și $\delta > 0$ fixate ; notăm $i_n = [i^n]$, $\mathcal{S}^\delta = \{g \in C_0[0, 1], \|g - \mathcal{S}\| < \delta\}$, $\xi_n(t) = W_{nt}/(2 \log \log n)^{1/2}$ și alegem $1 < i < \inf_{g \in \mathcal{S}^\delta} 2\lambda(g)$. Din a doua inegalitate a teoremei 3.3.1 rezultă

$$\mu(\xi_{i_n}(\cdot) \notin \mathcal{S}^\delta) \leq \exp(-\gamma \log \log i_n) \leq \frac{1}{(n-1)^\gamma \log i}$$

pentru n suficient de mare. De aici obținem

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mu(\xi_{i_n}(\cdot) \notin \mathcal{S}^\delta) < +\infty, \text{ deci } \mu\left(\limsup_{n \rightarrow +\infty} \xi_{i_n}(\cdot) \notin \mathcal{S}^\delta\right) = 1.$$

Această egalitate este adevărată pentru orice $\delta > 0$ deci, pentru orice $i > 1$, există B_i cu $\mu(B_i) = 0$ și

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \|\xi_{i_n}(\cdot, \omega) - \mathcal{S}\| = 0 \text{ pentru } \omega \notin B_i.$$

Punem $B = \cup_{n \geq 1} B_{1+1/n}$; avem $\mu(B) = 0$ și pentru orice $\omega \notin B$ aplicăm lema 3.3.6 cu $I = \{1 + 1/n, n \geq 1\}$ pentru a obține că șirul $\{\xi_n, n \geq 2\}$ este relativ compact și orice subsir convergent al său converge către un element din \mathcal{S} .

Pentru reciprocă, să alegem o submulțime numărabilă densă în \mathcal{S} , formată din funcții f cu $2\lambda(f) < 1$ (luăm e.g. $f_n(t) = \int_0^t f_n(t) dt$; $n \geq 1, t \in [0, 1]$, unde $f_n \in L^2[0, 1]$ este densă în $\{f \in L^2[0, 1], \|f\|_{L^2[0,1]} < 1\}$). Este deci suficient de arătat că, pentru orice $f \in \mathcal{S}$ cu $2\lambda(f) < 1$, avem

$$\mu\left(\liminf_{n \rightarrow +\infty} \|\xi_n(\cdot) - f\| = 0\right) = 1.$$

Pentru $k \geq 2$, definim

$$f_k(t) = \begin{cases} 0, & \text{pentru } 0 \leq t \leq 1/k \\ f(t) - f(1/k), & \text{pentru } t \geq 1/k \end{cases}$$

și pentru $m \geq 1$

$$\eta_{m,k}(t) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } 0 \leq t \leq 1/k \\ (W_{k^m t} - W_{k^{m-1}}) / (2 \log \log k^m)^{1/2}, & \text{dacă } t \geq 1/k. \end{cases}$$

Să observăm că

$$\|\xi_{k^m} - f\| \leq \sup_{[0,1/k]} \|\xi_{k^m}\| + \sup_{[0,1/k]} \|f\| + \sup_{[1/k,1]} \|\xi_{k^m} - f\|$$

$$\leq 2 \left(\sup_{[0,1/k]} \|\xi_{k^m}\| + \sup_{[0,1/k]} \|f\| \right) + \|\eta_{m,k} - f_k\|.$$

Dacă $C := \{\omega : \xi_{i_n}(\cdot, \omega) \text{ este relativ compact}\}$, pentru $\delta > 0$ și $\omega \in C$, există $k(\omega) \geq 2$ cu

$$\|\xi_{k^m} - f\| \leq \delta + \|\eta_{m,k(\omega)} - f_k\| \text{ pentru } m \geq 1.$$

Cum $\mu(C) = 0$, este suficient de arătat că pentru $k \geq 2$,

$$\mu\left(\liminf_{m \rightarrow +\infty} \|\eta_{m,k} - f_k\| = 0\right) = 1.$$

Însă procesele $\{\eta_{m,k}, m \geq 1\}$ sunt independente în raport cu μ , deci vom arăta că

$$\sum_{m \geq 1} \mu(\|\eta_{m,k} - f_k\| < \epsilon) = +\infty.$$

Din prima inegalitate din teorema 3.3.1 obținem că există $m(k)$ cu proprietatea

$$\mu\left(\|\eta_{m,k} - \tilde{f}_k\| < \epsilon\right) \geq \exp(-\gamma \log \log k^m) = \frac{1}{(m \log k)^\gamma}$$

pentru $m \geq m(k)$, unde γ este strict subunitar, iar $\tilde{f}_k := f_k(t + 1/k)$ pentru care $\int_0^{1-1/k} \tilde{f}_k'(t)^2 dt \leq 2\lambda(f) < 1. \square$

LEGEA ERDÖS-RÉNYI A NUMERELOR MARI

TEOREMA 3.3.8 Fie $\{X_n, n \geq 1\}$ un șir de variabile aleatoare reale independente, identic repartizate, toate cu aceeași repartiție μ a cărei transformată Laplace $\hat{\mu}$ este finită într-o vecinătate a lui 0. Notăm prin λ transformata Cramer a lui μ , $S_0 = 0$, $S_n = X_1 + \dots + X_n$ și

$$\alpha(c) := \sup \left\{ x \in \mathbf{R} : \lambda(x) \leq \frac{1}{c} \right\}.$$

Atunci, pentru orice $c > 0$, avem

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \max_{0 \leq k \leq n - [c \log n]} \frac{S_{k+[c \log n]} - S_k}{[c \log n]} = \alpha(c) \text{ a.s.,}$$

unde $[x]$ înseamnă partea întreagă a lui $x \in \mathbf{R}$.

Demonstrație. Notăm $l_n = [c \log n]$ și $\alpha = \alpha(c)$. Să arătăm mai întâi că

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \max_{0 \leq k \leq n - l_n} \frac{S_{k+l_n} - S_k}{l_n} \leq \alpha \text{ a.s.}$$

Fie

$$A_n = A_n(c, \epsilon) := \left\{ \max_{0 \leq k \leq n-l_n} \frac{S_{k+l_n} - S_k}{l_n} \geq \alpha + \epsilon \right\}$$

$$\text{și } A_n^* = A_n^*(c, \epsilon) := \left\{ \max_{0 \leq k \leq n-l_n} \frac{S_{k+l_n} - S_k}{l_n + 1} \geq \alpha + \epsilon \right\}.$$

Din formulele (3.5) avem

$$P(A_n) \leq nP\left(\frac{S_{l_n}}{l_n} \geq \alpha + \epsilon\right) \leq n \exp(-l_n \lambda(\alpha + \epsilon));$$

din definiția lui α există un $\delta > 0$ astfel ca $\lambda(\alpha + \epsilon) \geq \frac{1+\delta}{c}$, deci

$$P(A_n) \leq n \exp\left(-\frac{1+\delta}{c} [c \log n]\right)$$

și dacă N este cel mai mic număr întreg astfel ca $N\delta > 1$, atunci $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_{nN}) < +\infty$. Similar demonstrăm că $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_{nN}^*) < +\infty$ și folosim faptul că $l_{(n+1)N} - l_{nN} \leq 1$ pentru n mare.

Să demonstrăm acum că

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \max_{0 \leq k \leq n-l_n} \frac{S_{k+l_n} - S_k}{l_n} \geq \alpha \text{ a.s.}$$

Fie

$$B_n = B_n(c, \epsilon) := \left\{ \max_{0 \leq k \leq n-l_n} \frac{S_{k+l_n} - S_k}{l_n} < \alpha - \epsilon \right\};$$

cum $\lambda(\alpha - \epsilon) < \frac{1}{c}$, pentru orice $\epsilon > 0$ și $c > 0$ există $\delta = \delta(c, \epsilon) > 0$ astfel că

$$\exp(-\lambda(\alpha - \epsilon)) - \delta \geq \exp\left(\frac{1-\delta}{c}\right).$$

Din formulele (3.4)-(3.5) obținem

$$P(B_n) \leq \prod_{d=1}^{[n/l_n]} P\left(\frac{S_{dl_n} - S_{(d-1)l_n}}{l_n} < \alpha - \epsilon\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \left\{ 1 - P \left(\frac{S_{l_n}}{l_n} \geq \alpha - \epsilon \right) \right\}^{[n/l_n]} \\
&\leq \left\{ 1 - (\exp(-\lambda(\alpha - \epsilon)) - \delta)^{l_n} \right\}^{[n/l_n]} \\
&\leq \left\{ 1 - \exp \left(-\frac{1 - \delta}{c} l_n \right) \right\}^{[n/l_n]} \\
&= O \left(\exp \left(-\frac{n^{\delta/2}}{\log n} \right) \right) \text{ pentru } n \text{ mare,}
\end{aligned}$$

deci seria $\sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) < +\infty$. \square

Observații. 1. Funcția $\alpha(c)$ din legea Erdős-Rényi determină în mod unic legea variabilelor aleatoare X_n (deoarece α determină λ , λ determină $\hat{\mu}$, iar $\hat{\mu}$ determină μ).

