SANDA CLEJA-ȚIGOIU

VICTOR ȚIGOIU

# REOLOGIE ȘI TERMODINAMICĂ

## PARTEA I - REOLOGIE

EDITURA UNIVERSITĂȚII DIN BUCUREȘTI
1998

SANDA CLEJA - ȚIGOIU

VICTOR ȚIGOIU



# REOLOGIE
# ȘI TERMODINAMICĂ

## PARTEA I - REOLOGIE

EDITURA UNIVERSITĂȚII DIN BUCUREȘTI

Referenţi ştiinţifici: Acad. Prof. **LAZĂR DRAGOŞ**
Dr. **EUGEN SOÓS**


**Şos. Panduri, 90-92, Bucureşti - 76235; Telefon 410.23.84**



ISBN 973 - 575 - 202 - 6

# PREFAŢA

Reologia este o disciplină care se dezvoltă în cadrul mecanicii corpurilor continuu deformabile. Etimologia cuvântului este greacă: rheo = curgere, logos = ştiinţă, iar în stiinţele moderne a fost introdus din limba franceză. Reologia îşi propune să formuleze legi de material sau reprezentări constitutive pentru materiale ale căror proprietăţi depind în mod esenţial de timp şi să determine mişcarea şi deformarea, starea de tensiune care se produc în corpurile constituite din astfel de materiale, sub acţiunea solicitărilor exterioare. Aceste proprietăţi sunt esenţial diferite de cele ale " fluidelor vâscoase clasice ". Bazele teoretice ale acestei ştiinţe sunt legate, înainte de 1940, de lucrările lui Bingham, Reiner, Mooney, Zaremba, Garner şi Merrington.Dezvoltarea reologiei a fost impulsionată, în special după al doilea război mondial, de producerea de materiale noi, de exemplu polimerii, în stare topită, fluidă sau solidă, materiale care au apărut din necesităţi industriale, tehnologice. Odată cu apariţia acestor noi materiale, apar numeroase lucrări în domeniu legate de numele lui Rivlin, Weissenberg, Markovitz, Oldroyd, Flory, Thorton, De Witt, care au deschis noi perspective de cercetare, atât prin modelele teoretice introduse, cât şi prin noile tipuri de experienţe şi aparate construite. Cele mai importante rezultate teoretice s-au obţinut după apariţia lucrărilor lui Noll de fundamentare axiomatică a mecanicii mediilor continue (1958). Amintim aici doar câţiva dintre autorii unor modele, astăzi celebre : Rouse, Rivlin, Ericksen, Oldroyd, Colleman, Noll, Green, Lodge şi în ultima vreme De Gennes, Doi, Edwards, Marrucci şi alţii.

Experimental au fost puse în evidenţă proprietăţi specifice ale acestor materiale, care nu pot fi descrise în cadrul mecanicii fluidelor newtoniene ( fluide liniar vâscoase). Dintre efectele ne-newtoniene semnalăm căţărarea fluidelor pe pereţii interiori în cazul mişcării aceestor fluide între doi cilindrii coaxiali în rotaţie relativă unul faţă de celălalt, sau expansiunea (dilatarea) jeturilor la ieşirea din conducte. Aceste efecte pot fi explicate şi descrise matematic în cadrul acelor teorii în care pot fi puse în evidenţă tensiuni normale (tracţiuni). Astfel de probleme vor fi considerate în capitolul 4 al prezentei lucrări.

Clasa materialelor de tip Rivlin - Ericksen de ordin strict mai mare ca 1 ( descrise constitutiv în capitolul 3 ) şi clasa fluidelor vâscoelastice ( prezentate în capitolul 5 ) constituie cadrul constitutiv în care sunt abordate cu succes problemele menţionate. Aceste clase de materiale au proprietăţi puternic dependente de istoria procesului de deformare. Materialele de tip Rivlin- Ericksen ( fluide sau solide ) suportă tensiuni care depind de istoria mişcării într-o vecinătate foarte mică a momentului actual, fiind materiale cu memorie scurtă, de tip diferenţial. Spre deosebire de acestea, materialele vâscoelastice (solide sau fluide) sunt materiale cu o memorie de lungă durată, de tip integral.

Conceptele de cinematica mediilor continuu deformabile necesare prezentării sunt introduse în capitolul 1, punându-se accentul pe mărimi, de exemplu tensorii Rivlin- Ericksen, care pot descrie din ce în ce mai exact istoria trecută a mişcării. Sunt evidenţiate şi echivalentele în mici deformaţii sau în deformaţii infinitezimale ale câmpurilor tensoriale şi ale vitezelor lor de variaţie, specifice deformaţiilor finite.

Capitolul 2 prezintă cadrul constitutiv general al materialelor simple, care permite clasificarea corpurilor continuu deformabile în solide, fluide, materiale izotrope şi fluide cristaline, pe baza conceptului de simetrie materială, sau izomorfism material. Teorema de maximalitate a subgrupului transformărilor ortogonale în grupul transformărilor unimodulare este esenţială în acestă clasificare, de accea demonstrarea acestui rezultat a fost inclusă în anexe, A3.

Sunt prezentate teoreme de caracterizare, prin condiţii necesare şi suficiente, a reprezentării constitutive pentru clase de materiale simple. Prin particularizări, din rezulatele generale referitoare la materialele simple, se obţin atât clasa fluidelor vâscoase (fluidele Reiner- Rivlin), cât şi clasa corpurilor elastice izotrope, respectiv anizotrope, cu deformaţii finite. In anexa A2. sunt demonstrate teoreme de reprezentare pentru funcţii izotrope, iar în anexa A4. rezulate privind invarianţii anizotropi. Rezulatele capitolului 2 sunt prezente în toată lucrarea.

In capitolul 3 sunt prezentate şi caracterizate constitutiv materialele de tip Rivlin -Ericksen de ordinul $n$ în clasa materialelor de tip diferenţial. Fluidele de ordinul 1 coincid cu fluidele Reiner- Rivlin (compresibile), iar cele de gradul 1, cu fluidele liniar vâscoase (fluidul Navier- Stokes).

In capitolul 5 sunt prezentate materiale vâscoelastice, de tip integral, cu deformaţii finite şi respectiv infinitezimale, caracterizate prin reprezentări de tip integral. Pe de altă parte există modele vâscoelastice descrise prin reprezentări de tip diferenţial, generate prin suprapuneri de efecte liniar vâscoase şi elastice, care nu sunt, în general, echivalente cu reprezentări de tip integral. Tot în acest capitol este discutată echivalenţa acestor tipuri de legi de material, dar numai în cazul unidimensional, prezentându-se şi modelele reologice, frecvent utilizate în cărţi inginereşti.

O mare extindere este dată capitolului 4, dedicat vâscometriei. Aici sunt demonstrate rezultate legate de o clasă particulară de mişcări, mişcările vâscometrice. Se demonstrează că starea de tensiune care ia naştere în fluidele (privite în clasa materialelor simple) supuse la astfel de mişcări este caracterizată prin intermediul a trei funcţii scalare, numite funcţii văscometrice : una de forfecare şi două normale, de existenţa cărora este legată apariţia efectelor ne-newtoniene. Tot în acest capitol se determină soluţii exacte reprezentate prin mişcări vâscometrice, staţionare, pentru problemele dinamice cu date la limita formulate pentru fluide. Rezulatele pot fi particularizate pentru fluidele liniar vâscoase (sau fluide Navier-

Stokes), Reiner- Rilvin, Rivlin- Ericksen (de ordinul 2). Pornind de la soluţiile exacte determinate pentru miscări vâscometrice sunt prezentate metode care permit determinarea experimentală a relaţiilor constitutive pentru anumite clase de fluide.

In ultimul capitol, capitolul 6, sunt prezentate relaţii constitutive de tip rate (de tip diferenţial), pentru cazul deformaţiilor infinitezimale, care includ legi vâscoelastice, dar şi legi vâscoplastice care sunt utilizate de exemplu în mecanica rocilor. Este analizat comportamentul acestor materiale şi sunt formulate probleme cvasi-statice cu date iniţiale şi la limită, pentru materiale de tip rate. Este analizată existenţa soluţiei generalizate, printr-un procedeu bazat pe decuplarea problemei într-una elastică şi una vâscoplastică propriu-zisă.

Proprietăţi specifice materialelor vâscoelastice şi de tip rate sunt relaxarea şi fluajul, numite deseori proprietăţi reologice. Corpurile elastice nu prezintă proprietăţi de relaxare şi fluaj, iar în clasa fluidelor liniar vâscoase poate fi pus în evidenţă numai un fluaj liniar. Prorietăţile de fluaj şi relaxare sunt definite şi analizate în capitolele 5 şi 6.

Menţionăm o conexiune importantă (care nu face însă obiectul prezentei lu - crări) rezultată prin utilizarea unei teoreme de aproximare datorată lui Coleman, Noll [1960], conform căreia materialele de tip Rivlin -Ericksen de ordinul $n \geq 2$ pot fi privite ca o aproximare a materialelor cu memorie întârziată prezentate în capitolul 5. In baza aceleeaşi teoreme rezultă că teoria fluidelor newtoniene reprezintă o primă apoximaţie a fluidelor în clasa materialelor simple, dacă acestea sunt supuse la mişări încetinite. Se obţin şi corecţiile de ordinul 2 şi 3 pentru fluidele newtoniene, acestea fiind fluidelor Rivlin- Ericksen de gradul 2 şi respectiv 3.

La sfârşitul fiecărui capitol sunt propuse un număr de probleme, care sunt aplicaţii directe ale materialului prezentat, sau care pun în evidenţă proprietăţile specifice ale diferitelor relaţii constitutive. Astfel câteva din problemele propuse în capitolul 6 au scopul de a pune în discuţie diferite generalizări posibile în cazul deformaţiilor finite, a ecuaţiilor constitutive de tip rate. Se pune accentul pe obiectivitatea legilor de material propuse şi pe proprietăţile acestora.

Referirile bibliografice cuprind atât monografii de mecanica mediilor continuu deformabile, cât şi lucrări de mecanica solidelor, mecanica fluidelor, reologie, utile aprofundării diferitelor problematici puse în discuţie. De asemenea se fac trimiteri şi la lucrări care abordează rezolvarea problemelor cu date la limită (şi eventual date iniţiale), specifice diferitelor clase de materiale.

Lucrarea are la bază experienţa didactică a celor doi autori, care au ţinut şi ţin cursuri de reologie şi termodinamică pentru studenţii de la secţia de Matematică-Mecanică, cât şi activitatea de cercetare pe care au desfăşurat-o.

Lucrarea se adresează în primul rînd studenţilor şi absolvenţilor secţiei de Matematică- Mecanică, celor ce urmează cursurile de studii aprofundate şi doctoranzilor, dar poate fi utilă şi cadrelor didactice şi cercetătorilor care lucrează în aceste domenii relativ noi ale mecanicii, fizicii şi chimiei.

Lucrarea a fost procesată de autori cu programul LATEX şi scoasă la imprimantă prin bunăvoinţa domnului profesor D.V. Ionescu căruia îi mulţumim, pe această cale. Mulţumim, în acelaşi timp colectivului Catedrei de Mecanică şi Ecuaţii pentru sprijinul acordat la apariţia cursului.

Autorii

Bucureşti

1.Octombrie.1997

# CUPRINS

# 1. CINEMATICA MEDIILOR CONTINUU DEFORMABILE

## 1.1 Corp. Mişcare

Pentru noţiunile generale de cinematică şi dinamică menţionăm următoarele monografii de mecanica corpurilor continuu deformabile: Truesdell, Toupin [1960], Truesdell, Noll [1965], Eringen [1967], Malvern [1969], Truesdell [1972]. O succintă trecere în revistă poate fi găsită în Cleja- Ţigoiu, Cristescu [1985].

Notaţiile utilizate pe parcursul lucrării pot fi găsite în anexe.

In mecanica corpurilor continuu deformabile conceptul de corp ocupă un loc central, acesta nereducându- se la un punct. Corpurile se mişca, se deformează în interacţiune cu mediul exterior, identificându-se cu regiunile pe care le ocupă în spaţiul euclidian la diferite momente de timp. Pe lângă această proprietate geometrică, corpurile sunt înzestrate cu *masă*, aceasta fiind constantă în timpul mişcării. Masa este o proprietate fizică a corpurilor şi de aceea ea a fost inclusă de Noll [1958] în definiţia corpurilor.

Prezentăm **modelul matematic al conceptului fizic** de *corp continuu deformabil* :

**Definiţia 1.** Un *corp* $\mathcal{B}$ este constituit dintr-o mulţime de puncte, numite *puncte materiale* sau *particule*, cu o structură definită prin:

a) familia de aplicaţii $\mathcal{C} = \{k : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{E}\}$, numite *configuraţii* ale corpului $\mathcal{B}$;

b) o funcţie reală $m$, numită *masă*, definită pe o mulţime de părţi ale lui $\mathcal{B}$.

$\mathcal{B}$ este un *corp continuu* deformabil de clasă $C^2$, dacă satisface condiţiile:

C1) Oricare ar fi $k \in \mathcal{C}$ este injectivă şi $k(\mathcal{B}) \subset \mathcal{E}$ este o mulţime deschisă.

C2) Dacă $k, \bar{k} \in \mathcal{C}$ , atunci aplicaţia

$$\lambda = \bar{k} \circ k^{-1} : k(\mathcal{B}) \longrightarrow \bar{k}(\mathcal{B}) \quad \text{este de clasa} \quad C^2$$

cu

$$\nabla\lambda(\mathbf{X}) \in Invlin \quad \text{cu} \quad \mathbf{X} = k(X), \quad \forall X \in \mathcal{B}.$$

$\lambda$ se numeşte *deformaţia globală* de clasă $C^2$ de la configuraţia globală $k$ la configuraţia globală $\bar{k}$.

C3) Dacă $k \in \mathcal{C}$ şi $\lambda : k(\mathcal{B}) \longrightarrow \lambda(k(\mathcal{B}))$ este o deformaţie de clasă $C^2$, atunci $\lambda \circ k \in \mathcal{C}$, iar aplicaţia $\bar{k} = \lambda \circ k : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{E}$ se numeşte *configuraţia globală* obţinută din *configuraţia globală* $k$ prin *deformaţia globală* $\lambda$.

Următoarele axiome caracterizează structura specifică a masei:

M1) $m$ este o *măsura nenegativă*, definită pe părţi ale lui $\mathcal{B}$ .

M2) Oricare ar fi $k \in \mathcal{C}$, $k(\mathcal{B})$ este măsurabilă Lebesque şi $m_k = m \circ k^{-1}$ este o *măsură absolut continuă* în raport cu măsura Lebesque în $k(\mathcal{B})$, deci $\exists \quad \rho_k : k(\mathcal{B}) \longrightarrow R$, astfel încât

$$m(\mathcal{P}) = \int_{k(\mathcal{P})} \rho_k(x) dV \tag{1.1}$$

$\forall \mathcal{P} \subset \mathcal{B}$ cu $k(\mathcal{P})$ boreliană în $k(\mathcal{B})$.

M3) Oricare ar fi $k \in \mathcal{C}$, $\rho_k$ este pozitivă şi mărginită.

Prin axiomele C1)- C3) $\mathcal{B}$ capătă o structură de *varietate diferenţiabilă*, înzestrată cu o singură hartă.

Funcţia $\rho_k : k(\mathcal{B}) \longrightarrow R_+$ reprezintă *repartiţia masei* lui $\mathcal{B}$ în configuraţia $k$.

Valoarea $\rho_k(\mathbf{X})$ în $\mathbf{X} = k(X)$ este *densitatea* sau *masa specifică* în particula $X$, în configuraţia $k$.

Din definiţia corpului rezultă **principiul de conervare a masei** sub forma

$$m_k(k(\mathcal{P})) = m_{\bar{k}}(\bar{k}(\mathcal{P})) \quad \forall \mathcal{P} \subset \mathcal{B}$$

Din proprietatea care urmează rezultă că densitatea într-o configuraţie determină densitatea în orice altă configuraţie:

**Propoziţia 1.** Dacă $k$, $\bar{k} \in \mathcal{C}$ şi $\lambda$ este o deformaţie de la configuraţia $k$ la configuraţia $\bar{k}$ atunci

$$\rho_k(\mathbf{X}) = \rho_{\bar{k}}(\bar{\mathbf{X}}) J(\mathbf{X}), \quad J(\mathbf{X}) = \mid \det \nabla \lambda(\mathbf{X}) \mid \tag{1.2}$$

In continuare vom da definiţia **mişcării** unui corp continuu deformabil.

**Definiţia 2.** Se numeşte *mişcare* a corpului $\mathcal{B}$ o familie de configuraţii

$$\chi(\cdot, t) : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{E} \tag{1.3}$$

depinzând de un parametru real $t$, numit timp, cu proprietatea că aplicaţia $t \longrightarrow \chi(X,t)$, $\forall X \in \mathcal{B}$, fixată, este de clasă $C^2$.

Notăm

$$x = \chi(X,t) \in \mathcal{B}_t \equiv \chi(\mathcal{B},t) \tag{1.4}$$

şi spunem că $x$ reprezintă *locul* ocupat de particula $X$ la momentul $t$ prin mişcarea $\chi$ (unde am notat, pentru simplitate, cu $\mathcal{B}_t$ configuraţia de la momentul $t$ a corpului $\mathcal{B}$ ).

Fie

$$\chi^{-1}(\cdot,t) : \mathcal{B}_t \longrightarrow \mathcal{B}, \quad X = \chi^{-1}(x,t) \tag{1.5}$$

inversa funcţiei care defineşte mişcarea.

*Viteza* şi *acceleraţia* în particula $X$ la momentul $t$ se definesc prin

$$\dot{x} = \frac{\partial \chi}{\partial t}(X,t), \quad \ddot{x} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2}(X,t) \tag{1.6}$$

Compunând aplicaţiile (vezi Fig. 1.1) obţinem

$$\chi(k^{-1}(\cdot),t) \equiv \chi_k(\cdot,t) : k(\mathcal{B}) \longrightarrow \mathcal{B}_t, \tag{1.7}$$

aplicaţie ce reprezintă *deformaţia corpului* la momentul $t$ de la configuraţia $k$ la configuraţia actuală $\chi(\cdot,t)$.

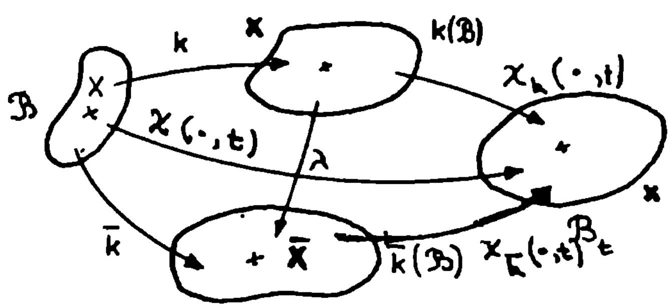



Fig. 1.1

**Mişcarea poate fi descrisă în patru moduri** (Truesdell, Noll [1965]):

*descrierea materială* în care variabilele sunt $X \in \mathcal{B}$, $t \in R$;

*descrierea referențială* în care mişcarea este dată prin aplicaţia $\chi_k(\cdot,t)$, deci variabilele sunt $\mathbf{X} \in k(\mathcal{B})$, $t \in R$;

*descrierea relativă* în care variabilele sunt $x \in \mathcal{B}_t-$ poziţia particulei la momentul $t$ şi momentul de timp $\tau \in R$, iar mişcarea este descrisă prin

$$\chi(\chi^{-1}(\cdot,t),\tau) \equiv \chi_t(\cdot,\tau) : \mathcal{B}_t \longrightarrow \mathcal{B}_\tau \tag{1.8}$$

*descrierea spaţială* în care variabilele sunt $\mathbf{x}$ şi t.

**Observaţia 1.** *Descrierea referenţială*, în care configuraţia de referinţă $k$ se consideră a fi *configuraţia iniţială*, la momentul $t_0$, capătă în mod curent denumirea de *descriere materială*.

Definim funcţia $\chi_0(\cdot,t)$ folosind formula (7) cu $k \equiv \chi(\cdot,t_o)$, prin

$$\chi_0(\cdot,t) \equiv \chi(\chi^{-1}(\cdot,t_0),t), \quad \chi_0(\cdot,t) : \chi(\mathcal{B},t_0) \equiv \mathcal{B}_0 \longrightarrow \mathcal{B}_t \tag{1.9}$$

şi obţinem astfel *deformaţia corpului* de la configuraţia inţială $\chi(\cdot,t_0)$ la configuraţia actuală $\chi(\cdot,t)$. Din (9) avem că

$$\chi_0(\mathbf{X},t)\,|_{t=t_0} = \mathbf{X} \quad \text{unde} \quad \mathbf{X} = \chi(X,t_0) \in \mathcal{B}_0 \quad \text{pentru} \quad X \in \mathcal{B} \tag{1.10}$$

*In descrierea materială* se identifică în mod curent particula $X \in \mathcal{B}$ cu poziţia acesteia $\mathbf{X}$ prin $\chi(X,t_0)$.

In cele ce urmează vom face în mod consecvent identificările

$$\begin{aligned} &X \equiv \mathbf{X} = \chi(X,t_0);\ \mathcal{B} \equiv \chi(\mathcal{B},t_0); \\ &x = \chi(X,t) \equiv \mathbf{x} = \chi_0(\mathbf{X},t);\ \chi(\cdot,t) \equiv \chi_0(\cdot,t) \quad \forall t \in R, \end{aligned} \tag{1.11}$$

deci se foloseşte scrierea $\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X},t)$.

Ca o consecinţă a Definiţiei 2. pentru mişcarea corpului $\mathcal{B}$ (împreună cu condiţia C2) din Definiţia 1. a corpului) rezultă

**Propoziţia 2.** Aplicaţia definită în (9), $\chi_0(\mathbf{X},t)$, este *diferenţiabilă în*

$$\mathbf{X} \in \mathcal{B}_0, \quad \mathbf{X} = \chi(X,t_0),\ \forall X \in \mathcal{B} \tag{1.12}$$

Introducem *gradientul deformaţiei în raport cu configuraţia iniţială* definit prin

$$F_0(\mathbf{X},t) \equiv \nabla\, \chi_0(\mathbf{X},t);\ F_0(\mathbf{X},t_0) = \mathbf{I} \tag{1.13}$$

ca o consecinţă a proprietăţii precizate în (10), unde cu $\nabla$ se notează diferenţiala în raport cu $\mathbf{X}$.

**Observaţia 2.** Oricărei funcţii în descriere materială i se asociază o funcţie în descriere spaţială, prin

$$f(\mathbf{x},t)=\phi(\chi^{-1}(\mathbf{x},t),t) \iff \phi(\mathbf{X},t)=f(\chi(\mathbf{X},t),t) \tag{1.14}$$

Evident am folosit Observaţia 1. şi identificările din (11).

**Definim** *viteza şi acceleraţia în descriere spaţială*, prin procedeul menţionat în (14) .

$$\mathbf{v}(\mathbf{x},t)=\frac{\partial\chi}{\partial t}(\mathbf{X},t)\,|_{\mathbf{X}=\chi^{-1}(\mathbf{x},t)},\quad \mathbf{a}(\mathbf{x},t)=\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2}(\mathbf{X},t)\,|_{\mathbf{X}=\chi^{-1}(\mathbf{x},t)} \tag{1.15}$$

Vom **nota**, în cele ce urmează,

$$\dot{\phi}(\mathbf{X},t)\equiv\frac{\partial\phi}{\partial t}(\mathbf{X},t)=\frac{d\phi}{dt}(\mathbf{X},t)\,|_{\mathbf{X}}, \tag{1.16}$$

care se numeşte *derivata materială* a funcţiei $\phi$ (în descriere materială). In literatură se foloseşte şi ultima notaţie introdusă în (16), care precizează că $\mathbf{X}$ este fixat. Noi am optat pentru prima reprezentare.

Dacă considerăm derivata parţială în raport cu timpul a relaţiei $(14)_2$ obţinem

$$\dot{\phi}(\mathbf{X},t)=\frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{x},t)+\nabla f(\mathbf{x},t)[\frac{\partial\chi}{\partial t}(\mathbf{X},t)], \tag{1.17}$$

unde $\mathbf{x}=\chi(\mathbf{X},t)$

Revenim la descrierea spaţială, deci la variabilele $\mathbf{x}$, $t$ în (17) şi obţinem

$$\dot{f}(\mathbf{x},t)=\frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{x},t)+\nabla f(\mathbf{x},t)[\mathbf{v}(\mathbf{x},t)] \tag{1.18}$$

care se numeşte **derivata materială** a funcţiei $f$ *în descriere spaţială.* Valorile funcţiei pot fi scalare, vectoriale sau tensoriale.

Deci **derivata materială a unui câmp în descriere spaţială** este derivata în raport cu timpul a reprezentării ei materiale, rescrisă în descriere spaţială.

### Ecuaţia de continuitate a masei.

*Densitatea* corpului în configuraţia actuală şi respectiv în configuraţia de referinţă, în particula $X$, le notăm prin $\rho(\mathbf{x},t)$, $\rho_0(\mathbf{X},t)$.

Dacă aplicăm Propoziţia 1. pentru cele două configuraţii şi ţinem seama că deformaţia de la configuraţia de referinţă la configuraţia actuală este $\chi(\cdot,t)$ obţinem din (2) relaţiile

$$\rho_0(\mathbf{X}) = \rho(\mathbf{x}, t) \mid \det \nabla\chi(\mathbf{X}, t) \mid \equiv \rho(\mathbf{x}, t) J(\mathbf{X}, t),$$
$$J(\mathbf{X}, t) = \mid \det \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) \mid, \quad \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) \equiv \nabla\chi(\mathbf{X}, t) \tag{1.19}$$

care se numeşte *ecuaţia de continuitate a masei în descriere materială.*

O formulare *spaţială* echivalentă a *ecuaţiei de continuitate a masei* este dată prin

**Propoziţia 3.** Dacă $\rho_0 : \mathcal{B} \longrightarrow R_+$ este de clasă $C^1$ atunci condiţia de continuitate a masei (19) este echivalentă cu

$$\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \tag{1.20}$$

**Demonstraţie.** Folosim condiţia $J(\mathbf{X}, t) = \mid \det \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) \mid$ introdusă în (19) şi relaţia lui Euler

$$\dot{J} = J \operatorname{div} \mathbf{v} \tag{1.21}$$

Atunci, prin derivare, în (19), în raport cu $t$ obţinem

$$\dot{\rho} J + \rho \dot{J} = 0 \quad \text{sau} \quad (\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v}) J = 0 \tag{1.22}$$

Deoarece $\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) \in Invlin$ în conformitate cu condiţiile de regularitate pentru funcţia $\chi(\cdot, t)$, rezultă $J \neq 0$. Astfel (19) implică (20).

**Reciproc.** Inmulţind cu $J$ în (20) rezultă că $\frac{d}{dt}(\rho J) \mid_{\mathbf{X}} = 0$. Prin integrare în raport cu timpul rezultă că există o constantă, depinzînd însă de $\mathbf{X}$, astfel încât $\rho J = c$. Deoarece la momentul iniţial $t_0$ avem $\mathbf{F}(\mathbf{X}, t_0) = \mathbf{I}$ rezultă că $\rho(\mathbf{X}, t_0) \equiv \rho_0(\mathbf{X}) = c(\mathbf{X})$.

**Semnificaţia mecanică** a densităţii în configuraţia actuală se obţine în ipoteza de continuitate a funcţiei $\rho_0$ din formula

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \lim_{\chi(\mathcal{P}, t) \to \mathbf{x}} \frac{m(\mathcal{P})}{\text{măs}(\chi(\mathcal{P}, t))} \tag{1.23}$$

In formula (23) limita se calculează pentru volume materiale pentru care măs $(\chi(\mathcal{P}, t)) \to 0$ (cu $\mathbf{x} \in \chi(\mathcal{P}, t)$ fixat ).

**Propoziţia 4.** O mişcare este *izocoră* dacă una din următoarele afirmaţii echivalente are loc

$$\operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \rho(\mathbf{x}, t) = \rho_0(\mathbf{X}), \quad J(\mathbf{X}, t) = 1 \tag{1.24}$$

pentru orice $\mathbf{X}$ , $t$.

In mod tradiţional în locul formulării de *mişcare izocoră*, se foloseşte exprimarea - *materialul este incompresibil*, dacă acesta poate suporta numai mişcări izocore.

## 1.2 Tensori de deformaţie. Tensori viteză de deformaţie

Fie $\chi-$ mişcarea corpului $\mathcal{B}$ şi $k \in \mathcal{C}$ o configuraţie de referinţă fixată.

Folosim Definiţia 2. a mişcării şi C2) din definiţia corpului, de unde rezultă că funcţia

$$\chi(k^{-1}(\cdot), t) \equiv \chi_k(\cdot, t) : k(\mathcal{B}) \longrightarrow \mathcal{B}_t \tag{1.25}$$

pentru un moment de timp, $t \in \mathbf{R}$, fixat este o *deformaţie* din configuraţia de referinţă în configuraţia actuală. Aceasta este funcţia care caracterizează mişcarea în descrierea *referenţială.*

**Observaţia 3.** Configuraţiile, deci în particular mişcarea corpului $\mathcal{B}$ pentru un moment de timp fixat, sunt definite pe corp, ori acesta nu are o topologie care să permită definirea diferenţiabilităţii (se mai spune că un corp este apriori amorf topologic). Topologia pe $\mathcal{B}$ este indusă de hărţi, deci de configuraţiile sale. Aplicaţia definită în (25) de pe un deschis, cu valori într-un deschis conform proprietăţii C2) este diferenţiabilă.

**Definiţia 3.** *Gradientul deformaţiei* în raport cu configuraţia de referinţă $k$ este prin definiţie *diferenţiala* aplicaţiei $\mathbf{X} \longrightarrow \chi_k(\mathbf{X}, t)$, în $\mathbf{X} \equiv k(X)$ şi este notat prin

$$\mathbf{F}_k(\mathbf{X}, t) \equiv \nabla\chi_k(\mathbf{X}, t) \in Invlin \tag{1.26}$$

Dacă se consideră configuraţia iniţială a corpului drept configuraţie de referinţă, atunci gradientul deformaţiei în raport cu configuraţia iniţială este cel definit prin formula (13). Aceasta este un caz particular al formulei (26).Din Observatia 1. rezultă ca justificată folosirea acestui gradient de deformaţie în descrierea materială.

**Observaţia 4.** Se omite specificarea configuraţiei de referinţă, dacă acest lucru nu este necesar, dar va fi prezentă în capitolele următoare, de exemplu în cazul prezentării conceptului de simetrie materială şi în vâscometrie. In general vom spune că *gradientul de deformaţie* este definit prin

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) \equiv \nabla\chi(\mathbf{X}, t) \in Invlin \tag{1.27}$$

dacă nu este necesară precizarea configuraţiei de referinţă.

Intr-un reper cartezian fixat gradientul de deformaţie se reprezintă sub forma

$$\mathbf{F}(\mathbf{X},t)=\frac{\partial x^i}{\partial X^j}\mathbf{i}_i\otimes\mathbf{i}_j \tag{1.28}$$

Deformaţia la fiecare moment de timp fixat este inversabilă, ca o censecinţă a Definiţiei 2. şi a condiţiei C2) din definiţia corpului. Putem introduce tensorul

$$\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{x},t)\equiv\nabla\chi^{-1}(\mathbf{x},t)\in Invlin \tag{1.29}$$

care se numeşte *gradientul spaţial* al deformaţiei.

**Propoziţia 5.** Gradientul spaţial al deformaţiei este inversul tensorului gradient de deformaţie

$$\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{x},t)=(\mathbf{F}(\mathbf{X},t))^{-1} \tag{1.30}$$

Se introduc *tensorii de deformaţie*

$$\begin{array}{ll}
\mathbf{C}(\mathbf{X},t)=\mathbf{F}^T(\mathbf{X},t)\mathbf{F}(\mathbf{X},t) & \text{tensorul lui Cauchy-Green la dreapta,}\\
\mathbf{B}(\mathbf{X},t)=\mathbf{F}(\mathbf{X},t)\mathbf{F}^T(\mathbf{X},t) & \text{tensorul lui Cauchy-Green la stânga}\\
 & \text{sau tensorul lui Finger}\\
\mathbf{c}(\mathbf{x},t)=(\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{x},t))^T\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{x},t) & \text{tensorul lui Cauchy}
\end{array} \tag{1.31}$$

Deasemenea se mai definesc şi următorii tensori de deformaţie :

$$\mathbf{E}=\frac{1}{2}(\mathbf{C}-\mathbf{I}),\quad \mathbf{e}=\frac{1}{2}(\mathbf{I}-\mathbf{c}) \tag{1.32}$$

Aceşti tensori reprezentând măsuri ale deformaţiei, caracterizează local modul în care se deformează corpul. Ei au fost introduşi : $\mathbf{c}$ de către Cauchy (1827), $\mathbf{C}$ de Green (1841), $\mathbf{E}$ de Green (1841) şi Saint - Venant (1844), iar $\mathbf{e}$ de Almansi (1911) şi Hamel (1912).

### Elemente materiale

Fie $X\in\mathcal{B}$ şi fie $\chi$ o mişcare fixată a corpului.Introducem *elementele materiale* $\mathbf{P}\in\mathcal{V}_{\mathbf{X}}$ şi $\mathbf{p}\in\mathcal{V}_{\mathbf{x}}$ ca vectori legaţi de poziţiile fixate la momentul iniţial şi respectiv actual ale particulei materiale $X$ . Ele reprezintă **vectorii tangenţi** în $\mathbf{X}$, şi repectiv în $\mathbf{x}$ la imaginea unei curbe materiale din $\mathcal{B}$ în cele două configuraţii ( iniţială şi respectiv actuală).Curba materială se consideră că trece prin $X$ (vezi Fig. 1.2)

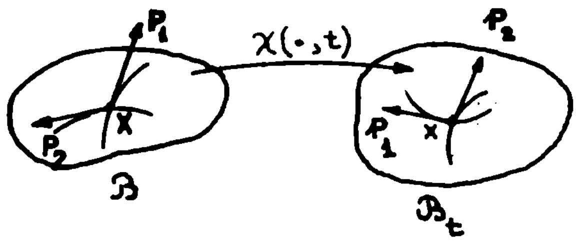



Fig. 1.2

**Propoziţia 6.** Au loc următoarele formule

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{F}(\mathbf{X},t)\mathbf{P} = \mathbf{p}, \quad \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{x},t)\mathbf{p} = \mathbf{P} \\
&|\,\mathbf{P}\,|^2 = \mathbf{c}(\mathbf{x},t)\mathbf{p}\cdot\mathbf{p}, \quad |\,\mathbf{p}\,|^2 = \mathbf{C}(\mathbf{X},t)\mathbf{P}\cdot\mathbf{P} \\
&|\,\mathbf{p}\,|^2 - |\,\mathbf{P}\,|^2 = 2\,\mathbf{E}(\mathbf{X},t)\mathbf{P}\cdot\mathbf{P} = 2\,\mathbf{e}(\mathbf{x},t)\mathbf{p}\cdot\mathbf{p}
\end{aligned}
\tag{1.33}
$$

Din formulele (33) rezultă semnificaţia geometrică a tensorilor de deformaţie.

**Observaţia 5.** Câmpurile tensoriale $\mathbf{F}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{E}$, sunt în descriere materială, iar câmpurile $\mathbf{F}^{-1}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{e}$ sunt în descriere spaţială.

Intr-un punct fixat din configuraţiile corespunzătoare, tensorii de deformaţie introduşi prin (31),(32), priviţi ca aplicaţii *liniare*, au un comportament specificat prin

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{C}(\mathbf{X},t), \quad \mathbf{E}(\mathbf{X},t) : \mathcal{V}_{\mathbf{X}} \longrightarrow \mathcal{V}_{\mathbf{X}} \\
&\mathbf{F}(\mathbf{X},t) : \mathcal{V}_{\mathbf{X}} \longrightarrow \mathcal{V}_{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{x},t) : \mathcal{V}_{\mathbf{x}} \longrightarrow \mathcal{V}_{\mathbf{X}} \\
&\mathbf{c}(\mathbf{x},t), \quad \mathbf{e}(\mathbf{x},t), \quad \mathbf{B}(\mathbf{X},t) : \mathcal{V}_{\mathbf{x}} \longrightarrow \mathcal{V}_{\mathbf{x}}
\end{aligned}
\tag{1.34}
$$

**Vectorul de deplasare** în particula $X$ la momentul $t$ se defineşte prin

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{u}(\mathbf{X},t) = \mathbf{x} - \mathbf{X} = \chi(\mathbf{X},t) - \mathbf{X}, \text{ sau} \\
&\mathbf{u}(\mathbf{x},t) = \mathbf{x} - \mathbf{X} = \mathbf{x} - \chi^{-1}(\mathbf{x},t)
\end{aligned}
\tag{1.35}
$$

primul fiind definit în variabile materiale, al doilea în variabile spaţiale.

**Gradientul deplasării** este introdus prin relaţia

$$\mathbf{H}(\mathbf{X},t) = \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{u}(\mathbf{X},t), \text{ sau } \quad \mathbf{h}(\mathbf{x},t) = \nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{u}(\mathbf{x},t) \tag{1.36}$$

Din (35) se obţine legătura dintre gradientul deformaţiei şi gradientul deplasării **H**

$$\mathbf{F}(\mathbf{X},t) = \mathbf{I} + \mathbf{H}(\mathbf{X},t), \quad \frac{\partial x^i}{\partial X^k} = \delta_{ik} + \frac{\partial u^i}{\partial X^k} \tag{1.37}$$

**Propoziţia 7.** Tensorii de deformaţie se exprimă prin gradientul deplasării sub forma

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{H} + \mathbf{H}^T + \mathbf{H}^T\mathbf{H}); \quad \mathbf{e} = \frac{1}{2}(\mathbf{h} + \mathbf{h}^T - \mathbf{h}^T\mathbf{h}) \tag{1.38}$$

**Gradientul vitezei** în reprezentarea spaţiala este definit prin

$$\mathbf{L}(\mathbf{x},t) = \nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{v}(\mathbf{x},t) \tag{1.39}$$

**Tensorul viteza de deformare** $\mathbf{D}(\mathbf{x},t)$ este partea simetrică a gradientului vitezei

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T) \in Sim. \tag{1.40}$$

Partea antisimetrică a gradientului vitezei

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} - \mathbf{L}^T) \in Asim, \tag{1.41}$$

se numeşte **tensorul spin**. Are loc deci formula

$$\mathbf{L}(\mathbf{x},t) = \mathbf{D}(\mathbf{x},t) + \mathbf{W}(\mathbf{x},t) \tag{1.42}$$

**Viteza gradientului de deformaţie**, definită ca fiind derivata materială a gradientului de deformaţie, $\dot{\mathbf{F}}(\mathbf{X},t)$, este legată de gradientul vitezei prin relaţia

$$\dot{\mathbf{F}}(\mathbf{X},t) = \mathbf{L}(\mathbf{x},t)\mathbf{F}(\mathbf{X},t) \tag{1.43}$$

Incheiem acest paragraf cu enunţul unei teoreme care se foloseşte frecvent pe parcursul prezentării.

**Teorema de descompunere polară**

Oricare ar fi $\mathbf{F} \in Invlin$ se poate descompune în mod unic într-un tensor simetric şi pozitiv definit şi un tensor ortogonal. Adică, $\forall \mathbf{F} \in Invlin \; \exists\, \mathbf{U}, \mathbf{V} \in Psim$, şi $\exists\, \mathbf{R} \in Ort$ unici, astfel încât

$$\mathbf{F} = \mathbf{RU}, \quad \mathbf{F} = \mathbf{VR} \tag{1.44}$$

Prima formă se numeşte *descompunerea la dreapta*, iar a doua *descompunerea la stânga*. Tensorul $\mathbf{U} \in Psim$ se numeşte tensorul *lungirilor la dreapta*, iar $\mathbf{V} \in Psim$ se numeşte tensorul *lungirilor la stânga*. $\mathbf{R} \in Ort$ se numeşte **tensorul rotaţiilor**.

**Observaţia 6.** Deoarece oricare ar fi $X \in \mathcal{B}$ şi la orice moment de timp, gradientul de deformaţie în raport cu o configuraţie de referinţă $k$ este un element în $Invlin$, rezultă că putem aplica teorema de descopunere polară cu observaţia că tensorii din descompunere vor fi dependenţi atât de particula materială, în localizarea ei într-o configuraţie de referinţă fixată, cât şi de timpul $t$. Deci $\forall\ \mathbf{X} = k(X)$, $t \in R$ şi $\mathbf{F}_k(\mathbf{X}, t) \in Invlin$, $\exists\ \mathbf{U}_k(\mathbf{X}, t)$, $\mathbf{V}_k(\mathbf{X}, t) \in Psim$ şi $\exists\ \mathbf{R}_k(\mathbf{X}, t) \in Ort$ , astfel încât

$$\mathbf{F}_k(\mathbf{X}, t) = \mathbf{R}_k(\mathbf{X}, t)\mathbf{U}_k(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{F}_k(\mathbf{X}, t) = \mathbf{V}_k(\mathbf{X}, t)\mathbf{R}_k(\mathbf{X}, t) \tag{1.45}$$

şi descompunerile sunt unice.

**Propoziţia 8.** Au loc următoarele relaţii între tensorii de deformaţie

$$\begin{aligned} &\mathbf{C} = \mathbf{U}^2, \quad \mathbf{B} = \mathbf{V}^2, \\ &\mathbf{V} = \mathbf{R}\mathbf{U}\mathbf{R}^T, \quad \mathbf{B} = \mathbf{R}\mathbf{C}\mathbf{R}^T \end{aligned} \tag{1.46}$$

## 1.3 Mişcarea relativă

Fiind dată o mişcare $\chi$ a corpului $\mathcal{B}$ se consideră un moment de timp fixat $t$ şi se alege drept configuraţie de referinţă configuraţia de la acest moment. Mişcarea corpului urmând să fie caracterizată la diferite momente de timp $\tau$ relativ la configuraţia ocupată de corp la momentul $t$ prin mişcarea $\chi$ (vezi Fig.1.3).

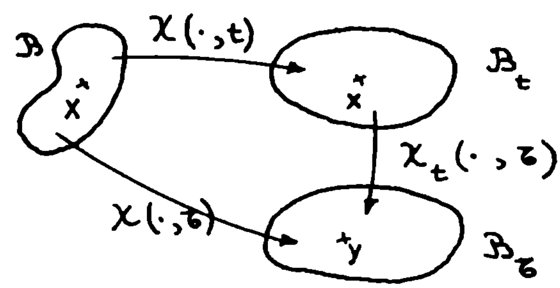



Fig. 1.3

Astfel în *descrierea relativă* variabilele independente sunt $\mathbf{x} \in \mathcal{B}_t$– poziţia particulei la momentul $t$ şi momentul de timp $\tau \in R$.

**Mişcarea relativă** este descrisă prin

$$\begin{aligned} &\chi(\chi^{-1}(\cdot,t),\tau) \equiv \chi_t(\cdot,\tau) : \mathcal{B}_t \longrightarrow \mathcal{B}_\tau \\ &\chi_t(\mathbf{x},\tau) = \chi(\chi^{-1}(\mathbf{x},t),\tau) = \mathbf{y}, \end{aligned} \tag{1.47}$$

unde $\mathbf{x} = \chi(X,t), \quad \mathbf{y} = \chi(X,\tau)$.

**Gradientul deformaţiei relative** sau gradientul deformaţiei în mişcarea relativă reprezintă *diferenţiala aplicaţiei*

$$\mathbf{x} \longrightarrow \chi_t(\mathbf{x},\tau)$$

definită în (47), pentru un $\tau \in R$ arbitrar, fixat, calculată în $\mathbf{x}$

$$F_t(\mathbf{x},\tau) = \nabla_{\mathbf{x}}(\chi_t(\mathbf{x},\tau)) \tag{1.48}$$

Definim tensorii de deformaţie în mişcarea relativă într-un mod analog cu cei definiţi în formulele (31) (pentru descrierea referenţială), prin

$$\begin{aligned} &\mathbf{C}_t(\mathbf{x},\tau) = \mathbf{F}_t^T(\mathbf{x},\tau)\mathbf{F}_t(\mathbf{x},\tau) \quad \text{tensorul lui Cauchy-Green la dreapta} \\ &\mathbf{B}_t(\mathbf{x},\tau) = \mathbf{F}_t(\mathbf{x},\tau)\mathbf{F}_t^T(\mathbf{x},\tau) \quad \text{tensorul lui Cauchy-Green la stânga} \end{aligned} \tag{1.49}$$

Din definiţia mişcării relative, ca o consecinţă a Definiţiei 2. şi a condiţiei C2) din definiţia corpurilor, rezultă că gradientul mişcării relative este un tensor inversabil pentru fiecare valoare fixată a argumentelor sale, deci

$$\mathbf{F}_t(\mathbf{x},\tau) \in Invlin,$$

$\forall\mathbf{x} \in \mathcal{B}_t$ şi pentru $\forall\tau \in R$. Putem aplica **Teorema de descompunere polară în mişcarea relativă**. Prin urmare pentru $\forall\mathbf{x} \in \mathcal{B}_t$ şi $\tau \in R$ $\exists\, \mathbf{U}_t(\mathbf{x},\tau)$, $\mathbf{V}_t(\mathbf{x},\tau) \in Psim$, şi $\exists\, \mathbf{R}_t(\mathbf{x},\tau) \in Ort$ astfel încât

$$\mathbf{F}_t(\mathbf{x},\tau) = \mathbf{R}_t(\mathbf{x},\tau)\mathbf{U}_t(\mathbf{x},\tau), \quad \mathbf{F}_t(\mathbf{x},\tau) = \mathbf{V}_t(\mathbf{x},\tau)\mathbf{R}_t(\mathbf{x},\tau) \tag{1.50}$$

şi descompunerile sunt unice. In plus ştim că, pentru $\tau = t$, $\mathbf{F}_t(\mathbf{x},\tau)\,|_{\tau=t} = \mathbf{I}$ şi prin urmare $\mathbf{R}_t(\mathbf{x},\tau)\,|_{\tau=t} = \mathbf{I}$, $\mathbf{U}_t(\mathbf{x},\tau)\,|_{\tau=t} = \mathbf{I}$.

**Observaţia 7.** Dacă utilizăm teorema de descompunere polară în mişcarea relativă obţinem următoarea formulă pentru tensorul lui Cauchy-Green în descriere relativă

$$\mathbf{C}_t(\mathbf{x},\tau) = \mathbf{U}_t(\mathbf{x},\tau)^2 \tag{1.51}$$

**Propoziţia 9.** In mişcarea relativă au loc următoarele formule

$$\begin{aligned}
&i)\quad \mathbf{v}(\mathbf{y},\tau) = \frac{\partial}{\partial\tau}\chi_t(\mathbf{x},\tau), \quad \text{cu} \quad \mathbf{y} = \chi_t(\mathbf{x},\tau)\\
&ii)\quad \mathbf{F}_t(\mathbf{x},\tau) = \mathbf{F}(\mathbf{X},\tau)\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{x},t) \text{ şi } \mathbf{F}_t(\mathbf{x},\tau)\,|_{\tau=t} = \mathbf{I}\\
&iii)\quad \mathbf{C}(\mathbf{X},\tau) = \mathbf{F}^T(\mathbf{X},t)\mathbf{C}_t(\mathbf{x},\tau)\mathbf{F}(\mathbf{X},t)\\
&iv)\quad \mathbf{L}(\mathbf{x},t) = \frac{\partial}{\partial\tau}\mathbf{F}_t(\mathbf{x},\tau)\,|_{\tau=t}\\
&v)\quad \mathbf{D}(\mathbf{x},t) = \frac{\partial}{\partial\tau}\mathbf{U}_t(\mathbf{x},\tau)\,|_{\tau=t}, \quad \mathbf{W}(\mathbf{x},t) = \frac{\partial}{\partial\tau}\mathbf{R}_t(\mathbf{x},\tau)\,|_{\tau=t}
\end{aligned} \tag{1.52}$$

**Demonstraţie.** i) Pornim de la definiţia vitezei în descriere spaţială dată prin formula (15), scrisă pentru $\mathbf{y} = \chi(\mathbf{X},\tau) \in \mathcal{B}_\tau$ şi momentul corespunzător $\tau$ :

$$\mathbf{v}(\mathbf{y},\tau) = \frac{\partial\chi}{\partial\tau}(\mathbf{X},\tau)\,|_{\mathbf{X}=\chi^{-1}(\mathbf{y},\tau)}$$

Folosim relaţia $\mathbf{X} = \chi^{-1}(\mathbf{y},\tau) = \chi^{-1}(\mathbf{x},t)$ ( din (47) ), cu observaţia că ultimul termen este independent de $\tau$, în expresia anterioară a vitezei şi obţinem

$$\mathbf{v}(\mathbf{y},\tau) = \frac{\partial\chi}{\partial\tau}(\chi^{-1}(\mathbf{x},t),\tau) = \frac{\partial}{\partial\tau}(\chi_t(\mathbf{x},\tau)),$$

unde $\mathbf{y} = \chi_t(\mathbf{x},t)$.

ii) Să observăm că formula (47) se scrie sub forma

$$\chi(\mathbf{X},\tau) = \chi_t(\chi(\mathbf{X},t),\tau) \tag{1.53}$$

Diferenţiind în raport cu $\mathbf{X}$ şi folosind definiţia gradientului deformaţiei şi a gradientului deformaţiei în mişcarea relativă, (48), obţinem din (53)

$$\mathbf{F}(\mathbf{X},\tau) = \mathbf{F}_t(\mathbf{x},\tau)\mathbf{F}(\mathbf{X},t) \tag{1.54}$$

deci ii) este demonstrată.

iii) Folosim definiţia tensorilor lui Cauchy-Green, la dreapta, în descrierea relativă, $(49)_1$ şi relaţia (54)

$$\mathbf{C}_t(\mathbf{x},\tau) = (\mathbf{F}(\mathbf{X},\tau)\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{x},t))^T\mathbf{F}(\mathbf{X},\tau)\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{x},t) =$$

$$= \mathbf{F}^{-T}(\mathbf{x},t)\mathbf{C}(\mathbf{X},\tau)\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{x},t)$$

Dacă în ultima relaţie se compune la stânga cu $\mathbf{F}^T(\mathbf{X},t)$ şi la dreapta cu $\mathbf{F}(\mathbf{X},t)$ rezultă iii).

iv) Derivăm în raport cu $\tau$ relaţia ii) şi folosim relaţia (43). Astfel

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\mathbf{F}_t(\mathbf{x},\tau)\,|_{\tau=t} = \dot{\mathbf{F}}(\mathbf{X},t)\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{X},t) = \mathbf{L}(\mathbf{x},t) \tag{1.55}$$

Din teorema de descompunere polară pentru mişcarea relativă (vezi (50) ) , prin derivare în raport cu $\tau$, rezultă

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\mathbf{F}_t(\mathbf{x},\tau) = (\frac{\partial}{\partial\tau}\mathbf{R}_t(\mathbf{x},\tau))\mathbf{U}_t(\mathbf{x},\tau) + \mathbf{R}_t(\mathbf{x},\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\mathbf{U}_t(\mathbf{x},\tau) \tag{1.56}$$

Fie $\tau = t$, din (56) , (50) şi (55) deducem că

$$\mathbf{L}(\mathbf{x},t) = \frac{\partial}{\partial\tau}\mathbf{R}_t(\mathbf{x},\tau)\,|_{\tau=t} + \frac{\partial}{\partial\tau}\mathbf{U}_t(\mathbf{x},\tau)\,|_{\tau=t} \tag{1.57}$$

Din teorema de descompunere polară ştim, pe de altă parte, că deoarece $\mathbf{U}_t(\mathbf{x},\tau) \in Sim$ $\forall\tau$, atunci $\frac{\partial}{\partial\tau}\mathbf{U}_t(\mathbf{x},\tau) \in Sim$ pentru orice $\tau$, deci în particular şi pentru $\tau = t$. Pe de altă parte $\mathbf{R}_t(\mathbf{x},\tau) \in Ort$, pentru orice $\tau$, şi $\mathbf{R}_t(\mathbf{x},\tau)\,|_{\tau=t} = \mathbf{I}$, de unde $\frac{\partial}{\partial\tau}\mathbf{R}_t(\mathbf{x},\tau)\,|_{\tau=t} \in Asim$.

Cu ultimele formule introduse în (57) , prin separarea părţilor simetrice şi antisimetrice, deducem ultimele două relaţii rămase de demonstrat.

## 1.4 Tensorii lui Rivlin- Ericksen

**Tensorii lui Rivlin- Ericksen** se introduc în contextul mişcării relative, fiind definiţi prin

$$\mathbf{A}_k(\mathbf{x},t) = \frac{\partial^k}{\partial\tau^k}\mathbf{C}_t(\mathbf{x},\tau)\,|_{\tau=t} \tag{1.58}$$

**Propoziţia 10.** Au loc următoarele formule

$i)$ $\mathbf{C}^{(n)}(\mathbf{X},\tau) = \mathbf{F}^T(\mathbf{X},t)\mathbf{A}_n(\mathbf{x},t)\mathbf{F}(\mathbf{X},t)$

$ii)$ $\mathbf{A}_1(\mathbf{x},t) = 2\,\mathbf{D}(\mathbf{x},t)$

şi **relaţia de recurenţă** pentru $\forall n > 1$

$$\mathbf{A}_{n+1}(\mathbf{x},t) = \dot{\mathbf{A}}_n(\mathbf{x},t) + \mathbf{A}_n(\mathbf{x},t)\mathbf{L}(\mathbf{x},t) + \mathbf{L}^T(\mathbf{x},t)\mathbf{A}_n(\mathbf{x},t) \tag{1.59}$$

**Demonstraţie .** i) Se obţine ca o consecinţă a Propoziţiei 9. iii) prin derivare de $n$ ori în raport cu $\tau$. Facem pe $\tau = t$ şi din definiţia tensorilor Rivlin- Ericksen rezultă relaţia dorită.

ii) Derivăm în raport cu $\tau$ pe $\mathbf{C}_t(\mathbf{x},\tau)$ dat sub forma (51) şi avem

$$\mathbf{A}_1(\mathbf{x},t) = \frac{\partial}{\partial\tau}\mathbf{U}_t(\mathbf{x},\tau)\mid_{\tau=t}\mathbf{U}_t(\mathbf{x},\tau)\mid_{\tau=t} + \mathbf{U}_t(\mathbf{x},\tau)\mid_{\tau=t}\frac{\partial}{\partial\tau}\mathbf{U}_t(\mathbf{x},\tau)\mid_{\tau=t}$$

Folosim punctul v) din Propozitia 9., formula (52) şi (50), pentru $\tau = t$ de unde avem rezultatul.

iii) Folosim relaţia deja demonstrată i), scrisă pentru $n+1$ astfel

$$\mathbf{C}^{(n+1)}(\mathbf{X},t) = \mathbf{F}^T(\mathbf{X},t)\mathbf{A}_{n+1}(\mathbf{x},t)\mathbf{F}(\mathbf{X},t) = \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{C}^{(n)}(\mathbf{X},t) \tag{1.60}$$

Derivăm apoi în raport cu timpul în i) şi cu (60) avem

$$\begin{aligned}\mathbf{C}^{(n+1)}(\mathbf{X},t) &= \mathbf{F}^T(\mathbf{X},t)\dot{\mathbf{A}}_n(\mathbf{x},t)\mathbf{F}(\mathbf{X},t) + \dot{\mathbf{F}}^T(\mathbf{X},t)\mathbf{A}_n(\mathbf{x},t)\mathbf{F}(\mathbf{x},\tau) + \\ &+ \mathbf{F}^T(\mathbf{x},\tau)\mathbf{A}_n(\mathbf{x},t)\dot{\mathbf{F}}(\mathbf{X},t)\end{aligned} \tag{1.61}$$

Trecem în (61) la gradientul vitezei, exprimat prin (43) şi utilizând această formulă împreună cu (60) deducem formula de recurenţă (59).

