GHEORGHE STOICA

INTRODUCERE ÎN STUDIUL MIŞCĂRII BROWNIENE

Editura Universității din București
1999

GH. STOICA

INTRODUCERE ÎN STUDIUL MIŞCĂRII BROWNIENE

Editura Universităţii din Bucureşti
1999

Referenţi ştiinţifici: **Prof. dr. Ioan CUCULESCU**
Prof. dr. Constantin TUDOR

Şos. Panduri 90-92, Bucureşti - 76235; Tel./Fax: 410.23.84

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale
STOICA, GHEORGHE I.
Introducere în studiul mişcării browniene / Stoica I. Gheorghe - Bucureşti, Editura Universităţii din Bucureşti, 1999
p. 100; 23 cm.
Bibliogr.
ISBN 973-575-356-1

530.162(075.8)

Cuprins

CUVÂNT ÎNAINTE

Am prezentat in detaliu proprietăţile mişcării browniene ce decurg din caracterul Gaussian, din cel de martingal şi cel de proces Markov al acesteia; in particular s-au putut prezenta cele trei construcţii standard ale mişcării browniene. In continuare am dezvoltat tema calculului stocastic, cu integrala şi ecuaţiile Itô. Intrucât mişcarea browniană se poate obţine ca limită de mersuri la intâmplare, am considerat utilă introducerea unui capitol in care să tratăm acest ultim proces.

Cursul de faţă se adresează studenţilor din anii 3 şi 4 de la Facultatea de Matematică. El reprezintă o continuare a cursului general de teoria probabilităţilor şi statistică din anii 2-3; a fost scris ca introducere in temele opţionale de probabilităţi, procese stocastice şi statistică din anul 4, cât şi in temele obligatorii necesare obţinerii diplomei de studii aprofundate.

Autorul mulţumeşte colegilor pentru analiza făcută cursului in cadrul colectivului de catedră, in special domnilor profesori Ioan Cuculescu şi Constantin Tudor.

Gh. Stoica

Bucureşti, 1999

1

RECAPITULARE

Fie $\Omega \neq \emptyset$ o mulţime şi $\mathcal{K}$ un corp borelian ($\sigma-$algebră) pe Ω. O **probabilitate** P este o măsură (pozitivă) finită cu masa totală 1. Tripletul $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ se numeşte **câmp de probabilitate**, iar elementele lui $\mathcal{K}$ se numesc **evenimente**. Funcţiile măsurabile de la Ω la $\mathbb{R}$ se numesc **variabile aleatoare** (prescurtat **v.a.**) şi se notează cu $X, Y, \ldots$ sau cu $f, g, \ldots$ Integrala lui X in raport cu P se numeşte **media** lui X şi o notăm $E(X) = \int X(\omega) P(d\omega)$. Dacă un eveniment are probabilitatea 1, vom spune ca are loc aproape sigur (prescurtat a.s.) sau aproape peste tot (a.p.t.). Vom nota cu 1_A funcţia indicator a mul ţimii A : $1_A = 1$ pe A şi 0 pe A^c (A^c este complementara lui A). Dacă $A_n, n \geq 1$ este un şir de mulţimi, notăm $\limsup_{n\to+\infty} A_n := \bigcap_{m=1}^{+\infty} \bigcup_{k=m}^{+\infty} A_k$.

1. *Lema Borel-Cantelli I:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n) < +\infty \textit{ implică } P\left[\limsup_{n\to+\infty} A_n\right] = 0.$$

2. *Inegalitatea Cebâşev: dacă X este integrabilă iar $g : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ este crescătoare, atunci*

$$P[X \geq a] \leq \frac{E[g(X)]}{g(a)} \text{ pentru } a \geq 0.$$

3. *Inegalitatea Jensen: dacă g este convexă, X şi $g(X)$ sunt integrabile, atunci $E[g(X)] \geq g[E(X)]$.*

Legea (sau **distribuţia, repartiţia**) lui X este probabilitatea P_X pe $\mathbb{R}$ dată prin $P_X(A) = P[X \in A]$. Dată fiind o măsură μ pe $\mathbb{R}$ cu masa totală 1, putem construi o v.a. X cu proprietatea $P_X = \mu$ in modul următor: fie $\Omega = [0,1]$, P =măsura Lebesgue pe $[0,1]$. Pentru $\omega \in [0,1]$, punem

$$X(\omega) = \inf\{t : \mu((-\infty, t]) \geq \omega\}. \tag{1.1}$$

Atunci $P_X((-\infty, a]) = P[X \leq a] = \mu(((-\infty, a])$ pentru orice a, deci $P_X = \mu$.

4. *Dacă $f \geq 0$ sau dacă f este mărginită, atunci*

$$E[f(X)] = \int f(x) P_X(dx).$$

In particular, cu teorema lui Fubini obţinem

5. *Dacă $X \geq 0$ şi $p \in \mathbb{N}^*$ atunci*

$$E(X^p) = \int_0^{+\infty} pt^{p-1} P[X > t]\, dt.$$

Un **vector aleator** este o aplicaţie măsurabilă de la Ω la $\mathbb{R}^d$; definiţia legii şi afirmaţia 4 se extind la acest obiect fără dificultate.

Evenimentele A, B sunt **independente** dacă $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Definiţia se extinde la o familie arbitrară de indici: evenimentele $A_i, i \in I$ sunt independente dacă

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_{i_k}\right) = \prod_{k=1}^{n} P(A_{i_k}) \text{ pentru orice } \{i_1, \ldots, i_n\} \subset I,\ n \in \mathbb{N}.$$

Corpul borelian $\mathcal{F}$ este independent de corpul borelian $\mathcal{G}$ dacă orice $A \in \mathcal{F}$ este independent de orice $B \in \mathcal{G}$. Corpul borelian generat de v.a. X, notat $\sigma(X)$, este familia $\{(X \in A),\ A$ boreliană$\}$. Două v.a. sunt independente dacă corpurile boreliene generate de ele sunt independente. Similar se definesc independenţa: unui eveniment şi a unei v.a., ca şi a unei v.a. cu un corp borelian. Observaţi că, dacă X, Y sunt independente şi f, g sunt funcţii boreliene, atunci $f(X)$ şi $g(Y)$ sunt independente.

Un exemplu de v.a. independente este $\Omega = [0,1]^2$, P =măsura Lebesgue, X o funcţie doar de prima variabilă, Y o funcţie numai de a doua variabilă. Se poate arăta că v.a. independente pot fi reprezentate cu ajutorul unor spaţii produs (convenabile).

6. *Dacă X, Y sunt integrabile şi independente, atunci XY este integrabilă şi*

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

Funcţia caracteristică a v.a. X este transformarea Fourier a legii ei: $\int e^{itx} P_X(dx) = E(e^{itX})$ (cf. afirmaţiei 4). Dacă X, Y sunt independente, la fel sunt e^{itX} , e^{isY} deci, cf. afirmaţiei 6, $Ee^{i(tX+sY)} = E(e^{itX})E(e^{isY})$ i.e. dacă X, Y sunt independente, funcţia caracteristică a cuplului (X, Y) este produsul funcţiilor caracteristice ale componentelor. Reciproca este deasemenea adevărată:

7. *Dacă $Ee^{i(tX+sY)} = E(e^{itX})E(e^{isY})$ pentru orice t, s reali, atunci X, Y sunt v.a. independente.*

8. *Lema Borel-Cantelli II: fie $A_n, n \geq 1$ evenimente independente.*

$$\textit{Dacă } \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n) = +\infty, \textit{ atunci } P\left[\limsup_{n\to+\infty} A_n\right] = 1.$$

Convergenţa v.a. Fie X_n, X v.a. pe $(\Omega, \mathcal{K}, P)$. Spunem că $X_n \to X$ **a.s.** (sau **a.p.t.**) dacă $P[X_n \to X] = 1$.
$X_n \to X$ **în probabilitate** (sau în măsură) dacă, pentru orice $\varepsilon > 0$, avem

$$\lim_{n\to+\infty} P[|X_n - X| > \varepsilon] = 0.$$

$X_n \to X$ **în L^p** $(p \geq 1)$ dacă $X_n, X \in L^p$ şi

$$\lim_{n\to+\infty} E[|X_n - X|^p] = 0.$$

$X_n \to X$ **în lege** (sau în repartiţie) dacă

$$\lim_{n\to+\infty} \int f(X_n)\, dP = \int f(X)\, dP \text{ pentru orice } f \in C_b(\mathbb{R})$$

i.e. continuă şi mărginită pe $\mathbb{R}$. Convergenţa in lege este echivalentă cu convergenţa slabă a măsurilor (repartiţiilor) $P \circ X_n^{-1} \Rightarrow P \circ X^{-1}$.

Definiţiile de mai sus se extind fără dificultate in cazul vectorilor aleatori. Au loc următoarele: convergenţa a.s., convergenţa in L^p implică convergenţa in probabilitate, care la rândul ei implică convergenţa in lege.

Exerciţiu. Fie $a \in \mathbb{R}^d$. Dacă $X_n \to a$ in lege, atunci $X_n \to a$ in probabilitate.

O familie de v.a. X_n se numeşte **uniform integrabilă** dacă

$$\int_{(|X_n| \geq c)} |X_n| \, dP \to 0 \text{ când } c \to +\infty, \text{ uniform in } n.$$

De exemplu: familia $X_n, n \geq 1$ este uniform integrabilă dacă şi numai dacă există $\varphi : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ continuă, convexă, crescătoare, cu $\varphi(0) = 0$, $\varphi(x)/x \to +\infty$ când $x \to +\infty$ şi $\sup_n E[\varphi(|X_n|)] < +\infty$.

9. *Teorema de convergenţă dominată: fie $X_n \in L^p$ cu $X_n \to X$ in probabilitate. Atunci $X \in L^p$ şi $X_n \to X$ in L^p dacă şi numai dacă familia $(|X_n|^p)_{n \geq 1}$ este uniform integrabilă.*

O v.a. X este **gaussiană (sau normală), centrată şi de dispersie 1** dacă

$$P[X \in A] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_A e^{-x^2/2} dx, \ A \text{ boreliană.}$$

Pe scurt vom spune că X are legea $N(0,1)$ i.e. are legea normală de medie 0 şi **dispersie** $E[X - E(X)]^2 = 1$. Funcţia sa caracteristică este $E\left(e^{itX}\right) = e^{-t^2/2}$. Astfel de v.a. există cf. formulei 1.1. cu $\mu(dx) = (2\pi)^{-1/2} e^{-x^2/2} dx$. Spunem că v.a. X are legea $N(a, b^2)$ dacă $X = bZ + a$, unde Z are legea $N(0,1)$.

a) Dacă f_n au legile $N(a_n, b_n^2)$ şi $f_n \to f$ in lege, atunci f are legea $N(a, b^2)$, unde $a := \lim_{n \to +\infty} a_n$, $b^2 := \lim_{n \to +\infty} b_n^2$.

b) Dacă şirul de v.a. gaussiene X_n converge in probabilitate către o v.a. X, atunci X este gaussiană. Similar pentru vectori aleatori.

c) Fie $p \geq 1$ fixat şi f_n cu legile $N(a_n, b_n^2)$; atunci $f_n \to f$ in probabilitate dacă şi numai dacă $f_n \to f$ in L^p.

Vom folosi frecvent următoarea evaluare: dacă Z are legea $N(0,1)$ şi $a > 1$, atunci $P[Z \geq a] \leq e^{-a^2/2}$.

Vectorul aleator $X = (X_1, \ldots, X_n)$ se numeşte gaussian dacă există un şir $Z_1, \ldots, Z_m$ de v.a. independente cu legea $N(0,1)$ şi numere reale b_{ij}, a_i astfel ca $X_i = \sum_{j=1}^{m} b_{ij} Z_j + a_i$, pentru $i = 1, \ldots, n$. În notaţie matricială $X = BZ + A$. **Covariaţia** a două v.a. X, Y este $Cov(X,Y) = E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\}$; dacă v.a. gaussiene sunt centrate i.e. $A = O$, matricea de covariaţie este $Cov(X) = E(XX^t) = E\left[(BZ)(BZ)^t\right] = E(BZZ^tB^t) = BB^t$, unde X^t este transpusul vectorului X. Funcţia caracteristică a vectorului gaussian X este dată de

$$E\left(e^{iu^tX}\right) = E\left(e^{iu^tBZ}\right) = e^{-u^tBB^tu/2}. \tag{1.2}$$

Alegând $u = (0, \ldots, 0, a, 0, \ldots 0)$, deducem că fiecare X_j este v.a. gaussiană. Luând $m = 2, B = \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}, u = (a,a)$, obţinem că suma a două v.a. independente cu legile $N(0, b_i^2)$ este o v.a. cu legea $N(0, b_1^2 + b_2^2)$. Dacă $Cov(X) = BB^t$ este matrice diagonală, cf. afirmaţiei 7, componentele X_j sunt independente.

Dacă $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ sunt corpuri boreliene şi X este $\mathcal{G}-$măsurabilă şi integrabilă, numim **valoarea medie a lui X condiţionată** de $\mathcal{F}$, orice v.a. Y care satisface $\int_A Y dP = \int_A X dP$ pentru orice $A \in \mathcal{F}$.

10. *Valoarea medie condiţionată este unică a.s. Dacă X este integrabilă, atunci valoarea medie condiţionată $E[X \mid \mathcal{F}]$ există.*

Se verifică fără dificultate că teoremele de convergenţă monotonă şi dominată, ca şi inegalităţile Jensen şi Cebâşev admit versiuni cu valori medii condiţionate. De exemplu, inegalitatea Jensen devine: dacă g este convexă, X şi $g(X)$ sunt integrabile, atunci $E[g(X) \mid \mathcal{F}] \geq g(E[X \mid \mathcal{F}])$ a.s.

11. *a) Dacă X, XY sunt integrabile, iar Y este $\mathcal{F}-$măsurabilă, atunci*

$$E[XY \mid \mathcal{F}] = YE[X \mid \mathcal{F}] \tag{1.3}$$

b) Dacă $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{F}$, atunci

$$E[E[X \mid \mathcal{F}] \mid \mathcal{E}] = E[X \mid \mathcal{E}] = E[E[X \mid \mathcal{E}] \mid \mathcal{F}].$$

Ecuaţia (1.3) arată că operatorul de luare a valorii medii condiţionate este proiecţia lui $X \in L^2(P)$ pe subspaţiul lui $L^2(P)$ generat de aplicaţiile $\mathcal{F}-$măsurabile deoarece, dacă Y este $\mathcal{F}-$măsurabilă, atunci

$$E\{Y(X - E[X \mid \mathcal{F}])\} = E(XY) - E\{YE[X \mid \mathcal{F}]\} = 0.$$

Operatorul de valoare medie condiţionată pe $L^1(P)$ este extensia (unică) a acestui operator de proiecţie. Se foloseşte notaţia $E[X \mid Y]$ pentru $E[X \mid \sigma(Y)]$.

12. *Convergenţa valorilor medii condiţionate: fie $\mathcal{F}_n$ un şir crescător de corpuri boreliene şi $\mathcal{F}_\infty$:=corpul borelian generat de $\bigcup_{n\geq 1} \mathcal{F}_n$. Atunci, pentru orice $X \in L^2(P)$, avem*

$$E[X \mid \mathcal{F}_n] \to E[X \mid \mathcal{F}_\infty] \text{ in } L^2 \text{ şi a.s.}$$

(deoarece familia $(E[X \mid \mathcal{F}_n], n \geq 1)$ este uniform integrabilă). Dacă $X \in L^1(P)$, atunci convergenţa precedentă are loc in L^1 şi a.s.

Fie $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ un câmp de probabilitate şi fie $\mathcal{B}$ corpul borelienelor pe $[0, +\infty)$. Un **proces stocastic**, notat $X = X(t, \omega) = X_t(\omega)$ sau simplu X_t este o aplicaţie de la $[0, +\infty) \times \Omega$ la $\mathbb{R}$, măsurabilă in raport cu produsul corpurilor boreliene $\mathcal{B}$ şi $\mathcal{K}$. Legea unui proces stocastic este $P \circ X^{-1}$, iar legile finit-dimensionale ale procesului X sunt $P \circ (X_{t_1}, \ldots, X_{t_k})^{-1}$, pentru orice $t_1, \ldots, t_k \in [0, +\infty)$. Prin trecere la spaţii produs, dat fiind un proces stocastic cu traiectorii continue şi de lege cunoscută, intotdeauna găsim un alt proces stocastic cu traiectorii continue, independent de, şi cu aceeaşi lege ca primul. Două astfel de procese, pentru care legile finit-dimensionale coincid, au aceeaşi lege.

Convergenţa proceselor. Fie $X^n = (X_t^n)_{t\geq 0}, X = (X_t)_{t\geq 0}$ procese stocastice pe $(\Omega, \mathcal{K}, P)$. Spunem că are loc convergenţa **finit dimensională** a.s. (in probabilitate, in L^p, in lege) a şirului X^n către X dacă, pentru orice $t_1 < \ldots < t_k$, vectorul $(X_{t_1}^n, \ldots, X_{t_k}^n)$ converge către vectorul $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_k})$ a.s. (in probabilitate, in L^p, in lege).

Presupunem că procesele X^n, X cu valori in $\mathbb{R}^d$ au timpul $t \in [0, T]$ şi au traiectorii continue, deci pot privite ca v.a. cu lori in $C\left([0,T],\mathbb{R}^d\right)$. Fie distanţa uniformă

$$d(f,g) := \sup_{t\in[0,T]} \|f(t) - g(t)\|, \quad f,g \in C\left([0,T],\mathbb{R}^d\right).$$

Spunem că $X^n \to X$ uniform a.s. (in probabilitate, in L^p) dacă $d(X^n, X) \to 0$ a.s. (in probabilitate, in L^p). Spunem că $X^n \to X$ uniform in lege dacă $\lim_{n\to+\infty} \int F(X^n)\,dP = \int F(X)\,dP$ pentru orice F mărginită pe $C\left([0,T],\mathbb{R}^d\right)$ şi continuă in convergenţa uniformă (i.e. $d(f,g) \to 0$ cu $f_n, f \in C\left([0,T],\mathbb{R}^d\right)$ implică $F(f_n) \to F(f)$). Atunci: convergenţa uniformă in lege implică convergenţa finit dimensională in lege.

Fie $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ câmp de probabilitate şi $\mathcal{F}_n$, $n \in \mathbb{N}$ o **filtrare** i.e. un şir crescător de $\sigma-$algebre. Un şir de v.a. (un proces cu timp discret) M_n , $n \in \mathbb{N}$ se numeşte **adaptat** dacă M_n este $\mathcal{F}_n-$măsurabilă, pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Similar se defineşte adaptabilitatea pentru un proces cu timp continuu M_t , $t \geq 0$ in raport cu o filtrare $\mathcal{F}_t$, $t \geq 0$. Spunem că filtrarea $\mathcal{F}_t$ satisface *condiţiile obişnuite* dacă este continuă la dreapta (i.e. $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+}$ pentru orice $t \geq 0$, unde $\mathcal{F}_{t+} := \bigcap_{\varepsilon>0} \mathcal{F}_{t+\varepsilon}$) şi dacă fiecare $\mathcal{F}_t$ este completă (i.e. fiecare $\mathcal{F}_t$ conţine neglijabilele).

Spunem că şirul M_n este **martingal** (cu timp discret) dacă M_n este adaptat la $\mathcal{F}_n$, M_n sunt integrabile pentru orice n şi

$$E\left[M_n \mid \mathcal{F}_{n-1}\right] = M_{n-1} \text{ a.s., pentru orice } n = 1, 2, \ldots$$

Similar spunem că familia M_t este martingal (cu timp continuu) dacă M_t este adaptat la $\mathcal{F}_t$, M_t sunt integrabile pentru orice t şi

$$E\left[M_t \mid \mathcal{F}_s\right] = M_s \text{ a.s., pentru orice } s \leq t.$$

Dacă avem $E\left[M_t \mid \mathcal{F}_s\right] \geq M_s$ a.s., pentru orice $s \leq t$, spunem că M_t este **submartingal.** Dacă avem $E\left[M_t \mid \mathcal{F}_s\right] \leq M_s$ a.s. **pentru orice $s \leq t$, avem un supermartingal.**

Un exemplu de martingal cu timp continuu (chiar uniform integrabil) este $M_t := E\left[Z \mid \mathcal{F}_t\right]$, unde Z este v.a. integrabilă.

Dacă luăm mediile in definiţia martingalelor, obţinem $EM_n = EM_{n-1}$, deci prin inducţie, $EM_n = EM_0$. In cazul timpului continuu, avem $EM_t = EM_0$.

Procesul $X = (X_t)_{t\geq 0}$ de v.a. reale se numeşte **gaussian** dacă orice combinaţie liniară reală finită cu elemente X_t are legea gaussiană. Să observăm că orice subsistem al unui proces gaussian este gaussian, deci legea oricărui subsistem finit $(X_1, \ldots, X_n)$ are legea gaussiană n-dimensională. Deasemenea, subspaţiul liniar inchis generat de X in $L^2(P)$ este încă gaussian.

13. *Legea unui proces gaussian este complet determinată de mediile sale şi de matricea de covariaţie asociată.*

Pentru ca v.a. gaussiene X_t , $t \geq 0$ să fie independente, este necesar şi suficient ca, pentru orice $t \neq s$ să avem

$$E\{[X_t - E(X_t)][X_s - E(X_s)]\} = 0.$$

14. *Pentru un proces gaussian, convergenţa in probabilitate (deci şi cea a.s.) este echivalentă cu convergenţa in L^2 , iar limita este gaussiană.*

Fie $I \subset [0, +\infty)$ şi procesul gaussian $X' := (X_t, t \in I)$. Notăm $\mathcal{F}'$ corpul borelian generat de X'. Atunci $E[X_t | \mathcal{F}']$ este proiecţia ortogonală a lui X_t pe subspaţiul liniar inchis generat in $L^2(P)$ de X' (deci proiecţia pe un subspaţiu mai mic decât cel generat in $L^2(P)$ de aplicaţiile $\mathcal{F}'$-măsurabile).

Intuitiv, $X = \{X_t, t \geq 0\}$ este proces Markov dacă, vrând să facem predicţia la timpul s a ceea ce se va intâmpla in viitor, aceasta se face cunoscând starea procesului X la timpul s şi nimic altceva. Trecutul "minimal" al unui proces stocastic X la timpul s este σ-algebra $\mathcal{F}_s^X = \sigma(X_u, 0 \leq u \leq s)$; riguros, proprietatea Markov inseamnă că

$$P\left[X_t \in A \mid \mathcal{F}_s^X\right] = P\left[X_t \in A \mid \sigma(X_s)\right] \text{ a.s.},$$

unde

$$P\left[X_t \in A \mid \mathcal{F}_s^X\right] := E\left[1_{(X_t \in A)} \middle| \mathcal{F}_s^X\right] \text{ pentru } A \subseteq \mathbb{R} \text{ boreliană.}$$

Să presupunem că, dat fiind un proces X, pentru orice $s \leq t$, există probabilităţi de tranziţie $P_{s,t}(x, \cdot)$, boreliene in x, astfel ca

$$P\left[X_t \in A \mid \mathcal{F}_s^X\right] = P_{s,t}(X_s, A) \text{ a.s. pentru } A \subseteq \mathbb{R} \text{ boreliană.}$$

Prin liniaritate şi limită monotonă, definiţia procesului Markov este echivalentă cu: pentru orice $s \leq t$ şi f boreliană şi mărginită, avem

$$E\left[f(X_t) \mid \mathcal{F}_s^X\right] = P_{s,t}f(X_s) \text{ a.s.},$$

$$\text{unde } P_{s,t}f(x) := \int f(y)P_{s,t}(x, dy)$$

sunt operatorii de tranziţie şi are loc relaţia Chapman-Kolmogorov

$$P_{s,u}(x, A) = \int P_{s,t}(x, dy)P_{t,u}(y, A)$$

pentru orice $0 \leq s \leq t \leq u$, $x \in \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$ boreliană.

Dacă operatorii de tranziţie P_t se pot scrie sub forma

$$P_{s,t}f(x) = \int f(y)p(t, s, x, y)dy$$

pentru f boreliană mărginită (sau continuă care se anulează la ∞), atunci $p(t, s, x, y)$ se numesc densităţile de tranziţie i.e. densităţile Radon-Nicodym ale măsurilor $P_{s,t}(x, dy)$.

Probabilităţile P_{st} se numesc omogene dacă depind doar de $t - s$ i.e. $P_{st} = P_{t-s}$, caz in care relaţia Chapman-Kolmogorov devine

$$P_{t+s}(x, A) = \int P_s(x, dy)P_t(y, A)$$

pentru orice $t, s \geq 0, A \subseteq \mathbb{R}$ boreliană mărginită, adică

$$P_{t+s}f(x) = P_t(P_sf)(x);$$

aceasta inseamnă că $\{P_t, t \geq 0\}$ formează semigrup care este tare continuu pe funcţiile continue dacă traiectoriile procesului X sunt continue (i.e. $P_tf \to P_sf$ uniform dacă f este continuă, iar $t \searrow s$).

15. Date fiind probabilităţile P_{st} , ν, atunci există un proces Markov cu probabilităţile de tranziăţie P_{st} şi legea iniţială $P \circ X_0^{-1} = \nu$.

Generatorul infinitezimal $\mathcal{L}$ asociat semigrupului P_t (conform teoremei Hille-Yosida) conţine in domeniul său $Dom(\mathcal{L})$

funcţiile boreliene mărginite (sau continue care se anulează la ∞) şi, pe aceste funcţii, are loc formula de calcul

$$\mathcal{L}f = \lim_{t \searrow 0} \frac{P_t f - f}{t} \text{ in sens tare (operatorial).}$$

Derivând ecuaţia semigrupului in $s = 0$, obţinem pentru $f \in Dom(\mathcal{L})$:

$$\frac{d}{dt} P_t f(x) = P_t (\mathcal{L}f)(x) \text{ si } \frac{d}{dt} P_t f(x) = \mathcal{L}(P_t f)(x),$$

numite *ecuaţia inainte* (sau Fokker-Planck), respectiv ***ecuaţia*** *inapoi.*

Spunem că procesul X pe $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ este Markov in raport cu filtrarea $\{\mathcal{G}_t, t \geq 0\}$ şi cu probabilităţile de tranziţie P_{st} dacă, pentru orice f boreliană şi pozitivă, avem

$$P[f(X_t) \mid \mathcal{G}_s] = P_{st}[f(X_s)] \ \ P - \text{a.s.}, 0 \leq s \leq t.$$

In cazul omogen, definiţia este

$$P[f(X_t) \mid \mathcal{G}_s] = P_{t-s}[f(X_s)].$$

Să observăm că, dacă X este Markov in raport cu $\mathcal{G}_t$, atunci este Markov şi in raport cu $\mathcal{F}_t^X$.