2. În cazul unui șir $\{X_n, n \geq 1\}$ de variabile aleatoare reale independente, identic repartizate cu $P(X_n = -1) = P(X_n = 1) = 1/2$, legea Erdős-Rényi arată că

$$\max_{0 \leq k \leq n - [c \log n]} (S_{k+[c \log n]} - S_k) \approx [c \log n] \text{ a.s.,}$$

pentru orice $c \in (0, 1)$, deoarece în acest caz $\alpha(c) = 1$.

3. Folosind rezultatul lui Skorohod (amintit la forma funcțională a legii logaritmului iterat), din legea Erdős-Rényi putem obține în cazul unei mișcări browniene $\{W_t, t \geq 0\}$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \max_{0 \leq t \leq n - c \log n} \frac{|W_{t+c \log n} - W_t|}{c \log n} = \sqrt{\frac{2}{c}} \text{ a.s.,}$$

pentru orice $c > 0$ (limita este tocmai $\alpha(c)$ în cazul $\mu = N(0, 1)$).

LEGEA TARE A NUMERELOR MARI IN SPATII BANACH

Pe câmpul de probabilitate (Ω, \mathcal{K}, P) vom considera un șir de variabile aleatoare $\{X_n, n \geq 1\}$ independente și identic repartizate, cu legea μ și cu valori în spațiul Banach separabil E . Să notăm $\bar{X}_n := \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$.

TEOREMA 3.3.9 Dacă $E(\|X_1\|) < +\infty$, atunci $\bar{X}_n \rightarrow E(\mu)$ a.s. (și în probabilitate).

Demonstrație. Să presupunem că $\|X_1\| \leq M$ (a.s. sau în probabilitate). Atunci $\int_{\mathbf{E}} e^{s\|x\|} d\mu(x) \leq e^{sM} < +\infty$ pentru orice $s \in \mathbf{R}$ și deci, din teorema 3.1.14 (și lema 3.1.13) există un compact $K \subset \mathbf{E}$ și o constantă $c > 0$, cu

$$P(\bar{X}_n \notin K) = \mu_n(K^c) \leq ce^{-n} \text{ pentru orice } n \geq 1,$$

unde μ_n este legea lui \bar{X}_n . Deci $P(\liminf_{n \rightarrow +\infty} \{\bar{X}_n \notin K\}) = 0$ i.e. șirul $\{\bar{X}_n(\omega), n \geq 1\}$ este relativ compact pentru $\omega \in \Omega_1$, cu $P(\Omega_1^c) = 0$. Din legea tare a numerelor mari (cazul real) avem

$$t(\bar{X}_n) \rightarrow t(E(\mu)) \text{ a.s., în probabilitate,}$$

pentru orice $t \in \mathbf{E}'$. Cum \mathbf{E} este separabil, \mathbf{E}' este w^* -separabil, deci $\bar{X}_n(\omega) \rightarrow E(\mu)$ slab, pentru $\omega \in \Omega_2$, cu $P(\Omega_2^c) = 0$. Aceasta înseamnă că $\bar{X}_n(\omega) \rightarrow E(\mu)$ tare, pentru $\omega \in \Omega_1 \cap \Omega_2$.

Pentru cazul general, notăm $X_n^{(M)} = \chi_{[0, M]}(\|X_n\|) X_n$ și fie $Y_n^{(M)} = X_n - X_n^{(M)}$ pentru $n \geq 1$, $M > 0$. Pentru $\epsilon > 0$ dat, să alegem $M > 0$ cu $E(\|Y_1^{(M)}\|) < \epsilon/4$. Din legea tare pentru șirul $\{\|Y_n^{(M)}\|, n \geq 1\}$, alegem N astfel ca

$$P\left(\sup_{n \geq N} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \|Y_k^{(M)}\| \geq \epsilon/3\right) < \epsilon/2$$

și

$$P\left(\sup_{n \geq N} \frac{1}{n} \|X_n^{(M)} - E(\mu^{(M)})\| \geq \epsilon/3\right) < \epsilon/2,$$

unde $\mu^{(M)}$ este legea lui $X_1^{(M)}$. Observând că $\|E(\mu) - E(\mu^{(M)})\| \leq E(\|Y_1^{(M)}\|)$, obținem

$$\begin{aligned} & P\left(\sup_{n \geq N} \|\bar{X}_n - E(\mu)\| \geq \epsilon\right) \\ & \leq P\left(\sup_{n \geq N} \|\bar{X}_n - X_n^{(M)}\| \geq \epsilon/3\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +P \left(\sup_{n \geq N} \| X_n^{(M)} - E(\mu^{(M)}) \| \geq \epsilon/3 \right) \\
& \leq P \left(\sup_{n \geq N} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \| Y_k^{(M)} \| \geq \epsilon/3 \right) + \epsilon/2 = \epsilon. \quad \square
\end{aligned}$$

APLICAȚIE ÎN STATISTICĂ

Vom formula și demonstra această aplicație în cazul real, deși rămâne adevărată în contextul unui spațiu topologic polonez. Să remarcăm importanța ei intrinsecă, deoarece se calculează explicit transformarea Cramer a legii empirice asociate unui eșantion dat.

Notăm $\mathcal{M}(\mathbf{R})$ (resp. $\mathcal{M}_1(\mathbf{R})$) spațiul măsurilor reale mărginite (resp. spațiul probabilităților pe dreaptă). Pentru $\mu, \nu \in \mathcal{M}_1(\mathbf{R})$, definim **informația Kullback** lui ν în raport cu μ prin

$I_\mu(\nu) = \int f(x) \log f(x) d\mu(x)$, dacă ν este absolut continuă în raport cu μ și $f(x) = \frac{d\nu}{d\mu}(x)$,

$I_\mu(\nu) = +\infty$, dacă ν nu este absolut continuă în raport cu μ .

Observăm că $I_\mu(\nu)$ este cu atât "mai mare" cu cât ν este mai îndepărtată de μ . În particular $I_\mu(\nu) = 0 \Leftrightarrow \nu = \mu$.

TEOREMA 3.3.10 Fie X_n șir de variabile aleatoare reale independente, cu aceeași lege μ . Să considerăm legea empirică a eșantionului X_1, \dots, X_n i.e. $Z_n := \frac{1}{n}(\delta_{X_1} + \dots + \delta_{X_n})$ cu valori în $\mathcal{M}_1(\mathbf{R})$. Atunci, pentru orice $A \in \mathcal{M}_1(\mathbf{R})$ avem

$$\begin{aligned}
-I_\mu \left(\overset{\circ}{A} \right) & \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log P(Z_n \in A) \\
& \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log P(Z_n \in A) \leq -I_\mu \left(\bar{A} \right),
\end{aligned}$$

unde $I_\mu(A) = \inf_{\nu \in A} I_\mu(\nu)$. Pentru orice reuniune A de deschise și convexe din $\mathcal{M}_1(\mathbf{R})$, avem

$$-I_\mu(A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log P(Z_n \in A).$$

In fine, transformarea Cramer λ a legii lui δ_{X_1} coincide cu I_μ pe $\mathcal{M}_1(\mathbf{R})$ și este egală cu $+\infty$ pe $\mathcal{M}(\mathbf{R}) \setminus \mathcal{M}_1(\mathbf{R})$. In plus, mulțimile $\{\lambda(x) \leq b\}$ sunt compacte, pentru orice $b > 0$.

Demonstrație. Din lema 3.1.13 există, pentru orice $a > 0$, un compact \mathcal{K}_a in $\mathcal{M}_1(\mathbf{R})$ astfel ca $P(Z_n \notin \mathcal{K}_a) \leq e^{-na}$. Lema 3.1.9 și teorema 3.1.6 furnizează concluzia, dacă arătam că transformarea Cramer λ a lui π ($:=$ legea lui δ_{X_1}) coincide cu I_μ pe $\mathcal{M}_1(\mathbf{R})$ și este egală cu $+\infty$ pe $\mathcal{M}(\mathbf{R}) \setminus \mathcal{M}_1(\mathbf{R})$. Ultima afirmație rezultă din faptul că $\mathcal{M}_1(\mathbf{R})$ conține anvelopa convexă închisă a suportului lui π . Pentru $\nu \in \mathcal{M}_1(\mathbf{R})$, conform cu propoziția 3.1.8, avem

$$\lambda(\nu) = \sup_{f \in C(\mathbf{R})} [\langle f, \nu \rangle - \log \hat{\pi}(f)].$$

Din construcție, pentru $f \in C(\mathbf{R})$, avem

$$\hat{\pi}(f) = \int_{\mathcal{M}_1(\mathbf{R})} \exp(\langle f, \tau \rangle) d\pi(\tau) = \int e^{f(x)} d\mu(x),$$

deci

$$\lambda(\nu) = \sup_{f \in C(\mathbf{R})} \left[\int f(x) d\nu(x) - \log \int e^{f(x)} d\mu(x) \right].$$