### 1.5 Mişcări echivalente. Obiectivitatea câmpurilor

**Definiţia 4.** Două mişcări $\chi$ şi $\chi^*$ ale corpului $\mathcal{B}$ se numesc *echivalente* dacă există $\mathbf{Q}(t) \in Ort$, $\mathbf{x}_0^*(t)$, $\mathbf{x}_o \in \mathcal{E}$ pentru orice $t \in R$ şi $a \in R$, astfel încât

$$\begin{aligned}&\mathbf{x}^* \equiv \chi^*(\mathbf{X},t^*) = \mathbf{x}_0^*(t) + \mathbf{Q}(t)(\chi(\mathbf{X},t) - \mathbf{x}_0) \\ &t^* = t + a, \quad \forall\mathbf{X} \in \mathcal{B}, \quad \forall t \in R.\end{aligned} \tag{1.62}$$

**Observaţia 8.** Cele două mişcări $\chi$ şi $\chi^*$ diferă printr-o mişcare de corp rigid, dată pentru $\forall\mathbf{x}$ şi t , prin

$$f(\mathbf{x},t)=\mathbf{x}_0^*(t)+\mathbf{Q}(t)(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0), \tag{1.63}$$

deoarece pentru $\forall \mathbf{X}\in \mathcal{B}$, $\forall t\in R$ are loc egalitatea:

$$\chi^*(\mathbf{X},t^*)=f(\chi(\mathbf{X},t),t), \tag{1.64}$$

cu $t^*=t+a$.

**Observaţia 9.** Cu alte cuvinte cele două mişcări diferă prin schimbarea reperului sau a observatorului.

Introducem câmpurile $\varphi,\mathbf{v},\mathbf{T}$ definite pentru $\forall t\in R$ pe $\chi(\mathcal{B},t)$ (deci asociate mişcării $\chi$, într-o *descriere spaţială*), cu valori respectiv scalare, vectoriale şi tensoriale.

Notăm prin $\varphi^*,\mathbf{v}^*,\mathbf{T}^*$ câmpurile construite prin acelaşi procedeu cu precedentele, dar asociate mişcării $\chi^*$, definite pentru $\forall t^*\in R$, pe $\chi^*(\mathcal{B},t^*)$.

**Definiţia 5.** *Câmpul scalar* $\varphi^*$ este *obiectiv* (*sau independent de reper, sau de observator*) dacă

$$\varphi^*(\mathbf{x}^*,t^*)=\varphi(\mathbf{x},t), \tag{1.65}$$

pentru orice $\chi$ şi $\chi^*$ mişcări legate prin (62).

**Definiţia 6.** *Câmpul vectorial* $\mathbf{v}^*$ este *obiectiv* (*sau independent de reper, sau de observator*) dacă

$$\mathbf{v}^*(\mathbf{x}^*,t^*)=\mathbf{Q}(t)\mathbf{v}(\mathbf{x},t) \tag{1.66}$$

pentru orice $\chi$ şi $\chi^*$ mişcări legate prin (62).

**Definiţia 7.** *Câmpul tensorial* $\mathbf{T}^*$ este *obiectiv* (*sau independent de reper, sau de observator*) dacă

$$\mathbf{T}^*(\mathbf{x}^*,t^*)=\mathbf{Q}(t)\mathbf{T}(\mathbf{x},t)\mathbf{Q}^T(t), \tag{1.67}$$

pentru orice $\chi$ şi $\chi^*$ mişcări legate prin (62).

**Propoziţia 11.** Fie $\chi^*$ echivalentă cu $\chi$. Prin schimbarea reperului, sau a observatorului tensorii deformaţie se transformă prin formulele

$$
\begin{aligned}
&1)\quad \mathbf{F}^*(\mathbf{X},t^*) = \mathbf{Q}(t)\mathbf{F}(\mathbf{X},t),\\
&2)\quad (\mathbf{F}^*)^{-1}(\mathbf{x}^*,t^*) = \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{x},t)\mathbf{Q}^T(t),\\
&3)\quad \mathbf{R}^*(\mathbf{X},t^*) = \mathbf{Q}(t)\mathbf{R}(\mathbf{X},t),\\
&4)\quad \mathbf{U}^*(\mathbf{X},t^*) = \mathbf{U}(\mathbf{X},t),\quad \mathbf{C}^*(\mathbf{X},t^*) = \mathbf{C}(\mathbf{X},t),\\
&5)\quad \mathbf{V}^*(\mathbf{X},t^*) = \mathbf{Q}(t)\mathbf{V}(\mathbf{X},t)\mathbf{Q}^T(t),\quad \mathbf{B}^*(\mathbf{X},t^*) = \mathbf{Q}(t)\mathbf{B}(\mathbf{X},t)\mathbf{Q}^T(t),\\
&6)\quad \mathbf{c}^*(\mathbf{x}^*,t^*) = \mathbf{Q}(t)\mathbf{c}(\mathbf{x},t)\mathbf{Q}^T(t),\\
&7)\quad \rho^*(\mathbf{x}^*,t^*) = \rho(\mathbf{x},t).
\end{aligned}
\tag{1.68}
$$

Fie $\chi^*$ echivalenta cu $\chi$ conform Definiţiei 4. Diferenţiem în raport cu $\mathbf{X}$ funcţia prezentă în formula (62)

$$\mathbf{X} \longrightarrow \chi^*(\mathbf{X},t^*) \equiv \mathbf{x}_0^*(t) + \mathbf{Q}(t)(\chi(\mathbf{X},t) - \mathbf{x}_0),$$

unde $t^* = t + a$. Prima formulă rezultă imediat. A doua se obţine prin considerarea inversei relaţiei deja demonstrată şi a formulei (30) din Propoziţia 5 .

Folosind definiţiile tensorilor de deformaţie $\mathbf{C}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{c}$, date în Propoziţia 6., formulele (31) şi relaţiile demonstrate deja ( 1), 2) ), se determină legile de transformare a acestor tensori la schimbarea reperului. Relaţia 7) este o consecinţă directă a primei relaţii şi a condiţiei de continuitate a masei în configuraţia de referinţă ( formula (19) ).

Pentru demonstrarea celorlalte formule utilizăm teorema de descompunere polară ( formula (44) ) aplicată tensorilor $\mathbf{F}(t), \mathbf{F}^*(t^*) \in Invlin$. Deci

$$\mathbf{F}^*(t^*) = \mathbf{R}^*(t^*)\mathbf{U}^*(t^*) = \mathbf{V}^*(t^*)\mathbf{R}^*(t^*),$$

$$\mathbf{Q}(t)\mathbf{F}(t) = \mathbf{Q}(t)\mathbf{R}(t)\mathbf{U}(t) = \mathbf{Q}(t)\mathbf{V}(t)\mathbf{R}(t) \equiv (\mathbf{Q}(t)\mathbf{V}(t)\mathbf{Q}^T(t))\mathbf{Q}(t)\mathbf{R}(t).$$

Prin utilizarea unicităţilor în reprezentările polare, din relaţiile anterioare se deduc şi celelalte relaţii de legătură.

**Propoziţia 12.** Prin schimbarea reperului sau a observatorului au loc, relativ la tensorii viteze de deformaţie, următoarele relaţii

$$
\begin{aligned}
\dot{\mathbf{F}}^*(t^*) &= \dot{\mathbf{Q}}(t)\mathbf{F}(t) + \mathbf{Q}(t)\dot{\mathbf{F}}(t),\\
\mathbf{L}^*(\mathbf{x}^*,t^*) &= \mathbf{Q}(t)\mathbf{L}(\mathbf{x},t)\mathbf{Q}^T(t) + \dot{\mathbf{Q}}(t)\mathbf{Q}^T(t),\quad \dot{\mathbf{Q}}(t)\mathbf{Q}^T(t) \in Asim,\\
\mathbf{D}^*(\mathbf{x}^*,t^*) &= \mathbf{Q}(t)\mathbf{D}(\mathbf{x},t)\mathbf{Q}^T(t),\\
\mathbf{W}^*(\mathbf{x}^*,t^*) &= \mathbf{Q}(t)\mathbf{W}(\mathbf{x},t)\mathbf{Q}^T(t) + \dot{\mathbf{Q}}(t)\mathbf{Q}^T(t).
\end{aligned}
\tag{1.69}
$$

Pentru **demonstraţie** să observăm că $t^* = t + a$ conduce la $\dfrac{\partial}{\partial t^*} = \dfrac{\partial}{\partial t}$. Atunci prima relaţie devine o consecinţă directă a formulei $(68)_1$.

Pentru demonstrarea formulei $(69)_2$ ţinem seama de relaţia (43) şi folosim primele relaţii din (68). Ultimele două relaţii sunt imediate dacă se ţine cont de definiţiile celor doi tensori şi de cele de mai sus.

**Propoziţia 13.** Prin schimbarea reperului sau a observatorului, tensorii deformaţie în mişcarea relativă se transformă după formulele

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^*_{t^*}(\mathbf{x}^*, \tau^*) &= \mathbf{Q}(\tau)\mathbf{F}_t(\mathbf{x}, \tau)\mathbf{Q}^T(t), \\ \mathbf{C}^*_{t^*}(\mathbf{x}^*, \tau^*) &= \mathbf{Q}(t)\mathbf{C}_t(\mathbf{x}, \tau)\mathbf{Q}^T(t). \end{aligned} \tag{1.70}$$

Prima relaţie este o consecinţă a formulelor ii) din (52) şi $(68)_1$, aplicată la momentele de timp $\tau$ şi $t$.

**Obiectivitatea tensorilor lui Rivlin-Ericksen** este o consecinţă directă a definiţiei acestora ( formula (58) ) şi a Propoziţiei 13.

**Propoziţia 14.** Fie $\chi^*$ echivalentă cu $\chi$. Prin schimbarea reperului ( sau a observatorului) tensorii deformaţie în mişcarea relativă se transformă prin formulele

$$\mathbf{A}^*_k(\mathbf{x}^*, t^*) = \mathbf{Q}(t)\mathbf{A}_k(\mathbf{x}, t)\mathbf{Q}^T(t), \tag{1.71}$$

pentru orice $1 \leq k$.

**Concluzii.** Prin considerarea mişcărilor echivalente $\chi$ şi $\chi^*$, care rezultă prin suprapunerea unei mişcări de corp rigid peste mişcarea dată, au rezultat atât câmpuri *obiective* , *invariante*, cât şi *câmpuri neobiective.*

## 1.6 Deformaţii mici sau infinitezimale

Prin formulele (35) au fost introduşi *vectorii de deplasare*, în particula $X$ la momentul $t$, în variabile materiale, şi respectiv în variabile spaţiale prin

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) &= \mathbf{x} - \mathbf{X} = \chi(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X}, \text{ sau} \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{x} - \mathbf{X} = \mathbf{x} - \chi^{-1}(\mathbf{x}, t). \end{aligned} \tag{1.72}$$

*Gradienţii deplasărilor* au fost definiţi prin relaţiile

$$\mathbf{H}(\mathbf{X}, t) = \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{u}(\mathbf{X}, t), \text{ sau } \quad \mathbf{h}(\mathbf{x}, t) = \nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{u}(\mathbf{x}, t). \tag{1.73}$$

**Definiţia 8.** Corpul $\mathcal{B}$ este supus la mici deformaţii în particula $X$ dacă

$$\mid \mathbf{H}(\mathbf{X}, t) \mid = (\mathrm{tr}\,(\mathbf{H}^T(\mathbf{X}, t)\mathbf{H}(\mathbf{X}, t)))^{1/2} \ll 1, \tag{1.74}$$

pentru orice $t \in R$.

Notăm

$$\delta = \sup_{t \in R} \mid \mathbf{H}(\mathbf{X}, t) \mid \ll 1. \tag{1.75}$$

Pentru un $\delta > 0$ fixat introducem spaţiile de funcţii

$$\begin{aligned} O(\delta) &= \{f : R \longrightarrow \mathcal{X} \mid \exists\, K > 0 : \mid f(s) \mid < K\delta,\ \forall\, s \in R\}, \\ o(\delta) &= \{f : R \longrightarrow \mathcal{X} \mid \frac{\mid f(s) \mid}{\delta} \longrightarrow 0, \text{pentru } \delta \longrightarrow 0\}. \end{aligned} \tag{1.76}$$

Atunci, din $\mathbf{H}(\mathbf{X}, t) \in O(\delta)$, rezultă că $\mathbf{H}^T(\mathbf{X}, t)\mathbf{H}(\mathbf{X}, t) \in O(\delta^2)$.

Gradientul deformaţiei se exprimă prin gradientul deplasării cu formula (37) şi obţinem

$$\mathbf{F}(t) = \mathbf{I} + \mathbf{H}(t) = \mathbf{I} + O(\delta) \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{F}(t) \simeq \mathbf{I}, \tag{1.77}$$

dacă am neglijat gradientul deplasării în prezenţa unităţii. Spunem că gradientul deformaţiei este *aproximativ* identitatea în cazul micilor deformaţii.

**Observaţia 10.** Menţionăm că se neglijează elementele din $O(\delta^{k+1})$ în prezenţa termenilor $O(\delta^k)$, cu alte cuvinte neglijăm termenii de *ordinul* $k+1$ în prezenţa termenilor de *ordinul* $k$ relativ la $\delta \in (0, 1)$. Prin acest procedeu construim *aproximări* ale câmpurilor tensoriale finite, în ipoteza micilor deformaţii. Formulele obţinute prin acest procedeu vor fi *considerate exacte* în teorii care au la bază micile deformaţii.

De asemenea se utilizează *notaţia*

$$f + O(\delta^k) \equiv f + g,$$

dacă $g \in O(\delta^k)$.

**Definiţia 9.** *Tensorul micilor deformaţii*, notat tradiţional cu $\epsilon$, se defineşte ca fiind partea simetrică a gradientului deplasării , deci

$$\begin{aligned} \epsilon(t) \equiv \epsilon(\mathbf{u})(t) &= \frac{1}{2}(\mathbf{H}(t) + \mathbf{H}^T(t)) \in O(\delta), \text{adică} \\ \epsilon(\mathbf{u})(\mathbf{X}, t) &= \frac{1}{2}(\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) + \nabla^T_{\mathbf{X}}\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)). \end{aligned} \tag{1.78}$$

Partea antisimetrică a gradientului deplasării se notează cu

$$\omega(t) = \frac{1}{2}(\mathbf{H}(t) - \mathbf{H}^T(t)) \in O(\delta), \tag{1.79}$$

fiind tensorul *spin* în cazul micilor deformaţii. Evident că

$$\mathbf{H}(t) \equiv \nabla \mathbf{u}(t) = \epsilon(t) + \omega(t) \tag{1.80}$$

**Observaţia 11.** In cele ce urmează va fi frecvent utilizată formula de dezvoltare în serie de puteri a binomului

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha\, x + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \ldots, \tag{1.81}$$

cu $\alpha \in R$ şi $x \in Lin$, care este convergentă pentru $\mid x \mid < 1$.

Convergenţa seriei de puteri, în variabila tensorială decurge din definiţia convergenţei seriilor formale.

**Propoziţia 15.** In cazul micilor deformaţii au loc următoarele formule aproximative pentru tensorii de deformaţie , în descriere materială

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}(t) \simeq \epsilon(t), \quad \mathbf{C}(t) \simeq \mathbf{I} + 2\epsilon(t), \quad \mathbf{B}(t) \simeq \mathbf{I} + 2\epsilon(t), \\ &\mathbf{c}(t) \simeq \mathbf{I} - 2\epsilon(t), \quad \mathbf{U}(t) \simeq \mathbf{I} + \epsilon(t), \quad \mathbf{R}(t) \simeq \mathbf{I} + \omega(t) \end{aligned} \tag{1.82}$$

pentru orice $t \in R$.

**Demonstraţie.** Utilizăm (77) şi primele formule sunt o consecinţă directă a definiţiilor (31), (32). Din formula $\mathbf{U}(t) = (\mathbf{C}(t))^{1/2} = (\mathbf{I} + 2\epsilon + O(\delta))^{1/2}$, prin dezvoltare în serie formală după formula (81), în care $\alpha = 1/2$ , se obţine aproximaţia dorită, deoarece seria este convergentă pentru $\delta < 1$. In calculul rotaţiei, folosim teorema de descompunere polară (formula (44) ) sub forma : $\mathbf{R} = \mathbf{F}\mathbf{U}^{-1}$.

**Propoziţia 16.** Tensorii de deformaţie în descriere relativă se calculează după următoarele formule aproximative, în cazul micilor deformaţii

$$\begin{aligned} &\mathbf{F}_t(\tau) \simeq \mathbf{I} + \mathbf{H}(\tau) - \mathbf{H}(t), \\ &\mathbf{C}_t(\tau) \simeq \mathbf{I} + 2(\epsilon(\tau) - \epsilon(t)), \\ &\mathbf{B}_t(\tau) \simeq \mathbf{I} + 2(\epsilon(\tau) - \epsilon(t)), \\ &(\mathbf{C}_t(\tau))^{\mathbf{R}} \equiv \mathbf{R}^T(t)\mathbf{C}_t(\tau)\mathbf{R}(t) \simeq \mathbf{I} + 2[(\epsilon(\tau) - \epsilon(t))], \end{aligned} \tag{1.83}$$

pentru orice $t, \tau \in R$.

Ca o consecinţă a formulelor (49) şi $(52)_{ii}$ se **demonstrează** primele trei relaţii. Ultima relaţie este derivată din $(83)_2$ împreună cu ultima relaţie din (82).

**Propoziţia 17.** Tensorii viteze de variaţie, în cazul micilor deformaţii, se calculează prin formulele

$$
\begin{aligned}
&\dot{\mathbf{F}}(\mathbf{X},t) = \dot{\mathbf{H}}(\mathbf{X},t) = \nabla_{\mathbf{X}}\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{X},t),\\
&\dot{\mathbf{C}}(\mathbf{X},t) \simeq 2\epsilon(\dot{\mathbf{u}})(\mathbf{X},t) = \nabla_{\mathbf{X}}\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{X},t) + \nabla^T_{\mathbf{X}}\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{X},t),\\
&\mathbf{L}(\mathbf{x},t) \simeq \dot{\mathbf{H}}(\mathbf{X},t) = \nabla_{\mathbf{X}}\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{X},t),\\
&\mathbf{D}(\mathbf{x},t) \simeq \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{H}}(\mathbf{X},t) + \dot{\mathbf{H}}^T(\mathbf{X},t)) = \epsilon(\dot{\mathbf{u}})(t),\\
&\mathbf{W}(\mathbf{x},t) \simeq \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{H}}(\mathbf{X},t) - \dot{\mathbf{H}}^T(\mathbf{X},t)) = \dot{\omega}(t).
\end{aligned}
\tag{1.84}
$$

**Demonstraţie.** Prima este o formulă exactă care se obţine din (77) prin derivare în raport cu timpul. A doua este o consecinţă directă a formulei exacte $\dot{\mathbf{C}}(t) = \dot{\mathbf{F}}^T(t)\mathbf{F}(t) + \mathbf{F}^T(t)\dot{\mathbf{F}}(t)$ în care se utilizează $(84)_1$ şi (77). Pentru **demonstrarea** relaţiilor următoare folosim formulele (39)- (41) de definiţie a gradientului vitezei, a tensorului viteză de deformare şi a tensorului spin.

## 1.7 Exerciţii şi probleme

**1.** Să se demonstreze formula (2) din Propoziţia 1.

$$\rho_k = \rho_{\bar{k}} J, \quad J = \mid \det \nabla\lambda \mid$$

**2.** Demonstraţi formula lui Euler $\dot{J} = J \,\mathrm{div}\mathbf{v}$.

**3.** Demonstraţi formula din Propoziţia 7. prin care tensorii de deformare se exprimă cu ajutorul gradientului deplasării sub forma

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{H} + \mathbf{H}^T + \mathbf{H}^T\mathbf{H}), \quad \mathbf{e} = \frac{1}{2}(\mathbf{h} + \mathbf{h}^T - \mathbf{h}^T\mathbf{h}).$$

**4.** Demonstraţi legătura dintre viteza gradientului de deformaţie şi gradientul vitezei exprimată prin relaţia (43)

$$\dot{\mathbf{F}}(\mathbf{X},t) = \mathbf{L}(\mathbf{x},t)\mathbf{F}(\mathbf{X},t).$$

**5.** Demonstraţi că tensorii de deformaţie $\mathbf{E}(\mathbf{X},t)$ şi $\mathbf{e}(\mathbf{x},t)$ sunt legaţi prin deformaţie sub forma

$$\mathbf{E} = \mathbf{F}^T\mathbf{e}\mathbf{F}.$$

**6.** Dacă $k$, $\bar{k} \in C$ şi $\lambda$ este o deformaţie de la configuraţia $k$ la configuraţia $\bar{k}$ arătaţi că ( Propoziţia 1.)

$$\rho_k = \rho_{\bar{k}} J, \quad J = \mid \det \nabla\lambda \mid .$$

**7.** Afirmaţiile următoare sunt echivalente ( Propoziţia 4., formulele (24))

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = 0, \quad \rho(\mathbf{x}, t) = \rho_0(\mathbf{X}), \quad J = 1.$$

**8.** Să se arate că formulele din Propoziţia 6.

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)\mathbf{P} = \mathbf{p}, \quad \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{x}, t)\mathbf{p} = \mathbf{P},$$

$$|\,\mathbf{P}\,|^2 = \mathbf{c}(\mathbf{x}, t)\mathbf{p}\cdot\mathbf{p}, \quad |\,\mathbf{p}\,|^2 = \mathbf{C}(\mathbf{X}, t)\mathbf{P}\cdot\mathbf{P},$$

$$|\,\mathbf{p}\,|^2 - |\,\mathbf{P}\,|^2 = 2\mathbf{E}(\mathbf{X}, t)\mathbf{P}\cdot\mathbf{P} = 2\mathbf{e}(\mathbf{x}, t)\mathbf{p}\cdot\mathbf{p}$$

au loc.

**9.** Explicaţi semnificaţia geometrică a tensorilor de deformaţie, utilizând relaţiile din Ex. 8.

**10.** Demonstraţi teorema de descompunere polară.

**11.** Referitor la semnificaţia mecanică a elementelor din teorema de descompunere polară, demonstraţi că dacă $\mathbf{N}_i$ sunt vectorii proprii pentru $\mathbf{C}$, respectiv pentru $\mathbf{U}$, iar $\mathbf{n}_i$ sunt vectorii proprii pentru $\mathbf{c}$ atunci

$$\mathbf{n}_i = \mathbf{R}\mathbf{N}_i, \quad \mathbf{N}_i = \frac{1}{\sqrt{c_i}}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{n}_i, \quad C_i = \frac{1}{c_i} \quad \forall \quad i \in \overline{\{1, 3\}},$$

unde $C_i, c_i$, sunt valorile proprii corespunzătoare ale tensorilor de deformaţie $\mathbf{C}, \mathbf{c}$.

**12.** Relaţia dintre viteza de variaţie a tensorului de deformaţie $\mathbf{E}(\mathbf{X}, t)$ şi tensorul vitezei de deformaţie $\mathbf{L}(\mathbf{x}, t)$ este dată de

$$\dot{\mathbf{E}}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{F}^T(\mathbf{X}, t)\mathbf{D}(\mathbf{x}, t)\mathbf{F}(\mathbf{X}, t).$$

**13.** Demonstraţi că derivatele materiale ale tesorilor $\mathbf{e}(\mathbf{x}, t)$ şi $\mathbf{c}(\mathbf{x}, t)$ se exprimă prin gradientul vitezei sub forma

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{D} - \mathbf{L}^T\mathbf{e} - \mathbf{e}\mathbf{L}, \quad \dot{\mathbf{c}} = -\mathbf{c}\mathbf{L} - \mathbf{L}^T\mathbf{c}.$$

**14.** Fie $\chi$ şi $\chi^*$ două mişcări echivalente. Arătaţi că viteza şi acceleraţia în descriere spaţială nu sunt câmpuri vectoriale obiective (demonstrând formulele de transformare)

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}^*(\mathbf{x}^*, t^*) &= \dot{\mathbf{x}}_0^*(t) + \mathbf{A}(t)(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}_0^*(t)) + \mathbf{Q}(t)\,\mathbf{v}(\mathbf{x}, t),\\
\mathbf{a}^*(\mathbf{x}^*, t^*) &= \ddot{\mathbf{x}}_0^*(t) + (\dot{\mathbf{A}}(t) + \mathbf{A}^2(t))(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}_0^*(t)) +\\
&\quad +2\mathbf{A}(t)(\mathbf{v} - \dot{\mathbf{x}}_o^*(t)) + \mathbf{Q}(t)\,\mathbf{a}(\mathbf{x}, t),
\end{aligned}$$

unde $\mathbf{A}(t) = \dot{\mathbf{Q}}(t)\mathbf{Q}^T(t)$.

**15.** Studiaţi obiectivitatea câmpurilor de tip viteze de variaţie, definite în Ex. 12. şi Ex. 13.

**16.** Ştiind că tensorii Rivlin- Ericksen sunt obiectivi, studiaţi obiectivitatea derivatei lor materiale $\dot{\mathbf{A}}_k(\mathbf{x}, t)$.

**17.** Explicitaţi deducerea formulelor apropximative (82)- (84) obţinute în ipoteza micilor deformaţii.

**18.** Fie un corp $\mathcal{B}$, care în configuraţia de referinţă reprezintă un cilindru de rază a şi înălţime h. Cilindrul suferă o deformaţie descrisă de

$$r = \sqrt{AR^2 + B},\ \theta = \Theta + DZ,\ z = FZ,\ \text{cu}\ AF = 1,$$

unde (r, $\theta$, z) reprezintă coordonatele cilindrice asociate particulei $X \in \mathcal{B}$ în configuraţia deformată, iar (R, $\Theta$, Z) sunt coordonatele cilindrice ale aceleiaşi particule în configuraţia de referinţă.

a) Determinaţi tensorii de deformaţie $\mathbf{C}$ şi $\mathbf{B}$.

b) Arătaţi că are loc o alungire a elementelor materiale în direcţia axei de simetrie a cilindrului.

c) Arătaţi că planul $Z =$ const. se roteşte în raport cu axa cilndrului, deci are loc o torsiune.

d) Deformaţia este incompresibilă.

e) Caracterizaţi modul în care se produce deformaţia şi reprezentaţi corpul într - o configuraţie deformată.

**19.** Fie $\mathcal{B}$ un corp care în configuraţia de referinţă reprezintă un paralelipiped ce se deformează astfel încât $x^1 = X^1$, $x^2 = X^2 + kX^1$ $x^3 = X^3$, unde $(X^1, X^2, X^3)$ sunt coordonatele lui $X \in \mathcal{B}$ într - un reper cartezian, iar $(x^1, x^2, x^3)$ sunt coordonatele lui $x \in \mathcal{B}_t$, $t \in R$ fixat, în acelaşi reper.

a) Calculaţi tensorii de deformaţie $\mathbf{C}$ şi $\mathbf{B}$.

b) Arătaţi că valorile principale ale lui $\mathbf{B}$ sunt

$$\lambda_1 = 1 + \frac{1}{2}k^2 + k\sqrt{1 + \frac{1}{4}k^2},\ \lambda_2 = 1 + \frac{1}{2}k^2 - k\sqrt{1 + \frac{1}{4}k^2},\ \lambda_3 = 1.$$

c)Determinaţi vectorii proprii pentru $\mathbf{C}$ şi $\mathbf{B}$.

d) Determinaţi descompunerea polară a lui $\mathbf{F}$.

e) Reprezentaţi corpul în configuraţia deformată.

f) Arătaţi că deformaţia descrie o forfecare.

g) Este această deformaţie incompresibilă ?

**20.** Dacă $\mathbf{N}_j \in \mathcal{V}_{\mathbf{X}}$, $|\,\mathbf{N}_j\,| = 1$ sunt direcţiile unor elemente materiale în $\mathbf{X}$ şi $\mathbf{n}_j$ sunt direcţiile elementelor materiale în configuraţia actuală, cu $j \in \{1,2,3\}$, atunci

$$\cos(\widehat{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2}) = \frac{\mathbf{C}(\mathbf{X},t)\mathbf{N}_1 \cdot \mathbf{N}_2}{\sqrt{\mathbf{C}(\mathbf{X},t)\mathbf{N}_1 \cdot \mathbf{N}_1}\sqrt{\mathbf{C}(\mathbf{X},t)\mathbf{N}_2 \cdot \mathbf{N}_2}},$$

$$\cos(\widehat{\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2}) = \frac{\mathbf{c}(\mathbf{x},t)\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{\sqrt{\mathbf{c}(\mathbf{x},t)\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_1}\sqrt{\mathbf{c}(\mathbf{x},t)\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{n}_2}}.$$

**21.** In condiţiile descrise în Ex.20. şi cu notaţiile utilizate, arătaţi că

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{L}(\mathbf{x},t)\mathbf{p}, \quad \frac{d}{dt}(|\,\mathbf{p}\,|)^2 = 2\mathbf{D}(\mathbf{x},t)\mathbf{p}\cdot\mathbf{p},$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2) = 2\mathbf{D}(\mathbf{x},t)\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2,$$

$$-\sin(\theta_{12})\frac{d\theta_{12}}{dt} = 2\mathbf{D}(\mathbf{x},t)\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 - \cos(\theta_{12})(\mathbf{D}\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_1 + \mathbf{D}\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{n}_2),$$

unde $\theta_{12} = (\widehat{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2})$.

**22.** Fie $\mathbf{F}$ reprezentat într - o bază carteziană prin matricea

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2\cos(\theta) & \lambda_3\sin(\theta) \\ 0 & -\lambda_2\sin(\theta) & \lambda_3\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

cu $\lambda_i > 0$.

a) Determinaţi descompunerea polară.

b) In ce condiţii $\mathbf{F}$ caracterizează o mişcare de corp rigid ?

c) Determinaţi $\mathbf{L}$, $\mathbf{D}$ şi $\mathbf{W}$ pe mişcarea dată.

d) Care este semnificaţia unghiului $\theta$?

**23.** Arătaţi că mişcarea de corp rigid a lui $\mathcal{P}$ poate fi caracterizată, pentru orice $\mathbf{x} \in \mathcal{P}_t$ şi $t \in [t_o, t_1)$ prin una din afirmaţiile echivalente

a) $\mathbf{D}$ (x, t) = 0,

b) $\mathbf{v}(\mathbf{x},t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}_o,t) + \omega(t) \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}_o)$, $\mathbf{x}_o \in \mathcal{P}_t$,

c) $\mathbf{L}(\mathbf{x},t) \in$ Asim,

d) $\mathbf{L}(\mathbf{x},t) = \mathbf{W}(t) \in$ Asim,

e) $(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{v}(\mathbf{y},t) - \mathbf{v}(\mathbf{x},t)) = 0, \quad \forall \mathbf{y} \in \mathcal{P}_t$.

**24.** Fie $\mathbf{T}$( x, t) un câmp tensorial obiectiv. Demonstraţi că $\dot{\mathbf{T}}(\mathbf{x},t)$ este obiectiv, dacă şi numai dacă $\mathbf{T}(\mathbf{x},t) = \beta(\mathbf{x},t)\mathbf{I}$, unde $\beta(\mathbf{x},t) \in R$, este obiectiv.

# 2. RELAŢII CONSTITUTIVE

## 2.1 Principii generale ale relaţiilor constitutive

Corpurile existente în natură sunt constituite din diferite *materiale.* Acest lucru se reflectă în *teoria relaţiilor (reprezentărilor) constitutive.*

Relaţiile constitutive reprezintă *constrângeri (restricţii)* asupra forţelor (tensiunilor) sau asupra mişcărilor, sau asupra celor două , în sensul că prin aplicarea unui sistem de forţe corpul suferă o anumită mişcare, sau deformare, care este diferită în funcţie de natura corpurilor.

In mecanică se definesc diferite *clase (ideale) de materiale* prin precizarea unor relaţii caracteristice între tensorii de tensiune şi mişcarea corpului, numite *reprezentări constitutive.*

*Teoria generală* a reprezentărilor constitutive stabileşte *restricţiile* pe care trebuie să le satisfacă aceste relaţii pentru a putea fi folosite în *descrierea matematică* a comportării materialelor observate în natură.

Apoi se face o *clasificare raţională* a materialelor şi se demonstrează teoreme care descriu comportamentul materialelor dintr-o anumită clasă.

Descrierea matematică a comportamentului corpurilor continuu deformabile o facem în cadrul axiomatic descris de Noll [1958], Truesdell , Noll [1965], Truesdell [1972].

Conceptul de material introdus aici reflectă caracteristica generală a corpurilor de a avea o *memorie a trecutului lor*, astfel încât răspunsul materialului la o schimbare a formei sale să se producă, în general, după un anumit interval de timp.

Pentru aceasta vom defini *istoria trecută, până la momentul curent*, inclusiv , pentru câmpuri care *depind de timp.*

**Definiţia 1.** Fie $f : R \longrightarrow \mathcal{X}$ un câmp. Definim *istoria câmpului* $f$ până la momentul $t$ (inclusiv) prin funcţia $f^t : [0, +\infty) \longrightarrow \mathcal{X}$ dată prin

$$f^t(s) = f(t-s), \quad \forall \quad s \in [0, +\infty) \tag{2.1}$$

cu $s-$ numit *parametru pe istorie*, iar $\mathcal{X}$, domeniul de valori considerat arbitrar.

**Notăm** $\tau = t - s$, pentru orice $s \in [0, +\infty)$ (de unde $\tau \leq t$).

Observăm că pentru $s = 0$ obţinem valoarea curentă, la momentul $t$ a câmpurilor considerate.

*Istoria procesului de deformare* într-o particulă fixată este definită prin

$$\mathbf{F}^t(\mathbf{X},\cdot) : [0,+\infty) \longrightarrow Invlin, \quad \mathbf{F}^t(\mathbf{X},s) = \mathbf{F}(\mathbf{X},t-s), \tag{2.2}$$

pentru orice $s \in [0,+\infty)$, fiind inclusă şi valoarea curentă, aşa cum am observat deja.

Fie $\chi : \mathcal{B} \times R \longrightarrow \mathcal{E}$ o mişcare a corpului. Definim *istoria mişcării întregului corp* $\mathcal{B}$ până la momentul $t$ ca fiind *ansamblul* istoriilor

$$\{\chi^t(Y,\cdot)\} \mid_{Y \in \mathcal{B}}$$

Formulăm principiile generale ale reprezentărilor constitutive datorate lui Noll: *P1. Principiul determinismului, P2. Principiul acţiunii locale, P3. Principiul obiectivităţii.*

**P1. Principiul determinismului**

Fie $\mathcal{B}$ un corp şi $X \in \mathcal{B}$ o particulă a sa. La orice moment de timp $t$ starea de tensiune în particula $X$ depinde de istoria mişcării până la momentul $t$ a *întregului corp.*

Formalizăm, în cele ce urmează enunţul *Principiului determinismului*

$$\mathbf{T}(\mathbf{x},t) = \mathcal{F}(\{\chi^t(Y,\cdot)\} \mid_{Y \in \mathcal{B}}; X) \tag{2.3}$$

Aici $\mathbf{x} = \chi(X,t)$ este poziţia particulei $X$ în configuraţia de la momentul $t$, $\mathbf{T}(\mathbf{x},t) \in Sim$ este tensiunea Cauchy în $X \in \mathcal{B}$, la momentul $t$, corespunzător mişcării $\chi$, iar $\mathcal{F}$ este operatorul constitutiv definit pe istorii, cu valori în Sim, care se mai numeşte, *operator de răspuns*, *operator constitutiv*, *funcţionala constitutivă*[1] , sau *funcţionala memoriei.*

Prezenţa explicită a particulei $X$ în reprezentarea constitutivă (3) indică posibilitatea existenţei unui răspuns diferit în diferite particule ale corpului ( prezenţa neomogenităţilor materiale).Principiul este mult prea general pentru a fi operabil. De aceea se întăreşte sub forma *principiului acţiunii locale.*

**P2. Principiul acţiunii locale**

La orice moment de timp $t$ starea de tensiune în particula $X$ depinde numai de istoria mişcării până la momentul $t$ a *unei vecinătăţi a particulei.*

In cele ce urmează formalizăm enunţul de mai sus al *Principiului acţiunii locale* : Fie $\mathcal{B}$ un corp şi $X \in \mathcal{B}$ o particulă a sa. Atunci există $N_X \subset \mathcal{B}$,

[1]Este un abuz de limbaj având în vedere faptul că valorile lui $\mathcal{F}$ nu sunt în $R$.

vecinătate a lui $X$ astfel că dacă $\chi, \bar{\chi} : \mathcal{B} \times R \longrightarrow \mathcal{E}$ sunt două mişcări arbitrare ale corpului pentru care $\chi(\mathbf{Y}, \tau) = \bar{\chi}(\mathbf{Y}, \tau)$, $\forall\, Y \in N_X$, $\tau \in R$, atunci la orice moment de timp $t$

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \mathcal{F}(\{\chi^t(Y, \cdot)\} \,|_{Y \in \mathcal{B}}; X) = \mathcal{F}(\{\bar{\chi}^t(Y, \cdot)\} \,|_{Y \in \mathcal{B}}; X) \tag{2.4}$$

unde $\mathbf{x} = \chi(X, t) = \bar{\chi}(X, t)$.

**Definiţia 2.** O pereche $\{\chi, \mathbf{T}\}$, în care $\chi$ este o mişcare a corpului $\mathcal{B}$, iar $\mathbf{T}$ este tensiunea Cauchy, defineşte un *proces dinamic*. Spunem că perechile $\{\chi, \mathbf{T}\}$ şi $\{\chi^*, \mathbf{T}^*\}$ sunt *dinamic echivalente* dacă $\chi$, $\chi^*$ sunt două *mişcări echivalente* şi $\mathbf{T}$ este *obiectiv* .

Astfel în conformitate cu Definiţia 4. (formula (62)) a mişcărilor echivalente şi cu Definiţia 7. (formula (67)) pentru câmpuri tensoriale obiective din cap.I, putem rescrie Definiţia 2. şi anume : $\{\chi, \mathbf{T}\}$ şi $\{\chi^*, \mathbf{T}^*\}$ sunt *dinamic echivalente* dacă şi numai dacă

$$\begin{aligned} &\mathbf{x}^* \equiv \chi^*(\mathbf{X}, t^*) = \mathbf{x}_0^*(t) + \mathbf{Q}(t)(\chi(\mathbf{X}, t) - \mathbf{x}_0) \\ &t^* = t + a, \quad \forall \mathbf{X} \in \mathcal{B}, \quad \forall t \in R \\ &\mathbf{T}^*(\mathbf{x}^*, t^*) = \mathbf{Q}(t)\mathbf{T}(\mathbf{x}, t)\mathbf{Q}^T(t) \end{aligned} \tag{2.5}$$

unde $\mathbf{Q}(t) \in Ort$, $\quad \mathbf{x}_0^*(t)$, $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{E}$, $\quad a \in R$

### P3. Principiul obiectivităţii

Fie o reprezentare constitutivă. Spunem că reprezentarea constitutivă satisface principiul obiectivităţii (sau reprezentarea constitutivă este obiectivă) dacă şi numai dacă are proprietatea că îndată ce procesul dinamic $\{\chi, \mathbf{T}\}$, satisface reprezentarea constitutivă, atunci orice proces dinamic $\{\chi^*, \mathbf{T}^*\}$, echivalent cu $\{\chi, \mathbf{T}\}$ satisface reprezentarea constitutivă.

Astfel reprezentarea constitutivă (3), satisface principiul obiectivităţii dacă şi numai dacă operatorul constitutiv satisface restricţia

$$\mathcal{F}(\{(\chi^*)^{t^*}(Y, \cdot)\} \,|_{Y \in \mathcal{B}}; X) = \mathbf{Q}(t)\mathcal{F}(\{\chi^t(Y, \cdot)\} \,|_{Y \in \mathcal{B}}; X)\mathbf{Q}^T(t)$$

$\forall \chi^*$ echivalentă cu $\chi$ şi $\mathbf{Q}(t) \in Ort$.

Reprezentările constitutive se mai numesc şi *ecuaţii constitutive*, sau legi de material.

Ecuaţia constitutivă (3) este prea generală, atâta timp cât nu se fac referiri asupra modului în care este definit operatorul constitutiv.

## 2.2 Materiale simple. Forme reduse ale ecuaţiilor constitutive

Vom defini acum *clasa materialelor simple*, introdusă de Noll. Aşa cum vom arăta în capitolele următoare materialele elastice, fluidele vâscoase, fluidele ideale, fluidele Reiner - Rivlin, etc. sunt clase particulare de materiale simple.

**Observaţia 1.** Prima aproximaţie a mişcării $\chi_k$, pentru fiecare $t$, în vecinătatea lui $\mathbf{X}$, este gradientul deformaţiei $\mathbf{F}_k(\mathbf{X},t)$, aşa cum rezultă din definiţia acestuia. Conform Definiţiei 3. ( formula (26)) din cap.I *diferenţiala* aplicaţiei $\mathbf{X} \longrightarrow \chi_k(\mathbf{X},t)$, în $\mathbf{X} \equiv k(X)$, este dată de

$$\chi_k(\mathbf{Y},t) = \chi_k(\mathbf{X},t) + \mathbf{F}_k(\mathbf{X},t)[\mathbf{Y}-\mathbf{X}] + \omega(\mathbf{X},\mathbf{Y}), \tag{2.6}$$

cu proprietatea $\lim\limits_{\mathbf{Y}\to\mathbf{X}} \dfrac{\omega(\mathbf{X},\mathbf{Y})}{|\,\mathbf{Y}-\mathbf{X}\,|} = 0.$

*Materialele simple* vor fi descrise prin reprezentări constitutive, prin care starea de tensiune într-o particulă fixată este determinată numai de *istoria gradientului de deformaţie* în particula respectivă.

**Definiţia 3.** Fie $\mathcal{B}$ un corp şi $X \in \mathcal{B}$ o particulă a sa. Spunem că, corpul $\mathcal{B}$ este constituit, în particula $X$, dintr-un *material simplu* dacă admite o reprezentare constitutivă de forma

$$\mathbf{T}(\mathbf{x},t) = \mathcal{F}_k(\mathbf{F}_k^t(\mathbf{X},\cdot);\mathbf{X}), \tag{2.7}$$

în raport cu $k$ o configuraţie de referinţă fixată. $\mathcal{F}_k-$ se numeşte operatorul constitutiv în raport cu configuraţia de referinţă $k$.

Configuraţia de referinţă va fi **subânţeleasă**, dar nu o vom menţiona, decât dacă este absolut necesar. De asemenea **vom omite prezenţa explicită a particulei materiale** prin care se menţionau posibilele neomogenităţi ale corpului considerat.

**Observaţia 2.** Orice material simplu satisface principiul acţiunii locale.

Principiul obiectivităţii *impune restricţii* puternice asupra reprezentărilor constitutive. Dacă o reprezentare constitutivă *satisface* principiul obiectivităţii spunem că **reprezentarea constitutivă este obiectivă.**

Vom demonstra acum o **condiţie necesară şi suficientă** de obiectivitate a reprezentării constitutive pentru materiale simple.

**Teorema 1.** Fie un material simplu reprezentat prin (7)

$$\mathbf{T}(\mathbf{x},t) = \mathcal{F}(\mathbf{F}^t(\mathbf{X},\cdot))$$

Reprezentarea constitutivă satisface P3. dacă şi numai dacă are loc următoarea restricţie asupra operatorului constitutiv

$$\mathcal{F}(\mathbf{Q}^t\mathbf{F}^t(\mathbf{X},\cdot)) = \mathbf{Q}(t)\mathcal{F}(\mathbf{F}^t(\mathbf{X},\cdot))\mathbf{Q}^T(t) \tag{2.8}$$

pentru $\forall\, \mathbf{F}^t(\cdot)-$ istorie de deformaţie în domeniul constitutiv şi pentru orice istorie a unui câmp ortogonal, $\mathbf{Q}^t(\cdot)$.

**Demonstraţie.** Din principiul obiectivităţii rezultă egalităţile

$$\begin{array}{ll} \mathbf{T}^*(\mathbf{x}^*,t^*) & = \mathcal{F}((\mathbf{F}^*)^{t^*}(\mathbf{X},\cdot)) \\ \quad\| & \\ \mathbf{Q}(t)\mathbf{T}(\mathbf{x},t)\mathbf{Q}^T(t) & = \mathbf{Q}(t)\mathcal{F}(\mathbf{F}^t(\mathbf{X},\cdot))\mathbf{Q}^T(t) \end{array} \tag{2.9}$$

Deoarece mişcările sunt echivalente în particula $X$ între gradienţii de deformaţie ai celor două mişcări există legătura

$$\mathbf{F}^*(\mathbf{X},\tau^*) = \mathbf{Q}(\tau)\mathbf{F}(\mathbf{X},\tau), \quad \forall\tau \in R,$$

ceea ce este echivalent cu

$$(\mathbf{F}^*)^{t^*}(\mathbf{X},s) = \mathbf{Q}^t(s)\mathbf{F}^t(\mathbf{X},s), \quad \forall s \geq 0, \tag{2.10}$$

deoarece am considerat $\tau^* = \tau + a$, $t^* = t + a$ şi $\tau^* - t^* = \tau - t = s$. Rezultă deci, din (10), egalitatea istoriilor $(\mathbf{F}^*)^{t^*}(\mathbf{X},\cdot) = \mathbf{Q}^t(\cdot)\mathbf{F}^t(\mathbf{X},\cdot)$, care introdusă în (9) ne conduce la rezultat.

**Reciproc.** Presupunem că avem reprezentarea constitutivă (7), cu operatorul constitutiv satisfăcând restricţia (8). Să arătăm că principiul obiectivităţii este satisfăcut. Deci să demostrăm că dacă perechea $(\chi, \mathbf{T})$ satisface reprezentarea constitutivă, atunci şi perechea $(\chi^*, \mathbf{T}^*)$, corespunzătoare unui proces dinamic echivalent, o satisface. Astfel, vom considera $(\chi, \chi^*)$ echivalente şi $\mathbf{T}^*(\mathbf{x}^*,t^*) = \mathbf{Q}(t)\mathbf{T}(\mathbf{x},t)\mathbf{Q}^T(t)$. Dacă înlocuim valoarea curentă a tensiunii Cauchy din reprezentarea constitutivă, în $\mathbf{T}^*$ şi folosim egalitatea istoriilor, din formula (10) împreună cu ipoteza (8) deducem că are loc $\mathbf{T}^*(\mathbf{x}^*,t^*) = \mathcal{F}((\mathbf{F}^*)^{t^*}(\mathbf{X}\cdot))$.

**Forme reduse ale reprezentărilor constitutive** se numesc acele reprezentări care sunt astfel încât principiul *obiectivităţii să fie satisfăcut.*

Vom prezenta două forme reduse ale ecuaţiilor constitutive pentru materiale simple, pe care le vom nota pentru identificare prin (I) şi (II). Acestea vor fi utilizate frecvent în continuare.

**Teorema 2.** ( **Forma redusă I** ) Fie un material simplu cu reprezentarea constitutivă (7)

$$\mathbf{T}(\mathbf{x},t) = \mathcal{F}(\mathbf{F}^t(\mathbf{X},\cdot))$$

Reprezentarea

$$\mathbf{T}(\mathbf{x},t) = \mathbf{R}(\mathbf{X},t)\mathcal{F}(\mathbf{U}^t(\mathbf{X},\cdot))\mathbf{R}^T(\mathbf{X},t) \tag{2.11}$$

este o *formă redusă a ecuaţiei constitutive.* In (11) istoria gradientului de deformaţie este prezentă prin *tensorul rotaţiilor la momentul t şi prin istoria tensorului lungirilor la dreapta*, deoarece

$$\mathbf{F}(\mathbf{X},\tau) = \mathbf{R}(\mathbf{X},\tau)\mathbf{U}(\mathbf{X},\tau), \tag{2.12}$$

pentru orice $\tau \in R$.

**Demonstraţie.** Folosim condiţia necesară şi suficientă de obiectivitate din Teorema 1.( formula (8))

$$\mathcal{F}(\mathbf{Q}^t\mathbf{F}^t(\mathbf{X},\cdot)) = \mathbf{Q}(t)\mathcal{F}(\mathbf{F}^t(\mathbf{X},\cdot))\mathbf{Q}^T(t),$$

în care fixăm o istorie a gradientului de deformaţie şi particularizăm transformarea ortogonală $\mathbf{Q}(\tau) \equiv \mathbf{R}^T(\mathbf{X},\tau)$, $\forall\tau$. Aici $\mathbf{R}(\mathbf{X},\tau) \in Ort$ se obţine din teorema de descompunere polară ( formula (1.44) ) rescrisă în (12).

Pentru simplificare vom omite şi particula fixată $\mathbf{X}$. Din (12) rezultă că $\mathbf{Q}(\tau)\mathbf{F}(\tau) = \mathbf{U}(\tau)$, care introdusă în (8) ne conduce la

$$\mathcal{F}(\mathbf{U}^t(\cdot)) = \mathbf{R}^T(t)\mathcal{F}(\mathbf{F}^t(\cdot))\mathbf{R}(t),$$

ceea ce trebuia demonstrat.

**Reciproc.** Avem o reprezentare constitutivă sub forma (11). Notăm prin $\tilde{\mathcal{F}}$ membrul stâng din (11). Definiţia operatorului $\tilde{\mathcal{F}}$ este coerentă, deoarece istoria gradientului de deformaţie este conţinută în membrul stâng, prin intermediul descompunerii polare (la momente arbitrare de timp). Astfel

$$\tilde{\mathcal{F}}(\mathbf{F}^t(\cdot)) \equiv \mathbf{R}(t)\mathcal{F}(\mathbf{U}^t(\cdot))\mathbf{R}^T(t) \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{T}(t) = \tilde{\mathcal{F}}(\mathbf{F}^t(\cdot)). \tag{2.13}$$

Să arătăm că $\tilde{\mathcal{F}}$ satisface condiţia (8) din Teorema 1. pentru orice $\mathbf{Q}(\tau) \in Ort$. Pentru aceasta să introducem istoria $\tilde{\mathbf{F}}^t \equiv \mathbf{Q}^t\mathbf{F}^t$. Din definiţia istoriei , scrisă pentu $s \geq 0$, deducem că, pentru orice $\tau = t - s$, $\tilde{\mathbf{F}}(\tau) = \mathbf{Q}(\tau)\mathbf{F}(\tau)$ şi prin urmare avem

$$\tilde{\mathbf{R}}(\tau) = \mathbf{Q}(\tau)\mathbf{R}(\tau), \quad \tilde{\mathbf{U}}(\tau) = \mathbf{U}(\tau). \tag{2.14}$$

Ultimele egalităţi sunt consecinţe ale unicităţii reprezentării polare, care a fost aplicată succesiv pentru $\mathbf{F}(\tau)$ şi pentru $\tilde{\mathbf{F}}(\tau)$ în $(14)_1$.

Folosim definiţia operatorului $\tilde{\mathcal{F}}$ (introdus în (13), pentru istoria $\tilde{\mathbf{F}}^t$), relaţiile $(14)_2$ şi deducem egalităţile

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{F}}(\mathbf{Q}^t\mathbf{F}^t) &= \tilde{\mathcal{F}}(\tilde{\mathbf{F}}^t(\cdot)) \equiv \tilde{\mathbf{R}}(t)\mathcal{F}(\tilde{\mathbf{U}}^t(\cdot))\tilde{\mathbf{R}}^T(t) = \\ &= \mathbf{Q}(t)\mathbf{R}(t)\mathcal{F}(\mathbf{U}^t(\cdot))\mathbf{R}^T(t)\mathbf{Q}^T(t) = \mathbf{Q}(t)\tilde{\mathcal{F}}(\mathbf{F}^t(\cdot))\mathbf{Q}^T(t) \end{aligned} \tag{2.15}$$

Din egalitatea primului termen cu ultimul din (15) rezultă obiectivitatea reprezentării.

**Observaţia 3.** Reprezentarea (11) depinde de istoria rotaţiilor *numai prin valoarea curentă* şi de istoria până la momentul $t$ a tensorilor lungirilor la dreapta.

**Teorema 3.** **(Forma redusă II)** Fie un material simplu cu reprezentarea constitutivă (7)

$$\mathbf{T}(\mathbf{x},t) = \mathcal{F}(\mathbf{F}^t(\mathbf{X},\cdot))$$

Reprezentarea constitutivă satisface principul obiectivităţii dacă şi numai dacă operatorul constitutiv se poate reprezenta sub forma

$$\mathcal{F}(\mathbf{F}^t(\mathbf{X},\cdot)) = \mathbf{R}(\mathbf{X},t)\mathcal{F}_1((\mathbf{C}_t^t(\mathbf{x},\cdot))^{\mathbf{R}}, \mathbf{C}(\mathbf{X},t))\mathbf{R}^T(\mathbf{X},t), \tag{2.16}$$

unde

$$\mathbf{A}^{\mathbf{R}} \equiv \mathbf{R}^T\mathbf{A}\mathbf{R}, \tag{2.17}$$

cu $\mathbf{R} \equiv \mathbf{R}(\mathbf{X},t)$ pentru orice $\mathbf{A} \in Lin$. Relaţia (17) defineşte *tensorul rotit cu rotaţia de la momentul* $t$ .

**Demonstraţie.** In deducerea acestei reprezentări se trece la mişcarea relativă. Nu vom mai menţiona argumentele spaţiale. Folosim formula $(1.52)_{ii}$, sub forma $\mathbf{F}(\tau) = \mathbf{F}_t(\tau)\mathbf{F}(t)$ şi teorema de descompunere polară pentru $\mathbf{F}(t)$, şi $\mathbf{F}_t(\tau)$ date în formulele (1.45), (1.50) . Rezultă

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\tau) &= \mathbf{R}_t(\tau)\mathbf{U}_t(\tau)\mathbf{R}(t)\mathbf{U}(t), \quad \text{sau} \\ \mathbf{F}(\tau) &= \mathbf{R}_t(\tau)\mathbf{R}(t)(\mathbf{U}_t(\tau))^{\mathbf{R}}\mathbf{U}(t), \end{aligned} \tag{2.18}$$

cu $\mathbf{R}_t(\tau)$, $\mathbf{R}(t) \in Ort$, dacă s-a utilizat (17).

Arătăm că reprezentarea din (16) este o condiţie necesară. Facem deci presupunerea că reprezentarea constitutivă satisface principiul obiectivităţii. Cu alte cuvinte avem formula (8)

$$\mathcal{F}(\mathbf{Q}^t\mathbf{F}^t(\cdot)) = \mathbf{Q}(t)\mathcal{F}(\mathbf{F}^t(\cdot))\mathbf{Q}^T(t)$$

Pe de alta parte $\forall s \geq 0$ avem din (18), pentru $\tau = t - s$

$$(\mathbf{Q}^t\mathbf{F}^t)(s) = \mathbf{Q}(t-s)\mathbf{F}(t-s) = \mathbf{Q}(\tau)\mathbf{R}_t(\tau)\mathbf{R}(t)(\mathbf{U}_t(\tau))^{\mathbf{R}}\mathbf{U}(t). \tag{2.19}$$

Particularizăm pentru orice $\tau \leq t$ transformarea ortogonală

$$\mathbf{Q}(\tau) \equiv (\mathbf{R}_t(\tau)\mathbf{R}(t))^T, \text{ şi } \quad \mathbf{Q}(t) \equiv \mathbf{R}^T(t) \tag{2.20}$$

Introducem în (8) istoria din (19), cu transformarea ortogonală particulară din (20). Obţinem

$$\mathcal{F}((\mathbf{U}_t^t(\cdot))^R\mathbf{U}(t)) = \mathbf{R}^T(t)\mathcal{F}(\mathbf{F}^t(\cdot))\mathbf{R}(t). \tag{2.21}$$

Ţinem seama acum de formulele (1.46), (1.51)

$$\mathbf{C}(t) = \mathbf{U}^2(t), \quad \mathbf{C}_t(\tau) = (\mathbf{U}_t(\tau))^2, \tag{2.22}$$

prin care rezultă că rădacinile pătrate ale tensorilor lui Cauchy-Green la dreapta în raport cu configuraţia de referinţă , şi respectiv în descrierea relativă, sunt $\mathbf{U}(t)$, $\mathbf{U}_t(\tau)$.

Să mai observăm că din relaţia anterioară şi din (17), prin care se defineşte *tensorul rotit cu rotaţia de la momentul* $t$ , se deduce

$$(\mathbf{C}_t(\tau))^{\mathbf{R}} = [(\mathbf{U}_t(\tau))^{\mathbf{R}}]^2 \tag{2.23}$$

Acum suntem în măsură să afirmăm că există operatorul $\mathcal{F}_1$, astfel încât

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\mathbf{F}^t(\cdot)) &= \mathbf{R}(t)\mathcal{F}((\mathbf{U}_t^t(\cdot))^R\mathbf{U}(t))\mathbf{R}^T(t) \\ &= \mathbf{R}(t)\mathcal{F}_1((\mathbf{C}_t^t(\cdot))^{\mathbf{R}}, \mathbf{C}(t))\mathbf{R}^T(t) \end{aligned} \tag{2.24}$$

Aceasta este consecinţă directă a formulelor (21) - (23).