Dacă Ω este mulţimea funcţiilor continue de la $[0, +\infty)$ la $\mathbb{R}^d$, definim **operatorii de shift** $\theta_t : \Omega \to \Omega$ prin $\theta_s(\omega) = \omega(t + s)$. Vom presupune că există operatori de shift θ_t astfel ca $X_s \circ \theta_t = X_{t+s}$. Vom nota E^x media in raport P^x. Variabila $E^{X_s}Y$ este $\varphi(X_s)$, unde $\varphi(y) = E^y Y$. De exemplu, $E^x E^{X_s} Y = E^x \varphi(X_s)$.

16. Pentru a arăta că un proces este Markov, este suficient de arătat că, dacă Y este mărginită şi $\mathcal{G}_\infty$−măsurabilă, atunci

$$E^x[Y \circ \theta_t \mid \mathcal{G}_t] = E^{X_t} Y, \ P^x - \text{a.s.}$$

Intr-adevăr, luând $Y = 1_{(X_s \in A)}$, obţinem definiţia proprietăţii Markov.

Un proces stocastic $(X_n)_{n>0}$ care ia valori intr-o mulţime cel mult numărabilă (de stări) se numeşte **lanţ Markov** dacă

$$P[X_{n+1} = j \mid X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_1 = i_1, X_{01} = i_0]$$

$$= P[X_{n+1} = j | S_n = i]$$

pentru orice stări $i_0, i_1, \ldots, i_{n-1}, i, j$ şi orice $n \geq 0$. Valoarea comună a expresiilor de mai sus, notată p_{ij}, se numeşte probabilitatea de tranziţie a lanţului din starea i in starea j după un pas. Probabilităţile de tranziţie după n paşi la un lanţ omogen se definesc prin

$$p_{ij}^n = P[X_{m+n} = j | X_m = i],$$

relaţia Chapman-Kolmogorov devine

$$p_{ij}^{m+n} = \sum_{k=0}^{\infty} p_{ik}^n p_{kj}^m,$$

iar matricea probabilităţilor după n paşi este puterea a n-a a matricii probabilităţilor după un pas.

O stare j este accesibilă din starea i dacă există n cu $p_{ij}^n > 0$. Stările i, j accesibile una din alta se numesc comunicante, iar 'a fi comunicante' este relaţie de echivalenţă pe mulţimea stărilor.

2

PROPRIETĂŢI GENERALE

Pe un câmp de probabilitate $(\Omega, \mathcal{K}, P)$, un proces stocastic B_t se numeşte **mişcare browniană** (sau **proces Wiener**, notat W_t) care incepe din 0 dacă

(a) $B_0 = 0$ a.s.,

(b) pentru orice $0 \leq s \leq t$, $B_t - B_s$ este v.a. gaussiană centrată cu dispersia $t - s$,

(c) pentru orice $0 \leq s < t$, $B_t - B_s$ este v.a. independentă de cel mai mic corp borelian $\sigma(B_r, 0 \leq r \leq s)$ in raport cu care v.a. $B_r, 0 \leq r \leq s$ sunt măsurabile.

(d) cu probabilitate 1, traiectoriile (i.e. aplicaţiile $t \to B_t(\omega)$) sunt continue.

Luând mediile in egalitatea $2B_tB_s = B_t^2 + B_s^2 - (B_t - B_s)^2$, obţinem covariaţia mişcării browniene:

$$Cov(B_t, B_s) := E[B_tB_s] = t \wedge s.$$

In particular, in definiţia de mai sus, se poate inlocui (b) cu

(b') pentru $0 \leq s \leq t$, $B_t - B_s$ este familie gaussiană centrată cu covariaţia $t \wedge s$.

Pentru a defini o mişcare browniană care incepe din $x \in \mathbb{R}$, este suficient să considerăm procesul $B_t^x = x + B_t$; fie $\mathcal{F} =$

$\sigma(B_t, t < +\infty)$ şi definim probabilităţile P^x pe $(\Omega, \mathcal{F})$ prin

$$P^x[B^x_\cdot \in A] = P[x + B_\cdot \in A], \text{ pentru } x \in \mathbb{R}, A \in \mathcal{F}.$$

Vom numi perechea (P^x, B_t) ; $x \in \mathbb{R}, t \geq 0$ mişcare browniană.

PROPOZIŢIA 2.1 *(proprietatea de scaling). Fie $a > 0$ şi (P^x, B_t) mişcare browniană care incepe din x; atunci*

$$\left(P^{x/a}, a^{-1}B_{a^2t}\right)$$

este mişcare browniană care incepe din x/a.

Demonstraţie. Cum P^x este definită prin translaţie, este suficient să considerăm $x = 0$. Aplicaţia $a^{-1}B_{a^2t}$ este continuă in t şi

$$Cov\left(a^{-1}B_{a^2t}, a^{-1}B_{a^2s}\right) = a^{-2}\left(a^2t \wedge a^2s\right) = t \wedge s.$$

Folosind formula (1.2.) şi că, pentru $t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_n$, legea lui $(a^{-1}B_{a^2t_1}, \ldots, \ a^{-1}B_{a^2t_n})$ este determinată de matricea ei de covariaţie, obţinem că aceasta coincide cu covariaţia mişcării browniene. Cum ambele procese sunt continue, $a^{-1}B_{a^2t}$ trebuie să fie mişcare browniană.

PROPOZIŢIA 2.2 *(proprietatea de simetrie). Dacă (P^x, B_t) este mişcare browniană care incepe din x, atunci $(P^{-x}, -B_t)$ este mişcare browniană care incepe din $-x$.*

Demonstraţie. Procesul $-B_t$ are traiectoriile continue şi creşteri independente. Intrucât $Cov(B_t - B_s) = (t - s)$, obţinem

$$Cov\left[(-B_t) - (-B_s)\right] = (t - s),$$

iar comentariile de după formula (1.2.) arată independenţa creşterilor de tipul $(-B_t) - (-B_s)$.

PROPOZIŢIA 2.3 *(proprietatea de inversare a timpului). Dacă B_t este mişcare browniană pe $[0, 1]$, atunci*

$$\widetilde{B}_t := tB_{1/t}\ , \ t \in [1, +\infty)$$

este mişcare browniană pe $[1, +\infty)$.

Demonstraţie. Evident v.a. $\widetilde{B}_t$ sunt gaussiene, centrate şi continue in t. Să calculăm covariaţiile lui $\widetilde{B}$.

$$Cov\left(\widetilde{B}_t\widetilde{B}_s\right) = tsCov\left(B_{1/t}, B_{1/s}\right) = ts\left(\frac{1}{t} \wedge \frac{1}{s}\right) = t \wedge s.$$

2.1 PRIMA CONSTRUCŢIE

Vom prezenta prima construcţie a mişcării browniene, care se face cu ajutorul v.a. i.i.d. şi a spaţiului L^2. La inceput, vom construi mişcarea browniană pe $[0,1]$. Mai precis, pentru $i = 1, 2, \ldots$ şi $j = 1, 2, \ldots 2^{i-1}$, fie φ_{ij} funcţia pe $[0,1]$ definită astfel:

$$\varphi_{ij}(x) = \begin{cases} 2^{(i-1)/2}, & \text{dacă } x \in [(2j-2)/2^i, (2j-1)/2^i), \\ -2^{(i-1)/2}, & \text{dacă } x \in [(2j-1)/2^i, 2j/2^i), \\ 0, & \text{in caz contrar.} \end{cases}$$

Fie φ_{00} funcţia identic egală cu 1. Funcţiile φ_{ij} formează sistemul Haar; dacă $\langle\cdot,\cdot\rangle$ este produsul scalar in $L^2[0,1]$ i.e. $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)\,\bar{g}\,(x)dx$, atunci φ_{ij} sunt ortogonale şi au norma 1.

Mai mult, ele formează sistem complet ortonormal in $L^2[0,1]$: $\varphi_{00} \equiv 1$; $1_{[0,1/2)}$ şi $1_{[1/2,1)}$ sunt combinaţii liniare de φ_{00} şi φ_{11}; apoi $1_{[0,1/4)}$ şi $1_{[1/4,1/2)}$ sunt combinaţii liniare de $1_{[0,1/2)}, \varphi_{21}$ si φ_{22}. Continuând in acest fel obţinem că $1_{[k/2^n,(k+1)/2^n)}$ este combinaţie liniară de φ_{ij} pentru orice n şi $k \leq 2^n$. Cum funcţiile continue pot fi aproximate uniform cu funcţii in scară ale căror salturi sunt raţionalele diadice, rezultă că funcţiile Haar sunt dense in mulţimea funcţiilor continue, care la rândul lor sunt dense in $L^2[0,1]$.

Fie sistemul Schauder

$$\psi_{ij} = \int_0^t \varphi_{ij}(s)ds$$

şi Y_{ij} un şir de v.a. gaussiene i.i.d. centrate cu dispersia 1. Fie

$$V_0(t) = Y_{00}\psi_{00}(t),\ V_i(t) = \sum_{j=1}^{2^{i-1}} Y_{ij}\psi_{ij}(t),\ i \geq 1.$$

$\sigma(B_t, t < +\infty)$ şi definim probabilităţile P^x pe $(\Omega, \mathcal{F})$ prin

$$P^x[B^x_\cdot \in A] = P[x + B_\cdot \in A], \text{ pentru } x \in \mathbb{R}, A \in \mathcal{F}.$$

Vom numi perechea $(P^x, B_t); x \in \mathbb{R}, t \geq 0$ mişcare browniană.

PROPOZIŢIA 2.1 *(proprietatea de scaling). Fie $a > 0$ şi (P^x, B_t) mişcare browniană care incepe din x; atunci*

$$\left(P^{x/a}, a^{-1}B_{a^2t}\right)$$

este mişcare browniană care incepe din x/a.

Demonstraţie. Cum P^x este definită prin translaţie, este suficient să considerăm $x = 0$. Aplicaţia $a^{-1}B_{a^2t}$ este continuă in t şi

$$Cov\left(a^{-1}B_{a^2t}, a^{-1}B_{a^2s}\right) = a^{-2}\left(a^2t \wedge a^2s\right) = t \wedge s.$$

Folosind formula (1.2.) şi că, pentru $t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_n$, legea lui $(a^{-1}B_{a^2t_1}, \ldots, a^{-1}B_{a^2t_n})$ este determinată de matricea ei de covariaţie, obţinem că aceasta coincide cu covariaţia mişcării browniene. Cum ambele procese sunt continue, $a^{-1}B_{a^2t}$ trebuie să fie mişcare browniană.

PROPOZIŢIA 2.2 *(proprietatea de simetrie). Dacă (P^x, B_t) este mişcare browniană care incepe din x, atunci $(P^{-x}, -B_t)$ este mişcare browniană care incepe din $-x$.*

Demonstraţie. Procesul $-B_t$ are traiectoriile continue şi creşteri independente. Intrucât $Cov(B_t - B_s) = (t - s)$, obţinem

$$Cov[(-B_t) - (-B_s)] = (t - s),$$

iar comentariile de după formula (1.2.) arată independenţa creşterilor de tipul $(-B_t) - (-B_s)$.

PROPOZIŢIA 2.3 *(proprietatea de inversare a timpului). Dacă B_t este mişcare browniană pe $[0,1]$, atunci*

$$\widetilde{B}_t := tB_{1/t}, \ t \in [1, +\infty)$$

este mişcare browniană pe $[1, +\infty)$.

Demonstraţie. Evident v.a. $\widetilde{B}_t$ sunt gaussiene, centrate şi continue in t. Să calculăm covariaţiile lui $\widetilde{B}$.

$$Cov\left(\widetilde{B}_t\widetilde{B}_s\right) = tsCov\left(B_{1/t}, B_{1/s}\right) = ts\left(\frac{1}{t} \wedge \frac{1}{s}\right) = t \wedge s.$$

2.1 PRIMA CONSTRUCŢIE

Vom prezenta prima construcţie a mişcării browniene, care se face cu ajutorul v.a. i.i.d. şi a spaţiului L^2. La inceput, vom construi mişcarea browniană pe $[0,1]$. Mai precis, pentru $i = 1, 2, \ldots$ şi $j = 1, 2, \ldots 2^{i-1}$, fie φ_{ij} funcţia pe $[0,1]$ definită astfel:

$$\varphi_{ij}(x) = \begin{cases} 2^{(i-1)/2}, & \text{dacă } x \in \left[(2j-2)/2^i, (2j-1)/2^i\right), \\ -2^{(i-1)/2}, & \text{dacă } x \in \left[(2j-1)/2^i, 2j/2^i\right), \\ 0, & \text{in caz contrar.} \end{cases}$$

Fie φ_{00} funcţia identic egală cu 1. Funcţiile φ_{ij} formează sistemul Haar; dacă $\langle \cdot, \cdot \rangle$ este produsul scalar in $L^2[0,1]$ i.e. $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)\,\bar{g}\,(x)dx$, atunci φ_{ij} sunt ortogonale şi au norma 1.

Mai mult, ele formează sistem complet ortonormal in $L^2[0,1]$: $\varphi_{00} \equiv 1$; $1_{[0,1/2)}$ şi $1_{[1/2,1)}$ sunt combinaţii liniare de φ_{00} şi φ_{11}; apoi $1_{[0,1/4)}$ şi $1_{[1/4,1/2)}$ sunt combinaţii liniare de $1_{[0,1/2)}, \varphi_{21}$ si φ_{22}. Continuând in acest fel obţinem că $1_{[k/2^n,(k+1)/2^n)}$ este combinaţie liniară de φ_{ij} pentru orice n şi $k \le 2^n$. Cum funcţiile continue pot fi aproximate uniform cu funcţii in scară ale căror salturi sunt raţionalele diadice, rezultă că funcţiile Haar sunt dense in mulţimea funcţiilor continue, care la rândul lor sunt dense in $L^2[0,1]$.

Fie sistemul Schauder

$$\psi_{ij} = \int_0^t \varphi_{ij}(s)ds$$

şi Y_{ij} un şir de v.a. gaussiene i.i.d. centrate cu dispersia 1. Fie

$$V_0(t) = Y_{00}\psi_{00}(t),\ V_i(t) = \sum_{j=1}^{2^{i-1}} Y_{ij}\psi_{ij}(t),\ i \ge 1.$$

TEOREMA 2.4 *Cu notaţiile de mai sus, seria*

$$\sum_{i=0}^{+\infty} V_i(t) \text{ converge a.s. şi uniform în } t.$$

Suma seriei, notată B_t , este mişcare browniană pe $[0,1]$ care începe din 0.

Demonstraţie. Să demonstrăm convergenţa seriei. Vom arăta că

$$\sum_{i=0}^{+\infty} P\left[|V_i(t)| > \frac{1}{i^2} \text{ pentru un } t \in [0,1]\right] < +\infty. \tag{2.1}$$

Într-adevăr,

$$P\left[|V_i(t)| > \frac{1}{i^2} \text{ pentru un } t \in [0,1]\right]$$

$$\leq P\left[|Y_{ij}(t)|\,\psi_{ij}(t) > \frac{1}{i^2} \text{ pentru un } t \in [0,1] \text{ şi un } 0 \leq j \leq 2^{i-1}\right]$$

$$\leq P\left[|Y_{ij}(t)|\,2^{-(i+1)/2} > \frac{1}{i^2} \text{ pentru un } 0 \leq i \leq 2^{i-1}\right]$$

$$\leq \left(2^{i-1}+1\right) P\left[|Z| > \frac{2^{(i+1)/2}}{i^2}\right],$$

unde Z este v.a. gaussiană centrată de dispersie 1. Membrul drept din ultima inegalitate este dominat de $2^i \exp\left(-2^i/i^4\right)$, care este termenul general al unei serii convergente în i.

Din relaţia 2.1 şi lema Borel-Cantelli rezultă, cu probabilitate 1 şi pentru un i care depinde de ω, că avem

$$\sup_t |V_i(t)| \leq \frac{1}{i^2}.$$

Aceasta arată că $\sum_{i=0}^{p} V_i(t)$ converge când $p \to +\infty$, uniform în raport cu $t \in [0,1]$. Mai mult, cum $\psi_{ij}(t)$ sunt continue, la fel sunt şi $V_i(t)$, deci B_t sunt continue în t. V_j sunt gaussiene şi independente, deci B_t sunt gaussiene. Evident acestea sunt şi centrate. Rămân de calculat covariaţiile. Dacă $f \in L^2[0,1]$, identitatea lui Parseval spune că

$$\langle f, f\rangle = \sum_{i,j} \langle \varphi_{ij}, f\rangle^2$$

$$\text{şi cum } \psi_{ij}(t) - \psi_{ij}(s) = \langle \varphi_{ij}, 1_{[s,t]}\rangle,$$

$$\text{avem că } B_t - B_s = \sum_{i,j} Y_{ij}\langle \varphi_{ij}, 1_{[s,t]}\rangle.$$

Cum Y_{ij} sunt independente, centrate şi de dispersie 1, obţinem

$$E\left[B_t - B_s\right]^2 = E\left[\sum_{i,j} Y_{ij}\langle \varphi_{ij}, 1_{[s,t]}\rangle\right]^2$$

$$= \sum_{i,j} \langle \varphi_{ij}, 1_{[s,t]}\rangle^2 = \langle 1_{[s,t]}, 1_{[s,t]}\rangle = t - s.$$

Similar,

$$f = \sum_{i,j} \langle \varphi_{ij}, f\rangle \varphi_{ij}\ , \text{ sau } \langle f, g\rangle = \sum_{i,j} \langle \varphi_{ij}, f\rangle\langle \varphi_{ij}, g\rangle;$$

deci

$$E\left[(B_t - B_s)(B_r - B_q)\right]$$

$$= E\left[\left(\sum_{i,j} Y_{ij}\langle \varphi_{ij}, 1_{[s,t]}\rangle\right)\left(\sum_{k,l} Y_{kl}\langle \varphi_{kl}, 1_{[q,r]}\rangle\right)\right]$$

$$= \sum_{i,j} \langle \varphi_{ij}, 1_{[s,t]}\rangle\langle \varphi_{kl}, 1_{[q,r]}\rangle = \langle 1_{[s,t]}, 1_{[q,r]}\rangle.$$

Dacă $r \leq s$, ultimul produs scalar este 0, deci $B_t - B_s$ este v.a. gaussiană centrată de dispersie $t - s$ şi independentă de $B_{r_{i+1}} - B_{r_i}$ dacă $r_1 \leq r_2 \leq \ldots \leq r_n \leq s$.

Pentru a construi mişcarea browniană pe $[0, +\infty)$, considerăm $\widetilde{B}_t$ din propoziţia 2.3 şi fie B'_t mişcare browniană pe $[0, 1]$ independentă de B_t . Definim

$$W_t := \begin{cases} B'_t\,, & \text{dacă } t \leq 1 \\ B'_1 + \widetilde{B}_t - \widetilde{B}_1\,, & \text{dacă } t > 1, \end{cases}$$

şi apoi verificăm uşor că W_t este o mişcare browniană pe $[0, +\infty)$.

2.2 REGULARITATEA TRAIECTORIILOR

Prin definiţie, traiectoriile mişcarii browniene $t \to B_t(\omega)$ sunt continue pentru aproape toţi ω; să studiem in continuare uniform continutatea şi derivabilitatea traiectoriilor, comportamentul asimptotic al acestora (când $t \to +\infty$) şi comportamentul in vecinătatea lui $t = 0$.

PROPOZIŢIA 2.5 *(modulul de continuitate al traiectoriilor browniene) Presupunem că $t \in [0, 1]$ şi fie $c > 1$ dat. Pentru aproape toţi ω, există $\delta = \delta(\omega) > 0$ astfel ca, dacă $| t - s | < \delta$, atunci*

$$|B_t(\omega) - B_s(\omega)| \leq c\left[-2\,|t - s|\log|t - s|\right]^{1/2}.$$

Demonstraţie. Fie $h = 1/n$. Din inegalitatea

$$\int_a^{+\infty} e^{-x^2/2}dx < a^{-1}e^{-a^2/2} \text{ pentru orice } a > 0,$$

obţinem pentru n suficient de mare

$$\alpha_n := P\left(| B_{t+h} - B_t > c\,(-2h\log h)^{1/2}\right)$$

$$= \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_{c(2\log n)^{1/2}}^{+\infty} e^{-x^2/2}dx < \frac{n^{-c^2}}{c\,(\pi\log n)^{1/2}}.$$

Probabilitatea ca cel puţin una dintre creşterile $B_{(k+1)h} - B_{kh}$; $k = 0, 1, \ldots, n-1$ să fie mai mare decât $c(-2h \log h)^{1/2}$ in valoare absolută este cel mult $n\alpha_n$ şi, luând $n = 2^p$, avem

$$\sum_p 2^p \alpha_{2^p} < \sum_p 2^p \left(c^2 \pi \log 2\right)^{-1/2} p^{-1/2} 2^{-c^2 p}$$

$$= \left(c^2 \pi \log 2\right)^{-1/2} \sum_p p^{-1/2} 2^{(1-c^2)p} < +\infty.$$

Conform lemei Borel-Cantelli, pentru aproape toţi ω, există $p_0 = p_0(\omega)$ astfel ca, pentru orice $p > p_0$ să avem

$$(a) \quad \left|B_{(k+1)h} - B_{kh}\right| \leq c(-2h \log h)^{1/2}, h = 2^{-p},$$

adică concluzia pentru $t = (k+1)/2^p$, $s = k/2^p$, cu $k = 0, 1, \ldots, 2^p - 1$.

In cazul $t = q2^{-p}$ şi $t < s < t + 2^{-p}$ pentru un $p > p_0$, scriem dezvoltarea binară

$$s - t = \varepsilon_n 2^{-p-n} \ , \ \varepsilon_n = 0 \text{ sau } 1$$

şi din (a) obţinem

$$|B_t - B_s| \leq c \sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon_n \left\{2(p+n) \log 2\right\}^{1/2} 2^{-(n+p)/2}.$$

Notăm n_0 cel mai mic n cu $\varepsilon_n = 1$, punem $n = n_0 + n' - 1$ şi din $p + n \leq (p + n_0)\, n'$ obţinem

$$|B_t - B_s| \leq c \left\{2(p+n_0) \log 2\right\}^{1/2} 2^{-(n_0+p)/2} \sum_{n'=1}^{+\infty} (2n')^{1/2} 2^{-n'/2}$$

$$= cA \left\{2(p+n_0) \log 2\right\}^{1/2} 2^{-(n_0+p)/2}, \text{ cu } A > 1.$$

Cum funcţia $-h \log h$ este crescătoare intre $2^{-(n_0+p)}$ si $s - t$, obţinem

$$(b) \quad |B_s - B_t| \leq c' \left[-2\,|t-s| \log |t-s|\right]^{1/2},$$

cu $c' > 1$. Similar demonstrăm (b) in cazul $t = q2^{-p}$ şi $t > s > t - 2^{-p}$.

Apoi demonstrăm (a) in cazul $t = q2^{-p}$, $s = (q+n)2^{-p}$, $1 \leq n \leq N$, N fixat i.e. pentru aproape toţi ω există $p_1 = p_1(\omega)$ astfel ca, pentru orice $p > p_1$ să avem

$$\text{(c)}\ \left|B_{(q+n)2^{-p}} - B_{q2^{-p}}\right| \leq c''\left(-2h_n \log h_n\right)^{1/2}\ ,\ h_n = n2^{-p},$$

cu $c'' > 1$.

In fine fie $s > t$ astfel ca $N2^{-p-1} < s - t \leq N2^{-p}$, $p > \max(p_0, p_1)$, pentru un N natural. Atunci există q, q' cu

$$q2^{-p} < t \leq t_1 = (q+1)2^{-p} < s_1 = q'2^{-p} \leq s < (q'+1)\,2^{-p},$$

unde $N/2 - 1 < q' - q < N + 1$. Considerăm inegalitatea

$$| B_s - B_t | \leq | B_s - B_{s_1} | + | B_{s_1} - B_{t_1} | + | B_{t_1} - B_t |$$

şi alegem ε, c', c'', N astfel ca $c = 1+2\varepsilon$, $c'' = 1+\varepsilon$, $N \geq 16c'^2\varepsilon^{-2}$; ca şi inainte, numerele $p_0(\omega)$ şi $p_1(\omega)$ sunt suficient de mari. Cum funcţia $-h\log h$ este monotonă pentru h mic, inegalitatea (c) implică

$$|B_{s_1} - B_{t_1}| < (1+\varepsilon)\left[-2\,|t-s|\log|t-s|\right]^{1/2}.$$

Inegalitatea (b) implică

$$|B_s - B_{s_1}| + |B_{t_1} - B_t| < 2c'\left(2^{1-p}\log 2^p\right)^{1/2}$$

$$< 2c'\left[4\,|t-s|\ |\ N^{-1}\log\left(N\,|t-s|^{-1}\right)\right]^{1/2}.$$

Cum putem presupune $|t - s| < N^{-1}$, ultima expresie este dominată de

$$4c'\left[2\,|t-s|\,N^{-1}\log\left(|t-s|^{-1}\right)\right]^{1/2}$$

$$< \varepsilon\left[2\,|t-s|\log\left(|t-s|^{-1}\right)\right]^{1/2}.$$

Exerciţiu. Pentru orice $\varepsilon \in (0, 1/2)$, cu probabilitate 1, traiectoriile mişcarii browniene sunt Hölder continue de ordin ε.

PROPOZIŢIA 2.6 *(nederivabilitatea traiectoriilor browniene). Aproape toate traiectoriile mişcării browniene nu sunt nicaieri derivabile, i.e. cu probabilitate* 1, *aplicaţiile* $t \to B_t(\omega)$ *nu au derivată in nici un punct* t.