Să presupunem că $I_\mu(\nu) < +\infty$. Atunci $\nu \ll \mu$ și fie $g = \frac{d\nu}{d\mu}$. Pentru $f \in C(\mathbf{R})$, din inegalitatea Jensen, obținem

$$\exp \left[\int (f - \log g) \mathbf{1}_{(g>0)} g d\mu \right] \leq \int \exp(f - \log g) \mathbf{1}_{(g>0)} g d\mu,$$

deci

$$\int f g d\mu - \int g \log g d\mu \leq \log \int e^f d\mu$$

sau

$$\int f d\nu - \log \int e^f d\mu \leq \int g \log g d\mu = I_\mu(\nu).$$

Luăm sup in membrul stâng dupa $f \in C(\mathbf{R})$ și obținem $\lambda(\nu) \leq I_\mu(\nu)$. Reciproc, presupunem $\lambda(\nu) < +\infty$ deci, pentru orice $f \in C(\mathbf{R})$ avem

$$\int f d\nu - \log \int e^f d\mu \leq \lambda(\nu) < +\infty. \quad (3.26)$$

Formula (3.26) rămâne adevărată pentru orice f măsurabilă și marginită (cf. teoremei lui Luzin, restricția unei astfel de funcții la compactji de ν și μ -măsură ≈ 1 este continuă). Aplicăm (3.26) funcției $f = n\mathbf{1}_A$, cu $A \subset \mathbf{R}$, $\mu(A) = 0$ și obținem $n\nu(A) \leq \lambda(\nu)$ pentru orice n , deci $\nu(A) = 0$. Notăm $g = \frac{d\nu}{d\mu}$ și, dacă $\log g$ ar fi mărginită, formula (3.26) aplicată funcției $\log g$ ar implica

$$\int \log g d\nu - \log \int d\mu \leq \lambda(\nu)$$

i.e. $I_\mu(\nu) \leq \lambda(\nu)$. Dacă $\log g$ nu e mărginită, o aproximăm cu funcții măsurabile mărginite. \square

3.4 PERTURBAȚII ALEATOARE MICI

Fie $b : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ câmp (local) lipschitzian de vectori căruia îi asociem soluția maximală x_t a sistemului dinamic

$$\dot{x}_t = b(x_t), \quad (3.27)$$

Fie σ aplicație (local) lipschitziană de la \mathbf{R}^n în spațiul matricilor (n, n) . Pentru orice funcție continuă $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^n$, orice $\epsilon \geq 0$ și orice $x \in \mathbf{R}^n$, ecuația diferențială

$$\dot{x}_t^\epsilon = b(x_t^\epsilon) + \epsilon \sigma(x_t^\epsilon) f_t \quad (3.28)$$

admite o soluție maximală unică cu $x_0^\epsilon = x$. Dacă (a, b) este intervalul de definiție al acestei soluții maximele, atunci avem $0 < b \leq +\infty$, iar b nu poate fi finit decât dacă $\lim_{t \rightarrow b} \|x_t^\epsilon\| = +\infty$. Vom numi b *timpul de explozie* al soluției x_t^ϵ .

Să considerăm un proces gaussian $G_t : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$ cu traiectorii continue, $\epsilon > 0$ și sistemul

$$\begin{cases} \dot{X}_t^\epsilon = b(X_t^\epsilon) + \epsilon \sigma(X_t^\epsilon) G_t \\ X_0^\epsilon = x, \text{ cu } x \in \mathbf{R}^n \text{ dat,} \end{cases} \quad (3.29)$$

unde, pentru orice $\omega \in \Omega$, $X_t^\epsilon(\omega)$ este soluția maximală unică a lui (3.28) când înlocuim f_t cu $G_t(\omega)$ și punem $X_0^\epsilon(\omega) = x$. Continuitatea soluțiilor lui (3.28) (ca funcționale de f) implică

măsurabilitatea lui X_t^ϵ în raport cu corpul borelian generat de G_s , $0 \leq s \leq t$. Să observăm că, în general, X_t^ϵ nu este proces gaussian.

Problema pe care o studiem este de a preciza comportamentul traiectoriilor lui X_t^ϵ când $\epsilon \rightarrow 0$, mai precis să evaluăm probabilitatea ca traiectoria lui X_t^ϵ , $t \in [0, 1]$ să aparțină unei mulțimi A de traiectorii "aberante" din punctul de vedere al sistemului (3.27). Aceste probabilități vor converge către 0 odată cu ϵ , cu viteze de tipul $\exp(-C(A)\epsilon^2)$, iar problema este de a evalua $C(A)$.

Interpretarea euristică a acestei probleme este următoarea. "Creșterile" $\Delta X_t^\epsilon = X_{t+\Delta t}^\epsilon - X_t^\epsilon$ "verifică" $\Delta X_t^\epsilon = b(X_t^\epsilon) \Delta t + \epsilon \sigma(X_t^\epsilon) \Delta Z_t$. Cu alte cuvinte, creșterea deterministă $b(X_t^\epsilon) \Delta t$ anticipată de sistemul (3.27) este perturbată aici de variabila aleatoare $\epsilon \sigma(X_t^\epsilon) \Delta Z_t$ ("zgomotul") a cărei legi condiționate de trecut la timpul t este gaussiană centrată și cu matricea de covariație proporțională cu ϵ^2 .

Remarcă Dacă $b \equiv 0$, $k = n$, $x = 0$, $\sigma \equiv$ identitatea, atunci $X_t^\epsilon = \epsilon Z_t$, unde $Z_t = \int_0^t G_s ds$ este proces gaussian cu traiectorii continue iar aceasta situație a fost tratată în capitolul anterior.

Vom presupune că timpii de explozie ai soluțiilor lui (3.27)-(3.29) sunt infiniți. Aceasta se întâmplă e.g. dacă b și σ sunt cu creștere subliniară i.e. $\|\sigma(y)\| + \|b(y)\| \leq ct \cdot (1 + \|y\|)$. Totodată vom presupune că, pentru orice $x \in \mathbf{R}^n$, matricea $\sigma(x)$ este inversabilă.

Observație În aceste ipoteze putem justifica afirmația că (3.29) este "perturbație aleatoare mică" a lui (3.27). Mai precis, se arată ușor că, pentru orice $t \in [0, 1]$ și $\delta > 0$, avem

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} P \left\{ \sup_{0 \leq s \leq t} |X_s^\epsilon - x_s| > \delta \right\} = 0.$$

Vom nota $C[0, 1]$ spațiul funcțiilor continue $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^n$ și, pentru $x \in \mathbf{R}^n$, notăm $C_x[0, 1]$ subspațiul funcțiilor $f \in C[0, 1]$ cu $f(0) = x$, ambele inzestrate cu topologia convergenței uniforme. În particular, observăm că aplicația X^ϵ care asociază lui $\omega \in \Omega$ traiectoria (soluția lui (3.29)) $t \rightarrow X_t^\epsilon$, $t \in [0, 1]$, este măsurabilă de la Ω la $C_x[0, 1]$. Fie acum $x \in \mathbf{R}^n$ fixat. Pentru

orice $f \in C[0, 1]$, vom nota $F_x(f)$ restricția la $[0, 1]$ a soluției unice maximale g a ecuației diferențiale

$$\dot{g}_t = b(g_t) + \sigma(g_t) f_t \text{ cu } g_0 = x.$$

Din teoria ecuațiilor diferențiale ordinare, obținem că aplicația F_x de la $C[0, 1]$ la $C_x[0, 1]$ este continuă.

TEOREMA 3.4.1 *In ipotezele precedente, notăm $\lambda : C[0, 1] \rightarrow [0, +\infty]$ transformarea Cramer a legii traiectoriilor procesului G_t în $C[0, 1]$. Definim $\tilde{\lambda}(g) = +\infty$ dacă g nu este de clasă C^1 pe $[0, 1]$ și*

$$\tilde{\lambda}(g) = \lambda(f),$$

cu f dată de $f_t = \sigma(g_t)^{-1}(\dot{g}_t - b(g_t))$, $t \in [0, 1]$, $g_0 = x$. Dacă $\tilde{\Lambda}(A) = \inf_{g \in A} \tilde{\lambda}(g)$ pentru A boreliană în $C_x[0, 1]$, atunci

$$-\tilde{\Lambda}\left(\overset{\circ}{A}\right) \leq \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^2 \log P(X^\epsilon \in A)$$

$$\leq \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^2 \log P(X^\epsilon \in A) \leq -\tilde{\Lambda}\left(\bar{A}\right).$$

Demonstrație. Pentru $g \in C_x[0, 1]$ considerăm mulțimea (posibil vidă) $F_x^{-1}(g)$ a funcțiilor $f \in C[0, 1]$ astfel că g este pe $[0, 1]$ soluția maximală a ecuației diferențiale $\dot{g}_t = b(g_t) + \sigma(g_t) f_t$ cu $g_0 = x$. Atunci avem că $\lambda(g) = \inf\{\lambda(f) \mid f \in F_x^{-1}(g)\}$ pentru $g \in C_x[0, 1]$ și $\tilde{\Lambda}(A) = \Lambda \circ F_x^{-1}(A)$ pentru $A \subset C_x[0, 1]$.