**Reciproca.** Fie o reprezentare constitutivă de forma

$$\mathbf{T}(t) = \mathbf{R}(t)\mathcal{F}_1((\mathbf{C}_t^t(\cdot))^{\mathbf{R}}, \mathbf{C}(t))\mathbf{R}^T(t) \equiv \tilde{\mathcal{F}}(\mathbf{F}^t(\cdot)) \tag{2.25}$$

Să arătăm că operatorul constitutiv definit în (25) are proprietatea (8)

$$\tilde{\mathcal{F}}(\mathbf{Q}^t\mathbf{F}^t(\cdot)) = \mathbf{Q}(t)\tilde{\mathcal{F}}(\mathbf{F}^t(\cdot)))\mathbf{Q}^T(t) \tag{2.26}$$

Pentru aceasta considerăm istoria $(\mathbf{F}^*)^{t^*} = \mathbf{Q}^t\mathbf{F}^t$ corespunzătoare unei mişcări $\chi^*$. Atunci din $\mathbf{F}^*(\tau) = \mathbf{Q}(\tau)\mathbf{F}(\tau)$ rezultă

$$\begin{aligned} &\mathbf{R}^*(\tau) = \mathbf{Q}(\tau)\mathbf{R}(\tau), \quad \mathbf{C}^*(\tau) = \mathbf{C}(\tau) \\ &\mathbf{C}_{t^*}(\tau^*) = \mathbf{Q}(t)\mathbf{C}_t(\tau)\mathbf{Q}^T(t), \end{aligned} \tag{2.27}$$

conform cu formulele din (1.68) şi (1.70). Din (25), scrisă pentru $(\mathbf{F}^*)^{t^*}$ obţinem

$$\tilde{\mathcal{F}}((\mathbf{F}^*)^{t^*}(\cdot)) \equiv \mathbf{R}^*(t^*)\mathcal{F}_1((\tilde{\mathbf{C}}_{t^*}^{t^*}(\cdot))^{\mathbf{R}^*}, \mathbf{C}^*(t^*))(\mathbf{R}^*)^T(t^*) \tag{2.28}$$

Din (27), cu (17) rezultă egalitatea

$$(\mathbf{C}_{t^*}^{t^*}(s))^{\mathbf{R}^*} = \mathbf{R}^T(t)\mathbf{C}_t^t(s)\mathbf{R}(t) = (\mathbf{C}_t^t(s))^{\mathbf{R}}, \tag{2.29}$$

care transformă relaţia (28) în

$$\tilde{\mathcal{F}}(\mathbf{F}^*)^{t^*}(\cdot)) \equiv \mathbf{Q}(t)\mathbf{R}(t)\mathcal{F}_1((\tilde{\mathbf{C}}_t^t(\cdot))^{\mathbf{R}}, \mathbf{C}(t))\mathbf{R}^T(t)\mathbf{Q}^T(t). \tag{2.30}$$

In fine din (30) şi (25) rezultă proprietatea (26).

**Observaţia 4.** In forma redusă II s-au pus în evidenţă două configuraţii de referinţă : configuraţia iniţială de referinţă şi configuraţia actuală, care apare în mod explicit datorită utilizării descrierii relative a mişcării. In raport cu configuraţia iniţială de referinţă se calculează atât tensorul lui Cauchy-Green la dreapta, care apare sub formă de parametru, cât şi rotaţia.

Această formă redusă va fi utilizată în mod esenţial în teorema de caracterizare a fuidelor şi în dezvoltările din capitolele 3 şi 5.

## 2.3 Principiul determinismului modificat pentru materiale simple cu legături

In cele ce urmează ne vom ocupa de formularea *principiului determinismului modificat* pentru materiale simple, în cazul în care mişcarea corpului într-o vecinătate a particulei considerate este supusă la anumite restricţii. Acest principiu va înlocui axiomele **P1** şi **P2** .

**Definiţia 3.** Se numeşte *legătură simplă*, în particula $X$ orice relaţie de forma

$$\gamma(\mathbf{F}(\mathbf{X},t)) = 0, \tag{2.31}$$

cu funcţia scalară obiectivă. Legăturile sunt restricţii constitutive.

**Propoziţia 1.** Legătura (31) este echivalentă cu

$$\lambda(\mathbf{C}(\mathbf{X},t)) = 0, \quad \lambda(\mathbf{C}(\mathbf{X},t)) = \gamma(\mathbf{U}(\mathbf{X},t)). \tag{2.32}$$

**Demonstraţie**. Din obiectivitate rezultă că

$$\gamma(\mathbf{F}(t)) = \gamma(\mathbf{Q}(t)\mathbf{F}(t)), \quad \forall \mathbf{Q}(t) \in Ort.$$

Fie $\mathbf{Q}(t) = \mathbf{R}^T(t)$ din teorema de descompunere polară pentru $\mathbf{F}(t)$. Din (1.46) avem $\mathbf{C}(t) = (\mathbf{U}(t))^{1/2}$.

**Observaţia 5.** Legăturile (simple) se realizează prin tensiuni. Astfel relaţiile constitutive pentru materiale simple cu legături trebuie să fie astfel încât să admită acţiunea acestor tensiuni independent de istoria deformaţiei. Cele mai simple sisteme de forţe (sau de tensiuni) de legătură sunt acelea pentru care *puterea mecanică este nulă* pentru orice *mişcare compatibilă cu legăturile.* Se extinde astfel axioma legăturilor ideale din mecanica corpului rigid.

**Principiul determinismului pentru materiale simple cu legături**

Tensiunea este determinată prin istoria gradientului deformaţiei mai puţin un tensor simetric, care produce o *putere mecanică nulă* pe orice mişcare *compatibilă cu legăturile*

$$\mathbf{T}(\mathbf{x},t) = \mathbf{N} + \mathcal{F}(\mathbf{F}^t(\mathbf{X},\cdot)), \tag{2.33}$$

cu

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{L}(\mathbf{x}, t) = 0, \tag{2.34}$$

pentru orice $\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)$, pentru care $\lambda(\mathbf{C}(\mathbf{X}, t)) = 0$.

**Teorema 4.** Dacă $\lambda : Sim \longrightarrow \mathbf{R}$ de clasă $C^1$, atunci $\mathbf{N}$ din (33) se exprimă prin

$$\mathbf{N} = q\mathbf{F}\nabla\lambda(\mathbf{C})\mathbf{F}^T, \tag{2.35}$$

cu $\nabla\lambda(\mathbf{C}) \in Sim$, iar funcţia scalară $q$ depinde de $(\mathbf{x}, t)$.

**Demonstraţia** foloseşte derivabilitatea în raport cu timpul a funcţiei compuse

$$t \longrightarrow f(t) \equiv \lambda(\mathbf{C}(t)) = 0, \tag{2.36}$$

unde $\mathbf{C}(t) = \mathbf{F}(t)^T\mathbf{F}(t)$. Prin derivare, din (36) rezultă

$$\dot{f}(t) = D\lambda(\mathbf{C}(t))[\dot{\mathbf{C}}(t)] = 0, \tag{2.37}$$

cu $\dot{\mathbf{C}}(t) = 2\mathbf{F}(t)^T\mathbf{D}(t)\mathbf{F}(t)$, dacă s-au folosit formulele (1.43), (1.40).

Pe de altă parte din diferenţiabilitatea funcţiei $\lambda$ rezultă că valoarea diferenţialei $D\lambda(\mathbf{C}) : Sim \longrightarrow \mathbf{R}$ este liniară şi continuă. Din aplicarea teoremei lui Riesz (pe $Sim$ înzestrat cu produsul scalar " $\cdot$ " ) rezultă că există $\nabla\lambda(\mathbf{C}) \in Sim$, (vezi anexa A1) astfel încât

$$D\lambda(\mathbf{C})[\mathbf{A}] = \nabla\lambda(\mathbf{C}) \cdot \mathbf{A} \quad \forall \quad \mathbf{A} \in Sim. \tag{2.38}$$

Din (37) cu (38) avem

$$\nabla\lambda(\mathbf{C}(t)) \cdot 2\mathbf{F}(t)^T\mathbf{D}(t)\mathbf{F}(t) = 0, \text{ sau } \mathbf{F}(t)\nabla\lambda(\mathbf{C}(t))\mathbf{F}(t)^T \cdot \mathbf{D}(t) = 0. \tag{2.39}$$

**Reciproc**, din (39) care este adevărată pentru orice $t$ rezultă prin integrare că $\lambda(\mathbf{C}(t)) = const.$

Rescriem acum (34) sub forma

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) = 0, \tag{2.40}$$

pentru orice $\mathbf{D}(\mathbf{x}, t)$ pentru care $\mathbf{F}(t)\nabla\lambda(\mathbf{C}(t))\mathbf{F}(t)^T \cdot \mathbf{D}(t) = 0$, unde s-a avut în vedere simetria lui $\mathbf{N}$, şi reprezentarea echivalentă a legăturii prin (39). Eliminând legătura, prin introducerea multiplicatorului Lagrange, din (40) avem

$$(\mathbf{N} - q\mathbf{F}(t)\nabla\lambda(\mathbf{C}(t))\mathbf{F}(t)^T) \cdot \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) = 0, \tag{2.41}$$

pentru orice $\mathbf{D}(x,t) \in Sim$. Deducem deci forma tensorului de legătură $\mathbf{N}$.

Dăm mai jos două exemplificări , în cazul legăturii de *incompresibilitate* şi *inextensibilitate.*

**Teorema 5.** Tensiunea pentru *materialele simple, incompresibile* este determinată prin istoria gradientului de deformaţie *mai puţin un tensor sferic*, care defineşte o *presiune de tip hidrostatic.* Deci

$$\mathbf{T}(\mathbf{x},t) = -p(\mathbf{x},t)\mathbf{I} + \mathcal{F}(\mathbf{F}^t(\mathbf{X},\cdot)), \tag{2.42}$$

pentru orice $\mathbf{F}^t$ pentru care $\det \mathbf{F}(\tau) = 1$, la orice moment de timp $\tau \in R$.

**Demonstraţia** se obţine imediat dacă ţinem seama de condiţia de incompresibilitate caracterizată prin div $\mathbf{v} \equiv$ tr $\mathbf{L} = 0$, conform cu Propoziţia 4. (formula (1.24)). Dar tr $\mathbf{L} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{I} = 0$. Direct din principiul determinismului modificat (33), eliminând legătura obţinem

$$(\mathbf{N} + p\mathbf{I}) \cdot \mathbf{L} = 0,$$

pentru orice $\mathbf{L} \in Lin$, ceea ce este echivalent cu $\mathbf{N} = -p\mathbf{I}$. Ceea ce trebuia demonstrat. Am obţinut astfel un rezultat datorat lui Poincaré.

**Teorema 6.** Tensiunea pentru *materiale simple* cu legătură de *inextensibilitate* într-o direcţie este determinată prin istoria gradientului de deformaţie *mai puţin o tensiune uniaxială.* Mai precis fie $\mathbf{e}_k \in \mathcal{V}$, cu $\mid \mathbf{e}_k \mid = 1$, direcţia de inextensibilitate, în configuraţia de referinţă, atunci

$$\mathbf{T}(\mathbf{x},t) = q\mathbf{F}\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{F}\mathbf{e}_k + \mathcal{F}(\mathbf{F}^t(\cdot)), \tag{2.43}$$

pentru orice $\mathbf{F}^t$ pentru care $\lambda(\mathbf{C}) \equiv \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{C}\mathbf{e}_k - 1 = 0$.

**Demonstraţia** este o consecinţă directă a formulei de calcul pentru diferenţiala legăturii

$$\nabla\lambda(\mathbf{C}) = \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_k.$$

Obţinem astfel rezultatul lui Adkins şi Rivlin.

## 2.4 Grupuri de simetrie materială. Clasificarea materialelor simple

Conceptul de *simetrie materială* sau *izomorfism material* este datorat lui Noll şi devine instrumentul matematic care permite clasificarea materialelor simple în : *fluide, solide, fluide cristaline, corpuri izotrope.* Această clasificare are în vedere comportamentul unor anumite corpuri materiale faţă de unele transformări ale configuraţiilor lor de referinţă.

Se stabileşte un criteriu de clasificare prin descrierea mulţimii transformărilor configuraţiei de referinţă, relativ la care răspunsul materialului este acelaşi; în sensul că experimental nu poate fi pusă în evidenţă transformarea suportată de corp în configuraţia de referinţă.

Reamintim că în definiţia materialelor simple, Definiţia 3., formula (7), se avea în vedere caracterizarea constitutivă într-o particulă materială fixată.

**Teorema 7.** *Relaţia de legătură dintre operatorii constitutivi* urmare a schimbării configuraţiei de referinţă definită prin deformaţia

$$\lambda : k_1(\mathcal{B}) \longrightarrow k_2(\mathcal{B}), \tag{2.44}$$

cu $\mathbf{P} = \nabla\lambda(\mathbf{X}_1)$, este dată prin

$$\mathcal{F}_{k_2}(\mathbf{F}^t_{k_2}(\mathbf{X}_2,\cdot);\mathbf{X}_2) = \mathcal{F}_{k_1}(\mathbf{F}^t_{k_2}(\mathbf{X}_2,\cdot)\mathbf{P}(\mathbf{X}_1,\cdot);\mathbf{X}_1), \tag{2.45}$$

unde $\mathbf{X}_j = k_j(X)$, cu j $\in \{1,2\}$.

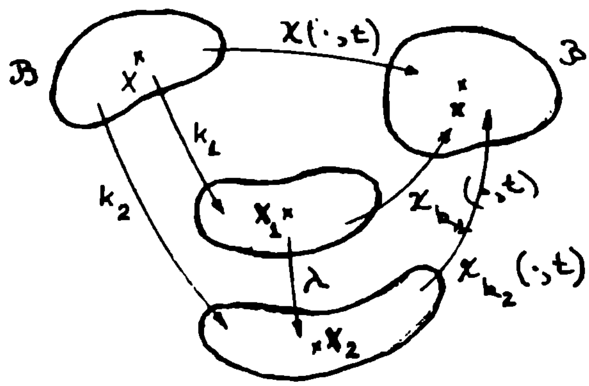



Fig. 2.1

**Demonstraţie.** Fie $\chi$ o mişcare dată. Definim mişcările $\chi_{k_j}$, punînd în evidenţă şi deformaţia $\lambda$, conform reprezentărilor din Fig. 2.1 . Rezultă relaţia

$$\chi_{k_1}(\mathbf{X}_1,\tau) = \chi_{k_2}(\lambda(\mathbf{X}_1),\tau) \tag{2.46}$$

pentru orice $X \in \mathcal{B}$ şi $\mathbf{X}_j = k_j(X)$, $\forall\tau \in R$. Diferenţiind în raport cu $\mathbf{X}_1$ şi folosind $(44)_2$ avem

$$\mathbf{F}_{k_1}(\mathbf{X}_1,\tau) = \mathbf{F}_{k_2}(\mathbf{X}_2,\tau)\nabla\lambda(\mathbf{X}_1) \equiv \mathbf{F}_{k_2}(\mathbf{X}_2,\tau)\mathbf{P}. \tag{2.47}$$

Dacă notăm prin $\mathcal{F}_{k_j}$ funcţionalele constitutive care caracterizează răspunsul materialului la o aceeaşi mişcare dată, dar raportînd la configuraţiile $k_j$, atunci din definiţia (7) a materialelor simple avem

$$\mathbf{T}(\mathbf{x},t) = \mathcal{F}_{k_2}(\mathbf{F}^t_{k_2}(\mathbf{X}_2,\cdot);\mathbf{X}_2) = \mathcal{F}_{k_1}(\mathbf{F}^t_{k_1}(\mathbf{X}_1,\cdot);\mathbf{X}_1). \tag{2.48}$$

Folosim (47) în (48) şi obţinem afirmaţia din enunţ.

Reamintim că în definiţia materialelor simple se avea în vedere caracterizarea constitutivă într-o particulă fixată. De aceea apare naturală problema precizării unor condiţii matematice din care să rezulte dacă două particule sunt constituite sau nu din acelaşi material.

**Definiţia 4.** Două puncte materiale $X_1, X_2$ sunt *material izomorfe* ( sau sunt *constituite dintr-un acelaşi material* ), dacă $\exists\, k_1, k_2$ configuraţii ale corpului $\mathcal{B}$ astfel încât

$$\begin{aligned}
&\rho_{k_1}(\mathbf{X}_1) = \rho_{k_2}(\mathbf{X}_2),\\
&\mathcal{F}_{k_1}(\mathbf{F}^t(\cdot);\mathbf{X}_1) = \mathcal{F}_{k_2}(\mathbf{F}^t(\cdot);\mathbf{X}_2),
\end{aligned} \tag{2.49}$$

pentru orice $\mathbf{F}^t-$ istorie a unui câmp tensorial nesingular şi $\mathbf{X}_j = k_j(X_j)$.

**Observaţia 6.** Evident că $\forall X \in \mathcal{B}$ este izomorf cu el însuşi, dacă $k_1 = k_2$. Ne interesează cazul în care $X$ este material izomorf cu el însuşi într-un mod netrivial.

**Definiţia 5.** Spunem că două configuraţii $k_1, k_2$ sunt *material izomorfe* în $X$, dacă au loc relaţiile (49) cu $\mathbf{X}_j = k_j(X)$.

**Teorema 8.** Fie $k_1$, $k_2$ două configuraţii *material izomorfe* în $X$ şi $\lambda\ :\ k_1(\mathcal{B}) \longrightarrow k_2(\mathcal{B})$ deformaţia între cele două configuraţii, atunci

$$\begin{aligned}
&i) \qquad \mathbf{P} = \nabla\lambda(\mathbf{X}_1) \in Unim,\\
&ii) \qquad \mathcal{F}_{k_1}(\mathbf{F}^t(\cdot)\mathbf{P};\mathbf{X}_1) = \mathcal{F}_{k_1}(\mathbf{F}^t(\cdot);\mathbf{X}_1),
\end{aligned} \tag{2.50}$$

pentru orice $\mathbf{F}^t$.

Pentru **demonstraţie** vom folosi relaţia de schimbare a densităţilor corpului în $X$, ca urmare a deformaţiei dată, prin formula (1.2)

$$\rho_{k_1}(\mathbf{X}_1) = \mid \det \mathbf{P} \mid \rho_{k_2}(\mathbf{X}_2), \tag{2.51}$$

cu $\mathbf{P}$ definit prin (44). Deci egalitatea densităţilor din (49) impune ca $\mathbf{P} \in Unim$.

Utilizăm acum relaţia de legătura între operatorii constitutivi la schimbarea configuraţiei de referinţă (45) şi ipoteza, conform Definiţiei 5.,

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}_{k_2}(\mathbf{F}^t(\cdot);\mathbf{X}_2) = \mathcal{F}_{k_1}(\mathbf{F}^t(\cdot)\mathbf{P};\mathbf{X}_1),\\
&\mathcal{F}_{k_1}(\mathbf{F}^t(\cdot);\mathbf{X}_1) = \mathcal{F}_{k_2}(\mathbf{F}^t(\cdot);\mathbf{X}_2).
\end{aligned} \tag{2.52}$$

Din (52) se obţine ii).

**Observaţia 7.** Precizăm încă o dată că în formula (44) se avea în vedere o aceeaşi mişcare a corpului, dar se foloseau două reprezentări ale acesteia, iar $\mathbf{x} = \chi_{k_1}(\mathbf{X}_1, t) = \chi_{k_2}(\mathbf{X}_2, t)$ (vezi Fig. 2.1).

In cazul configuraţiilor material izomorfe $k_1, k_2$ se au în vedere mişcările $\chi_{k_1}, \chi_{k_2}$, (vezi Fig. 2.2), la care este supus corpul aflat în configuraţiile $k_1(\mathcal{B})$ şi respectiv, $k_2(\mathcal{B})$. Cele două mişcări au aceeaşi istorie a gradientului de deformare, în imaginile particulei materiale, în cele două configuraţii. Poziţia particulei în configuraţia actuală prin cele două mişcări este diferită, dar starea de tensiune şi densităţile sunt aceleaşi

$$\begin{aligned} &\nabla\chi_{k_1}(\mathbf{X}_1, \tau) = \nabla\chi_{k_2}(\mathbf{X}_2, \tau), \quad \forall\tau \in R \\ &\mathbf{T}(\mathbf{x}_1, t) = \mathbf{T}(\mathbf{x}_2, t), \quad \rho(\mathbf{x}_1, t) = \rho(\mathbf{x}_2, t). \end{aligned} \tag{2.53}$$

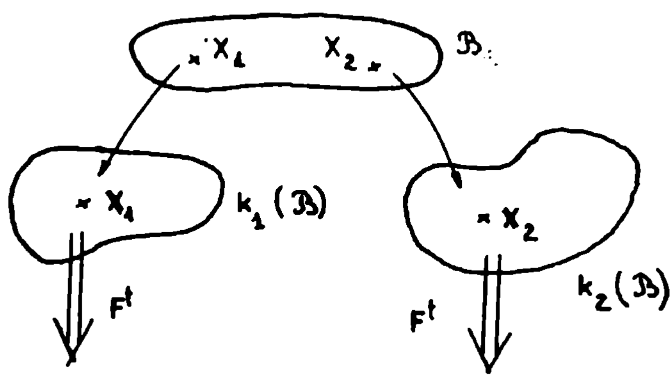



Fig. 2.2

**Definiţia 6.** Se numeşte *grup de simetrie a materialului* în particula $X$, relativ la configuraţia de referinţă $k$ mulţimea

$$g_k(\mathbf{X}) = \{\mathbf{H} \in Unim \mid \mathcal{F}_k(\mathbf{F}^t(\cdot)\mathbf{H}; \mathbf{X}) = \mathcal{F}_k(\mathbf{F}^t(\cdot); \mathbf{X}), \quad \forall\mathbf{F}^t\}. \tag{2.54}$$

Orice transformare $\mathbf{H} \in g_k(\mathbf{X})$ se numeşte *transformare de simetrie materială* relativ la configuraţia $k$.

**Teorema 9.** 1) $g_k(\mathbf{X})$ este un subgrup în $Unim$ relativ la operaţia de compunere a aplicaţiilor în $Lin$.

2) Dacă $k_1, k_2$ sunt două configuraţii de referinţă atunci

$$g_{k_2} = \mathbf{P} g_{k_1} \mathbf{P}^{-1}, \tag{2.55}$$

cu $\mathbf{P} = \nabla\lambda(\mathbf{X}_1)$, iar $\lambda$ este deformaţia de la configuraţia $k_1$ la configuraţia $k_2$.

**Demonstraţie.** 1) Fie $\mathbf{H}_1 \in g_k$ atunci $\mathbf{H}_1 \in Unim$ şi deci există $\mathbf{H}_1^{-1}$, iar

$$\mathcal{F}_k((\mathbf{F}^t\mathbf{H}_1)\mathbf{H}_1^{-1}) = \mathcal{F}_k(\mathbf{F}^t) = \mathcal{F}_k(\mathbf{F}^t\mathbf{H}_1). \tag{2.56}$$

Fie $\tilde{\mathbf{F}}(\tau) = \mathbf{F}(\tau)\mathbf{H}_1$, cu $\mathbf{F}(\tau) \in Invlin$ introdus în (56). In conformitate cu (54) rezultă că $\mathbf{H}_1^{-1} \in g_k$.

Dacă $\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2 \in g_k$ atunci au loc egalităţile

$$\mathcal{F}_k(\mathbf{F}^t\mathbf{H}_1\mathbf{H}_2) = \mathcal{F}_k(\mathbf{F}^t\mathbf{H}_1) = \mathcal{F}_k(\mathbf{F}^t), \tag{2.57}$$

prima egalitate având loc în baza faptului că $\mathbf{H}_2 \in g_k$, pentru $\tilde{\mathbf{F}}(\tau) = \mathbf{F}(\tau)\mathbf{H}_1$ şi ultima datorită apartenenţei $\mathbf{H}_1 \in g_k$.

2) Demonstrăm dubla incluziune a mulţimilor din (55). Fie $\mathbf{H} \in g_{k_1}$. Din (45) şi (54) avem

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{k_2}((\mathbf{F}^t\mathbf{H})\mathbf{P}^{-1}; \mathbf{X}_2) &= \mathcal{F}_{k_1}(\mathbf{F}^t\mathbf{H}; \mathbf{X}_1) = \mathcal{F}_{k_1}(\mathbf{F}^t; \mathbf{X}_1) \\ &= \mathcal{F}_{k_2}(\mathbf{F}^t\mathbf{P}^{-1}; \mathbf{X}_2). \end{aligned} \tag{2.58}$$

Pentru $\bar{\mathbf{F}}(\tau) = \mathbf{F}(\tau)\mathbf{P}^{-1}$ din (58) rezultă

$$\mathcal{F}_{k_2}(\bar{\mathbf{F}}^t\mathbf{P}\mathbf{H}\mathbf{P}^{-1}; \mathbf{X}_2) = \mathcal{F}_{k_2}(\bar{\mathbf{F}}^t; \mathbf{X}_2), \tag{2.59}$$

din care avem

$$\mathbf{P}\mathbf{H}\mathbf{P}^{-1} \in g_{k_2}, \quad \forall \mathbf{H} \in g_{k_1}(\mathbf{X}). \tag{2.60}$$

Deci

$$\mathbf{P} g_{k_1} \mathbf{P}^{-1} \subset g_{k_2}. \tag{2.61}$$

Similar se demonstrează cealaltă implicaţie.

**Propoziţia 2.** Dacă $k_1, k_2$ sunt configuraţii *material izomorfe* în $X$, atunci

$$g_{k_1} = g_{k_2}. \tag{2.62}$$

Reciproca nu este adevărată.

**Demonstraţia** egalităţii grupurilor de simetrie este evidentă din $(49)_2$.

Pentru a demonstra că reciproca nu este adevărată considerăm două configuraţii $k_1, k_2$ *legate* între ele *printr-o dilatare* sau *comprimare*, adică $\mathbf{P} = \nabla\lambda(\mathbf{X}_1) = a\mathbf{I}$ cu $a \neq 1$, $a > 0$. Din Teorema 9. obţinem că cele două grupuri de simetrie coincid, dar densităţile nu sunt egale, deoarece

$$\rho_{k_2}(\mathbf{X}_2) = \frac{\rho_{k_1}(\mathbf{X}_1)}{\det \mid \mathbf{P} \mid} = \frac{\rho_{k_1}(\mathbf{X}_1)}{a}.$$

Astfel este contrazisă Definiţia 5. S-a pus, prin urmare, în evidenţă proprietatea materialelor simple de a-şi păstra printr-o dilatare grupul de simetrie.

In cele ce urmează va fi necesară **teorema de maximalitate** a $Ort$ în $Unim$. Oricare ar fi g un grup cu proprietatea $Ort \subset g \subset Unim$, rezultă

$$g = Ort, \text{ sau } \quad g = Unim. \tag{2.63}$$

Demonstraţia acestei teoreme, datorată lui Noll [1965], este dată în Anexa **A3**.

Cu ajutorul conceptului de grup de simetrie materială Noll a introdus următoarele definiţii

**Definiţia 7.** Corpul $\mathcal{B}$ este constituit dintr-un material *solid* în $X$ dacă există o configuraţie a sa, $k$ astfel încât

$$g_k(\mathbf{X}) \subset Ort. \tag{2.64}$$

**Definiţia 8.** Corpul $\mathcal{B}$ este constituit dintr-un material *fluid* în $X$ dacă există o configuraţie a sa, $k$ astfel încât

$$g_k(\mathbf{X}) = Unim. \tag{2.65}$$

**Definiţia 9.** Corpul $\mathcal{B}$ este constituit dintr-un material *izotrop* în $X$ dacă există o configuraţie a sa, $k$ astfel încât

$$g_k(\mathbf{X}) \supset Ort. \tag{2.66}$$

**Definiţia 10.** Corpul $\mathcal{B}$ este constituit dintr-un material *fluid cristalin* sau *cristal fluid* în $X$ dacă există o configuraţie a sa, $k$ astfel încât $g_k(\mathbf{X})$ nu este un subgrup din $Ort$ şi nu este fluid.

Configuraţiile din definiţiile anterioare se numesc *configuraţii nedistorsionate de solid, fluid* şi respectiv de *izotropie.*

**Definitia 11.(Configuraţie naturală)** Fie un material simplu descris prin ecuaţia constitutivă (7)

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \mathcal{F}_k(\mathbf{F}^t(\cdot)),$$

în raport cu configuraţia de referinţă $k$. Spunem că, configuraţia de referinţă $k$ este *configuraţie naturală* dacă corpul menţinut nedeformat în această configuraţie *suportă tensiune zero.*

**Propoziţia 3.** $k$ este o configuraţie naturală pentru un material simplu dacă şi numai dacă

$$\mathcal{F}_k(\mathbf{I}^t(\cdot)) = 0. \tag{2.67}$$

**Demonstraţia** decurge din aplicarea principiului obiectivităţii P3.( formula (8) din Teorema 1.) pe istoria $\mathbf{F}^t = \mathbf{I}^t$

$$\mathcal{F}_k(\mathbf{Q}^t(\cdot)) = \mathbf{Q}(t)\mathcal{F}_k(\mathbf{I}^t(\cdot))\mathbf{Q}^T(t).$$

Deci dacă, $k$ este configurație naturală, atunci membrul stâng din relația anterioară este nul, de unde rezultă (67). Reciproca este evidentă.

**Observația 8.** Existența unei configurații naturale pentru un material simplu este o *ipoteză constitutivă.* In cazul fluidelor (în sensul lui Noll) corpul menținut nedeformat într-o configurație a sa (deformată) suportă tensiuni caracterizate printr-un tensor sferic, deci *tensiuni de tip presiune hidrostatică.*

## 2.5 Corpuri izotrope

Vom începe prin a da o teoremă de caracterizare a transformărilor ortogonale care aparțin grupului de simetrie materială.

**Teorema 10.** Fie $\mathbf{Q}_0 \in Ort$. Atunci

$$\mathbf{Q}_0 \in g_k(\mathbf{X}) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{F}_k(\mathbf{Q}_0\mathbf{F}^t\mathbf{Q}_0^T) = \mathbf{Q}_0\mathcal{F}_k(\mathbf{F}^t)\mathbf{Q}_0^T, \tag{2.68}$$

pentru orice $\mathbf{F}^t$.

**Demonstrație.** Fie $\mathbf{F}(\tau) \in Invlin$. Deoarece $\mathbf{Q}_0 \in g_k(\mathbf{X})$ rezultă că $\mathbf{Q}_0^T \in g_k(\mathbf{X})$. Din (54) cu istoria descrisă prin $\mathbf{Q}_0\mathbf{F}(\tau)$ avem

$$\mathcal{F}_k((\mathbf{Q}_0\mathbf{F}^t)\mathbf{Q}_0^T) = \mathcal{F}_k(\mathbf{Q}_0\mathbf{F}^t). \tag{2.69}$$

Din condiția necesară și suficientă ca $\mathcal{F}_k$ să satisfacă principiul obiectivității ((8) din Teorema 1. , paragraful 2.2 ),

$$\mathcal{F}(\mathbf{Q}^t\mathbf{F}^t) = \mathbf{Q}(t)\mathcal{F}(\mathbf{F}^t)\mathbf{Q}^T(t), \tag{2.70}$$

scrisă pentru $\mathbf{Q}(\tau) = \mathbf{Q}_0, \forall \tau \in R,$ rezultă că (68) are loc.

**Reciproc.** Presupunem că are loc restricția asupra operatorului constitutiv din (68). Folosim din nou proprietatea (70) de obiectivitate pentru $\mathbf{Q}(\tau) = \mathbf{Q}_0$. Astfel din (68) și (70) avem

$$\mathcal{F}((\mathbf{Q}_0\mathbf{F}^t)\mathbf{Q}_0^T) = \mathcal{F}(\mathbf{Q}_0\mathbf{F}^t), \tag{2.71}$$

din care renotând $\mathbf{Q}_0\mathbf{F}(\tau)$ cu $\bar{\mathbf{F}}(\tau)$ se obține că $\mathbf{Q}_0^T \in g_k(\mathbf{X})$. Deoarece $g_k(\mathbf{X})$ este subgrup deducem că $\mathbf{Q}_0 \in g_k(\mathbf{X})$.

**Teorema 11.** $\mathcal{B}$ este un *corp izotrop* dacă și numai dacă operatorul constitutiv este *izotrop*, deci

$$\mathcal{F}_k(\mathbf{Q}\mathbf{F}^t\mathbf{Q}^T) = \mathbf{Q}\mathcal{F}_k(\mathbf{F}^t)\mathbf{Q}^T, \quad \forall\, \mathbf{Q} \in Ort. \tag{2.72}$$

**Demonstrația** este imediată folosind Teorema 10. și faptul că $Ort \cap g_k(\mathbf{X}) = Ort$, conform definiției 9., formula (66), a corpului constituit dintr-un material izotrop.

**Teorema 12.** Dacă $\mathcal{B}$ este un *corp izotrop* atunci $\mathcal{B}$ este sau *solid izotrop* sau *fluid* în particula $X$.

**Demonstraţia** decurge din maximalitatea $Ort$ în $Unim$, şi din Definiţia 9. Deci conform definiţiei există $k \in C$ astfel încât

$$g_k(\mathbf{X}) \supset Ort \quad \Longrightarrow \quad g_k(\mathbf{X}) = Ort, \quad \text{sau} \quad g_k(\mathbf{X}) = Unim. \tag{2.73}$$

Dacă $g_k(\mathbf{X}) = Ort$ atunci $g_k(\mathbf{X}) \subset Ort$. Din Definiţia 7. rezultă că $\mathcal{B}$ este *solid* în particula considerată.

Dacă $g_k(\mathbf{X}) = Unim$ atunci din Definiţia 8. rezultă că $\mathcal{B}$ este *fluid* în particula considerată.

Vom da acum o teoremă de reprezentare pentru corpuri izotrope

**Teorema 13.** *Forma redusă II* pentru *corpuri izotrope* în particula $X$ este dată de reprezentarea constitutivă

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \mathcal{F}_1(\mathbf{C}_t^t(\cdot), \mathbf{B}(t)). \tag{2.74}$$

*Aceasta este izotropă în ambele argumente*, adică

$$\mathcal{F}_1(\mathbf{Q}\mathbf{C}_t^t(\cdot)\mathbf{Q}^T, \mathbf{Q}\mathbf{B}(t)\mathbf{Q}^T) = \mathbf{Q}\mathcal{F}_1(\mathbf{C}_t^t(\cdot), \mathbf{B}(t))\mathbf{Q}^T, \tag{2.75}$$

pentru orice $\mathbf{Q} \in Ort$, cu $\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T -$ tensorul lui Cauchy-Green la stânga şi $\mathbf{C}_t^t(\cdot)-$ istoria tensorului lui Cauchy-Green la dreapta în descriere relativă.

**Demonstraţia** are ca punct de plecare forma redusă II, dedusă în Teorema 3., formula (16). Fie procesul $\tau \longrightarrow \mathbf{F}(\tau) \in Invlin$ şi fie

$$\tilde{\mathbf{F}}(\tau) = \mathbf{F}(\tau)\mathbf{R}^T(t), \tag{2.76}$$

cu $\mathbf{R}(t) \in Ort$ din descompunerea polară a lui $\mathbf{F}(t)$. Aplicând teorema de descopunere polară şi unicitatea descompunerilor din (76) avem

$$\tilde{\mathbf{R}}(\tau) = \mathbf{R}(\tau)\mathbf{R}^T(t), \quad \tilde{\mathbf{U}}(\tau) = \mathbf{R}(t)\mathbf{U}(\tau)\mathbf{R}^T(t) \tag{2.77}$$

Conform formulelor din (1.49) , $(1.52)_{ii}$, (77) obţinem că

$$\begin{aligned} &\tilde{\mathbf{C}}(t) = \mathbf{R}(t)\mathbf{C}(t)\mathbf{R}^T(t), \\ &\tilde{\mathbf{C}}_t(\tau) = \mathbf{C}_t(\tau) \quad \text{pentru că} \quad \tilde{\mathbf{F}}_t(\tau) = \mathbf{F}_t(\tau). \end{aligned} \tag{2.78}$$

Din (16) avem, pe de altă parte

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \mathcal{F}(\mathbf{F}^t(\cdot)) = \mathbf{R}(t)\mathcal{F}_1((\mathbf{C}_t^t(\cdot))^{\mathbf{R}}, \mathbf{C}(t))\mathbf{R}^T(t). \tag{2.79}$$

Corpul fiind izotrop $\mathbf{R}^T(t)$ este în $g_k(\mathbf{X})$, timpul fiind fixat. Deci

$$\mathcal{F}(\mathbf{F}^t(\cdot)) = \mathcal{F}(\tilde{\mathbf{F}}^t(\cdot)) = \tilde{\mathbf{R}}(t)\mathcal{F}_1((\mathbf{C}_t^t(\cdot))^{\tilde{\mathbf{R}}}, \tilde{\mathbf{C}}(t))\tilde{\mathbf{R}}^T(t) = \mathcal{F}_1(\mathbf{C}_t^t(\cdot), \mathbf{B}(t)). \tag{2.80}$$

Am folosit (79) cu (77) şi (78). Astfel am arătat că reprezentarea constitutivă este de forma (74).

Rămâne să mai demonstrăm izotropia operatorului constitutiv în raport cu ambele argumente. Pentru aceasta considerăm $\mathbf{F}(\tau)$ pntru orice $\tau \in R$ şi fie

$$\tilde{\mathbf{F}}(\tau) = \mathbf{Q}\mathbf{F}(\tau)\mathbf{Q}^T, \tag{2.81}$$

cu $\mathbf{Q} \in Ort$. Folosim formulele $(1.52)_{ii}$, (1.49), (1.31) şi deducem că

$$\begin{aligned} &\tilde{\mathbf{F}}_t(\tau) = \mathbf{Q}\mathbf{F}_t(\tau)\mathbf{Q}^T, \quad \tilde{\mathbf{C}}_t(\tau) = \mathbf{Q}\mathbf{C}_t(\tau)\mathbf{Q}^T, \\ &\tilde{\mathbf{B}}(\tau) = \mathbf{Q}\mathbf{B}(\tau)\mathbf{Q}^T. \end{aligned} \tag{2.82}$$

Din reprezentarea constitutivă (74) pentru istoria procesului $\tilde{\mathbf{F}}(\tau)$ se obţine

$$\mathcal{F}(\tilde{\mathbf{F}}^t(\cdot)) = \mathcal{F}_1(\tilde{\mathbf{C}}_t^t(\cdot), \tilde{\mathbf{B}}(t)) = \mathcal{F}_1(\mathbf{Q}\mathbf{C}_t^t(\cdot)\mathbf{Q}^T, \mathbf{Q}\mathbf{B}(t)\mathbf{Q}^T), \tag{2.83}$$

Din (72) rezultă că

$$\mathcal{F}(\tilde{\mathbf{F}}^t(\cdot)) = \mathcal{F}(\mathbf{Q}\mathbf{F}^t(\cdot)\mathbf{Q}^T) = \mathbf{Q}\mathcal{F}(\mathbf{F}^t(\cdot))\mathbf{Q}^T \tag{2.84}$$

Dacă ţinem seama de modul în care este conţinută dependenţa de istoria procesului de deformare în reprezentarea constitutivă (74), din (84) cu (83) şi (80) deducem condiţia de izotropie din (75).

**Reciproc**. Dacă un corp admite o reprezentare constitutivă de forma (74), cu proprietatea (75), atunci el este izotrop.

## 2.6 Fluide

### 2.6.1 Fluide în clasa materialelor simple

In acest paragraf ne ocupăm de reprezentări constitutive pentru corpul $\mathcal{B}$ constituit în particula $X$ dintr-un *material simplu*, caracterizat prin (7)

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \mathcal{F}_k(\mathbf{F}_k^t(\mathbf{X}, \cdot); \mathbf{X}), \tag{2.85}$$

în raport cu $k$, o configuraţie de referinţă fixată, care are proprietatea că grupul său de simetrie $g_k(\mathbf{X}) = Unim$. Deci conform definiţiei 8. avem în vedere un corp fluid.

Vom demonstra teorema datorată lui Noll

**Teorema fundamentală asupra fluidelor.** Orice corp $\mathcal{B}$ constituit dintr-un fluid în particula $X$ are o ecuaţie constitutivă de forma

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = -p(\rho)\mathbf{I} + \mathcal{R}(\mathbf{C}_t^t(\cdot), \rho), \tag{2.86}$$

cu proprietăţile

$$
\begin{aligned}
&a) \quad \mathcal{R}(\mathbf{Q}\mathbf{C}_t^t(\cdot)\mathbf{Q}^T,\rho) = \mathbf{Q}\mathcal{R}(\mathbf{C}_t^t(\cdot),\rho)\mathbf{Q}^T, \quad \forall\, \mathbf{Q} \in Ort,\\
&b) \quad \mathcal{R}(\mathbf{I}^t(\cdot),\rho) = 0,
\end{aligned}
\tag{2.87}
$$

unde $\mathbf{I}^t(s) \equiv \mathbf{I}$.

Reciproc, dacă un corp admite o reprezentare constitutivă dată prin (86) cu proprietăţile (87) atunci el este fluid.

**Demonstraţie.** Conform definiţiei $g_k(\mathbf{X}) = Unim \supset Ort$, deci este în particular izotrop. Prin urmare putem utiliza teorema de caracterizare a corpurilor izotrope şi să considerăm reprezentarea constitutivă dată prin Teorema 13.

$$
\mathbf{T}(\mathbf{x},t) = \mathcal{F}_1(\mathbf{C}_t^t(\cdot),\mathbf{B}(t)) \equiv \mathcal{F}(\mathbf{F}^t(\cdot)),
\tag{2.88}
$$

cu operatorul constitutiv *izotrop în ambele argumente.*

Vom demonstra că dependenţa de $\mathbf{B}(t)$ se transformă în dependenţă de $\rho$, ca o consecinţă a faptului că grupul de simetrie este $Unim$.

Considerăm $\mathbf{F}(\tau)$ , pentru orice $\tau \in R$ fixat şi definim

$$
\tilde{\mathbf{F}}(\tau) = \mathbf{F}(\tau)\mathbf{H} \quad \Longrightarrow \quad \tilde{\mathbf{B}}(t) = \mathbf{F}(t)\mathbf{H}\mathbf{H}^T\mathbf{F}^T(t).
\tag{2.89}
$$

Alegem transformarea $\mathbf{H} = \alpha\mathbf{F}^{-1}(t)$ astfel încât $\mathbf{H} \in Unim$. Deci $\alpha^3 = |\det \mathbf{F}(t)|$, sau $\alpha^3 = \dfrac{\rho_0}{\rho}$. Cu această valoare avem

$$
\mathbf{H} = \Big(\frac{\rho_0}{\rho}\Big)^{1/3}\mathbf{F}^{-1}(t) \in Unim.
\tag{2.90}
$$

Din (89) se obţine

$$
\begin{aligned}
&\tilde{\mathbf{F}}_t(\tau) = \mathbf{F}_t(\tau), \quad \tilde{\mathbf{C}}_t(\tau) = \mathbf{C}_t(\tau),\\
&\tilde{\mathbf{F}}(t) = \Big(\frac{\rho_0}{\rho}\Big)^{1/3}\mathbf{I}, \quad \tilde{\mathbf{B}}(t) = \Big(\frac{\rho_0}{\rho}\Big)^{2/3}\mathbf{I} = (\det \mathbf{B}(t))^{1/3}\mathbf{I}.
\end{aligned}
\tag{2.91}
$$

Aplicăm Definiţia 8., a fluidelor şi ţinem seama că transformarea construită în (90) este o transformare de simetrie materială. Din (88) rezultă

$$
\mathcal{F}(\mathbf{F}^t(\cdot)) = \mathcal{F}_1(\mathbf{C}_t^t(\cdot),\mathbf{B}(t)) = \mathcal{F}(\tilde{\mathbf{F}}^t(\cdot)) = \mathcal{F}_1(\mathbf{C}_t^t(\cdot),(\det \mathbf{B}(t))^{1/3}\mathbf{I}),
\tag{2.92}
$$

dacă se utilizează (91). Această relaţie arată că valoarea curentă a tensiunii depinde de $\mathbf{B}$ numai prin valoarea determinatului său, care este dependent de densitate.

In continuare introducem operatorul

$$
\mathcal{R}(\mathbf{C}_t^t(\cdot),\rho) = \mathcal{F}_1(\mathbf{C}_t^t(\cdot),(\det \mathbf{B}(t))^{1/3}\mathbf{I}) - \mathbf{T}_0,
\tag{2.93}
$$

unde $\mathbf{T}_0 = \mathcal{F}_1(\mathbf{I}^t(\cdot), (\det \mathbf{B}(t))^{1/3}\mathbf{I})$. Atunci din (93) deducem că

$$\begin{aligned}\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) &= (\mathcal{F}_1(\mathbf{C}_t^t(\cdot), (\det \mathbf{B}(t))^{1/3}\mathbf{I}) - \mathbf{T}_0) + \mathbf{T}_0 = \\ &= \mathcal{R}(\mathbf{C}_t^t(\cdot), \rho) + \mathbf{T}_0.\end{aligned} \tag{2.94}$$

Evident că $\mathcal{R}(\mathbf{I}^t(\cdot), \rho) = 0$. Deci am demonstrat proprietatea b).

Folosim acum proprietatea de izotropie a operatorului $\mathcal{F}_1$, din (88), în raport cu ambele argumente, care prin (92) devine

$$\mathcal{F}_1(\mathbf{Q}\mathbf{C}_t^t(\cdot)\mathbf{Q}^T, \mathbf{Q}(\det \mathbf{B}(t))^{1/3}\mathbf{I}\mathbf{Q}^T) = \mathbf{Q}\mathcal{F}_1(\mathbf{C}_t^t(\cdot), (\det \mathbf{B}(t))^{1/3}\mathbf{I})\mathbf{Q}^T, \tag{2.95}$$

pentru orice $\mathbf{Q} \in Ort$. (95), prin particularizarea istoriei tensorilor lui Cauchy-Green în descriere relativă $\mathbf{C}_t^t(\cdot) = \mathbf{I}^t(\cdot)$, conduce la proprietatea

$$\mathbf{T}_0 = \mathbf{Q}\mathbf{T}_0\mathbf{Q}^T, \quad \forall\, \mathbf{Q} \in Ort \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{T}_0 = -p(\rho)\mathbf{I}. \tag{2.96}$$

Ultima parte a formulei (96) este o consecinţă a faptului că un *tensor simetric* permută cu orice transformare ortogonală dacă şi numai dacă este un *tensor sferic.*

Din (95) cu (96) şi definiţia operatorului $\mathcal{R}$ din (93) se obţine şi proprietatea a) de izotropie.

**Reciproc.** Să demonstrăm că dacă un corp este caracterizat în particula X printr - o reprezentare constitutivă (86), (87) , atunci $g_k(\mathbf{X}) = Unim$, ceea ce înseamnă că $\mathcal{F}(\mathbf{F}^t\mathbf{H}) = \mathcal{F}(\mathbf{F}^t)$, pentru orice $\mathbf{H} \in Unim$. Fie pentru aceasta, $\tilde{\mathbf{F}}(\tau) = \mathbf{F}(\tau)\mathbf{H}$, atunci $\tilde{\rho} = \rho$, $\tilde{\mathbf{F}}_t(\tau) = \mathbf{F}_t(\tau)$, $\tilde{\mathbf{C}}_t(\tau) = \mathbf{C}_t(\tau)$. Deci tensorii de deformaţie menţionaţi şi densitatea curentă rămân invarianţi la transformarea $\mathbf{H}$, de unde decurge afirmaţia .

**Observaţia 9.** In teorema de caracterizare a lui Noll asupra fluidelor intervine *numai configuraţia actuală* de referinţă, în raport cu care se determină tensorii lui Cauchy-Green la dreapta în descrierea relativă şi densitatea. De aici decurge afirmaţia că *descrierea actuală* este *proprie fluidelor.* Familiar vorbind ele *îşi uită trecutul*, adică configuraţia iniţială de referinţă. In cazul general al materialelor simple am remarcat (vezi Observaţia 4. din paragraful 2.2) prezenţa a două configuraţii de referinţă.

Vom prezenta câteva proprietăţi ale corpurilor care sunt descrise matematic prin reprezentări constitutive de forma (86). Deducem astfel semnificaţia mecanică conţinută în afirmaţiile anterioare, care justifică atribuirea numelui de fluide acestor materiale.

**Propozitia 4.** Fie $\mathcal{B}$ constituit dintr-un fluid în particula $X$ şi $k$ o configurţie nedistorsionată de fluid , fixată prin definiţie.

Atunci orice configuraţie $\bar{k}$ obţinută din configuraţia $k$ printr-o deformaţie $\lambda$ care *păstrează densitatea* este *material izomorfă* cu $k$.

**Demonstraţie.** $\lambda = \bar{k} \circ k^{-1}$ păstrează densitatea dacă şi numai dacă $|\det\mathbf{P}| = 1$ , cu $\mathbf{P} \equiv \nabla\lambda(k(X))$, ca o consecinţă a formulei (1.2)

( $\rho_k = \mid \det\nabla\lambda(k(X)) \mid \rho_{\bar{k}}$). Deci au loc formulele din (49)

$$\begin{aligned} &\rho_k(\mathbf{X}) = \rho_{\bar{k}}(\bar{\mathbf{X}}) \quad \text{cu} \quad \mathbf{X} = k(X),\ \bar{\mathbf{X}} = \bar{k}(X), \\ &\mathcal{F}_k(\mathbf{F}^t(\cdot);\mathbf{X}) = \mathcal{F}_k(\mathbf{F}^t(\cdot)\mathbf{P}) = \mathcal{F}_{\bar{k}}(\mathbf{F}^t(\cdot);\bar{\mathbf{X}}). \end{aligned} \tag{2.97}$$

Cel de-al doilea rând de egalităţi se obţine ca o consecinţă a faptului că $\mathbf{P} \in g_k(\mathbf{X})$, conform definiţiei 8. a fluidelor şi a formulei de legătură între operatorii constitutivi, la schimbarea configuraţiei de referinţă ( formula (45)).

**Propoziţia 5.** Un fluid *menţinut nedeformat* relativ la o configuraţie deformată , suportă o tensiune care corespunde unei presiuni hidrostatice ( fluidul *nu poate suporta tensiuni tangenţiale*).

**Demonstraţia** rezultă din interpretarea condiţiei b) din proprietăţile operatorului constitutiv din (87). Cum

$$\mathbf{C}_t^t(s) = \mathbf{I}^t(s) \equiv \mathbf{I}, \quad \forall s \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{F}_t(\tau) \equiv \mathbf{Q}_t(\tau) \in Ort, \tag{2.98}$$

cu $\tau = t - s \leq t$. Ultima relaţie din (98) se rescrie $\mathbf{F}(\tau) \equiv \mathbf{Q}_t(\tau)\mathbf{F}(t)$, de unde prin descompunerea polară a gradientului de deformaţie şi utilizarea unicităţii descompunerii rezultă

$$\mathbf{U}(\tau) = \mathbf{U}(t), \quad \mathbf{R}(\tau) = \mathbf{Q}_t(\tau)\mathbf{R}(t), \quad \tau \leq t. \tag{2.99}$$

Din (99) deducem că la orice moment de timp tensorul lungirilor este menţinut constant, corpul fiind supus local la o rotaţie, deci nu are loc o deformaţie propriu-zisă în raport cu o configuraţie fixată.

Evident dacă starea de tensiune este dată prin $\mathbf{T}(\mathbf{x},t) = -p(\rho)\mathbf{I}$ vectorul de tensiune exercitat pe un element de suprafaţă de normală $\mathbf{n}(\mathbf{x}) \in \mathcal{V}$, $\mathbf{T}(\mathbf{x},t)\mathbf{n}(\mathbf{x}) \equiv -p(\mathbf{x})\mathbf{n}(\mathbf{x})$ este pe direcţia normalei, neexistând componente tangenţiale.

Funcţia scalară $p(\rho)$ se numeşte *presiune hidrostatică.*

### 2.6.2 Clasa fluidelor vâscoase

**Definiţia 12.** Un corp $\mathcal{B}$ este un *fluid de tip vâscos*, în particula $X$, dacă admite o reprezentare constitutivă de forma

$$\mathbf{T}(\mathbf{x},t) = h(\mathbf{L}(\mathbf{x},t), \rho(\mathbf{x},t), \mathbf{v}(\mathbf{x},t), \mathbf{x}, \mathbf{X}, t), \tag{2.100}$$

pentru o mişcare dată, unde

$$\begin{aligned} &\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X},t), \quad \mathbf{v}(\mathbf{x},t) = \frac{\partial\chi}{\partial t}(\mathbf{X},t) \mid_{\mathbf{X}=\chi^{-1}(\mathbf{x},t)}, \\ &\mathbf{L}(\mathbf{x},t) = \nabla\mathbf{v}(\mathbf{x},t), \quad \rho(\mathbf{x},t) = \frac{\rho_0(\mathbf{X})}{\mid \det \mathbf{F}(\mathbf{X},t) \mid}. \end{aligned} \tag{2.101}$$

**Teorema 14.** Reprezentarea constitutivă a fluidelor de tip vâscos (100) satisface principiul obiectivităţii dacă şi numai dacă este de forma

$$\mathbf{T}(\mathbf{x},t) = \bar{h}(\mathbf{D},\rho,\mathbf{X}), \tag{2.102}$$

cu proprietatea $\bar{h}(\mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^T,\rho,\mathbf{X}) = \mathbf{Q}\bar{h}(\mathbf{D},\rho,\mathbf{X})\mathbf{Q}^T$. Aceste condiţii sunt echivalente cu considerarea *clasei fluidelor de tip Reiner - Rivlin*

$$\mathbf{T}(\mathbf{x},t) = \varphi_0(j_{\mathbf{D}},\rho)\mathbf{I} + \varphi_1(j_{\mathbf{D}},\rho)\mathbf{D} + \varphi_2(j_{\mathbf{D}},\rho)\mathbf{D}^2, \tag{2.103}$$

pentru care setul de invarianţi este definit prin

$$j_{\mathbf{D}} = \{\operatorname{tr}\mathbf{D}, \operatorname{tr}\mathbf{D}^2, \operatorname{tr}\mathbf{D}^3\}. \tag{2.104}$$

**Demonstraţie.** Presupunem că elementele perechii $(\chi,\mathbf{T})-$ mişcarea şi tensiunea Cauchy, sunt legate prin reprezentarea (100). Atunci din principiul obiectivităţii P3.( formula (8) din paragraful 2.2), rezultă restricţia asupra funcţiei constitutive de forma

$$\begin{aligned} &h(\mathbf{L}^*(\mathbf{x}^*,t^*),\rho^*(\mathbf{x}^*,t^*),\mathbf{v}^*(\mathbf{x}^*,t^*),\mathbf{x}^*,\mathbf{X},t^*) = \\ &\qquad = \mathbf{Q}(t)h(\mathbf{L}(\mathbf{x},t),\rho(\mathbf{x},t),\mathbf{v}(\mathbf{x},t),\mathbf{x},\mathbf{X},t)\mathbf{Q}^T(t), \end{aligned} \tag{2.105}$$

pentru orice $\mathbf{Q}(\tau) \in Ort$, $\mathbf{x}_0^*(\tau) \in \mathcal{E}$ $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{E}$, $a \in R$, $\tau \in R$, elemente care caracterizează procesul dinamic $(\chi^*,\mathbf{T}^*)$ echivalent , conform cu (1.62), cu procesul $(\chi,\mathbf{T})$.