Demonstraţie. Este suficient să facem demonstraţia pentru $t \in [0,1]$. Dacă B_t ar fi derivabilă intr-un $s \in [0,1]$, atunci ar exista $\varepsilon > 0$ şi un intreg $k \geq 1$ astfel ca

$$|B_t - B_s| \leq k\,|t - s| \text{ pentru } 0 < t - s < \varepsilon.$$

Atunci, pentru n suficient de mare, avem

$$\left|B_{j/n} - B_{(j+1)/n}\right| < 4\frac{k}{n},\ j = i+1, i+2, i+3, \text{ unde } i = [ns]+1.$$

Fie $A_{k,n}^{i,j}$ mulţimea acelor ω care satisfac ultima inegalitate; evident este o mulţime măsurabilă in raport cu mişcarea browniană, ca şi

$$A := \bigcup_{k>1}\bigcup_{m\geq 1}\bigcap_{n\geq m}\bigcup_{0<i\leq n}\bigcap_{i<j\leq i+3} A_{k,n}^{i,j}.$$

Mulţimea A este evenimentul următor: există un intreg k astfel ca, pentru toţi n suficient de mari, ultima inegalitate are loc intr-un punct i/n. Deci A conţine toţi ω pentru care B_t este derivabilă intr-un t, şi deci este suficient să arătăm că $P(A) = 0$. Insă

$$P\left(\bigcap_{n>m}\bigcup_{0<i<n}\bigcap_{i<j<i+3} A_{k,n}^{i,j}\right) \leq \liminf_{n\to+\infty} n\left\{P\left[\left|B_{1/n}\right| < 4\frac{k}{n}\right]\right\}^3$$

$$= \liminf_{n\to+\infty} n\left\{P\left[|B_1| < 4\frac{k}{\sqrt{n}}\right]\right\}^3 \leq \lim_{n\to+\infty} n\left\{(2\pi)^{-1/2}\frac{8k}{\sqrt{n}}\right\}^3 = 0.$$

Apoi ţinem cont că A este reuniune numărabilă de mulţimi de probabilitate nulă.

Fie $\pi(t) = \{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k\}$ o partiţie a intervalului $[0, t]$ cu norma $\|\pi(t)\| = \max_{0 \le i \le k-1} |t_{i+1} - t_i|$ si $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ o funcţie oarecare. Definim

$$var(f, \pi(t)) = \sum_{i=0}^{k-1} |f(t_{i+1}) - f(t_i)|^2$$

Fie acum un şir de partiţii $\pi_n(t), n \in \mathbb{N}$ ale lui $[0, t]$ astfel ca

$$\pi_0(t) = \{0, t\} \subset \pi_1(t) \subset \pi_2(t) \subset \ldots$$

Reamintim că, dacă f este cu variaţie mărginită pe $[0, t]$ şi $\|\pi_n(t)\| \to 0$ când $n \to +\infty$, atunci există

$$\lim_{n \to +\infty} var(f, \pi_n(t)) = 0.$$

PROPOZIŢIA 2.7 *(variaţia traiectoriilor browniene) Pentru aproape toţi ω şi dacă $\|\pi_n(t)\| \to 0$, atunci*

$$\lim_{n \to +\infty} var(B_{\cdot}(\omega), \pi_n(t)) = t.$$

In particular: pentru aproape toţi ω, traiectoriile mişcării browniene au variaţie nemărginită pe orice interval $[0, t]$.

Demonstraţie. Pentru $t > 0$ fixat, este suficient de arătat că

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{2^n} \left[B_{kt/2^n} - B_{(k-1)t/2^n}\right]^2 = t \text{ a.p.t.}$$

De aici deducem in particular că variaţia traiectoriilor este nemărginită, ţinând cont că

$$\sum_{k=1}^{2^n} \left|B_{kt/2^n} - B_{(k-1)t/2^n}\right| \ge \frac{\sum_{k=1}^{2^n} \left[B_{kt/2^n} - B_{(k-1)t/2^n}\right]^2}{\max_{j=1,\ldots,2^n} \left|B_{jt/2^n} - B_{(j-1)t/2^n}\right|} \text{ a.p.t.}$$

(deoarece numărătorul tinde a.p.t. către t, iar numitorul către 0, din uniform continuitatea traiectoriilor).

Fie

$$\Delta_{nk} = B_{kt/2^n} - B_{(k-1)t/2^n} \ , \ k = 1, \ldots, 2^n$$
$$\text{şi } B_{nk} = \Delta_{nk}^2 - t/2^n \ , \ k = 1, \ldots, 2^n \ .$$

Avem de demonstrat că

$$\sum_{k=1}^{2^n} B_{nk} \to 0 \text{ a.p.t.}$$

Pentru orice n, v.a. $(B_{nk})_k$ sunt i.i.d. cu

$$E\left[B_{nk}\right] = 0, \ E\left[B_{nk}^2\right] = \frac{2t^2}{4^n},$$

deci

$$E\left[\left(\sum_{k=1}^{2^n} B_{nk}\right)^2\right] = \sum_{k=1}^{2^n} E\left[B_{nk}^2\right] = \frac{2^{n+1}t^2}{4^n} = \frac{2t^2}{2^n}.$$

Cum $2t^2/4^n \to 0$ când $n \to +\infty$, obţinem formula dorită dar cu limita in sens L^2 . Pentru convergenţa a.p.t., folosim inegalitatea lui Cebâşev:

$$P\left[\left|\sum_{k=1}^{2^n} B_{nk}\right| > \varepsilon\right] \le \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{2t^2}{2^n},$$

şi cum ε a fost arbitrar, obţinem că $\sum_{k=1}^{2^n} B_{nk} \to 0$ a.p.t.

Am văzut că procesele $B_t, t \ge 0$ şi $tB_{1/t}, t > 0$ au aceeaşi lege. Intrucât $B_{0+} = 0$ a.s., avem $\lim_{t\searrow 0} tB_{1/t} = 0$ a.s. sau, inlocuind t cu $1/t$, obţinem

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{B_t(\omega)}{t} = 0 \text{ a.s.}$$

Un rezultat mai precis este

PROPOZIŢIA 2.8 *(legea logaritmului iterat) Pentru aproape toţi ω, avem*

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{B_t(\omega)}{(2t \operatorname{loglog} t)^{1/2}} = 1; \ \ \liminf_{t\to+\infty} \frac{B_t(\omega)}{(2t \operatorname{loglog} t)^{1/2}} = -1$$

sau, echivalent

$$\limsup_{t\searrow 0}\frac{B_t(\omega)}{\left(2t\log\log\frac{1}{t}\right)^{1/2}}=1;\quad \liminf_{t\searrow 0}\frac{B_t(\omega)}{\left(2t\log\log\frac{1}{t}\right)^{1/2}}=-1.$$

Demonstraţia o vom face in capitolul 3, ca aplicaţie a inegalităţilor lui Doob.

Exerciţiu. Folosind propoziţia 2.8, arătaţi *proprietatea de recurenţă* a mişcării browniene: pentru orice $x\in\mathbb{R}$, mulţimea $\{t : B_t = x\}$ este nemărginită a.s. Cu teorema lui Fubini, arătaţi că este neglijabilă Lebesgue.

Ţinând cont că pentru orice $a>0$ procesul $B_{t+a}-B_a$, $t\geq 0$ este o mişcare browniană şi că procesele $B_{a+h}-B_a$, $h\geq 0$, $B_{a-h}-B_a$, $h\geq 0$ au aceeaşi lege in jurul lui $h=0$, obţinem

COROLAR 2.9 *(continuitatea locală a traiectoriilor browniene) Pentru aproape toţi ω, avem*

$$\limsup_{h\searrow 0}\frac{B_{a+h}(\omega)-B_a(\omega)}{\left(2h\log\log\frac{1}{h}\right)^{1/2}}=1;\quad \liminf_{h\searrow 0}\frac{B_{a+h}(\omega)-B_a(\omega)}{\left(2h\log\log\frac{1}{h}\right)^{1/2}}=-1.$$

Exerciţiu. Din corolarul 2.9 deduceţi că, pentru orice $\varepsilon\in[1/2,1]$, cu probabilitate 1, traiectoriile mişcării browniene nu sunt Hölder continue de ordin ε.

3

METODE DE MARTINGALE

Să incepem prin a observa că, dacă B_t este mişcare browniană, atunci ea este martingal, deoarece

$$E[B_t \mid \mathcal{F}_s] = B_s + E[B_t - B_s \mid \mathcal{F}_s] = B_s + E[B_t - B_s] = B_s ,$$

folosind independenţa creşterilor. Similar $B_t^2 - t$ este martingal, deoarece

$$E\left[B_t^2 \mid \mathcal{F}_s\right] = E\left[(B_t - B_s)^2 \mid \mathcal{F}_s\right] +$$
$$+2B_s E[B_t \mid \mathcal{F}_s] - B_s^2 = t - s + B_s^2 ,$$

folosind independenţa creşterilor şi faptul că $B_t - B_s$ are legea $N(0, t-s)$.

Exerciţiu. Arătaţi că $\exp(aB_t - a^2t/2)$ este martingal pentru orice $a \in \mathbb{C}$.

3.1 OPŢIONALIZARE ŞI APLICAŢII

Fie $\mathcal{F}_t, t \geq 0$ filtrare continuă la dreapta şi X_t proces stocastic adaptat la $\mathcal{F}_t$ (continuitatea la dreapta a filtrării este sugerată de cazul mişcării browniene, aşa cum vom vedea la capitolul 4). O aplicaţie $T : \Omega \to [0, +\infty)$ se numeşte **timp de stopare** (sau opţională) dacă $(T < t) \in \mathcal{F}_t$ pentru orice t. Au loc următoarele proprietăţi:

(a) T este timp de stopare dacă şi numai dacă $(T \leq t) \in \mathcal{F}_t$ pentru orice t.

(b) timpii $T = t$ sunt de stopare.

(c) T, S timpi de stopare$\Rightarrow T \vee S, T \wedge S$ sunt timpi de stopare.

(d) dacă T_n este şir crescător (resp. descrescător) de timpi de stopare, atunci $\sup_n T_n$ (resp. $\inf_n T_n$) sunt timpi de stopare.

(e) dacă T este timp de stopare, atunci şi $T + t$ este timp de stopare, pentru orice t.

Să demonstrăm (a). Dacă T este timp de stopare, avem

$$(T \leq t) = \bigcap_{n>N} (T < t + 1/n) \in \bigcap_{n>N} \mathcal{F}_{t+1/n}$$

pentru orice n, deci $(T \leq t) \in \mathcal{F}_{t+} = \mathcal{F}_t$. Reciproc, dacă $(T < t) \in \mathcal{F}_t$ pentru orice t, atunci

$$(T < t) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (T \leq t - 1/n) \in \mathcal{F}_t,$$

deoarece $\mathcal{F}_t$ este crescătoare.

Exemple. Numim prima intrare (primul timp de intrare) a procesului X_t in mulţimea A, aplicaţia

$$T_A = \inf \{t > 0 : X_t \in A\}$$

şi prima ieşire din A

$$\tau_A = \inf \{t > 0 : X_t \notin A\}.$$

Desigur că $T_A = \tau_{A^c}$ şi $\tau_A = T_{A^c}$. Deşi sunt timpi de stopare pentru orice boreliană A, vom arăta numai

PROPOZIŢIA 3.1 *Dacă X_t are traiectoriile continue şi dacă A este deschisă (sau inchisă), atunci T_A este timp de stopare.*

Demonstraţie. Fie A deschisă. Dacă $T < t$ pentru un $s < t$, avem $X_s \in A$. Din continuitatea traiectoriilor există un raţional $q < t$ cu $X_q \in A$. Deci

$$(T < t) = \bigcup_{q<t,\ q \text{ raţional}} (X_q \in A) \in \mathcal{F}_t .$$

Dacă A este inchisă, fie $A_n = \{x : \text{dist}(x, A) < 1/n\}$. Mulţimile A_n sunt deschise, şi cum T_{A_n} este şir crescător de timpi de stopare, rezultă că $T = \sup_n T_{A_n}$ este timp de stopare. Cum $T_A \geq T_{A_n}$ pentru orice n, avem $T_A \geq T$. Dacă $T = \infty$, atunci $T_A = \infty$; dacă $T < \infty$, din continuitatea traiectoriilor avem $X_T = \lim_n X_{T_{A_n}}$, unde $X_T := X_{T(\omega)}(\omega)$. Dar $X_{T_{A_n}}$ este in inchiderea lui A_m pentru $n \geq m$, deci la fel este şi X_T, pentru orice m. Aceasta implică $X_T \in A$ sau $T_A \leq T$.

Fie acum T un timp de stopare; definim corpul borelian al evenimentelor cunoscute până la timpul T prin

$$\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F}_\infty : A \cap (T \leq t) \in \mathcal{F}_t \text{ pentru orice } t > 0\}$$

$$\text{şi } X_T(\omega) := X_{T(\omega)}(\omega).$$

Exerciţiu. Dacă $X_t = B_t$ =mişcare browniană, arătaţi că $\mathcal{F}_T$ este corp borelian şi că T, B_T sunt $\mathcal{F}_T$−măsurabile.

Dacă luăm mediile in definiţia martingalelor, obţinem $EM_n = EM_{n-1}$, deci prin inducţie, $EM_n = EM_0$. Teorema de opţionalizare a lui Doob afirmă că relaţia precedentă rămâne adevărată dacă inlocuim n cu un timp de stopare T. Există mai multe variante ale teoremei de opţionalizare, in funcţie de condiţiile pe care le punem asupra timpilor de stopare (dificultăţile apar când considerăm timpi de stopare nemărginiţi şi/sau in timp continuu). In acest curs vom avea nevoie de următoarele două variante.

LEMA 3.2 *(opţionalizare în timp discret) Dacă T este timp de stopare mărginit în raport cu $\mathcal{F}_n$ şi M_n este martingal, atunci $EM_T = EM_0$. Dacă T este mărginit de k şi M_n este submartingal, atunci $EM_T \le EM_k$.*

Demonstraţie. Fie k cea mai mare valoare pe care o ia T. Avem

$$EM_T = \sum_{i=0}^{k} \int_{(T=i)} M_T dP = \sum_{i=0}^{k} \int_{(T=i)} M_i dP\,;$$

Cum $(T = i)$ este $\mathcal{F}_j$−măsurabilă pentru $j \ge i$, obţinem

$$\int_{(T=i)} M_i dP = \int_{(T=i)} M_{i+1} dP =$$

$$\int_{(T=i)} M_{i+2} dP = \ldots = \int_{(T=i)} M_k dP,$$

deci

$$EM_T = \sum_{i=0}^{k} \int_{(T=i)} M_k dP = EM_k = EM_0.$$

Cu aceeaşi demonstraţie se face partea a doua.

Observaţie. Inegalitatea lui Jensen se păstrează pentru valori medii condiţionate (vezi capitolul 1). In limbaj de martingale, obţinem: dacă M_t este martingal sau submartingal pozitiv, φ convexă şi $\varphi(|M_t|)$ integrabilă, atunci

$$E[\varphi(|M_t|) \mid \mathcal{F}_s] \ge \varphi(|E[M_t \mid \mathcal{F}_s]|) \ge \varphi(|M_s|)$$

dacă $s \le t$, adică $\varphi(|M_t|)$ este submartingal.

TEOREMA 3.3 *(opţionalizare în timp continuu) Dacă M_t este martingal continuu la dreapta (i.e. traiectoriile sunt continue la dreapta) şi T este timp de stopare mărginit de k, atunci $EM_T = EM_k = EM_0$. Dacă M_t este submartingal pozitiv, avem $EM_T \le EM_k$.*

Demonstrație. Facem doar cazul martingalului (restul este similar). Definim timpii de stopare

$$T_n(\omega) = \frac{(j+1)k}{2^n} \text{ dacă } \frac{jk}{2^n} \leq T(\omega) < \frac{(j+1)k}{2^n}.$$

Procesul $M_{jk/2^n}$ este martingal (cu timp discret) în raport cu filtrarea $\mathcal{F}_{jk/2^n}$, deci din lema 3.2 obținem că $EM_{T_n} = EM_k$ pentru orice n. Întrucât M_k este integrabil, există φ continuă, convexă, crescătoare, cu $\varphi(x)/x \to +\infty$ când $x \to +\infty$ și $E\varphi(|M_k|) < +\infty$. Cum $\varphi(|M_t|)$ este submartingal, avem

$$E\varphi(|M_{T_n}|) \leq E\varphi(|M_k|) < +\infty,$$

deci v.a. M_{T_n} sunt uniform integrabile. Cum $T_n \searrow T$ când $n \to +\infty$, și din continuitate la dreapta, rezultă că $M_{T_n} \to M_T$, deci $EM_T = EM_k$.

COROLAR 3.4 *Dacă $S \leq T$ sunt timpi de stopare mărginiți de k și M_t este martingal continuu la dreapta, atunci $E[M_T \mid \mathcal{F}_S] = M_S$ a.s.*

Demonstrație. Fie $A \in \mathcal{F}_S$. Avem de arătat că $\int_A M_S dP = \int_A M_T dP$. Definim un nou timp de stopare

$$U(\omega) = \begin{cases} S(\omega) \text{ dacă } \omega \in A \\ T(\omega) \text{ dacă } \omega \notin A \end{cases}.$$

Se vede că U este timp de stopare, deci $EM_U = EM_k = EM_T$ implică

$$\int_A M_S dP + \int_{A^c} M_T dP = EM_T .$$

Dacă M_n sau M_t sunt martingale, notăm

$$M_t^* := \sup_{s \leq t} |M_s|$$

și similar definim M_n^* .

TEOREMA 3.5 *(inegalităţile lui Doob) Dacă M_n este martingal continuu la dreapta, atunci*

$$P[M_n^* > a] \leq \frac{1}{a} E|M_n|.$$

Dacă $p > 1$, atunci există c care depinde doar de p astfel ca

$$E(M_n^*)^p \leq cE|M_n|^p.$$

Rezultatele rămân adevarăte pentru M_t martingale sau submartingale pozitive cu traiectorii continue la dreapta.

Demonstraţie. Fie

$$T = \min\{j : |M_j| \geq a\}.$$

Cum $|\cdot|$ este convexă, $|M_n|$ este submartingal; cum $|M_k| \geq a$ pe $(T < +\infty)$, avem

$$P[M_n^* > a] = P[T \leq n] \leq \frac{1}{a} \int_{(T \leq n)} |M_n|$$

$$\leq \frac{1}{a} E|M_{T \wedge n}| \leq \frac{1}{a} E|M_n|.$$

Pentru partea a doua, fie $M_j^i := E[M_n^i \mid \mathcal{F}_j]$, $j = 1, 2$ şi

$$M_n^1 := M_n 1_{(|M_n| > a/2)}, \; M_n^2 = M_n - M_n^1.$$

Cum $\max_j |M_j| \leq \max_j |M_j^1| + a/2$, prima inegalitate din enunţ aplicată lui M^1 devine

$$P[M_n^* > a] \leq P[(M_n^1)^* > a/2] \leq \frac{2}{a} E|M_n^1|$$

$$= \frac{2}{a} \int_{(|M_n| > a/2)} |M_n| \, dP.$$

Apoi, cu Fubini, obţinem

$$E(M_n^*)^p = \int_0^{+\infty} pa^{p-1} P[M_n^* > a] \, da$$

$$\leq \int_0^{+\infty} 2pa^{p-2} E\left[|M_n| 1_{(|M_n|>a/2)}\right] da$$

$$= |M_n| E \int_0^{2|M_n|} 2pa^{p-2} da = \frac{2^p p}{p-1} E |M_n|^p .$$

PROPOZIŢIA 3.6 *Fie B_t mişcare browniană. Dacă $a, t >$ 0, atunci*

$$P\left[\sup_{s \leq t} |B_s| \geq a\right] \leq 2e^{-a^2/2t}.$$

Demonstraţie. Intrucât e^{bx} este convexă, e^{bB_t} este submartingal pozitiv deci, conform teoremei 3.5,

$$P\left[\sup_{s \leq t} |B_s| \geq a\right] = P\left[\sup_{s \leq t} e^{bB_s} \geq e^{ab}\right]$$

$$\leq e^{-ab} E\left(e^{bB_t}\right) \leq \exp\left(-ab + b^2 t/2\right).$$

Luăm $b = a/t$, repetăm argumentul pentru $-B_t$ şi adunăm inegalităţile obţinute.

PROPOZIŢIA 3.7 *(legea ieşirii mişcării browniene din $[a, b]$) Dacă $\eta_{[a,b]}$ este prima ieşire a mişcării browniene reale din $[a, b]$ iar $a < x < b$, atunci $\tau_{[a,b]} < +\infty$ a.s. şi*

$$P^x\left[B_{\eta_{[a,b]}} = a\right] = \frac{b - x}{b - a}, \; P^x\left[B_{\eta_{[a,b]}} = b\right] = \frac{x - a}{b - a}.$$

Demonstraţie. Notăm simplu τ in loc de $\tau_{[a,b]}$. Cum $B_t^2 - t$ este martingal, teorema de opţionalizare 3.3 spune că

$$E^x\left(B^2_{\tau \wedge t}\right) = E^x\left(\tau \wedge t\right).$$

Pentru $t \leq \tau$ avem $| B_t | \leq | a | + | b |$, deci conform lemei lui Fatou,

$$E^x \tau \leq (| a | + | b |)^2$$

sau că $\tau < +\infty$ a.s. Apoi

$$1 = P^x [B_\tau = a] + P^x [B_\tau = b]$$

Cum B_t este martingal, avem $E^x (B_{\tau\wedge t}) = x$. Facem $t \to +\infty$, şi din convergenţă dominată, rezultă

$$x = E^x B_\tau = aP^x [B_\tau = a] + bP^x [B_\tau = b].$$

Observaţii. Se poate determina efectiv media lui $\tau_{[a,b]}$: din teorema de opţionalizare avem că

$$E^x \left[\tau_{[a,b]}\right] = E^x \left[B_\tau^2\right]$$

$$= a^2 P^x [B_\tau = a] + b^2 P^x [B_\tau = b] = (b+a)x - ab.$$

Dacă $x > a$ şi facem $b \to +\infty$ in propoziţia 3.7, rezultă

$$P^x \left[T_{\{a\}} < +\infty\right] = 1.$$

Fie acum $(B_t)_t$ cu $B_0 = x < z$ şi $T = T_z = T_{\{z\}}$ primul moment la care procesul ajunge la valoarea (nivelul) z, adică

$$T = \begin{cases} \inf\{t : B_t \geq z\}, & \text{dacă există } t \geq 0 \text{ astfel ca } B_t \geq z \\ +\infty, & \text{dacă } B_t < z \text{ pentru orice } t \geq 0. \end{cases}$$

Cum

$$V_t := \exp\left(\lambda B_t - \frac{\lambda^2 t}{2}\right)$$

este martingal, avem că

$$E^x [V_{T\wedge t}] = 1$$

deci, trecând la limită cu $t \to +\infty$, obţinem

$$\lim_{t\to+\infty} V_{T\wedge t} = \begin{cases} \exp(\lambda z - \lambda^2 T/2), & \text{dacă } T < \infty \\ 0, & \text{dacă } T = \infty. \end{cases}$$

Combinând aceste relații, găsim că

$$1 = \lim_{t \to +\infty} E^x \left[V_{T\wedge t}\right] = e^{\lambda z} E^x \left[e^{-\lambda^2 T/2}\right],$$

adică

$$E^x \left[e^{-\lambda T}\right] = e^{-\sqrt{2\lambda} z} .$$

Exercițiu. Folosind acest lucru, dacă notăm

$$S = \inf \{t : B_t > a + bt\} \; ; \; a, b > 0,$$

arătați că

$$E^x \left(e^{-\lambda T}\right) = \exp\left[-a\left(b + \sqrt{b^2 + 2\lambda}\right)\right].$$

Indicație. Din faptul că $\exp(\lambda B_t - \lambda^2 T/2)$ este martingal, obținem

$$E^x \left[\exp\left(\lambda(a + bt) - \lambda^2 T/2\right)\right] = 1,$$

și facem schimbarea de variabilă $\lambda b - \lambda^2/2 = z$.

Exercițiu. Dacă $a < 0 < b$, determinați $E\left[e^{-\lambda T_{[a,b]}} \middle| B_{T_{[a,b]}} = a\right]$. În particular, deduceți că $E\left[e^{-\lambda T_{(a)}}\right] = e^{-a\sqrt{2\lambda}}$.

Demonstrația propoziției 2.8 a legii logaritmului iterat pentru mișcarea browniană. Întrucât $\exp(aB_t - a^2 t/2)$ este martingal, inegalitatea lui Doob spune că

$$P\left[\sup_{s\le t}(B_s - as/2) \ge b\right] = P\left[\sup_{s\le t}\left(\exp\left(aB_t - a^2 t/2\right)\right) \ge e^{ab}\right]$$

$$\le e^{-ab} E\left(B_t\right) = e^{-ab}.$$

Punem $h(t) = (2t \log\log t^{-1})^{1/2}$ și alegem constante $0 < \theta < 1, \delta > 0$. Fie

$$a_n = (1+\delta)\theta^{-n} h(\theta^n), \; b_n = h(\theta^n)/2, \; t_n = \theta^{n-1} \; ;$$

din relaţiile

$$a_n b_n = (1+\delta)\log\log\theta^{-n} \text{ şi } e^{-a_n b_n} = (\log\theta^{-1})^{-1-\delta} n^{-1-\delta}$$

demonstrăm că

$$\sum_n P\left[\sup_{s\le t_n}\left(B_s - \frac{a_n s}{2}\right) \ge b_n\right] < +\infty.$$

Lema Borel-Cantelli spune că

$$P\left[\liminf_{n\to+\infty}\left(\sup_{s\le t_n}\left(B_s - \frac{a_n s}{2}\right) < b_n\right)\right] = 1,$$

deci pentru aproape toţi ω, există $n(\omega)$ astfel ca, pentru $n \ge n(\omega)$ şi $t_{n+1} < t \le t_n$, avem

$$B_t \le \sup_{s\le t_n} B_s < \frac{a_n t_n}{2} + b_n < h(t^n)\frac{1+\delta+\theta}{2\theta}.$$

Facem $\theta \to 1$ şi $\delta \to 0$ ca să obţinem

$$\limsup_{t\searrow 0}\frac{B_t}{h(t)} \le 1.$$

Pentru inegalitatea contrară, fie $0 < \theta < 1$ şi considerăm evenimentele independente

$$A_n = \left\{B_{\theta^n} - B_{\theta^{n+1}} \ge (1-\theta^{1/2})h(\theta^n)\right\}.$$

Din inegalităţile

$$\frac{a^{-1}-a^{-3}}{\sqrt{2\pi}}e^{-a^2/2} < \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^{+\infty} e^{-x^2/2}dx < \frac{1}{a\sqrt{2\pi}}e^{-a^2/2}$$

pentru $a > 0$, obţinem

$$P(A_n) = (2\pi)^{-1/2}\int_{(1-\theta^{1/2})h(\theta^n)/(\theta^n-\theta^{n+1})^{1/2}} \exp(-x^2/2)dx$$

$$> c(\log n)^{-1/2} n^{-(1-2\theta^{1/2}+\theta)/(1+\theta)}, \text{ cu } c > 0. \tag{3.1}$$

Cum $(1-2\theta^{1/2}+\theta)/(1+\theta) < 1$, rezultă că $\sum_n P(A_n) = +\infty$, deci lema Borel-Cantelli implică $P\left(\limsup_{n\to+\infty} A_n\right) = 1$. Trecând la un subşir, avem

$$B_{\theta^n} \geq (1-\theta^{1/2})h(\theta^n) + B_{\theta^{n+1}} \text{ ; cum } B_{\theta^{n+1}} < 2h(\theta^{n+1})$$

şi legea lui B_t este simetrică, avem $B_{\theta^{n+1}} > -2h(\theta^{n+1})$ pentru n suficient de mare. Deci

$$B_{\theta^n} > (1-\theta^{1/2})h(\theta^n) - 2h(\theta^{n+1}) > (1-4\theta^{1/2})h(\theta^n);$$

facem $\theta \to 0$ şi obţinem

$$\limsup_{t\searrow 0} \frac{B_t}{h(t)} \geq 1.$$

3.2 A DOUA CONSTRUCŢIE

Ingredientele necesare vor fi: noţiunile de convergenţă slabă, probabilităţi tight, teorema lui Prohorov şi inegalităţile lui Doob. Noutatea acestei construcţii faţă de prima constă în apariţia măsurii Wiener, sub care aplicaţiile "coordonate" devin mişcare browniană.