Intrucât $P(X^\epsilon \in A) = P\{\epsilon G \in F_x^{-1}(A)\}$, teorema 3.2.3 arată că, atunci când $\epsilon \rightarrow 0$, \liminf și \limsup ale lui $\epsilon^2 \log P(X^\epsilon \in A)$ sunt în intervalul $\left[-\Lambda\left(\overset{\circ}{C}\right), -\Lambda\left(\bar{C}\right)\right]$, unde $C = F_x^{-1}(A)$. Continuitatea lui F_x implică $\bar{C} \subset F_x^{-1}\left(\bar{A}\right)$ și $\overset{\circ}{C} \supset F_x^{-1}\left(\overset{\circ}{A}\right)$, deci

$$\left[-\Lambda\left(\overset{\circ}{C}\right), -\Lambda\left(\bar{C}\right)\right] \subset \left[-\Lambda\left(F_x^{-1}\left(\overset{\circ}{A}\right)\right), -\Lambda\left(F_x^{-1}\left(\bar{A}\right)\right)\right].$$

Rămâne să aplicăm teorema 3.1.14, tinând cont că $\tilde{\lambda}$ este inferior semi-continuă și ca mulțimile $\left\{\tilde{\lambda}(g) \leq a\right\}$ sunt compacte pentru

orice $a \geq 0$ finit (deoarece λ este inferior semi-continuă și F_x este continuă). \square

Observație Ipotezele în care am lucrat se pot adapta ușor la situația în care procesul gaussian G_t are traiectoriile în L^2 (resp. continue) și înzestrând spațiul traiectoriilor lui X_t^ϵ cu norma $(\|\dot{g}\|_{L^2}^2 + \|g\|_{L^2}^2)^{1/2}$ (resp. $\|\dot{g}\|_\infty^2 + \|g\|_\infty^2$). \square

Situația tratată până acum se referă la un proces X_t^ϵ ale cărui traiectorii verifică "ecuația stocastică" $dX_t^\epsilon = b(X_t^\epsilon) dt + \epsilon \sigma(X_t^\epsilon) dZ_t$, unde Z_t este proces gaussian cu traiectoriile continue și *diferențiabile*.

Cazul ecuațiilor stocastice ar corespunde lui $Z_t = W_t$, unde W_t este mișcare browniană. Însă W_t nu este diferențiabilă, deci nu este posibil să considerăm X_t^ϵ ca funcțională continuă de " $\epsilon \dot{W}_t$ ", dar putem considera X_t^ϵ ca funcțională de $F_x(\epsilon W)$, unde W înseamnă traiectoria mișcării browniene în R^n . În general însă, regularitatea aplicației F_x se reduce în acest caz doar la măsurabilitate, deși rezultatul formal vom vedea că rămâne adevărat i.e. dacă notăm λ funcționala Cramer a mișcării browniene și $\tilde{\lambda}$ "funcționala Cramer" asociată ecuației stocastice $dX_t^\epsilon = b(X_t^\epsilon) dt + \epsilon \sigma(X_t^\epsilon) dW_t$, din propoziția 3.3.1 și teorema 3.4.1, avem

$$\tilde{\lambda}(g) = \lambda[F_x^{-1}(g)] = \frac{1}{2} \left\| \frac{d}{dt} F_x^{-1}(g) \right\|_{L^2}^2,$$

unde relația $f = F_x^{-1}(g)$ înseamnă $g_t = \int_0^t [b(g_s) + \sigma(g_s) \dot{f}_s] ds$, adică

$$\tilde{\lambda}(g) = \frac{1}{2} \int_0^1 \left\| \sigma(g_s)^{-1} [g_s - b(g_s)] \right\|^2 ds.$$

Să arătăm însă acest lucru riguros; punctul "tare" va fi în a arăta că, pentru ϵ mic, aplicația F_x "seamănă" cu o aplicație continuă.

Fie $D \subset R^n$ deschis, σ câmp de matrice (n, n) și o familie de

câmpuri de vectori b_ϵ , $\epsilon \geq 0$ ($b_0 =: b$) care satisfac condițiile

$$\begin{aligned} \sigma &\in C^1(D) \\ b_\epsilon &\text{ sunt local lipschitziene pe } D \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} b_\epsilon(x) &= b(x) \text{ uniform pe compactele lui } D. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Notam prin X_t^ϵ soluția ecuației diferențiale stocastice pe D

$$dX_t^\epsilon = b_\epsilon(X_t^\epsilon) dt + \epsilon \sigma(X_t^\epsilon) dW_t, \quad X_0^\epsilon = x \in D, \quad (3.31)$$

unde W_t este mișcare browniană de dimensiune n . Vom presupune că ecuația (3.31) are o soluție unică conservativă $X_t^\epsilon : \Omega \rightarrow D$, $t \in [0, 1]$ i.e. timpul de explozie al acestei soluții este infinit pe D și traiectoriile soluției sunt în $C_x(D)$, spațiul funcțiilor f continue pe D cu $f(0) = x$. Vom nota $X^\epsilon : \Omega \rightarrow C_x(D)$ variabila aleatoare care asociază lui $\omega \in \Omega$ traiectoria $t \rightarrow X_t^\epsilon(\omega)$.

Observație Sistemul (3.31) apare și el ca **perturbație aleatoare mică** a sistemului dinamic (3.27) în sensul că, pentru orice $t \in [0, 1]$ și $\delta > 0$, avem

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} P \left\{ \sup_{0 \leq s \leq t} |X_s^\epsilon - x_s| > \delta \right\} = 0;$$

în plus acest model este invariant la schimbările de coordonate i.e. dacă $\varphi : D \rightarrow D'$ (D' deschis din \mathbf{R}^n) este difeomorfism, atunci procesul $\varphi(X_t^\epsilon)$ verifică o ecuație de tip (3.31), cu coeficienți b'_ϵ, σ' care satisfac condițiile (3.30).

Vom nota $AC(D)$ spațiul funcțiilor $g \in C(D)$ cu proprietatea că, pentru orice $t \in [0, 1]$, derivata (Lebesgue) \dot{g} a lui g există și este de pătrat integrabil pe $[0, t]$, înzestrat cu topologia indusă de $C(D)$. Din teoria ecuațiilor diferențiale ordinare, avem

LEMA 3.4.2 Fie $x \in D$ și $f \in AC(D)$. Atunci ecuația diferențială

$$\dot{g}_t = b(g_t) + \sigma(g_t) f_t \quad (3.32)$$

admite o soluție unică $g \in AC(D)$ cu $g_0 = x$. Notăm această asociere $g = F_x(f)$. Aplicația $F : D \times AC(D) \rightarrow AC(D)$ nu este în general continuă, dar restricția ei la $D \times K_a$ este continuă pentru orice $a \geq 0$, unde $K_a := \left\{ f \in AC(D) \mid \int_0^1 |f_t|^2 dt \leq a \right\}$.

In plus, pentru orice compacti $K, L \subset D$ cu $K \subset \overset{\circ}{L}$ și orice $a > 0$, există $t, c > 0$ cu proprietățile

(i) pentru orice $v \in K, f \in K_a$, funcția $h = F_v(f)$ are timpul de explozie infinit și $h([0, t]) \subset L$.

(ii) pentru orice $v, w \in K, f \in K_a$ și $s \leq t$ avem

$$\sup_{[0, s]} |F_v(f) - F_w(f)| \leq e^{cs} |v - w|.$$

TEOREMA 3.4.3 Cu notațiile și in ipotezele precedente, să fixăm un compact $K \subset D$ și numerele reale $a > 0, t \in (0, 1]$. Atunci, pentru orice $R, \rho > 0$ există $\alpha, r, \epsilon_0 > 0$ cu proprietatea următoare. Pentru orice $x \in K, f \in AC(\mathbb{R}^n), g = F_x(f)$ care verifică $\int_0^t |f_t|^2 dt \leq a$ și $g([0, t]) \subset K$, relațiile $\epsilon \leq \epsilon_0$ și $|X_0^\epsilon - x| \leq r$ (P -a.s.) implică

$$P \left[\sup_{[0, t]} |\epsilon W - f| \leq \alpha, \sup_{[0, t]} |X^\epsilon - g| > \rho \right] \leq \exp(-R\epsilon^{-2}). \quad (3.33)$$

Observații Pentru $h \in C(D)$, să notăm

$$\Gamma_{0, t}(h, r) = \left\{ k \in C(D) \mid \sup_{[0, t]} |h - k| \leq r \right\}$$

banda închisă de axă h și rază r . Teorema 3.4.3 garantează că, pentru ϵ și α mici și dacă neglijăm un eveniment de probabilitate inferioară lui $\exp(-R\epsilon^{-2})$, prezența lui ϵW in banda $A = \Gamma_{0, t}(f, \alpha)$ implică prezența lui X^ϵ in banda de axă $g = F_x(f)$ și rază ρ , cu condiția ca X_0^ϵ să fie suficient de aproape de $g_0 = x$. Teorema 3.4.3 descrie deci o proprietate de "continuitate" a aplicației măsurabile care lui ϵW îi asociază X^ϵ când $x = X_0^\epsilon$ este fixat. Formal, propoziția 3.3.1 implică $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^2 \log P(\epsilon W \in A) = -\Lambda(A)$, unde $\Lambda(A) = \inf_{\varphi \in A} \lambda(\varphi)$ și $\lambda(\varphi) = \frac{1}{2} \int_0^t \|\dot{\varphi}_s\|^2 ds$, norma fiind euclidiană. Probabilitatea $P(\epsilon W \in A)$ se comportă deci ca și $\exp(-(ct.)\epsilon^{-2})$; dar, pentru R suficient de mare, probabilitățile in $\exp(-R\epsilon^{-2})$ sunt neglijabile in raport cu $P(\epsilon W \in A)$. Aceasta ajută la înțelegerea consecinței următoare.