Relaţiile de legătură între câmpurile corespunzătoare perechii de mişcări echivalente $(\chi,\chi^*)$ sunt calculate conform definiţiilor acestora din (101)

$$\begin{aligned} \rho^*(\mathbf{x}^*,t^*) &= \rho(\mathbf{x},t), \\ \mathbf{v}^*(\mathbf{x}^*,t^*) &= \dot{\mathbf{x}}_0^*(t) + \mathbf{Q}(t)\mathbf{v}(t) + \dot{\mathbf{Q}}(t)\mathbf{Q}^T(t)(\mathbf{x}-\mathbf{x}_o), \\ \mathbf{L}^*(\mathbf{x}^*,t^*) &= \mathbf{Q}(t)\mathbf{L}(\mathbf{x},t)\mathbf{Q}^T(t) + \dot{\mathbf{Q}}(t)\mathbf{Q}^T(t), \quad \forall\, \mathbf{Q}(t) \in Ort. \end{aligned} \tag{2.106}$$

Din (105) şi (106) rezultă restricţia

$$\begin{aligned} &h(\mathbf{Q}\mathbf{L}\mathbf{Q}^T + \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T,\rho,\dot{\mathbf{x}}_0^* + \mathbf{Q}\mathbf{v} + \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T(\mathbf{x}-\mathbf{x}_o),\mathbf{x}_0^* + \mathbf{Q}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0),\mathbf{X},t+a) = \\ &\qquad = \mathbf{Q}h(\mathbf{L},\rho,\mathbf{v},\mathbf{x},\mathbf{X},t)\mathbf{Q}^T. \end{aligned} \tag{2.107}$$

Relaţia este scrisă în particula $\mathbf{X}$ şi la momentul $t$, fixate. Alegem următoarele valori particulare

$$t+a=0,\ \mathbf{Q}=\mathbf{I},\ \dot{\mathbf{Q}}=\mathbf{0},\ \mathbf{x}_0=\mathbf{0},\ \mathbf{x}_0^*=-\mathbf{x},\ \dot{\mathbf{x}}_0^*=-\mathbf{v}, \tag{2.108}$$

care introduse în (107) conduc la

$$h(\mathbf{L}(\mathbf{x},t),\rho(\mathbf{x},t),\mathbf{v}(\mathbf{x},t),\mathbf{x},\mathbf{X},t) = \\ = h(\mathbf{L}(\mathbf{x},t),\rho(\mathbf{x},t),\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{X},0) \equiv \bar{h}(\mathbf{L},\rho(\mathbf{x},t),\mathbf{X}). \tag{2.109}$$

In noua funcţie, $\bar{h}$, restricţia (105) impusă de principiul obiectivităţii devine

$$\bar{h}(\mathbf{QLQ}^T + \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T,\rho,\mathbf{X}) = \mathbf{Q}\bar{h}(\mathbf{L},\rho,\mathbf{X})\mathbf{Q}^T, \tag{2.110}$$

pentru orice $\tau \to \mathbf{Q}(\tau) \in Ort$. Deoarece $\dot{\mathbf{Q}}(t)\mathbf{Q}^T(t) \in Asim$, pentru orice $t \in R$ alegem, pentru $t$ fixat, valorile

$$\mathbf{Q}(t) = \mathbf{I}, \quad \dot{\mathbf{Q}}(t) = -\mathbf{W}(\mathbf{x},t) \equiv -\{\mathbf{L}(\mathbf{x},t)\}^a, \tag{2.111}$$

care introduse în (110), împreună cu reprezentarea $\mathbf{L} = \mathbf{D} + \mathbf{W}$, ne conduc la demostrarea faptului că

$$\bar{h}(\mathbf{L},\rho,\mathbf{X}) \equiv \bar{h}(\mathbf{D},\rho,\mathbf{X}), \tag{2.112}$$

cu proprietatea $\bar{h}(\mathbf{QDQ}^T,\rho,\mathbf{X}) = \mathbf{Q}\bar{h}(\mathbf{D},\rho,\mathbf{X})\mathbf{Q}^T$.

A doua relaţie din (112) provine din relaţia (110).

Am arătat deci că aplicaţia $\mathbf{D} \longrightarrow \bar{h}(\mathbf{D},\rho) \in Sim$ este izotropă. Aplicăm teorema lui Cauchy (vezi anexa A2 ), de reprezentare a funcţiilor izotrope cu valori tensori simetrici, de variabilă tensor simetric şi rezultă reprezentarea (103).

**Observaţia 10.** Existenţa unui câmp ortogonal, $\tau \to \mathbf{Q}(\tau) \in Ort$, cu proprietatea (111) pentru $\tau = t$, fixat rezultă din următoarea propoziţie

**Propoziţia 6.** 1) Fie $\mathbf{W} \in Asim$ atunci există $\mathbf{Q}(\tau) \in Ort$, $\forall \tau \in R$ astfel încât $\mathbf{Q}(t) = \mathbf{I}$, $\dot{\mathbf{Q}}(t) = \mathbf{W}$.

2) Câmpul ortogonal poate fi construit cu soluţia problemei Cauchy

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{WX}(t), \quad \mathbf{X}(0) = \mathbf{I}, \tag{2.113}$$

unde $\mathbf{X}(t) \in Lin$ , pentru orice $t \in R$.

**Demonstraţia** se bazează pe existenţă soluţiei sistemului diferenţial cu coeficienţi constanţi, reprezentată sub forma $\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}(0)\,exp(\mathbf{W}t)$. Pentru a demonstra că soluţia defineşte un câmp ortogonal asociem problema Cauchy pentru $\mathbf{Z}(t) = \mathbf{X}^T(t)\mathbf{X}(t)$.

**Observaţia 11.** Clasa fluidelor Reiner - Rivlin descrie *fluide compresibile*, datorită prezenţei *densităţii curente* sub formă de parametru. O subclasă remarcabilă a fluidelor Reiner - Rivlin o constituie *fluidele liniar vâscoase compresibile.*

**Definiţia 13.** Un corp este constituit într-o particulă a sa dintr-un *fluid liniar vâscos, compresibil*, dacă admite o reprezentare constitutivă , în clasa fluidelor Reiner - Rivlin, determinată de funcţia $\mathbf{D} \longrightarrow \bar{h}(\mathbf{D},\rho) \in Sim$ *izotropă şi afină.*

Folosim anexa A2 pentru reprezentarea termenului liniar din ecuaţia constitutivă de mai sus. Rezultă reprezentarea constitutivă a **fluidele liniar vâscoase compresibile** , sau **fluidele Navier - Stokes compresibile.**

$$\mathbf{T}(\mathbf{x},t) = (-p(\rho) + \lambda(\rho)\mathrm{tr}\,\mathbf{D})\mathbf{I} + 2\mu(\rho)\mathbf{D}. \tag{2.114}$$

**Observaţia 12.** Dacă impunem *legătura de incompresibilitate* atunci în baza principiului determinismului modificat pentru materiale simple cu legături (vezi Teorema 5., formula (2.42)) rezultă următoarele reprezentări constitutive

Clasa **fluidelor Reiner- Rivlin incompresibile**

$$\mathbf{T}(\mathbf{x},t) = -p(\mathbf{x},t)\mathbf{I} + \bar{\varphi}_0(j_{\mathbf{D}})\mathbf{I} + \bar{\varphi}_1(j_{\mathbf{D}})\mathbf{D} + \bar{\varphi}_2(j_{\mathbf{D}})\mathbf{D}^2, \tag{2.115}$$

pentru $\{\mathbf{D} \in Sim \mid \mathrm{tr}\,\mathbf{D} = 0\}$.

Clasa **fluidelor liniar vâscoase incompresibile**, numite şi **fluide newtoniene** sau **fluidele Navier - Stokes incompresibile**, este definită prin

$$\mathbf{T}(\mathbf{x},t) = -p(\mathbf{x},t)\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D}, \tag{2.116}$$

pentru orice $\mathbf{D} \in Sim$, cu $\mathrm{tr}\,\mathbf{D} = 0$.

### Problema cu date la limită pentru fluide vâscoase liniare

Fie $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ domeniu mărginit , cu $n = 2$ sau $n = 3$. Formulăm problema spaţială, deci pentru $n = 3$.

Să se determine câmpul *vitezelor* şi câmpul *presiunii*

$$\begin{aligned} &\mathbf{v} : \Omega \times [0, t_1) \longrightarrow \mathbf{R}^3 \\ &\mathbf{p} : \Omega \times [0, t_1) \longrightarrow R, \end{aligned} \tag{2.117}$$

care verifică în $\Omega$, pentru orice $t \in [0, t_1)$ ecuaţiile de mişcare

$$\mathrm{div}\,\mathbf{T}(\mathbf{x},t) + \rho_0\mathbf{b}(\mathbf{x},t) = \rho_0\mathbf{a}(\mathbf{x},t), \tag{2.118}$$

reprezentarea constitutivă pentru fluide liniar vâscoase incompresibile

$$\mathbf{T}(\mathbf{x},t) = -p(\mathbf{x},t)\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D}(\mathbf{x},t), \tag{2.119}$$

relaţiile geometrice

$$\mathbf{D}(\mathbf{x},t) = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{v}(\mathbf{x},t) + \nabla^T\mathbf{v}(\mathbf{x},t)), \tag{2.120}$$

condiţia de incompresibilitate

$$\operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x},t) = 0, \tag{2.121}$$

condiţiile pe frontiera domeniului ocupat de fluid ( $\partial\Omega$ )

$$\mathbf{v}(\mathbf{x},t)\,|_{\Gamma_1} = 0, \quad \mathbf{T}(\mathbf{x},t)\mathbf{n}(\mathbf{x})\,|_{\Gamma_2} = \mathbf{f}(\mathbf{x},t),$$

unde $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, şi condiţiile iniţiale

$$\mathbf{v}(\mathbf{x},0) = \mathbf{V}_0(\mathbf{x}), \quad \forall\, \mathbf{x} \in \Omega. \tag{2.122}$$

Dacă se elimină câmpul de tensiuni rezultă **ecuaţiile Navier - Stokes** pentru fluide vâscoase incompresibile

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla\mathbf{v}[\mathbf{v}] - \nu\,\Delta\mathbf{v} = -\nabla\, p + \mathbf{b} \\ &\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \end{aligned}$$

unde $\nu \equiv \dfrac{\mu}{\rho_o}$ este aşa zisa *vâscozitate cinematică* a materialului. Aici $\Delta$ reprezintă operatorul Laplace.

Intr-un reper inerţial, reprezentarea în baza carteziană a ecuaţiilor Navier - Stokes pentru *determinarea câmpului vitezelor şi a câmpului presiunii* este obţinută sub forma

$$\begin{aligned} &\frac{\partial v^i}{\partial t} + v^k \frac{\partial v^i}{\partial x^k} - \nu\,\Delta v^i = -\frac{\partial p}{\partial x^i} + b^i \\ &\frac{\partial v^i}{\partial x^i} = 0. \end{aligned}$$

Precizarea cadrului funcţional este necesară în formularea problemelor cu date pe frontieră (şi eventual cu date iniţiale) ca şi pentru demonstrarea teoremelor de unicitate şi existenţă. Există o bogată literatură în care sunt studiate problemele matematice privind existenţa, unicitatea şi regularitatea soluţiilor problemei prezentate, sau pentru diferitele liniarizări posibile ale modelului. De asemenea există rezultate în care domeniul $\Omega$ ocupat de fluid este nemărginit, sau de o formă variabilă, sau rezultate în care există condiţii diferite de condiţia de aderenţă, de exemplu există porţiuni care sunt permeabile ( vezi spre exemplu Serrin [1955], Iacob [1959], Lions [1969], Temam [1979], Ladijenskaia [1970], Dragoş [1983]).

## 2.7. Corpuri solide

### 2.7.1 Corpuri solide şi izotrope

Vom demonstra acum **teorema de caracterizare a corpurilor solide şi izotrope** într-o particulă $X \in \mathcal{B}$.

**Teorema 15.** Dacă, $k$ este o configuraţie nedistorsionată de *corp solid* şi $\bar{k}$ este o configuraţie nedistorsionată de *corp izotrop* atunci

$$g_k(\mathbf{X}) = g_{\bar{k}}(\bar{\mathbf{X}}) = Ort,$$

unde $\mathbf{X} = k(X)$, $\bar{\mathbf{X}} = \bar{k}(X)$.

**Demonstraţie**. Din Definiţia 7. a corpului solid ( în particula $X$ ) rezultă că există $k \in \mathcal{C}$ astfel încât $g_k \subset Ort$. Corpul fiind în acelaşi timp şi izotrop în particula considerată, există $\bar{k} \in \mathcal{C}$ astfel încât $g_{\bar{k}} \supset Ort$. Din teorema de maximalitate a Ort în Unim (vezi A3 ) obţinem că

$$1) \quad g_{\bar{k}} = Ort \quad \text{sau} \quad 2) \quad g_{\bar{k}} = Unim.$$

Din Teorema 9. formula (55), aplicată pentru cele două configuraţii de referinţă $k$, $\bar{k}$ obţinem legătura dintre grupurile de simetrie

$$g_{\bar{k}} = \mathbf{P}_0 g_k \mathbf{P}_0^{-1} \quad \text{cu} \quad \mathbf{P}_0 = \nabla(\bar{k} \circ k^{-1})(\mathbf{X}). \tag{2.123}$$

Presupunem că are loc 2) $g_{\bar{k}} = Unim$. Din (123) $g_k = Unim$, ceea ce cotrazice ipoteza $g_k \subset Ort$. Rămâne posibil cazul

$$g_{\bar{k}} = Ort \quad \text{şi} \quad g_k \subset Ort. \tag{2.124}$$

Folosim relaţiile (123) şi (124) din care rezultă

$$Ort\, \mathbf{P}_0 = \mathbf{P}_0 g_k, \quad \text{cu} \quad g_k \subset Ort.$$

Deci pentru orice $\mathbf{Q} \in g_k$ există $\bar{\mathbf{Q}} \in Ort$ (şi reciproc ) astfel încât

$$\begin{aligned} &\bar{\mathbf{Q}}\mathbf{P}_0 = \mathbf{P}_0\mathbf{Q} \quad \text{şi} \quad \mathbf{P}_0 = \mathbf{R}_0\mathbf{U}_0, \quad \mathbf{R}_0 \in Ort, \mathbf{U}_0 \in Psim \quad \Longleftrightarrow \\ &\bar{\mathbf{Q}}\mathbf{R}_0\mathbf{U}_0 = (\mathbf{R}_0\mathbf{Q})\mathbf{Q}^T\mathbf{U}_0\mathbf{Q}. \end{aligned} \tag{2.125}$$

Mai sus am considerat descompunerea polară pentru $\mathbf{P}_0 \in Invlin$. Din (125), folosind unicitatea descompunerii polare, rezultă

$$\bar{\mathbf{Q}}\mathbf{R}_0 = \mathbf{R}_0\mathbf{Q}, \quad \mathbf{U}_0 = \mathbf{Q}^T\mathbf{U}_0\mathbf{Q}. \tag{2.126}$$

Prin urmare legătura dintre elementele $\bar{\mathbf{Q}} \in g_{\bar{k}} = Ort$ şi $\mathbf{Q} \in g_k$ există sub forma relaţiei $(126)_1$ sau într-o formă echivalentă

$$g_{\bar{k}} \equiv Ort = \mathbf{R}_0 g_k \mathbf{R}_0^T.$$

Astfel rezultă $g_k = Ort$, ceea ce trebuia demonstrat.

**Observaţia 13.** Din teorema demonstrată a rezultat că dacă corpul este solid şi izotrop, într-o particulă fixată, atunci operatorul constitutiv este izotrop.

In propoziţia care urmează se utilizează notaţiile introduse în Teorema 15.

**Propoziţia 7.** 1) Dacă $k$ şi $\bar{k}$ sunt două configuraţii de corp solid şi izotrop atunci $\mathbf{P}_0 = \alpha \mathbf{R}_0$, $\alpha \in R_+$.

**Demonstraţie.** In teorema 15. am arătat că $g_k = g_{\bar{k}} = Ort$ iar din (126) rezultă că, $\mathbf{Q}\mathbf{U}_0 = \mathbf{U}_0\mathbf{Q}$ pentru orice $\mathbf{Q} \in g_k = Ort$. Deci $\mathbf{U}_0$ permută cu orice transformare ortogonală. Deducem că $\mathbf{U}_0 = \alpha \mathbf{I}$, de unde rezultă afirmaţia din enunţ.

**Observaţia 14.** S-a demonstrat că *trecerea* de la o configuraţie nedistorsionată de corp solid şi izotrop la o altă configuraţie de corp solid şi izotrop se face printr-o deformaţie, care local reprezintă o *dilatare ( sau comprimare)* compusă cu o rotaţie.

Configuraţiile $k$ şi $\bar{k}$ sunt *material izomorfe* (vezi Definiţia 5.) dacă şi numai dacă $\alpha = 1$.

### 2.7.2 Corpuri elastice

Vom prezenta acum ecuaţiile constitutive care descriu comportamentul corpurilor constituite dintr-un material elastic , sau simplu al *corpurilor elastice*, privite ca o subclasă a materialelor simple. Pentru început ne plasăm în cazul deformaţiilor finite.

**Definiţia 14.** Numim *corp elastic*, corpul descris în particula $X$ printr-o reprezentare constitutivă

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = h_k(\mathbf{F}(\mathbf{X}, t); \mathbf{X}), \tag{2.127}$$

unde $h_k(\cdot, \mathbf{X}) : Invlin \longrightarrow Sim$.

**Observaţia 15.** Corpul elastic *este un material simplu*, deoarece depinde de istoria gradientului de deformaţie, numai prin valoarea *prezentă*, obţinută pentru $s = 0$ din istoria definită în (2).

In cazul corpului elastic operatorul constitutiv care descrie materialul simplu

$$\mathcal{F}_k(\mathbf{F}_k^t(\mathbf{X}, \cdot); \mathbf{X}) \equiv h_k(\mathbf{F}_k(\mathbf{X}, t); \mathbf{X}), \tag{2.128}$$

devine funcţie de valoarea curentă a gradientului de deformaţie. [2].

**Teorema 16.** Forma redusă a ecuaţiei constitutive pentru corpul elastic este

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{R}(t) h(\mathbf{U}(t)) \mathbf{R}^T(t), \tag{2.129}$$

[2]Nu vom mai specifica nici punctul material şi nici configuraţia de referinţă, dacă nu este necesar

cu $\mathbf{R}(t) \in Ort$, $\mathbf{U}(t) \in Psim$, din descompunerea polară a gradientului de deformaţie $\mathbf{F}(t)$.

**Demonstraţia** se obţine prin particularizare din forma redusă I. (vezi formula (11) ) sau direct din principiul obiectivităţii ( formula (8)) .

**Propoziţia 8.** Se consideră un corp elastic. Presupunem că $g_k$ este într-unul din cazurile posibile

$$a) \quad g_k = Unim \iff \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = -p(\rho)\mathbf{I}, \quad \rho = \frac{\rho_0}{|\det \mathbf{F}|}$$

$$b) \quad g_k = Ort \iff \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = h(\mathbf{V}) \text{ cu } h(\mathbf{Q}\mathbf{V}\mathbf{Q}^T) = \mathbf{Q}h(\mathbf{V})\mathbf{Q}^T \ \forall\, \mathbf{Q} \in Ort, \tag{2.130}$$

$$c) \quad g_k \subset Ort \iff \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{R}(t)h(\mathbf{U}(t))\mathbf{R}^T(t),$$

$$\text{cu } \mathbf{Q}h(\mathbf{U}(t))\mathbf{Q}^T = h(\mathbf{Q}\mathbf{U}(t)\mathbf{Q}^T) \ \forall \mathbf{Q} \in g_k.$$

**Demonstraţie.** b) Corpul elastic fiind izotrop conform Definiţiei 9., atunci din Teorema 10. rezultă că operatorul constitutiv este izotrop în argumentele sale, deci

$$h(\mathbf{Q}\mathbf{F}\mathbf{Q}^T) = \mathbf{Q}h(\mathbf{F})\mathbf{Q}^T \quad \forall\, \mathbf{Q} \in Ort. \tag{2.131}$$

Folosim forma redusă (129) a reprezentării constitutive, împreună cu izotropia funcţiei $h$. Obţinem

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{R}h(\mathbf{U})\mathbf{R}^T = h(\mathbf{R}\mathbf{U}\mathbf{R}^T) = h(\mathbf{V}),$$

utilizând (1.46), ceea ce trebuia demonstrat.

a) Dacă este fluid (conform Definiţiei 8., formula (65)), aşa cum am remarcat deja, corpul este izotrop (vezi Observaţia 13.) şi avem reprezentarea de la punctul b). Ţinem seama că $\mathbf{V} = (\mathbf{B})^{1/2}$ şi deducem o reprezentare de forma $\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \hat{h}(\mathbf{B})$.

In teorema lui Noll de caracterizare a fluidelor am demonstrat că dependenţă de $\mathbf{B}$ se transformă în dependenţa de $\rho$, sub forma

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \hat{h}((\det \mathbf{B}(t))^{1/3}\mathbf{I}), \quad \det \mathbf{B}(t) = (\frac{\rho_0}{\rho})^2.$$

Utilizând din nou proprietatea de izotropie a reprezentării constitutive scrise în relaţia anterioară , deducem că tensiunea este un tensor sferic. Deci avem reprezentarea constitutivă de forma menţionată.

c) Se obţine ca o consecinţă a Teoremei 10. , formula (68).

In cazul în care *corpul elastic este fluid*, caracterizat prin a) vom spune că avem un *fluid elastic*, evident *compresibil.* Această clasă constitutivă se mai numeşte clasa *fluidelor ideale.*

**Propoziţia 9.** Corpurile *elastice şi izotrope*, caracterizate prin (130) b), admit o reprezentare echivalentă, numită Mooney - Rivlin

$$\mathbf{T}(\mathbf{x},t) = \phi_0(j\mathbf{v})\mathbf{I} + \phi_1(j\mathbf{v})\mathbf{V} + \phi_2(j\mathbf{v})\mathbf{V}^2. \tag{2.132}$$

Aici $\mathbf{V} \in Psim$, reprezintă tensorul lungirilor la stânga din descompunerea polară pentru $\mathbf{F} = \mathbf{VR}$ (vezi formula (1.44)).

**Demonstraţia** este evidentă dacă se utilizează teorema lui Cauchy de reprezentare a funcţiilor izotrope, de argument tensor simetric cu valori tensori simetrici, demonstrată în A2.

**Teoria liniarizată a elasticităţii finite** pentru corpuri izotrope se dezvoltă în cadrul constitutiv

$$\mathbf{T}(\mathbf{x},t) = (a_0 + a_1 \mathrm{tr}\,\mathbf{V})\mathbf{I} + a_2\mathbf{V}, \tag{2.133}$$

cu $a_i-$ constante de material . Dacă configuraţia de referinţă este o configuraţie *naturală*, atunci din Propoziţia 3. ( formula (67) ) rezultă că pentru $\mathbf{V} = (\mathbf{F}\mathbf{F}^T)^{1/2} = \mathbf{I}$ tensiunea este nulă. Avem deci legătura $a_0 + 3a_1 + a_2 = 0$ între constantele elastice, care determină reprezentarea

$$\mathbf{T}(\mathbf{x},t) = a_1[\mathrm{tr}\,(\mathbf{V} - \mathbf{I})]\,\mathbf{I} + a_2(\mathbf{V} - \mathbf{I}), \tag{2.134}$$

cu două constante de material.

**Definiţia 15.** In cazul *elasticităţii liniare, izotrope*, cu *deformaţii infinitezimale* reprezentarea constitutivă este de forma ( ecuaţie constitutivă de tip Hooke cu tensiune iniţială )

$$\mathbf{T}(\mathbf{x},t) = (\lambda_0 + \lambda \mathrm{tr}\,\epsilon)\mathbf{I} + 2\mu\epsilon, \tag{2.135}$$

dacă există tensiuni iniţiale în configuraţia de referinţă. Această reprezentare se obţine prin procedeul de liniarizare din (133) sau (132), în ipoteza micilor deformaţii (vezi paragraful 1.6).

**Definiţia 16.** In cazul în care configuraţia de referinţă este *naturală*, reprezentarea constitutivă pentru *elasticitatea liniară , izotropă,* cu deformaţii *infinitezimale* este dată prin

$$\mathbf{T}(\mathbf{x},t) = \lambda \mathrm{tr}\,\epsilon\mathbf{I} + 2\mu\epsilon, \tag{2.136}$$

unde $\epsilon = \dfrac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + \nabla^T\mathbf{u})$. Aceasta corespunde alegerii $\lambda_0 = 0$ în reprezentarea (135).

In literatură, ecuaţia (136), este cunosută sub numele de *ecuaţia constitutivă a lui Hooke* .

Pe baza acestei reprezentări constitutive se construieşte teoria elasticităţii clasice, pentru corpuri izotrope, în cazul micilor deformaţii.

## Problema dinamică în elasticitatea liniară ( cazul deformaţiilor infinitezimale )

Fie $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ domeniu mărginit , cu $n = 2$ sau $n = 3$.

Să se determine câmpurile de *deplasări* şi de *tensiuni*

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &: \Omega \times [0, t_1) \longrightarrow \mathbf{R}^3, \\ \mathbf{T} &: \Omega \times [0, t_1) \longrightarrow Sim \equiv \mathbf{R}^6, \end{aligned} \tag{2.137}$$

care verifică în $\Omega$, şi pentru orice $t \in [0, t_1)$ ecuaţiile de mişcare

$$\operatorname{div} \mathbf{T}(\mathbf{X}, t) + \rho_0 \mathbf{b}(\mathbf{X}, t) = \rho_0 \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t), \tag{2.138}$$

reprezentarea constitutivă

$$\mathbf{T}(\mathbf{X}, t) = \mathcal{E}[\epsilon(\mathbf{X}, t)],$$

unde $\mathcal{E} : Sim \longrightarrow Sim$ este liniară, relaţiile geometrice

$$\epsilon(\mathbf{X}, t) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) + \nabla^T \mathbf{u}(\mathbf{X}, t)), \tag{2.139}$$

condiţiile pe frontiera domeniului

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) \mid_{\Gamma_1} &= \mathbf{g}(\mathbf{X}, t), \\ \mathbf{T}(\mathbf{X}, t)\mathbf{n}(\mathbf{x}) \mid_{\Gamma_2} &= \mathbf{f}(\mathbf{X}, t), \end{aligned} \tag{2.140}$$

unde $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, sunt presupuse fixe (prin condiţiile pe frontieră sunt prescrişi pe porţiuni complementare ale frontierei *vectorul de deplasare şi respectiv vectorul de tensiune*), condiţiile iniţiale

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{X}), \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\mathbf{X}, 0) = \dot{\mathbf{u}}_0(\mathbf{X}), \quad \forall\, \mathbf{X} \in \Omega. \tag{2.141}$$

In cazul liniar şi izotrop se înlocuieşte reprezentarea constitutivă cu ecuaţiile constitutive ale lui Hooke. Prin eliminarea tensiunilor rezultă *ecuaţiile de mişcare ale lui Lamé*, formulate în deplasări.

**Ecuaţiile de mişcare ale lui Lammé** : câmpul de deplasare $\mathbf{u}$ satisface ecuaţia cu derivate parţiale

$$(\lambda + \mu)\nabla(\operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{X}, t)) + \mu\Delta \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) + \rho_0 \mathbf{b}(\mathbf{X}, t) = \rho_0 \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t), \tag{2.142}$$

în care prin $\Delta$ a fost notat operatorul laplaceian. Intr-o bază carteziană ecuaţiile (142) sunt date în forma echivalentă

$$(\lambda + \mu)\frac{\partial(\operatorname{div} \mathbf{u})}{\partial X^j} + \mu\Delta u^j + \rho_0 b_j = \rho_0 \ddot{u}_j.$$

La aceste ecuaţii cu derivate parţiale se adaugă condiţiile pe frontieră, în care vectorul de tensiune se exprimă, prin intermediul ecuaţiei constitutive, prin câmpul de deplasare şi respectiv condiţiile iniţiale.

**Problema statică** în elasticitatea liniară, cazul deformaţiilor infinitezimale, corespunde cazului în care ecuaţiile dinamice (138) sunt înlocuite cu ecuaţiile de *echilibru*

$$\begin{aligned} &\operatorname{div} \mathbf{T}(\mathbf{X},t) + \rho_0 \mathbf{b}(\mathbf{X},t) = 0, \\ &\mathbf{T}(\mathbf{X},t) = \mathcal{E}[\epsilon(\mathbf{X},t)], \\ &\epsilon(\mathbf{X},t) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u}(\mathbf{X},t) + \nabla^T \mathbf{u}(\mathbf{X},t)), \end{aligned} \tag{2.143}$$

unde $\mathcal{E} : Sim \longrightarrow Sim$ este liniară, la care se adaugă condiţiile pe frontiera $\partial\Omega$ a domeniului

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}) \,|_{\Gamma_1} = \mathbf{g}(\mathbf{X}), \quad \mathbf{T}(\mathbf{X})\mathbf{n}(\mathbf{x}) \,|_{\Gamma_2} = \mathbf{f}(\mathbf{X}).$$

In formulările prezentate se descrie comportamentul corpului în raport cu configuraţia de referinţă *naturală*, deci nu există tensiuni iniţiale.

In Cap.6, corespunzător materialelor de tip "rate", vor interveni formulări de probleme *cvasistatice*, care sunt descrise prin setul de ecuaţii (143), dar *cu date pe frontieră dependente de timp*, sub formă de parametru. Este posibil, în contextul considerat acolo să existe *tensiuni iniţiale*, care vor interveni prin condiţiile iniţiale asociate.

Diferite probleme de deformare elastică a corpurilor în cazul *micilor deformaţii* sunt studiate, de exemplu în Truesdell, Toupin [1960], Solomon [1969], Nowacki [1970], Teodorescu [1972], Teodorescu, Ille [1976, 1979, 1980], Dragoş [1983], Soós, Teodosiu [1983], etc. Pentru teoria elasticităţii cu *deformaţii* mici, dar şi *finite* amintim lucrările lui Truesdell, Noll [1965], Wang, Truesdell [1972], Truesdell [1972]. Pentru studiul problemelor matematice ale teoriei clasice (dezvoltate în cadrul micilor deformaţii ) trimitem cititorul la Mihlin [1957], Necăs, Hlaváček, [1981], în care sunt puse în discuţie şi aspectele mecanice corespunzătoare. In Duvaut, Lions [1972] sunt prezentate şi probleme cu frecare, sau probleme de contact. Modalităţi de abordare ale problemelor matematice specifice teoriei neliniare a elasticităţii, dar în cadrul micilor deformaţii, pot fi găsite în Dincă [1972], Mazilu, Sburlan [1973].

### 2.7.3 Corpuri solide anizotrope

Ne plasăm în contextul Definiţiei 7. ( formula (64)) a corpurilor solide şi vom da următoarea definiţie prin care se precizează specificitatea corpurilor anizotrope.

**Definiţia 17.** Corpul $\mathcal{B}$ este constituit dintr-un material *solid, anizotrop* în $X$, dacă există o configuraţie $k$ astfel încât

$$g_k(\mathbf{X}) \subset Ort \quad \text{şi} \quad g_k(\mathbf{X}) \neq Ort, \tag{2.144}$$

**Propoziţia 10.** In clasa materialelor simple grupul de simetrie al materialului este definit printr-un *sistem de generatori*, notat prin $g^+$, inclus în *grupul rotaţiilor proprii* $Ort^+ \equiv \{\mathbf{Q} \in Ort \mid \det \mathbf{Q} = 1\}$.

**Demonstraţie.** Este suficient să arătăm că $-\mathbf{I} \in g_k(\mathbf{X})$. Din principiul obiectivităţii pentru materiale simple ( formula (8) ), rezultă restricţia

$$\mathcal{F}_k(\mathbf{Q}^t\mathbf{F}^t) = \mathbf{Q}(t)\mathcal{F}_k(\mathbf{F}^t)\mathbf{Q}^T(t),$$

pentru orice $\mathbf{Q}^t$ cu $\mathbf{Q}(\tau) \in Ort$ şi $\tau \in R$. Prin particularizarea transformării ortogonale $\mathbf{Q}(\tau) = -\mathbf{I} \in Ort$ pentru orice $\tau \in R$, deducem că $-\mathbf{I} \in g_k(\mathbf{X})$.

Dăm exemple de *corpuri solide, anizotrope*, cu grupuri *finit* dimensionale, puse în evidenţă în *fizica cristalelor*. Există 32 clase de cristale solide, care însă pot fi reduse la 11, pe baza conceptului de simetrie materială.

Fie $\mathbf{a} \in \mathcal{V}$ şi fie $\varphi \in [0, 2\pi)$ un unghi. **Definim** transformarea ortogonală $\mathbf{R}_{\mathbf{a}}^{\varphi}$, care reprezintă o rotaţie de unghi $\varphi$ în jurul vectorului $\mathbf{a}$, efectuată în planul ortogonal pe $\mathbf{a}$.

Considerăm o bază ortonormată fixată, de versori $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ şi notăm prin $\mathbf{p} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})-$ versorul normalei octaedrice.

*Clasele de cristale solide* sunt caracterizate prin

| Denumirea | Nr. curent | Generatori $g^+$ | Nr. elemente în $g$ |
|---|---|---|---|
| Sistem triclinic | 1 | $\mathbf{I}$ | 2 |
| Sistem monoclinic | 2 | $\mathbf{R}_{\mathbf{k}}^{\pi}$ | 4 |
| Sistem rombic | 3 | $\mathbf{R}_{\mathbf{i}}^{\pi}$, $\mathbf{R}_{\mathbf{j}}^{\pi}$ | 8 |
| Sistem piramidal | 4 | $\mathbf{R}_{\mathbf{k}}^{\pi/2}$ | 8 |
| | 5 | $\mathbf{R}_{\mathbf{k}}^{\pi/2}$, $\mathbf{R}_{\mathbf{j}}^{\pi/2}$ | 16 |
| Sistem cubic | 6 | $\mathbf{R}_{\mathbf{i}}^{\pi}$, $\mathbf{R}_{\mathbf{j}}^{\pi}$, $\mathbf{R}_{\mathbf{p}}^{2\pi/3}$ | 24 |
| | 7 | $\mathbf{R}_{\mathbf{i}}^{\pi/2}$, $\mathbf{R}_{\mathbf{j}}^{\pi/2}$, $\mathbf{R}_{\mathbf{k}}^{\pi/2}$ | 48 |
| Sistem hexagonal | 8 | $\mathbf{R}_{\mathbf{k}}^{2\pi/3}$ | 6 |
| | 9 | $\mathbf{R}_{\mathbf{i}}^{\pi}$, $\mathbf{R}_{\mathbf{k}}^{2\pi/3}$ | 12 |
| | 10 | $\mathbf{R}_{\mathbf{k}}^{\pi/3}$ | 12 |
| | 11 | $\mathbf{R}_{\mathbf{i}}^{\pi}$, $\mathbf{R}_{\mathbf{k}}^{\pi/3}$ | 24 |

**Propoziţia 11.** Fie $k$ o configuraţie *nedistorsionată* de corp *solid anizotrop* caracterizat prin $g_k \subset Ort$, $g_k \neq Ort$.

Mulţimea configuraţiilor *nedistorsionate* de corp *solid anizotrop*, $\bar{k}$ cu $g_{\bar{k}} = g_k$, este caracterizată prin deformaţiile $\lambda$ de la configuraţia $k$ la configuraţia $\bar{k}$ cu $\mathbf{P} = \nabla\lambda(\mathbf{X}), \quad \mathbf{X} = k(X)$, de forma

$$\begin{aligned} &\mathbf{P} = \mathbf{R}_0\mathbf{U}_0, \quad \mathbf{R}_0 \in Ort, \ \mathbf{U}_0 \in Psim \quad \text{astfel încât}, \\ &\mathbf{U}_0\mathbf{Q}_0 = \mathbf{Q}_0\mathbf{U}_0, \quad \forall \mathbf{Q}_0 \in g_k \quad \text{şi} \quad \mathbf{R}_0 g_k \mathbf{R}_0^T = g_k. \end{aligned} \tag{2.145}$$

**Demonstraţia** urmează calea utilizată în Teorema 15., pentru solide izotrope (vezi paragraful 2.7.1).

Din Teorema 9. formula (55), aplicată pentru cele două configuraţii de referinţă $k$, $\bar{k}$ obţinem legătura dintre grupurile de simetrie

$$g_{\bar{k}} = \mathbf{P}_0 g_k \mathbf{P}_0^{-1}, \quad \text{cu} \quad \mathbf{P}_0 = \nabla(\bar{k} \circ k^{-1})(\mathbf{X}) \tag{2.146}$$

şi $g_{\bar{k}} = g_k$ prin ipoteză.

Deci pentru orice $\mathbf{Q}_0 \in g_k$ există $\bar{\mathbf{Q}} \in g_k$ astfel încât $\mathbf{P}_0\mathbf{Q}_0 = \bar{\mathbf{Q}}\mathbf{P}_0$, ceea ce este echivalent cu

$$\begin{aligned} &\mathbf{R}_0\mathbf{Q}_0 = \bar{\mathbf{Q}}\mathbf{R}_0 \quad \text{şi} \\ &\mathbf{U}_0\mathbf{Q}_0 = \mathbf{Q}_0\mathbf{U}_0, \end{aligned} \tag{2.147}$$

pentru orice $\mathbf{Q}_0 \in g_k$. Am considerat descompunerea polară pentru $\mathbf{P}_0 \in Invlin$ şi unicitatea acesteia pentru deducerea ultimelor relaţii. Din (147) deducem veridicitatea afirmaţiilor din (145).

**Observaţia 16.** Deci tensorul lungirilor $\mathbf{U}_0$ este determinat din condiţia de permutabilitate cu transformările din grupul de anizotropie menţionat.

**Observaţia 17.** Configuraţiile *nedistorsionate de corp solid şi anizotrop* sunt *material izomorfe* dacă şi numai dacă $\mathbf{U}_0 \in Unim \cap Psim$.

**Teorema 17.** Fie $k$ o configuraţie nedistorsionată de corp solid anizotrop, care *nu este naturală*. Corpul *poate* suporta în configuraţia iniţială numai *tensiunile iniţiale* $\mathbf{T}_0$, care au proprietatea că

$$\mathbf{T}_0\mathbf{Q} = \mathbf{Q}\mathbf{T}_0, \tag{2.148}$$

pentru orice $\mathbf{Q} \in g_k$.

**Demonstraţia** se bazează pe conceptul de configuraţie naturală de referinţă introdus în paragraful 2.4. Dacă configuraţia de referinţă nu este *naturală* atunci (vezi Propoziţia 3, formula (67))

$$\mathcal{F}_k(\mathbf{I}^t(\cdot)) \equiv \mathbf{T}_0 \neq 0. \tag{2.149}$$

Folosim Definiţia 6. ( formula (54)) a grupului de simetrie materială , în care particularizăm istoria procesului de deformare, conform cu (149). Deducem relaţiile

$$\mathcal{F}_k(\mathbf{I}^t\mathbf{H}) = \mathcal{F}_k(\mathbf{I}^t),$$
$$\mathcal{F}_k(\mathbf{I}^t\mathbf{H}) = \mathcal{F}_k(\mathbf{H}\mathbf{I}^t) = \mathbf{H}\mathcal{F}_k(\mathbf{I}^t)\mathbf{H}^T, \tag{2.150}$$

pentru orice $\mathbf{H} \in g_k$, unde am ţinut seama de faptul că $\mathbf{H} \in g_k \subset Ort$ şi am aplicat principiul obiectivităţii (formula (8) din paragraful 2.2), pentru această transformare ortogonală , cu istoria $\mathbf{F}^t = \mathbf{I}^t$.

Introducem în (150) relaţia de definiţie a tensiunilor iniţiale din (149) şi obţinem afirmaţia teoremei.

**Observaţia 18.** Corpurile izotrope *nu pot suporta* în configuraţia iniţială de referinţă *tensiuni tangenţiale* deoarece grupul lor de simetrie, conform Definiţiei 9. ( formula (66)) conţine $Ort$ şi prin urmare din relaţia (149) cu (150), adevărată pentru orice $\mathbf{H} \in g_k \cap Ort$ , rezultă că tensiunea iniţială este un tensor sferic. In schimb corpurile solide anizotrope, dacă *nu au o configuraţie naturală* de referinţă, *pot suporta* în configuraţia de referinţă *tensiuni iniţiale* de forfecare ( evident dacă $\mathbf{T}_0$ nu se reduce la un tensor sferic).

**Propoziţia 12.** Pentru clasele de cristale solide se obţin următoarele *restricţii asupra tensiunilor iniţiale*

| Tipul de anizotropie | Forma $\mathbf{T}_0$ |
|---|---|
| Sistem triclinic | nu există restricţii |
| Sistem monoclinic | $\mathbf{k}$ vector propriu |
| Sistem rombic | $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ vectori proprii |
| Sistem piramidal | $\alpha\,\mathbf{I} + \beta\,\mathbf{k} \otimes \mathbf{k}$ |
| Sistem cubic | tensor sferic |
| Sistem haxagonal | $\alpha\,\mathbf{I} + \beta\,\mathbf{k} \otimes \mathbf{k}$ |

Există corpuri solide anizotrope care sunt caracterizate prin grupuri de simetrie materială, care nu au dimensiune finită. Vom prezenta cateva dintre acestea : corpuri cu *izotropie transversală,* corpuri *ortotrope,* etc. care pot fi reprezentate sub forma pusă în evidenţă în anexa A4., prin Definiţia 8. ( formula (23)), pe care o scriem în cele ce urmează.

**Definiţia 8. din A4.** Definim un subgrup $g \subset Ort$ caracterizat prin următoarele proprietăţi

a) *există* un subrup $\mathcal{G} \subset Ort$,

b) *există* un set de vectori şi tensori, notaţi $(\mathbf{m}, \mathbf{M})$ şi

$$g = \{\mathbf{Q} \in \mathcal{G} \mid \mathbf{Q}\mathbf{m} = \mathbf{m}, \quad \mathbf{Q}\mathbf{M}\mathbf{Q}^T = \mathbf{M}\}. \tag{2.151}$$

Să analizăm în cele ce urmează cele două exemple amintite mai sus.

**Corpuri cu izotropie transversală**

Sunt caracterizate prin existenţa unei direcţii privilegiate de simetrie materială.

**Definiţia 18.** Spunem că un material simplu este *cu izotropie transversă* sau are *izotropie transversală* ( într-o particulă $X$ ) dacă există o configuraţie $k$ de referinţă şi o direcţie $\mathbf{n} \in \mathcal{V}$, $|\mathbf{n}| = 1$, astfel încât grupul său de simetrie este reprezentat prin una dintre următoarele clase

$$
\begin{aligned}
g_1 &= \{\mathbf{Q} \in Ort^+, \quad \mathbf{Qn} = \mathbf{n}\},\\
g_2 &= \{\mathbf{Q} \in Ort, \quad \mathbf{Qn} = \mathbf{n}\},\\
g_3 &= \{\mathbf{Q} \in Ort, \quad \mathbf{Q} \in g_1, \quad \text{sau} \quad -\mathbf{Q} \in g_1\},\\
g_4 &= \{\mathbf{Q} \in Ort^+, \quad \mathbf{Qn} = \mathbf{n}, \quad \text{sau} \quad \mathbf{Qn} = -\mathbf{n}\},\\
g_5 &= \{\mathbf{Q} \in Ort, \quad \mathbf{Qn} = \mathbf{n}, \quad \text{sau} \quad \mathbf{Qn} = -\mathbf{n}\}.
\end{aligned}
\tag{2.152}
$$

Configuraţia $k$ , de referinţă, este numită configuraţie *nedistorsionată de izotropie transversală*, iar $\mathbf{n}$ este *direcţia* care caracterizează izotropia transversală.

**Observaţia 19.** In definiţia adoptată pentru principiul obiectivităţii , P3. , în paragraful 2.1, au fost acceptate mişcările echivalente cu o mişcare dată care pot fi caracterizate prin rotaţii $\mathbf{Q}(\tau) \in Ort$ (deci prin rotaţii arbitrare). Prin urmare în conformitate cu această ipoteză, rezultă că grupurile posibile sunt de fapt trei : $g_2$, $g_3$; $g_5$.

Evident că se poate formula principiul obiectivităţii (din raţiuni fizice) *numai pentru rotaţii proprii.*

**Observaţia 20.** Grupul "cel mai mic" $g_1$ conţine rotaţiile proprii în jurul lui $\mathbf{n}$, grupul $g_5$ conţine toate celelalte grupuri, fiind aparent cel mai potrivit pentru descrierea izotropiei transversale pentru materiale cu fibre orientate sau cu structuri laminate. In literatură cel mai adesea se consideră izotropia transversală caracterizată prin $g_2$.

Folosim următoarea **notaţie** (vezi anexa A4. Definiţia 5.)

$$
\mathbf{N} \in Asim, \quad \mathbf{n} = <\mathbf{N}>, \tag{2.153}
$$

unde $\mathbf{Nu} = \mathbf{n} \times \mathbf{u}$, pentru orice $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$.

Folosim terminologia adoptată în A4. :$\mathbf{n} \in \mathcal{V}$ este *vectorul coaxial cu tensorul* $\mathbf{N} \in Asim$, sau tensorul $\mathbf{N} \in Asim$ este *asociat vectorului* $\mathbf{n}$.

Vom indica acum formulele prin care putem reprezenta grupurile de izotropie transversală , şi care constituie cazuri particulare ale reprezentării date în (151).

Introducem baza ortonormată $\{\mathbf{n}_i\}_{i\in\{\overline{1,3}\}}$ în care $\mathbf{n}_1 \equiv \mathbf{n}$.

**Propoziţia 13.** Fie $\mathbf{N} \in Asim$, $\mathbf{n} = < \mathbf{N} >$.

1) $\mathbf{Q} \in g_3 \iff \mathbf{Q} \in Ort$ şi $\mathbf{Q}\mathbf{N}\mathbf{Q}^T = \mathbf{N}$,

2) $\mathbf{N} = \mathbf{n}_2 \otimes \mathbf{n}_3 - \mathbf{n}_3 \otimes \mathbf{n}_2$.

**Propoziţia 14.**

1) $\mathbf{Q} \in g_4 \iff \mathbf{Q} \in Ort^+$ şi $\mathbf{Q}(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n})\mathbf{Q}^T = \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$,

2) $\mathbf{Q} \in g_5 \iff \mathbf{Q} \in Ort$ şi $\mathbf{Q}(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n})\mathbf{Q}^T = \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$.

Folosind reprezentările din propoziţiile 13. şi 14. prin aplicarea Teoremei 3. din anexa A4. obţinem enunţul următoarei teoreme

**Teorema 18.** O funcţie $f : \mathcal{D} \subset \mathcal{V}^m \times Lin^n$ cu valori scalare, vectoriale sau tensoriale este *invariantă* relativ la *grupurile de izotropie transversală* dacă şi numai dacă poate fi reprezentată

$$\begin{array}{llllll}
a) & \text{pentru} & g_1 & \text{prin} & f(\mathbf{v}, \mathbf{A}) = \bar{f}(\mathbf{v}, \mathbf{A}, \mathbf{n}) & \bar{f} \ \text{hemitropă}, \\
b) & \text{pentru} & g_2 & \text{prin} & f(\mathbf{v}, \mathbf{A}) = \bar{f}(\mathbf{v}, \mathbf{A}, \mathbf{n}) & \bar{f} \ \text{izotropă}, \\
c) & \text{pentru} & g_3 & \text{prin} & f(\mathbf{v}, \mathbf{A}) = \bar{f}(\mathbf{v}, \mathbf{A}, \mathbf{N}) & \bar{f} \ \text{izotropă}, \\
d) & \text{pentru} & g_4 & \text{prin} & f(\mathbf{v}, \mathbf{A}) = \bar{f}(\mathbf{v}, \mathbf{A}, \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) & \bar{f} \ \text{hemitropă}, \\
e) & \text{pentru} & g_5 & \text{prin} & f(\mathbf{v}, \mathbf{A}) = \bar{f}(\mathbf{v}, \mathbf{A}, \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) & \bar{f} \ \text{izotropă}.
\end{array} \tag{2.154}$$

### Corpuri ortotrope

Simetria materială este caracterizată prin existenţa a trei plane de simetrie ortogonale două câte două.

Introducem baza ortonormată $\{\mathbf{n}_i\}_{i \in \{\overline{1,3}\}}$. Planele de simetrie materială au normalele $\mathbf{n}_i$.

**Definiţia 19.** Spunem că un material simplu este *ortotrop* ( într-o particulă $X$ ) dacă există o configuraţie $k$ de referinţă şi trei direcţii ortogonale $\mathbf{n}_i \in \mathcal{V}$, $|\ \mathbf{n}_i\ | = 1$, astfel încât grupul său de simetrie este reprezentat prin clasa

$$g_6 = \{\mathbf{Q} \in Ort, \quad \mathbf{Q}\mathbf{n}_i = \mathbf{n}_i \quad \text{sau} \quad \mathbf{Q}\mathbf{n}_i = -\mathbf{n}_i, \quad \in \{\overline{1,3}\}\}. \tag{2.155}$$

**Propoziţia 15.** $\mathbf{Q} \in g_6$ dacă şi numai dacă

$$[\mathbf{Q}]_{\mathbf{n}_i} = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$$

sau într-o reprezentare echivalentă, dacă,

$$\mathbf{Q} \in Ort \quad \text{şi satisface} \quad \mathbf{Q}(\mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i)\mathbf{Q}^T = \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i, \quad \text{cu} \quad i = 1, 2 \tag{2.156}$$

Folosind reprezentarea din Propoziţia 15. prin aplicarea Teoremei 3. din anexa A4. obţinem enunţul următoarei teoreme

**Teorema 19.** O funcţie $f : \mathcal{D} \subset \mathcal{V}^m \times Lin^n$ cu valori scalare, vectoriale sau tensoriale este *invariantă* relativ la grupul de *ortotropie* dacă şi numai dacă poate fi reprezentată prin

$$f(\mathbf{v}, \mathbf{A}) = \bar{f}(\mathbf{v}, \mathbf{A}, \mathbf{n}_1 \otimes \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \otimes \mathbf{n}_2), \tag{2.157}$$

unde $\bar{f}$ este izotropă .

Vom lista câteva tipuri de corpuri anizotrope în care grupurile de simetrie materială admit reprezentări de forma menţionată în Definiţia 8. din A4.

Introducem notaţiile

$$g = (\mathcal{G}; \mathbf{m}, \mathbf{M})$$

pentru a evidenţia specificitatea grupurilor de simetrie. Introducem baza ortonormată $\{\mathbf{n}_i\}_{i\in\{\overline{1,3}\}}$, $\mathbf{n}_1 = \mathbf{n}$ şi fie $\mathbf{N}_i \in Asim$, $\mathbf{n}_i =< \mathbf{N}_i >$ . Atunci

$$\begin{array}{lll} a) & \textbf{Izotropie transversală} & g_1 = (Ort^+; \mathbf{n}_1) \equiv (Ort; \mathbf{n}_1, \mathbf{N}_1), \\ & & g_2 = (Ort; \mathbf{n}_1), \\ & & g_3 = (Ort; \mathbf{N}_1), \\ & & g_4 = (Ort^+; \mathbf{n}_1 \otimes \mathbf{n}_1), \\ & & g_5 = (Ort; \mathbf{n}_1 \otimes \mathbf{n}_1), \\ b) & \textbf{Ortotropie} & g_6 = (Ort; \mathbf{n}_1 \otimes \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \otimes \mathbf{n}_2). \end{array} \tag{2.158}$$

Vom exemplifica rezultatele din Teorema 3. A4. şi respectiv Teorema 18. pentru corpul liniar elastic, cu deformaţii finite. Reprezentările care urmează au fost deduse şi utilizate în contextul teoriei plasticităţii cu deformaţii în Cleja-Ţigoiu [1997].

**Teorema 20.** Fie $\mathcal{B}$ un corp liniar elastic, caracterizat prin relaţia constitutivă

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{R}(t)\mathcal{L}(\Delta)\mathbf{R}^T(t) \quad \text{cu} \quad , \quad \Delta = 1/2(\mathbf{C} - \mathbf{I}) \tag{2.159}$$

în raport cu o configuraţie naturală de referinţă, unde $\mathcal{L} : Sym \longrightarrow Sym$ este o aplicaţie liniară.

Corpul este cu izotropie transversă, caracterizată prin grupul de simetrie $g_1$ , dacă şi numai dacă

$$\mathcal{L}[\Delta] = \{[a_{11} - a_{12} - 4a_{44} + (a_{22} - a_{23})](\Delta \cdot (\mathbf{n}_1 \otimes \mathbf{n}_1)) + a_{12} tr\Delta\}(\mathbf{n}_1 \otimes$$

$$\otimes \mathbf{n}_1) + [a_{23} tr\Delta + (a_{21} - a_{23})\Delta \cdot (\mathbf{n}_1 \otimes \mathbf{n}_1)][\mathbf{I} - (\mathbf{n}_1 \otimes \mathbf{n}_1)] +$$

$$+[2a_{44} - a_{22} + a_{23}][(\mathbf{n}_1 \otimes \mathbf{n}_1)\Delta + \Delta(\mathbf{n}_1 \otimes \mathbf{n}_1)] + (a_{22} - a_{23})\Delta - \tag{2.160}$$

$$-2a_{45}(\mathbf{N}_1 \Delta \mathbf{n}_1 \otimes \mathbf{n}_1) + (\mathbf{n}_1 \otimes \mathbf{N}_1 \Delta \mathbf{n}_1) + a_{46}(\mathbf{N}_1 \Delta \mathbf{N}_1^2 - \mathbf{N}_1^2 \Delta \mathbf{N}_1)$$

în care $a_{ij}$ sunt constante de material.

**Demonstraţie.** Vom aplica, în primul rând, Propoziţia 8. c) pentru funcţia $h(\mathbf{U}) = \mathcal{L}[\Delta]$, cu $\Delta = 1/2(\mathbf{C} - \mathbf{I})$. Prin urmare deducem că funcţia $\mathcal{L} : Sym \longrightarrow Sym$ este *invariantă* relativ la $g_1$.

Folosim cea de-a doua caracterizare a grupului de simetrie $g_1$, dată în (158). Prin aplicarea Teoremei 3. din A4. deducem că $\mathcal{L}[\Delta]$ este invarianta relativ la $g_1$ dacă şi numai dacă poate fi reprezentată sub forma

$$\mathcal{L}[\Delta] = \bar{\mathcal{L}}[\Delta, \mathbf{n}_1, \mathbf{N}_1] \tag{2.161}$$

cu funcţia $\bar{\mathcal{L}}$ izotropă în raport cu argumentele sale, ansamblu format dintr-un tensor simetric, un versor şi un tensor antisimetric. Vom utiliza teoremele de reprezentare ale lui Wang [1970], ţinând seama că aplicaţia $\bar{\mathcal{L}}$ este liniară în raport cu tensorul simetric. Se obţine formula din enunţ. Reprezentarea conţine un set complet şi ireductibil de generatori.

**Propoziţia 16.** Fie un corp liniar elastic, cu izotropie transversă, caracterizat prin grupul $g_1$, supus la deformaţii finite.

Intr-o bază carteziană $\{\mathbf{n}_i\}_{i \in \{\overline{1,3}\}}$, în care $\mathbf{n}_1-$ este direcţia de anizotropie, rezultă următoarea reprezentare pe componente

$$\begin{aligned}
\pi_{11} &= a_{11}\Delta_{11} + a_{12}(\Delta_{22} + \Delta_{33}) \\
\pi_{22} &= a_{21}\Delta_{11} + a_{22}\Delta_{22} + a_{23}\Delta_{33} + 2a_{46}\Delta_{23} \\
\pi_{33} &= a_{21}\Delta_{11} + a_{23}\Delta_{22} + a_{22}\Delta_{33} - 2a_{46}\Delta_{23} \\
\pi_{12} &= 2(a_{44}\Delta_{12} + a_{45}\Delta_{13}); \quad \pi_{13} = -2a_{45}\Delta_{12} + 2a_{44}\Delta_{13} \\
\pi_{23} &= a_{46}(-\Delta_{22} + \Delta_{33}) + (a_{22} - a_{23})\Delta_{23}
\end{aligned} \tag{2.162}$$

pentru $\bar{\mathcal{L}}(\Delta)$. Aici am notat cu $\pi_{ij}$ componentele tensorului simetric $\bar{\mathcal{L}}(\Delta)$.

**Propoziţia 17.** Corpul linear elastic, cu deformaţii finite este transversal izotrop, carcterizat prin grupul de simetrie $g_4$, dacă şi numai dacă admite o reprezentare constitutiva de forma precizată in Teorema 20. cu $a_{46} = a_{45} = 0$.