Spunem că şirul de probabilităţi P_n pe spaţiul metric $\mathbf{S}$ converge slab (sau $*-$slab) către probabilitatea P dacă

$$\int f dP_n \to \int f dP, \text{ pentru orice } f \text{ continuă şi mărginită pe } \mathbf{S}.$$

PROPOZIŢIA 3.8 *(caracterizarea convergenţei slabe a măsurilor) Fie P_n şir de probabilităţi pe spaţiul metric $\mathbf{S}$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente.*

(a) P_n converge slab la P.

(b) $\limsup_n P_n(F) \leq P(F)$ *pentru orice $F \subset \mathbf{S}$ inchisă.*

(c) $\liminf_n P_n(G) \geq P(G)$ *pentru orice $G \subset \mathbf{S}$ deschisă.*

(d) $\lim_n P_n(A) = P(A)$ *pentru orice boreliană $A \subset \mathbf{S}$ cu* $P(\partial A) = 0$.

Demonstrație. Să arătăm că (a) implică (b). Fie F inchisă și $\varepsilon > 0$. Luăm $\delta > 0$ suficient de mic astfel ca

$$P\{x : d(x, F) \leq \delta\} - P(F) < \varepsilon$$

și fie

$$f = 1 - \left[1 \wedge \delta^{-1} d(x, F)\right]$$

(observați că f este continuă, are suportul in $\{x : d(x, F) \leq \delta\}$ și ia valoarea 1 pe F). Avem

$$\limsup_n P_n(F) \leq \limsup_n \int f dP_n = \int f dP$$

$$\leq P\{x : d(x, F) \leq \delta\} \leq P(F) + \varepsilon.$$

Să arătăm că (b) și (c) implică (d). Fie $P(\partial A) = 0$; atunci

$$\limsup_n P_n(A) \leq \limsup_n P_n\left(\bar{A}\right) \leq P\left(\bar{A}\right) = P(A)$$

$$= P\left(\mathring{A}\right) \leq \liminf_n P_n\left(\mathring{A}\right) \leq \liminf_n P_n(A).$$

Să arătăm că (d) implică (b). Pentru F inchisă, notăm

$$F_\delta = \{x : d(x, F) \leq \delta\};$$

dacă $y \in \partial F_\delta$, atunci $d(x, F) = \delta$. Deci mulțimile ∂F_δ sunt disjuncte pentru diferiți δ. Cel mult o mulțime numărabilă dintre ele pot avea $P-$probabilitate pozitivă, deci

$$\text{există } \delta_k \searrow 0 \text{ cu } P(\partial F_{\delta_k}) = 0.$$

Obținem

$$\limsup_n P_n(F) \leq \limsup_n P_n(F_{\delta_k}) = P(F_{\delta_k}) \text{ pentru orice } k.$$

Cum $P(F_{\delta_k}) \searrow P(F)$ când $\delta_k \searrow 0$, obținem (b).

Să arătăm că (b) implică (a). Fie f continuă și mărginită; este suficient de arătat că

$$\limsup_n \int f dP_n \leq \int f dP$$

(şi apoi aplicăm pentru $-f$). Putem presupune că f ia valori între 0 şi 1. Fie

$$F_i = \left\{ x : f(x) \geq \frac{i}{k} \right\},$$

care este închisă. Avem

$$\int f dP_n \leq \sum_{i=0}^{k} \frac{i}{k} P_n \left[\frac{i-1}{k} \leq f(x) < \frac{i}{k} \right]$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \frac{i}{k} \left[P_n(F_{i-1}) - P_n(F_i) \right] \leq \frac{1}{k} + \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k} P_n(F_i).$$

Similar demonstrăm că

$$\int f dP \leq \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k} P(F_i).$$

Obţinem

$$\limsup_n \int f dP_n \leq \frac{1}{k} + \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k} \limsup_n P_n(F_i)$$

$$\leq \frac{1}{k} + \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k} P(F_i) \leq \frac{1}{k} + \int f dP.$$

Şirul de probabilităţi P_n pe spaţiul metric $\mathbb{S}$ se numeşte **tight** dacă, pentru orice $\varepsilon > 0$ există un compact $K_\varepsilon \subset \mathbb{S}$ astfel ca $\sup_n P_n(K_\varepsilon^c) \leq \varepsilon$.

PROPOZIŢIA 3.9 *(Prohorov) Dacă un şir de probabilităţi pe un spaţiu metric* $\mathbb{S}$ *este tight, atunci el este relativ compact în topologia convergenţei slabe.*

Demonstraţie. Să presupunem pentru început că $\mathbb{S} = [0,1]^\infty$, care este compact şi separat; teorema este consecinţă directă a teoremei lui Alaoglu. Să facem demonstraţia direct: observaţi că

$|a-b| \wedge 1$ este metrică pe $\mathbb{R}$ care generează topologia uzuală pe $\mathbb{R}$ şi deci

$$(a,b) \to \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|a^i - b^i| \wedge 1}{2^i}; \; a = (a^i), \; b = (b^i)$$

este metrică pe $[0,1]^{\infty}$.

Fie $C_b(\mathbb{S})$ spaţiul funcţiilor continue şi mărginite pe $\mathbb{S}$ şi f_i o familie numărabilă de elemente pozitive a căror inchidere este densă in $\mathbb{S}$. Pentru fiecare i, $\int f_i dP_n$ este şir mărginit, deci avem un subşir convergent. Prin procedeul de diagonalizare (vezi şi teorema Arzelà-Ascoli), găsim un subşir n' astfel ca $\int f_i dP_{n'}$ să conveargă pentru orice i; notăm limita lui cu Lf_i. Avem că L este liniar şi $0 \leq Lf_i \leq \|f_i\|_{\infty}$, deci L se extinde la o funcţională liniară mărginită pe $\mathbb{S}$. Din teorema de reprezentare a lui Riesz, există o măsură P astfel ca

$$Lf = \int f dP.$$

Cum $\int f_i dP_{n'} \to \int f_i dP_n$ pentru orice f_i, avem şi $\int f_i dP_{n'} \to \int f_i dP_n$ pentru orice $f \in C_b(\mathbb{S})$ deci $P_{n'}$ converge slab la P. Cum $Lf \geq 0$ pentru $f \geq 0$, P este măsură pozitivă. Funcţia 1 este continuă şi mărginită, deci $1 = P_{n'}(\mathbb{S}) = \int 1 dP_{n'} \to \int 1 dP$ sau $P(\mathbb{S}) = 1$.

Fie acum $\mathbb{S}$ spaţiu metric arbitrar. Pentru orice m există un compact K_m cu $\sup_n P_n(K_m^c) \leq 1/m$. Cum toate P_n au suportul in $\bigcup_m K_m$, putem inlocui $\mathbb{S}$ cu $\bigcup_m K_m$ (i.e. putem presupune că $\mathbb{S}$ este $\sigma-$compact, deci separabil). Dacă d este metrica pe S, $d \wedge 1$ este metrică compatibilă, deci putem presupune că d este mărginită de 1.

Spaţiul $\mathbb{S}$ poate fi scufundat in $[0,1]^{\infty}$ astfel: dacă s_j este submulţime numărabilă densă in $\mathbb{S}$, fie

$$I : \mathbb{S} \to [0,1]^{\infty} \; , \; I(x) = (d(x,s_1), d(x,s_2), \ldots).$$

Dacă $x_n \to x$, atunci fiecare componentă a lui $I(x_n)$ converge către componenta corespunzătoare a lui $I(x)$; aceasta implică $I(x_n) \to I(x)$. Reciproc, dacă x_n este şir cu $d(x_n, x) < \varepsilon/2$

pentru orice n, putem găsi s_j cu $d(s_j, x) < \varepsilon/2$, deci $d(x_n, s_j) < \varepsilon/2$ pentru orice n. In acest caz, $I(x_n)$ nu poate converge către $I(x)$; deci I este aplicaţie continuă şi deschisă. Luăm $x_n = y$ pentru orice n; dacă $I(y) = I(x)$, atunci $y = x$, deci I este injectivă si cum $\mathbb{S}$ este $\sigma-$compact, iar imaginea unui compact printr-o aplicaţie continuă este tot compact, obţinem că $I(\mathbb{S})$ este boreliană.

Definim P_n pe $[0,1]^\infty$ prin

$$P_n(A) := P_n\left[I^{-1}(A \cap I(\mathbb{S}))\right].$$

Din prima parte a demonstraţiei, există un subşir $P_{n'}$ care converge la P in topologia lui $[0,1]^\infty$; cum $I(K_m)$ este compact, din teorema 3.8 rezultă

$$P\left[I\left(K_m\right)\right] \geq \limsup_{n'} P_{n'}\left[I\left(K_m\right)\right] \geq 1 - \frac{1}{m},$$

deci $P[I(\mathbb{S})] = 1$.

In fine, dacă G este deschis in $\mathbb{S}$, atunci $I(G) = H \cap I(\mathbb{S})$ pentru un H deschis in $[0,1]^\infty$, deci

$$\liminf_{n'} P_{n'}(G) = \liminf_{n'} P_{n'}(H) \geq P(H) = P[H \cap I(\mathbb{S})] = P(G).$$

Din teorema 3.8, $P_{n'}$ converge slab către P in topologia lui $\mathbb{S}$.

Să revenim la construcţia mişcării browniene. Fie Y_i şir de v.a. i.i.d. cu

$$P[Y_i = 1] = P[Y_i = -1] = 1/2,$$

iar $S_n := \sum_{i=0}^n Y_i$, numit **mersul la intâmplare simetric**. Observaţi că S_n este martingal cu timp discret. Definim următorul şir de procese:

$$Z_t^n := \frac{S_{t2^n}}{2^{n/2}} \text{ , dacă } t \text{ este multiplu de } 2^{-n}$$

şi, prin interpolare liniară,

$$Z_t^n := \frac{(k+1) - 2^n t}{\sqrt{2^n}} S_k + \frac{2^n t - k}{\sqrt{2^n}} S_{k+1} \text{ , dacă } \frac{k}{2^n} \leq t \leq \frac{k+1}{2^n}.$$

Observați că, pentru fiecare n, procesul Z_t^n este continuu.

Fie P_n legea lui Z_t^n i.e. dacă Ω este spațiul traiectoriilor continue de la $[0,1]$ la $\mathbb{R}$ și A este măsurabilă in $C[0,1]$, atunci

$$P_n(A) = P\left[Z_\cdot^n \in A\right].$$

In aceste condiții, șirul P_n converge slab in $C[0,1]$ către o probabilitate P_∞ , numită **măsura Wiener** și apoi că, sub P_∞, aplicațiile "coordonate" $B_t(\omega) = \omega(t)$ formează o mișcare browniană.

Vom arata intâi că P_n sunt tight și apoi că orice punct limită (secvențial) este o mișcare browniană. Un calcul simplu arată că

$$E\left(S_n^4\right) = \sum_{i=1}^{n} E\left(Y_i^4\right) + \sum_{i\neq j} E\left(Y_i^2\right) E\left(Y_j^2\right) \leq cn^2 ,$$

deoarece $E\left(Y_i\right) = E\left(Y_i^3\right) = 0$ și Y_i sunt independente. Fie

$$K_m = \left\{\omega : \omega(0) = 0,\ \left|\omega(t) - \omega(s)\right| \leq m\left|t-s\right|^{1/8}\ ;\ t,s \leq 1\right\}.$$

Mulțimea K_m este compactă conform teoremei Arzelà-Ascoli, pentru orice m. Vrem să arătăm că, dat fiind $\varepsilon > 0$ și dacă m este suficient de mare, atunci

$$P_n\left(K_m^c\right) = P\left[Z_t^n \notin K_m\right] \leq \varepsilon \text{ uniform in } n.$$

Dacă $\left|Z_t^n - Z_s^n\right| > m\left|t-s\right|^{1/8}$ pentru $t,s \in [0,1]$, aceeași relație va fi adevărată și pentru t,s = multiplii de 2^{-n} . Fie i cel mai mic număr intreg cu $|t-s| \leq 2^i/2^n$ și fie k cel mai mare intreg cu $k2^i/2^n \leq s$. Atunci

$$\sup_{k2^{i-n}\leq t\leq (k+2)2^{i-n}} \left|Z_t^n - Z_{k/2^n}^n\right| \geq m\left(2^{i-n}\right)^{1/8} .$$

Conform inegalităților lui Doob, calculelor precedente și faptului că $S_{p+j} - S_j$ are aceeași lege cu S_p , obținem

$$P\left[Z_t^n \notin K_m\right]$$

$$\leq P\left[\sup_{k2^i\leq p\leq (k+2)2^i}\left|\frac{S_p}{\sqrt{2^n}}-\frac{S_{k2^i}}{\sqrt{2^n}}\right|\geq m\left(2^{i-n}\right)^{1/8}\right.$$

$$\left.\text{pentru un } i\leq n \text{ şi } k\leq 2^{n-i}\right]$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} 2^{n-i}P\left[\sup_{p\leq 2\cdot 2^i}\frac{|S_p|}{\sqrt{2^n}}\geq m\left(2^{i-n}\right)^{1/8}\right]$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} 2^{n-i}\frac{E\left|S_{2^{i+1}}\right|^4}{m^4 2^{2n}2^{i/2}2^{(i-n)/2}}$$

$$c\sum_{i=1}^{n} 2^{n-i}\frac{2^{2i+2}}{m^4 2^{2n}2^{i/2}2^{(i-n)/2}}\leq cm^{-4}\ ,$$

deci P_n sunt tight. Orice punct limită este o probabilitate pe $C[0,1]$ deci, pentru a arăta că limita este mişcare browniană, este suficient să arătăm că legile finit dimensionale (i.e. legile lui $(Z_{t_1},\ldots,Z_{t_m})$ sub P_∞) coincid cu cele ale mişcării browniene. Aceasta se bazează pe observaţiile următoare:

Fie S_n mersul la intâmplare simetric; atunci legea lui $S_n/\sqrt{n}$ converge slab catre $N(0,1)$, deoarece momentele de ordinul doi ale lui $S_n/\sqrt{n}$ sunt uniform mărginite, iar apoi inegalitatea lui Cebâşev arată că şirul legilor este tight. Dacă P_∞ este un punct limită (secvenţial), avem că

$$\int e^{itx}dP_\infty=\lim_{n\to\infty}E\exp\left(it\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(E\frac{itY_1}{\sqrt{n}}\right)^n$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n=e^{-t^2/2}$$

şi folosim unicitatea transformării Fourier. In fine, dacă $s_1,\ldots,s_k$ este şir crescător de diadice, atunci legea lui

$$\left(\frac{S_{s_1 2^n}}{\sqrt{2^n}},\ldots,\frac{S_{s_k 2^n}}{\sqrt{2^n}}\right)$$

converge slab către legea unui şir gaussian, a cărui matrice de covariaţie se calculează cu uşurinţă.

4

METODA PROCESELOR MARKOV

Considerăm filtrarea $\mathcal{F}_t^B := \sigma(B_s, s \leq t)$, $t \in [0, +\infty]$. Fie $\mathcal{F}_t^0$ corpul borelian generat de $\mathcal{F}_t^B$ şi de mulţimile P^x−neglijabile pentru orice $x \in \mathbb{R}$, iar $\mathcal{F}_t \equiv \mathcal{F}_{t+}^0 := \bigcap_{\varepsilon>0} \mathcal{F}_{t+\varepsilon}^0$. In cele din urmă vom lucra cu $\mathcal{F}_t$, dar avem nevoie de celelalte corpuri boreliene ca stadii intermediare. Motivul pentru care trebuie să fim atenţi cu care filtrări lucrăm este următorul: $\mathcal{F}_t^B$ este prea mic ca să cuprindă multe mulţimi interesante (ca cele care apar in legea logaritmului iterat) in timp ce, dacă filtrarea este prea mare, proprietatea Markov se poate să nu aibă loc in raport cu acea filtrare.

Reamintim că E^x inseamnă media in raport cu P^x, iar variabila $E^{X_s}Y$ este $\varphi(X_s)$, unde $\varphi(y) = E^yY$. Dacă Ω este mulţimea funcţiilor continue de la $[0, +\infty)$ la $\mathbb{R}$, definim operatorii de shift $\theta_t : \Omega \to \Omega$ prin $\theta_s(\omega) = \omega(t+s)$. Atunci

$$B_s \circ \theta_t(\omega) = B_s(\theta_t(\omega)) = \theta_t\omega(s) = \omega(s+t) = B_{t+s}(\omega)$$

dacă mişcarea browniană B_s este definită pe coordonate: $B_t(\omega) = \omega(t)$. Chiar dacă mişcarea browniană nu este dată pe coordonate, vom presupune că există operatori de shift θ_t astfel ca $B_s \circ \theta_t = B_{t+s}$.

4.1 PROPRIETATEA MARKOV ŞI FILTRĂRI

PROPOZIŢIA 4.1 *(proprietatea Markov pentru $\mathcal{F}_t^B$) Dacă (P^x, B_t) este mişcare browniană, iar Y este v.a. mărginită şi $\mathcal{F}_\infty^B$– măsurabilă, atunci*

$$E^x\left[Y \circ \theta_s \mid \mathcal{F}_s^B\right] = E^{X_s} Y,\ P^x - \text{a.s.}$$

De exemplu, dacă $Y = f(B_t)$, propoziţia 4.1 spune că

$$E^x\left[f(B_{t+s}) \mid \mathcal{F}_s^B\right] = E^x\left[f(B_t) \circ \theta_s \mid \mathcal{F}_s^B\right] = E^{X_s} f(B_t), \text{ deci}$$

$$P\left(B_t \in [4,5] \text{ pentru un } t \in [3,4] \mid \mathcal{F}_2^B\right)$$

$$= P^{B_2}\left(B_t \in [4,5] \text{ pentru un } t \in [1,2]\right).$$

LEMA 4.2 *Dacă f este boreliană mărginită, atunci*

$$E^x\left[f(B_t) \circ \theta_s \mid \mathcal{F}_s^B\right] = E^{B_s} f(B_t),\ P^x - \text{a.s.}$$

Demonstraţie. Este suficient să demonstrăm concluzia pentru $f(x) = e^{iux}$ şi apoi să facem combinaţii liniare şi să trecem la limită. Obţinem

$$E^x\left[e^{iuB_{t+s}} \mid \mathcal{F}_s^B\right] = e^{iuB_s} E^x\left[e^{iu(B_{t+s} - B_s} \mid \mathcal{F}_s^B\right]$$

$$= e^{iuB_s} E^x\left[e^{iu(B_{t+s} - B_s}\right] = e^{-u^2/2} e^{iuB_s}.$$

Pe de altă parte, pentru orice y avem

$$E\left({}^y e^{iuB_t}\right) = E^0\left(e^{iuB_t} e^{iuy}\right) = e^{-u^2 t/2} e^{iuy}.$$

Inlocuind y cu B_s, lema este demonstrată.

Demonstratia propozitiei 4.1 Folosind liniaritatea şi trecând la limită, este suficient să considerăm $Y = \prod_{i=1}^n f_i(B_{t_i})$, unde f_i sunt mărginite, $s \le t_1 \le \ldots \le t_n$, şi să aplicăm inducţia. Cazul $n = 1$ este lema 4.2 Presupunem adevărat pentru n şi fie $V = \prod_{i=2}^{n+1} f_i\left(B_{t_i - t_1}\right)$, $h(y) = E^y V$. Din ipoteza de inducţie obţinem

$$E^x\left[\prod_{i=1}^{n+1} f_i\left(B_{t_i}\right) \mid \mathcal{F}_s^B\right] = E^x\left\{E^x\left[V \circ \theta_{t_1} \mid \mathcal{F}_{t_1}^B\right] f_1\left(B_{t_1}\right) \mid \mathcal{F}_s^B\right\}$$

$$= E^x\left[\left(E^{B_{t_1}} V\right) f_1\left(B_{t_1}\right) \mid \mathcal{F}_s^B\right] = E^x\left[(hf_1)\left(B_{t_1}\right) \mid \mathcal{F}_s^B\right].$$

Din lema 4.2, ultimul termen este $E^{B_s}\left[(hf_1)\left(B_{t_1-s}\right)\right]$. Pentru orice y,

$$E^y\left[(hf_1)\left(B_{t_1-s}\right)\right] = E^y\left[\left(E^{B_{t_1-s}} V\right) f_1\left(B_{t_1-s}\right)\right]$$

$$= E^y\left[E^y\left[V \circ \theta_{t_1-s} \mid \mathcal{F}_{t_1-s}^B\right] f_1\left(B_{t_1-s}\right)\right]$$

$$= E^y\left[\left(V \circ \theta_{t_1-s}\right) f_1\left(B_{t_1-s}\right)\right].$$

Rămâne să inlocuim V din definiţie, y cu B_s şi θ_{t_1-s} din definiţie.

Observaţie. Fie nucleele gaussiene, date prin

$$p(t,x) = (2\pi t)^{-1/2} e^{-x^2/2t}, \ x \in \mathbb{R}, \ t > 0, \tag{4.1}$$

cărora le asociem operatorii

$$P_t f(x) = \int f(y) p(t, x-y)\, dy. \tag{4.2}$$

Observaţi că, dacă f este mărginită, atunci $P_t f(x)$ este continuă in x (din continuitatea lui $p(t,x)$ şi convergenţă dominată). Să verificăm direct că mişcarea browniană este proces Markov omogen in raport cu $\mathcal{F}_\cdot^B$, cu densităţile de tranziţie $p(t,x)$ date in formula (4.1).

Este suficient de arătat că, pentru orice $0 \leq s < t$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ şi orice $C \in \mathcal{F}_s^B$, avem

$$\int_C P^x\left[B_t \in A \mid \mathcal{F}_s^B\right] dP = \int_C P^x\left[B_t \in A \mid \sigma(B_s)\right] dP.$$

Mulţimea C poate fi luată de forma

$$C = \left\{B_{s_n} \in A_n, B_{s_{n-1}} \in A_{n-1}, \ldots, B_{s_1} \in A_1, B_s \in A_0\right\}$$

cu $0 \leq s_1 < \ldots < s_n < s$ şi $A_0, A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (întrucât A_0 poate fi luat $\mathbb{R}$, înseamnă că s poate fi inclus printre s_j–urile care determină C). Membrul din stânga este deci egal cu

$$\int_C 1_{(B_t \in A)} dP = P\left[C \bigcap (B_t \in A)\right]$$

$$= \int_{A_n} \cdots \int_{A_1} \int_{A_0} \int_A p(s_n, x_n)\, p(s_n - s_{n-1}, x_n - x_{n-1}) \times$$

$$\times \ldots \times p(t-s, y-x)\, dx_n \ldots dx_1 dx dy$$

$$= \int_{A_n} \cdots \int_{A_1} \int_{A_0} p(s_n, x_n)\, p(s_n - s_{n-1}, x_n - x_{n-1}) \ldots$$

$$p(s - s_1, x - x_1) \times \left\{ \int_A p(t-s, y-x)\, dy \right\} dx_n \ldots dx_1 dx.$$

Dar integrala dintre acolade este tocmai $P[B_t \in A \mid B_s = x]$. Într-adevăr, am folosit faptul că

$$P^x[B_t \in A \mid \sigma(B_s)] = \int_A p(t-s, B_s - y)\, dy$$

şi că, din (4.1)-(4.2) avem

$$E\left[f(B_t) \mid \mathcal{F}_s^B\right] = P_{t-s} f(B_t)$$

pentru orice f boreliană mărginită (sau continuă care se anulează la ∞).

Observaţie. Adăugând mulţimile neglijabile nu se schimbă nimic deci, dacă Y este v.a. mărginită şi $\mathcal{F}_\infty^0$–măsurabilă, atunci

$$E^x\left[Y \circ \theta_t \mid \mathcal{F}_t^0\right] = E^{X_t} Y,\ P^x - \text{a.s.}$$

Următorul pas este trecerea de la $\mathcal{F}_t^0$ la $\mathcal{F}_t$.

TEOREMA 4.3 *(proprietatea Markov pentru $\mathcal{F}_t$) Fie (P^x, B_t) mişcare browniană, iar Y v.a. mărginită şi $\mathcal{F}_\infty$– măsurabilă; atunci*

$$E^x [Y \circ \theta_t \mid \mathcal{F}_t] = E^{X_t} Y \,, \; P^x - \text{a.s.}$$

Demonstraţie. Ca şi in propoziţia 4.1, este suficient să luăm $Y = f(B_t)$ şi apoi să aplicăm inducţia. Prin trecere la limită, putem presupune că f este continuă. Dacă $A \in \mathcal{F}_s = \mathcal{F}^0_{s+}$, atunci $A \in \mathcal{F}^0_{s+\varepsilon}$ pentru orice $\varepsilon > 0$. Din proprietatea Markov pentru $\mathcal{F}^0_{s+\varepsilon}$ obţinem

$$\int_A f(B_{t+s+\varepsilon})\, dP^x = \int_A P_t f(B_{s+\varepsilon})\, dP^x,$$

unde P_t sunt operatorii din formula (4.2). Facem $\varepsilon \to 0$ şi termenul din stânga converge către $\int_A f(B_{t+s})\, dP^x$, din convergenţă dominată şi continuitatea lui f şi B. Membrul drept converge către $\int_A P_t f(B_s)\, dP^x$, din convergenţă dominată şi continuitatea lui $P_t f$ şi B.