COROLARUL 3.4.4 *In ipotezele și cu notațiile din teorema 3.4.3, să fixăm x , f și punem $g = F_x f$. Atunci, pentru orice $\rho > 0$ și $0 \leq t \leq 1$, există $\alpha_0 > 0$ astfel ca relația $\alpha \leq \alpha_0$ să implice*

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} P[X^\epsilon \in \Gamma_{0,t}(g, \rho) | \epsilon W \in \Gamma_{0,t}(f, \alpha)] = 1.$$

Mai precis, pentru orice $\rho, R > 0$ și $0 \leq t \leq 1$, există $\alpha_0 > 0$ și $\epsilon_0(\alpha) > 0$ cu proprietatea

$$P[X^\epsilon \in \Gamma_{0,t}(g, \rho) | \epsilon W \in \Gamma_{0,t}(f, \alpha)] \geq 1 - \exp\left(-\frac{R}{\epsilon^2}\right)$$

pentru $\alpha \leq \alpha_0$ și $\epsilon \leq \epsilon_0(\alpha)$.

Demonstrația corolarului 3.4.4 Vom nota simplu $\Gamma_{0,t}(g, \rho) = \Gamma_g$ și $\Gamma_{0,t}(f, \alpha) = \Gamma_f$. Fie $p = P[X^\epsilon \in \Gamma_g | \epsilon W \in \Gamma_f]$. Atunci

$$p = 1 - \frac{P[(\epsilon W \in \Gamma_f) \cap (X^\epsilon \notin \Gamma_g)]}{P(\epsilon W \in \Gamma_f)}. \quad (3.34)$$

Fie $a = \frac{1}{2} \int_0^t |f_t|^2 dt$. Conform propoziției 3.3.1, avem

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^2 \log P[\epsilon W \in \Gamma_f] = -\Lambda(\Gamma_f) \geq -a$$

deci, pentru $\epsilon \leq \epsilon_1(\alpha)$

$$P[\epsilon W \in \Gamma_f] \geq \exp\left(-\frac{2a}{\epsilon^2}\right). \quad (3.35)$$

Pentru $R > 0$ dat, să punem $R_1 = R + 2a$. Teorema 3.4.3 aplicată lui ρ, t , R_1 implică existența unor $\epsilon_0(R_1)$, $\alpha_0(R_1)$ astfel că majorarea (3.33) se aplică pentru $\epsilon \leq \epsilon_0(R_1)$ și $\alpha \leq \alpha_0(R_1)$. Din formulele (3.34) și (3.35) rezultă, pentru $\alpha \leq \alpha_0(R_1)$ și $\epsilon \leq \epsilon_0(R_1) \wedge \epsilon_1$

$$p \geq 1 - \frac{\exp(-R_1/\epsilon^2)}{\exp(-2a/\epsilon^2)} = 1 - \exp\left(-\frac{R}{\epsilon^2}\right). \square$$

Demonstrația teoremei 3.4.3 Fie $K, L \subset D$ compacte astfel ca $K \subset \overset{\circ}{L}$. Notăm K^r reuniunea bilelor închise de centru $v \in K$ și

de rază $r > 0$. Fixăm $r_0 > 0$ astfel ca $K^{3r_0} \subset \overset{\circ}{L}$, $a > 0$, $T \in (0, 1]$ și punem $K_a = \left\{ f \in AC(\mathbf{R}^n) \mid \int_0^T |\dot{f}_t|^2 dt \leq a \right\}$.

Din propoziția 3.4.2, există $s_0 \in (0, T]$ astfel ca, pentru orice $f \in K_a$ și orice $v \in K^{r_0}$, funcția $h = F_x f$ să fie definită pe $[0, s_0]$ și $h([0, s_0]) \subset K^{2r_0}$. În plus, pentru s_0 suficient de mic, există o constantă $c > 0$ astfel ca, pentru $s \leq s_0$, $v, w \in K^{r_0}$, $f \in K_a$ să avem

$$\sup_{[0, s]} (F_v f, F_w f) \leq e^{cs} |v - w|. \quad (3.36)$$

Pentru $\rho \in (0, r_0]$, $v \in K^{r_0}$ și $g = F_v f$, cu notația $\varphi_t = X_t^\epsilon - g_t$ avem, pentru $t \leq s_0$

$$\varphi_t = \int_0^t a_s dW_s + z_t + \int_0^t h_s ds + X_0^\epsilon - v,$$

unde am notat $a_s = \epsilon [\sigma(X_s^\epsilon) - \sigma(g_s)]$, $h_s = b_\epsilon(X_s^\epsilon) - b(g_s)$, $z_t = \int_0^t \sigma(g_s) \left[\epsilon dW_s - \dot{f}_s ds \right]$.

Funcția $m_s = \frac{d}{ds} \sigma(X_s^\epsilon) \in L^2[0, s_0]$ și, integrând prin părți, obținem

$$z_t = \sigma(g_t) [\epsilon W_t - f_t] - \sigma(g_0) [\epsilon W_0 - f_0] - \int_0^t m_s (\epsilon W_s - f_s) ds.$$

Pentru $\alpha > 0$, $\rho \in (0, r_0]$, considerăm timpii de stopare

$$\eta = \inf \{s \in [0, 1] ; |\epsilon W_s - f_s| \geq \alpha\}$$

$$\theta = \inf \{s \in [0, 1] ; |X_s^\epsilon - g_s| \geq \rho\}.$$

Pentru $t \leq \theta \wedge s_0$, X_t^ϵ și g_t rămân în $K^{3r_0} \subset L$ și există deci o constantă care majorează (peste tot) expresiile $|\sigma(g_t)|$, $|\sigma(X_t^\epsilon) - \sigma(g_t)| / |X_t^\epsilon - g_t|$, $|b(X_t^\epsilon) - b(g_t)| / |X_t^\epsilon - g_t|$ și $\int_0^t |m_s|^2 ds$.

Convergența lui b_ϵ către b este uniformă pe compacti deci, pentru orice $\gamma > 0$, există $\epsilon_0(\gamma) > 0$ astfel ca

$$|b_\epsilon(X_t^\epsilon) - b(X_t^\epsilon)| \leq \gamma \text{ pentru } \epsilon \leq \epsilon_0 \text{ și } t \leq \theta \wedge s_0.$$

Punem condițiile

$$v \in K^{r_0}, f \in K_a, \epsilon \leq \epsilon_0 = \epsilon_0(\gamma), \rho \leq r_0 \quad (3.37)$$

$$|X_0^\epsilon - v| \leq \rho/R \text{ P-a.s.}$$

pentru a obține majorările (cu c constantă adecvată)

$$|a_t| \leq \epsilon c_\rho \text{ pentru } t \leq \theta \wedge s_0$$

$$\int_0^t h_s ds \leq \int_0^t |b_\epsilon(X_s^\epsilon) - b(X_s^\epsilon)| ds$$

$$+ \int_0^t |b_\epsilon(X_s^\epsilon) - b(g_s)| ds \leq (\gamma + c\rho)t \text{ pentru } t \leq \theta \wedge s_0$$

$$|z_t| \leq c^\alpha \text{ pentru } t \leq \theta \wedge s_0 \wedge \eta.$$

Punem $w_t = \int_0^t a_s dW_s = \varphi_t - z_t - \int_0^t h_s ds - X_0^\epsilon + v$ pentru a obține

$$|w_t| \geq |\varphi_t| - |z_t| - \left| \int_0^t h_s ds \right| - \frac{1}{5}\rho.$$

Fie $s \leq s_0$. Cu notația $A := \{\theta \leq s \leq \eta\}$, obținem $|\varphi_\theta| = \rho$ și, ținând cont de majorările precedente, obținem

$$|w_\theta| \geq \rho - c\alpha - \gamma s - cs\rho - \frac{1}{5}\rho.$$

În afară de condițiile (3.37), să punem și condițiile

$$c\alpha \leq \frac{1}{5}\rho, s \leq s_0, cs \leq \frac{1}{5}, \gamma s_0 = \frac{1}{5}\rho \quad (3.38)$$

pentru a obține că $A \subset \{|w_\theta| \geq \frac{1}{5}\rho\}$. Dacă $w_\theta^i, i = 1, \dots, n$ sunt coordonatele lui w_θ , atunci

$$P(A) \leq \sum_{i=1}^n P\left\{|w_\theta^i| \geq \frac{1}{5}\rho\right\}. \quad (3.39)$$

Pentru orice $i = 1, \dots, n$, w_t^i este martingal local al cărui proces crescător asociat d_t este majorat de $\int_0^t |a_s|^2 ds$, deci $Z_t := \exp\left(Mw_t^i - \frac{M^2}{2}d_t\right)$ este martingal local pentru orice $M \in \mathbf{R}$.