**Demonstraţia** se obţine ca o consecinţă a Teoremei 18., de exemplu. Astfel $\mathcal{L}$ este invariantă relativ la $g_4$ dacva şi numai dacă se poate reprezenta prin

$$\mathcal{L}[\Delta] = \bar{\mathcal{L}}[\Delta, \mathbf{n}_1 \otimes \mathbf{n}_1] \tag{2.163}$$

cu funcţia $\bar{\mathcal{L}}$, cu valori tensori simetrici, hemitropă în raport cu un set de doi tensori simetrici. Rezultă că este izotropă. Se aplică din nou rezultatele lui Wang, din care rezultă reprezentarea.

**1.** Arătaţi că un material simplu definit prin relaţia constitutivă (7) satisface principiul acţiunii locale. P2.

**2.** Demonstraţi Teorema 5., formula (42), folosind legătura de incompresibilitate scrisă sub forma $\lambda(\mathbf{C}) \equiv \det \mathbf{C} - 1 = 0$.

**3.** Să se expliciteze demostraţia Teoremei 6, formula (43).

**4.** Demonstraţi că printr-o transformare *ortogonală*, deci printr-o deformaţie $\lambda$, cu $\nabla\lambda(\mathbf{X}) \in Ort$, o configuraţie naturală se transformă într-o configuraţie naturală.

**5.** Arătaţi că următoarele reprezentări constitutive

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\mathbf{x},t) &= \mathbf{F}h_1(\mathbf{U})\mathbf{F}^T, \\ \mathbf{T}(\mathbf{x},t) &= \mathbf{R}h_2(\mathbf{C})\mathbf{R}^T, \\ \mathbf{T}(\mathbf{x},t) &= \mathbf{F}h_3(\mathbf{C})\mathbf{F}^T, \end{aligned}$$

sunt echivalente , satisfac principiul obiectivităţii şi descriu un corp elastic.

**6.** Arătaţi că reprezentarea constitutivă pentru *fluidele de tip Reiner - Rivlin*

$$\mathbf{T}(\mathbf{x},t) = \varphi_0(j_{\mathbf{D}},\rho)\mathbf{I} + \varphi_1(j_{\mathbf{D}},\rho)\mathbf{D} + \varphi_2(j_{\mathbf{D}},\rho)\mathbf{D}^2,$$

în care setul de invarianţi este definit prin $j_D = \{\mathrm{tr}\mathbf{D}, \mathrm{tr}\mathbf{D}^2, \mathrm{tr}\ \mathbf{D}^3\}$, satisface principiul obiectivităţii.

**7.** Arătaţi că fluidele de tip Reiner - Rivlin reprezintă un caz particular de fluide în sensul lui Noll .

**8.** Fie o reprezentare constitutivă a unui corp scrisă în forma redusă I. Determinaţi restricţiile impuse reprezentării constitutive pentru a descrie un corp izotrop.

**9.** Demonstraţi (vezi indicaţiile din Propoziţia 6.) că soluţia problemei Cauchy

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{X}}(t) &= \mathbf{W}\mathbf{X}(t), \\ \mathbf{X}(0) &= \mathbf{I}, \end{aligned}$$

pentru $\mathbf{W} \in Asim$, unde $\mathbf{X}(t) \in Lin$, pentru orice $t \in R$ defineşte un câmp ortogonal, de clasă $C^1(\mathrm{R})$.

**10.** Fie doi vectori daţi $\mathbf{u}, \mathbf{v}$. Arătaţi că există $\tau \in R \longrightarrow \mathbf{x}_0^*(\tau)$, de clasă $C^1(\mathrm{R})$ astfel încât $\mathbf{x}_0^*(t) = \mathbf{u}$, $\dot{\mathbf{x}}_0^*(t) = \mathbf{v}$.

**11.** Să se determine reprezentarea constitutivă pentru un corp elastic, izotrop şi incompresibil.

**12.** Să se scrie o reprezentare constitutivă pentru un corp elastic

a) în raport cu o configuraţie naturală de referinţă şi respectiv,

b) în raport cu o configurație de referință în care corpul poate suporta tensiuni tangențiale.

**13.** Pentru clasele de cristale solide definite în paragraful 2.7.3 determinați elementele grupurilor de simetrie materială.

**14.** Să se determine mulțimea configurațiilor nedistorsionate de corp solid anizotrop pentru fiecare clasă de cristale solide, ca o consecință a Propoziției 11.

**15.** Folosind rezultatul din Ex. 14., analizați mulțimea configurațiilor nedistorsionate și material izomorfe de corp solid anizotrop, pentru fiecare clasă de cristale solide.

**16.** Demonstrați că reprezentarea constitutivă din Teorema 20. caracterizează un corp elastic anizotrop, cu grupul de simetrie $g_1-$ de izotropie transversală.

**17.** Să se deducă forma redusă pentru o ecuație constitutivă de forma

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{K}(\mathbf{F}, X)[\dot{\mathbf{F}}]$$

pentru orice $\mathbf{F} \in Invlin$, unde $\mathbf{K}(\mathbf{F}, X) : Lin \longrightarrow Sim$ este o aplicație liniară.

# 3. MATERIALE DE TIP RIVLIN - ERICKSEN

## 3.1 Reprezentări constitutive pentru materiale de tip Rivlin - Ericksen

Reprezentări constitutive pentru aceste tipuri de materiale pot fi găsite în Rivlin, Ericksen [1955]. Prezentarea din primele trei paragrafe ale capitolului urmăreşte expunerile din Coleman, Noll [1961], Truesdell, Noll [1965], Truesdell [1972].

**Definiţia 1.** Un corp $\mathcal{B}$ este constituit dintr-un material de tip diferenţial de ordinul $n$, în particula $\mathbf{X}$, dacă

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \bar{f}(\mathbf{F}(\mathbf{X}, t), \dot{\mathbf{F}}(\mathbf{X}, t), \ldots, \mathbf{F}^{(n)}(\mathbf{X}, t); \mathbf{X}). \tag{3.1}$$

**Observaţia 1.** Aceasta este o reprezentare constitutivă pentru un material simplu deoarece starea de tensiune în particula $\mathbf{X}$ la momentul $t$, corespunzător mişcării $\chi$, depinde de $\mathbf{F}^t(\mathbf{X}, \cdot)$ (istoria gradientului de deformaţie în particula $\mathbf{X}$) prin $\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)$ ( valoarea curentă a gradientului de deformaţie) şi prin derivatele parţiale, în raport cu timpul până la ordinul $n$, ale acestuia (ceea ce necesită cunoaşterea valorilor lui $\mathbf{F}$ într-o vecinătate, suficient de mică a momentului de timp).

Am întîlnit deja, în capitolul dedicat reprezentărilor constitutive **cazurile particulare** $\mathbf{n = 0}$

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \bar{f}(\mathbf{F}(\mathbf{X}, t); \mathbf{X}) \tag{3.2}$$

( *materialul elastic* prezentat în 2.7.2 ) şi respectiv **cazul** $\mathbf{n = 1}$

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \bar{f}(\mathbf{F}(\mathbf{X}, t), \dot{\mathbf{F}}(\mathbf{X}, t); \mathbf{X}) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \bar{f}(\mathbf{F}(\mathbf{X}, t), \mathbf{L}(\mathbf{x}, t); \mathbf{X}), \tag{3.3}$$

(*clasa fluidelor vâscoase*, prezentate în 2.6.2) de asemenea materiale. Echivalenţa din relaţia (3) se stabileşte prin intermediul formulei $\mathbf{L}(\mathbf{x}, t) = \dot{\mathbf{F}}(\mathbf{X}, t)\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{x}, t)$.

Cazurile pariculare $n = 2$, $n = 3$, vor avea un rol esenţial în cazul mişcărilor cu istoria alugirilor relative constantă şi , respectiv al mişcărilor vâscometrice, care vor fi considerate în capitolul următor.

**Definiţia 2.** Pentru $\mathbf{A} \in \mathit{Lin}$ se defineşte *tensorul rotit cu rotaţia de la momentul* $t$ , prin formula

$$\mathbf{A}^{\mathbf{R}} \equiv \mathbf{R}^T\mathbf{A}\mathbf{R}, \quad \text{unde} \quad \mathbf{R} \equiv \mathbf{R}(\mathbf{X}, t), \tag{3.4}$$

unde $\mathbf{R}$ reprezintă tensorul rotaţiilor la momentul $t$.

**Teorema 1.** Un material de tip diferenţial[1] *satisface principiul obiectivităţii* dacă şi numai dacă admite o reprezentare constitutivă de forma

$$\mathbf{T}(\mathbf{x},t) = \mathbf{R}(\mathbf{X},t)\bar{f}(\mathbf{A}_1^{\mathbf{R}}(\mathbf{x},t),\ldots\mathbf{A}_n^{\mathbf{R}}(\mathbf{x},t),\mathbf{C}(\mathbf{X},t);\mathbf{X})\mathbf{R}^T(\mathbf{X},t), \tag{3.5}$$

unde $\mathbf{A}_k(\mathbf{x},t)$ reprezintă tensorii lui Rivlin - Ericksen de ordinul $k$, având definiţia

$$\mathbf{A}_k(\mathbf{x},t) = \frac{\partial^k}{\partial\tau^k}\mathbf{C}_t(\tau)\mid_{\tau=t}, \tag{3.6}$$

dată deja în 1.4.

**Demonstraţie** Considerăm mişcarea relativă, în raport cu momentul de referinţă $t$, fixat. Din formulele (1.54)

$$\mathbf{F}_t(\tau) = \mathbf{F}(\tau)\mathbf{F}^{-1}(t), \quad \forall\tau\in\mathbf{R}, \quad \mathbf{F}_t(\tau)\mid_{\tau=t}=\mathbf{I}. \tag{3.7}$$

Prin derivare în raport cu $\tau$ din (7) obţinem

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^k}{\partial\tau^k}\mathbf{F}_t(\tau) = \mathbf{F}^{(k)}(\tau)\mathbf{F}(t)^{-1},\\ &\frac{\partial^k}{\partial\tau^k}\mathbf{F}_t(\tau)\mid_{\tau=t}=\mathbf{F}^{(k)}(t)\mathbf{F}(t)^{-1} \quad\Longrightarrow\quad \mathbf{F}^{(k)}(t) = \frac{\partial^k}{\partial\tau^k}\mathbf{F}_t(\tau)\mid_{\tau=t}\mathbf{F}(t).\end{aligned} \tag{3.8}$$

Dacă se introduc ultimele relaţii din (8) în formula (1) obţinem o nouă formă pentru reprezentarea constitutivă

$$\mathbf{T}(\mathbf{x},t) = \tilde{f}(\{\frac{\partial^k}{\partial\tau^k}\mathbf{F}_t(\tau)\mid_{\tau=t}\}_{1\le k\le n},\mathbf{F}(t)). \tag{3.9}$$

A rezultat o reprezentare constitutivă în care apare *istoria gradientului în mişcarea relativă*, prin valoarea derivatelor până la ordinul $n$ inclusiv, calculate în $\tau = t$, şi valoarea gradientului de deformaţie la momentul $t$, sub formă de parametru.

Deci avem un caz particular de reprezentare constitutivă

$$\mathbf{T}(\mathbf{x},t) = \mathcal{F}(\mathbf{F}_t^t(\cdot),\mathbf{F}(t)) \equiv \mathbf{R}(t)\mathcal{F}((\mathbf{C}_t^t(\cdot))^{\mathbf{R}},\mathbf{C}(t))\mathbf{R}^T(t), \tag{3.10}$$

ultima egalitate, având loc ca o restricţie impusă de principiului obiectivităţii, fiind forma redusă II, (2.16), din paragraful 2.2.

In cazul considerat aici nu apare întreaga istorie a gradientului de deformaţie în mişcarea relativă, ci numai valorile ei *într-o vecinătate a momentului actual*, deci $\mathbf{F}_t^t(s)$, $\forall s\in[0,\delta)$, *cu* $\delta > 0$,. Prin urmare din restricţia de obiectivitate

[1]In cele ce urmează nu vom mai menţiona particula materială $\mathbf{X}$ şi respectiv poziţia acesteia în configuraţia de la momentul $t$, $\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X},t)$, în scopul simplificării scrierii. Bineânţeles că această omisiune va fi făcută numai dacă nu se produc confuzii.

rezultă că vom avea dependenţa operatorului constitutiv de *istoria tensorului lui Cauchy- Green, în descriere relativă,* istorie considerată cu valorile ei într-o vecinătate a momentului actual. Astfel

$$\mathbf{T}(\mathbf{x},t) = \mathbf{R}(t)f((\frac{\partial^k}{\partial\tau^k}\mathbf{C}_t(\tau)\mid_{\tau=t})^{\mathbf{R}},\mathbf{C}(t))\mathbf{R}^T(t),$$

$$= \mathbf{R}(t)f(\{\mathbf{A}_k^{\mathbf{R}}(\mathbf{x},t)\}_{1\le k\le n},\mathbf{C}(t))\mathbf{R}^T(t).$$

Demonstrăm acum **reciproca**. Considerăm reprezentarea constitutivă de forma (5) şi definim o funcţie $f$ de argumentele menţionate astfel încât

$$\bar{f}(\mathbf{F}(t),\dot{\mathbf{F}}(t),\ldots,\mathbf{F}^{(n)}(t)) = \mathbf{R}(t)f(\mathbf{A}_1^{\mathbf{R}}(\mathbf{x},t),\ldots,\mathbf{A}_n^{\mathbf{R}}(\mathbf{x},t),\mathbf{C}(\mathbf{X},t))\mathbf{R}^T(t). \tag{3.11}$$

Arătăm, mai întâi, că funcţia este corect definită. Din definiţia tensorilor Rivlin - Ericksen (6), împreună cu definiţia tensorilor Cauchy - Green, la dreapta în descriere relativă, formula (1.49), găsim

$$\mathbf{A}_k(\mathbf{x},t) = \sum_{p=0}^{p=k} C_k^p \frac{\partial^p}{\partial\tau^p}\mathbf{F}_t^T(\tau)\mid_{\tau=t} \frac{\partial^{k-p}}{\partial\tau^{k-p}}\mathbf{F}_t(\tau)\mid_{\tau=t}.$$

Pe de altă parte din (8) calculăm derivata de ordinul $m$, $1\le m\le k$ în raport cu $\tau$ pentru $\mathbf{F}_t(\tau)$, la momentul $\tau=t$. Rezultă că tensorii Rivlin - Ericksen de ordinul $k$, $1\le k\le n$ se reprezintă în forma

$$\mathbf{A}_k(\mathbf{x},t) = \mathbf{F}(t)^{-T}(\sum_{p=0}^{p=k} C_k^p(\mathbf{F}^{(p)}(t))^T\mathbf{F}^{(k-p)}(t))\mathbf{F}(t)^{-1}. \tag{3.12}$$

Dacă folosim formula (12) şi ţinem seama că

$$\mathbf{C}(t) = \mathbf{F}^T(t)\mathbf{F}(t), \quad \mathbf{F}(t) = \mathbf{R}(t)\mathbf{U}(t), \tag{3.13}$$

unde $\mathbf{R}(t)\in Ort$ reprezintă tensorul de rotaţia din teorema de descompunere polară, formula (1.44), va rezulta că funcţia din membrul drept al relaţiei (11) depinde de $\mathbf{F}(t)$ şi de derivatele sale materiale la momentul $t$. Deci argumentele funcţiei $f$, introdusă în (11) sunt corecte.

Rămâne acum să demonstrăm că reprezentarea constitutivă de forma (1), în care membrul drept este definit prin (11) satisface principiul obiectivităţii, vezi Teorema 1. din 2.2., ceea ce este echivalent cu demonstrarea faptului că o reprezentare constitutivă de forma (5) îl satisface.

Fie pentru aceasta, $\chi^*$ echivalentă cu $\chi$. Atunci din teorema de descompunere polară a lui $\mathbf{F}^*(\mathbf{X},\tau^*) = \mathbf{Q}(\tau)\mathbf{F}(\mathbf{X},\tau)$, $\forall\tau\in R$ şi din obiectivitatea tensorilor Rivlin - Ericksen (demonstrată în Propoziţia 14. din paragraful 1.5 ) avem

$$\mathbf{R}^*(\mathbf{X},t^*) = \mathbf{Q}(t)\mathbf{R}(\mathbf{X},t), \quad \mathbf{C}^*(\mathbf{X},t^*) = \mathbf{C}(\mathbf{X},t),$$

$$(\mathbf{A}_k^*(\mathbf{x}^*,t^*))^{\mathbf{R}^*} = \mathbf{A}_k^{\mathbf{R}}(\mathbf{x},t) \quad \forall\, 1\le k\le n.$$

Prin urmare a rezultat că

$$\mathbf{R}^*(\mathbf{X},t^*)f((\mathbf{A}_1^*)^{\mathbf{R}^*}(\mathbf{x}^*,t^*),\ldots,(\mathbf{A}_n^*)^{\mathbf{R}^*}(\mathbf{x}^*,t^*),\mathbf{C}^*(\mathbf{X},t^*))\mathbf{R}^{*T}(\mathbf{X},t^*) =$$

$$= \mathbf{Q}(t)\mathbf{R}(\mathbf{X},t)f(\mathbf{A}_1^{\mathbf{R}}(\mathbf{x},t),\ldots,\mathbf{A}_n^{\mathbf{R}}(\mathbf{x},t),\mathbf{C}(\mathbf{X},t))\mathbf{R}^T(\mathbf{X},t)\mathbf{Q}^T(t),$$

Din cele de mai sus rezultă că principiul obiectivităţii este satisfăcut de reprezentarea (6).

Vom trece acum la caracterizarea constitutivă a materialelor de tip diferenţial de ordinul $n$, care au proprietatea că sunt *izotrope*.

**Teorema 2.** Un material de tip diferenţial *este izotrop* dacă şi numai dacă admite o reprezentare constitutivă de forma

$$\mathbf{T}(\mathbf{x},t) = f(\mathbf{A}_1(\mathbf{x},t),\ldots,\mathbf{A}_n(\mathbf{x},t),\mathbf{B}(\mathbf{X},t)), \tag{3.14}$$

cu funcţia $f$ *izotropă* în argumentele sale, deci pentru orice $\mathbf{Q} \in Ort$ şi oricare ar fi valorile argumentelor sale are loc egalitatea

$$\mathbf{Q}f(\mathbf{A}_1,\ldots,\mathbf{A}_n,\mathbf{B})\mathbf{Q}^T = f(\mathbf{Q}\mathbf{A}_1\mathbf{Q}^T\ldots,\mathbf{Q}\mathbf{A}_n\mathbf{Q}^T,\mathbf{Q}\mathbf{B}\mathbf{Q}^T). \tag{3.15}$$

**Demonstraţie**. Notăm

$$\mathcal{F}(\mathbf{F}^t) \equiv \mathbf{R}(t)f(\mathbf{A}_1^{\mathbf{R}}(t),\ldots,\mathbf{A}_n^{\mathbf{R}}(t),\mathbf{C}(t))\mathbf{R}^T(t). \tag{3.16}$$

Din Definiţia 9. (paragraful 2.4) a corpului constituit dintr-un material izotrop, într-o particulă $\mathbf{X}$ fixată a sa, rezultă că grupul său de simetrie în raport cu configuraţia $k$ este astfel încât

$$g_k(\mathbf{X}) \supseteq Ort \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{F}(\mathbf{F}^t\mathbf{Q}) = \mathcal{F}(\mathbf{F}^t), \tag{3.17}$$

pentru orice $\mathbf{Q} \in Ort$ şi pentru orice istorie de deformaţie.

Considerăm o istorie $\mathbf{F}^t$ dată şi pentru un $\mathbf{Q} \in Ort$ construim istoria $\tilde{\mathbf{F}}^t = \mathbf{F}^t\mathbf{Q}$. Atunci din (17) cu (16) avem

$$\mathcal{F}(\mathbf{F}^t) = \mathcal{F}(\tilde{\mathbf{F}}^t) \equiv \tilde{\mathbf{R}}(t)f(\tilde{\mathbf{A}}_1^{\tilde{\mathbf{R}}}(t),\ldots\tilde{\mathbf{A}}_n^{\tilde{\mathbf{R}}}(t),\tilde{\mathbf{C}}(t))\tilde{\mathbf{R}}^T(t), \tag{3.18}$$

unde mărimile cu " ˜ " sunt asociate istoriei $\tilde{\mathbf{F}}^t$. Din (7), din definiţia tensorilor Cauchy - Green la dreapta, $(13)_1$ şi (5) rezultă

$$\tilde{\mathbf{F}}_t(\tau) = \mathbf{F}_t(\tau), \quad \tilde{\mathbf{C}}_t(\tau) = \mathbf{C}_t(\tau), \quad \tilde{\mathbf{A}}_k(t) = \mathbf{A}_k(t),\ \forall\mathbf{Q} \in Ort, \tag{3.19}$$

Pe de altă parte deoarece $\mathbf{Q}$ este în $Ort$, din teorema de descompunere polară , conform formulei $(13)_2$ aplicată pentru $\tilde{\mathbf{F}}(t)$ şi $\mathbf{F}(t)$, rezultă

$$\tilde{\mathbf{F}}(t) = \tilde{\mathbf{R}}(t)\tilde{\mathbf{U}}(t) = \mathbf{F}(t)\mathbf{Q} = \mathbf{R}(t)\mathbf{U}(t)\mathbf{Q}.$$

Din relaţia anterioară, în baza unicităţii descompunerii polare, obţinem

$$\tilde{\mathbf{R}}(t) = \mathbf{R}(t)\mathbf{Q}\,, \quad \tilde{\mathbf{U}}(t) = \mathbf{Q}^T\mathbf{U}(t)\mathbf{Q}. \tag{3.20}$$

In final din (19) şi (20) deducem şi următoarele egalităţi

$$\tilde{\mathbf{C}}(t) = \mathbf{Q}^T\mathbf{C}(t)\mathbf{Q}\,, \quad \tilde{\mathbf{A}}_k^{\tilde{\mathbf{R}}}(t) = \mathbf{Q}^T\mathbf{A}_k^{\mathbf{R}}(t)\mathbf{Q}. \tag{3.21}$$

Introducem setul de formule (20) şi (21) în (18), în care utilizăm de asemenea şi (16). Obţinem astfel pentru $\forall\, \mathbf{Q}^T \in Ort$ egalitatea

$$\begin{aligned} &\mathbf{Q}^T f(\mathbf{A}_1^{\mathbf{R}}(t), \ldots, \mathbf{A}_n^{\mathbf{R}}(t), \mathbf{C}(t))\mathbf{Q} = \\ &\qquad = f(\mathbf{Q}^T\mathbf{A}_1^{\mathbf{R}}(t)\mathbf{Q}, \ldots, \mathbf{Q}^T\mathbf{A}_n^{\mathbf{R}}(t)\mathbf{Q}, \mathbf{Q}^T\mathbf{C}(t)\mathbf{Q}). \end{aligned} \tag{3.22}$$

Renotând $\mathbf{Q}^T$ prin $\mathbf{Q}$ obţinem formula (15), deci funcţia $f$ este *izotropă* în argumentele sale ( $n+1$ tensori simetrici).

Ţinem seama de proprietatea de izotropie a funcţiei constitutive din (5) şi de Definiţia 2. a tensorilor rotiţi, cu care rezultă

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{R}(t) f(\mathbf{A}_1^{\mathbf{R}}(t), \ldots \mathbf{A}_n^{\mathbf{R}}(t), \mathbf{C}(t))\mathbf{R}^T(t) = \\ &= f(\mathbf{A}_1(t), \ldots \mathbf{A}_n(t), \mathbf{B}(t)), \end{aligned}$$

unde $\mathbf{B}(t) = \mathbf{F}(t)\mathbf{F}^T(t) = \mathbf{R}(t)\mathbf{C}(t)\mathbf{R}^T(t)$.

In concluzie a rezultat reprezentarea constitutivă

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{A}_1(t), \ldots \mathbf{A}_n(t), \mathbf{B}(t)). \tag{3.23}$$

Prin acest rezultat avem o caracterizare constitutivă a corpurilor solide izotrope.

**Definiţia 3.** Spunem că un corp $\mathcal{B}$ este constituit dintr-un *solid izotrop Rivlin - Ericksen de ordinul* $n$, în particula $\mathbf{X}$, dacă admite o reprezentare constitutivă de forma (14) cu propritatea de *izotropie* (15).

**Observaţia 1.** Corpurile *solide izotrope* constituite dintr-un material de tip Rivlin - Ericksen de ordinul $n = 0$ admit o reprezentare constitutivă de forma

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{B}(\mathbf{X}, t))\,, \quad \mathbf{Q} f(\mathbf{B})\mathbf{Q}^T = f(\mathbf{Q}\mathbf{B}\mathbf{Q}^T),$$

dedusă din (14) cu (15). Aplicând teorema de reprezentare pentru funcţii izotrope deducem că aceste materiale sunt echivalente cu clasa materialelor Mooney - Rivlin, prezentate în paragraful 2.7.2.

## 3.2 Reprezentări constitutive pentru fluide Rivlin - Ericksen

Vom ţine seama de Defintţia 8. fluidelor în sensul materialelor simple, dată în paragraful 2.4. Pentru obţinerea reprezentării constitutive a fluidelor Rivlin - Ericksen pornim cu reprezentarea constitutivă (5) care are proprietatea că principiul obiectivităţii este satisfăcut.

**Teorema 3.** Un material de tip diferenţial de ordinul $n$ este un *fluid* în $\mathbf{X}$ dacă şi numai dacă admite o reprezentare constitutivă de forma

$$\mathbf{T}(\mathbf{x},t) = \hat{f}(\mathbf{A}_1(\mathbf{x},t),\ldots,\mathbf{A}_n(\mathbf{x},t),\rho(\mathbf{x},t)), \tag{3.24}$$

cu următoarea proprietate satisfăcută pentru $\forall \mathbf{Q} \in Ort$,

$$\hat{f}(\mathbf{Q}\mathbf{A}_1(\mathbf{x},t)\mathbf{Q}^T,\ldots,\mathbf{Q}\mathbf{A}_n(\mathbf{x},t)\mathbf{Q}^T,\rho(\mathbf{x},t)) =$$

$$= \mathbf{Q}\hat{f}(\mathbf{A}_1(\mathbf{x},t),\ldots,\mathbf{A}_n(\mathbf{x},t),\rho(\mathbf{x},t))\mathbf{Q}^T, \tag{3.25}$$

$$\hat{f}(0,\ldots,0,\rho) = -p(\rho)\mathbf{I}.$$

**Demonstraţie.** Din definiţia fluidului în sensul lui Noll rezultă că $g_k(\mathbf{X}) = Unim$. Deoarece $Ort \subset Unim$ rezultă că corpul este izotrop. Folosim rezultatul din Teorema 2. şi deci vom porni în caracterizarea constitutivă cu reprezentarea (14), având proprietatea (15). Deci considerăm caracterizarea materialului simplu prin

$$\mathcal{F}(\mathbf{F}^t) \equiv f(\mathbf{A}_1(t),\ldots,\mathbf{A}_n(t),\mathbf{B}(t)). \tag{3.26}$$

Mai rămâne să demonstrăm că dependenţa de $\mathbf{B}(t)$ se transformă în dependenţă de $\rho$, ca o consecinţă a faptului că grupul de simetrie este $Unim$. Pentru a obţine reprezentarea scrisă în (26) am folosit proprietatea de definiţie a transformărilor de simetrie materială numai pe $Ort$.

Din definiţia grupului de simetrie, prezentată în paragraful 2.4, rezultă că

$$g_k(\mathbf{X}) = Unim \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{F}(\mathbf{F}^t\mathbf{H}) = \mathcal{F}(\mathbf{F}^t), \tag{3.27}$$

pentru orice $\mathbf{H} \in Unim$ şi pentru orice istorie de deformaţie.

Considerăm o istorie $\mathbf{F}^t$ dată şi pentru un $\mathbf{H} \in Unim$ construim istoria $\tilde{\mathbf{F}}^t = \mathbf{F}^t\mathbf{H}$. Atunci din (27) cu (26) avem

$$\mathcal{F}(\mathbf{F}^t) = \mathcal{F}(\tilde{\mathbf{F}}^t) \equiv f(\tilde{\mathbf{A}}_1(t),\ldots,\tilde{\mathbf{A}}_n(t),\tilde{\mathbf{B}}(t)), \tag{3.28}$$

unde mărimile cu " $\tilde{}$ " sunt asociate istoriei $\tilde{\mathbf{F}}^t$.

Din (7), din definiţia tensorilor Cauchy - Green la dreapta, $(13)_1$ şi din (6) rezultă

$$\tilde{\mathbf{F}}_t(\tau) = \mathbf{F}_t(\tau), \quad \tilde{\mathbf{C}}_t(\tau) = \mathbf{C}_t(\tau)\,, \quad \tilde{\mathbf{A}}_k(t) = \mathbf{A}_k(t),\ \forall \mathbf{H} \in Unim. \tag{3.29}$$

Pe de altă parte din $\tilde{\mathbf{F}}(t) = \mathbf{F}(t)\mathbf{H}$ rezultă

$$\tilde{\mathbf{B}}(t) = \mathbf{F}(t)\mathbf{H}\mathbf{H}^T\mathbf{F}^T(t). \tag{3.30}$$

Alegem transformarea $\mathbf{H} = \alpha\mathbf{F}^{-1}(t)$, cu $\alpha \in R$ astfel încât $\mathbf{H} \in Unim$. Deci $\alpha^3 = \mid det\,\mathbf{F}(t) \mid$ sau $\alpha^3 = \frac{\rho_0}{\rho}$. Cu această valoare avem $\mathbf{H} = \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{1/3}\mathbf{F}^{-1}(t) \in Unim$

Din (30) se obţine

$$\tilde{\mathbf{B}}(t) = \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{2/3}\mathbf{I}. \tag{3.31}$$

Folosim din nou proprietatea (28) a transformării de simetrie materială (de a lăsa neschimbat răspunsul materialului), utilizând reprezentarea (26) şi găsim

$$f(\tilde{\mathbf{A}}_1, \ldots, \tilde{\mathbf{A}}_n, \tilde{\mathbf{B}}(t)) = f(\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n, \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{2/3}\mathbf{I}) \equiv \hat{f}(\mathbf{A}_1, \ldots \mathbf{A}_n, \rho). \tag{3.32}$$

Prin urmare a rezultat că are loc reprezentarea constitutivă sub forma (24). Proprietatea de izotropie (25) se transformă în proprietatea de izotropie a funcţiei din (32), deci are loc proprietatea $(25)_1$.

Să arătăm că proprietatea $(25)_2$ este o consecinţă a relaţiei $(25)_1$. Fie $\mathbf{A}_k(t) = 0$, pentru orice $k \leq n$. Din $(25)_1$ obţinem că

$$\hat{f}(0, \ldots, 0, \rho) = \mathbf{Q}\hat{f}(0, \ldots, 0, \rho)\mathbf{Q}^T \quad \forall\mathbf{Q} \in Ort.$$

Prin urmare avem un tensor simetric care permută cu orice transformare ortogonală, ceea ce are loc numai pentru tensori sferici. Deci are loc proprietatea $(25)_2$.

**Demonstraţia reciprocei.** Introducem notaţia operatorială, specifică materialelor simple, de tipul relaţiei din (26), pentru reprezentarea constitutivă (24)

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \mathcal{F}(\mathbf{F}^t) \equiv \hat{f}(\mathbf{A}_1(t), \ldots, \mathbf{A}_n(t), \rho). \tag{3.33}$$

Vrem să arătăm că

$$\forall\mathbf{H} \in Unim \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{F}(\mathbf{F}^t\mathbf{H}) = \mathcal{F}(\mathbf{F}^t), \tag{3.34}$$

pentru orice istorie de deformaţie, ceea ce este echivalent cu demonstrarea faptului că reprezentarea constitutivă descrie un fluid. Din calculele anterioare, formulele (29), avem egalităţile

$$\tilde{\mathbf{F}}_t(\tau) = \mathbf{F}_t(\tau)\mathbf{H} \quad \Longrightarrow \quad \tilde{\mathbf{A}}_k(t) = \mathbf{A}_k(t), \quad \tilde{\rho} = \rho,$$

care ne conduc la egalitatea din (34), pentru reprezentarea introdusă în (33).

*Semnificaţia mecanică* este conţinută în

**Propoziţia 1.** Dacă menţinem fluidul nedeformat relativ la o configuraţie a sa deformată[2] atunci starea de tensiune corespunde unei presiuni hidrostatice.

**Demonstraţie.** Dacă $\mathbf{C}_t(\tau) = \mathbf{I} \quad \forall\, \tau \in R$, atunci $\mathbf{A}_k(\mathbf{x}t) = 0 \quad \forall k \geq 0$. Din (24) rezultă că

$$\mathbf{Q}\hat{f}(0,\ldots,0,\rho)\mathbf{Q}^T = \hat{f}(0,\ldots,0,\rho), \quad \forall\, \mathbf{Q} \in Ort.$$

Notăm $\hat{f}(0,\ldots,0,\rho) \equiv \mathbf{T}_0 \in Sim$. Atunci $\mathbf{Q}\mathbf{T}_0\mathbf{Q}^T = \mathbf{T}_0 \quad \forall \mathbf{Q} \in Ort$. De aici rezultă că $\mathbf{T}_0 = -p(\rho)\mathbf{I}$. Deci starea de tensiune se reduce la o presiune hidrostatică.

Fluidele diferenţiale de ordinul $n$, caracterizate prin reprezentarea constitutivă din Teorema 3., se numesc *fluide Rivlin - Ericksen* de ordinul $n$.

### 3.3 Materiale diferenţiale de ordinul 2

**Ecuaţia constitutivă pentru fluide de ordinul 2** se obţine din Teorema 3., pentru $n = 2$. Astfel reprezentarea constitutivă a fluidelor Rivlin - Ericksen de ordinul 2 este caracterizată de funcţia

$$f : Sim \times Sim \longrightarrow Sim \quad \text{cu proprietatea,}$$

$$f(\mathbf{Q}\mathbf{A}_1\mathbf{Q}^T, \mathbf{Q}\mathbf{A}_2\mathbf{Q}^T, \rho) = \mathbf{Q}f(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \rho)\mathbf{Q}^T,$$

pentru $\forall \mathbf{Q} \in Ort$ şi pentru $\forall \quad \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2 \in Sim$.

Wang [1970] a demonstrat diferite teoreme de reprezentare pentru funcţii cu valori scalare, vectoriale , respectiv tensoriale izotrope în argumentele lor. Utilizăm reprezentarea funcţiilor cu valori simetrice de două argumente tensori simetrici şi obţinem următoarea caracterizare

**Teorema 4.** O reprezentare constitutivă de forma (24) cu (25)

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \rho),$$

caracterizează un *fluid Rivlin - Ericksen de ordinul* 2, dacă şi numai dacă $\exists\; p$ , $\{\alpha_j\}_{1\leq j\leq 8}$ funcţii cu valori reale, dependente de $\rho$ şi de următorii invarianţi

$$\begin{aligned} &j_{\mathbf{A}_1} \equiv (\mathrm{tr}\,\mathbf{A}_1, \mathrm{tr}\,\mathbf{A}_1^2, \mathrm{tr}\,\mathbf{A}_1^3)\,, \quad j_{\mathbf{A}_2} \equiv (\mathrm{tr}\,\mathbf{A}_2, \mathrm{tr}\,\mathbf{A}_2^2, \mathrm{tr}\,\mathbf{A}_2^3), \\ &\mathrm{tr}\,\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2, \quad \mathrm{tr}\,\mathbf{A}_1^2\mathbf{A}_2, \quad \mathrm{tr}\,\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2^2, \quad \mathrm{tr}\,\mathbf{A}_1^2\mathbf{A}_2^2, \end{aligned} \tag{3.35}$$

astfel încât

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = &-p\mathbf{I} + \alpha_1\mathbf{A}_1 + \alpha_2\mathbf{A}_2 + \alpha_3\mathbf{A}_1^2 + \alpha_4\mathbf{A}_2^2 + \alpha_5(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_2\mathbf{A}_1) + \\ &+\alpha_6(\mathbf{A}_1^2\mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_2\mathbf{A}_1^2) + \alpha_7(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2^2 + \mathbf{A}_2^2\mathbf{A}_1) + \alpha_8(\mathbf{A}_1^2\mathbf{A}_2^2 + \mathbf{A}_2^2\mathbf{A}_1^2). \end{aligned} \tag{3.36}$$

[2] A se vedea Propoziţia 5. din 2.6.1.

**Teorema 5.** O reprezentare constitutivă de forma (24) cu (25)

$$\mathbf{T}(\mathbf{x},t) = f(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{B}),$$

caracterizează un corp *solid şi izotrop* de tip *Rivlin - Ericksen de ordinul* 2, dacă şi numai dacă funcţia constitutivă este definită prin intermediul funcţiilor $\{\beta_j\}_{1\leq j\leq 18}$ scalare, izotrope prin

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\mathbf{x},t) = &\beta_0\mathbf{I} + \beta_1\mathbf{A}_1 + \beta_2\mathbf{A}_2 + \beta_3\mathbf{B} + \beta_4\mathbf{A}_1^2 + \beta_5\mathbf{A}_2^2 + \beta_6\mathbf{B}^2 + \\ &+\beta_7(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_2\mathbf{A}_1) + \beta_8(\mathbf{A}_1\mathbf{B} + \mathbf{B}\mathbf{A}_1) + \beta_9(\mathbf{A}_2\mathbf{B} + \mathbf{B}\mathbf{A}_2) + \\ &+\beta_{10}(\mathbf{A}_1^2\mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_2\mathbf{A}_1^2) + \beta_{11}(\mathbf{A}_1^2\mathbf{B} + \mathbf{B}\mathbf{A}_1^2) + \beta_{12}(\mathbf{A}_2^2\mathbf{B} + \mathbf{B}\mathbf{A}_2^2) + \\ &+\beta_{13}(A_1\mathbf{A}_2^2 + \mathbf{A}_2^2\mathbf{A}_1) + \beta_{14}(A_1\mathbf{B}^2 + \mathbf{B}^2\mathbf{A}_1) + \beta_{15}(A_2\mathbf{B}^2 + \mathbf{B}^2\mathbf{A}_2) + \\ &+\beta_{16}(\mathbf{A}_1^2\mathbf{A}_2^2 + \mathbf{A}_2^2\mathbf{A}_1^2) + \beta_{17}(\mathbf{A}_1^2\mathbf{B}^2 + \mathbf{B}^2\mathbf{A}_1^2) + \beta_{18}(\mathbf{A}_2^2\mathbf{B}^2 + \mathbf{B}^2\mathbf{A}_2^2) \end{aligned} \tag{3.37}$$

Funcţiile sunt dependente de setul complet şi ireductibil de invarianţi, daţi de (35), la care se mai adaugă următorii invarianţi

$$j_{\mathbf{B}}\,, \quad \mathrm{tr}\,\mathbf{A}_j\mathbf{B}\,, \quad \mathrm{tr}\,\mathbf{A}_j^2\mathbf{B}\,, \quad \mathrm{tr}\,\mathbf{A}_j\mathbf{B}^2\,, \quad \mathrm{tr}\,\mathbf{A}_j^2\mathbf{B}^2, \quad \mathrm{tr}\,\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\mathbf{B}\,, \tag{3.38}$$

cu $j \in \{1,2\}$.

**Demonstraţie.** Un corp solid şi izotrop are grupul său de simetrie în raport cu o configuraţie nedistorsionată a sa $g_k = Ort$, în conformitate cu rezultatele prezentate în paragraful 2.7.1. Atunci rezultă, ca o consecinţă a Teoremei 2., că funcţia constitutivă din (14), scrisă pentru $n = 2$, este izotropă în raport cu argumentele sale, cei trei tensori simetrici. Utilizăm teorema lui Wang [1970] de reprezentare a funcţiilor izotrope, cu valori tensori simetrici şi având ca variabile setul de tensori $(\mathbf{A}_1\,, \mathbf{A}_2\,, \mathbf{B})$. Reprezentarea completă şi ireductibilă este dată în enunţul teoremei. Menţionăm că baza de reprezentare este generată de setul complet şi ireductibil asociat tuturor perechilor de tensori simetrici distincţi.

## 3.4. Fluide de gradul $k$

In acest paragraf definim subclase de fluide Rivlin - Ericksen, care admit reprezentări *de tip polinomial* în raport cu tensorii lui Rivlin - Ericksen. S-a definit un procedeu **raţional** de simplificare a ecuaţiilor constitutive pentru fluide Rivlin- Ericksen de ordinul $n$.

Presupunem o mişcare $\chi : \mathcal{B}\times \longrightarrow \mathcal{E}$, dată. Construim o familie de mişcări depinzând de parametrul $r \in R_+$, definită prin

$$\chi^{(r)}(\mathbf{X},t) \equiv \chi(\mathbf{X},rt), \quad \forall r > 0. \tag{3.39}$$

Să observăm că dacă prin mişcarea $\chi$ particula $\mathbf{X}$, la momentul $t$, ocupă poziţia $\mathbf{x}$, atunci prin mişcarea $\chi^{(r)}(\mathbf{X},t)$ ocupă aceeaşi poziţie la momentul $\dfrac{t}{r}$.

**Definiţia 4.** Mişcarea $\chi^{(r)}(\mathbf{X},t)$, cu $0 < r < 1$ se numeşte *mişcare încetinită* asociată mişcării $\chi$.

**Propoziţia 2.** Pentru mişcări încetinite asociate mişcării $\chi$ au loc formulele

$$\mathbf{A}_n^{(r)}(t) = r^n \mathbf{A}_n(t) \quad \forall r > 0\,, \quad n \in \mathbf{N}, \tag{3.40}$$

în care poziţiile spaţiale ale particulei $\mathbf{X}$ corespund imaginilor prin mişcarea încetinită şi prin mişcarea dată la acelaşi moment de timp $t$.

**Demonstraţie**. Au loc formulele $\mathbf{F}^{(r)}(\mathbf{X},t) = \mathbf{F}(\mathbf{X},rt) \quad \forall r > 0$. Deci $\mathbf{F}_t^{(r)}(\mathbf{X},\tau) = \mathbf{F}(\mathbf{X},r\tau)(\mathbf{F}(\mathbf{X},rt))^{-1}$.

Folosim formula (1.52) iii) din paragraful 1.3

$$\mathbf{C}_t(\mathbf{x},\tau) = (\mathbf{F}(\mathbf{X},t))^{-T}\mathbf{C}(\mathbf{X},\tau)(\mathbf{F}(\mathbf{X},t))^{-1},$$

pentru mişcarea încetinită şi prin derivare de ordinul n, în raport cu $\tau$ rezultă că

$$\frac{\partial^n}{\partial \tau^n}\mathbf{C}_t^{(r)}(\tau) = r^n \frac{\partial^n}{\partial \tau^n}\mathbf{C}_t(\tau). \tag{3.41}$$

Prin urmare dacă vom considera pe $\tau = t$, din formula anterioară obţinem (40).

**Definiţia 5.** Un fluid Rivlin - Ericksen *de ordinul* n şi *gradul* k este definit ca un fluid de ordinul $n$, care satisface următoarele *ipoteze*

i) funcţia constitutivă $f$ este un polinom în argumentele sale $\{\mathbf{A}_j(\mathbf{x},t)\}_{1\leq j\leq n}$

ii) pe mişcările încetinite $\chi^r(\mathbf{X},t)$ valoarea funcţiei constitutive reprezintă un polinom de gradul $k$.

**Menţionăm că** *nu este neapărat necesară* introducerea fluidelor polinomiale făcând apel la descrierea pe mişcări încetinite . Legile respective sunt valabile, atât ca propuneri de legi constitutive cât şi ca formule matematice, pe orice fel de mişcări dacă axiomele mecanicii sunt satisfăcute.

Fluidul Rivlin - Ericksen *de ordinul 1* se reprezintă sub forma

$$\mathbf{T}(\mathbf{x},t) = -p\mathbf{I} + \alpha_1\mathbf{A}_1 + \alpha_2\mathbf{A}_1^2, \tag{3.42}$$

cu $p, \alpha_1, \alpha_2$ funcţii depinzând de $\rho, j_{\mathbf{A}_1} \equiv (\mathrm{tr}\,\mathbf{A}_1,\ \mathrm{tr}\,\mathbf{A}_1^2, \mathrm{tr}\,\mathbf{A}_1^3)$.

Având în vedere că $\mathbf{A}_1 = 2\,\mathbf{D}$, în conformitate cu Propoziţia 10. din paragraful 1.4, observăm că acestea coincid cu fluidele Reiner - Rivlin, reprezentate în Teorema 14. din 2.6.2.

*Fluidul de gradul 1* pe o mişcare încetinită trebuie să fie un polinom de gradul 1 în variabila $r$.

$$\mathbf{T}(\mathbf{x},t) = (-p + \lambda \mathrm{tr}\,\mathbf{A}_1)\mathbf{I} + \mu\mathbf{A}_1, \tag{3.43}$$

cu $p, \lambda, \mu$ funcţii ce depind numai de $\rho$.

Menţionând din nou că $\mathbf{A}_1 = 2\,\mathbf{D}$ regăsim clasa fluidelor liniar vâscoase, compresibile, dată în (2.114).

Dacă fluidul este *incompresibil* atunci rezultă

$$\mathbf{T}(\mathbf{x},t) = -p\mathbf{I} + \mu\mathbf{A}_1, \tag{3.44}$$

cu $\lambda, \mu$ constante de material, iar $p$ funcţie de $(\mathbf{x}, t)$, conform cu principiul determinismului modificat introdus în 2.3 şi prezentat în Teorema 5. pentru cazul incompresibil. Regăsim deci clasa fluidelor liniar vâscoase incompresibile, numite şi fluide newtoniene.

Vom considera acum *fluidul de gradul 2.* Pornim de la reprezentarea constitutivă pentru fluidele de ordinul doi, descrisă prin formula (37). Ţinem seama că pe mişcările încetinite, conform Definiţiei 5., trebuie să obţinem un polinom de gradul 2 în variabila $r$.

Rezultă că ***fluidul de gradul 2*** se reprezintă sub forma

$$\begin{aligned}\mathbf{T}(\mathbf{x},t) = \; & [-\bar{p} + \lambda\mathrm{tr}\,\mathbf{A}_1 + \alpha_{10}\mathrm{tr}\,\mathbf{A}_2 + \alpha_{20}\mathrm{tr}\,\mathbf{A}_1^2]\mathbf{I} + \\ & +[\mu + \alpha_{11}\mathrm{tr}\,\mathbf{A}_1]\mathbf{A}_1 + \alpha_1\mathbf{A}_2 + \alpha_2\mathbf{A}_1^2,\end{aligned} \tag{3.45}$$

cu $\bar{p}, \lambda, \mu, \alpha_j$ funcţii cu valori scalare, depinzând de $\rho$.

Reprezentarea constitutivă pentru ***fluidul incompresibil de gradul 2*** este descrisă prin

$$\mathbf{T}(\mathbf{x},t) = -p\mathbf{I} + \mu\mathbf{A}_1 + \alpha_1\mathbf{A}_2 + \alpha_2\mathbf{A}_1^2, \tag{3.46}$$

cu $\mu, \alpha_j$ constante de material, iar $p$ este funcţie de $(\mathbf{x}, t)$, conform cu principiul determinismului modificat.

**Observaţia 2.** Reprezentarea anterioară se obţine din (45) în care se înlocuieşte $\mathrm{tr}\,\mathbf{A}_1 = 0$, care caracterizează condiţia de incompresibilitate, în baza relaţiei $\mathbf{A}_1 = 2\mathbf{D}$, deja menţionate.

**Observaţia 3.** Nu pot fi definite fluidele Rivlin - Ericksen de ordinul 1 şi gradul 3, deoarece în baza teoremei Hamilton - Cayley, vezi anexa A1., acestea se reduc la unul de gradul 2.

Vom considera acum *fluidul de gradul 3.* Pornim de la reprezentarea constitutivă pentru fluidele de ordinul trei (descrise constitutiv prin formula (24) cu (25), pentru $n = 3$) dedusă în Teorema 3. Astfel reprezentarea constitutivă a *fluidelor Rivlin - Ericksen de ordinul 3* este caracterizată de funcţia

$$f : Sim^3 \longrightarrow Sim \quad \text{cu proprietatea,}$$

$$f(\mathbf{Q}\mathbf{A}_1\mathbf{Q}^T, \mathbf{Q}\mathbf{A}_2\mathbf{Q}^T, \mathbf{Q}\mathbf{A}_3\mathbf{Q}^T, \rho) = \mathbf{Q}f(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3, \rho)\mathbf{Q}^T,$$

pentru orice $\mathbf{Q} \in Ort$ şi pentru orice $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3 \in Sim.$

Pe de altă parte în Teorema 5. am caracterizat reprezentarea funcţiilor cu valori tensori simetrici, izotrope în raport cu un set de invarianţi de trei tensori simetrici, care în cazul considerat aici vor fi $(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3)$. Deci fluidul Rivlin - Ericksen de ordinul trei admite reprezentarea constitutivă de forma (37), (38) cu deosebirile că $\mathbf{B}$ este înlocuit cu $\mathbf{A}_3$, iar funcţiile scalare $\beta$ depind de asemenea de densitatea $\rho$ a fluidului.

Ţinem seama că pe mişcările încetinite, conform Definiţiei 5., trebuie să obţinem un polinom de gradul 3 în variabila $r$, pentru a avea *fluide de gradul 3* şi respectiv de ordinul 3.

Cu observaţiile anterioare, folosind reprezentarea din Teorema 5., (37), (38), din care reţinem numai termenii care genereazä pe mişcări încetinite polinoame de gradul 3 în variabila $r$, rezultă că *fluidulele de gradul 3, compresibile* se reprezintă sub forma

$$\begin{aligned}\mathbf{T}(\mathbf{x},t) &= (\alpha_0+\alpha_1\mathrm{tr}\,\mathbf{A}_1+\alpha_2\mathrm{tr}\,\mathbf{A}_2+\alpha_3\mathrm{tr}\,\mathbf{A}_1^2+\alpha_4\mathrm{tr}\,\mathbf{A}_3)\mathbf{I}+\\ &+(\gamma_0+\gamma_1\mathrm{tr}\,\mathbf{A}_1+\gamma_2\mathrm{tr}\,\mathbf{A}_2+\gamma_3\mathrm{tr}\,\mathbf{A}_1^2)\mathbf{A}_1+\beta_3\mathbf{A}_3+\\ &+(\delta_0+\delta_1\mathrm{tr}\,\mathbf{A}_1)\mathbf{A}_2+(\lambda_0+\lambda_1\mathrm{tr}\,\mathbf{A}_1)\mathbf{A}_1^2+\beta_7(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2+\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1)\end{aligned} \tag{3.47}$$

în care coeficienţii depind numai de $\rho$.

Pentru obţinerea reprezentării constitutive a *fluidelor de gradul 3, incompresibile* aplicăm procedeul utilizat pentru fluide de gradul 2, incompresibile. Deducem

$$\begin{aligned}\mathbf{T}(\mathbf{x},t) &= -p(\mathbf{x},t)\,\mathbf{I}+(\gamma_0+\gamma_2\mathrm{tr}\,\mathbf{A}_2+\gamma_3\mathrm{tr}\,\mathbf{A}_1^2)\mathbf{A}_1+\beta_3\mathbf{A}_3+\\ &+\delta_0\,\mathbf{A}_2+\lambda_0\,\mathbf{A}_1^2+\beta_7(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2+\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1),\end{aligned} \tag{3.48}$$

în care coeficienţii sunt, de această dată, constanţi. $p(\mathbf{x},t)$ este presiunea de tip hidrostatic, nedeterminată constitutiv şi se obţine din ecuaţiile de mişcare, ţinând seama de restricţia de incompresibilitate $\mathrm{tr}\,\mathbf{A}_1=2\,\mathrm{tr}\,\mathbf{D}=0$, sau $\mathrm{div}\,\mathbf{v}=0$.

Incheiem cu **remarca**: Dacă ţinem seama de restricţiile impuse de legea a doua a termodinamicii, în cazul fluidelor de ordinul 3, incompresibile , (vezi Ţigoiu [1987] ) supuse numai la procese mecanice atunci *reprezentarea constitutivă* pentru un *fluid incompresibil de gradul 3* capătă forma (cu o renotare a coeficienţilor)

$$\begin{aligned}\mathbf{T}(\mathbf{x},t) &= -p(\mathbf{x},t)\mathbf{I}+\mu\mathbf{A}_1+\alpha_1(\mathbf{A}_2-\mathbf{A}_1^2)+\beta_1\mathbf{A}_3+\\ &+\beta_2(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2+\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1)+\beta_3(\mathrm{tr}\mathbf{A}_1^2)\mathbf{A}_1,\end{aligned} \tag{3.49}$$

iar constantele de material verifică următoarele restricţii (a se vedea şi nota de subsol din paragraful următor)

$$\mu>0,\quad \alpha_1>0,\quad \beta_1<0,\quad 2(\beta_3+\beta_2)+\beta 1\geq 0.$$

Fluidele de gradul 2 au fost studiate sub diferite aspecte ale comportamentului lor de Dunn, Fosdick [1974] , Fetecău [1995] în timp ce pentru cele de gradul trei amintim studiul lui Fosdick, Rajagopal [1980] şi cel mai general efectuat de Ţigoiu [1987]. Pentru informaţii mai complete trimitem pe cititor la lucrările citate sau la Huilgol şi Phan - Thien [1986].

## 3.5 Mişcarea staţionară a unui fluid de gradul 3 prin conducte Mişcări secundare

Vom exemplifica, în clasa fluidelor incompresibile de gradul 3, formularea problemei cu date la limită care descrie mişcarea staţionară a fluidului în conducte infinite şi vom prezenta soluţia dată de Ţigoiu [1995] a.

Fie $\{\mathbf{i}_k\}_{k\in\{\overline{1,3}\}}$ un reper cartezian fixat, cu axa $\mathbf{i}_3$ coincizând cu axa de simetrie a conductei. Fie $\Omega = \{(x^1, x^2, x^3) \mid (x^1, x^2) \in \Sigma \subset \mathbf{R}^2, \quad x^3 \in R\}$ cu $\Sigma-$ simplu conexă, domeniul în care are loc mişcarea fluidului.

Ne punem următoarea **Problemă**

Să se determine câmpul de viteze $\mathbf{v}$ şi presiunea $p$ care în $\Omega$ satisfac

- *ecuaţiile de mişcare* $\operatorname{div}\mathbf{T}+\rho_0\mathbf{b} = \rho_0\nabla\mathbf{v}[\mathbf{v}]$, forţele volumice derivă dintr-un potenţial $\mathbf{b} = -\nabla\psi$

- condiţia de *incompresibilitate* $\operatorname{div}\ \mathbf{v} = 0$

- *reprezentarea constitutivă* pentru un *fluid incompresibil de gradul 3* de forma

$$\mathbf{T}(\mathbf{x},t) = -p(\mathbf{x},t)\mathbf{I} + \mathbf{T}_E(\mathbf{x},t) \tag{3.50}$$

unde $\mathbf{T}_E$ este

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_E(\mathbf{x},t) \equiv \mu\mathbf{A}_1 + \alpha_1(\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1^2) + \beta_1\mathbf{A}_3 - 3/2\beta_1(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_2\mathbf{A}_1)+\\ +\beta_3(\mathrm{tr}\mathbf{A}_1^2)\mathbf{A}_1.\end{aligned} \tag{3.51}$$

Constantele de material verifică următoarele restricţii[3]

$$\mu > 0, \quad \alpha_1 > 0, \quad \beta_1 < 0, \quad \beta_3 - \beta_1 \geq 0, \tag{3.52}$$

- *condiţiile de aderenţă* pe $\partial\Sigma \times R \subset \partial\Omega$, pereţii rigizi ai tubului

$$\mathbf{v}\ |_{\partial\Sigma} = 0,$$

- mişcarea se face cu un *gradient de presiune constant* .

Se face următoarea **ipoteză cinematică**: mişcarea *staţionară* este descrisă prin câmpul de viteze

$$\mathbf{v}(x_1, x_2, x_3) = v(x_1, x_2)\mathbf{i}_3 + \mathbf{u}(x_1, x_2) \tag{3.53}$$

cu câmpul $\mathbf{u}(x_1, x_2) \cdot \mathbf{i}_3 = 0$.