Observaţie. Avem că $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}^0_t$. Intr-adevăr, fie

$$Y = \prod_{i=1}^{n} f_i(B_{t_i})$$

şi, dacă $t_i \le s < t_{i+1}$, notăm

$$Y_1 = \prod_{\{i: t_i \le s\}} f_i(B_{t_i}) \text{ şi } Y_1 = \prod_{\{i: t_i > s\}} f_i(B_{t_i}).$$

Atunci avem

$$E^x \left[Y \mid \mathcal{F}^0_{t+}\right] = Y_1 E^{B_t} Y_2 \,,$$

care este $\mathcal{F}^0_t$–măsurabilă. Din liniaritate şi trecând la limită, $E^x \left[Y \mid \mathcal{F}^0_{t+}\right]$ este $\mathcal{F}^0_t$–măsurabilă pentru orice $Y \in \mathcal{F}^0_\infty$. Dacă $A \in \mathcal{F}_t = \mathcal{F}^0_{t+}$, punem $Y = 1_A$ şi obţinem că $A \in \mathcal{F}^0_t$.

COROLAR 4.4 *(legea 0 − 1 a lui Blumenthal) Dacă $A \in \mathcal{F}_0$, atunci $P^x(A) = 0$ sau 1.*

Demonstraţie. Sub P^x avem $1_A = E^x\left[1_A \mid \mathcal{F}_{0+}\right] = E^{B_0}(1_A) = P^x(A)$.

Aplicaţii. 1. Să notăm $T_{(0,+\infty)} = \inf\{t > 0 : B_t \in (0,+\infty)\}$ prima intrare (primul timp de intrare) al mişcării browniene in semiaxa pozitivă. Să arătăm că

$$P^0\left[T_{(0,+\infty)} = 0\right] = 1$$

i.e. mişcarea browniană intră "imediat" in semiaxa pozitivă. Din simetrie, ea intră "imediat" şi in semiaxa negativă; explicaţia este că mişcarea browniană oscilează intre valori pozitive şi negative in orice vecinătate a originii pe axa timpului (vezi legea logaritmului iterat in jurul lui 0). Intr-adevăr, pentru orice t,

$$P^0\left[T_{(0,+\infty)} \leq t\right] \geq P^0\left[B_t > 0\right] = 1/2$$

(din simetria legii $N(0,t)$). Obţinem că $P^0\left(T_{(0,+\infty)} = 0\right) \geq 1/2$ dacă facem $t \searrow 0$, iar din legea $0-1$, această probabilitate trebuie să fie 1.

2. Dacă $\varphi(t)$ este funcţie crescătoare cu $\varphi(0) = 0$, atunci evenimentul $(\limsup_{t\to 0} B_t/\varphi(t) > a)$ este in $\mathcal{F}_0$, deci are probabilitatea 0 sau 1 pentru orice a. Deci

$$\limsup_{t\to 0} \frac{B_t}{\varphi(t)} \text{ este constantă } a.s.;$$

(constanta poate fi 0 sau ∞).

Exerciţii 1. Generatorul infinitezimal al mişcării browniene $\mathcal{L}$ conţine in domeniul lui funcţiile de clasă C_b^2 şi pe aceste funcţii, avem $\mathcal{L}f = (1/2)f''$.

Indicaţie: folosiţi formula de calcul

$$\mathcal{L}f = \lim_{t\searrow 0} \frac{P_t f - f}{t} \text{ in sens tare,}$$

şi calculaţi $E[f(B_t)] - f(x)$ cu ajutorul unei dezvoltări in serie (vom reveni in paragraful 4.3, unde vom da o soluţie bazată pe formula lui Dynkin, precum şi in capitolul 5, unde vom da o altă soluţie bazată pe calcul stocastic).

2. Fie $t_0 > 0; x, y \in \mathbb{R}$ fixate. Definim *podul browmian* prin

$$B_t^{t_0,x,y} := B_t - \frac{t}{t_0} B_{t_0} + \frac{t_0 - t}{t_0} x + \frac{t}{t_0} y, \ 0 \le t \le t_0.$$

Arătaţi că podul brownian este proces Markov, este gaussian (determinaţi media şi covariaţia) şi, pentru $0 \le t \le t_0$, procesele $B_t^{t_0,x,y}$, $B_{t_0-t}^{t_0,y,x}$ au aceeaşi lege.

3. Fie

$$Y_t := t_0^{1/2} \left[t(t_0 - t)\right]^{-1/2} \left[B_t^{t_0,x,y} - \frac{t_0 - t}{t_0} x - \frac{t}{t_0} y\right], \ 0 < t < t_0.$$

Arătaţi că Y_t nu depinde nici de x, nici de y, este gaussian (calculaţi media şi dispersia) şi, dacă $p(t)$, $0 < t < t_0$ este transformare proiectiva a lui $(0, t_0)$ in el insuşi, atunci procesele Y_t , $Y_{p(t)}$, $0 < t < t_0$, coincid *(proprietatea de invarianţă proiectivă a mişcării browniene)*.

4.2 A TREIA CONSTRUCŢIE

Vom folosi două ingrediente principale: teoremele 4.5-4.6.

TEOREMA 4.5 *(de consistenţă). Fie μ_n probabilităţi consistente pe $\mathbb{R}^n$: dacă $A \subseteq \mathbb{R}^n$ avem $\mu_{n+1}(A \times \mathbb{R}) = \mu_n(A)$. Atunci există o probabilitate pe $\mathbb{R}^\infty$ astfel ca $\mu(A \times \mathbb{R}^\infty) = \mu_n(A)$ pentru $A \subseteq \mathbb{R}^n$.*

Demonstraţie. Folosim corpul borelian pe $\mathbb{R}^\infty$ generat de mulţimile cilindrice $\{A \times \mathbb{R}^\infty, A$ boreliană intr-un $\mathbb{R}^n\}$. Ipoteza de consistenţă spune că μ este bine definită pe mulţimile cilindrice prin $\mu(A \times \mathbb{R}^\infty) = \mu_n(A)$ pentru $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Teorema de extensie a lui Carathéodory spune că putem extinde μ la corpul borelian al mulţimilor cilindrice dacă are loc relaţia

$$\mu(A_n) \to 0 \text{ pentru orice mulţimi cilindrice } A_n \searrow \emptyset.$$

Să presupunem că această relaţie nu are loc; există mulţimi cilindrice $A_n \searrow \emptyset$ cu $\mu(A_n) > \varepsilon > 0$. Fie

$$A'_1 = A'_2 = \ldots = A'_{i_1} = \mathbb{R}^\infty ,$$

$$A'_{i_1+1} = \ldots = A'_{i_2} = A_1 ,$$

$$A'_{i_2+1} = \ldots = A'_{i_3} = A_2 \text{ etc},$$

unde $i_1, i_2, \ldots$ sunt aleşi suficient de mari astfel ca, pentru orice n, $A'_n = \widetilde{A}_{m_n} \times \mathbb{R}^\infty$ pentru un $\widetilde{A}_{m_n} \subseteq \mathbb{R}^{m_n}$ şi $m_n \leq n$. Fără a restrânge generalitatea, vom lucra cu A'_n in loc de A_n, deci vom renunţa la $'$. Cum $A_n = \widetilde{A}_{m_n} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^\infty$, unde factorul $\mathbb{R}$ apare de $n - m_n$ ori, putem presupune că $A_n = \widetilde{A}_n$, cu $\widetilde{A}_n \subseteq \mathbb{R}^n$.

Pentru orice n, să alegem $\widetilde{B}_n \subseteq \widetilde{A}_n$, cu $\mu\left(\widetilde{A}_n \setminus \widetilde{B}_n\right) \leq \varepsilon/2^{n+1}$ şi $\widetilde{B}_n$ compact. Fie

$$B_n = \widetilde{B}_n \times \mathbb{R}^\infty , \text{ iar } C_n = B_1 \cap \ldots \cap B_n.$$

Deci $C_n \subseteq B_n \subseteq A_n$ şi $C_n \searrow \emptyset$, dar

$$\mu(C_n) \geq \mu(A_n) - \sum_{i=1}^{n} \mu(A_n \setminus B_n) \geq \varepsilon/2,$$

şi proiecţia lui C_n pe $\mathbb{R}^n$, notată $\widetilde{C}_n$, este compactă.

Vom găsi un

$$x = \left(x^1, x^2, \ldots\right) \in \bigcap_n C_n ,$$

deci o contradicţie. Fie $y_n \in C_n$; primele coordonate ale lui y_n, să spunem y_n^1, formează şir conţinut in mulţimea compactă C_1, deci extragem un sub şir convergent. Fie x^1 punctul limită corespunzător. Prima şi a doua coordonată a lui y_n in acest şir convergent formează şir conţinut in mulţimea compactă $\widetilde{C}_2$, deci există un alt subşir convergent către, să spunem, $x' \in \widetilde{C}_2$. Cum al doilea subşir este subşir al primului, prima coordonată a lui x' este x^1. Presupunem că $x' = (x^1, x^2)$ şi continuăm procedeul pentru a găsi $x = (x^1, x^2, \ldots)$; din construcţie, $(x^1, \ldots, x^n) \in C_n$ pentru orice n, deci $x \in C_n$ pentru orice n, contradicţie.

Fie D mulţimea raţionalilor diadici din $[0,1]$ i.e.

$$D = \bigcup_n D_n \text{ , unde } D_n = \{k/2^n, k \leq 2^n\}.$$

TEOREMA 4.6 *(criteriul de continuitate) Fie X_t proces stocastic cu proprietatea că există $c, \varepsilon, p > 0$ astfel ca*

$$E|X_t - X_s|^p \leq c|t-s|^{1+\varepsilon} \text{ , pentru } t, s \in D.$$

Atunci, cu probabilitate 1, traiectoriile lui X_t sunt uniform continue pe D.

Demonstraţie. Fie $\lambda_n = 2^{-n\varepsilon/2p}$ şi

$$A_n = \{|X_t - X_s| \geq \lambda_n \text{ pentru } t, s \in D \text{ cu } |t-s| \leq 2^{-n}\}.$$

Dacă arătăm că $P(A_n) \leq c2^{-n\varepsilon/2}$, din lema Borel-Cantelli va rezulta că avem $P\left[\limsup_{n\to+\infty} A_n\right] = 0$, ceea ce arată că, in afara unei mulţimi neglijabile, X_t este uniform continuă pe D.

Definim $a(n,t) = k/2^n$ dacă $t \in [k/2^n, (k+1)/2^n]$. Dacă $t \in D$ şi $n \geq 0$, putem scrie

$$X_t = X_{a(n,t)} + \left[X_{a(n+1,t)} - X_{a(n,t)}\right] + \left[X_{a(n+2,t)} - X_{a(n+1,t)}\right] + \ldots,$$

unde suma este de fapt finită deoarece $t \in D$ şi deci $a(j,t) = t$ pentru j suficient de mare. Exprimăm similar şi pe X_s. Dacă $|t-s| \leq 2^{-n}$, atunci $|a(n,t) - a(n,s)| \leq 2^{-n}$.

Dacă $|X_t - X_s| > \lambda_n$ pentru un cuplu $t, s \in D$, avem două posibilități:

$$(a) \quad \left|X_{a(n,t)} - X_{a(n,s)}\right| \geq \lambda_n/2$$

pentru un cuplu $t, s \in D$ cu $|t-s| \leq 2^{-n}$, sau

$$(b) \quad \left|X_{a(n+i+1,t)} - X_{a(n+i,s)}\right| \geq \lambda_n/40\,(i+1)^2$$

pentru un t și i.

Pentru ca (a) să aibă loc, trebuie să avem $|X_r - X_q| > \lambda_n/2$ pentru un cuplu $q, r \in D_n$ cu $|q-r| < 2^{-n}$. Sunt cel mult 2^n perechi, deci probabilitatea in cazul (a) este dominată de

$$2^n \sup_{s\leq 1} P\left[|X_{s+2^{-n}} - X_s| > \lambda_n/2\right] \leq \frac{2^{n+p}}{\lambda_n^p} E\left|X_{s+2^{-n}} - X_s\right|^p$$

$$\leq \frac{c2^n}{\lambda_n^p}\left(2^{-n}\right)^{1+\epsilon} \leq \frac{c2^{-n\epsilon}}{\lambda_n^p}.$$

Pentru ca (b) să aibă loc, trebuie ca, pentru un i să avem $|X_r - X_q| > \lambda_n/40\,(i+1)^2$ pentru un cuplu q, r cu $r \in D_{n+i}, q \in D_{n+i+1}$ și $|q-r| < 2^{-n-i}$. Sunt cel mult 2^{n+i+2} perechi, deci probabilitatea in cazul (b) este dominată de

$$\sum_{i=0}^{+\infty} 2^{n+i+2} \sup_{s\leq 1} P\left[|X_{s+2^{-n-i}} - X_s| > \frac{\lambda_n}{40\,(i+1)^2}\right]$$

$$\leq \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{2^{n+i+2}2^{-(n+i)(1+\epsilon)}40^p(i+1)^{2p}}{\lambda_n^p} \leq \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{c2^{-n\epsilon}2^{-i\epsilon/2}}{\lambda_n^p} \leq \frac{c2^{-n\epsilon}}{\lambda_n^p}$$

Deci probabilitatea lui A_n este dominată de $c2^{-n\epsilon/2}$.

Pentru a construi mișcarea browniană 1−dimensională, fie $t_1, t_2, \ldots$ o enumerare a lui D, Ω mulțimea funcțiilor de la D la $\mathbb{R}$, $B_t(\omega) = \omega(t)$, $t \in D$. Pentru a defini μ_n (n fixat), fie $s_1, s_2, \ldots, s_n$ o permutare a lui $t_1, t_2, \ldots, t_n$ astfel ca $s_1 < s_2 < \ldots < s_n$ și

$$\mu_n (A_1 \times \ldots \times A_n) = \int_{A_n} \cdots \int_{A_1} p(s_1, x_1) \times$$

$$\times p(s_2 - s_1, x_2 - x_1) \ldots p(s_n - s_{n-1}, x_n - x_{n-1})\, dx_1 \ldots dx_n,$$

unde funcţiile $p(t, x)$ sunt date in formula (4.1). Observăm că μ_n este legea unui vector gaussian şi că se verifică ipotezele teoremei 4.5. Fie μ măsura pe D construită in această teoremă.

Dacă Z are legea $N(0, 1)$, atunci $E(Z^4) = 3$ (dezvoltaţi e^{iuZ} in serie de puteri, luaţi mediile şi comparaţi cu seria de puteri a lui $e^{-u^2/2}$). Din definiţia lui μ_n obţinem că legea lui $B_t - B_s$ este $N(0, t - s)$ pentru $t, s \in D$ şi deci

$$E \mid X_t - X_s \mid^4 = 3(t - s)^2 .$$

Din teorema 4.6, pentru aproape toţi ω, B_t este uniform continuă pe D. Definim $B_u := \lim_{t \searrow u, t \in D} B_t$ pentru $u \notin D$ şi se verifică faptul că B_u este mişcare browniană pe $[0, 1]$.

4.3 PROPRIETATEA TARE MARKOV

In afară de notaţiile, definiţiile şi rezultatele de la capitolul 3 privind timpii de stopare, să definim

$$X_T(\omega) := X_{T(\omega)}(\omega), \text{ iar } \theta_T \text{ prin}$$

$$\theta_T(\omega)(t) := \omega(T(\omega) + t);$$

avem deci că

$$X_t \circ \theta_T(\omega) = X_{T(\omega)+t}(\omega).$$

TEOREMA 4.7 *(proprietatea tare Markov) Dacă (P^x, B_t) este mişcare browniană, Y este v.a. mărginită, iar $T = \mathcal{F}_t-$timp de stopare, atunci*

$$E^x [Y \circ \theta_T \mid \mathcal{F}_T] = E^{B_T} Y, \; P^x - \text{a.s. pe } (T < \infty).$$

Demonstrație. Ca și la proprietatea Markov, este suficient să arătăm că

$$E^x\left[f\left(B_{T+t}\right) \mid \mathcal{F}_T\right] = E^{X_T} f\left(B_t\right),$$

pentru f continuă și mărginită. Definim T_n prin $T_n(\omega) = k/2^n$ dacă $T(\omega) \in \left[(k-1)/2^n, k/2^n\right)$. T_n este șir descrescător de timpi de stopare (către T, pe mulțimea $(T < \infty)$). Dacă $A \in \mathcal{F}_T$, atunci $A \in \mathcal{F}_{T_n}$, deci $A \cap (T_n = k/2^n) \in \mathcal{F}_{k/2^n}$ și avem

$$\int_{A\cap(T_n=k/2^n)} f\left(B_{T_n+t}\right) dP^x = \int_{A\cap(T_n=k/2^n)} f\left(B_{t+k/2^n}\right) dP^x$$

$$= \int_{A\cap(T_n=k/2^n)} E^{B_{k/2^n}} f\left(B_t\right) dP^x = \int_{A\cap(T_n=k/2^n)} E^{B_{T_n}} f\left(B_t\right) dP^x,$$

deci

$$\int_{A\cap(T<\infty)} f\left(B_{T_n+t}\right) dP^x = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{A\cap(T_n=k/2^n)} f\left(B_{T_n+t}\right) dP^x$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{A\cap(T_n=k/2^n)} E^{B_{T_n}} f\left(B_t\right) dP^x = \int_{A\cap(T<\infty)} E^{B_{T_n}} f\left(B_t\right) dP^x.$$

Facem $n \to +\infty$ și, din continuitatea lui f și B_t, obținem că

$$\int_{A\cap(T<\infty)} f\left(B_{T_n+t}\right) dP^x \to \int_{A\cap(T<\infty)} f\left(B_T\right) dP^x;$$

pe de altă parte, din continuitatea lui $P_t f$, rezultă că

$$E^{B_{T_n}} f\left(B_t\right) = P_t f\left(B_{T_n}\right) \to P_t f\left(B_T\right) = E^{B_T} f\left(B_t\right).$$

Observații. Un mod simplu de a reține proprietatea tare Markov pentru mișcarea browniană este următorul: fie T timp de stopare finit a.s. Atunci procesul $\{B_{T+t} - B_T, t \geq 0\}$ este mișcare browniană independentă de $\mathcal{F}_T$. Cu aceiași timpi de stopare ca in demonstrația de mai sus, se pot demonstra următoarele forme echivalente ale proprietăţii tare Markov pentru mişcarea browniană:

$$(1)\ P\left[B_{T+t} \in A \mid \mathcal{F}_T\right] = P_t\left[B_T, A\right] P - \text{a.s. pe } (T < \infty)$$

pentru orice $t \geq 0$, $A \subseteq \mathbb{R}$ boreliană.

$$(2)\ E\left[f\left(B_{T+t}\right) \mid \mathcal{F}_T\right] = \left(P_t f\right)\left(B_T\right) P - \text{a.s. pe } (T < \infty)$$

pentru orice $t \geq 0$, $f \in C_b(\mathbb{R})$.

$$(3)\ E\left[f\left(B_S\right) \mid \mathcal{F}_T\right] = \left(P_{S-T} f\right)\left(B_T\right) P - \text{a.s. pe } (S < \infty)$$

pentru orice $f \in C_b(\mathbb{R})$ şi orice timp de stopare $S \geq T$, $S =$ $\mathcal{F}_T$—măsurabil.

PROPOZIŢIA 4.8 *Fie T timp de stopare, $\alpha > 0$ fixat, B_t mişcare browniană şi u de clasă C^2 mărginită. Atunci există o funcţie boreliană mărginită f astfel ca*

$$u(x) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} \left(P_t f\right)(x) dt$$

şi are loc reprezentarea

$$u(x) = E^x\left[\int_0^T e^{-\alpha t} f\left(B_t\right) dt\right] + E^x\left[e^{-\alpha T} u\left(B_T\right)\right].$$

Demonstraţie. Prima relaţie din concluzie rezultă considerând $f := (\alpha - \mathcal{L})\, u$ şi integrând prin părţi de două ori. Pentru a doua formulă, presupunem că T este finit a.s. Din formula lui Fubini, avem

$$u(x) = E^x \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} f\left(B_t\right) dt$$

$$= E^x \int_0^T e^{-\alpha t} f\left(B_t\right) dt + E^x \int_T^{+\infty} e^{-\alpha t} f\left(B_t\right) dt.$$

Al doilea termen este egal cu

$$E^x e^{-\alpha T}\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} f(B_{T+t})\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} E^x\left[e^{-\alpha T} f(B_{T+t})\right] dt$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} E^x\left[e^{-\alpha T} E^{B_T}\left[f(B_{T+t})\right]\right] dt$$

$$= E^x\left[e^{-\alpha T}\int_0^{+\infty} E^{B_T}\left[e^{-\alpha t} f(B_{T+t})\right] dt\right] = E^x\left[e^{-\alpha T} u(B_T)\right].$$

COROLAR 4.9 *(formula lui Dynkin) Fie T timp de stopare finit a.p.t, B_t mişcare browniană şi u de clasă C^2 mărginită. Atunci*

$$E^x\left[\int_0^T (\mathcal{L}u)(B_t)\,dt\right] = E^x\left[u(B_T)\right] - u(x).$$

Demonstraţie. Din propoziţia 4.8 şi formula $(\alpha - \mathcal{L})u = f$ obţinem că $u(x)$ se scrie sub forma

$$E^x\left[\int_0^T e^{-\alpha t}\left[(\alpha u)(B_t) - (\mathcal{L}u)(B_t)\right] dt\right] + E^x\left[e^{-\alpha T} u(B_T)\right].$$

Facem $\alpha \to +\infty$ şi ţinem cont că $P^x[T < \infty] = 1$.

Aplicaţie. Fie B_t mişcare browniană care incepe din x şi fie T_ε primul timp de ieşire al mişcării browniene din $[x-\varepsilon, x+\varepsilon]$, $\varepsilon > 0$. Din simetria mişcării browniene rezultă

$$P^x\left[B_{T_\varepsilon} = x - \varepsilon\right] = P^x\left[B_{T_\varepsilon} = x + \varepsilon\right] = 1/2;$$

din proprietatea de scaling rezultă că $E(T_\varepsilon) = \varepsilon^2$. Formula lui Dynkin spune că

$$E^x\left[\int_0^{T_\varepsilon} (\mathcal{L}u)(B_t)\,dt\right] = \frac{u(x+\varepsilon) - u(x-\varepsilon)}{2} - u(x).$$

Intrucât $T_\varepsilon \to 0$ când $\varepsilon \to 0$, membrul stâng al ultimei relaţii se comportă ca $T_\varepsilon\left((\mathcal{L}u)(x) + 0(1)\right)$ pentru $\varepsilon \to 0$. Obţinem deci că

$$(\mathcal{L}u)(x) = u''(x)/2.$$

Acelaşi tip de tehnică de demonstraţie ca cel din formula lui Dynkin, impreună cu propoziţia 4.8 se aplică pentru următoarea generalizare

PROPOZIŢIA 4.10 *(formula Feynman-Kac) Fie V funcţie pe* $\mathbb{R}$ *boreliană mărginită şi nenegativă. Dacă*

$$v(x) = E^x\left\{\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} f(B_t)\exp\left[-\int_0^t V(B_s)\right]dt\right\},$$

atunci v este de clasă C^2 *mărginită şi*

$$(\alpha - \mathcal{L} + V(x))\,v(x) = f(x) \text{ a.s.}$$

Aplicaţie. Fie $V(x) = \beta 1_{(0,+\infty)}$ cu $\beta > 0$ constantă şi

$$\Phi(t) = \beta^{-1}\int_0^t V(B_s)\,ds,$$

unde B_t este mişcare browniană. Să observăm că $\Phi(t)$ coincide cu măsura Lebesgue a mulţimii $\{s \le t : B_s > 0\}$. Din formula Feynman-Kac pentru $f = 1$ obţinem

$$v(x) = E^x\left\{\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\exp\left[-\int_0^t V(B_s)\right]dt\right\},$$

şi deci această funcţie satisface

$$\begin{cases} (\alpha+\beta)v(x) - v''(x)/2 = 1, \text{ dacă } x > 0, \\ \alpha v(x) - v''(x)/2 = 1, \text{ dacă } x < 0, \end{cases}$$

pentru că $\mathcal{L} = 1/2d^2/dx^2$. Rezolvând ecuaţiile de mai sus obţinem

$$v(x) = \begin{cases} (\alpha+\beta)^{-1} + A_1 \exp\left[-\sqrt{2(\alpha+\beta)}x\right] \\ \quad + A_2 \exp\left[\sqrt{2(\alpha+\beta)}x\right], \text{ dacă } x > 0, \\ \alpha^{-1} + B_1 \exp\left[-\sqrt{2\alpha x}\right] + B_2 \exp\left[\sqrt{2\alpha x}\right], \text{ dacă } x < 0, \end{cases}$$

cu A_1, A_2, B_1, B_2 constante. Cum v, v' sunt continue in $x = 0$, avem că

$$v(0) = [\alpha(\alpha+\beta)]^{-1/2} \quad ,$$

iar din definiţie avem relaţia

$$v(0) = E^0 \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t - \beta\Phi(t)} dt.$$

Din unicitatea transformării Laplace, găsim că

$$E^0 [\exp(-\beta\Phi(t))] = \pi^{-1} \int_0^t e^{-\beta t} [s(t-s)]^{-1/2} ds,$$

deci funcţia de repartiţie a lui $\Phi(t)$, pentru t fixat, este absolut continuă, cu derivata in raport cu s egală cu

$$\pi^{-1} [s(t-s)]^{-1/2} = \frac{d}{ds}\left[2\pi^{-1} \arcsin\left(\frac{s}{t}\right)^{1/2}\right], \ 0 \le s \le t.$$

Rezultatul obţinut se numeşte *legea arcsinusului pentru legea timpului de sejur in semiaxa pozitivă a mişcării browniene.*

Fie T timp de stopare şi $B_t^T := B_{T\wedge t}$. De exemplu, dacă $T = \tau_{[-1,1]}$ este prima ieşire din $[-1,1]$, B_t^T se comportă ca B_t cât timp $B_t \in [-1,1]$ şi deindată ce B_t ajunge in -1 sau in 1 (timpul de sosire $T = T(\omega)$ depinzând de ω), rămâne acolo. Pentru T oarecare, traiectoriile lui B_t^T sunt continue a.s.