In consecință, $Z_{t \wedge \theta}$ este martingal mărginit pentru $t \in [0, T]$ și $E(Z_{s \wedge \theta}) = E(Z_0) = 1$. Putem scrie deci

$$P \left\{ w_{s \wedge \theta}^i \geq \frac{1}{5} \rho \right\} = P \left\{ M w_{s \wedge \theta}^i - \frac{M^2}{2} d_{s \wedge \theta} \geq \frac{M}{5} \rho - \frac{M^2}{2} d_{s \wedge \theta} \right\},$$

iar din (3.38) obținem

$$d_{s \wedge \theta} \leq \int_0^{s \wedge \theta} |a_s|^2 ds \leq \epsilon^2 s c^2 \rho^2,$$

deci

$$\begin{aligned} P \left\{ w_{s \wedge \theta}^i \geq \frac{1}{5} \rho \right\} &\leq P \left\{ Z_{s \wedge \theta} \geq \exp \left(\frac{M}{5} \rho - \frac{M^2}{2} \epsilon^2 s c^2 \rho^2 \right) \right\} \\ &\leq E(Z_{s \wedge \theta}) \exp \left(-\frac{M}{5} \rho + \frac{M^2}{2} \epsilon^2 s c^2 \rho^2 \right). \end{aligned}$$

Alegem acum $M = \rho/5 (\epsilon^2 s c^2 \rho^2)$ pentru a obține

$$P \left\{ w_{s \wedge \theta}^i \geq \frac{1}{5} \rho \right\} \leq \exp \left(-\frac{1}{50 \epsilon^2 s c^2} \right).$$

Similar găsim o majorare pentru $P \left\{ w_{s \wedge \theta}^i \leq -\frac{1}{5} \rho \right\}$ deci, împreună cu (3.39) obținem, in ipotezele (3.37) și (3.38)

$$P(A) \leq 2n \exp \left(-\frac{1}{50 \epsilon^2 s c^2} \right).$$

Ceea ce am demonstrat până acum se poate enunța astfel. In ipotezele

$$v \in K^{r_0}, f \in K_a, g = F_x f, |X_0^\epsilon - v| \leq \rho/5 \text{ P-a.s.}$$

$$\rho \leq r_0, \epsilon \leq \epsilon_1(\rho) = \epsilon_0 \left(\frac{\rho}{5s_0} \right), \alpha \leq \alpha_0(\rho) = \frac{\rho}{5c} \quad (3.40)$$

$$\alpha \leq \alpha_0(\rho) = \frac{\rho}{5c}, s \leq s_1 = s_0 \wedge \frac{1}{5c},$$

are loc

$$P \left[\sup_{[0, s]} |\epsilon B - f| \leq \alpha, \sup_{[0, s]} |X^\epsilon - g| \geq \rho \right] \quad (3.41)$$

$$\leq 2n \exp\left(-\frac{1}{50\epsilon^2 s c^2}\right).$$

Conform proprietatii Markov obținem că, dacă

$$f \in K_a, \rho \leq r_0, \epsilon \leq \epsilon_1(\rho), \alpha \leq \alpha_0(\rho), s \leq s_1, t + s \leq T,$$

atunci, pe mulțimea $\{\omega \in \Omega; X_t^\epsilon \in K^{r_0}\}$, are loc P -a.s. inegalitatea

$$P \left[\sup_{[t, t+s]} |\epsilon W - f| \leq \alpha, \sup_{[t, t+s]} |X^\epsilon - G^t| \geq \rho | \mathcal{F}_t \right] \quad (3.42)$$

$$\leq 2n \exp\left(-\frac{1}{50\epsilon^2 s c^2}\right),$$

unde \mathcal{F}_t este corpul borelian generat de mișcarea browniană până la momentul t , iar G^t este traiectoria aleatoare definită pe $[t, t+s]$ ca soluția unică a ecuației stocastice $\dot{\psi}_s = b(\psi_s) + \sigma(\psi_s) f_s$, care pornește din X_t^ϵ la timpul t .

Fie acum $f \in AC(\mathbf{R}^n)$ și $N \in \mathbf{N}^*$. Punem $g = F_x(f)$, $s = T/N$ și presupunem verificate condițiile

$$f \in K_a, g([0, T]) \subset K, \epsilon \leq \epsilon_1(\rho), \alpha \leq \alpha_0(\rho), s \leq s_1. \quad (3.43)$$

Pentru $k = 0, \dots, N-1$, definim evenimentele

$$A_0 = \left\{ \sup_{[0, s]} |X^\epsilon - g| \geq \rho \right\},$$

$$A_k = \left\{ \sup_{[ks, (k+1)s]} |X^\epsilon - G^{ks}| \geq \rho \right\}, \quad k = 1, \dots, N-1.$$

Prin recurență după k , in ipoteza

$$\rho N (e^{cT} - 1) / cT \leq r_0, \quad (3.44)$$

să arătăm că, pentru $k = 1, \dots, N$ avem

$$A_0 \cap \dots \cap A_{k-1} \quad (3.45)$$

$$\subset \left\{ \sup_{[0,ks]} |X^\epsilon - g| \leq \rho (e^{cks} - 1) / (e^{cs} - 1) \right\}$$

Pentru $k = 1$ relația (3.45) este evidentă. Dacă este adevărată pentru un $k = 1, \dots, N-1$, fie $\omega \in A_0 \cap \dots \cap A_k$; din ipoteza de inducție avem

$$|X_{ks}^\epsilon - g_{ks}| \leq \rho \frac{e^{cks} - 1}{e^{cs} - 1} \leq \rho \frac{e^{cT} - 1}{e^{cT/N} - 1} \leq \rho N \frac{e^{cT} - 1}{cT},$$

deci, în ipoteza (3.44), avem că $X_{ks}^\epsilon \in K^{r_0}$. Traectoriile G^{ks} iau valori în D pe $[ks, (k+1)s]$ iar proprietatea (3.36) implică

$$\sup_{[ks, (k+1)s]} |G^{ks} - g| \leq |X_{ks}^\epsilon - g_{ks}|,$$

deci

$$\sup_{[ks, (k+1)s]} |X^\epsilon - g| \leq \rho + e^{cs} |X_{ks}^\epsilon - g_{ks}|.$$

Obținem în fine

$$\begin{aligned} \sup_{[0, (k+1)s]} |X^\epsilon - g| &\leq \rho e^{cs} (e^{cks} - 1) / (e^{cs} - 1) \\ &= \rho (e^{c(k+1)s} - 1) / (e^{cs} - 1), \end{aligned}$$

deci (3.45) este demonstrată.

Fie $r > 0$ arbitrar și presupunem îndeplinită condiția

$$\rho N \frac{e^{cT} - 1}{cT} < r \wedge r_0 \quad (3.46)$$

Atunci (3.45) implică, pentru $k = N$,

$$A_0 \cap \dots \cap A_{N-1} \subset \left\{ \sup_{[0, T]} |X^\epsilon - g| < r \right\},$$

deci

$$\left\{ \sup_{[0, T]} |X^\epsilon - g| \geq r \right\} \subset A_0^c \cap \dots \cap A_{N-1}^c = \bigcup_{k=0}^{N-1} F_k, \quad (3.47)$$

unde $F_0 = A_0^c$, $F_k = A_0 \cap \dots \cap A_{k-1} \cap A_k^c$ pentru $k = 1, \dots, N-1$. Din (3.45) și (3.46) avem $F_k \subset \{X_{k_s}^c \in K^{r_0}\} \cap A_k^c$ și deci $F_k \subset \{X_{k_s}^c \in K^{r_0}\} \cap \left\{ \sup_{[k_s, (k+1)_s]} |X^c - G^{k_s}| > \rho \right\}$.

Condițiile (3.43), (3.46) și

$$|X_0^c - g_0| \leq \frac{1}{5}\rho \text{ P-a.s.} \quad (3.48)$$

implică $F_0 \subset \left\{ |X_0^c - g_0| \leq \frac{1}{5}\rho \right\} \cap \left\{ \sup_{[0, s]} |X^c - g| > \rho \right\}$. Aplicăm acum inegalitățile (3.41) și (3.42) pentru a obține, pentru $k = 0, \dots, N-1$,

$$P \left[F_k \cap \left\{ \sup_{[0, T]} |\epsilon B - f| \leq \alpha \right\} \right] \leq 2n \exp \left(-\frac{1}{50\epsilon^2 s c^2} \right). \quad (3.49)$$

Notăm $Q = \left\{ \sup_{[0, T]} |\epsilon B - f| \leq \alpha, \sup_{[0, T]} |X^c - g| \geq r \right\}$. Din (3.47)-(3.49) rezultă (pentru că $s = T/N$)

$$P(Q) \leq 2nN \exp \left(-\frac{1}{50\epsilon^2 T c^2} \right)$$

și cum $se^{-s} \leq e^{-s/2}$ pentru orice $s \geq 0$, avem

$$P(Q) \leq 100n\epsilon^2 T c^2 \exp \left(-\frac{N}{100\epsilon^2 T c^2} \right).$$

Fie $R > 0$ arbitrar; în condițiile (3.43), (3.46), (3.48) și

$$N/100Tc^2, 100nTc^2\epsilon^2 \leq 1 \quad (3.50)$$

obținem $P(Q) \leq \exp(-R/\epsilon^2)$. Pentru a termina demonstrația, să observăm că setul următor de condiții implică (3.43), (3.46), (3.48) și (3.50).

$$\epsilon \leq \epsilon_2(r, R), \alpha \leq \alpha_1(r, R), f \in K_a, g([0, T]) \subset K$$

$$|X_0^c - x| \leq 1/5\rho_0(r, R) \text{ P-a.s.},$$

unde $\epsilon_2(r, R) = \min \left[\epsilon_1(\rho_0), 1/\sqrt{100nTc^2} \right]$, $\alpha_1(r, R) = \alpha_0(\rho_0)$, $\rho_0 = \min \left[cT(r \wedge r_0)/2N_0(e^{cT} - 1), r_0 \right]$, iar $N_0 = N_0(R)$ este ales $\geq \max(100Tc^2R, T/s_1)$. \square

Definim **transformarea Cramer** $\lambda : C(D) \rightarrow [0, +\infty]$ a sistemului dinamic (3.31) prin

$$\lambda(g) = +\infty \text{ pentru } g \in C(D), g \notin AC(D), \quad (3.51)$$

$$\lambda(g) = \frac{1}{2} \int_0^1 \left\| \sigma(g_t)^{-1} [g_t - b(g_t)] \right\|^2 dt$$

și **funcționala Cramer** a sistemului (3.31) prin

$$\Lambda(A) = \inf_{g \in A} \lambda(g) \text{ pentru orice } A \subset C(D). \quad (3.52)$$

Interpretarea transformării Cramer este aceea că $\lambda(g)$ măsoară distanța dintre g și soluția sistemului (3.27), ambele plecând din același punct $x \in D$ și utilizând pe spațiul tangent la D în x metrica definită de forma pătratică $\frac{1}{2} \left\| \sigma(x)^{-1}(\cdot) \right\|^2$.