**Observaţia 4.** Existenţa câmpului $\mathbf{u}(x_1, x_2)$ este legată de apariţia *mişcărilor secundare* în tuburi, cu secţiunea $\Sigma$ necirculară. Este de remarcat că, în cazul

[3]Restricţiile formulate sunt de natură termodinamică, fiind acceptate şi pe procese mecanice. Au fost deduse în Ţigoiu [1987], fiind ceva mai generale decât cele deduse în Fosdick şi Rajagopal [1980].

fluidului newtonian, orice astfel de mişcare se face pe linii de curent paralele cu axul conductei, indiferent de forma secţiunii. Această proprietate nu va mai fi adevărată în cazul fluidelor ne - newtoniene (în particular în cazul fluidului de gradul trei, ceea ce produce , după cum se va vedea în final, la o posibilă experienţă de laborator din care să se deducă o relaţie între constantele constitutive, necesară pentru determinarea acestora.

**Propoziţia 2.** Câmpul de viteze (53) satisface condiţia de incompresibilitate dacă şi numai dacă

$$\operatorname{div}\mathbf{u}(x_1,x_2)=0. \tag{3.54}$$

Aceasta împreună cu proprietatea de simplă conexiune a domeniului conduce la existenţa unui potenţial $\varphi(x_1,x_2)$ astfel încât

$$\mathbf{u}(x_1,x_2)=-\frac{\partial\varphi}{x_2}\mathbf{e}_1+\frac{\partial\varphi}{x_1}\mathbf{e}_2\equiv(\nabla\varphi(x_1,x_2))^{\perp}. \tag{3.55}$$

Reciproca este de asemenea adevărată, aşa cum este uşor de verificat.

Este imediat de observat din (53) că deoarece câmpul de viteze **v** este independent de $x_3$ rezultă că $\mathbf{T}_E$ şi $\nabla)\mathbf{v}[\mathbf{v}]$ sunt de asemenea independenţi de $x_3$. Atunci notând cu $\Delta p$ variaţia de presiune raportată la unitatea de lungime, interpretată ca *forţa specifică* care generează mişcarea fluidului, rezultă următoarea

**Propoziţia 3.** In condiţiile descrise mai sus potenţialul generalizat $\varphi^{(1)}$ este dat de

$$\varphi^{(1)}=p/\rho+\psi,\quad \mathbf{b}=-\mathrm{grad}\psi, \tag{3.56}$$

este independent de $x_3$ şi

$$\rho\varphi^{(1)}(x_1,x_2,x_3)=-\alpha x_3+f(x_1,x_2). \tag{3.57}$$

In acelaşi timp

$$\alpha=-\frac{\partial p}{\partial x_3}=\frac{\partial T_{33}}{\partial x_3}. \tag{3.58}$$

Deci $\alpha\equiv\Delta p$.

**Demonstraţie**. Din ecuaţia de mişcare rezultă că $\dfrac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial x_3}=0$ şi are loc reprezentarea din (57). Din (56) rezultă egalităţile din formula (58) cu interpretarea constantei $\alpha$, menţionată în enunţ.

Notăm prin $T_{ij}=\mathbf{i}_i\cdot\mathbf{T}\mathbf{i}_j$ componentele tensorului de tensiune în baza carteziană.

Ca o consecinţă a ipotezei cinematice formulate în (53) rezultă

**Propoziţia 4.** Au loc următoarele relaţii

$$
\begin{aligned}
&\nabla \mathbf{v} = \mathbf{i}_3 \otimes \nabla v + \nabla \mathbf{u}, \\
&\nabla \mathbf{v}[\mathbf{v}] = (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v})\mathbf{i}_3 + \nabla \mathbf{u}[\mathbf{u}], \\
&\mathbf{T}_E = t_n(\mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{i}_3) + \mathbf{t} \otimes \mathbf{i}_3 + \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{t} + \mathbf{T}_\tau,
\end{aligned}
\tag{3.59}
$$

în care s-au introdus notaţiile

$$
\begin{aligned}
&t_n \equiv (\mathbf{T}_E)_{33}, \\
&\mathbf{t} \equiv (\mathbf{T}_E)_{3i}\mathbf{i}_3, \quad i = 1,2, \\
&\mathbf{T}_\tau \equiv \sum_{i,j \neq 3} (\mathbf{T}_E)_{ij}(\mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{i}_3),
\end{aligned}
\tag{3.60}
$$

$\mathbf{T}_\tau$ definit într-un plan ortogonal pe direcţia $\mathbf{i}_3$

**Propoziţia 5.** Ecuaţiile de mişcare în direcţia $\mathbf{i}_3$ şi în planul ortogonal pe $\mathbf{i}_3$), sunt date sub forma

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{div}\mathbf{t} + [\Delta p] = \rho_0 \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v}, \\
&\mathrm{div}\mathbf{T}_\tau - \nabla f = \rho_0 \nabla \mathbf{u}[\mathbf{u}],
\end{aligned}
\tag{3.61}
$$

în care operatorii $\mathrm{div}(\cdot)$ şi $\nabla(\cdot)$ se aplică funcţiilor dependente de variabilele $(x_1, x_2)$.

Condiţiile de aderenţă pe peretele rigid al tubului

$$
\mathbf{v}(x_1, x_2, x_3) \mid_{\partial\Sigma} = 0, \tag{3.62}
$$

sunt echivalente cu

$$
v(x_1, x_2) \mid_{\partial\Sigma} = 0\,, \quad \mathbf{u}(x_1, x_2) \mid_{\partial\Sigma} = 0. \tag{3.63}
$$

Reformulând condiţia prin intermediul potenţialului vitezei (mai puţin o constantă aditivă) avem

$$
\varphi(x_1, x_2) \mid_{\partial\Sigma} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n}(x_1, x_2) \mid_{\partial\Sigma} = 0, \tag{3.64}
$$

unde prin $\mathbf{n}$ s-a notat versorul normalei la $\partial\Sigma$. **Demonstraţie**. Dintr-un calcul direct, în ipoteza cinematică (53) se deduc formele ecuaţiilor de mişcare scrise în (59), (60). Din (55) şi $(53)_2$ rezultă forma (64) pentru condiţiile pe peretele rigid.

**Observaţia 5.** Dacă, *căderea de presiune* $\Delta p$ este nulă atunci soluţia problemei corespunde fluidului aflat în repaus şi este dată prin

$$
v = 0, \quad \mathbf{u} = 0, \quad \rho\varphi^{(1)} = p + \rho\varphi = 0. \tag{3.65}
$$

Vom prezenta acum **analiza asimptotică a curgerii.** Problema formulată va fi rezolvată prin *metoda aproximaţiilor succesive* în ipoteza mişcărilor lente, modelată prin condiţia : forţa specifică a mişcării, raportată la unitatea de lungime este $\Delta p = \epsilon H$, cu $\epsilon \ll 1$.

Presupunem că pentru $\epsilon \ll 1$, există soluţii netede în raport cu $\epsilon$ astfel încât

$$v = \sum_{r=1}^{n} \epsilon^r v_r + O(\epsilon^{n+1}),$$

$$\mathbf{u} = \sum_{r=1}^{n} \epsilon^r \mathbf{u}_r + O(\epsilon^{n+1}); \quad \mathbf{u}_r = (\nabla \varphi_r)^{\perp}, \tag{3.66}$$

$$f = \sum_{r=1}^{n} \epsilon^r f_r + O(\epsilon^{n+1}).$$

Eroarea este de ordinul $O(\epsilon^{n+1})$ în raport cu $x_1, x_2$.

**Observaţia 6.** Vom face câteva remarci privid **analiza dimensională** a problemei.

In primul rând $\epsilon$ este forţa specifică adimensională a mişcării şi $H$ reprezintă o forţă caracteristică a problemei.

Fie acum $a$ (de exemplu axa mare a elipsei dacă secţiunea are această formă) o lungime caracteristică şi $U_o$ o viteză caracteristică.

In variable adimensionale rezulată

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_E &= \frac{\mu U_o}{a}\mathbf{A}_1 + \frac{\alpha_1 U_o^2}{a^2}(\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1^2) + \frac{\beta_1 U_o^3}{a^3}\mathbf{A}_3 - \\ &- \frac{3\beta_1 U_o^3}{2a^3}(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_2\mathbf{A}_1) + \frac{\beta_3 U_o^3}{a^3}(\mathrm{tr}\mathbf{A}_1^2)\mathbf{A}_1 \end{aligned} \tag{3.67}$$

şi deci

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{T}_E = \frac{\mu U_o}{a^2}\{&\operatorname{div}\mathbf{A}_1 + \tilde{\alpha}_1 \operatorname{div}(\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1^2) + \\ &+ \tilde{\beta}_1 \operatorname{div}\left(\mathbf{A}_3 - \frac{3}{2}(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_2\mathbf{A}_1)\right) + \tilde{\beta}_3 \operatorname{div}[(\mathrm{tr}\mathbf{A}_1^2)\mathbf{A}_1]\}. \end{aligned} \tag{3.68}$$

In relaţia (68) constantele adimensionale sunt date prin

$$\tilde{\alpha}_1 = \alpha_1 \frac{U_o}{\mu a}; \quad \tilde{\beta}_i = \beta_i \frac{U_o^2}{\mu a^2}; \quad i = 1, 3. \tag{3.69}$$

Constantele din (69) pot fi rescrise prin intermediul numărului lui Weissenberg sub forma

$$\tilde{\alpha}_1 \equiv W_a^{(o)}; \quad \tilde{\beta}_i = 1 - \frac{W_a}{W_a^{(o)}}, \tag{3.70}$$

unde $W_a \equiv \lambda_1 \dfrac{U_o}{a}$ ( $\lambda_1$ reprezentând un timp de relaxare) şi $W_a^{(o)} = \alpha_1 \dfrac{U_o}{\mu a}$ este prima aproximaţie a numărului lui Weissenberg pentru mişcarea fluidului considerat.

In variabile adimensionale ecuaţiile de miscare (61) se pot scrie acum sub forma

$$\begin{aligned} &\operatorname{div} \mathbf{t} + \epsilon\gamma = \operatorname{Re} \mathbf{u} \cdot \nabla v \\ &\operatorname{div} \mathbf{T}_r - \gamma \nabla f = \operatorname{Re} \nabla \mathbf{u}[\mathbf{u}], \end{aligned} \tag{3.71}$$

unde constanta $\gamma \equiv \dfrac{Ha}{\mu U_o}$.

**Observaţia 7.** Dezvoltările pentru $\mathbf{t}$ şi $\mathbf{T}_r$ din descompunerea prezentată în $(59)_3$ se obţin prin introducerea dezvoltărilor (66) în (67). Dacă aceste rezultate sunt introduse acum în (71), prin egalarea coeficienţilor diferitelor puteri ale lui $\epsilon$, se obţine succesiunea de ecuaţii cu derivate parţiale pentru necunoscutele $v_r$, $q_r$ şi $f_r$. Aceste ecuaţii vor fi rezolvate pentru următoarele condiţii pe frontieră (obţinute din (63))

$$v_r = 0, \quad q_r = 0, \quad \frac{\partial q_r}{\partial n} = 0 \quad \text{pe} \quad \partial\Sigma \tag{3.72}$$

Nu vom preciza întreaga dezvoltare pentru $\mathbf{T}_E$. Aceasta se va efectaua recurent. Să observăm că

$$\begin{aligned} &\mathbf{A}_1 \equiv \sum_{r=1}^{n} \epsilon_r (\mathbf{e}_3 \otimes \nabla v_r + \nabla v_r \otimes \mathbf{e}_3 + \nabla \mathbf{u}_r + \nabla^T \mathbf{u}_r) + O(\epsilon^{n+1}), \\ &\mathbf{A}_2 \equiv O(\epsilon^2), \quad \mathbf{A}_3 \equiv O(\epsilon^3). \end{aligned}$$

Vom pune în discuţie succesiunea de probleme cu date pe frontieră după cum urmează

**Propoziţia 6.** La primul pas de aproximare se deduce reprezentarea

$$\mathbf{T}_E = \frac{\mu U_o}{a} \epsilon \left(\mathbf{e}_3 \otimes \nabla v_1 + \nabla v_1 \otimes \mathbf{i}_3 + \nabla \mathbf{u}_1 + \nabla^T \mathbf{u}_1\right) + O(\epsilon^2) \tag{3.73}$$

şi respectiv

$$\begin{aligned} &\mathbf{t} = \epsilon \frac{\mu U_o}{a} \nabla v_1 + O(\epsilon^2) \\ &\mathbf{T}_r = \epsilon \frac{\mu U_o}{a} (\nabla \mathbf{u}_1 + \nabla^T \mathbf{u}_1) + O(\epsilon^2) \\ &t_n = 0 + O(\epsilon^2). \end{aligned} \tag{3.74}$$

Aproximaţia sistemului (71) este

$$\begin{aligned} &\nabla v_1 = -\gamma, \\ &\operatorname{div}(\nabla \mathbf{u}_1 + \nabla^T \mathbf{u}_1) - \gamma \nabla f_1 = 0, \end{aligned} \tag{3.75}$$

cu condiţiile pe frontieră

$$v_1 \,|_{\partial\Sigma} = 0, \quad \varphi_1 \,|_{\partial\Sigma} = 0, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} \,|_{\partial\Sigma} = 0. \tag{3.76}$$

**Demonstraţie**. Dacă se utilizează $(59)_3$ din (73) se deduc reprezentările din (74).

**Observaţia 8.** Problema $(75)_1-(76)_1$ este o problemă Dirichlet pentru ecuaţia Poisson. Rezultă din proprietăţi cunoscute că are o unică soluţie $v_1$.

Problema $(75)_2-(76)_{2,3}$ trebuie să fie corect formulată. Dar cum $\mathbf{u}(x_1,x_2)=(\nabla\varphi(x_1,x_2))^{\perp}$ rezultă dintr-un calcul simplu că

$$\operatorname{div}(\nabla\mathbf{u}+\nabla^T\mathbf{u})=(\nabla(\Delta\varphi))^{\perp}. \tag{3.77}$$

Prin urmare din ecuaţia $(75)_2$ (dacă considerăm întâi operaţia "$\perp$" şi apoi aplicăm divergenţa) se deduce următoarea ecuaţie pentru $\varphi_1$

$$\Delta\Delta\varphi_1=0. \tag{3.78}$$

Cu cele de mai sus este imediată

**Propoziţia 7.** Ecuaţia biarmonică (78) cu condiţiile pe frontieră $(76)_{2,3}$ admite numai soluţia nulă şi

$$\mathbf{u}_1=(\nabla\varphi_1)^{\perp}=0. \tag{3.79}$$

**Observaţia 9.** Prima aproximaţie pentru $\mathbf{T}_E$ coincide cu reprezentarea constitutivă Navier - Stokes. Rezultă că fluidul Navier - Stokes nu poate accepta mişcări secundare în conducte drepte cu secţiuni domenii simplu conexe.

Trecem acum la **aproximaţia de ordinul doi**. Acelaşi tip de raţionament ne conduce la

**Propoziţia 8.** Expresia lui $\mathbf{T}_E$ cu descompunerile $(59)_3$ este dată prin

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_E=\frac{\mu U_o}{a}\{\epsilon\,(\mathbf{i}_3\otimes\nabla v_1+\nabla v_1\otimes\mathbf{i}_3+\epsilon^2[\mathbf{i}_3\otimes\nabla v_2+\nabla v_2\otimes\mathbf{i}_3+\\+\nabla\mathbf{u}_2+\nabla^T\mathbf{u}_2+\tilde{\alpha}_1(\nabla v_1\otimes\nabla v_1-\mid\nabla v_1\mid^2\mathbf{i}_3\otimes\mathbf{i}_3)]\}+O(\epsilon^3)\end{aligned} \tag{3.80}$$

şi respectiv

$$\begin{aligned}\mathbf{t}&=\frac{\mu U_o}{a}[\epsilon\,\nabla v_1+\epsilon^2\,\nabla v_2]+O(\epsilon^3),\\ \mathbf{T}_\tau&=\frac{\mu U_o}{a}\epsilon^2[(\nabla\mathbf{u}_2+\nabla^T\mathbf{u}_2)+\tilde{\alpha}_1(\nabla v_1\otimes\nabla v_1)]+O(\epsilon^3),\\ t_n&=-\frac{\mu U_o}{a}\epsilon^2\,\tilde{\alpha}_1\mid\nabla\mathbf{v}_1\mid^2+O(\epsilon^3).\end{aligned} \tag{3.81}$$

**Propoziţia 9.** Aproximaţia de ordinul doi a sistemului (71) este

$$\begin{aligned}&\Delta v_2=0,\\ &\operatorname{div}(\nabla\mathbf{u}_2+\nabla^T\mathbf{u}_2)+\tilde{\alpha}_1\operatorname{div}(\nabla v_1\otimes\nabla v_1)-\gamma\nabla f_2=0,\end{aligned} \tag{3.82}$$

cu următoarele condiţii pe frontieră

$$\begin{aligned} &v_2 \mid_{\partial\Sigma} = 0, \\ &\varphi_2 \mid_{\partial\Sigma} = 0, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \mid_{\partial\Sigma} = 0. \end{aligned} \tag{3.83}$$

**Observaţia 10.** Problema lui Dirichlet formulată în $(82)_1 - (83)_1$ are o unică soluţie

$$v_2 \equiv 0 \tag{3.84}$$

Din $(82)_2$ printr-un raţionament similar cu cel utilizat în Observaţia 8. pentru prima aproximaţie obţinem că

$$\Delta\Delta\varphi_2 = 0. \tag{3.85}$$

**Propoziţia 10.** Problema $(82)_2 - (83)_{2,3}$ admite o unică soluţie care este

$$\mathbf{u}_2 = (\nabla\varphi_2)^{\perp} = 0. \tag{3.86}$$

In **aproximaţia de ordinul trei** au loc afirmaţiile conţinute în

**Propoziţia 11.** Din $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2 = 0, \quad v_2 = 0$ rezultă că $\mathbf{A}_3 = O(\epsilon^5)$.

Aproximaţia de ordinul trei pentru tensiunea efectivă este

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_E = &\frac{\mu U_o}{a}\{\epsilon\,(\mathbf{i}_3 \otimes \nabla v_1)^S + \tilde{\alpha}_1\epsilon^2[\nabla v_1 \otimes \nabla v_1 - \mid \nabla v_1 \mid^2 \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{i}_3] + \\ &+\epsilon^3[(\mathbf{i}_3 \otimes \nabla v_3)^S + (\nabla \mathbf{u}_3)^S + (2\tilde{\beta}_3 - 3\tilde{\beta}_1) \mid \nabla v_1 \mid^2 (\nabla v_1 \otimes \mathbf{i}_3)^S]\} + O(\epsilon^4), \end{aligned} \tag{3.87}$$

unde s-a folosit notaţia $(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})^S = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} + \mathbf{b} \otimes \mathbf{a}$. Descompunerea $(59)_3$ devine

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= \frac{\mu U_o}{a}\{\epsilon\nabla v_1 + \epsilon^3[\nabla v_3 + (2\tilde{\beta}_3 - 3\tilde{\beta}_1) \mid \nabla v_1 \mid^2 \nabla v_1]\} + O(\epsilon^4), \\ \mathbf{T}_\tau &= \frac{\mu U_o}{a}\{\tilde{\alpha}_1\epsilon^2(\nabla v_1 \otimes \nabla v_1) + \epsilon^3(\nabla \mathbf{u}_3)^S\} + O(\epsilon^4), \\ t_n &= -\frac{\mu U_o}{a}\tilde{\alpha}_1\epsilon^2 \mid \nabla v_1 \mid^2 + O(\epsilon^4), \end{aligned} \tag{3.88}$$

iar aproximaţia de ordinul trei pentru sistemul (71) este

$$\begin{aligned} &\Delta v_3 + (2\tilde{\beta}_3 - 3\tilde{\beta}_1)\mathrm{div}(\mid \nabla v_1 \mid^2 \nabla v_1) = 0, \\ &\mathrm{div}(\nabla \mathbf{u}_3 + \nabla^T \mathbf{u}_3) - \gamma\nabla f_3 = 0. \end{aligned} \tag{3.89}$$

In mod corespunzător datele pe frontieră sunt scrise sub forma

$$\begin{aligned} &v_3 \mid_{\partial\Sigma} = 0, \\ &\varphi_3 \mid_{\partial\Sigma} = 0, \quad \frac{\partial \varphi_3}{\partial n} \mid_{\partial\Sigma} = 0. \end{aligned} \tag{3.90}$$

**Observaţia 11.** Problema Dirichlet $(89)_1 - (90)_1$ are o unică soluţie nenulă $v_3$ ( căci $\tilde{\beta}_3 - 3/2\tilde{\beta}_1 > 0$, având în vedere restricţia constitutivă (52)).

Ecuaţia (89)$_2$ cu condiţiile pe frontieră (90)$_{2,3}$ conduc la următoarea problemă la limită

$$\begin{aligned}&\Delta\Delta\varphi_3 = 0,\\ &\varphi_3 \mid_{\partial\Sigma} = 0, \quad \frac{\partial\varphi_3}{\partial n} \mid_{\partial\Sigma} = 0.\end{aligned} \tag{3.91}$$

Deducem că (90) admite numai soluţia nulă

$$\mathbf{u}_3 = (\nabla\varphi_3)^{\perp} = 0. \tag{3.92}$$

Vom trece acum la **aproximaţia de ordinul 4**. Dintr-un calcul lung, dar direct pe care nu-l reproducem aici deducem, pe baza rezultatelor puse în evidenţă în paşii anteriori, că are loc

**Propoziţia 12.** Tensiunea efectivă are expresia

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_E \equiv \frac{\mu U_o}{a}\{&\epsilon\,(\mathbf{i}_3\otimes\nabla v_1)^S + \epsilon^2\tilde{\alpha}_1(\nabla v_1\otimes\nabla v_1 - \mid\nabla v_1\mid^2 \mathbf{i}_3\otimes\mathbf{i}_3)+\\ &+\epsilon^3[(\mathbf{i}_3\otimes\nabla v_3)^S + (2\tilde{\beta}_3 - 3\tilde{\beta}_1)\mid\nabla v_1\mid^2 (\nabla v_1\otimes\mathbf{i}_3)^S]+\\ &+\epsilon^4[(\mathbf{i}_3\otimes\nabla v_4)^S + (\nabla\mathbf{u}_4)^S + \tilde{\alpha}_1((\nabla v_1\otimes\nabla v_3)^S - 2\nabla v_1\cdot\nabla v_3\mathbf{i}_3\otimes\mathbf{i}_3)]\}+\\ &+O(\epsilon^5),\end{aligned} \tag{3.93}$$

iar din descompunerea (59)$_3$ se deduc urmatorele relaţii pentru $\mathbf{t}$, $\mathbf{T}_\tau$, $t_n$ :

$$\begin{aligned}\mathbf{t} &= \frac{\mu U_o}{a}\{\epsilon\nabla v_1 + \epsilon^3[\nabla v_3 + (2\tilde{\beta}_3 - 3\tilde{\beta}_1)\mid\nabla v_1\mid^2\nabla v_1] + \epsilon^4\nabla v_4\} + O(\epsilon^5),\\ \mathbf{T}_\tau &= \frac{\mu U_o}{a}\{\tilde{\alpha}_1\epsilon^2(\nabla v_1\otimes\nabla v_1) + \epsilon^4[\tilde{\alpha}_1(\nabla v_1\otimes\nabla v_3)^S + (\nabla\mathbf{u}_4)^S]\} + O(\epsilon^5),\\ t_n &= -\frac{\mu U_o}{a}\{\tilde{\alpha}_1\epsilon^2\mid\nabla v_1\mid^2 - 2\tilde{\alpha}_1\epsilon^4\nabla v_1\cdot\nabla v_3\} + O(\epsilon^5).\end{aligned} \tag{3.94}$$

Aproximaţia de ordinul 4 a sistemului (71) are forma

$$\begin{aligned}&\Delta v_4 = 0,\\ &\mathrm{div}(\nabla\mathbf{u}_4 + \nabla^T\mathbf{u}_4) + \tilde{\alpha}_1\mathrm{div}(\nabla v_1\otimes\nabla v_3 + \nabla v_3\otimes\nabla v_1) - \gamma\nabla f_4 = 0,\end{aligned} \tag{3.95}$$

cu condiţiile pe frontieră de aceeaşi formă ca cele date în aproximaţia de ordinul trei, adică

$$\begin{aligned}&v_4 \mid_{\partial\Omega} = 0,\\ &\varphi_4 \mid_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial\varphi_4}{\nabla n} \mid_{\partial\Omega} = 0.\end{aligned} \tag{3.96}$$

**Observaţia 12.** Problema Dirichlet formulată în (95)$_1$ – (96)$_1$ admite numai soluţia nulă

$$v_4 \equiv 0. \tag{3.97}$$

Ecuaţia (95)$_2$ cu condiţiile (96)$_{2,3}$ poate fi uşor transformată în următoarea problemă

$$\begin{aligned}&\Delta\Delta\varphi_4 = \tilde{\alpha}_1\mathrm{div}[\mathrm{div}(\nabla v_1\otimes\nabla v_3)^S]^{\perp},\\ &\varphi_4 \mid_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial\varphi_4}{\partial n} \mid_{\partial\Omega} = 0,\end{aligned} \tag{3.98}$$

dacă folosim faptul că $((\mathbf{g})^{\perp})^{\perp} = -\mathbf{g}$, oricare ar fi $\mathbf{g}$.

**Propoziţia 13.** Problema determinării potenţialului $\varphi_4$ revine la problema echivalentă

$$\begin{aligned}&\Delta\Delta\varphi_4 = -2(\tilde{\beta}_2 + \tilde{\beta}_3)\tilde{\alpha}_1(\nabla v_1)^{\perp} \cdot [\operatorname{div}(|\nabla v_1|^2 \nabla v_1)],\\ &\varphi_4 |_{\partial\Omega}= 0, \quad \frac{\partial\varphi_4}{\partial n} |_{\partial\Omega}= 0,\end{aligned} \tag{3.99}$$

care admite o unică soluţie.

Câmpul de viteze (53) admite, în final, reprezentarea

$$\mathbf{v}(x_1, x_2) = (\epsilon v_1(x_1, x_2) + \epsilon^2 v_3(x_1, x_2))\mathbf{i}_3 + \epsilon^4(\nabla\varphi_4)^{\perp} + O(\epsilon^5). \tag{3.100}$$

**Deducerea** formei echivalente pentru problema formulată în (98) se bazează pe considerarea ecuaţiei $(89)_1$, care face posibilă reevaluarea membrului drept din $(98)_1$ prin calcule directe.

**Observaţia 13.** Din calculele anterioare este clar că în fluidul de gradul 3 care se mişcă într-un tub drept cu secţiunea eliptică apar mişcări secundare. Ordinul de mărime al mişcărilor secundare este cu trei ordine de mărime (în raport cu parametrul $\epsilon$) mai mic decât ordinul de mărime al mişcării principale a fluidului în lungul tubului. In acelaşi timp termenul corespunzător este cu un ordin de mărime mai mic faţă de ordinul termenilor specifici reprezentării constitutive de gradul 3, care au drept coeficienţi pe $\beta_1$, $\beta_3$.

Să remarcăm în final că termenii care conţin acceleraţiile de ordinul doi, $\mathbf{A}_3$, nu apar datorită faptului că mişcarea fluidului a fost presupusă lentă.

Până acum au fost prezentate rezultate general valabile, indiferent de forma secţiunii tubului. Vom considera cazul tubului cu secţiunea o **elipsă** de ecuaţie

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

în care $a > b > 0$, sau, în variabile adimensionale

$$x_1^2 + \frac{x_2^2}{c^2} - 1 = 0, \tag{3.101}$$

$0 < c < b/a < 1$.

**Propoziţia 14.** In cazul secţiunii eliptice soluţia $v_1(x_1, x_2)$ a problemei Dirichlet $(75)_1 - (76)_1$ se determină explicit prin

$$v_1(x_1, x_2) = -\frac{\gamma c^2}{2(1 + c^2)}(x_1^2 + \frac{x_2^2}{c^2} - 1), \tag{3.102}$$

iar din $(75)_2$ se obţine

$$f_1(x_1, x_2) = C_1, \tag{3.103}$$

unde $C_1$ este o constantă.

Formula (103) a fost dedusă din $(75)_2$ având în vedere că $\varphi_1 \equiv 0$.

**Propoziţia 15.** Aproximaţia de ordinul doi este caracterizată de $\mathbf{u}_2 \equiv 0$, iar pentru $f_2$ din $(82)_2$ se obţine

$$\nabla f_2 = \frac{\tilde{\alpha}_1}{\gamma}\mathrm{div}(\nabla v_1 \otimes \nabla v_1), \tag{3.104}$$

a cărei soluţie este dată de

$$f_2(x_1, x_2) = \frac{\tilde{\alpha}_1 \gamma}{2(1+c^2)^2}[(1+2c^2)c^2 x_1^2 + (2+c^2)x_2^2] + C_2, \tag{3.105}$$

unde $C_2$ este o constantă.

**Demonstrarea** formei soluţiei ecuaţiei (104) rezultă din considerare relaţiei (102), prin intermediul căreia (104) poate fi exprimată prin

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_2}{\partial x_1} &= \frac{\tilde{\alpha}_1 \gamma}{(1+c^2)^2}(1+2c^2)c^2 x_1, \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_2} &= \frac{\tilde{\alpha}_1 \gamma}{(1+c^2)^2}(2+c^2)x_2. \end{aligned} \tag{3.106}$$

**Propoziţia 16.** a) Cea de a treia aproximare poate fi caracterizată ($\mathbf{u}_3 = 0$) prin soluţia

$$f_3(x_1, x_2) = C_3, \tag{3.107}$$

unde $C_3$ este o constantă. Iar $v_3$ se determină ca soluţie a ecuaţiei

$$\Delta v_3(x_1, x_2) = \frac{2(\tilde{\beta}_3 + \tilde{\beta}_2)\gamma^3}{(1+c^2)^2}[(1+3c^2)c^4 x_1^2 + (3+c^2)x_2^2]. \tag{3.108}$$

b) Soluţia problemei $(89)_1 - (90)_1$ este dată prin reprezentarea

$$v_3(x_1, x_2) = D(x_1^2 + \frac{x_2^2}{c^2} - 1)(Ax_1^2 + Ax_2^2 + C), \tag{3.109}$$

unde $A, B, C, D$ sunt constante dependente de domeniu (ce pot depinde de constantele constitutive şi de, asemenea de $\gamma$ ); ele sunt explicit date la sfârşitul paragrafului.

**Demonstraţie.** Cu funcţia determinată în (102) introdusă în $(89)_1$, după efectuarea câtorva calcule, rezultă ecuaţia cu derivate parţiale pentru $v_3$ sub forma (108). Dacă se asociază condiţiile pe frontieră $(90)_{2,3}$ forma soluţiei scrisă în (109) poate fi obţinută imediat.

**Propoziţia 17.** Cea de a patra aproximaţie este precizată prin $v_4 = 0$, din (97), şi de $\varphi_4$ soluţia problemei

$$\begin{aligned} &\Delta\Delta\varphi_4 = -2(\tilde{\beta}_3 + \tilde{\beta}_2)\tilde{\alpha}_1 \frac{6c^2(1-c^2)}{(1+c^2)^3}\gamma^4 x_1 x_2, \\ &\varphi_4 \,|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial \varphi_4}{\partial n} \,|_{\partial\Omega} = 0. \end{aligned} \tag{3.110}$$

Aceasta admite o soluţie dată de formula

$$\varphi_4(x_1,x_2) = -2(\tilde{\beta}_3 + \tilde{\beta}_2)\tilde{\alpha}_1\gamma^4 E(x_1^2 + \frac{x_2^2}{c^2} - 1)^2 x_1 x_2. \tag{3.111}$$

In expresia de mai sus constanta dependentă de domeniu $E$ este dată tot în tabelul constantelor de la sfârşitul paragrafului.

**Demonstraţie.** Problema (98) poate fi rescrisă dacă se folosesc soluţiile determinate în (102) şi (109). Soluţia problemei (110) se obţine dintr-un calcul destul de lung, dar direct.

**Observaţia 14.** Din restricţiile constitutive (52) avem $\tilde{\beta}_3+\tilde{\beta}_2 > 0$ şi $\tilde{\alpha}_1 > 0$. Atunci putem reprezenta liniile de curent, care corespund mişcării secundare, deci curbele $\varphi_4(x_1,x_2) =$ constant. Remarcăm că pentru $\varphi_4(x_1,x_2) = 0$ avem drept linii de curent elipsa de secţiune şi semiaxele. In Fig. 3.1 este schematic reprezentată configuraţia liniilor de curent şi sensul mişcării secundare pe liniile de curent.

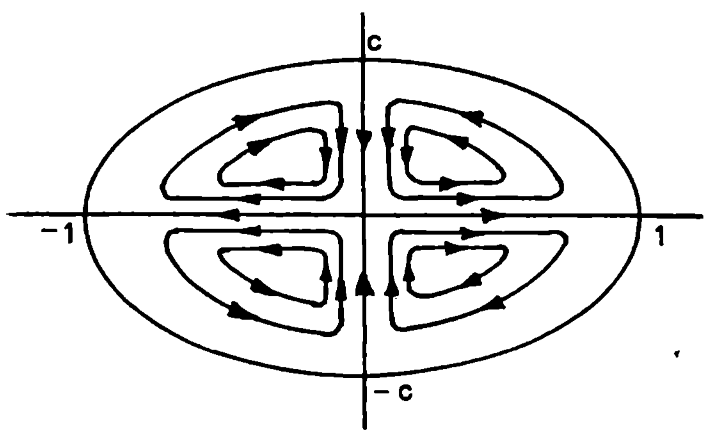



Fig. 3.1

**Propoziţia 18.** Aproximaţia presiunii, până la termenii de ordinul 4 inclusiv se determină prin formula

$$\begin{aligned} p(x_1,x_2,x_3) = \\ -\rho\psi + \sum_{i=1}^{4}\epsilon^i C_i - \epsilon H x_3 + \epsilon^2 \frac{\tilde{\alpha}_1\gamma}{2(1+c^2)^2}[(1+2c^2)c^2x_1^2 + (2+c^2)x_2^2] - \\ -\epsilon^4 \frac{2(\tilde{\beta}_2+\tilde{\beta}_3)}{(1+c^2)^3}\tilde{\alpha}_1\gamma^3[\frac{S_1}{4}x_1^4 + \frac{S_2}{2}x_1^2x_2^2 + \frac{S_3}{2}x_1^2 + \frac{V_1}{4}x_2^4 + \frac{V_2}{2}x_2^2]. \end{aligned} \tag{3.112}$$

**Demonstraţia** se obţine din relaţiile (56), (57) cu aproximarea funcţiei $f(x_1,x_2)$. Pentru pasul patru de aproximare calculăm pe $u_4(x_1,x_2)$ prin intermediul lui (111) şi obţinem în final, după un calcul destul de lung (din $(95)_2$)

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_4}{\partial x_1} &= -Q\tilde{\alpha}_1(S_1x_1^3 + S_2x_1x_2^2 + S_3x_1),\\ \frac{\partial f_4}{\partial x_2} &= -Q\tilde{\alpha}_1(V_1x_2^3 + S_2x_1^2x_2 + V_2x_2),\end{aligned} \tag{3.113}$$

în care $Q$, $S_i(i = 1,2,3)$, $V_j(j = 1,2)$ sunt constante dependente de domeniu, de constantele constitutive şi de *gamma.* ) Aceste constante sunt de asemenea explicit calculate.

Sistemul (113) este compatibil iar soluţia va fi de forma

$$f_4(x_1,x_2) = -Q\tilde{\alpha}_1(\frac{S_1}{4}x_1^4 + \frac{S_2}{2}x_1^2x_2^2 + \frac{S_3}{2}x_1^2 + \frac{V_1}{4}x_2^4 + \frac{V_2}{2}x_2^2) + C_4, \tag{3.114}$$

unde $C_4$ este constantă.

Rezultă în final forma (112) pentru aproximaţia de ordinul 4 în $\epsilon$.

Vom calcula acum presiunea normală pe suprafaţa rigidă a tubului prin formula

$$T_N(x_1,x_2,x_3) = -\gamma p(x_1,x_2,x_3) + \mathbf{n}\cdot\mathbf{T}_E\mathbf{n}, \tag{3.115}$$

unde $p$ şi $\mathbf{T}_E$ au fost deja evaluate. Atunci cantitatea

$$\Delta T_N \equiv \mid T_N(\pm 1,0,x_3) - T_N(0,\pm c,x_3) \mid, \tag{3.116}$$

reprezintă maximul variaţiei lui $T_N$ pentru fiecare $x_3$ fixat.

**Propoziţia 18.** Expresia $\Delta T_N$ poate fi reprezentată prin

$$\Delta T_N = \tilde{\alpha}_1\gamma^2\frac{(1-c^2)c^2}{(1+c^2)^2}\epsilon^2 + 4(\tilde{\beta}_2+\tilde{\beta}_3)\tilde{\alpha}_1\gamma^4\frac{c^4(1-c^2)^2(3c^4+4c^2+3)}{(1+c^2)^4(5c^4+6c^2+5)}\epsilon^4, \tag{3.117}$$

**Demonstraţie.**Ţinem seama de relaţia

$$\begin{aligned}\mathbf{n}\cdot\mathbf{T}_E\mathbf{n} &= \epsilon^2\tilde{\alpha}_1[(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}n_1 + \frac{\partial v_2}{\partial x_2}n_2)^2] + 2\epsilon^4[\frac{\partial(u_4)_1}{\partial x_1}n_1^2 +\\ &+(\frac{\partial(u_4)_2}{\partial x_1} + \frac{\partial(u_4)_1}{\partial x_2})n_1n_2 + \frac{\partial(u_4)_2}{\partial x_2}n_2^2]+\\ &+2\epsilon^4\tilde{\alpha}_1[\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\frac{\partial v_3}{\partial x_1}n_1^2 + (\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\frac{\partial v_3}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1}\frac{\partial v_1}{\partial x_2})n_1n_2 + \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\frac{\partial v_3}{\partial x_2}n_2^2]\end{aligned} \tag{3.118}$$

şi folosind (84), (102), (109) şi (111) ajungem la expresiile

$$\begin{aligned}\mathbf{n}\cdot\mathbf{T}_E(\pm 1,0)\mathbf{n} &= \tilde{\alpha}_1\epsilon^2\gamma^2\frac{c^4}{(1+c^2)^2} - 4\tilde{\alpha}_1\epsilon^4\gamma D(A+C)\frac{c^2}{1+c^2},\\ \mathbf{n}\cdot\mathbf{T}_E(0,\pm c)\mathbf{n} &= \tilde{\alpha}_1\epsilon^2\gamma^2\frac{c^2}{(1+c^2)^2} - 4\tilde{\alpha}_1\epsilon^4\gamma D(Bc^2+C)\frac{1}{1+c^2}.\end{aligned} \tag{3.119}$$

In urma calculelor efectuate prin utilizarea relaţiilor (114)-(115) deducem expresia (117) pentru $\Delta T_N$.

**Observaţia 14.** Prin intermediul relaţiei (117) rezultă că maximul variaţiei presiunii normale, care este o mărime măsurabilă experimental, ***produce o nouă relaţie pentru determinarea constantelor constitutive.*** De remarcat că am obţinut această relaţie într-una din ipotezele $\beta_1 = -(\beta_2 + \beta_3)$ (care asigură un criteriu de stabilitate aşa cum a fost demonstrat în Ţigoiu [1987] ), sau $3\beta_1 + 2\beta_2 = 0$, care descrie o subclasă de fluide de gradul 3 ( considerată de asemenea în lucrarea menţionată).

Astfel, în concluzie, putem interpreta relaţia (117) fie ca pe un criteriu de existenţă al mişcărilor secundare la fluidele de gradul trei ( dacă, constantele constitutive au fost determinate din alte experimente ), fie ca pe o posibilă experienţă pentru determinarea unei noi relaţii între constantele constitutive.

In final prezentăm lista constantelor care au fost menţionate în forma dedusă a soluţiilor problemelelor succesive apărute

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{c^2(3c^6 + 19c^4 + 5c^2 - 3)}{6(c^4 + 6c^2 + 1)}\\
B &= \frac{-3c^6 + 5c^4 + 19c^2 + 3}{6(c^4 + 6c^2 + 1)}\\
C &= \frac{c^2}{1 + c^2}(A + B); \quad D = \frac{(2\tilde{\beta}_3 - 3\tilde{\beta}_1)c^2}{2(1 + c^2)^3}\gamma^3\\
E &= \frac{c^6(1 - c^2)}{4(1 + c^2)^3(5c^4 + 6c^2 + 5)}; \quad Q = 2D\\
S_1 &= \frac{2A'(1 + 5c^2) + (1 + 3c^2)c^6}{1 + c^2} - \frac{c^4(1 - c^2)(5c^2 + 3)}{5c^4 + 6c^2 + 5}\\
S_2 &= 3(B' + \frac{A'}{c^2}) + \frac{c^2(3 + c^2)}{1 + c^2} - \frac{3c^2(1 - c^2)(3c^2 + 5)}{5c^4 + 6c^2 + 5}\\
S_3 &= \frac{(C' - A')(1 + 3c^2)}{1 + c^2} + \frac{3c^4(1 - c^4)}{5c^4 + 6c^2 + 5}\\
V_1 &= \frac{2B'(c^2 + 5)}{c^2(1 + c^2)} + \frac{3 + c^2}{1 + c^2} + \frac{c^2(1 - c^2)(5 + 3c^2)}{5c^4 + 6c^2 + 5}\\
V_2 &= \frac{(C' - c^2B')(3 + c^2)}{c^2(1 + c^2)} - \frac{3c^4(1 - c^4)}{5c^4 + 6c^2 + 5}
\end{aligned}
\tag{3.120}
$$

unde $A' = c^2 A$; $B' = c^2 B$; $C' = \frac{c^2}{1 + c^2}(A' + B')$.

Problema de curgere, care va fi reluată în capitolul următor (problema Poiseuille), a fost analizată pentru diferite clase de fluide ne - newtoniene de Langlois şi Rivlin [1963], Pipkin şi Rivlin [1963], Truesdell şi Noll [1965], Dodson , Townsend şi Walters [1974], Townsend, Walters şi Waterhous [1976], etc., scopul nostru fiind însă, în afara prezentării problemei de curgere propriu-zise, obţinerea importantei relaţii (68), cu toate observaţiile legate de ea. Pentru proprietăţile soluţiilor ecuaţiilor cu derivate parţiale trimitem la Roşca [1997].

## 3.6 Exerciţii şi probleme

**1.** Arătaţi că are loc formula

$$\mathbf{A}_1^{\mathbf{R}} = \dot{\mathbf{U}}\mathbf{U}^{-1} + \mathbf{U}^{-1}\dot{\mathbf{U}}$$

**2.** Arătaţi că fluidele de tip diferenţial de ordinul 0, reprezintă clasa fluidelor perfecte, sau clasa fluidelor elastice

$$\mathbf{T}(\mathbf{x},t) = f(\mathbf{F}(t)), \quad \text{fluid} \Longleftrightarrow \quad \mathbf{T}(\mathbf{x},t) = \varphi_0(\rho)\mathbf{I}$$

**3.** Arătaţi că fluidele de tip diferenţial de ordinul 1, reprezintă clasa fluidelor vâscoase, sau clasa fluidelor de tip Reiner - Rivlin

$$\mathbf{T}(\mathbf{x},t) = f(\mathbf{F}(t),\mathbf{F}'(t)), \text{fluid} \Longleftrightarrow \mathbf{T}(\mathbf{x},t) = \varphi_0(j_{\mathbf{D}},\rho)\mathbf{I} + \varphi_1(j_{\mathbf{D}},\rho)\mathbf{D} + \varphi_2(j_{\mathbf{D}},\rho)\mathbf{D}^2.$$

**4.** Folosind direct enunţul principiului obiectivităţii arătaţi că materialele de tip diferenţial de ordinul 1 îl satisfac dacă şi numai dacă admit o reprezentare constitutivă de forma (54) cu $n = 1$, deci

$$\mathbf{T}(\mathbf{x},t) = \mathbf{R}(\mathbf{X},t)f(\mathbf{A}_1^{\mathbf{R}}(\mathbf{x},t),,\mathbf{C}(\mathbf{X},t);\mathbf{X})\mathbf{R}^T(\mathbf{X},t).$$

**5.** Demonstraţi că un material de tip diferenţial de ordinul 0 descrie un corp solid, izotrop dacă şi numai dacă admite o reprezentare de forma

$$\mathbf{T}(\mathbf{x},t) = \phi_0(j_{\mathbf{B}})\mathbf{I} + \phi_1(j_{\mathbf{B}})\mathbf{B} + \phi_2(j_{\mathbf{B}})\mathbf{B}^2, \tag{3.121}$$

adică este un material de tip Mooney - Rivlin.

**6.** Demonstraţi că un material de tip diferenţial de ordinul 1 descrie un corp solid, izotrop dacă şi numai dacă admite o reprezentare de forma

$$\mathbf{T}(\mathbf{x},t) = f(\mathbf{A}_1(\mathbf{x},t),\mathbf{B}(\mathbf{X},t);\mathbf{X}) \quad \text{cu proprietatea} \tag{3.122}$$

$$f(\mathbf{Q}\mathbf{A}_1(t)\mathbf{Q}^T,\mathbf{Q}\mathbf{B}(t)\mathbf{Q}^T) = \mathbf{Q}f(\mathbf{A}_1(t),\mathbf{B}(t))\mathbf{Q}^T \quad \forall\mathbf{Q} \in Ort.$$

**7.** Reprezentaţi constitutiv un material de tip diferenţial de ordinul 1 care descrie un corp solid şi izotrop.

**8.** Fie următoarele reprezentări pentru materiale de tip diferenţial de ordinul 1

$$a) \quad \mathbf{T}(\mathbf{x},t) = \mu\mathbf{F}(t)\cdot\mathbf{F}'(t)\mathbf{I},$$

$$b) \quad \mathbf{T}(\mathbf{x},t) = \mu\mathbf{F}(t)[(\mathbf{A}_1)^{\mathbf{R}}\cdot(\mathbf{A}_1)^{\mathbf{R}}\mathbf{C}]\mathbf{F}^T(t)),$$

$$c) \quad \mathbf{T}(\mathbf{x},t) = \mu(\mathbf{A}_1)^{\mathbf{R}}\cdot(\mathbf{A}_1)^{\mathbf{R}}\mathbf{C}.$$

Care dintre aceste reprezentări , cu $\mu-$ constant verifică principiul obiectivităţii ?

# 4. VÂSCOMETRIE

## 4.1 Mişcări cu istoria alungirilor relative constantă (m.i.a.r.c.)

In mecanica materialelor simple s-au impus două tipuri de particularizări, privind

- natura materialelor din care sunt constituite corpurile,
- tipul mişcărilor efectuate de corpuri.

In acest capitol vom defini şi analiza câteva clase speciale de mişcări pentru fluide, în clasa materialelor simple. Ne vom ocupa de mişcările cu *istoria alungirilor relative constantă.* Aceste mişcări au fost introduse de Coleman [1961]. Rezultatele au fost generalizate de Noll [1962], iar în Coleman, Markovitz, Noll [1966], Walters [1975], Larson [1989] sunt prezentate aplicaţii în vâscometrie şi sunt date rezultate de natură experimentală.

### 4.1.1 Definiţie

**Definiţia 1.** O mişcare $\chi$ este *o mişcare cu istoria alungirilor relative constantă* ( în $\mathbf{X} \in \mathcal{B}$ ) dacă există $\mathbf{Q}(\tau) \in Ort$, pentru orice $\tau \in R$, cu $\mathbf{Q}(0) = \mathbf{I}$ astfel încât

$$\mathbf{C}_t^t(\mathbf{x}, s) = \mathbf{Q}(t)\mathbf{C}_0^0(\mathbf{x}, s)\mathbf{Q}^T(t) \quad \forall s \geq 0, \quad \forall t \in R \tag{4.1}$$

Când ne vom referi la o mişcare cu istoria alungirilor relative constantă vom utiliza notaţia prescurtată m.i.a.r.c.

### 4.1.2 Condiţii de caracterizare

Vom preciza *condiţii necesare şi suficiente* pentru ca o mişcare $\chi$ să fie cu istoria alungirilor relative constantă. Acestea vor fi numite **(C.I)** şi respectiv **(C.II)**. Ele vor fi formulate într-o particulă $\mathbf{X}$, fixată în corpul $\mathcal{B}$, pe care nu o vom mai menţiona, dacă acest lucru nu produce confuzii.

Prima condiţie de caracterizare, **(C.I)**, este un rezultat datorat lui Noll [1962] şi precizează forma pe care trebuie să o admită gradientul mişcării, în raport cu configuraţia pe care o are corpul la momentul $t = 0$, considerată drept configuraţie de referinţă, notat $\mathbf{F}_0(\mathbf{X}, \tau)$. Gradientul mişcării este calculat în particula fixată $\mathbf{X}$, iar reprezentarea va avea loc la orice moment de timp, $\tau$.

A doua condiţie,(**C.II**), este o consecinţă a Definiţiei 1. şi a condiţiei (**C.I**). Aceasta precizează forma tensorului lui Caughy - Green la dreapta, în descrierea relativă, faţă de configuraţia de la momentul $t$, luată drept configuraţie de referinţă.

**Condiţia (C.I) : Teorema lui Noll de caracterizare a mişcărilor cu istoria alungirilor relative constantă**

*Condiţia necesară şi suficientă* ca o mişcare $\chi$ să fie cu istoria alungirilor relative constantă este ca să existe $\mathbf{Q}(\tau) \in Ort$, $\kappa \in R$, $\mathbf{N} \in Lin$, astfel încât

$$\mathbf{F}_0(\mathbf{X}, \tau) = \mathbf{Q}(\tau)\, exp(\tau \kappa \mathbf{N}), \tag{4.2}$$

pentru orice $\tau \in R$, cu $\mathbf{Q}(0) = \mathbf{I}$, $| \mathbf{N} |= 1$.

**Demonstraţie.** Presupunem că are loc reprezentarea din Definiţia 1. pentru m.i.a.r.c., deci

$$\mathbf{C}_t^t(\mathbf{x}, s) = \mathbf{Q}(t)\mathbf{C}_0^0(\mathbf{x}, s)\mathbf{Q}^T(t), \tag{4.3}$$

pentru orice $s \geq 0$ şi orice $t \in R$. Notăm

$$\mathbf{H}(s) \equiv \mathbf{C}_0(-s) \in Sim \tag{4.4}$$

şi rescriem relaţia anterioară prin intermediul acesteia.

Folosim formulele (1.52) ii) şi (1.49):

$$\mathbf{F}_t(\tau) = \mathbf{F}_0(\tau)\mathbf{F}_0^{-1}(t)\,, \quad \mathbf{C}_t(\tau) = \mathbf{F}_t^T(\tau)\,\mathbf{F}_t(\tau)$$

pentru $\tau = t - s$ şi obţinem relaţia de legătură între $\mathbf{C}_t(\tau)$ si $\mathbf{C}_0(\tau)$

$$\mathbf{C}_t(\tau) = (\mathbf{F}_0(\tau)\mathbf{F}_0^{-1}(t))^T\mathbf{F}_0(\tau)\mathbf{F}_0^{-1}(t) = \mathbf{F}_0^{-T}(t)\mathbf{C}_0(\tau)\mathbf{F}_0^{-1}(t). \tag{4.5}$$

Pentru $\tau = t - s$, rezultă

$$\mathbf{C}_t^t(s) = \mathbf{F}_0^{-T}(t)\mathbf{C}_0(t - s)\mathbf{F}_0^{-1}(t) = \mathbf{F}_0^{-T}(t)\mathbf{H}(s - t)\mathbf{F}_0^{-1}(t).$$

Astfel (1) se scrie sub forma

$$\mathbf{F}_0^{-T}(t)\mathbf{H}(s - t)\mathbf{F}_0^{-1}(t) = \mathbf{Q}(t)\mathbf{H}(s)\mathbf{Q}^T(t),$$

sau

$$\mathbf{H}(s - t) = \mathbf{F}_0^T(t)\mathbf{Q}(t)\mathbf{H}(s)\mathbf{Q}^T(t)\mathbf{F}_0(t). \tag{4.6}$$

Introducând notaţia

$$\mathbf{E}(t) = \mathbf{Q}^T(t)\mathbf{F}_0(t), \tag{4.7}$$

în (6) rezultă că

$$\mathbf{H}(s-t) = \mathbf{E}^T(t)\mathbf{H}(s)\mathbf{E}(t). \tag{4.8}$$

Derivăm în raport cu $t$ în relaţia (8) şi facem apoi pe $t=0$. Rezultă

$$-\dot{\mathbf{H}}(s) = \dot{\mathbf{E}}^T(0)\mathbf{H}(s)\mathbf{E}(0) + \mathbf{E}^T(0)\mathbf{H}(s)\dot{\mathbf{E}}(0). \tag{4.9}$$

Introducând următoarea notaţie

$$\dot{\mathbf{E}}(0) \equiv \mathbf{M}, \quad \text{cu} \quad \mathbf{E}(0) \equiv \mathbf{Q}^T(0)\mathbf{F}_0(0) = \mathbf{I},$$

în (9), se obţine problema Cuachy

$$\begin{array}{l} -\dot{\mathbf{H}}(s) = \mathbf{M}^T\mathbf{H}(s) + \mathbf{H}(s)\mathbf{M} \\ \mathbf{H}(0) = \mathbf{I}. \end{array} \tag{4.10}$$

Folosim rezultatul următor : soluţia sistemului diferenţial

$$\dot{\mathbf{X}}(s) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s), \tag{4.11}$$

în care $\mathbf{A} \in Lin$, cu condiţia iniţială $\mathbf{H}(o) = \mathbf{I}$, este unică şi se reprezintă prin $\mathbf{X}(s) = exp(\ \mathbf{A}s)$, care permută cu $\mathbf{A}$.

Deci, dacă considerăm substituţia

$$\mathbf{H}(s) = exp(-s\mathbf{M}^T)\mathbf{Y}(s),$$

din (10) va rezulta un sistem pentru necunoscuta $\mathbf{Y}$ de forma

$$-\dot{\mathbf{Y}}(s) = \mathbf{Y}(s)\mathbf{M}, \tag{4.12}$$

cu condiţia iniţială $\mathbf{Y}(0) = \mathbf{I}$.

Să observăm că soluţia problemei Cauchy

$$\begin{array}{l} -\dot{\mathbf{Y}}(s) = \mathbf{M}\mathbf{Y}(s) \\ \mathbf{Y}(0) = \mathbf{I} \end{array}$$

este $\mathbf{Y}(s) = exp(-\mathbf{M}s)$ şi deoarece permută cu $\mathbf{M}$ va fi soluţia unică a problemei Cauchy, formulate în (12).

Deci solutia problemei (10) se obţine sub forma

$$\mathbf{H}(s) = exp(-s\mathbf{M}^T)\, exp(-s\mathbf{M}), \quad \forall s \geq 0 \tag{4.13}$$

Arătăm că funcţia $\mathbf{H}(s)$ se exprimă prin formula anterioară, şi pentru $s < 0$. Pentru aceasta folosim relaţia (8) din care rezultă că $\mathbf{H}$ este definită şi pentru valori negative. Fie acum $\xi = s - t < 0$, şi deci $\xi + t = s > 0$. Avem din (8)

$$\mathbf{H}(\xi) = \mathbf{E}^T(t)\mathbf{H}(\xi + t)\mathbf{E}(t).$$

Derivând relaţia anterioară în raport cu $t$ şi considerând $t = 0$ rezultă acelaşi sistem diferenţial pentru $\mathbf{H}$ ( definită pentru $\xi < 0$) şi cu aceeaşi condiţie iniţială, la $\xi = 0$. Astfel rezultă afirmaţia.

Inlocuim pe $\mathbf{H}$ în relaţia (8) cu valoarea găsită (13)

$$exp(-(s-t)\,\mathbf{M}^T)\,exp(-(s-t)\mathbf{M})) = \mathbf{E}^T(t)\,exp(-s\mathbf{M}^T)\,exp(-s\mathbf{M})\,\mathbf{E}(t).$$

Pentru $s = 0$, din relaţia de mai sus, se obţine că $exp(t\mathbf{M}^T)exp(t\mathbf{M}) = \mathbf{E}^T(t)\mathbf{E}(t)$, sau $\mathbf{I} = exp(-t\mathbf{M}^T)\,\mathbf{E}^T(t)\mathbf{E}(t)\,exp(-tM) = (\mathbf{E}(t)\,exp(-t\mathbf{M}))^T\mathbf{E}(t)\,exp(-t\mathbf{M})$ şi deci $\bar{\mathbf{Q}}(t) \equiv \mathbf{E}(t)\,exp(-t\mathbf{M}) \in Ort$.