Fie T timp de stopare; definim un nou proces stocastic Y_t astfel

$$Y_t = B_t, t \ge 0 \text{ dacă } T = \infty$$

$$Y_t = \begin{cases} B_t, 0 \le t \le T \\ 2B_t^T - B_t, t \ge T \end{cases} \text{ dacă } T < \infty.$$

Procesul Y_t are traiectoriile continue. Până la momentul T, Y_t se comportă ca şi B_t; când t atinge valoarea T, Y_t ia valoarea B_t reflectată in raport cu dreapta $y = B_T$.

PROPOZIŢIA 4.11 *(principiul de reflexie al mişcării browniene) Procesul Y_t este mişcare browniană.*

Demonstraţie. Lucrăm cu $T < \infty$ a.s., notăm $B = \{B_t, t \geq 0\}$, $Y = \{Y_t, t \geq 0\}$, $B^T = \left\{B_t^T, t \geq 0\right\}$, $C_T = \{B_{T+t} - B_T, t \geq 0\}$ şi apoi considerăm tripletele $\left(T, B^T, C_T\right)$, $\left(T, B^T, -C_T\right)$. Avem că B^T şi T sunt $\mathcal{F}_T$−măsurabile, deci B^T şi T sunt independente de mişcările browniene $\pm C_T$. Apoi există o aplicaţie măsurabilă φ cu $B = \varphi\left(T, B^T, C_T\right)$ şi utilizând al doilea triplet, obţinem $Y = \varphi\left(T, B^T, -C_T\right)$, deci B şi Y au aceea şi lege, adică Y este mişcare browniană.

Fie B_t mişcare browniană care incepe din 0 şi

$$M_t := \sup_{s \leq t} B_t \ .$$

In continuare vom calcula legea comună a lui M_t şi B_t.

PROPOZIŢIA 4.12 *Dacă $a \geq b$, atunci*

$$P^0\left[M_t \geq a, B_t < b\right] = P^0\left[B_t > 2a - b\right]$$

$$\text{şi } P^0\left[M_t \geq a\right] = 2P^0\left[B_t > a\right].$$

Demonstraţie. Fie $T_a := \inf\left\{s : B_s \geq a\right\}$. Atunci avem

$$P^0\left[M_t \geq a, B_t < b\right] = P^0\left[T_a \leq t, B_t < b\right]$$

$$= \int_0^t P^0\left[B_t < b, T_a \in ds\right] = \int_0^t P^0\left[B_t - B_s < b - a, T_a \in ds\right].$$

Condiţionăm in raport cu $\mathcal{F}_s$ şi, folosind independenţa lui $B_t - B_s$ in raport cu $\mathcal{F}_s$ şi faptul că legea lui $B_t - B_s$ este aceeaşi cu a lui B_{t-s} , obţinem

$$\int_0^t P\left[{}^0B_t - B_s < b - a, T_a \in ds\right]$$

$$= \int_0^t P^0 [B_t > 2a - b, T_a \in ds] = P^0 [B_t > 2a - b, M_t \geq a] .$$

Dacă $B_t > 2a - b$, atunci $M_t \geq a$ şi obţinem prima relaţie. Pentru a doua, facem $a = b$ şi obţinem $P^0 [M_t \geq a, B_t < a] = P^0 [B_t > a]$, relaţie pe care o sumăm cu $P^0 [M_t \geq a, B_t > a] = P^0 [B_t > a]$.

Aplicaţie. Să determinăm legea primului timp de atingere a valorii $a > 0$, ştiind că $B_0 = 0$. Fie

$$T_a := \inf \{s \geq 0 : B_s = a | B_0 = 0\} .$$

Avem

$$P [T_a \leq t] = P [M_t \geq a | B_0 = 0] = P^0 [M_t \geq a]$$

deci, conform propoziţiei 4.12,

$$= 2P^0 [B_t > a] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{a/\sqrt{t}}^{\infty} e^{-y^2/2} dy = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t u^{-3/2} e^{-a^2/2u} du.$$

Deduceţi de aici şi din observaţia 5, capitolul 1, că $E(T_a) = +\infty$.

In particular: Dacă $B_{t_0} = a$, atunci probabilitatea ca B_t să aibă cel puţin o rădăcină intre t_0 şi t_1 este

$$P(a) = \frac{|a|}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{t_1 - t_0} u^{-3/2} e^{-a^2/2u} du.$$

Intr-adevăr,

$$\begin{aligned} & P^0 \left[\min_{u<t} B_u \leq 0 \right] \\ & = P^{-a} [M_t \geq 0] \text{ (din simetrie)} \\ & = P^0 [M_t \geq a] \text{ (din omogeneitate)} \\ & = P [T_a \leq t] , \end{aligned}$$

adică formula din enunţ.

Obţinem deasemenea că, dacă $B_0 = 0$, atunci probabilitatea ca B_t să aibă cel puţin o rădăcină in intervalul (t_0, t_1) este

$$\frac{2}{\pi} \arccos \sqrt{\frac{t_0}{t_1}}.$$

Intr-adevăr, probabilitatea căutată este

$$\int_0^\infty P(a) P^0 [B_{t_0} = a]\, da = \sqrt{\frac{2}{\pi t_0}} \int_0^\infty P(a) e^{-a^2/2t_0} da$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi t_0}} \int_0^\infty e^{-a^2/2t_0} \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_0^{t_1 - t_0} u^{-3/2} e^{-a^2/2u} du \right) da$$

$$= \frac{1}{\pi \sqrt{t_0}} \int_0^{t_1 - t_0} u^{-3/2} \left\{ \int_0^\infty a \exp \left[-\frac{a^2}{2} \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{t_0} \right) \right] da \right\} du$$

$$= \frac{\sqrt{t_0}}{\pi} \int_0^{t_1 - t_0} \frac{du}{(t_0 + u)\sqrt{u}} = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{t_1 - t_0}{t_0}}.$$

Exerciţii. Deduceţi că, dacă T_0 este cea mai mare rădăcină a mişcării browniene mai mică decât t, iar T_1 este cea mai mică rădăcină a mişcării browniene mai mare decât t, atunci

$$P[T_0 < t_0] = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{\frac{t_0}{t}},$$

$$P[T_1 < t_1] = \frac{2}{\pi} \arccos \sqrt{\frac{t}{t_1}},$$

$$P[T_0 < t_0\,,\, T_1 > t_1] = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{\frac{t_0}{t_1}}.$$

Aplicaţie. Să considerăm o traiectorie care pleacă din $x > 0$, satisface $B_t > y$ şi care atinge axa Ox la timpul T. Reflectăm această traiectorie după timpul T şi obţinem o altă traiectorie care pleacă din x şi atinge o valoare mai mică decât $-y$ la timpul t. Avem

$$P^x \left[B_t > y,\ \min_{u \le t} B_u \le 0 \right]$$

$$= P^x \left[B_t < -y, \ \min_{u \le t} B_u \le 0 \right] = P^x \left[B_t < -y \right].$$

Apoi

$$P^x \left[B_t > y, \ \min_{u \le t} B_u > 0 \right]$$

$$= P^x \left[B_t > y \right] - P^x \left[B_t > y, \ \min_{u \le t} B_u \le 0 \right]$$

$$= P^0 \left[B_t > y - x \right] - P^0 \left[B_t < -(y + x) \right] \text{ (din omogeneitate)}$$

$$= P^0 \left[B_t > y - x \right] - P^0 \left[B_t > y + x \right] \text{ (din simetrie)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{y-x}^{y+x} e^{-u^2/2t} du.$$

5
MERSUL LA INTÂMPLARE

Am văzut la paragraful 3.2 rolul pe care il joacă mersul la intâmplare in construcţia mişcării browniene şi a măsurii Wiener, prin trecere la limită slabă a şirului de interpolare asociat. In acest capitol vom studia in detaliu proprietăţile mersului la intâmplare.

Fie $(Y_n)_{n\geq 1}$ variabile aleatoare i.i.d. cu

$$P[Y_n = j] = a_j \ , \ j \in \mathbb{Z}.$$

Punem

$$S_0 = 0, \ S_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k \ ,$$

şi numim şirul $(S_n)_{n\geq 0}$ **mers la intâmplare**.

Fie $p_{ij} = a_{j-i}$ şi să observăm că avem

$$P[S_{n+1} = j \,|\, S_n = i, S_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, S_2 = i_2, S_1 = i_1]$$

$$= P[S_{n+1} = j \,|\, S_n = i] = p_{ij} \tag{5.1}$$

pentru orice $i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}, i, j \in \mathbb{Z}$, adică $(S_n)_{n\geq 0}$ este lanţ Markov omogen cu probabilităţile de tranziţie p_{ij} , $i, j \in \mathbb{Z}$.

Intr-adevăr, membrul stâng din (5.1) este egal cu

$$P[Y_{n+1} = j - i \,|\, Y_n = i - i_{n-1}, \ldots, Y_2 = i_2 - i_1, Y_1 = i_1] =$$

$$\frac{P[Y_{n+1} = j - i, Y_n = i - i_{n-1}, \ldots, Y_2 = i_2 - i_1, Y_1 = i_1]}{P[Y_n = i - i_{n-1}, \ldots, Y_2 = i_2 - i_1, Y_1 = i_1]} = a_{j-i},$$

iar membrul drept este egal cu

$$P[Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_{n+1} = j \,|\, Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n = i] =$$

$$P[Y_{n+1} = j - i \,|\, Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n = i]$$
$$= P[Y_{n+1} = j - i] = a_{j-i}.$$

Dacă există $p \in (0,1)$ astfel ca

$$P[Y_n = 1] = p \text{ şi } P[Y_n = -1] = 1 - p,$$

atunci mersul la intâmplare $(S_n)_{n\geq 0}$ asociat şirului $(Y_n)_{n\geq 1}$ se numeşte **simplu**, iar când $p = 1/2$, se numeşte **simetric**.

Să considerăm aruncările succesive ale unei monede, in care stema apare cu probabilitate p, banul cu probabilitate $1-p$, şi

$$Y_n = \begin{cases} 1, & \text{dacă la a } n-\text{a aruncare a apărut stema,} \\ -1, & \text{dacă la a } n-\text{a aruncare a apărut banul.} \end{cases}$$

Să calculăm distribuţia primului moment la care numărul 'stemelor' să fie egal cu numărul 'banilor' (excluzând momentul 0). Probabilitatea ca acest lucru să se intâmple la momentul $2n$ se obţine condiţionând cu numărul total de 'steme' in primele $2n$ aruncări, deci

$$P[\text{nr. de 'steme' } = \text{nr. de 'bani' la momentul } 2n]$$

$$P[\text{nr. de 'steme' } = \text{nr. de 'bani' la momentul } 2n \,|$$

$$|\, n \text{ steme au apărut in primele } 2n \text{ aruncări}] \times C_{2n}^{n} p^n (1-p)^n$$

$$= \frac{1}{2n-1} C_{2n}^{n} p^n (1-p)^n .$$

In limbajul mersului la intâmplare simplu, probabilitatea calculată mai sus reprezintă

$$P[S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, \ldots, S_{2n-1} \neq 0, S_{2n} = 0].$$

Să observăm acum că, in cazul mersului la intâmplare simetric, avem

$$P[S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, \ldots, S_{2n-1} \neq 0, S_{2n} \neq 0] =$$

$$P[S_{2n} = 0] = \frac{1}{2^{2n}} C_{2n}^n . \tag{5.2}$$

Notăm

$$u_n := \frac{1}{2^{2n}} C_{2n}^n$$

şi, conform calculelor precedente, avem

$$P[S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, \ldots, S_{2n-1} \neq 0, S_{2n} \neq 0] = 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{2k-1};$$

rămâne de arătat că

$$u_n = 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{2k-1}.$$

Vom arăta acest lucru prin inducţie: pentru $n = 1$ este evident deoarece $u_1 = 1/2$. Apoi

$$1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{2k-1} = 1 - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{u_k}{2k-1} - \frac{u_n}{2n-1}$$

$$= u_{n-1} - \frac{u_n}{2n-1} = u_n .$$

Din formula (5.2) şi formula lui Stirling: $n! \sim n^{n+1/2} e^{-n} \sqrt{2\pi}$, deducem că

$$P[S_{2n} = 0] \sim \frac{1}{\sqrt{n\pi}}$$

şi deci că mersul la intâmplare simetric se intoarce la origine cu probabilitate 1.

Să calculăm deasemenea distribuţia timpului ultimei vizite in origine până la momentul $2n$ inclusiv. Mai precis, pentru $k = 0, 1, \dots, n$, avem

$$P[S_{2k} = 0, S_{2k+1} \neq 0, S_{2k+2} \neq 0, \dots, S_{2n} \neq 0] = u_k u_{n-k} ,$$

deoarece

$$P[S_{2k} = 0, S_{2k+1} \neq 0, S_{2k+2} \neq 0, \dots, S_{2n} \neq 0] =$$

$$P[S_{2k} = 0] \times P[S_{2k+1} \neq 0, S_{2k+2} \neq 0, \dots, S_{2n} \neq 0 \,|S_{2k} = 0]$$

$$= u_k u_{n-k} .$$

Fie acum $A_{k,n}$ evenimentul ca, până la momentul $2n$, mersul la intâmplare simetric să fi fost pozitiv $2k$ unităţi de timp şi negativ $2n - 2k$ unităţi de timp. Atunci

$$P(A_{k,n}) = u_k u_{n-k} \tag{5.3}$$

Pentru $n = 1$ relaţia de mai sus este evidentă deoarece

$$P(A_{0,1}) = P(A_{1,1}) = 1/2, \; u_0 = 1, \; u_1 = 1/2.$$

Să presupunem că $P(A_{k,m}) = u_k u_{m-k}$ pentru toţi $m < n$.

Să demonstrăm relaţia (5.3) in cazul $k = n$. Condiţionând in raport cu momentul T al primei reveniri in origine, avem

$$P(A_{n,n}) = \sum_{r=1}^{n} P[A_{n,n} \,|T = 2r] \times P[T = 2r] +$$

$$P[A_{n,n} \,|T > 2n] \times P[T > 2n] .$$

Dat fiind că $T = 2r$, inseamnă că mersul la intâmplare a fost pozitiv pe $(0, 2r)$ sau negativ pe $(0, 2r)$ şi egal cu 0 la momentul $2r$. Deci

$$P[A_{n,n} \,|T = 2r] = \frac{1}{2} P(A_{n-r,n-r}) , \; P[A_{n,n} \,|T > 2n] = \frac{1}{2};$$

rezultă

$$P(A_{n,n}) = \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n} P(A_{n-r,n-r}) \times P[T = 2r] + \frac{1}{2}P[T > 2n]$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n} u_{n-r} \times P[T = 2r] + \frac{1}{2}P[T > 2n].$$

Apoi

$$\sum_{r=1}^{n} u_{n-r} \times P[T = 2r] = \sum_{r=1}^{n} P[S_{2n-2r} = 0] \times P[T = 2r]$$

$$= \sum_{r=1}^{n} P[S_{2n} = 0 \,|\, T = 2r] \times P[T = 2r] = u_n ,$$

aşadar

$$P(A_{n,n}) = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}P[T > 2n] = u_n .$$

Din simetrie, demonstraţia de mai sus funcţionează şi pentru $k = 0$. Pentru a demonstra (5.3) in cazul $0 < k < n$, după ce condiţionăm in raport cu T, obţinem

$$P(A_{k,n}) = \sum_{r=1}^{n} P[A_{k,n} \,|\, T = 2r] \times P[T = 2r];$$

dat fiind că $T = 2r$, inseamnă că mersul la intâmplare a fost pozitiv pe $(0, 2r)$ sau negativ pe $(0, 2r)$. Iar, pentru ca evenimentul $A_{k,n}$ să aibă loc, de la momentul $2r$ la momentul $2n$ avem nevoie de $2k - 2r$ unităţi pozitive in prima situaţie sau de $2k$ unităţi pozitive in cea de-a doua situaţie. Obţinem

$$P(A_{k,n}) = \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n} P[A_{k-r,n-r}] \times P[T = 2r]$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n} P[A_{k,n-r}] \times P[T = 2r]$$

$$= \frac{1}{2} u_{n-k} \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{n} u_{k-r} \times P[T = 2r] + \frac{1}{2} u_k \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{n} u_{n-r-k} \times P[T = 2r].$$

In fine folosim faptul că

$$\sum_{r=1}^{n} u_{k-r} \times P[T = 2r] = u_k \; ; \; \sum_{r=1}^{n} u_{n-r-k} \times P[T = 2r] = u_{n-k} \, .$$

Legea din formula (5.3) se poate numi legea arcsin discretă, deoarece, pentru k şi n mari, conform formulei lui Stirling avem

$$u_k u_{n-k} \sim \frac{1}{\pi\sqrt{k(n-k)}};$$

in particular, pentru orice $x \in (0,1)$, observăm că probabilitatea evenimentului ca proporţia de timp din $(0, 2n)$ in care mersul la intâmplare simetric este pozitiv, să fie mai mică decât x, este

$$\sum_{k=0}^{nx} u_k u_{n-k} \sim \frac{1}{\pi} \int_0^{nx} \frac{1}{\sqrt{t(n-t)}} dt = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{x}.$$

De exemplu, probabilitatea ca mersul la intâmplare simetric să fie pozitiv mai puţin decât jumătatea timpului este 1/2.

Observaţii. Deşi $P[S_n > 0] \to 1/2$ când $n \to \infty$, rezultatul de mai sus spune că proporţia de timp in care mersul la intâmplare simetric este pozitiv nu converge către constanta 1/2. Motivul pentru care probabilitatea limită de şedere intr-o stare nu este egală cu proporţia de timp (indelungat) petrecut in acea stare, este faptul că timpul mediu intre vizitele unei stări este infinit. Intr-adevăr, dacă T este timpul mediu intre două vizite in origine, avem

$$E(T) \geq \sum_{n=0}^{\infty} P[T > 2n] = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n\pi}}.$$

Deasemenea observăm că, pentru $x \in (0,1)$ şi n mare, probabilitatea ca mersul la intâmplare simetric să nu aibă rădăcini intre

$2nx$ şi $2n$ este

$$1-\sum_{k=nx}^{n} u_k u_{n-k} = \sum_{k=0}^{nx-1} u_k u_{n-k} \sim \frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{x}.$$

Să notăm prin p_{ij}^n probabilităţile de tranziţie din starea i in starea j după n paşi ale mersului la intâmplare simplu şi cu f_{ij}^n probabilităţile ca, plecând din starea i, prima sosire in starea j să aibă loc la momentul n :

$$f_{ij}^n = P\left[S_n = j, S_k \neq j, k = 1,\dots,n-1 \,|\, S_0 = i\right],\ n = 1,2,\dots$$

şi $f_{ij}^0 = 0$. O stare j se numeşte *recurentă* dacă $f_{jj} = 1$ şi *tranzientă* in caz contrar, unde am notat

$$f_{jj} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{jj}^n .$$

Să observăm că o stare j este recurentă dacă şi numai dacă

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^n = +\infty.$$

Intr-adevăr, starea j este recurentă dacă, cu probabilitate 1, procesul -care incepe din starea j- se va intoarce in j. Conform proprietăţii Markov, procesul odată reintors in j, reincepe ciclul, deci numărul de vizite in j va fi infinit. Pe de altă parte, dacă starea j este tranzientă, de fiecare dată când procesul se reintoarce in j, există o probabilitate pozitivă, anume $1 - f_{jj}$, ca el să nu mai revină vreodata in j; deci numărul de vizite este geometric cu medie $1/(1 - f_{jj})$. Astfel starea j este recurentă dacă şi numai dacă

$$E\left[\text{numărul de vizite in } j \,|\, S_0 = j\right] = +\infty.$$

Insă numărul de vizite in j este dat de $\sum_{n=0}^{\infty} g_n$, unde

$$g_n = \begin{cases} 1, & \text{dacă } S_n = j \\ 0, & \text{in caz contrar.} \end{cases}$$

Rămâne să observăm că

$$E\left[\sum_{n=0}^{\infty} g_n \,|S_0 = j\right] = \sum_{n=0}^{\infty} E\,[g_n\,|S_0 = j] = \sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^n \,.$$

Cum toate stările mersului la intâmplare simplu comunică, ele vor fi toate recurente sau toate tranziente, şi este suficient să considerăm $j = 0$. Apoi avem că

$$p_{00}^{2n+1} = 0,\; p_{00}^{2n} = C_{2n}^n p^n (1-p)^n \;; \tag{5.1}$$

folosind din nou formula lui Stirling, obţinem că

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{00}^n < +\infty \text{ dacă şi numai dacă } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[4p(1-p)]^n}{\sqrt{n\pi}} < +\infty;$$

cu alte cuvinte, toate stările sunt recurente pentru $p = 1/2$ şi, respectiv, tranziente pentru $p \neq 1/2$.

Exerciţii. 1. Dacă $(S_n)_{n\geq 0}$ este mers la intâmplare simplu, arătaţi că $(|S_n|)_{n\geq 0}$ este lanţ Markov omogen cu probabilităţile de tranziţie

$$p_{i,i+1} = 1 - p_{i,i-1} = \frac{p^{i+1} - (1-p)^{i+1}}{p^i - (1-p)^i}\;,\; i = 1, 2, \ldots \text{ şi } p_{01} = 1.$$

2. In cazul mersului la intâmplare simetric, arătaţi că numărul de reintoarceri in origine până la momentul $2n$ are media

$$\frac{2n+1}{2^{2n}} C_{2n}^n - 1.$$

Bazaţi pe faptul că legea comună a vectorului $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ intr-un mers la intâmplare nu se schimbă dacă indicii se permută, să arătăm că, notând

$$R_n = \text{numărul valorilor distincte din } \{S_0, S_1, \ldots, S_n\}\,,$$

avem

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{E(R_n)}{n} =$$

$$P\,[\text{mersul la intâmplare nu se intoarce niciodată in } 0]\,.$$

Intr-adevăr, fie

$$g_k = \begin{cases} 1, \text{ dacă } S_k \neq S_{k-1}, S_k \neq S_{k-2}, \ldots, S_k \neq S_0 \\ 0, \text{ altfel.} \end{cases}$$

Atunci

$$R_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} g_k$$

şi deci

$$E(R_n) = 1 + \sum_{k=1}^{n} P\,[g_k = 1]$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n} P\,[S_k \neq S_{k-1}, S_k \neq S_{k-2}, \ldots, S_k \neq S_0]$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n} P\,[Y_k \neq 0, Y_k + Y_{k-1} \neq 0, \ldots, Y_k + Y_{k-1} + \ldots + Y_1 \neq 0]$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n} P\,[Y_1 \neq 0, Y_1 + Y_2 \neq 0, \ldots, Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_k \neq 0]\,.$$

Aşadar

$$E(R_n) = 1 + \sum_{k=1}^{n} P\,[S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, \ldots, S_k \neq 0] = \sum_{k=0}^{n} P\,[T > k]\,,$$

unde T este momentul primei reveniri in 0. Insă, când $k \to \infty$, avem

$$P\,[T > k] \to P\,[T = +\infty] = P\,[\text{nu există intoarcere in } 0]\,.$$

In particular, dacă mersul la intâmplare este simetric ($p = 1/2$), din recurenţă avem că limita de mai sus este egală cu 0. In cazul $p > 1/2$, fie

$$\alpha = P\left[\text{mersul la intâmplare se intoarce in } 0 \,|\, Y_1 = 1\right].$$

Intrucât

$$P\left[\text{mersul la intâmplare se intoarce in } 0 \,|\, Y_1 = -1\right] = 1,$$

avem

$$P\left[\text{mersul la intâmplare se intoarce in } 0\right] = \alpha p + 1 - p.$$

Condiţionând in raport cu Y_2 găsim

$$\alpha = \alpha^2 p + 1 - p$$

şi cum $\alpha < 1$ (din tranzienţă), rezultă $\alpha = (1-p)/p$. Similar tratăm cazul $p < 1/2$. Obţinem

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{E(R_n)}{n} = \begin{cases} 2p - 1, \text{ dacă } p > 1/2 \\ 1 - 2p, \text{ dacă } p \leq 1/2. \end{cases}$$

Să demonstrăm in fine şi următoarea proprietate in cazul mersului simetric la intâmplare: media numărului de vizite in starea k inainte de a se intoarce la origine este 1 pentru orice $k \neq 0$. Să notăm cu Z numărul vizitelor de mai sus. Avem că

$$Z = \sum_{n=1}^{\infty} h_n ,$$

unde

$$h_n = \begin{cases} 1, \text{ dacă } S_n > 0, S_{n-1} > 0, \ldots, S_1 > 0, S_n = k \\ 0, \text{ altfel.} \end{cases}$$

(adică h_n ia valoarea 1 dacă apare o vizită in starea k la momentul n şi nu există intoarcere la 0 inainte de n). Deci

$$E(Z) = \sum_{n=1}^{\infty} P\left[S_n > 0, S_{n-1} > 0, \ldots, S_1 > 0, S_n = k\right]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P[Y_n + \ldots + Y_1 > 0, Y_{n-1} + \ldots + Y_1 > 0, \ldots,$$

$$Y_1 > 0, Y_n + \ldots + Y_1 = k]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P[Y_1 + \ldots + Y_n > 0, Y_2 + \ldots + Y_n > 0, \ldots,$$

$$Y_n > 0, Y_1 + \ldots + Y_n = k]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P[\text{mersul la intâmplare simetric ajunge la } k$$

$$\text{prima dată la momentul } n]$$

$$= P[\text{mersul la intâmplare simetric ajunge vreodată la } k] = 1.$$

6

CALCUL STOCASTIC BROWNIAN

6.1 INTEGRALA STOCASTICĂ ITÔ

Am văzut că traiectoriile mişcării browniene (deşi continue) nu sunt nicăieri derivabile; aceasta inseamnă că nu putem defini $\int f(s)dB_s$ ca integrală Stieltjes pentru integranzi generali f. Totuşi, este posibil să definim o astfel de integrală stocastică in sens L^2. Vom defini $\int H_s dB_s$, unde $H_s = H_s(\omega)$ este proces adaptat "convenabil" , anume: fie $\mathcal{F}_t^B$ filtrarea naturală asociată mişcării browniene; cerem ca $H_t(\omega)$ să fie adaptat in raport cu $\mathcal{F}_t^B$, cu traiectorii continue şi ca $E\int_0^{+\infty} H_s^2 ds < +\infty$, iar apoi vom slăbi această ultimă ipoteză la: $\int_0^{+\infty} H_s^2 ds < +\infty$ a.p.t.