PROPOZIȚIA 3.4.5 *Cu notațiile de mai sus și în ipotezele (3.30), transformarea Cramer (3.51) este inferior semicontinuuă, pentru orice compact $K \subset D$ și $a \geq 0$, mulțimile $\{g \in C(D), g_0 \in K, \lambda(g) \leq a\}$ sunt compacte și, pentru orice $g \in C(D)$, avem*

$$\lambda(g) = \inf \left\{ \tilde{\lambda}(f), f \in AC(\mathbf{R}^n), g = F_x f \right\}, \quad (3.53)$$

unde $\tilde{\lambda}(f) = \frac{1}{2} \int_0^1 |f_t|^2 dt$ este transformarea Cramer a mișcării browniene (cf. propoziției 3.3.1). În această formulă, inf este atins dacă $\lambda(g)$ este finită.

Demonstrație. Fie borelianul

$$D^* = \left\{ (x, v) \in D \times \mathbf{R}^n \mid \sigma(x)^{-1}(v) \neq \emptyset \right\}$$

și, pentru $(x, v) \in D^*$, notăm

$$K(x, v) = \left\{ w \in \sigma(x)^{-1}(v) \mid |v| = \inf_{u \in \sigma(x)^{-1}(v)} |u| \right\}.$$

Cum $\{(u, v) \mid K(x, v) \cap S \neq \emptyset\}$ este borelian pentru orice închis S din \mathbf{R}^n , există o funcție boreliană $\chi : D^* \rightarrow \mathbf{R}^n$ cu proprietatea $\chi(x, v) \in K(x, v)$ pentru orice $(x, v) \in D^*$.

Fie $g \in C(D)$ cu $\lambda(g)$ finită. Din faptul că

$$\|\sigma^{-1}(x)v\|^2 = \inf \{ |w|^2, w \in \mathbf{R}^n, \sigma(x)w = v \},$$

avem $(g_t, \dot{g}_t - b(g_t)) \in D^*$ și

$$\|\sigma(g_t)^{-1} [\dot{g}_t - b(g_t)]\|^2 = |\chi [g_t, \dot{g}_t - b(g_t)]|^2$$

pentru orice $t \in [0, 1]$. Din (3.51) avem

$$\lambda(g) = \frac{1}{2} \int_0^1 |\chi [g_t, \dot{g}_t - b(g_t)]|^2 dt < +\infty,$$

deci există $f \in AC(\mathbf{R}^n)$ astfel ca $\lambda(g) = \frac{1}{2} \int_0^1 |f_t|^2 dt$ (este suficient de luat $\dot{f}_t = \chi [g_t, \dot{g}_t - b(g_t)]$ pentru aproape toți $t \in [0, 1]$). Am arătat că, dacă $g \in C_x(D)$ cu $\lambda(g)$ finită, atunci există $f \in AC(\mathbf{R}^n)$ astfel ca $\tilde{\lambda}(f) = \lambda(g)$ și $g = F_x f$.

Fie acum $h \in AC(\mathbf{R}^n)$ cu $g = F_x h$; pentru aproape toți $t \in [0, 1]$ avem

$$|\dot{f}_t|^2 = \|\sigma(g_t)^{-1} [\dot{g}_t - b(g_t)]\|^2 = \|\sigma(g_t)^{-1} (\dot{f}_t)\|^2,$$

și $\dot{f}_t = \sigma(g_t) \dot{h}_t$, deci $|\dot{f}_t|^2 \leq |\dot{h}_t|^2$ a.e. Aceasta înseamnă că

$$\lambda(g) = \tilde{\lambda}(f) = \frac{1}{2} \int_0^1 |\dot{f}_t|^2 dt \leq \frac{1}{2} \int_0^1 |\dot{h}_t|^2 dt = \tilde{\lambda}(h).$$

deci (3.53) este satisfăcută.

Conform propoziției 3.4.2, dacă $K_a = \{f \in C(\mathbf{R}^n), \tilde{\lambda}(f) \leq a\}$ și dacă K este compact în D , atunci restricția lui F_x la $K \times K_a$ (cu valori în $C(D)$), este continuă. Din (3.51) rezultă că λ este inferior semicontinuă și că $F_x(K \times K_a)$ este compact. \square

Exercițiu Folosind teorema 3.4.5, regăsiți transformarea Cramer a procesului Ornstein-Uhlenbeck, ca difuzie perturbată aleator.

COROLAR 3.4.6 In ipotezele și cu notațiile de mai sus, pentru orice $A \subset C_x(D)$ avem

$$-\tilde{\Lambda} \left(\overset{\circ}{A} \right) \leq \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^2 \log P(X^\epsilon \in A)$$

$$\leq \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^2 \log P(X^\epsilon \in A) \leq -\tilde{\Lambda}(\bar{A}).$$

Demonstrație. Fie $g \in \mathring{A}$ cu $\lambda(g)$ finită. Din propoziția 3.4.5, există $f \in AC(D)$ astfel ca $\tilde{\lambda}(f) = \lambda(g)$ și $g = F_x f$. Apoi există $t \in [0, 1]$ și $\rho > 0$ astfel ca

$$\left\{ h \in C_x(D) \left| \sup_{[0,t]} |h - g| \leq \rho \right. \right\} \subset \mathring{A}.$$

Fie $R > 0$ astfel ca $R > \lambda(g) = \tilde{\lambda}(f)$. Conform teoremei 3.4.3 există $\alpha, \epsilon_0 > 0$ cu proprietatea următoare. Relația $\epsilon \leq \epsilon_0$ implică

$$P \left[\sup_{[0,t]} |\epsilon W - f| \leq \alpha, \sup_{[0,t]} |X^\epsilon - g| > \rho \right] \leq \exp(-R\epsilon^{-2}),$$

ceea ce dă

$$\begin{aligned} P(X^\epsilon \in A) &\geq P \left[\sup_{[0,t]} |X^\epsilon - g| \leq \rho \right] \\ &\geq P \left[\sup_{[0,t]} |\epsilon W - f| \leq \alpha \right] - \exp(-R\epsilon^{-2}). \end{aligned}$$

Din propoziția 3.4.5 avem

$$\begin{aligned} &\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^2 \log P \left(\sup_{[0,t]} |\epsilon W - f| \leq \alpha \right) \\ &= -\inf \left\{ \tilde{\lambda}(\varphi) \left| \sup_{[0,t]} |\varphi - f| \leq \alpha \right. \right\} \geq -\tilde{\lambda}(f) \end{aligned}$$

și $-\tilde{\lambda}(f) > -R$, ceea ce implică

$$\liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^2 \log P(X^\epsilon \in A) \geq -\tilde{\lambda}(f) = -\lambda(g).$$

Luam sup după $g \in \mathring{A}$ și obținem prima inegalitate din corolar.

Fie acum $a < \Lambda(\bar{A})$ și punem $K_a = \{g \in C_x(D) \mid \lambda(g) \leq a\}$,
 $L_a = \left\{ f \in AC(\mathbf{R}^n) \mid \tilde{\lambda}(f) \leq a \right\}$; avem $K_a = F_x(L_a)$. Din
 $K_a \cap \bar{A} = \emptyset$, pentru orice $g \in K_a$ există o vecinătate deschisă V_g
 a lui g în $C_x(D)$ astfel ca $V_g \cap A = \emptyset$. Există $\rho_g > 0$, $t_g \in [0, 1]$
 astfel ca

$$G^g = \left\{ h \in C_x(D) \mid \sup_{[0, t_g]} |h - g| \leq \rho_g \right\} \subset V_g.$$

Fie $f_g \in L_a$ astfel ca $g = F_x(f_g)$. Din teorema 3.4.3, pentru
 $R > a$, există $\alpha_g, \epsilon_g > 0$ cu proprietatea următoare. Dacă

$$D^g = \left\{ f \in AC(\mathbf{R}^n) \mid \sup_{[0, t_g]} |f - f_g| < \alpha_g \right\},$$

atunci

$$P[(\epsilon W \in D^g) \cap (X^\epsilon \notin G^g)] \leq \exp(-R\epsilon^{-2}),$$

ceea ce implică

$$P[(\epsilon W \in D^g) \cap (X^\epsilon \notin V^g)] \leq \exp(-R\epsilon^{-2}).$$