Astfel am arătat că

$$\mathbf{E}(t) = \bar{\mathbf{Q}}(t)\,exp(t\mathbf{M}), \quad \text{dar} \quad \mathbf{E}(t) = \mathbf{Q}^T(t)\mathbf{F}_0(t),$$

de unde

$$\mathbf{F}_0(t) = \mathbf{Q}(t)\bar{\mathbf{Q}}(t)\,exp(t\mathbf{M}) \equiv \tilde{\mathbf{Q}}(t)\,exp(t\mathbf{M}).$$

In concluzie, din relaţia anterioară

$$\begin{array}{ll} \text{Dacă} \quad \mathbf{M} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F}_0(t) = \mathbf{Q}(t)\bar{\mathbf{Q}}(t) \in Ort \\ \text{Dacă} \quad \mathbf{M} \neq 0, \quad \text{luăm} \quad \kappa = \mid \mathbf{M} \mid, \quad \mathbf{N} = \dfrac{1}{\kappa}\mathbf{M} \quad \text{şi atunci,} \end{array}$$

$$\mathbf{F}_0(t) = \tilde{\mathbf{Q}}(t)\,exp(t\kappa\mathbf{N}), \quad \text{cu} \quad \tilde{\mathbf{Q}}(0) = I \quad \text{şi} \quad \mid \mathbf{N} \mid = 1.$$

**Demonstraţia reciprocei.** Presupunem că are loc reprezentarea (2) pentru $\mathbf{F}_0$. Rezultă că

$$\mathbf{C}_0(\tau) \equiv \mathbf{F}_0^T(\tau)\mathbf{F}_0(\tau) = \exp(\tau\kappa\mathbf{N}^T)\exp(\tau\kappa\mathbf{N}). \tag{4.14}$$

Din formula (5), în care utilizăm ipoteza (2) şi formula (14) avem

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_t(\tau) &= (exp(-t\kappa\mathbf{N})\mathbf{Q}^T(t))^T\,exp(\tau\kappa\mathbf{N}^T)\,exp(\tau\kappa\mathbf{N})\,exp(-t\kappa\mathbf{N})\mathbf{Q}^T(t) = \\ &= \mathbf{Q}(t)\,exp(-t\kappa\mathbf{N}^T)\,exp(\tau\kappa\mathbf{N}^T)\,exp(\tau\kappa\mathbf{N})\,exp(-t\kappa\mathbf{N})\mathbf{Q}^T(t). \end{aligned}$$

In final, înlocuind $\tau = t - s$ deducem că

$$\mathbf{C}_t^t(s) = \mathbf{Q}(t)\,exp(-s\kappa\mathbf{N}^T)\,exp(-s\kappa\mathbf{N})\mathbf{Q}^T(t), \tag{4.15}$$

care împreună cu (14) conduc la relaţia (1) din definiţia m.i.a.r.c.

Ca o *consecinţă* a teoremei de caracterizare a mişcărilor cu istoria alungirilor relative constantă vom reprezenta tensorul lui Cauchy - Green la dreapta, în descrierea relativă, $\mathbf{C}_t^t$ .

Vom introduce următoarele notaţii

$$\mathbf{M} = \kappa\mathbf{N}, \quad \mathbf{M}(t) = \mathbf{Q}(t)\mathbf{M}\mathbf{Q}^T(t), \tag{4.16}$$

asociate unei m.i.a.r.c. caracterizată prin condiţia (2).

**Consecinţa 1.** Pe o mişcare cu istoria alungirilor relative constantă tensorul lui Cauchy - Green la dreapta, în descrierea relativă, se reprezintă prin

$$\mathbf{C}_t^t(s) = exp(-s\mathbf{M}^T(t))\, exp(-s\mathbf{M}(t)) \quad \forall \quad s \geq 0. \tag{4.17}$$

**Demonstraţie.** Pornind de la definiţia funcţiei exponenţiale de argument tensorial se obţine că

$$\mathbf{Q}\, exp(\mathbf{M})\, \mathbf{Q}^T = exp(\mathbf{Q}\mathbf{M}\mathbf{Q}^T), \quad \forall \quad \mathbf{Q} \in Ort, \quad \mathbf{M} \in Lin. \tag{4.18}$$

Dacă se utilizează această proprietate în condiţia (15), care are loc pentru mişcări cu istoria alungirilor relative constantă, se deduce rezultatul formulat.

Să observăm că are loc în mod evident următoarea

**Propoziţia 1.** In cazul m.i.a.r.c. o dată cu reprezentarea (2) are loc şi reprezentarea

$$\mathbf{F}_0(\mathbf{X}, t) = \mathbf{Q}(t)\, exp(t(-\kappa)(-\mathbf{N})),$$

pentru orice $t \in R$, cu $\mathbf{Q}(0) = \mathbf{I}$ şi $\mid (-\mathbf{N}) \mid = 1$. Deci parametrul $\kappa$ poate lua valori reale arbitrare.

**Condiţia (C.II) de caracterizare a mişcărilor cu istoria alungirilor relative constantă:**

**Teorema 1.** Condiţia necesară şi suficientă ca o mişcare $\chi$ să fie cu istoria alungirilor relative constantă este ca să existe $\mathbf{Q}(\tau) \in Ort$, cu $\mathbf{Q}(0) = \mathbf{I}$ şi $\mathbf{M} \in Lin$, astfel încât

$$\mathbf{C}_t^t(\mathbf{x}, s) = exp(-s\mathbf{M}^T(t))\, exp(-s\mathbf{M}(t))\, \forall\, s \in R_+, \tag{4.19}$$

pentru orice $s \in R_+$ şi orice $t \in R$, unde $\mathbf{M}(t) = \mathbf{Q}(t)\mathbf{M}\mathbf{Q}^T(t)$.

**Demonstraţie.** Presupunem că mişcarea $\chi$ este cu istoria alungirilor relative constantă. Atunci are loc reprezentarea din teorema lui Noll de caracterizare a m.i.a.r.c., pe care o vom utiliza în calculul expresiei gradientului de deformaţie în mişcarea relativă

$$\mathbf{F}_t(\mathbf{x}, \tau) = \mathbf{F}_0(\mathbf{X}, \tau)(\mathbf{F}_0(\mathbf{X}, t))^{-1}, \quad \text{şi deci}$$

$$\mathbf{F}_t(\mathbf{x}, \tau) = \mathbf{Q}(\tau)\, exp(\tau\kappa\mathbf{N})\, exp(-t\kappa\mathbf{N})\mathbf{Q}^T(t) \equiv \mathbf{Q}(\tau)\, exp(-s\mathbf{M})\mathbf{Q}^T(t),$$

în care $\mathbf{M} = \kappa\mathbf{N} \in Lin$, $s \equiv t - \tau \geq 0$ ( deci $\tau \leq t$). Dacă folosim expresia calculată în definiţia tensorului lui Cauchy - Green la dreapta, în descrierea relativă, obţinem

$$\mathbf{C}_t^t(\mathbf{x}, s) = \mathbf{F}_t^T(\mathbf{x}, \tau)\mathbf{F}_t(\mathbf{x}, \tau) = \mathbf{Q}(t)\, exp(-s\mathbf{M}^T)\, exp(-s\mathbf{M})\mathbf{Q}^T(t),$$

de unde, prin introducerea câmpului tensorial $\mathbf{M}(t) = \mathbf{Q}(t)\mathbf{M}\mathbf{Q}^T(t)$, rezultă necesitatea condiţiei formulate.

**Reciproc.** Presupunem că are loc formula de reprezentare a tensorului lui Cauchy - Green la dreapta, în descriere relativă

$$\mathbf{C}_t^t(\mathbf{x}, s) = exp(-s\mathbf{M}^T(t))\, exp(-s\mathbf{M}(t)),$$

pentru orice $s \in R_+$ cu $\mathbf{M}(t) = \mathbf{Q}(t)\mathbf{M}\mathbf{Q}^T(t)$, $\mathbf{Q}(t) \in Ort$, $\mathbf{Q}(0) = \mathbf{I}$ la orice moment de timp $t$, sau ,într-o reprezentare echivalentă

$$\mathbf{C}_t^t(\mathbf{x}, s) = \mathbf{Q}(t)\, exp(-s\mathbf{M}^T)\, exp(-s\mathbf{M})\mathbf{Q}^T(t), \tag{4.20}$$

dacă folosim (19). Fie $t = 0$, din (20) rezultă că

$$\mathbf{C}_0^0(\mathbf{x}, s) = exp(-s\mathbf{M}^T)\, exp(-s\mathbf{M}) \quad \forall \quad s \in R_+.$$

Revenind în (20) obţinem reprezentarea

$$\mathbf{C}_t^t(\mathbf{x}, s) = \mathbf{Q}(t)\mathbf{C}_0^0(\mathbf{x}, s)\mathbf{Q}^T(t) \quad \forall \quad s \in \mathbf{R}_+,$$

care arată, conform Definiţiei (1), că suntem pe o mişcare cu m.i.a.r.c.

### 4.1.3 Lema lui Wang

**Lema 1.** Pe mişcări cu istoria alungirilor relative constantă primii trei tensori ai lui Rivlin- Ericksen determină în mod unic mişcarea.

**Demonstraţie.** In ipoteza că $\chi$ este o m.i.a.r.c. au loc formulele recurente de calcul pentru tensorii lui Rivlin- Ericksen

$$\begin{aligned} &\mathbf{A}_1(\mathbf{x}, t) = \mathbf{M}^T(t) + \mathbf{M}(t), \\ &\mathbf{A}_n(\mathbf{x}, t) = \mathbf{M}^T(t)\mathbf{A}_{n-1}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{A}_{n-1}(\mathbf{x}, t)\mathbf{M}(t) \quad \forall n \geq 2. \end{aligned} \tag{4.21}$$

Vom presupune cunoscuţi primii trei tensori ai lui Rivlin- Ericksen. Din primele trei relaţii (21) vom arăta că poate fi determinată istoria tensorului lui Cauchy - Green în descriere relativă, deci m.i.a.r.c.

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{M}^T(t) + \mathbf{M}(t), \\ \mathbf{A}_2(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{M}^T(t)\mathbf{A}_1(\mathbf{x}, t) + \mathbf{A}_1(\mathbf{x}, t)\mathbf{M}(t), \\ \mathbf{A}_3(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{M}^T(t)\mathbf{A}_2(\mathbf{x}, t) + \mathbf{A}_2(\mathbf{x}, t)\mathbf{M}(t). \end{aligned} \tag{4.22}$$

Presupunem prin absurd că mai există un $\bar{M}(t)$ astfel încât să fie verificate relaţiile (22)

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A}_1(\mathbf{x},t) &= \bar{\mathbf{M}}^T(t) + \bar{\mathbf{M}}(t),\\
\mathbf{A}_2(\mathbf{x},t) &= \bar{\mathbf{M}}^T(t)\mathbf{A}_1(\mathbf{x},t) + \mathbf{A}_1(\mathbf{x},t)\bar{\mathbf{M}}(t),\\
\mathbf{A}_3(\mathbf{x},t) &= \bar{\mathbf{M}}^T(t)\mathbf{A}_2(\mathbf{x},t) + \mathbf{A}_2(\mathbf{x},t)\bar{\mathbf{M}}(t).
\end{aligned} \tag{4.23}
$$

In continuare nu vom mai menţiona $\mathbf{x}$ şi $t$, pentru simplificarea relaţiilor. Din primele relaţii (22) şi (23) rezultă , pe de o parte, că

$$
\mathbf{M}^T + \mathbf{M} = \bar{\mathbf{M}}^T + \bar{\mathbf{M}}, \quad \Longleftrightarrow \quad \{\mathbf{M}\}^{\mathbf{S}} = \{\bar{\mathbf{M}}\}^{\mathbf{S}}.
$$

Pe de altă parte, vom introduce notaţiile

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{M} = \{\mathbf{M}\}^S + \{\mathbf{M}\}^A = \frac{1}{2}\mathbf{A}_1 + \{\mathbf{M}\}^A, \quad \mathbf{M} - \bar{\mathbf{M}} = \mathbf{W} \in Asim,\\
&\bar{\mathbf{M}} = \{\bar{\mathbf{M}}\}^S + \{\bar{\mathbf{M}}\}^A = \frac{1}{2}\mathbf{A}_1 + \{\bar{\mathbf{M}}\}^A.
\end{aligned} \tag{4.24}
$$

Din al doilea rând de relaţii (22) şi (23) avem

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{M}^T\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_1\mathbf{M} = \bar{\mathbf{M}}^T\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_1\bar{\mathbf{M}} \quad \Longleftrightarrow\\
&(\mathbf{M}^T - \bar{\mathbf{M}}^T)\mathbf{A}_1 = -\mathbf{A}_1(\mathbf{M} - \bar{\mathbf{M}}) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{W}\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_1\mathbf{W}.
\end{aligned}
$$

In mod analog din cel de-al treilea grup de relaţii (22) şi (23), împreună cu (24), obţinem

$$
\mathbf{W}\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_2\mathbf{W}.
$$

In final am arătat că sunt satisfăcute următoarele relaţii

$$
\mathbf{W}\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_1\mathbf{W}, \quad \mathbf{W}\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_2\mathbf{W}, \tag{4.25}
$$

unde $\mathbf{M} - \bar{\mathbf{M}} = \mathbf{W} \in Asim, \quad \mathbf{A}_1,\ \mathbf{A}_2 \in Sim.$

Fie $\{\mathbf{e}_i\}_{i\in\overline{\{1,3\}}}$, bază ortonormată formată din vectorii proprii ai tensorului simetric $\mathbf{A}_1$. Reprezentările matriciale pentru $\mathbf{A}_1 \in Sim$ şi $\mathbf{W} \in Asim$ în baza menţionată vor fi scrise sub forma

$$
[\mathbf{A}_1] = \begin{pmatrix} a & 0 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}, \quad [\mathbf{W}] = \begin{pmatrix} 0 & x & y\\ -x & 0 & z\\ -y & -z & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.26}
$$

Dintr-un calcul direct rezultă

$$
[\mathbf{W}\mathbf{A}_1] = \begin{pmatrix} 0 & bx & cy\\ -ax & 0 & cz\\ -ay & -bz & 0 \end{pmatrix}, \quad [\mathbf{A}_1\mathbf{W}] = \begin{pmatrix} 0 & ax & ay\\ -bx & 0 & bz\\ -cy & -cz & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.27}
$$

Deci, rezultă că, relaţia $(25)_1$, $\mathbf{A}_1\mathbf{W} = \mathbf{W}\mathbf{A}_1$, este echivalentă cu sistemul

$$(a-b)x = 0, \quad (a-c)y = 0, \quad (b-c)z = 0. \tag{4.28}$$

Avem de considerat următoarele trei cazuri posibile, după valorile proprii ale tensorului $\mathbf{A}_1$ :

caz 1.: $a \neq b \neq c \neq a$ ,

caz 2.: $a = b \neq c$ ,

caz 3.: $a = b = c$ .

In cazul 1. rezultă $x = y = z = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{W} = 0.$

Astfel dacă valorile proprii ale lui $\mathbf{A}_1$ sunt distincte, atunci din (28) avem unicitate, în sensul că $\mathbf{M} = \bar{\mathbf{M}}$.

In cazul 2. rezultă $y = z = 0$, deci $\mathbf{W} = x(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1)$ şi $\mathbf{M} = \bar{\mathbf{M}} + \mathbf{W}$. Cunoaştem reprezentarea lui $\mathbf{W}$ în baza vectorilor proprii ai lui $\mathbf{A}_1$, iar pe $\mathbf{A}_2$, în aceeaşi bază îl scriem sub forma

$$[\mathbf{A}_2] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Din calcul direct avem

$$[\mathbf{W}\mathbf{A}_2] = \begin{pmatrix} xa_{12} & xa_{22} & xa_{23} \\ -xa_{11} & -xa_{12} & -xa_{13} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad [\mathbf{A}_2\mathbf{W}] = \begin{pmatrix} -xa_{12} & xa_{11} & 0 \\ -xa_{22} & xa_{12} & 0 \\ -xa_{23} & xa_{13} & 0 \end{pmatrix} \tag{4.29}$$

Astfel din (29) deducem că relaţia $(25)_2$ este echivalentă cu sistemul

$$a_{12}x = 0, \; a_{13}x = 0, \; a_{23}x = 0, \; (a_{22} - a_{11})x = 0.$$

Deoarece $x \in R$ este arbitrar, avem $a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$, $a_{11} = a_{22}$. Rezultă că $\mathbf{A}_2$ are aceiaşi vectori proprii ca $\mathbf{A}_1$, admiţând reprezentarea

$$[\mathbf{A}_2] = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}.$$

In continuare, vom demonstra că în cazul 2. au loc următoarele relaţii între tensorii Rivlin - Ericksen : $\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_1^2$, $\quad \mathbf{A}_3 = \mathbf{A}_1^3$.

Revenim cu informaţiile astfel obţinute în relaţiile (22), care definesc recurent tensorii Rivlin - Ericksen. Obţinem

$$\begin{aligned} &\mathbf{A}_2 = (\frac{1}{2}\mathbf{A}_1 + \tilde{\mathbf{W}})^T\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_1(\frac{1}{2}\mathbf{A}_1 + \tilde{\mathbf{W}}) = \mathbf{A}_1^2 - \tilde{\mathbf{W}}\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_1\tilde{\mathbf{W}}, \\ &\mathbf{M} = \frac{1}{2}\mathbf{A}_1 + \tilde{\mathbf{W}}, \end{aligned} \tag{4.30}$$

unde $\tilde{\mathbf{W}} = \{\mathbf{M}\}^A \in Asim$. Vom nota cu $\tilde{x}$, $\tilde{y}$, $\tilde{z}$, elementele lui $\tilde{\mathbf{W}}$, într-o reprezentare similară cu aceea pentru $\mathbf{W}$. In baza vectorilor proprii ai lui $\mathbf{A}_1$ reprezentăm relaţia (30) şi obţinem egalitatea

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & (a-c)\tilde{y} \\ 0 & 0 & (a-c)\tilde{z} \\ (a-c)\tilde{y} & (a-c)\tilde{z} & 0 \end{pmatrix} \quad (4.31)$$

Egalitatea scrisă în (31) are loc, dacă şi numai dacă

$$a_{11} = a^2,\ a_{33} = c^2,\ (a-c)\tilde{y} = 0,\ (a-c)\tilde{z} = 0,\ \text{cu } a \neq c,$$

ceea ce este echivalent cu

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_1^2,\ \tilde{y} = \tilde{z} = 0.$$

Am dedus astfel că

$$[\tilde{\mathbf{W}}] = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{x} & 0 \\ -\tilde{x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Revenim în ultima relaţie din (22) şi găsim

$$\mathbf{M} = \frac{1}{2}\mathbf{A}_1 + \tilde{\mathbf{W}},$$

$$\mathbf{A}_3 = (\frac{1}{2}\mathbf{A}_1 + \tilde{\mathbf{W}})^T\mathbf{A}_1^2 + \mathbf{A}_1^2(\frac{1}{2}\mathbf{A}_1 + \tilde{\mathbf{W}}) = \mathbf{A}_1^3 - \tilde{\mathbf{W}}\mathbf{A}_1^2 + \mathbf{A}_1^2\tilde{\mathbf{W}}.$$

Reprezentăm pe componente egalitatea anterioară, din care vom deduce forma matricială de reprezentare a lui $\mathbf{A}_3$ în baza vectorilor proprii ai lui $\mathbf{A}_1$.

$$[\mathbf{A}_3] = \begin{pmatrix} a^3 & 0 & 0 \\ 0 & a^3 & 0 \\ 0 & 0 & c^3 \end{pmatrix}, \quad (4.32)$$

adică $\mathbf{A}_3 = \mathbf{A}_1^3$.

Vom demonstra acum că $\mathbf{M}^T\mathbf{M} = \mathbf{M}\mathbf{M}^T$, pe baza egalităţii

$$[\tilde{\mathbf{W}}\mathbf{A}_1] = \begin{pmatrix} 0 & a\tilde{x} & 0 \\ -a\tilde{x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = [\mathbf{A}_1\tilde{\mathbf{W}}] \quad (4.33)$$

şi folosind expresiile

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^T\mathbf{M} &= (\frac{1}{2}\mathbf{A}_1 + \tilde{\mathbf{W}})^T(\frac{1}{2}\mathbf{A}_1 + \tilde{\mathbf{W}}) \\ &= \frac{1}{4}\mathbf{A}_1^2 + \frac{1}{2}(\mathbf{A}_1\tilde{\mathbf{W}} - \tilde{\mathbf{W}}\mathbf{A}_1) - \tilde{\mathbf{W}}^2, \\ \mathbf{M}\mathbf{M}^T &= (\frac{1}{2}\mathbf{A}_1 + \tilde{\mathbf{W}})(\frac{1}{2}\mathbf{A}_1 - \tilde{\mathbf{W}}) \\ &= \frac{1}{4}\mathbf{A}_1^2 - \frac{1}{2}(\mathbf{A}_1\tilde{\mathbf{W}} - \tilde{\mathbf{W}}\mathbf{A}_1) - \tilde{\mathbf{W}}^2, \end{aligned} \quad (4.34)$$

deduse pe baza formulei $(30)_2$.

Deorece $\mathbf{M}^T$ şi $\mathbf{M}$ permută, prin reintroducerea momentului de timp $t$, rezultă că

$$\mathbf{C}_t^t(\mathbf{x}, s) = exp(-s\mathbf{M}^T(t))\, exp(-s\mathbf{M}(t)) = exp(-s\mathbf{A}_1(t)).$$

In cazul 3. rezultă că $\mathbf{M} - \bar{\mathbf{M}} = \mathbf{W}$ şi $\mathbf{M} = \frac{1}{2}\mathbf{A}_1 + \tilde{\mathbf{W}}$, cu $\mathbf{W}$ şi $\tilde{\mathbf{W}}$ arbitrare în Asim , dar

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_1^2 = a^2\mathbf{I}, \quad \mathbf{A}_3 = \mathbf{A}_1^3 = a^3\mathbf{I}.$$

Evident ca $\mathbf{M}^T$ şi $\mathbf{M}$ permută, vezi formula (34). Prin urmare folosind relaţia (19), din condiţia **(C.II)**, obţinem că

$$\mathbf{C}_t^t(\mathbf{x}, s) = exp(-s\mathbf{M}^T(t))\, exp(-s\mathbf{M}(t)) = exp(-s\mathbf{A}_1(t)) = exp(-as)\mathbf{I}$$

**Concluzie.** Cadrul constitutiv adecvat descrierii mişcărilor cu istoria alungirilor relative constantă este clasa materialelor Rivlin - Ericksen de ordinul 3 ( având în vedere rezultatul din lema lui Wang [1965] ).

## 4.2 Mişcări vâscometrice

### 4.2.1 Definiţia mişcării vâscometrice

**Definiţia 2.** O mişcare $\chi$ este *o mişcare vâscometrică* ( în $\mathbf{X} \in \mathcal{B}$) dacă este o mişcare cu istoria alungirilor relative constantă (în $\mathbf{X} \in \mathcal{B}$ ), caracterizată printr-o transformare $\mathbf{N} \in Lin$, cu $\mathbf{N}-$ *nilpotent de ordinul doi;* deci dacă admite o reprezentare de forma (2), cu $\mathbf{N}^2 = 0$.

### 4.2.2 Existenţa bazei canonice

Vom considera clasa mişcărilor vâscometrice şi vom demonstra că pentru fiecare mişcare vâscometrică se poate determina o bază în care matricea de reprezentare a $\mathbf{N}-$ ului caracteristic mişcării este aceeaşi, având un singur element nenul. Demonstrăm următoarea

**Lema 2.** Fie $\mathbf{N} \in Lin$, cu $|\mathbf{N}| = 1$ şi $\mathbf{N}^2 = \mathbf{0}$.

Există o bază ortonormată, notată $\{\mathbf{e}_i\}_{i \in \{\overline{1,3}\}}$, astfel încât matricea de reprezentare a lui $\mathbf{N}$ în această bază să fie de forma

$$[\mathbf{N}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Demonstraţie.** Fie următoarele subspaţii vectoriale ale lui $\mathcal{V}$

$$\mathrm{Ker}\,(\mathbf{N}) = \{\mathbf{v} \in \mathcal{V} \mid \mathbf{N}\mathbf{v} = \mathbf{0}\},$$

$$\mathcal{R}(\mathbf{N}) = \{\mathbf{v} \in \mathcal{V} \mid \exists\, \mathbf{u} \in \mathcal{V} : \mathbf{N}\mathbf{u} = \mathbf{v}\}$$

Deoarece $\mathbf{N}$ este nilpotent de ordinul doi rezultă că

$$\mathbf{N}(\mathcal{R}(\mathbf{N})) = \{\mathbf{0}\}, \quad \text{şi deci} \quad \mathcal{R}(\mathbf{N}) \subset \mathrm{Ker}\,(\mathbf{N}), \tag{4.35}$$

Vom demonstra că $\dim \mathrm{Ker}\,(\mathbf{N}) = 2$ . Presupunem pentru aceasta, prin absurd, că $\dim \mathrm{Ker}\,(\mathbf{N}) = 0$, sau 1. Dacă $\dim \mathrm{Ker}\,(\mathbf{N}) = \mathbf{0}$ rezultă că $\mathbf{N}$ este injectivă , iar din $\mathbf{N}^2\mathbf{u} = 0$, $\forall \mathbf{u} \in \mathcal{V}$ rezultă $\mathbf{N}\mathbf{u} = \mathbf{0}$, şi deci $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, ceea ce este absurd, având în vedere că $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$ era arbitrar şi deci $\mathbf{N} = 0$.

Dacă $\dim \mathrm{Ker}\,(\mathbf{N}) = 1$, atunci vom arăta că $\dim\mathcal{R}(\mathbf{N}) = 1$. Dar din relaţia (35) rezultă că $\dim\mathcal{R}(\mathbf{N}) = \mathbf{0}$ sau 1.

Presupunem prin absurd că $\dim\, \mathcal{R}(\mathbf{N}) = \mathbf{0}$, deci $\mathbf{N}\mathbf{u} = \mathbf{0}$, $\forall \mathbf{u} \in \mathcal{V}$. Astfel rezultă că $\dim\ \mathrm{Ker}\,(\mathbf{N}) = 3$, ceea ce contrazice ipoteza admisă (că $\dim \mathrm{Ker}\,(\mathbf{N}) = 1$).

A rezultat astfel că singura posibilitate este ca $\dim\ \mathcal{R}(\mathbf{N}) = 1$.

Notăm cu $\{\mathbf{u}_i\}_{i=\overline{1,3}}$ o bază a lui $\mathcal{V}$ astfel încât $\mathrm{Sp}\{\,\mathbf{u}_1\,\} = \mathcal{R}(\mathbf{N}) = \mathrm{Ker}(\mathbf{N})$, iar

$$\mathbf{N}\mathbf{u}_2 = \alpha\mathbf{u}_1, \quad \mathbf{N}\mathbf{u}_3 = \beta\mathbf{u}_1 \quad \Rightarrow \quad \beta\mathbf{u}_2 - \alpha\mathbf{u}_3 \in \mathrm{Ker}\,(\mathbf{N}) = \mathrm{Sp}\{\,\mathbf{u}_1\,\}.$$

Se obţine din nou o contradicţie, deoarece $\{\mathbf{u}_i\}_{i=\overline{1,3}}$ sunt liniari independenţi .

Dacă $\dim\mathrm{Ker}(\mathbf{N}) = 2$ atunci există $\mathbf{e}_1 \in \mathcal{V}$ cu $\mathbf{N}\mathbf{e}_1 \neq 0$ şi $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{v} = 0$ pentru orice $\mathbf{v} \in \mathrm{Ker}(\mathbf{N})$.

$$\text{Fie} \quad \mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{N}\mathbf{e}_1}{\mid \mathbf{N}\mathbf{e}_1 \mid} \quad \text{atunci} \quad \mid \mathbf{e}_2 \mid = 1, \quad \mathbf{e}_2 \in \mathrm{Ker}\,(\mathbf{N}), \quad \text{cu} \quad \mathbf{e}_2 \neq \mathbf{e}_1.$$

Rezultă că $\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{0}$. Fie $\mathbf{e}_3 \in \mathrm{Ker}\,(\mathbf{N})$ astfel încât $\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{0}$.

Astfel s-a construit baza ortonormată $\{\mathbf{e}_i\}_{i=\overline{1,3}}$ în care $\mathbf{N}\mathbf{e}_2 = \mathbf{N}\mathbf{e}_3 = \mathbf{0}$, iar $\mathbf{N}\mathbf{e}_1 = k\mathbf{e}_2$ cu $k = \mid \mathbf{N}\mathbf{e}_1 \mid$ . Rezultă că singurul element nenul în reprezentarea lui $\mathbf{N}$, în această bază, este $\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{N}\mathbf{e}_1 = k$, iar $k = 1$ deoarece $\mid \mathbf{N} \mid = 1$. Astfel am demonstrat că are loc reprezentarea din enunţ.

Dacă $\dim \mathrm{Ker}\ \mathbf{N} = 3$ atunci $\mathbf{N} = \mathbf{0}$ şi astfel este contrazisă ipoteza $\mid \mathbf{N} \mid = 1$. Astfel singurul caz posibil este cel prezentat anterior.

Baza construită în această lemă se va numi *baza canonică* şi va avea un rol esenţial în reprezentările ulterioare.

Incheiem cu următoarea

**Propoziţie 2.** Orice mişcare vâscometrică este incompresibilă.

**Demonstraţie.** Această afirmaţie se obţine ca o consecinţă a afirmaţiei (vezi Ex. 7 , din paragraful 4.9) : o m.i.a.r.c. este incompresibilă dacă şi numai dacă $\mathrm{tr}\,(\kappa\mathbf{N}) = 0$. Ca o consecinţă a Lemei 2., rezultă că $\mathrm{tr}(\mathbf{N}) = 0$, într-o mişcare vâscometrică.

## 4.3 Starea de tensiune într-un fluid supus la o mişcare vâscometrică

### 4.3.1 Teorema de caracterizare a stării de tensiune într-un fluid supus la o mişcare vâscometrică

Vom prezenta o teoremă datorată lui Noll [1962], prin care starea de tensiune într-un fluid (în sensul lui Noll) supus la o mişcare vâscometrică se exprimă (mai puţin un tensor sferic) prin intermediul a trei funcţii, numite *funcţii vâscometrice*. Aceste funcţii se definesc în mod *unic* prin intermediul funcţiilor constitutive ale fluidului considerat.

**Teorema 2.** Fie $\mathcal{B}$ corp constituit dintr-un fluid în $\mathbf{X} \in \mathcal{B}$, supus la o mişcare vâscometrică. Fie $(\mathbf{N}, \kappa) \in Lin \times R-$ setul care caracterizează mişcarea vâscometrică, cu $\mathbf{N}^2 = \mathbf{0}$ şi $|\,\mathbf{N}\,| = 1$. Atunci

i) *Există* trei funcţii cu valori reale, notate $\sigma_1(\kappa)$, $\sigma_1(\kappa)$, şi $\tau(\kappa)$ astfel încât starea de tensiune în particula $\mathbf{X} \in \mathcal{B}$ la momentul $t$ să se reprezinte sub forma

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = -\bar{p}(\mathbf{x}, t)\mathbf{I} + \tau(\kappa)(\mathbf{N} + \mathbf{N}^T) + \sigma_1(\kappa)\mathbf{N}^T\mathbf{N} + \sigma_2(\kappa)\mathbf{N}\mathbf{N}^T. \qquad (4.36)$$

ii) *Semnificaţia mecanică* a funcţiilor vâscometrice este conţinută în formulele

$$\begin{aligned} &T_{11} - T_{33} = \sigma_1(\kappa), \quad T_{22} - T_{33} = \sigma_2(\kappa), \\ &T_{12} = \tau(\kappa), \quad T_{23} = T_{13} = 0, \end{aligned} \qquad (4.37)$$

unde am folosit notaţiile $T_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{T}\mathbf{e}_j$, pentru *componentele tensorului de tensiune în baza canonică* asociată lui $\mathbf{N}$.

**Observaţia 1.** Funcţia $\bar{p}(\mathbf{x}, t)$ rămâne nedeterminată, fiind de tip presiune hidrostatică. Prezenţa ei în model este impusă de faptul că suntem în cazul mişcărilor *incompresibile* (vezi paragraful 2.) şi deci conform principiului determinismului modificat starea de tensiune este detrminată constitutiv mai puţin un tensor sferic.

**Observaţia 2.** In teorema de reprezentare a stării de tensiune poate fi utilizat orice $\mathbf{N}$ care caracterizează mişcarea vâscometrică.

**Propoziţia 3.** Starea de tensiune în fluidul supus la o mişcare vâscometrică poate fi reprezentată sub forma

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = -\bar{p}(\mathbf{x}, t)\mathbf{I} + \tau(\kappa)\frac{(\mathbf{M} + \mathbf{M}^T)}{|\,\mathbf{M}\,|} + \sigma_1(\kappa)\frac{\mathbf{M}^T\mathbf{M}}{(|\,\mathbf{M}\,|)^2} + \sigma_2(\kappa)\frac{\mathbf{M}\mathbf{M}^T}{(|\,\mathbf{M}\,|)^2}, \qquad (4.38)$$

unde $\kappa = |\mathbf{M}| \neq 0$.

**Demonstraţie.** Considerăm reprezentarea constitutivă a fluidului ( în sensul lui Noll) dată în 2.6.1 sub forma

$$\mathbf{T}(\mathbf{x},t) = -p(\rho)\mathbf{I} + \mathcal{R}(\mathbf{C}_t^t(\cdot),\rho), \quad \text{cu proprietăţile}$$

$$\mathcal{R}(\mathbf{I}^t,\rho) = \mathbf{0}, \tag{4.39}$$

$$\mathcal{R}(\mathbf{Q}\mathbf{C}_t^t(\cdot)\mathbf{Q}^T,\rho) = \mathbf{Q}\mathcal{R}(\mathbf{C}_t^t(\cdot),\rho)\mathbf{Q}^T, \quad \forall\mathbf{Q} \in Ort.$$

Deoarece prin definiţie orice mişcare vâscometrică este o m.i.a.r.c. putem folosi reprezentarea tensorului lui Cauchy- Green în descrierea relativă, dată în (1)

$$\mathbf{C}_t^t(s) = \mathbf{Q}(t)exp(-s\kappa\mathbf{N}^T)\, exp(-s\kappa\mathbf{N})\mathbf{Q}^T(t), \quad \text{pentru orice} \quad s \geq 0.$$

Pe de altă parte, orice mişcare vâscometrică este incompresibilă, şi prin urmare, principiul determinismului modificat (Teorema 5 din paragraful 2.3 ), aplicat reprezentării constitutive pentru fluid (39) ne conduce la o reprezentare de forma

$$\mathbf{T}(\mathbf{x},t) = -\tilde{p}(\mathbf{x},t)\mathbf{I} + \bar{\mathcal{R}}(\mathbf{C}_t^t(\cdot)), \quad \text{cu proprietăţile}$$

$$\bar{\mathcal{R}}(\mathbf{I}^t) = \mathbf{0}, \quad \bar{\mathcal{R}}(\mathbf{Q}\mathbf{C}_t^t(\cdot)\mathbf{Q}^T) = \mathbf{Q}\bar{\mathcal{R}}(\mathbf{C}_t^t(\cdot))\mathbf{Q}^T, \quad \forall\mathbf{Q} \in Ort.$$

Inlocuind în reprezentarea anterioară expresia (1) pentru mişcări vâscometrice rezultă

$$\mathbf{T}(\mathbf{x},t) = -\tilde{p}(\mathbf{x},t)\mathbf{I} + \bar{\mathcal{R}}(\, exp(-\cdot\,\mathbf{M}^T(t))\, exp(-\cdot\,\mathbf{M}(t))), \tag{4.40}$$

dacă am utilizat notaţia din (16). Construim funcţia

$$\begin{aligned} &\mathbf{g} : \mathcal{D}_g \subset Lin \longrightarrow Sim \\ &\mathbf{g}(\mathbf{M}) = \bar{\mathcal{R}}(\, exp(-\cdot\,\mathbf{M}^T)\, exp(-\cdot\,\mathbf{M})) \in Sim \end{aligned} \tag{4.41}$$

Arătăm că aceasta are proprietăţile

$a)$ $\mathbf{g}$ este izotropă : $\mathbf{g}(\mathbf{Q}\mathbf{M}\mathbf{Q}^T) = \mathbf{Q}\mathbf{g}(\mathbf{M})\mathbf{Q}^T \quad \forall\mathbf{Q} \in Ort, \quad \forall\mathbf{M} \in \mathcal{D}_g$;

$b)$ $\mathbf{g}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

Să demonstrăm cele două proprietăţi. Pentru aceasta reamintim că

$$exp(-s\mathbf{Q}\mathbf{M}\mathbf{Q}^T) = \mathbf{Q}exp(-s\mathbf{M})\mathbf{Q}^T, \quad \forall\mathbf{Q} \in Ort, \quad \text{deci}$$

$$exp(-s\mathbf{Q}\mathbf{M}^T\mathbf{Q}^T)\, exp(-s\mathbf{Q}\mathbf{M}\mathbf{Q}^T) = \mathbf{Q}exp(-s\mathbf{M}^T)\,\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}exp(-s\mathbf{M})\mathbf{Q}^T.$$

Utilizăm proprietăţile de izotropie ale operatorului $\bar{\mathcal{R}}(\cdot)$ :

$$\bar{\mathcal{R}}(\mathbf{Q}exp(-\cdot\,\mathbf{M}^T)\, exp(-\cdot\,\mathbf{M})\mathbf{Q}^T) = \mathbf{Q}\bar{\mathcal{R}}\,(exp(-\cdot\,\mathbf{M}^T)\, exp(-\cdot\,\mathbf{M}))\mathbf{Q}^T,$$

scrisă pentru $\forall \mathbf{Q} \in Ort$ şi pentru o formă particulară a istoriei tensorului Cauchy - Green în mişcarea relativă. Ultima egalitate ne conduce la proprietatea de izotropie a funcţiei $\mathbf{g}$, proprietatea a).

b) Dacă $\mathbf{M} = \mathbf{0}$ este introdus în

$$\mathbf{C}_t^t(\cdot) = exp(- \cdot \mathbf{M}^T(t))\, exp(- \cdot \mathbf{M}(t)) \quad \text{atunci} \quad \mathbf{C}_t^t(s) = \mathbf{I} = \mathbf{I}^t(s) \quad \forall s \geq 0.$$

Astfel din proprietăţile operatorului constitutiv şi din definiţia funcţiei $\mathbf{g}$ , rezultă

$$\bar{\mathcal{R}}(\mathbf{I}^t(s)) = \mathbf{0} \quad \text{şi} \quad \mathbf{g}(\mathbf{0}) = \bar{\mathcal{R}}(\mathbf{I}^t(s)) = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{g}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

In concluzie am obţinut pentru starea de tensiune următoarea reprezentare

$$\begin{aligned} &\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = -\tilde{p}(\mathbf{x}, t)\mathbf{I} + \mathbf{g}(\mathbf{M}(t)), \quad \text{cu proprietăţile} \\ &a) \quad \mathbf{g}(\mathbf{Q}\mathbf{M}(t)\mathbf{Q}^T) = \mathbf{Q}\mathbf{g}(\mathbf{M}(t))\mathbf{Q}^T, \quad \forall \mathbf{Q} \in Ort, \\ &b) \quad \mathbf{g}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}, \end{aligned} \tag{4.42}$$

trecând de la operatorul constitutiv, cu valorile calculate pe istoriile particulare asociate m.i.a.r.c., la funcţia $\mathbf{g}$, prin formulele (40), (41).

Folosind izotropia funcţiei $\mathbf{g}$ vom arăta că pentru $\mathbf{M} \neq \mathbf{0}$ ,

$$\mathbf{g}(\mathbf{M}) = \tau(\kappa)(\mathbf{N} + \mathbf{N}^T) + \sigma_1(\kappa)\mathbf{N}^T\mathbf{N} + \sigma_2(\kappa)\mathbf{N}\mathbf{N}^T + g_{33}(\kappa)\mathbf{I}, \tag{4.43}$$

unde $\mathbf{M} = \kappa\mathbf{N}$, $\kappa = \mid \mathbf{M} \mid$ şi deci $\mid \mathbf{N} \mid = 1$.

Dacă $\mathbf{M} = \mathbf{0}$ atunci din proprietatea b) a funcţiei $\mathbf{g}$ avem $\mathbf{g}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ şi în mod evident are loc egalitatea anterioară.

Dacă $\mathbf{M} \neq \mathbf{0}$ atunci demonstrarea formulei (43) se face după cum urmează.

Deoarece $\mathbf{N}$ este nilpotent de ordinul doi, de norma 1, folosim lema 2. şi prin urmare punem în evidenţă baza canonică.

Considerăm transformarea ortogonală : $\mathbf{Q}_0 \in Ort$, care se reprezintă în baza canonică asociată lui $\mathbf{N}$ prin

$$[\mathbf{Q}_0] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Să observăm că $[\mathbf{Q}_0\mathbf{M}\mathbf{Q}_0^T] = [\mathbf{M}]$, care se obţine din calculul direct

$$[Q_0\mathbf{N}Q_0^T] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = [\mathbf{N}],$$

cu remarca $[\mathbf{M}] = \kappa[\mathbf{N}]$.

Pentru acest $\mathbf{Q}_0$, din proprietatea de izotropie, rezultă că

$$\mathbf{Q}_0\mathbf{g}(\mathbf{M})\mathbf{Q}_0^T = \mathbf{g}(\mathbf{Q}_0\mathbf{M}\mathbf{Q}_0^T) = \mathbf{g}(\mathbf{M}). \tag{4.44}$$

In baza canonică vom nota prin $g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{g}(\mathbf{M})\mathbf{e}_j$ elementele matricii $[\mathbf{g}(\mathbf{M})] \in Sim$ şi vom scrie în baza canonică egalitatea anterioară, (44). Efectuând înmulţirea matricelor găsim

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & -g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & -g_{23} \\ -g_{31} & -g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}. \tag{4.45}$$

Din ultima egalitate rezultă că $g_{13} = 0$ şi $g_{23} = 0$. Astfel matricea $[\mathbf{g}(\mathbf{M})]$ va avea forma

$$[\mathbf{g}(\mathbf{M})] = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & 0 \\ g_{21} & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & g_{33} \end{pmatrix}.$$

Arătăm că funcţia $\mathbf{g}$ *este independentă de* $\mathbf{M} \in Lin$, ea va depinde numai de $|\mathbf{M}| = \kappa$. Altfel exprimat

$$\mathbf{g}(\mathbf{M}) = \mathbf{g}(|\mathbf{M}|)$$

Fie $\mathbf{M}$ si $\bar{\mathbf{M}}$ ambele nenule, cu $\mathbf{M}^2 = \bar{\mathbf{M}}^2 = 0$ şi $|\mathbf{M}| = |\bar{\mathbf{M}}| = \kappa$. Există bazele canonice asociate transformărilor $\mathbf{M}$ si $\bar{\mathbf{M}}$, notate prin $\{\mathbf{e}_i\}_{i\in\{\overline{1,3}\}}$, şi respectiv $\{\mathbf{f}_i\}_{i\in\{\overline{1,3}\}}$ şi au loc următoarele formule de reprezentare în bazele corespunzătoare

$$\mathbf{M} = \kappa\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1, \quad \bar{\mathbf{M}} = \kappa\mathbf{f}_2 \otimes \mathbf{f}_1.$$

Pe de alta parte rezultă că există $\bar{\mathbf{Q}} \in Ort$ astfel încât $\bar{\mathbf{Q}}\mathbf{f}_j = \mathbf{e}_j$, pentru $j \in \{\overline{1,3}\}$.

Ca o consecinţă a izotropiei funcţiei $\mathbf{g}$ au loc următoarele egalităţi

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{M}\mathbf{e}_j = \mathbf{f}_i \cdot \bar{\mathbf{M}}\mathbf{f}_j = \bar{\mathbf{Q}}^T\mathbf{e}_i \cdot \bar{\mathbf{M}}\bar{\mathbf{Q}}^T\mathbf{e}_j, \quad \text{sau}$$

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{M}\mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i \cdot \bar{\mathbf{Q}}\bar{\mathbf{M}}\bar{\mathbf{Q}}^T\mathbf{e}_j \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{M} = \bar{\mathbf{Q}}\bar{\mathbf{M}}\bar{\mathbf{Q}}^T$$

şi

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{g}(\mathbf{M})\mathbf{e}_j &= \bar{\mathbf{Q}}\mathbf{f}_i \cdot \mathbf{g}(\mathbf{M})\bar{\mathbf{Q}}\mathbf{f}_j = \mathbf{f}_i \cdot \bar{\mathbf{Q}}^T\mathbf{g}(\mathbf{M})\bar{\mathbf{Q}}\mathbf{f}_j \\ &= \mathbf{f}_i \cdot \mathbf{g}(\bar{\mathbf{Q}}^T\mathbf{M}\bar{\mathbf{Q}})\mathbf{f}_j = \mathbf{f}_i \cdot \mathbf{g}(\bar{\mathbf{M}})\mathbf{f}_j \quad \forall i,j \in \overline{1,3} \end{aligned}$$

Fie un $\mathbf{M}$ fixat, cu proprietăţile menţionate şi $|\mathbf{M}| = \kappa$, atunci folosind reprezentarea găsită pentru $\mathbf{g}(\mathbf{M})$ avem

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(\mathbf{M}) = g_{11}(\kappa)\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + g_{12}(\kappa)(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1) + \\ + g_{22}(\kappa)\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + g_{33}(\kappa)\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

Notăm cu

$$\sigma_1(\kappa) = g_{11}(\kappa) - g_{33}(\kappa),\ \sigma_2(\kappa) = g_{22}(\kappa) - g_{33}(\kappa),\ \tau(\kappa) = g_{12}(\kappa),$$

care introduse în reprezentarea anterioară conduc la

$$\mathbf{g}(\mathbf{M}) = \sigma_1(\kappa)\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \sigma_2(\kappa)\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \tau(\kappa)(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1) + g_{33}(\kappa)\mathbf{I}, \quad (4.46)$$

dacă ţinem seama că $\mathbf{I} = \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3$. Din Propoziţia 1. $\kappa \in R$.

Folosim reprezentările în baza canonică pentru $\mathbf{N} = (1/\kappa)\mathbf{M}$ şi obţinem că

$$[\mathbf{N}^T\mathbf{N}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{N}\mathbf{N}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Rezultă astfel că au loc egalităţile între aplicaţiile liniare menţionate

$$\mathbf{N} = \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{N}^T = \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{N}^T\mathbf{N} = \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{N}\mathbf{N}^T = \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2. \quad (4.47)$$

Dacă ţinem seama de (47) în (46) obţinem din (42) formula de reprezentare a stării de tensiune (36), în care s-a notat $-\bar{p} = g_{33}(\kappa) - \tilde{p}$.

ii) Formulele (37) se pot obţine direct din reprezentarea (36), dacă se utilizează relaţiile (47) care descriu reprezentările, în baza canonică a tensorilor ce intervin în membrul drept al relaţiei (36).

**Observaţia 3.** Funcţiile vâscometrice introduse în teorema lui Noll admit reprezentările (37) prin componentele tensorului de tensiune în baza canonică asociată tensorului caracteristic al mişcării vâscometrice. Prin urmare funcţiile vâscometrice $\sigma_j$, cu $j \in \{1.2\}$, au semnificaţie mecanică de *diferenţe ale tensiunilor normale*, iar funcţia vâscometrică $\tau$ reprezintă o *tensiune de forfecare*. De aici decurg denumirile acestora.

Funcţiile vâscometrice $\sigma_j(\cdot)-$ se numesc *funcţii vâscometrice normale*, iar funcţia vâscometrică $\tau(\cdot)$ se numeşte *funcţie vâscometrică de forfecare.* Tensiunea de forfecare este egală cu componenta vectorului de tensiune care acţionează pe un element de suprafaţă de normală $\mathbf{e}_1$ în direcţia $\mathbf{e}_2$.

Scalarul $\kappa$ se numeşte *viteză de forfecare*, ceea ce se justifică atât prin dimensiunea fizică de viteză, cât şi prin semnificaţia ei. Câteva consideraţii pe această temă vor fi făcute în paragraful 4.4.2, în care se analizează mişcarea staţionară de forfecare.

### 4.3.2 Proprietăţi ale funcţiilor vâscometrice

**Propoziţia 4.** Funcţiile vâscometrice introduse în teorema de reprezentare (36) au următoarele proprietăţi

$$\sigma_j(\kappa) = \sigma_j(-\kappa), \quad j \in \{1,2\}, \quad \tau(-\kappa) = -\tau(\kappa) \quad \forall \kappa \in R$$

Deci funcţiile vâscometrice normale sunt pare, iar funcţia vâscometrica de forfecare este impară.

**Demonstraţie**. Fie $\mathbf{N}$ dat. Să considerăm $\mathbf{Q}_1 \in Ort$, reprezentat în baza canonică a lui $\mathbf{N}$ prin matricea

$$[\mathbf{Q}_1] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Printr-un calcul direct rezultă că

$$[\mathbf{Q}_1 \mathbf{N} \mathbf{Q}_1^T] = -[\mathbf{N}].$$

Pe de altă parte

$$[\mathbf{Q}_1 \mathbf{g}(\mathbf{M}) \mathbf{Q}_1^T] = \begin{pmatrix} g_{11} & -g_{12} & 0 \\ -g_{12} & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & g_{33} \end{pmatrix}.$$

Folosim din nou proprietatea de izotropie a funcţiei $\mathbf{g}$, scrisă în (42) şi utilizăm proprietatea menţionată pentru compunerea cu $\mathbf{Q}_1$ a transformării $\mathbf{N}$. Rezultă

$$\mathbf{Q}_1 \mathbf{g}(\kappa \mathbf{N}) \mathbf{Q}_1^T = \mathbf{g}(-\kappa \mathbf{N}). \tag{4.48}$$

Rescriem egalitatea din (48) prin intermediul reprezentării (46). Membrul stâng devine

$$\sigma_1(\kappa)\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \sigma_2(\kappa)\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 - \tau(\kappa)(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1) + g_{33}(\kappa)\mathbf{I},$$

unde s-a folosit transformarea pentru $\mathbf{g}(\kappa \mathbf{N})$ prin compunere cu $\mathbf{Q}_1$. Membrul drept rezultă egal cu

$$\sigma_1(-\kappa)\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \sigma_2(-\kappa)\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \tau(-\kappa)(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1) + g_{33}(-\kappa)\mathbf{I},$$

dacă în (46) am folosit perechea $(-\kappa, \mathbf{N})$. Afirmaţia din enunţul propoziţiei se obţine din (48), împreună cu formulele anterioare.

**Observaţia 4.** Dacă acceptăm că funcţiile vâscometrice sunt netede, prin dezvoltări în serie în vecinătatea lui $\kappa = 0$, obţinem

$$\begin{aligned} &\tau(\kappa) = \mu_0 \kappa + \mu_1 \kappa^3 + O(\kappa^5), \\ &\sigma_1 = s_1 \kappa^2 + O(\kappa^4), \quad \sigma_2 = s_2 \kappa^2 + O(\kappa^4). \end{aligned} \tag{4.49}$$

Vom *presupune* în cele ce urmează că

$$\kappa \longrightarrow \tau(\kappa) \quad \text{este inversabila} \tag{4.50}$$

şi vom defini funcţiile

$$\hat{\sigma}_j(\gamma) = \sigma_j(\tau^{-1}(\gamma)), \tag{4.51}$$

numite *funcţii vâscometrice normale modificate.* Aceste funcţii vor fi folosite curent în paragraful 4. al prezentului capitol.

**Observaţia 5.** Sunt utilizate în literatură şi alte reprezentări pentru funcţiile văscometrice, ca de exemplu

$$\eta(\kappa) = \frac{\tau(\kappa)}{\kappa} \qquad \text{cu propritățile,}$$

$$\eta(-\kappa) = \eta(\kappa), \qquad \exists \lim_{\kappa\to 0} \eta(\kappa) = \mu_0.$$

$\eta(\kappa)$ se numeşte *vâscozitate de forfecare*, sau *funcţiile văscometrice reduse* $V(K)$, $N_1(K), N_2(K)$, care sunt funcţii adimensionale, pare, de variabilă adimensională

$$\tau(\kappa) = \mu_0\, \kappa\, V(K),$$

$$\sigma_1(\kappa) = \mu_0\, s_0\, \kappa^2\, N_1(K),$$

$$\sigma_2(\kappa) = \mu_0\, s_0\, \kappa^2\, N_2(K),$$

unde $K = s_0\, \kappa$. Mărimile $\mu_0$ şi $s_0$ se numesc *vâscozitate naturală* şi respectiv *timp caracteristic (natural)* .

Constantele de material introduse au următoarele dimensiuni fizice

$$\dim(\mu_0) \equiv [\mu_0] = ML^{-1}T^{-1}, \quad \dim(s_0) \equiv [s_0] = T^{-1}.$$

Astfel proprietăţile vâscometrice ale fluidelor sunt complet specificate prin cunoaşterea cantităţilor :

1. *Vâscozitatea naturală* $\mu_0$.
2. *Timpul caracteristic natural* $s_0$.
3. *Funcţiile vâscometrice reduse* $V(K), N_1(K), N_2(K)$.

Aşa cum remarca Truesdell, există o infinitate de modalităţi de definire a constantelor de material, dar se pot introduce unele care să admită un suport experimental. Truesdell [1964] introduce funcţia de *timp caracteristic natural* $\tilde{s}(K)$, ca fiind o măsură a importanţei relative a tensiunilor normale şi a celor de forfecare şi care să se anuleze pentru acele fluide, şi numai pentru acelea, pentru care nu există efecte ale tensiunilor normale, pe mişcări vâscometrice

$$\tilde{s}(K) \equiv \frac{\sqrt{(\sigma_1(\kappa))^2 + (\sigma_2(\kappa))^2}}{\kappa^2 \eta(\kappa)} = s_0 \frac{\sqrt{(N_1(K))^2 + (N_2(K))^2}}{V(K)} \tag{4.52}$$

$$\mu_0 = \eta(0), \quad s_0 \equiv \tilde{s}(0)$$

Funcţiile $V, N_1, N_2$ rezultă că sunt supuse la restricţiile

$$V(0) = 1, \quad N_1^2(0) + N_2^2(0) = 1,$$

care se deduc din definiţiile anterioare.

**Observaţia 6.** Cazul fluidului liniar vâscos, în care nu există efecte ale tensiunilor normale corespunde următoarelor reprezentări

$$\eta(K) \equiv \mu_0, \quad V(K) \equiv 1, \quad N_1(K) \equiv N_2(K) \equiv 0.$$

Date de natură experimentală privind valorile funcţiilor vâscometrice pot fi găsite în Coleman, Markovitz, Noll [1966], Larson [1989]. In Fig. 4.1 şi 4.2 sunt date graficele pentru funcţiile vâscometrice ale unei soluţii de poliizobutilenă în cetan ( soluţie des folosită în literatură pentru exemplificări, graficele fiind făcute după Coleman, Markovitz, Noll [1966] ).