Pentru inceput să observăm că, dacă H este $\mathcal{F}_a^B-$măsurabilă, K este $\mathcal{F}_c^B-$măsurabilă şi $a \leq b \leq c \leq d$, atunci

$$E\left[H\left(B_b - B_a\right)K\left(B_d - B_c\right)\right] =$$

$$E\left[H\left(B_b - B_a\right)KE\left[B_d - B_c\left|\mathcal{F}_c\right.\right]\right] = 0.$$

Cum $B_t^2 - t$ este martingal, avem

$$E\left[\left(B_b - B_a\right)^2\left|\mathcal{F}_a^B\right.\right] = E\left[B_b^2 - B_a^2\left|\mathcal{F}_a^B\right.\right] = b - a$$

deci

$$E\left[H^2(B_b - B_a)^2\right] = E\left[H^2 E\left[(B_b - B_a)^2 \left|\mathcal{F}_a^B\right.\right]\right] = (b-a)E\left[H^2\right].$$

Dacă H_s este *elementară* i.e. $H_s(\omega) = H(\omega)1_{[a,b]}(s)$, cu $H = \mathcal{F}_a^B$–măsurabilă, atunci definim $\int_0^1 H_s dB_s = H(B_b - B_a)$. Dacă H_s este *simplă* i.e. combinaţie liniară finită de integranzi elementari, definim $\int_0^1 H_s dB_s$ prin liniaritate. In fine, dacă H_s satisface $\int_0^1 H_s^2 ds < +\infty$ a.p.t., aproximăm H cu integranzi simpli H^n şi definim integrala stocastică ca limita in L^2 a integralelor stocastice cu integranzii aproximanţi H^n. De unde ştim că limita in L^2 există şi că valoarea ei este independentă de alegerea şirului aproximant H^n? Dacă H este simplă, putem scrie $H_s = \sum_{j=1}^n K_j 1_{[a_j,b_j]}(s)$, unde K_j sunt mărginite, $\mathcal{F}_{a_j}^B$–măsurabile şi $a_1 \le b_1 \le a_2 \le \ldots \le b_n$. Atunci

$$E\left(\int_0^1 H_s dB_s\right)^2 = E\left[\sum_{j=1}^n K_j^2 \left(B_{b_j} - B_{a_j}\right)^2\right] +$$

$$E\left[2\sum_{i<j} K_i\left(B_{b_i} - B_{a_i}\right) K_j\left(B_{b_j} - B_{a_j}\right)\right];$$

al doilea sumand estre zero, deci

$$E\left(\int_0^1 H_s dB_s\right)^2 = E\left(\int_0^1 H_s^2 ds\right)^2.$$

Aceasta inseamnă că există o izometrie intre $\int_0^1 H_s dB_s$ cu norma din $L^2(P)$ şi H_s cu norma L^2 : $\left(E\int_0^1 (\cdot)^2 ds\right)^{1/2}$.

LEMA 6.1. *Fie K v.a. mărginită şi $\mathcal{F}_a^B$–măsurabilă; atunci*

$$I_t := K\left(B_{t\wedge b} - B_{t\wedge a}\right)$$

este martingal continuu şi $E\left(I_\infty^2\right) = (b-a)E\left[K^2\right]$.

Demonstraţie. Continuitatea lui I_t este evidentă. Să arătăm că, pentru $s < t$, avem $E\left[I_t \left|\mathcal{F}_s^B\right.\right] = I_s$; sunt mai multe situaţii, in funcţie de poziţia numerelor s, t, a, b. Să arătăm e.g. in cazurile $a < s < t < b$ şi apoi $s < a < t < b$. Avem:

$$E\left[K\left(B_t - B_a\right)|\mathcal{F}_s\right] = KE\left[B_t - B_a|\mathcal{F}_s\right] = K\left(B_s - B_a\right)$$

respectiv

$$E\left[K\left(B_t - B_a\right)|\mathcal{F}_s\right] = E\left[KE\left[B_t - B_a|\mathcal{F}_a\right]|\mathcal{F}_s\right] = 0.$$

Pentru a doua afirmaţie, observăm că

$$E\left(I_\infty^2\right) = E\left[K^2 E\left[\left(B_b - B_a\right)^2|\mathcal{F}_a\right]\right] = E\left[K^2 E\left[B_b^2 - B_a^2|\mathcal{F}_a\right]\right];$$

apoi folosim că $B_t^2 - t$ este martingal, deci $E\left[B_b^2 - B_a^2|\mathcal{F}_a\right] = b - a$.

Pentru un proces simplu $H_s = \sum_{j=1}^{J} H_j 1_{[a_j,b_j]}(s)$ definim

$$I_t = \int_0^t H_s dB_s = \sum_{j=1}^{J} H_j\left(B_{t\wedge b_j} - B_{t\wedge a_j}\right).$$

PROPOZIŢIA 6.2. *Dacă H_s^n este şir de procese simple a.î.*

$$E\left[\int_0^{+\infty}\left(H_s^n - H_s^m\right)^2 ds\right] \to 0 \text{ când } m, n \to +\infty,$$

atunci

$$E\left[\sup_{s<+\infty}\left(I_s^n - I_s^m\right)^2\right] \to 0 \text{ când } m, n \to +\infty.$$

Demonstraţie. Dacă H este proces simplu, putem presupune $a_1 \le b_1 \le a_2 \le b_2 \le a_3 \le \ldots \le b_J$; conform lemei 6.1., I_t este martingal şi, cu inegalităţile lui Doob, obţinem

$$E\left[\sup_{s<+\infty} I_s^2\right] \le cE\left[I_\infty^2\right] = cE\left[\sum_{j=1}^{J} H_j^2\left(B_{b_j} - B_{a_j}\right)^2\right]$$

$$+cE\left[2\sum_{i<j} H_i H_j\left(B_{b_i} - B_{a_i}\right)\left(B_{b_j} - B_{a_j}\right)\right].$$

Condiţionăm in raport cu $\mathcal{F}^B_{a_j}$ şi fiecare termen din dreapta este

$$E\left[H_i H_j\left(B_{b_i} - B_{a_i}\right) E\left[B_{b_j} - B_{a_j} \middle| \mathcal{F}^B_{a_j}\right]\right] = 0.$$

Cum

$$E\left[H_j^2\left(B_{b_j} - B_{a_j}\right)^2\right] = E\left[H_j^2 E\left[\left(B_{b_j} - B_{a_j}\right)^2 \middle| \mathcal{F}^B_{a_j}\right]\right]$$

$$= E\left[H_j^2 E\left[B_{b_j}^2 - B_{a_j}^2 \middle| \mathcal{F}^B_{a_j}\right]\right] = \left(b_j - a_j\right) E\left[H_j^2\right]$$

obţinem că

$$E\left[\sup_{s<+\infty} I_s^2\right] \leq cE\left[\int_0^{+\infty} H_s^2 ds\right].$$

Cum diferenţa a două procese simple este tot proces simplu, rămâne de aplicat estimarea precedentă lui $I^n - I^m$.

Observaţie. Un proces adaptat H_s , de pătrat integrabil şi continuu se poate aproxima cu procese simple; de exemplu, şirul de procese

$$H_s^n := \sum_{i=1}^{2^n-1} 2^n \left(\int_{(i-1)2^{-n}}^{i2^{-n}} H_s ds\right) 1_{[i2^{-n},(i+1)2^{-n}]}(s)$$

converge către H_s in sensul că $E\left[\int_0^{+\infty}\left(H_s^n - H_s\right)^2 ds\right] \to 0$ când $n \to +\infty$. De fapt, operatorul liniar $P_n(H) = H^n$ are norma ≤ 1 şi $P_n(H) \to H$ când $n \to \infty$.

TEOREMA 6.3. *Fie H_s^n procese simple astfel ca*

$$E\left[\int_0^{+\infty}\left(H_s^n - H_s\right)^2 ds\right] \to 0 \text{ când } n \to +\infty.$$

Atunci I_s^n converge in L^2, uniform in raport cu $s \in [0, +\infty)$, către un martingal continuu. Limita, notată $I_s = \int_0^t H_s dB_s$, *este independentă de alegerea şirului H^n care aproximează pe H_s.*

Demonstraţie. Dacă H_s^n este ca in ipoteză, atunci

$$E\left[\int_0^{+\infty}(H_s^n - H_s^m)^2\,ds\right] \to 0$$

când $m, n \to +\infty$; conform propoziţiei 6.2., şirul I_s^n este Cauchy in raport cu norma L^2 a sup $-$ului după s, deci este convergent. Notăm limita cu I_s; trecem la un subşir şi obţinem că $I_s^{n_k}$ converge către I_s cu probabilitate 1, uniform in $s \in [0, +\infty)$. Cum fiecare I_s^n sunt continue, şi I_s este continuă.

Fie acum $s \leq t$. Din convergenţa in L^2 şi inegalitatea Jensen, avem

$$E\left[\left(E\left[I_t^n \,|\mathcal{F}_s^B\right] - E\left[I_t \,|\mathcal{F}_s^B\right]\right)^2\right] \leq$$

$$\leq E\left[E\left[(I_t^n - I_t)^2 \,|\mathcal{F}_s^B\right]\right] = E\left[(I_t^n - I_t)^2\right] \to 0.$$

Cum $E\left[I_t^n \,|\mathcal{F}_s^B\right] = I_s^n$, trecem la limită după n şi rezultă că I_t este martingal.

In fine, dacă $H^n, H^{n'}$ sunt procese simple care converg către H, propoziţia 6.2. spune că $E\left[\sup_{s<+\infty}\left(I_s^n - I_s^{n'}\right)^2\right] \to 0$ când $n, n' \to +\infty$, adică limita este independentă de şirul aproximant ales.

In particular reţinem că

$$E\left[\int_0^t H_s dB_s\right] = 0;\ E\left[\int_0^t H_r dB_r \int_0^s H_r dB_r\right] = E\left[\int_0^{t\wedge s} H_s^2 ds\right]$$

In fine, dacă $\int_0^{+\infty} H_s^2 ds < +\infty$ a.s. dar nu este neapărat integrabil, fie

$$T_k = \inf\left\{t > 0 : \int_0^t H_s^2 ds > k\right\}$$

şi definim $\int_0^t H_s dB_s$ ca fiind $\int_0^t H_s dB_{s\wedge T_k}$ dacă $t \leq T_k$. Cum $s \wedge T_k$ nu creşte pe $[T_k, +\infty)$, putem folosi definiţia din cazul integrabil pentru a defini integrala stocastică. Cum $T_k \to +\infty$ când $k \to +\infty$, am definit deci integrala stocastică I_t pentru orice t; se verifică fără dificultate că definiţia este consistentă.

TEOREMA 6.4 *(formula Itô de schimbare de variabilă) Fie*

$$X_t = X_0 + \int_0^t u_s dB_s + \int_0^t v_s ds,$$

cu u_s , v_s procese adaptate astfel ca

$$\int_0^{+\infty} u_s^2 ds < +\infty, \int_0^{+\infty} |v_s|\, ds < +\infty \text{ a.p.t.}$$

şi $f \in C^2(\mathbb{R})$. Atunci

$$f(X_t) = f(X_0) +$$

$$\int_0^t f'(X_s)\, u_s dB_s + \int_0^t f'(X_s)\, v_s ds + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)\, u_s^2 ds.$$

Demonstraţie. Definim

$$T_k = \inf\left\{t > 0 : \left|\int_0^t u_s dB_s\right| > k \text{ sau}\right.$$

$$\left.\int_0^t u_s^2 ds > k \text{ sau } \int_0^t |v_s|\, ds > k\right\}$$

Cum $T_k \to +\infty$ când $k \to +\infty$, este suficient să arătăm concluzia pentru $X_{t\wedge T_k}$; deci, putem presupune că $M_t := \int_0^t u_s dB_s$ şi $A_t := \int_0^t v_s ds$ sunt mărginite, iar $f \in C_b^2(\mathbb{R})$ i.e; f, f', f'' sunt mărginite.

Fie $t_0 > 0$ fixat şi $\varepsilon > 0$; definim $S_0(\varepsilon) = 0$,

$$S_{i+1}(\varepsilon) = t_0 \wedge \inf\left\{t > S_{i+1}(\varepsilon) : \left|M_t - M_{S_i(\varepsilon)}\right| > \varepsilon \text{ sau}\right.$$

$$\left.\int_0^t u_s^2 ds - \int_0^{S_i(\varepsilon)} u_s^2 ds > \varepsilon \text{ sau } \int_{S_i(\varepsilon)}^t v_s ds > \varepsilon \text{ sau } t - S_i(\varepsilon) > \varepsilon\right\}.$$

Vom renunţa la ε in notaţiile următoare. Cum procesele care apar sunt continue, avem $S_i \to t_0$ când $i \to +\infty$. Ideea este următoarea: dezvoltarea Taylor spune că

$$f(X_{t_0}) - f(X_0) = \sum_{i=0}^{+\infty} \left[f(X_{S_{i+1}}) - f(X_{S_i})\right]$$

$$= \sum_{i=0}^{+\infty} f'(X_{S_i})\left(X_{S_{i+1}} - X_{S_i}\right) +$$

$$\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{+\infty} f''(X_{S_i})\left(X_{S_{i+1}} - X_{S_i}\right)^2 + \sum_{i=0}^{+\infty} R_i\,,$$

unde R_i inseamnă restul. Vrem să arătăm că primul termen din dreapta converge către integrala stocastică din formula lui Itô, al doilea către termenul cu variaţie mărginită, iar al treilea către 0.

Pentru primul termen, fie $H_s^\varepsilon = f'(X_{S_i})$ dacă $S_i \leq s < S_{i+1}$. Din continuitatea lui X_s şi a lui f', H_s^ε converge mărginit către $f'(X_s)$; atunci $\sum_{i=0}^{+\infty} f'(X_{S_i})\left(A_{S_{i+1}} - A_{S_i}\right) = \int_0^t H_s^\varepsilon dA_s$ converge către $\int_0^t f'(X_s)\,dA_s$ (convergenţă dominată). Să observăm că

$$\sum_{i=0}^{+\infty} f'(X_{S_i})\left(B_{S_{i+1}} - B_{S_i}\right) = \int_0^t H_s^\varepsilon dB_s;$$

atunci $\sum_{i=0}^{+\infty} f'(X_{S_i})\left(B_{S_{i+1}} - B_{S_i}\right)$ converge către $\int_0^t f'(X_s)\,dB_s$ conform propoziţiei 6.2. Să scriem

$$f''(X_{S_i})\left(X_{S_{i+1}} - X_{S_i}\right)^2 = f''(X_{S_i})\left(B_{S_{i+1}} - B_{S_i}\right)^2 +$$

$$2f''(X_{S_i})\left(B_{S_{i+1}} - B_{S_i}\right)\left(A_{S_{i+1}} - A_{S_i}\right) + f''(X_{S_i})\left(A_{S_{i+1}} - A_{S_i}\right)^2.$$

Insă, prin aproximare cu procese simple şi folosind propoziţia 2.7, pentru orice t avem că

$$V_t^\varepsilon := \sum_{(i:S_{i+1}\leq t)} \left(M_{S_{i+1}} - M_{S_i}\right)^2 \to \int_0^t u_s^2 ds \text{ in probabilitate.}$$

Trecând la un subşir ε_k, convergenţa va fi a.s. şi $\sup_{\varepsilon_k} V_t^{\varepsilon_k} < +\infty$. Cum $f''(X_s)$ este proces continuu, $\int_0^{t_0} f''(X_s)\, dV_s^{\varepsilon_k}$ converge către $\int_0^{t_0} f''(X_s)\, ds$ când $\varepsilon_k \to 0$. Pe de alta parte, dat fiind $\delta > 0$, există $\varepsilon > 0$ astfel ca $|f''(x) - f''(y)| < \delta$ dacă $|x - y| < \varepsilon$; deci

$$\left| \sum_{i=0}^{+\infty} f''(X_{S_i}) \left(B_{S_{i+1}} - B_{S_i}\right)^2 - \int_0^t f''(X_s)\, dV_s^{\varepsilon} \right| \leq \delta V_{t_0}^{\varepsilon},$$

ceea ce implică

$$\sum_{i=0}^{+\infty} f''(X_{S_i}) \left(B_{S_{i+1}} - B_{S_i}\right)^2 \to \int_0^t f''(X_s)\, ds.$$

Apoi

$$\left| \sum_{i=0}^{+\infty} f''(X_{S_i}) \left(B_{S_{i+1}} - B_{S_i}\right) \left(A_{S_{i+1}} - A_{S_i}\right) \right|$$

$$\leq \varepsilon \|f''\|_\infty \sum_{i=0}^{+\infty} \left|A_{S_{i+1}} - A_{S_i}\right| \leq \varepsilon k \|f''\|_\infty ,$$

deoarece am presupus că $\int_0^t |dA_s|$ este mărginită şi $\left|B_{S_{i+1}} - B_{S_i}\right| \leq \varepsilon$, deci acest termen tinde la 0 când $\varepsilon \to 0$. Similar pentru $\sum_{i=0}^{+\infty} f''(X_{S_i}) \left(A_{S_{i+1}} - A_{S_i}\right)^2$. Teorema lui Taylor spune că

$$R_i \leq \eta(\varepsilon) \left(X_{S_{i+1}} - X_{S_i}\right)^2, \text{unde } \eta(\varepsilon) \to 0 \text{ când } \varepsilon \to 0.$$

Ca mai inainte, $E \sum_{i=0}^{+\infty} \left(X_{S_{i+1}} - X_{S_i}\right)^2$ rămâne mărginită, ceea ce arată că $\sum_{i=0}^{+\infty} R_i \to 0$ in L^2.

Exemplu Formula lui Itô aplicată funcţiei $f(x) = x^2$ implică

$$B_t^2 - t = 2 \int_0^t B_s dB_s .$$

Termenul $-t$ care apare 'in plus' in formula de mai sus (faţă de formula clasică de schimbare de variabilă) sau, mai general, termenul $\frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s)\, u_s^2 ds$ din formula lui Itô se datorează faptului că variaţia traiectoriilor browniene nu este 0, ci t.

COROLAR 6.5 *Fie*

$$X_t = X_0 + \int_0^t u_s dB_s + \int_0^t v_s ds,$$

cu u_s , v_s *procese adaptate astfel ca*

$$\int_0^{+\infty} u_s^2 ds < +\infty, \int_0^{+\infty} |v_s|\, ds < +\infty \text{ a.p.t.}$$

şi $f \in C^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$. *Atunci*

$$f(t, X_t) - f(0, X_0) = \int_0^t \frac{\partial f}{\partial s}(s, X_s)\, ds +$$

$$\int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s)\, u_s dB_s + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s)\, v_s ds + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, X_s)\, u_s^2 ds.$$

PROPOZIŢIA 6.6 *(inegalitatea lui Burkholder) Fie* $p \geq 2$; *atunci există* $c_p > 0$ *astfel ca*

$$E\left[\left|\int_0^t H_s dB_s\right|^p\right] \leq c_p t^{p/2-1} E\left[\int_0^t |H_s|^p ds\right]$$

Demonstraţie. Cazul $p = 2$ este evident. Formula lui Itô aplicată lui $X_t := \int_0^t H_s dB_s$ şi funcţiei $f(x) = |x|^p$, $p > 2$, implică

$$|X_t|^p = p \int_0^t |X_s|^{p-1} \operatorname{sgn}(X_s)\, H_s dB_s + \frac{p(p-1)}{2} \int_0^t |X_s|^{p-2} H_s^2 ds.$$

Luăm mediile şi cu inegalităţile lui Doob şi Hölder, obţinem

$$E\left[|X_t|^p\right] \leq \frac{p(p-1)}{2} E\left[\int_0^t |X_s|^{p-2} H_s^2 ds\right]$$

$$\leq \frac{p(p-1)}{2} E\left[\sup_{0 \leq s \leq t} |X_s|^{p-2} \int_0^t H_s^2 ds\right]$$

$$\leq \frac{p(p-1)}{2} E\left[\sup_{0 \leq s \leq t} |X_s|^p\right]^{(p-2)/2} E\left[\left(\int_0^t H_s^2 ds\right)^{p/2}\right]^{2/p}$$

$$\leq \frac{p(p-1)}{2}\left(\frac{p}{p-1}\right)^{p-2} E\left[|X_t|^p\right]^{(p-2)/2} E\left[\left(\int_0^t H_s^2 ds\right)^{p/2}\right]^{2/p}.$$

PROPOZIŢIA 6.7 *(continuitatea integralei stocastice în raport cu parametrii) Fie $H_t(x); t \in [0,T], x \in A \subseteq \mathbb{R}$, cu proprietăţile:*

(i) *$H_t(x)$ este integrabil în raport cu mişcarea browniană pentru orice $x \in A$;*

(ii) *pentru orice $p > 2$, există $c_p^1 > 0$ astfel ca*

$$\int_0^T E\left[|H_t(x)|^p\right] dt \leq c_p^1 \text{ pentru orice } x \in A.$$

(iii) *pentru orice $p > 2$, există $c_p^2 > 0$ astfel ca, pentru orice $x, y \in A$,*

$$\int_0^T E\left[|H_t(x) - H_t(y)|^p\right] dt \leq c_p^2 |x-y|^{\alpha p} \text{ cu } \alpha \in (0,1].$$

Atunci există o versiune continuă în $(t,x) \in [0,T] \times A$ a integralei stocastice $\int_0^t H_s(x) dB_s$.

Demonstraţie. Conform inegalităţii lui Burkholder, pentru $s < t$, avem

$$E\left[\left|\int_0^t H_r(x) dB_r - \int_0^s H_r(y) dB_r\right|^p\right]$$

$$\leq c_p \left\{E\left[\left|\int_s^t H_r(x) dB_r\right|^p\right] + E\left[\left|\int_0^s [H_r(x) - H_r(y)]\, dB_r\right|^p\right]\right\}$$

$$\leq c_p \left\{E\left[\left|\int_s^t H_r(x) dr\right|^{p/2}\right] + E\left[\left|\int_0^s [H_r(x) - H_r(y)]^2\, dB_r\right|^{p/2}\right]\right\}$$

$$\leq c_p \left[|t-s|^{p/2-1} + |s|^{p/2-1} |x-y|^{\alpha p}\right].$$

Cu p convenabil ales, se poate aplica criteriul de continuitate 4.6.

COROLAR 6.8 *Putem inlocui ipotezele (ii)-(iii) din propoziţia 6.7 cu:*

(ii') pentru orice $p > 1, \sup_{x\in A} \int_0^T E\left[|H_s(x)|^p\right] ds < +\infty$;

(iii') există $\alpha \in (0,1]$ *cu* $|H_t(x) - H_t(y)| \leq c_t(x,y)\,|x-y|^\alpha$ *pentru* $x, y \in A$ *şi* $\sup_{x,y\in A} \int_0^T |c_t(x,y)|^p\, dt < +\infty$ *pentru orice* $p > 1$.

Demonstraţie. Fie şirul de timpi de stopare

$$T_n = \inf\left\{t > 0 : \sup_{x\in A}\int_0^t |H_s(x)|^p\, ds + \sup_{x,y\in A}\int_0^t |c_s(x,y)|^p\, ds > n\right\};$$

avem că

$$\sup_{x\in A} E\left[\int_0^{T\wedge T_n} |H_s(x)|^p\, ds\right] \leq n$$

$$\text{şi } E\left[\int_0^{T\wedge T_n} |H_s(x) - H_s(y)|^p\, ds\right] \leq n\,|x-y|^{\alpha p},$$

deci $\int_0^{t\wedge T_n} H_s(x)dB_s$ are o versiune continuă in (t,x), deci şi $\int_0^t H_s(x)dB_s$.

PROPOZIŢIA 6.9 *(derivabilitatea integralei stocastice in raport cu parametrii) Fie* $H_t(x); t \in [0,T], x \in A \subseteq \mathbb{R}$ *care satisface (i) din propoziţia 6.7 a.i.* $H_t(x)$ *este derivabilă in* x *de* m *ori a.s. şi pentru orice* t*, iar derivatele* $\partial^k H_t(x)/\partial x^k$; $k \leq m$*, satisfac ipotezele (ii)-(iii) din propoziţia 6.7 sau (ii')-(iii') din corolarul 6.8. Atunci există o versiune a integralei stocastice* $\int_0^t H_s(x)dB_s$*, continuă in* $(t,x) \in [0,T]\times A$ *şi de* m *ori derivabilă in* x*. In plus,*

$$\frac{\partial^k}{\partial x^k}\int_0^t H_s(x)dB_s = \int_0^t \frac{\partial^k}{\partial x^k} H_s(x)dB_s \text{ pentru } k \leq m.$$

Demonstraţie (cazul $m = 1$). Fie

$$X_t(x,y) = \frac{1}{y}\left[\int_0^t H_s(x+y)dB_s - \int_0^t H_s(x)dB_s\right];$$

este suficient să arătăm că $X_t(x,y)$ are o extensie continuă in $y=0$. Avem

$$X_t(x,y)=\int_0^t\left(\int_0^1 H_s'(x+ry)dr\right)dB_s, \text{ deci}$$

$$E\left[\left|X_t(x,y)-X_{t'}(x',y')\right|\right]^p$$

$$\leq c_pE\left[\left|\int_0^t\left(\int_0^1 H_s'(x+ry)-H_s'(x'+ry')dr\right)dB_s\right|^p\right]$$

$$+d_pE\left[\left|\int_t^{t'}\left(\int_0^1 H_s'(x'+ry')dr\right)dB_s\right|^p\right].$$

Cu inegalitatea lui Burkholder, primul termen este dominat de

$$c_pt^{p/2-1}\int_0^1\int_0^t E\left[\left|H_s'(x+ry)-H_s'(x'+ry')\right|\right]dsdv$$

$$\leq c_p\left(|y-y'|^{\alpha p}+|x-x'|^{\alpha p}\right),$$

iar al doilea termen este dominat de

$$d_p\left|t'-t\right|^{p/2-1}\int_t^{t'}E\left[\left|\int_0^1 H_s'(x'+ry')dr\right|^p\right]ds\leq d_p\left|t'-t\right|^{p/2-1}$$

şi putem aplica criteriul de continuitate 4.6. Pentru a vedea că limita permută cu integrala, trecem la limită cu $y\to 0$ in expresia lui $X_t(x,y)$.

Observaţie. Din corolarul 6.8 şi propoziţia 6.9 deducem

(a) Dacă $H_t(x)$ este continuă in (t,x) şi derivabilă in x, atunci $\int_0^t H_s(x)dB_s$ are o versiune continuă in (t,x).