Din acoperirea deschisă $(D^g)_{g \in K_a}$ a lui L_a extragem o acoperire
 finită D_1^g, \dots, D_k^g și punem $D_* = \cup_{i=1}^k D_i^g$. Obținem că

$$(\epsilon W \in D_*) \cap (X^\epsilon \in A) = \cup_i \{(\epsilon B \in D_i^g) \cap (X^\epsilon \in A)\},$$

care este inclus în evenimentul $\cup_i \{(\epsilon W \in D_i^g) \cap (X^\epsilon \notin V_{g_i})\}$.
 Deci, dacă alegem $\epsilon \leq \min\{\epsilon_{g_1}, \dots, \epsilon_{g_k}\}$, avem

$$P[(\epsilon W \in D_*) \cap (X^\epsilon \in A)] \leq k \exp(-R\epsilon^{-2}),$$

ceea ce implică

$$\begin{aligned} P(X^\epsilon \in A) &\leq P[(\epsilon W \in D_*) \cap (X^\epsilon \in A)] + P(\epsilon W \in D_*^c) \\ &\leq k \exp(-R\epsilon^{-2}) + P(\epsilon W \in D_*^c). \end{aligned}$$

Propozitia 3.3.1 implică

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^2 \log P(\epsilon W \in D_*^c) = -\tilde{\Lambda}(D_*^c)$$

(deoarece D_* este deschis), deci

$$\begin{aligned} \bar{l}(A) &= \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^2 \log P(X^\epsilon \in A) \\ &\leq (-R) \vee \left(-\tilde{\Lambda}(D_*^c) \right). \end{aligned}$$

Cum $R > a$ și $D_*^c \cap L_a = \emptyset$, membrul al doilea este majorat de $-a$. Relația $\bar{l}(A) \leq -a$ pentru orice $a < \Lambda(\bar{A})$, a finit, implică

$$\bar{l}(A) \leq -\Lambda(A). \square$$

Observație Transformarea Cramer $\tilde{\Lambda}$ (deci și funcționala Cramer $\tilde{\Lambda}$) în cazul perturbațiilor cu procese gaussiene și al ecuațiilor stocastice sunt *uniforme* în raport cu $x \in \mathbf{R}^n$, când $\epsilon \rightarrow 0$.

APLICATII

Să considerăm X_t^ϵ soluția ecuației diferențiale stocastice

$$dX_t^\epsilon = b(X_t^\epsilon) dt + \epsilon dW_t, \text{ pe } \mathbf{R}^n, \text{ cu } X_0^\epsilon = x_0$$

Dacă D este domeniu în \mathbf{R}^n cu $x_0 \in D$, notăm ∂D frontiera lui D , $\tau^\epsilon = \inf \{t : X_t^\epsilon \notin D\}$ prima ieșire a lui X_t^ϵ din D și

$$H_D(t) = \{f \in C(\mathbf{R}^n) : f_0 = x_0, f_t \in D \cup \partial D\},$$

$$\bar{H}_D(t) = \{f \in C(\mathbf{R}^n) : f_0 = x_0, f_s \notin D \text{ pentru un } 0 \leq s \leq t\}.$$

PROPOZITIA 3.4.7 Dacă frontiera lui D coincide cu frontiera lui \bar{D} , atunci

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^2 \log P \{X_t^\epsilon \in D\} = - \inf_{f \in H_D(t)} \lambda(f) \quad (3.54)$$

și

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^2 \log P \{\tau^\epsilon \leq t\} = - \inf_{f \in \bar{H}_D(t)} \lambda(f). \quad (3.55)$$

Demonstrație. Relația (3.55) va rezulta din lema 3.3.2; să verificăm ipotezele acesteia. Presupunem că $\inf_{f \in \bar{H}_D(t)} \lambda(f) = \lambda(f_0)$, cu $f_0 = x_0$. Funcția f_t atinge frontiera ∂D într-un $t_0 \neq 0$, iar inf-ul de mai sus este finit pentru că există funcții netede arbitrare care pleacă din x_0 și părăsesc D în $[0, 1]$; rezultă că f_t este absolut continuă.

Pentru $\epsilon > 0$ dat, există $x^\epsilon \in \mathbb{R}^n \setminus D$ într-o ϵ -vecinătate a lui f_{t_0} ; punem

$$f_t^\epsilon = f_t + \frac{t}{t_0} (x^\epsilon - f_{t_0}), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Observăm că f_t^ϵ aparține interiorului lui $\bar{H}_D(t)$. Să arătăm că $\lambda(f^\epsilon) \rightarrow \lambda(f)$ când $\epsilon \rightarrow 0$. Avem

$$\begin{aligned} \lambda(f^\epsilon) - \lambda(f) &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\left| \dot{f}_t^\epsilon - b(f_t^\epsilon) \right|^2 - \left| \dot{f}_t - b(f_t) \right|^2 \right] dt \\ &= \int_0^1 \left\langle \dot{f}_t^\epsilon - b(f_t^\epsilon) - \dot{f}_t + b(f_t), \dot{f}_t - b(f_t) \right\rangle_{L^2[0,1]} dt \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^1 \left| \dot{f}_t^\epsilon - b(f_t^\epsilon) - \dot{f}_t + b(f_t) \right|^2 dt. \end{aligned}$$

Apoi

$$\dot{f}_t^\epsilon - b(f_t^\epsilon) - \dot{f}_t + b(f_t) = \frac{1}{t_0} (x^\epsilon - f_{t_0}) + b(f_t) \dot{f}_t^\epsilon - b(f_t^\epsilon)$$

care converge către 0 uniform în $t \in [0, 1]$ când $\epsilon \rightarrow 0$. \square

Observații 1. Calculul expresiilor (3.54)-(3.55) se reduce la probleme variaționale. Într-adevăr, să observăm că noi ne-am restrâns la spațiul $C[0, 1]$, dar toate argumentele și calculele rămân adevărate în spațiul $C[0, t]$, $t > 0$. Să notăm λ_t transformarea Cramer asociată traiectoriilor X^ϵ pe intervalul $[0, t]$ (deci $\lambda \equiv \lambda_1$). Pentru calculul extremelor avem la dispoziție ecuația Euler, iar inf-ul se poate găsi prin ecuația Hamilton-Jacobi. Punem

$$V(t, x, y) = \inf_{f_0=x, f_t=y} \lambda_t(f).$$

Atunci

$$\inf_{f \in H_D(t)} \lambda_t(f) = \inf_{y \in DU \cup \partial D} V(t, x, y)$$

și

$$\inf_{f \in \bar{H}_D(t)} \lambda_t(f) = \inf_{0 \leq s \leq t, y \notin D} V(s, x, y).$$

Ecuația Hamilton-Jacobi pentru $V(t, x, y)$ are forma

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{1}{2} |\nabla_y V(t, x, y)|^2 + \langle b(y), \nabla_y V(t, x, y) \rangle,$$

la care adaugăm condițiile $V(0, x, x) = 0$ și $V(t, x, y) \geq 0$.

2. Să notăm că funcțiile $u^\epsilon(t, x) = P\{X_t^\epsilon \in D\}$ și $v^\epsilon(t, x) = P\{\tau^\epsilon \leq t\}$ sunt soluțiile problemelor

$$\frac{\partial u^\epsilon}{\partial t} = \frac{\epsilon^2}{2} \Delta u^\epsilon + \langle b(x), \nabla_x u^\epsilon \rangle, \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad t > 0$$

$$u^\epsilon(0, x) = 1 \text{ pentru } x \in D, \quad u^\epsilon(0, x) = 0 \text{ pentru } x \notin D,$$

respectiv

$$\frac{\partial v^\epsilon}{\partial t} = \frac{\epsilon^2}{2} \Delta v^\epsilon + \langle b(x), \nabla_x v^\epsilon \rangle, \quad x \in D, \quad t > 0$$

$$v^\epsilon(0, x) = 0 \text{ pentru } x \in D, \quad v^\epsilon(t, x)|_{x \in \partial D} = 1.$$

(remarcați că parametrul ϵ apare la derivatele de cel mai mare ordin). Propoziția 3.4.7 furnizează informații, atunci când $\epsilon \rightarrow 0$, asupra comportamentului soluțiilor problemelor de mai sus.



INDEX

- condiția lui Hörmander, 93
covariația unei măsurii, 132, 136, 138
deviații mari, 109
ecuații stocastice, 20
funcționala Cramer, 118, 140, 172
haos, 31
hipercontractivitate, 70
inegalitățile lui Meyer, 74
informația Kullback, 157
integrale Wiener multiple, 36
integrala Itô, 14
integrala Skorohod (operatorul de integrare), 54
legea Erdős-Rényi a numerelor mari, 153
legea logaritmului iterat (forma funcțională), 148
legea tare a numerelor mari (in spații Banach), 155
măsură gaussiană, 131
matricea Malliavin, 79
mișcare browniană (proces Wiener), 8, 30
operatorul de derivare, 42
perturbații aleatoare mici, 160, 163
procesul Ornstein-Uhlenbeck, 24, 142
polinoame Hermite, 30
semigrupul Cauchy, 72
semigrupul Ornstein-Uhlenbeck, 65
spațiile $D^{r,p}$, 44
spațiul $L^{2,1}$, 58
teorema multiplicatorului, 72
transformarea Laplace, 110, 120
transformarea Cramer, 110, 117, 172
zgomot alb, 30

Tiparul s-a executat sub c-da nr. 317/1996 la
Tipografia Editurii Universității din București

ISBN - 973 - 575 - 072 - 4

Lei 9600