(b) Dacă $H_t(x)$ este continuă in (t,x) şi de $m+1$ ori derivabilă in x, atunci $\int_0^t H_s(x)dB_s$ are o versiune continuă in (t,x) şi de m ori derivabilă in x. In plus

$$\frac{\partial^k}{\partial x^k}\int_0^t H_s(x)dB_s=\int_0^t\frac{\partial^k}{\partial x^k}H_s(x)dB_s \text{ pentru } k\leq m.$$

6.2 ECUAŢII STOCASTICE

Fie $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ câmpul de probabilitate canonic asociat unei mişcări browniene B_t , $t \in [0,T]$ şi $\mathcal{F}_t^B$ filtrarea mişcării browniene. Se dau σ, $b : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, funcţii măsurabile. Coeficientul b se numeşte drift, iar σ coeficient de difuzie. Prin soluţie a ecuaţiei stocastice cu coeficienţii b, σ, inţelegem un proces $X = \{X_t,\ t \in [0,T]\}$, cu valori in $\mathbb{R}$, $\mathcal{F}_t$–adaptat, care să verifice ecuaţia stocastică

$$X_t = x + \int_0^t \sigma(s, X_s) dB_s + \int_0^t b(s, X_s)\, ds, \text{ cu } x \in \mathbb{R} \text{ dat.} \tag{6.1}$$

Observaţi că adaptarea soluţiei la $\mathcal{F}_t^B$ este necesară pentru ca integralele stocastice din ecuaţie să aibă sens. Orice soluţie a ecuaţiei stocastice se numeşte **proces de difuzie**. Dacă coeficienţii ecuaţiei nu depind de prima variabilă, ecuaţia se numeşte omogenă:

$$X_t = x + \int_0^t \sigma(X_s) dB_s + \int_0^t b(X_s)\, ds, \text{ cu } x \in \mathbb{R} \text{ dat.} \tag{6.2}$$

TEOREMA 6.10 *Dacă coeficienţii b, σ sunt global Lipschitz i.e.*

$$|\sigma(t,x) - \sigma(t,y)|\,, |b(t,x) - b(t,y)| \le L\,|x - y|$$

şi respectă condiţiile de creştere

$$|\sigma(t,x)|\,,\ \ |b(t,x)| \le C(1 + x^2)$$

pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$, $t \in [0,T]$, atunci ecuaţia (6.1) are o soluţie unică a.s. pe $[0,T]$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$ şi care este in L^p, $p \ge 1$.

Demonstraţie. Folosim metoda aproximaţiilor succesive. Prin inducţie definim şirul următor de procese adaptate şi continue: $X_t^0 = x$,

$$X_t^n = x + \int_0^t \sigma(s, X_s^{n-1}) dB_s + \int_0^t b(s, X_s^{n-1})\, ds\ ,\ n \ge 1.$$

Pentru $p \geq 2$, avem

$$E\left[\sup_{0\leq s\leq t}\left\|X_s^{n+1}-X_s^n\right\|^p\right]$$

$$\leq \text{const. } E\left[\sup_{0\leq s\leq t}\left|\int_0^s\left[b\left(r,X_r^{n-1}\right)-b\left(r,X_r^n\right)\right]dr\right|^p\right]$$

$$+\text{const. } E\left[\sup_{0\leq s\leq t}\left|\int_0^s\left[\sigma\left(r,X_r^{n-1}\right)-\sigma\left(r,X_r^n\right)\right]dB_r\right|^p\right].$$

Conform cu inegalităţile lui Doob şi Burkholder, primul termen din dreapta este dominat de

$$t^{p-1}L^pE\left[\int_0^t\left|X_s^n-X_s^{n-1}\right|^p ds\right],$$

iar fiecare dintre termenii sumei este majorat de

$$c_pt^{p/2-1}L^pE\left[\int_0^t\left|X_s^n-X_s^{n-1}\right|^p ds\right],$$

deci

$$E\left[\sup_{0\leq s\leq t}\left|X_s^{n+1}-X_s^n\right|^p\right]\leq c_1E\left[\int_0^t\left|X_s^n-X_s^{n-1}\right|^p ds\right].$$

Notăm $\rho_t^{(n)}$ membrul stâng; avem $\rho_t^{(n)} \leq c_1\int_0^t\rho_r^{(n-1)}dr$. Iterând, obţinem $\rho_t^{(n)} \leq (c_1^n/n!)\,T^n\rho_0^{(n)}$, deci

$$\sum_{n=0}^{+\infty}E\left[\sup_{0\leq s\leq t}\left|X_s^{n+1}-X_s^n\right|^p\right]^{1/p}\leq\sum_{n=0}^{+\infty}\left[\frac{c_1^n}{n!}T^n\rho_0^{(n)}\right]^{1/p}.$$

Aceasta inseamnă că X_t^n converge uniform in $[0,t]$ a.s. şi in L^p. Fie X_t limita sa, care este proces continuu şi adaptat. Cu inegalităţile lui Burkholder avem că

$$\int_0^t\sigma\left(s,X_s^n\right)dB_s\to\int_0^t\sigma\left(s,X_s\right)dB_s \text{ in } L^p,$$

Similar pentru integralele in ds, deci X_t este soluţia ecuaţiei (6.1).

Pentru unicitate, fie X_t, Y_t două soluţii ale lui (6.1) şi

$$T_n = \inf\{t > 0 : |X_t| \geq n \text{ sau } |Y_t| \geq n\};$$

avem

$$X_t^{T_n} - Y_t^{T_n} = \int_0^{t\wedge T_n} \left[b\left(s, X_s^{T_n}\right) - b\left(s, Y_s^{T_n}\right)\right] ds$$

$$+\int_0^{t\wedge T_n} \left[\sigma\left(s, X_s^{T_n}\right) - \sigma\left(s, Y_s^{T_n}\right)\right] dB_s$$

deci, ca mai inainte, obţinem

$$E\left[\sup_{0\leq s<t} \left|X_s^{T_n} - Y_s^{T_n}\right|^p\right] \leq c_1 E\left[\int_0^{t\wedge T_n} \left|X_s^{T_n} - Y_s^{T_n}\right|^p ds\right].$$

Notăm η_t membrul stâng (cu n fixat); obţinem $\eta_t \leq c_1\int_0^t \eta_s ds$. Cu lema lui Gronwall rezultă $\eta_t \equiv 0$, deci $X_t^{T_n} = Y_t^{T_n}$ şi apoi ţinem cont că $T_n \nearrow +\infty$.

Vom nota prin $X_t(x)$ soluţia ecuaţiei (6.1).

PROPOZIŢIA 6.11 *(continuitatea şi derivabilitatea soluţiei in raport cu datele iniţiale) In ipotezele teoremei 6.10, există versiuni continue in (t, x) ale integralelor stocastice şi a lui $X_t(x)$. Fie σ, b global Lipschitz; dacă derivatele $\sigma' = \partial\sigma/\partial x$, $b' = \partial b/\partial x$ sunt continue şi mărginite, atunci există $X_t'(x) = \partial X_t(x)/\partial x$ şi satisface ecuaţia*

$$X_t'(x) = 1 + \int_0^t \sigma'\left(s, X_t'(x)\right) X_t'(x) dB_s + \int_0^t b'\left(s, X_s'(x)\right) X_t'(x) ds.$$

Demonstraţie. Conform teroremei 4.6, pentru continuitate este suficient de arătat estimarea următoare

$$E\left[|X_t(x) - X_s(y)|^p\right]$$

$$\leq c_p \left[|x-y|^p + (1+|x|^p+|y|^p)\,|t-s|^{p/2}\right]$$

pentru orice $s < t$ şi $x, y \in \mathbb{R}$.

Din demonstraţie vom vedea că, dacă coeficienţii b, σ sunt mărginiţi, atunci estimarea are forma

$$E\left[|X_t(x) - X_s(y)|^p\right] \leq c_p \left[|x-y|^p + |t-s|^{p/2}\right].$$

Pentru estimarea iniţială, vom arăta că

$$E\left[\left|\int_0^t b\left(r, X_r(y)\right) dr\right|^p\right] \leq c_p \left(1+|y|^p\right)|t-s|^{p/2}$$

$$E\left[\left|\int_0^t \sigma\left(r, X_r(y)\right) dB_r\right|^p\right] \leq c_p \left(1+|y|^p\right)|t-s|^{p/2}$$

$$E\left[\left|\int_0^t \left[\sigma\left(r, X_r(x)\right) - \sigma\left(r, X_r(y)\right)\right] dB_r\right|^p\right] \leq c_p\,|t-s|^p.$$

Să observăm că, pentru orice $p \in \mathbb{R}$ şi $\varepsilon > 0$, există $c_{p,\varepsilon} > 0$ astfel ca

$$E\left[\left(\varepsilon + X_t^2(x)\right)^p\right] \leq c_{p,\varepsilon}\left(\varepsilon + x^2\right)^p$$

şi, pentru orice $p \in \mathbb{R}$, există $c_p > 0$ astfel ca

$$E\left[\left(\varepsilon + \left(X_t(x) - X_t(y)\right)^2\right)^p\right] \leq c_p \left(\varepsilon + (x-y)^2\right)^p;$$

aceste estimări se obţin aplicând formula lui Itô funcţiei $f(x) = (\varepsilon + x^2)^p$ şi martingalelor $M_t = X_t(x)$ (respectiv $M_t = X_t(x) - X_t(y)$) şi apoi aplicând inegalitatea lui Burkholder.

Afirmaţia referitore la derivabilitate se demonstrează ca şi propoziţia 6.9 referitoare la derivabilitatea integralei stocastice în raport cu parametrii.

Exerciţii.

1. Enunţaţi şi demonstraţi un rezultat similar propoziţiei 6.11, în care derivatele de orice ordin ale coeficienţilor ecuaţiei stocastice sunt continue şi mărginite, iar concluzia este că soluţia este

infinit derivabilă in raport cu x. Determinaţi ecuaţia satisfăcută de derivate (se poate demonstra o teoremă de tip convergenţă dominată pentru integrala stocastică Itô).

2. (*Dependenţa continuă de coeficienţi sau stabilitatea ecuaţiilor stocastice*) Fie σ^N, b^N global Lipschitz şi cu creştere cel mult polinomială cu aceeaşi constantă K, pentru orice $N \geq 0$. Notăm cu X_t^N soluţia ecuaţiei

$$X_t^N = X_0^N + \int_0^t \sigma^N\left(s, X_s^N\right)dB_s + \int_0^t b^N\left(s, X_s^N\right)ds.$$

Dacă

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{|x|\leq a} \left\{\left|\sigma^N(t,x) - \sigma^0(t,x)\right| + \left|b^N(t,x) - b^0(t,x)\right|\right\} = 0$$

pentru orice $a > 0$, $0 \leq t \leq T$ şi

$$\lim_{N\to\infty} E\left[X_0^N - X_0^0\right]^2 = 0,$$

atunci

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{0\leq t\leq T} E\left[X_t^N - X_t^0\right]^2 = 0;$$

(convergenţa are loc chiar in probabilitate).

Presupunem in continuare că σ_j, b satisfac condiţia Lipschitz din teorema 6.10 *local* i.e. satisfac condiţia Lipschitz pe domeniile mărginite din $\mathbb{R}$. Procesul $X_t(x)$, $x \in \mathbb{R}$, $t \in [0, T_x \wedge T]$, cu valori in $\mathbb{R}$ se numeşte *soluţie locală* a ecuaţiei (6.1) cu condiţia iniţială $X_0(x) = x$ dacă există un timp de stopare T_x şi un şir crescător de timpi de stopare $T_x^n; n = 1, 2, \ldots$, $\mathcal{F}_t-$măsurabili, cu $T_x^n < T_x$ şi $T_x^n \nearrow T_x$ pentru orice x, a.s., $X_t(x)$ este continuă in (t, x) şi satisface ecuaţia (6.1) pentru orice $t \in [0, T_x]$.

Soluţia $X_t(x)$ se numeşte *maximală* dacă are loc relaţia:

$$\lim_{t\nearrow T_x} X_t(x) = +\infty \text{ pe mulţimea } \{T_x(\omega) < +\infty\},$$

iar $T_x(\omega)$ se numeşte *timpul de explozie* al soluţiei.

TEOREMA 6.12 *Dacă coeficienţii σ, b sunt local Lipschitz, atunci ecuaţia (6.1) admite o soluţie maximală unică.*

Demonstraţie. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$ considerăm b^n, σ_j^n global Lipschitz a.i. $b = b^n, \sigma_j = \sigma_j^n$ pentru $t \in [0,T]$ şi $|x| \leq n$. Ecuaţia (6.1) cu coeficienţii b^n, σ_j^n are o soluţie unică $X_t^n(x)$. Fie $T_x^n := \inf\{t < T : |X_t^n(x)| \geq n\}$, care este $\mathcal{F}_t^B$−timp de stopare. Pen t $t \leq T_x^n$ are loc

$$X_t^n(x) = x + \int_0^t \sigma(s, X_s^n(x))dB_s + \int_0^t b(s, X_s^n(x))\, ds.$$

Din unicitatea soluţiilor, avem

$$X_t^n(x) = X_t^m(x) \text{ pentru } t < T_x^n, \text{ dacă } n < m.$$

Fie $T_x := \lim_{n\to+\infty} T_x^n$; definim $X_t(x)$ pentru $0 \leq t < T_x$ prin $X_t(x) := X_t^n(x)$ dacă $0 \leq t < T_x^n$. Atunci procesul X_t, cu timpul de explozie T_x, este soluţia căutată (unicitatea este evidentă).

Exemple de ecuaţii stocastice

1. *Ecuaţii liniare* Soluţia ecuaţiei

$$X_t = X_0 + \int_0^t [\sigma_1(s) + \sigma_2(s)X_s]dB_s + \int_0^t [b_1(s) + b_2(s)X_s]ds$$

se poate pune in forma

$$X_t = Y_t \left\{ X_0 + \int_0^t Y_s^{-1}\sigma_1(s)dB_s + \int_0^t Y_s^{-1}[b_1(s) - \sigma_1(s)\sigma_2(s)]ds \right\},$$

unde

$$Y_t = \exp\left\{ \int_0^t \sigma_2(s)dB_s + \int_0^t \left[b_2(s) - \frac{1}{2}\sigma_2^2(s) \right] ds \right\}.$$

2. Fie $\sigma \in C^2(\mathbb{R})$ cu derivatele de ordine 1 şi 2 mărginite, iar b o funcţie lipschitziană. Arătaţi că ecuaţia diferenţială stocastică

$$X_t = x_0 + \int_0^t \sigma(X_s)dB_s + \int_0^t \left[b(X_s) + \frac{1}{2}\sigma(X_s)\sigma'(X_s) \right] ds$$

are o soluţie care se poate scrie in forma $X_t = u(B_t, Y_t)$, unde $u(x, y)$ este soluţia ecuaţiei diferenţiale ordinare

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sigma(u) \ , \ u(0, y) = y$$

şi, pentru orice $\omega \in \Omega$, $\{Y_t(\omega), t \geq 0\}$ este soluţia ecuaţiei diferenţiale ordinare

$$Y_t'(\omega) = f(B_t(\omega), Y_t(\omega)), \ Y_0(\omega) = x_0 \ ,$$

unde

$$f(x, y) = b\left(u(x, y)\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^{-1} .$$

3. **Dacă**

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\sigma\left\{\frac{1}{\sigma^2}\frac{\partial \sigma}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{b}{\sigma}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2}\right\}\right] = 0,$$

atunci soluţia ecuaţiei

$$X_t = X_0 + \int_0^t \sigma\left(s, X_s\right) dB_s + \int_0^t b\left(s, X_s\right) ds$$

se determină prin

$$\begin{cases} X_t = k\left(t, Y_t\right) \\ Y_t = h\left(0, X_0\right) + \int_0^t \overline{\sigma}(s) dW_s + \int_0^t \overline{b}(s) ds, \end{cases}$$

unde

$$\overline{\sigma}' = \overline{\sigma}\sigma\left\{\frac{1}{\sigma^2}\frac{\partial \sigma}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{b}{\sigma}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2}\right\}, \quad \frac{\partial h}{\partial x}(t, x) = \frac{\overline{\sigma}(t)}{\sigma(t, x)} \ ,$$

k este inversa lui h (in al doilea argument), iar

$$\overline{b}(t) = \left[\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x} b + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\sigma^2\right](t, x).$$

4. Aplicând formula lui Itô lui $X_t := B_t - \frac{1}{2}t$ şi lui $f(x) = e^x$, obţinem

$$Z_t := \exp\left(B_t - \frac{1}{2}t\right) = 1 + \int_0^t e^{X_s} dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t e^{X_s} dt$$

deci

$$Z_t = 1 + \int_0^t Z_s dB_s \,.$$

In particular $\exp(B_t - t/2)$ joacă in calculul stocastic rolul exponenţialei obişnuite din calculul integral clasic.

Exerciţii. 1. Ecuaţia

$$X_t = x + \int_0^t X_s dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t X_s ds$$

are soluţia $X_s = x\exp(B_t)$, $t \geq 0$.

2. Ecuaţia

$$X_t = 1 + \int_0^t X_s^2 dB_s + \int_0^t X_s^3 ds$$

are soluţia $X_t = (1 - B_t)^{-1}$. Care este timpul de explozie?

3. Podul brownian X^a cu $a \in \mathbb{R}$ dat, este soluţia ecuaţiei stocastice

$$X_t^a = B_t + \int_0^t \frac{a - X_s^a}{1 - s} ds \text{ pentru } 0 \leq t < 1.$$

Integrandul "explodează" când $t \to 1$, deci X^a converge către a la timpul 1.

4. Ecuaţia stocastică

$$X_t = x + c\int_0^t X_s^{1/2} dB_s + \int_0^t (-aX_s + b)\, dt,$$

cu $a \in \mathbb{R}$, $c > 0$, $b \geq 0$ are soluţie unică.

Observaţie (proprietatea Markov a soluţiilor) Fie $X_t(x)$ soluţia ecuaţiei (6.1) pentru $t \in [0, +\infty)$ şi T un timp fixat. Considerăm ecuaţia stocastică

$$X'_t = X_T + \int_0^t \sigma(s + T, X'_s) dB_s^T + \int_0^t b(s + T, X'_s)\, ds, \quad (6.3)$$

unde $B_s^T := B_{s+T} - B_T$. Procesul B_s^T este independent de trecutul $\mathcal{F}_T$, deci independent de X_T, iar soluţia $X' = \{X'_t, t \geq 0\}$ există şi este unică.

Fie X'' definit astfel: $X''_t = X_t$ pentru $t < T$ şi $X''_t = X'_{t-T}$ pentru $t \geq T$. X'' verifică din nou (6.1) astfel că, din unicitate, $X'' = X$ sau $X_{T+t} = X'_t$ pentru $t \geq 0$. Rezultă că X_{T+t} nu depinde decât de X_T şi de B^T , in timp ce B^T este independentă de $\mathcal{F}_T$. Cu alte cuvinte, legea condiţionată a lui X_{T+t} relativ la $\mathcal{F}_T$ nu depinde decât de t, T şi de X_T, adică X este proces Markov.

Să considerăm in continuare cazul omogen i.e.σ şi b nu depind explicit de timp (de primul argument). Fie deci ecuaţia stocastica (6.2) cu σ, $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Legea condiţionată a lui X_{T+t}, cunoscând că $X_T = x$ este aceeaşi cu a lui X_t, cunoscând că $X_0 = x$ i.e. procesul Markov X este omogen. Acelaşi raţionament cu T =timp de stopare finit, arată că X are proprietatea tare Markov.

Fie $P_{s,t}(x, dy), s \leq t$ semigrupul probabilităţilor de tranziţie asociat procesului de difuzie X i.e. $P_{s,t}(x, dy)$ este legea lui X_t cunoscând că $X_s = x$, iar $P_{s,t}$ semigrupul operatorilor de tranziţie asociat.

TEOREMA 6.14 *(generatorul infinitezimal al proceselor de difuzie). Fie X_t soluţia ecuaţiei (6.2), in ipotezele teoremei 6.10. Atunci funcţiile continue cu suport compact $C_c^2(\mathbb{R}) \subset Dom(\mathcal{L})$; pentru aceste funcţii avem*

$$\mathcal{L}f(x) = \frac{1}{2}\sigma^2 f''(x) + b(x)f'(x),$$

Dacă b, σ sunt mărginite, concluzia rămâne adevarată şi pentru funcţiile continue mărginite $C_b^2(\mathbb{R})$.

Demonstraţie. Din ecuaţia inainte pe care o satisface semigrupul P_t, obţinem pentru $f \in Dom(\mathcal{L})$:

$$P_t f(x) = f(x) + \int_0^t P_s \mathcal{L} f(x) ds.$$

Conform proprietăţii Markov şi formulei lui Itô, obţinem că

$$f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t \mathcal{L} f(X_s)\, ds =$$

$$f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t \left[f'(X_s)\, b(X_s) + \frac{1}{2} f''(X_s)\, \sigma^2(X_s) \right] ds$$

de unde şi expresia căutată pentru $\mathcal{L}$.

Aplicaţii

1. In cazul mişcării browniene, avem $\mathcal{L} = 1/2\,(\partial^2/\partial x^2)$ pe $C_b^2(\mathbb{R})$.

2. Pentru orice $x \in \mathbb{R}$ şi $f \in C_b^2(\mathbb{R})$ avem $E^x[f(X_t)] = f(x) + E^x\left[\int_0^t \mathcal{L} f(X_s)\, ds\right]$.

Observaţii (legătura cu ecuaţiile diferenţiale ordinare şi cu derivate parţiale). Fie X_t soluţia ecuaţiei (6.1) şi să notăm $E_{s,x}$ media condiţionată de $X_s = x$. Dacă $f_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este măsurabilă şi mărginită, atunci

$$f(s,x) = E_{s,x}[f_0(X_t)] = \int_{\mathbb{R}} f_0(y) P_{s,t}(x, dy)$$

pentru $t \in [0,T]$ fixat şi $s < t$, este continuă şi mărginită împreună cu $\partial f/\partial x$, $\partial^2 f/\partial x^2$, deci este in domeniul operatorului $\mathcal{L}$.

1. Funcţia $f(s,x)$ este diferenţiabilă in s şi satisface *ecuaţia inapoi*

$$\partial f/\partial s + \mathcal{L} f = 0$$

cu condiţia la limită $\lim_{s \to t} f(s,x) = f_0(x)$. In cazul in care $P_{st}(x,\cdot)$ are densitatea $p(s,t,x,y)$ continuă in s şi dacă $\partial p/\partial s$, $\partial p/\partial x$ $\partial^2 p/\partial x^2$ există şi sunt continue in s, atunci p este soluţia fundamentală (in sensul distribuţiilor) a ecuaţiei inapoi i.e. cu condiţia $\lim_{s\to t} p(s,t,x,y) = \mathcal{E}_{x-y}$.

2. In plus, dacă există $\partial p/\partial t$, $\partial(b(t,y)p)/\partial y$, $\partial^2(\sigma^2(t,y)p)/\partial y^2$ şi sunt continue, atunci $p(s,t,x,y)$ este soluţia fundamentală a *ecuaţiei inainte* (sau ecuaţia Fokker–Planck)

$$\partial p/\partial t - \mathcal{L}^* p = 0,$$

unde

$$\mathcal{L}^* f = \frac{1}{2}\left(\sigma^2 f\right)'' - (bf)'$$

este adjunctul formal al lui $\mathcal{L}$.

3. Să considerăm problema Cauchy

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathcal{L}f(t,\cdot) = g \text{ pe } [0,T)\times\mathbb{R}\,,\ f(T,x) = f_0(x),\ x\in\mathbb{R}\,.$$

Atunci

$$f(t,x) = E^{t,x}\left[f_0(X_T) - \int_t^T g(s,X_s)\,ds\right] \text{ pe } [0,T)\times\mathbb{R},$$

unde $X(t)$ este soluţia ecuaţiei (6.1).

4. Fie un domeniu mărginit $D\subset\mathbb{R}$ cu frontiera ∂D netedă, funcţiile σ_j , b, g uniform Lipschitz pe $\overline{D}$ şi f_0 continuă şi mărginită pe ∂D. Notăm prin τ_D prima ieşire din D a lui X; in condiţiile de mai sus avem $\tau_D < +\infty$ a.s. şi, aplicand formula lui Itô, obţinem că problema Dirichlet

$$\mathcal{L}f = g,\ x\in D,\ f|_{\partial D} = f_0$$

satisface $f(X_t)\to f_0(X_{\tau_D})$ când $t\nearrow\tau_D$ şi are soluţia dată de

$$f(x) = E^x\left[f_0(X_{\tau_D}) - \int_0^{\tau_D} g(X_s)\,ds\right] \text{ pentru } x\in D,$$

unde $X(t)$ este soluţia ecuaţiei (6.2).

Bibliografie

[1] C. Tudor şi G. Ciucu, Probabilităţi şi procese stocastice (I-II). Editura Academiei Române, Bucureşti, 1978, 1979.

[2] I. Cuculescu, Teoria probabilităţilor. Editura All, Bucureşti, 1998.

[3] C. Tudor, Procesos estocásticos. Sociedad Matemática Méxicana, Aportaciones Matemáticas, México, 1994.

[4] I. Cuculescu, Elemente de teoria proceselor stocastice, Tipografia Universităţii din Bucureşti, 1979.

[5] G. Stoica, Deviaţii mari. Editura Universităţii din Bucureşti, 1995.

[6] G. Stoica, Calcul Malliavin. Editura Universităţii din Bucureşti, 1997.

[7] G. Licea, Martingale şi aplicaţii, Editura Universităţii din Bucureşti, 1979.

[8] S. Karlin şi H.M. Taylor, A first course in stochastic processes. Academic Press, New York, 1975.

[9] D. Revuz şi M. Yor, Continuous martingales and brownian motion. Springer Verlag, Berlin, 1991.

[10] I.I. Gihman şi A.V. Skorohod, The theory of stochastic processes (I-III). Springer Verlag, Berlin, 1974, 1975, 1979.

[11] S. Ross, Stochastic processes. J. Wiley & Sons, New York, 1996.

[12] J.L. Doob, Stochastic processes. J. Wiley & Sons, New York, 1953.

[13] W. Feller, An introduction to probability theory and its applications (I-II). J. Wiley & Sons, New York, 1968, 1971.

[14] P. Lévy, Processus stochastiques et mouvement brownien. Gauthier Villars, Paris, 1965.

[15] K. Itô şi H.P. McKean Jr., Diffusion processes and their sample paths. Springer Verlag, Berlin, 1965.

[16] N. Ikeda şi S. Watanabe, Stochastic differential equations and diffusion processes. North Holland, Amsterdam, 1989.

Tiparul s-a executat sub cda 594/1999
la Tipografia Editurii Universităţii din Bucureşti

ISBN 973-575-356-1

Lei 18