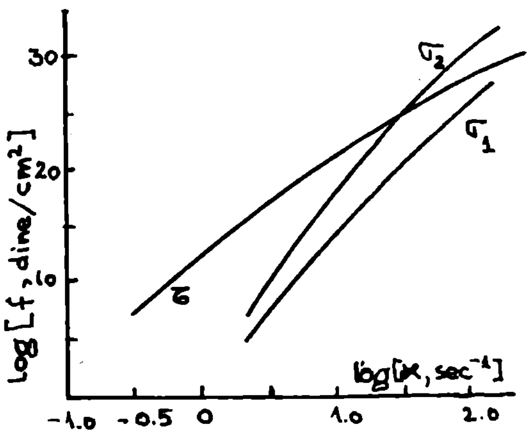



Fig. 4.1

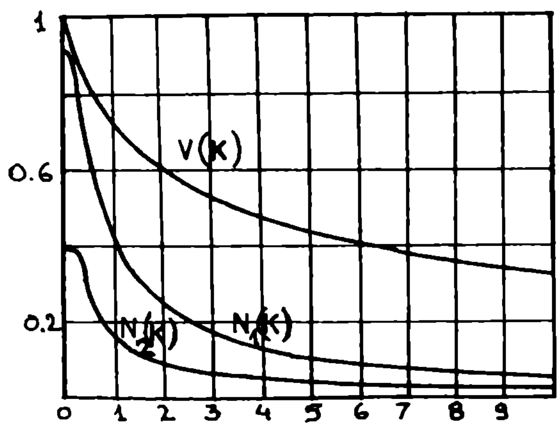



Fig. 4.2

## 4.4 Exemple de mişcări vâscometrice

Mişcările vâscometrice concrete ( sau particulare) sunt introduse prin intermediul câmpului de viteze în particula $\mathbf{X} \in \mathcal{B}$ la fiecare moment de timp. Sunt definite *componentele contravariante ale vitezei în sisteme curbilinii de coordonate.*

In prezentarea exemplelor vom urmări, în acest paragraf, numai *aspectele cinematice*, punând în evidenţă următoarele elemente

a) *Definirea* câmpului de viteze în bazele locale specifice,

b) *Construirea* mişcării căreia i se asociază câmpul de viteze menţionat,

c) *Demostrarea* faptului că mişcările considerate sunt vâscometrice.

Vom prezenta următoarele mişcări

1. *mişcarea staţionară de forfecare* în paragraful 4.4.2;

2. *mişcarea elicoidală* în cazul general, în paragraful 4.4.3;

3. *mişcarea staţionară de torsiune* în paragraful 4.4.4;

4. *mişcarea Couette* şi respectiv *mişcarea Poiseuille* vor fi obţinute prin particularizări specifice din mişcarea elicoidală, dar vom prezenta în detaliu dinamica acestora în paragrafele 4.6.2 şi 4.6.3;

5. *mişcarea de tip con - placă* va fi prezentată sub formă de probleme propuse în paragraful de exerciţii.

In primul paragraf vom discuta formulele generale de cinematică care vor fi utilizate în cazurile concrete de mişcări vâscometrice.

### 4.4.1 Elemente generale de cinematică, aplicate în descrierea mişcărilor vâscometrice.

Vom nota prin $\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t)$ şi respectiv $\mathbf{y} = \chi(\mathbf{X}, \tau)$ poziţiile particulei $\mathbf{X}$, la momentele de timp $t$ şi, respectiv, $\tau$. Considerăm, într-o bază carteziană fixată, coordonatele lui $\mathbf{x}$ şi respectiv $\mathbf{y}$, notate prin $\{x^i\}_{i\in\{\overline{1,3}\}}$ şi $\{y^i\}_{i\in\{\overline{1,3}\}}$, iar *coordonatele curbilinii* corespunzătoare vor fi notate $\{q^i\}_{i\in\{\overline{1,3}\}}$ şi $\{\xi^i\}_{i\in\{\overline{1,3}\}}$.

Considerăm deci (vezi Fig. 4.3 )

$$\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t); \qquad \{x^i\}_{i\in\{\overline{1,3}\}} \longrightarrow \{q^i\}_{i\in\{\overline{1,3}\}} \quad \text{bijectivă, nesingulară,}$$

$$\mathbf{y} = \chi(\mathbf{X}, \tau); \qquad \{y^i\}_{i\in\{\overline{1,3}\}} \longrightarrow \{\xi^i\}_{i\in\{\overline{1,3}\}} \quad \text{bijectivă, nesingulară,}$$

regulate, de clasă $C^2$.

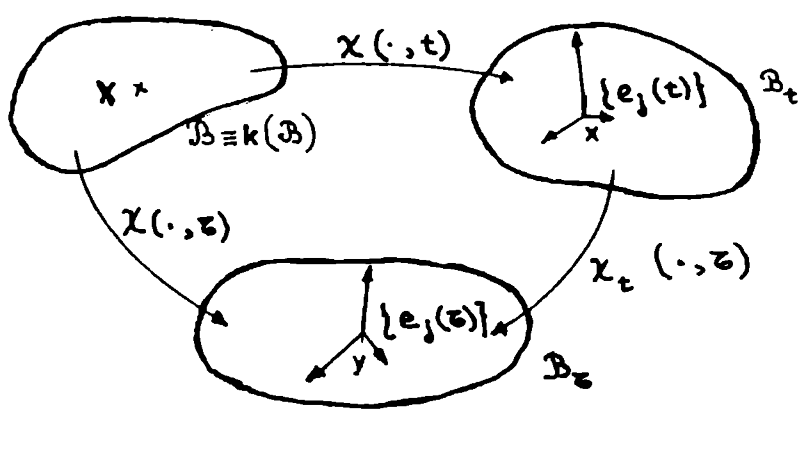



Fig. 4.3

*Definim bazele locale* în $\mathbf{x} \in \mathcal{B}_t$– configuraţia corpului la momentul t, considerată drept configuraţie iniţială într-o descriere relativă a mişcării şi respectiv în

$\mathbf{y} \in \mathcal{B}_\tau$ – configuraţia corpului la momentul $\tau$, configuraţia curentă: $\{\mathbf{e}_i(t)\}_{i\in\overline{\{1,3\}}}$ şi respectiv $\{\mathbf{e}_i(\tau)\}_{i\in\overline{\{1,3\}}}$, prin

$$\mathbf{e}_i(t) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q^i}, \quad \mathbf{e}_i(\tau) = \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \xi^i}, \quad \forall i \in \overline{1,3} \tag{4.53}$$

Utilizăm notaţiile standard pentru *bazele reciproce* ale bazelor locale definite mai sus, la momentul $\tau$,

$$\{\mathbf{e}^i(\tau)\}_{i\in\{\overline{1,3}\}}, \quad \text{asfel încât} \quad \mathbf{e}^k(\tau)\cdot\mathbf{e}_p(\tau) = \delta^k_p\,, \quad i,k,p \in \{\overline{1,3}\} \tag{4.54}$$

şi în mod similar pentru baza reciprocă la momentul $t$.

*Tensorul metric*, corespunzător sistemelor curbilinii introduse, este caracterizat prin matricea

$$[g_{ij}(\tau)]_{(i,j)}\,, \quad \text{cu} \quad g_{ij}(\tau) = \mathbf{e}_i(\tau)\cdot\mathbf{e}_j(\tau) \quad \forall\, i,j \in \overline{\{1,3\}}, \tag{4.55}$$

la momentul $\tau$ şi în mod similar la momentul $t$. Notăm matricea inversă la momentul $\tau$ şi respectiv $t$ prin

$$[g^{ij}(\tau)]_{(i,j)} \quad \text{şi} \quad [g^{ij}(t)]_{(i,j)} \quad \text{pentru} \quad i,j \in \{\overline{1,3}\} \tag{4.56}$$

*Bazele fizice* asociate bazelor locale sunt definite, la momentele de timp menţionate, prin

$$\mathbf{e}_{<i>}(\tau) = \frac{\mathbf{e}_i(\tau)}{\sqrt{g_{ii}(\tau)}}(!), \quad \text{şi} \quad \mathbf{e}^{<i>}(t) = \frac{\mathbf{e}^i(t)}{\sqrt{g^{ii}(t)}}(!) \tag{4.57}$$

pentru $i,j \in \{\overline{1,3}\}$. Nu se face nici o sumare în relaţiile anterioare.

Vom utiliza descrierea relativă a mişcării pentru a construi traiectoria particulei materiale $\mathbf{X}$, pornind de la câmpul de viteze descris în sistemele curbilinii de coordonate.

*Mişcarea relativă* este definită prin formula (1.47)

$$\chi_t(\cdot,\tau) : \mathcal{B}_t \longrightarrow \mathcal{B}_\tau; \quad \mathbf{y} = \chi_t(\mathbf{x},\tau),$$

iar pentru $\tau = t$ avem $\mathbf{y} = \mathbf{x}$ .

*Gradientul mişcării* relative se defineşte prin formula (1.48)

$$\mathbf{F}_t(\mathbf{x},\tau) = \nabla_{\mathbf{x}}\chi_t(\mathbf{x},\tau). \tag{4.58}$$

**Propoziţia 5.** i) In bazele locale asociate au loc formulele

$$\begin{aligned}
&\mathbf{F}_t(\mathbf{x},\tau) = \frac{\partial \xi^k}{\partial q^i}\mathbf{e}_k(\tau)\otimes\mathbf{e}^i(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \xi^k}{\partial q^i} = \mathbf{e}^k(\tau)\cdot\mathbf{F}_t(\mathbf{x},\tau)\mathbf{e}_i(t),\\
&\mathbf{F}_t(\mathbf{x},\tau) = \frac{\partial \xi^k}{\partial q^i}g_{kj}(\tau)\,\mathbf{e}^j(\tau)\otimes\mathbf{e}^i(t) \quad \Rightarrow \quad g_{jk}\frac{\partial \xi^k}{\partial q^i} = \mathbf{e}_j(\tau)\cdot\mathbf{F}_t(\mathbf{x},\tau)\mathbf{e}_i(t).
\end{aligned} \tag{4.59}$$

ii) Dacă *bazele locale sunt ortogonale*, la orice moment $\tau$, (deci şi la momentul $t$ ) atunci

$$\mathbf{F}_t(\mathbf{x},\tau)=\mathbf{Q}_t(\tau)\frac{\partial\xi^k}{\partial q^i}\frac{g_{kj}(\tau)}{\sqrt{g_{jj}(\tau)g_{ii}(t)}}\mathbf{e}_{<j>}(t)\otimes\mathbf{e}_{<i>}(t) \quad \text{unde} \tag{4.60}$$

$$\mathbf{Q}_t(\tau)\in Ort, \quad \text{astfel încât} \quad \mathbf{e}_{<i>}(\tau)=\mathbf{Q}_t(\tau)\mathbf{e}_{<i>}(t) \quad \forall i\in\{\overline{1,3}\}$$

Menţionăm că matricea care defineşte metrica, în acest caz, la momentul $\tau$ are elementele nediagonale nule.

**Demonstraţie.** i) Folosim definiţiile bazei locale (53) şi a gradientului în mişcarea relativă (58) şi obţinem

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_t(\mathbf{x},\tau)\mathbf{e}_i(t) &= \nabla_{\mathbf{x}}\chi_t(\mathbf{x},\tau)[\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial q^i}]=\frac{\partial\mathbf{y}}{\partial q^i}=\\ &=\frac{\partial\mathbf{y}}{\partial\xi^k}\frac{\partial\xi^k}{\partial q^i}=\frac{\partial\xi^k}{\partial q^i}\mathbf{e}_k(\tau)\end{aligned}$$

Utilizând acum proiecţia pe bază şi pe baza reciprocă la momentul $\tau$ avem

$$\mathbf{e}_j(\tau)\cdot\mathbf{F}_t(\mathbf{x},\tau)\mathbf{e}_i(t)=\frac{\partial\xi^k}{\partial q^i}g_{kj}(\tau),\quad \mathbf{e}^j(\tau)\cdot\mathbf{F}_t(\mathbf{x},\tau)\mathbf{e}_i(t)=\frac{\partial\xi^j}{\partial q^i}.$$

De aici rezultă reprezentările în bazele menţionate prin formulele (58), conform formulelor din A1.

ii) Introducem transformarea ortogonală $\mathbf{Q}_t(\tau)$ care pune în corespondenţă elementele celor două baze fizice, ortogonale şi folosind (57) rezultă

$$\mathbf{e}_j(\tau)=\sqrt{g_{jj}(\tau)}\mathbf{Q}_t(\tau)\mathbf{e}_{<j>}(t)(!).$$

Introducem ultima relaţie în (59) şi trecînd de asemenea la baza fizică la momentul $t$ avem

$$\sqrt{g_{jj}(\tau)}\mathbf{Q}_t(\tau)\mathbf{e}_{<j>}(t)\cdot\mathbf{F}_t(\mathbf{x},\tau)(\sqrt{g_{ii}(t)}\mathbf{e}_{<i>}(t))=g_{jk}\frac{\partial\xi^k}{\partial q^i}$$

Aici indicele $k$ este de sumare, în timp ce $j$ şi $i$ sunt fixate, nesumându-se după $i$ şi $j$.

O formă echivalentă cu cele de mai sus este

$$\mathbf{e}_{<j>}(t)\cdot\mathbf{Q}_t^T(\tau)\mathbf{F}_t(\mathbf{x},\tau)\mathbf{e}_{<i>}(t)=g_{jk}\frac{1}{\sqrt{g_{jj}(\tau)g_{ii}(t)}}\frac{\partial\xi^k}{\partial q^i}\quad (!),$$

din care rezultă formula (60) prin trecerea la reprezentarea tensorială, ţinând seama că bazele fizice asociate bazelor locale ortogonale şi reciprocelor lor coincid.

**Consecinţa 2.** Prin particularizarea momentului $t$, ca fiind momentul iniţial, din (60) avem

$$\mathbf{F}_0(\mathbf{x},\tau) = \mathbf{Q}_0(\tau)\frac{\partial \xi^k}{\partial q^i}\frac{g_{kj}(\tau)}{\sqrt{g_{jj}(\tau)g_{ii}(0)}}\mathbf{e}_{<j>}(0)\otimes\mathbf{e}_{<i>}(0). \qquad (4.61)$$

**Propoziţia 6.** In baza locală câmpul de viteze la momentul curent $\tau$ şi respectiv la momentul $t$ se reprezintă prin

$$\mathbf{v}(\mathbf{y},\tau) = \dot{\xi}^k\mathbf{e}_k(\tau), \quad \mathbf{v}(\mathbf{x},t) = \dot{q}^k\mathbf{e}_k(t). \qquad (4.62)$$

Deci $\dot{\xi}^k$ şi $\dot{q}^k$ reprezintă *componentele contravariante* ale vitezei în bazele locale de la momentele $\tau$ si $t$.

**Demonstraţie** Pornim de la formula (1.52) care defineşte viteza în mişcarea relativă şi folosim definiţia bazei locale (53)

$$\mathbf{v}(\mathbf{y},\tau) = \frac{\partial\chi_t(\mathbf{x},\tau)}{\partial\tau} = \frac{\partial\mathbf{y}}{\partial\tau} = \frac{\partial\mathbf{y}}{\partial\xi^k}\frac{\partial\xi^k}{\partial\tau} = \dot{\xi}^k\mathbf{e}_k(\tau).$$

### 4.4.2 Mişcarea staţionară de forfecare

**Definiţia 3.** Spunem că mişcarea $\chi$ este *staţionară de forfecare* (în particula $\mathbf{X}$) dacă, componentele vitezei într-o bază carteziană $\{\mathbf{i}_k\}_{k\in\{\overline{1,3}\}}$ se reprezintă la orice moment de timp $\tau$ prin

$$\dot{y}^1 = 0, \quad \dot{y}^2 = v(y^1), \quad \dot{y}^3 = 0. \qquad (4.63)$$

**Propoziţia 7.** i) In mişcarea de forfecare simplă traiectoria particulei, care la momentul $t$, ocupă poziţia $\mathbf{x}$ este o dreaptă paralelă cu $\mathbf{i}_2$. Particula se mişcă cu viteză constantă $\mathbf{v}(\mathbf{x},t) = v(x^1)\mathbf{i}_2$.

ii) Gradientul în mişcarea relativă se reprezintă sub forma

$$\mathbf{F}_t(\mathbf{X},\tau) = \mathbf{I} + (\tau - t)\kappa\mathbf{N} \equiv \exp((\tau-t)\kappa\mathbf{N}), \quad \forall\kappa, \quad \tau\in R,$$

$$\text{cu} \quad \mathbf{N} = \mathbf{i}_2\otimes\mathbf{i}_1 \quad \text{deci} \quad \mathbf{N}^2 = \mathbf{0}, \quad |\,\mathbf{N}\,| = 1 \quad \text{şi} \quad \kappa = v'(x^1).$$

iii) Mişcarea staţionară de forfecare este o mişcare vâscometrică.

**Demonstraţie** i) Prin integrarea sistemului diferenţial (63) cu condiţia iniţială $\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}$, rezultă funcţia care descrie mişcarea relativă $\chi_t(\mathbf{x},\tau)$

$$y^1(\tau) = x^1, \quad y^2(\tau) = (\tau - t)v(x^1) + x^2, \quad y^3(\tau) = x^3,$$

în sistemul cartezian de coordonate.

Rezultă imediat din calculul $\mathbf{F}_t(\mathbf{x},\tau) = \dfrac{\partial y^k}{\partial x^j}\mathbf{i}_k\otimes\mathbf{i}_j$ afirmaţiile i), ii). Dacă vom considera în ii) pe $t = 0$, rezultă că mişcarea este vâscometrică, conform Definiţiei 2 şi ţinând seama că are loc formula (2).

**Propoziţia 8.** In mişcarea staţionară de forfecare valorile principale nenule ale lui $\mathbf{D}(\mathbf{x}, t)$ sunt egale cu $\pm\frac{1}{2}\kappa$, cu notaţia $\kappa \equiv v'(x^1)$.

**Demonstraţie.** Calculăm

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}, t) = \nabla\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = v'(x^1)\mathbf{i}_2 \otimes \mathbf{i}_1, \quad \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2}v'(x^1)(\mathbf{i}_1 \otimes \mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_2 \otimes \mathbf{i}_1).$$

Ecuaţia caracteristică este dată de $\lambda(\lambda^2 - (\frac{1}{2}v'(x^1))^2) = 0$. Rezultă că valorile proprii sunt $\lambda_1 = 0, \lambda_{2,3} = \pm\frac{1}{2}v'(x^1)$, de unde afirmaţia făcută.

**Observaţia 6.** Remarcăm că baza carteziană *coincide cu baza canonică* asociată tensorului nilpotent de ordinul al doilea, care caracterizează mişcarea vâscometrică. De aici decurge o altă semnificaţie fizică : în baza canonică mişcarea vâscometrică *corespune* unei mişcări staţionare de forfecare.

In baza acestei propoziţii este totodată justificată denumirea de viteză de forfecare pentru parametrul real $\kappa$.

### 4.4.3 Mişcarea elicoidală

**Definiţia 4.** Spunem ca mişcarea $\chi$ *este elicoidală* (în particula $\mathbf{X}$ ) dacă componentele *contravariante* ale vitezei în baza locală, corespunzătoare *sistemului cilindric de coordonate* se reprezintă la orice moment de timp $\tau$ prin

$$\dot{\xi}^1 = 0, \quad \dot{\xi}^2 = \omega(\xi^1), \quad \dot{\xi}^3 = u(\xi^1). \tag{4.64}$$

**Propoziţia 9.** i) Mişcarea elicoidală definită cinematic prin (64) este caracterizată de următoarea reprezentare parametrică a traiectoriei particulei $\mathbf{X}$, care la momentul $t$ ocupă poziţia $\mathbf{x}$

$$\begin{aligned} \xi^1 &= q^1, \\ \xi^2 &= \omega(q^1)(\tau - t) + q^2, \\ \xi^3 &= u(q^1)(\tau - t) + q^3, \end{aligned} \tag{4.65}$$

la momentul $t$ coordonatele curbilinii ale lui $x$ fiind $q^1 = r, q^2 = \theta, q^3 = z$.

ii) Semnificaţia mecanică a celor de mai sus este dată de următoarele

a) Dacă $\omega(r)$ şi $u(r) \neq 0$, traiectoria particulei $X$ este o *elice, circulară dreaptă,* aflată pe suprafaţa $q^1 = r$, de pas $h \equiv 2\pi\frac{u(r)}{\omega(r)}$. In acest caz are loc o *mişcare elicoidală propriu-zisă.*

b) Dacă $\omega(r) \neq 0$ şi $u(r) = 0$,: traiectoria este un *cerc* de rază $r$ pe suprafaţa cilindrică $q^1 = r$. Mişcarea, în acest caz, este de tip Couette.

c) Dacă $\omega(r) = 0$ şi $u(r) \neq 0$, traiectoria particulei este o *dreaptă* pe suprafaţa cilindrică $q^1 = r$. In acest caz mişcarea este *de tip Poiseuille.*

**Demonstraţie.** i) Integrăm sistemul diferenţial din (64), cu condiţia iniţială asociată la momentul $\tau = t$, $\xi^i = q^i$ pentru $i \in \overline{\{1,3\}}$,

$$\frac{d\xi^1}{d\tau} = 0, \quad \frac{d\xi^2}{d\tau} = \omega(\xi^1), \quad \frac{d\xi^3}{d\tau} = u(\xi^1).$$

Rezultă formulele (65).

ii) Sistemul de coodonate curbiliniu considerat în această mişcare este sistemul cilindric de coordonate. La momentul $\tau$ avem relaţiile de legătură între coordonatele carteziene ale punctului $\mathbf{y}$ şi coordonatele curbilinii

$$y^1 = \xi^1 \cos \xi^2, \quad y^2 = \xi^1 \sin \xi^2, \quad y^3 = \xi^3. \tag{4.66}$$

Din (66) şi (65) rezultă reprezentarea parametrică a curbei descrise de particula materială $\mathbf{X}$, identificată prin poziţia ei $\mathbf{x}$, la momentul $t$ fixat, sub forma

$$y^i = f^i(\tau; t, q^1, q^2, q^3). \tag{4.67}$$

Aceasta este o curbă care se găseşte pe suprafaţa cilindrică $q^1 = r$.

Fie două momente $\tau$ şi $\tau_1$ astfel încât unghiul polar al celor două poziţii, pe traiectorie, să difere prin $2\pi$,

$$\xi^2(\tau) = \omega(r)(\tau - t) + \theta \quad \text{şi} \quad \xi^2(\tau_1) \equiv \xi^2(\tau) + 2\pi = \omega(r)(\tau^1 - t) + \theta,$$

$$\xi^3(\tau) = u(r)(\tau - t) + z \quad \text{şi} \quad \xi^3(\tau_1) = u(r)(\tau_1 - t) + z.$$

Eliminând pe $\tau_1$ rezultă că

$$\xi^3(\tau^1) - \xi^3(\tau) = 2\pi \frac{u(r)}{\omega(r)} \equiv h,$$

dacă $\omega(r) \neq 0$. Deci este o elice circulară dreaptă pe suprafaţa cilindrică $q^1 = r$. In celelate cazuri rezultatele sunt evidente. Reprezentarea traiectoriei punctului

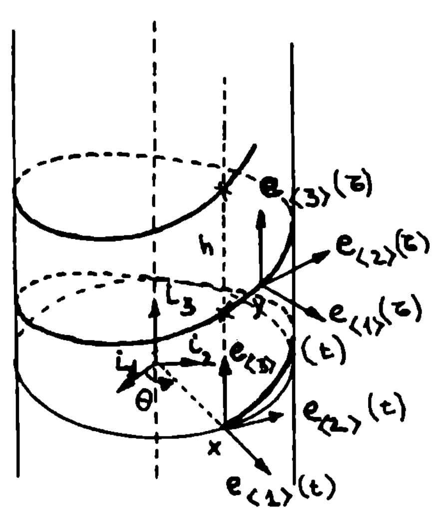



Fig. 4.4

material în mişcarea elicoidală este dată în Fig. 4.4.

**Propoziţia 10.** Mişcarea elicoidală este o mişcare *vâscometrică*. Elementele caracteristice acestei mişcări vâscometrice $(\kappa, \mathbf{N})$, cu $\mathbf{N}^2 = \mathbf{0}$, $\quad |\mathbf{N}| = 1$, sunt

$$\kappa = \sqrt{r^2(\omega'(r))^2 + (u'(r))^2}, \quad [\mathbf{N}]_{\mathbf{e}_{<i>(0)}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{r\omega'(r)}{\kappa} & 0 & 0 \\ \frac{u'(r)}{\kappa} & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.68}$$

•

**Demonstraţie.** Vectorii bazei locale la momentul $t$, daţi de (53), sunt calculaţi în sistemul cilindric de coordonate, prin

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r} = (\cos\theta, \sin\theta, 1), \ \mathbf{e}_2 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta} = (\cos\theta, \sin\theta, 1), \ \mathbf{e}_3 = (0,0,1), \tag{4.69}$$

unde $q^1 = r$, $q^2 = \theta$, $q^3 = z$.

Calculăm din (65) matricea care caracterizează gradientul în mişcarea relativă, de forma precizată în (60)

$$\frac{\partial \xi^k}{\partial q^i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \omega'(r)(\tau - t) & 1 & 0 \\ u'(r)(\tau - t) & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{4.70}$$

Matricele care caracterizează metrica la momentele $t$ şi $\tau$, definite în (55) , în sistemul cilindric de coorrdonate sunt date prin

$$[g_{ij}(t)]_{(i,j)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad [g_{ij}(\tau)]_{(i,j)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & (\xi^1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.71}$$

Considerăm momentul iniţial fixat $t = 0$ şi gradientul de deformaţie, din (60) poate fi reprezentat sub forma

$$[\mathbf{Q}_0^T(\tau)\mathbf{F}_0(\mathbf{x}, \tau)]_{\{\mathbf{e}_{<i>(0)}\}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ r\omega'(r)(\tau) & 1 & 0 \\ u'(r)(\tau) & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I} + \tau[\mathbf{M}]_{\mathbf{e}_{<i>(0)}}. \tag{4.72}$$

Prin calcul direct se verifică că $\mathbf{M}$ este nilpotent de ordinul doi. Presupunem că $\mathbf{M}$ nu este tensorul nul şi calculăm $|\mathbf{M}|$ . Definind $\kappa = |\mathbf{M}|$, rezultă expresia dată în (68). $\kappa$ este nenul în mişcarea elicoidală. In continuare definim $\mathbf{N} = \frac{1}{|\mathbf{M}|}\mathbf{M}$, care va avea forma şi proprietăţile menţionate în (68).

Trecând la o reprezentare tensorială, din (72) obţinem că

$$\mathbf{Q}_0^T(\tau)\mathbf{F}_0(\mathbf{x}, \tau) = \mathbf{I} + \tau\kappa\mathbf{N} \equiv exp(\tau\kappa\mathbf{N}), \quad \text{cu} \quad \mathbf{N}^2 = \mathbf{0}, \quad |\mathbf{N}| = 1.$$

**Propoziţia 11.** Relaţia de legătură între baza canonică $\mathbf{e}_i$ asociată lui $\mathbf{N}$, în mişcarea elicoidală şi baza fizică $\mathbf{e}_{<i>(t)}$ la momentul $t$, corespunzătoare sistemului cilindric de coordonate se exprimă prin

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_{<1>}(t)$$

$$\mathbf{e}_2 = \alpha\, \mathbf{e}_{<2>}(t) + \beta\, \mathbf{e}_{<3>}(t), \quad \mathbf{e}_3 = -\beta\, \mathbf{e}_{<2>}(t) + \alpha\, e_{<3>}(t) \tag{4.73}$$

$$\alpha = \frac{r\omega'(r)}{\kappa}, \quad \beta = \frac{u'(r)}{\kappa}, \quad \alpha^2 + \beta^2 = 1$$

**Demonstraţie**. Singurele elemente nenule în reprezentarea lui $\mathbf{N}$ în baza fizică sunt $\mathbf{e}_{<2>}(t) \cdot \mathbf{N}\mathbf{e}_{<1>}(t) = \dfrac{r\omega'(r)}{\kappa}$ şi $\mathbf{e}_{<3>}(t) \cdot \mathbf{N}\mathbf{e}_{<1>}(t) = \dfrac{u'(r)}{\kappa}$, iar în baza canonică $\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{N}\mathbf{e}_1 = 1$. Prin urmare, deoarece ambele baze sunt ortonormate, rezultă că transformarea ortogonală care defineşte trecerea de la o bază la alta se determină printr-o rotaţie în planul $(\mathbf{e}_{<2>}(t), \mathbf{e}_{<3>}(t))$, deci având forma menţionată în primele relaţii din (73).

Sistemul pentru determinarea parametrilor $\alpha$ şi $\beta$, cu expresiile scrise în (73) este obţinut din următoarele condiţii

$$1 \equiv \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{N}\mathbf{e}_1 = \alpha \mathbf{e}_{<2>}(t) \cdot \mathbf{N}\mathbf{e}_{<1>}(t) + \beta \mathbf{e}_{<3>}(t) \cdot \mathbf{N}\mathbf{e}_{<1>}(t),$$

$$0 \equiv \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{N}\mathbf{e}_1 = -\beta \mathbf{e}_{<2>}(t) \cdot \mathbf{N}\mathbf{e}_{<1>}(t) + \alpha \mathbf{e}_{<3>}(t) \cdot \mathbf{N}\mathbf{e}_{<1>}(t).$$

### 4.4.4 Mişcarea staţionară de torsiune

**Definiţia 5.** Spunem că mişcarea $\chi$ este *staţionară de torsiune* (în particula $\mathbf{X}$) dacă componentele contravariante ale vitezei în baza locală, corespunzătoare sistemului cilindric de coordonate se reprezintă la orice moment de timp $\tau$ prin

$$\dot{\xi}^1 = 0, \quad \dot{\xi}^2 = w(\xi^3), \quad \dot{\xi}^3 = 0. \tag{4.74}$$

Printr-un calcul analog celor anterioare pot fi demonstrate următoarele propoziţii

**Propoziţia 12.** i) Mişcarea staţionară de torsiune este caracterizată de următoarea reprezentare parametrică a traiectoriei particulei $\mathbf{X}$, care la momentul $t$ ocupă poziţia $\mathbf{x}$ :

$$\xi^1 = r, \quad \xi^2 = w(z)(\tau - t) + \theta, \quad \xi^3 = z.$$

La momentul $t$ coordonatele curbilinii ale lui $\mathbf{x}$ fiind $q^1 = r, q^2 = \theta, q^3 = z$.

ii) Semnificaţia mecanică a relaţiilor de mai sus este dată de : traiectoria particulei este un *cerc* de rază $r$ pe suprafaţa cilindrică $q^1 = r$, în planul $q^3 = z$.

iii) Gradientul în mişcarea relativă se reprezintă sub forma

$$\mathbf{F}_t(\mathbf{X}, \tau) = \mathbf{I} + (\tau - t)\kappa\mathbf{N} \equiv \exp((\tau - t)\kappa\mathbf{N}), \; \forall \tau \in R,$$

$$\text{cu} \quad \mathbf{N} = \mathbf{e}_{<2>} \otimes \mathbf{e}_{<3>} \quad \text{deci,} \quad \mathbf{N}^2 = 0, \quad |\,\mathbf{N}\,| = 1 \quad \text{şi} \quad \kappa = rw'(z)$$

iv) Mişcarea staţionară de torsiune este o mişcare *vâscometrică.* Baza canonică este dată prin $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_{<3>}, \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_{<2>}, \quad \mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_{<1>}$.

**Concluzii.** *Ca şi în cazul mişcării Couette* traiectoria pentru o particulă materială fixată este un cerc într-un plan perpendicular pe axă şi deci câmpul de viteze, tangent la cerc, are componete numai după $\mathbf{e}_2$.

*Spre deosebire* de mişcarea Couette componenta vitezei este funcţie de $z$ şi nu de $r$, iar *viteza de forfecare* $\kappa$ depinde de $z$ şi de $r$.

## 4.5 Dinamica mişcărilor vâscometrice

In acest paragraf vom discuta *condiţiile de compatibilitate dinamică* în cazul mişcărilor vâscometrice.

Am demonstrat în paragraful 3. că starea de tensiune într-un fluid este determinată prin intermediul funcţiilor vâscometrice, care depind de viteza de forfecare $\kappa$ a mişcării vâscometrice , conform teoremei lui Noll. Prin urmare starea de tensiune în componente fizice, pe de o parte se exprimă prin funcţiile vâscometrice, iar pe de altă parte trebuie să satisfacă ecuaţiile de mişcare pentru a fi soluţia unei probleme fizice. Rezultă anumite *condiţii de compatibilitate dinamică.*

Starea de tensiune rezultată în cazul mişcărilor vâscometrice este dependentă de cinematica impusă şi trebuie să fie astfel încât condiţiile de compatibilitate dinamică să fie satisfăcute.

Urmează deci să considerăm

- *ecuaţiile de mişcare ale lui Cauchy*

$$\mathrm{div}\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) + \rho\mathbf{b}(\mathbf{x}, t) = \rho\mathbf{a}(\mathbf{x}, t), \tag{4.75}$$

într-un domeniu $\Omega$ ocupat de fluidul, care este supus la o mişcare vâscometrică, deci cu o cinematică impusă, în care $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$ reprezintă forţele masice.

- *reprezentarea constitutivă* sub forma rezultată din toerema lui Noll, prin intermediul funcţiilor vâscometrice.

Ne vom plasa din nou într-un cadru constitutiv general, deoarece este necesară precizarea formei concrete a funcţiilor vâscometrice.

Mentionăm că mişcările vâscometrice sunt incompresibile (vezi Propoziţia 2. din paragraful 2.2). Din caracterizarea condiţiei de incompresibilitate, formulele (1.24), rezultă că $\rho \equiv \rho(\mathbf{x}, t) = \rho_0(\mathbf{X}) \equiv \rho_0$.

### 4.5.1 Dinamica mişcării staţionare de forfecare

Ca o consecinţă a faptului că mişcarea *staţionară de forfecare*, descrisă în paragraful 4.2, este o mişcare vâscometrică rezultă, prin aplicarea teoremei lui Noll din paragraful 3.1, următoarea afirmaţie

**Propoziţia 13.** In mişcarea *staţionară de forfecare* starea de tensiune este caracterizată, în baza canonică, prin intermediul funcţiilor vâscometrice

$$T_{11} - T_{33} = \sigma_1(\kappa), \quad T_{22} - T_{33} = \sigma_2(\kappa),$$

$$T_{12} = \tau(\kappa), \quad T_{13} = T_{23} = 0,$$

unde $\kappa = v'(x^1)$ şi $T_{ij} = \mathbf{i}_i \cdot \mathbf{T}\mathbf{i}_j$.

**Propoziţia 14.** In mişcarea staţionară de forfecare starea de tensiune este *compatibilă cu ecuaţiile de mişcare*, în ipoteza forţelor masice derivate din potenţialul $-\rho_o\psi$, dacă şi numai dacă

$$T_{11} = \rho_o\psi - ax^2 + b, \quad T_{12} = ax^1 + c,$$
$$T_{33} = T_{11} - \sigma_1(\kappa), \quad T_{22} = T_{11} + \sigma_2(\kappa) - \sigma_1(\kappa),$$

cu $a$, $b$, $c$ constante, iar câmpul de viteze şi tensiunile sunt legate prin *condiţia de compatibilitate*

$$v'(x^1) = \tau^{-1}(ax^1 + c). \tag{4.76}$$

**Demonstraţie**. Din ecuaţiile de mişcare deducem că

$$\frac{\partial(T_{11} - T_{33})}{\partial x^1} + \frac{\partial\varphi}{\partial x^1} = 0, \quad \frac{\partial T_{12}}{\partial x^1} + \frac{\partial\varphi}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x^3} = 0,$$

unde $\varphi \equiv T_{33} - \rho_o\psi$ este potenţialul modificat.

Din ultimele două deducem că, în mod necesar $\varphi = x^2 f(x^1) + h(x^1)$ deoarece $T_{12}$ este funcţie numai de $x^1$ în conformitate cu Propoziţia 13. Din prima rezultă că $f(x^1) = -a$, constantă, având în vedere că $T_{11} - T_{33}$ depinde numai de $x^1$ în baza aceleeaşi propoziţii. Astfel $\varphi \equiv T_{33} - \rho_o\psi = -ax^2 + h(x^1)$. Prin integrare din prima relaţie avem $T_{11} - T_{33} + \varphi = F(x^2)$, şi rezultă $F(x^2) = -ax^2 + b$, dacă am utilizat forma determinată pentru $\varphi$. Deducem forma lui $T_{11}$, folosind, de data aceasta, definiţia potenţialului modificat $\varphi$. Din a doua relaţie deducem şi expresia componentei de forfecare a tensorului de tensiune.

Dacă ţinem seama de relaţiile $T_{12} = \tau(\kappa) = ax^1 + c$, cu $\kappa = v'(x^1)$ atunci, din inversabilitatea funcţiei vâscometrice $\tau$, rezultă condiţia de compatibilitate (76) .

### 4.5.2 Dinamica mişcării elicoidale

**Propoziţia 15.** i) Legătura între componentele fizice ale tensorului de tensiune în baza fizică şi funcţiile vâscometrice este dată prin formulele

$$\begin{aligned} &T_{rr} - T_{zz} = \sigma_1(\kappa) - \beta^2\sigma_2(\kappa), \quad T_{\theta\theta} - T_{zz} = (\alpha^2 - \beta^2)\sigma_2(\kappa), \\ &T_{r\theta} = \alpha\,\tau_1(\kappa), \quad T_{\theta z} = \alpha\beta\,\sigma_2(\kappa), \quad T_{rz} = \beta\,\tau(\kappa), \end{aligned} \tag{4.77}$$

în care $\alpha$, $\beta$, $\kappa$ sunt funcţii de $r$ definite prin (68) şi (73).

ii) Combinaţiile componentelor de tensiune din membrul stâng al relaţiilor (77) sunt dependente numai de $r$.

**Demonstraţie.** Cunoscând transformarea ortogonală descrisă prin formulele (73), care realizează legătura între cele două baze : $\{\mathbf{e}_i\}_{i\in\overline{\{1,3\}}}$ (baza canonică) şi $\{\mathbf{e}_{<i>}(t)\}_{i\in\overline{\{1,3\}}}$ (baza fizică la momentul $t$), putem trece la exprimarea legăturii dintre componentele tensorului tensiunii în cele două baze.

Folosim notaţiile $T_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{T}\mathbf{e}_j$, pentru componentele tensorului $\mathbf{T}$ în baza canonică şi cele tradiţionale ( $T_{rr}$, $T_{r\theta}$, $T_{\theta z}$, $T_{rz}$, $T_{zz}$, $T_{\theta\theta}$ ) pentru componentele fizice ale tensorului de tensiune în baza locală asociată sistemului cilindric de coordonate. Printr-un calcul direct avem

$$T_{rr} \equiv \mathbf{e}_{<1>}(t)\cdot\mathbf{T}\mathbf{e}_{<1>}(t) = T_{11},\ T_{\theta\theta} \equiv \mathbf{e}_{<2>}(t)\cdot\mathbf{T}\mathbf{e}_{<2>}(t) = \alpha^2 T_{22} + \beta^2 T_{33},$$

$$T_{zz} \equiv \mathbf{e}_{<3>}(t)\cdot\mathbf{T}\mathbf{e}_{<3>}(t) = \beta^2 T_{22} + \alpha^2 T_{33},\ T_{r\theta} \equiv \mathbf{e}_{<1>}(t)\cdot\mathbf{T}\mathbf{e}_{<2>}(t) = \alpha T_{12},$$

$$T_{\theta z} \equiv \mathbf{e}_{<2>}(t)\cdot\mathbf{T}\mathbf{e}_{<3>}(t) = \alpha\beta(T_{22} - T_{33}),\ T_{rz} \equiv \mathbf{e}_{<1>}(t)\cdot\mathbf{T}\mathbf{e}_{<3>}(t) = \beta T_{12},$$

în care utilizăm definiţia funcţiilor vâscometrice , introduse prin (37) şi relaţia $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. Rezultă formulele (77).

**Teorema 3.** i) Starea de tensiune în fluidul supus la o *mişcare elicoidală* satisface ecuaţiile de mişcare ale lui Cauchy dacă şi numai dacă

$$\begin{aligned} T_{rr} = &\ \rho_o\psi - \int \frac{T_{rr} - T_{\theta\theta}}{r}dr - \int \rho_o r\omega^2(r)dr + az + d\,\theta + g, \\ T_{r\theta} = &\ -\frac{d}{2} + \frac{c}{r^2}, \quad T_{rz} = -\frac{ar}{2} + \frac{b}{r}. \end{aligned} \tag{4.78}$$

ii) Funcţiile care caracterizează mişcarea şi starea de tensiune în fluid trebuie să fie astfel încât

$$\omega'(r) = \frac{\tau^{-1}(\gamma(r))}{r\gamma(r)}(\frac{c}{r^2} - \frac{d}{2}), \quad u'(r) = \frac{\tau^{-1}(\gamma(r))}{\gamma(r)}(\frac{b}{r} - \frac{ar}{2}), \tag{4.79}$$

unde $\gamma(r) = \sqrt{(\frac{c}{r^2} - \frac{d}{2})^2 + (\frac{b}{r} - \frac{ar}{2})^2}$.

**Demonstraţie.** i) Ecuaţiile de mişcare în sistemul cilindric de coordonate, în cazul incompresibil ( $\rho = \rho_o$ ), cu forţele masice derivate dintr-un potenţial $\mathbf{b} = -\nabla\psi$, se scriu sub forma

$$\begin{aligned} &\frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial T_{r\theta}}{\partial\theta} + \frac{\partial T_{rz}}{\partial z} + \frac{T_{rr} - T_{\theta\theta}}{r} - \rho_o(\nabla\psi)_r = \rho_o a_r, \\ &\frac{\partial T_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial\theta} + \frac{\partial T_{\theta z}}{\partial z} + 2\frac{T_{r\theta}}{r} - \rho_o(\nabla\psi)_\theta = \rho_o a_\theta, \\ &\frac{\partial T_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial T_{\theta z}}{\partial\theta} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} + \frac{T_{rz}}{r} - \rho_o(\nabla\psi)_z = \rho_o a_z. \end{aligned} \tag{4.80}$$

In baza fizică gradientul potenţialului se scrie

$$\nabla\psi = \frac{\partial\psi}{\partial r}\mathbf{e}_{<1>}(t) + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\mathbf{e}_{<2>}(t) + \frac{\partial\psi}{\partial z}\mathbf{e}_{<3>}(t).$$

In cazul mişcării elicoidale, cu câmpul de viteze descris prin (64), acceleraţia în baza fizică este dată prin $\mathbf{a}(\mathbf{x},t) = -r\omega^2(r)\mathbf{e}_{<1>}(t)$.

Dacă introducem potenţialul modificat

$$\varphi = T_{zz} - \rho_o\psi \tag{4.81}$$

şi folosim expresiile pentru $\nabla\psi$ şi $\mathbf{a}$ în ecuaţiile de mişcare (80), deducem că

$$\frac{\partial(T_{rr}-T_{zz})}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial T_{r\theta}}{\partial\theta} + \frac{\partial T_{rz}}{\partial z} + \frac{T_{rr}-T_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial\varphi}{\partial r} = -\rho_o r\,\omega^2(r),$$

$$\frac{\partial T_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial\theta} + \frac{\partial T_{\theta z}}{\partial z} + 2\frac{T_{r\theta}}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = 0,$$

$$\frac{\partial T_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial T_{\theta z}}{\partial\theta} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} + \frac{T_{rz}}{r} + \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0.$$

Daca ţinem seama de Propoziţia 15. ii) ecuaţiile de mişcare se reduc la

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial(T_{rr}-T_{zz})}{\partial r} + \frac{T_{rr}-T_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial\varphi}{\partial r} = -\rho_o r\,\omega^2(r),\\
&\frac{\partial T_{r\theta}}{\partial r} + 2\frac{T_{r\theta}}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = 0,\\
&\frac{\partial T_{rz}}{\partial r} + \frac{T_{rz}}{r} + \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0.
\end{aligned} \tag{4.82}$$

In baza formulelor (77) înlocuim derivatele parţiale prin derivata în raport cu $r$ în termenii care conţin tensiuni şi atunci, din ultimele relaţii (82), rezultă că $\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ sunt funcţii numai de $r$. Deci

$$\varphi = az + d\,\theta + h(r). \tag{4.83}$$

Prin integrare în raport cu $r$ a primei ecuaţii din (82) rezultă

$$T_{rr} - T_{zz} + \int\frac{T_{rr}-T_{\theta\theta}}{r}dr + \varphi + \int\rho_o r(\omega)^2(r)dr = f(\theta,z), \tag{4.84}$$

adevărată $\forall\,(r,\theta,z)\in\mathcal{D}\subset\mathbf{R}^3$.

Funcţia $f(\theta,z)$, constantă în raport cu $r$, este determinată prin

$$f(\theta,z) = az + d\,\theta + g, \quad \text{cu} \quad g = \text{const.},$$

ţinând seama că variabilele $\theta, z$ intervin numai în expresia potenţialului modificat, exprimat prin (83) . Din cele de mai sus înlocuite în (84) , împreună cu (81) deducem că

$$T_{rr} + \int \frac{T_{rr} - T_{\theta\theta}}{r} dr - \rho_o \psi + \int \rho_o r(\omega)^2(r) dr = az + d\,\theta + g. \tag{4.85}$$

Ultimele două ecuaţii din (82), împreună cu (83) devin

$$\frac{dT_{r\theta}}{dr} + 2\frac{T_{r\theta}}{r} = -\frac{d}{r}, \quad \frac{dT_{rz}}{dr} + \frac{T_{rz}}{r} = -a. \tag{4.86}$$

Din (86) prin integrare obţinem

$$T_{r\theta} = -\frac{d}{2} + \frac{c}{r^2} \equiv \alpha\,\tau(\kappa), \quad T_{rz} = -\frac{ar}{2} + \frac{b}{r} \equiv \beta\,\tau(\kappa), \tag{4.87}$$

unde am folosit şi relaţiile (77).

ii) Deoarece $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ din formulele (87) obţinem că

$$\tau(\kappa) = \sqrt{(\frac{c}{r^2} - \frac{d}{2})^2 + (\frac{b}{r} - \frac{ar}{2})^2} \equiv \gamma(r), \tag{4.88}$$

unde am acceptat ipoteza că $\tau(\kappa) > 0$ pentru $\kappa > 0$.

In ipoteza că aplicaţia $\kappa \longrightarrow \tau(\kappa)$ este inversabilă, din (88) rezultă că ,

$$\kappa = \tau^{-1}(\gamma(r)). \tag{4.89}$$

Folosind din nou relaţiile (87) şi expresiile (73) pentru $\alpha$ şi $\beta$ deducem

$$\begin{aligned} &\alpha = \frac{r\omega'(r)}{\kappa}, \ \beta = \frac{u'(r)}{\kappa}, \\ &\omega'(r) = \frac{\kappa}{r\,\tau(\kappa)}(\frac{c}{r^2} - \frac{d}{2}), \ u'(r) = \frac{\kappa}{\tau(\kappa)}(\frac{b}{r} - \frac{ar}{2}). \end{aligned} \tag{4.90}$$

unde $\kappa = \tau^{-1}(\gamma(r))$. Din relaţiile (90) şi (88) obţinem (79) .

**Observaţia 7.** In acest mod au rezultat *formulele de compatibilitate* dintre funcţiile care caracterizează mişcarea vâscometrică şi funcţia vâscometrică de forfecare $\tau$.

Câmpul de viteze, în mişcarea elicoidală poate fi exprimat prin intermediul funcţiilor vâscometrice, ca o consecinţă a dinamicii mişcării, prin

$$\begin{aligned} \omega(r) = &\int \frac{\tau^{-1}(\gamma(r))}{r\gamma(r)}(\frac{c}{r^2} - \frac{d}{2})dr + c_1, \\ u(r) = &\int \frac{\tau^{-1}(\gamma(r))}{\gamma(r)}(\frac{b}{r} - \frac{ar}{2})dr + c_2. \end{aligned} \tag{4.91}$$

unde $\gamma(r) = \sqrt{(\frac{c}{r^2} - \frac{d}{2})^2 + (\frac{b}{r} - \frac{ar}{2})^2}$.

De remarcat că în reprezentarea (91) apar *6 constante*. Vom arăta cum pot fi determinate constantele prin condiţiile date pe frontiera domeniului în paragraful 6.1.

### 4.5.3 Dinamica mişcării staţionare de torsiune

In paragraful 4.4 am prezentat mişcarea staţionară de torsiune ca o mişcare vâscometrică. Reprezentăm tensorul de tensiune corespunzător atât în baza canonică (introducând deci funcţiile vâscometrice conform teoremei lui Noll din paragraful 3.1), cât şi în baza fizică asociată sistemului cilindric de coordonate, specific mişcării de torsiune. Obţinem

**Propoziţia 16.** In cazul *mişcării staţionare de torsiune* legătura între componentele fizice ale tensiunii şi funcţiile vâscometrice se exprimă prin

$$T_{11} - T_{33} = \sigma_1(\kappa) = T_{zz} - T_{rr}\,, \quad T_{22} - T_{33} = \sigma_2(\kappa) = T_{\theta\theta} - T_{rr}$$

$$T_{12} = \tau(\kappa) = T_{\theta z}\,, \quad T_{13} = 0 = -T_{rz}\,, \quad T_{23} = 0 = -T_{\theta r}$$

unde $\kappa = r\, w'(z)$.

In concluzie combinaţiile nenule menţionate în formulele anterioare sunt funcţii numai de $r$, $z$. Putem obţine următorul rezultat

**Propoziţia 17.** Ecuaţiile dinamicii se reduc la

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial(T_{rr} - T_{zz})}{\partial r} + \frac{T_{rr} - T_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial \varphi}{\partial r} = -\rho_o r\, \omega^2(z),\\
&\frac{\partial T_{\theta z}}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0,
\end{aligned} \tag{4.92}$$

unde $\varphi \equiv T_{zz} - \rho_o \psi -$ reprezintă *potenţialul modificat*, dacă am presupus că forţele volumice sunt conservative cu potenţialul $-\psi$.

Am folosit din nou reprezentarea în baza fizică a potenţialului sub forma $\nabla\psi = \frac{\partial \psi}{\partial r}\mathbf{e}_{<1>}(t) + \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta}\mathbf{e}_{<2>}(t) + \frac{\partial \psi}{\partial z}\mathbf{e}_{<3>}(t)$, precum şi reprezentarea câmpului de acceleraţii $\mathbf{a} = -rw^2(z)\mathbf{e}_{<1>}(t)$ în mişcarea de torsiune (74). Formulele au mai fost utilizate în cazul mişcării elicoidale.

**Teorema 4.** i) Starea de tensiune într-un fluid supus la o mişcare staţionară de torsiune satisface ecuaţiile de mişcare ale lui Cauchy dacă şi numai dacă

$$\begin{aligned}
T_{rr} &= \rho_0\psi - \int \frac{(T_{rr} - T_{\theta\theta})}{r} dr + d\,\theta - \rho_0 \frac{r^2}{2} w^2(z) + m(z),\\
T_{\theta z} &= -\frac{dz}{r} + l(r),\\
\varphi \equiv\ & T_{zz} - \rho_0\psi = d\,\theta + h(r),
\end{aligned}$$

cu funcţiile $m(z)$, $h(r)$, $l(r)$, arbitrare şi $d$ constantă.

ii) Funcţiile care caracterizează mişcarea şi starea de tensiune în fluid trebuie să satisfacă *condiţia de compatibilitate*

$$rw'(z) = \tau^{-1}(-\frac{dz}{r} + l(r)). \tag{4.93}$$

**Demonstraţie.** Din ecuaţiile dinamice $(92)_{2,3}$ rezultă că $\varphi = \theta f(r) + h(r)$, care introdusă în prima ne conduce la $f'(r) = 0$, deci $f(r) = d$, constantă. Astfel potenţialul modificat capătă forma menţionată în enunţ. Din a doua ecuaţie dinamică obţinem prin integrare forma componentei de forfecare $T_{\theta z}$. Aceasta, pe de altă parte, se exprimă prin funcţia vâscometrică de forfecare, deci $T_{\theta z} = \tau(\kappa) \equiv -\dfrac{dz}{r} + l(r)$. Astfel rezultă şi condiţia de compatibilitate (93).

Din prima ecuaţie (92) obţinem prin integrare în raport cu $r$

$$T_{rr} - T_{zz} + \varphi + \int \frac{(T_{rr} - T_{\theta\theta})}{r} dr + \bar{m}(\theta, z) = -\rho_0 \frac{r^2}{2} w^2(z), \tag{4.94}$$

unde $\varphi \equiv T_{zz} - \rho_0 \psi = d\,\theta + h(r)$. Inlocuindu-l pe $\varphi$ prin formula găsită şi derivând în raport cu $\theta$, rezultă că $\bar{m}(\theta, z) + d\theta = -m(z)$, dacă ţinem seama de formulele din Propoziţia 16. Inlocuindu-l pe $\bar{m}(\theta, z)$ în (94) şi revenind la potenţialul $\psi$, se obţine reprezentarea pentru $T_{rr}$.

Aceste formule vor fi folosite pentru descrierea mişcării între două discuri.

## 4.6. Soluţii exacte pentru mişcarea fluidelor Realizarea fizică a unor mişcări vâscometrice

In acest paragraf vom prezenta soluţii *exacte* pentru mişcarea fluidelor, descrise cinematic prin mişcări vâscometrice.

Vom discuta conditiile în care se poate *realiza* din punct de vedere fizic o mişcare vâscometrică. Prin realizarea fizică a unei mişcări vâscometrice date, se înţelege posibilitatea determinării acesteia ca o soluţie exactă, a unei probleme cu date iniţiale şi la limită într-un domeniu dat, pentru o anumită clasă de fluide, precizată constitutiv prin forma funcţiilor vâscometrice. Ne plasăm în cadrul constitutiv general: starea de tensiune se exprimă prin cele trei funcţii vâscometrice, fără a preciza forma concretă a aceestora prin intermediul funcţiilor constitutive. Prin urmare rezultatele vor fi generale, şi prin particularizarea funcţiilor vâscometrice, conform cadrului constitutiv de interes, vom obţine soluţiile problemelor puse, pentru diverse materiale.

Menţionăm că mişcările vâscometrice considerate au fost *staţionare*, deci câmpurile de viteză din definiţia mişcărilor vâscometrice nu depind explicit de timp. Prin urmare la orice moment de timp avem aceeaşi distribuţie de viteze, ceea ce implică faptul că, în formularea problemelor condiţiile iniţiale nu joacă nici un rol.

Deci urmează să considerăm

- *ecuaţiile de mişcare ale lui Cauchy*

$$\mathrm{div}\mathbf{T}(\mathbf{x},t)+\rho\mathbf{b}(\mathbf{x},t)=\rho\mathbf{a}(\mathbf{x},t),$$

într-un domeniu $\Omega$ ocupat de fluidul, care este supus la o mişcare vâscometrică, deci cu o cinematica impusă,

- *reprezentarea constitutivă* sub forma rezultată din toerema lui Noll, prin intermediul funcţiilor vâscometrice,

-*condiţii pe frontiera domeniului*, $\partial\Omega$ :

Dacă există *un perete rigid* $\Sigma\subset\partial\Omega$ atunci se consideră că fluidul satisface *condiţia de aderenţă*

$$\mathbf{v}=\mathbf{v}_r \quad \text{pe} \quad \Sigma_r\subset\partial\Omega,$$

unde prin $\mathbf{v}_r$ am notat viteza relativă a peretelui rigid cu care este în contact fluidul.

Pe porţiunea din frontiera lui $\Omega$, care nu este constituită din perete solid se introduc condiţii în tensiuni, sau condiţii mixte.

**Observaţia 8.** i) Forma domeniului trebuie să fie compatibilă cu forma liniilor de curent rezultate din cinematica impusă, pentru a fi consistentă condiţia de aderenţă pe peretele solid. Se impun deci *condiţii de compatibilitate geometrică.*

ii) Starea de tensiune într-un fluid este determinată prin intermediul funcţiilor vâscometrice, care depind de viteza de forfecare $\kappa$, a mişcării, conform teoremei lui Noll din paragraful 3.1. Prin urmare starea de tensiune în componente fizice, pe de o parte, se exprimă prin funcţiile vâscometrice, iar pe de altă parte trebuie să satisfacă ecuaţiile de mişcare. Rezultă anumite *condiţii de compatibilitate dinamică.*

iii) Starea de tensiune rezultă determinată prin cinematica impusă, este astfel încât condiţiile de compatibilitate dinamică să fie satisfăcute. Tensiunea se obţine în general dependentă de un număr de parametrii reali. Parametrii reali ai problemei se determină, în principiu, din condiţiile în tensiuni, sau condiţiile mixte pe porţiunile din frontiera lui $\Omega$, care nu sunt constituite din perete solid.

Deci, realizarea fizică a unei mişcări vâscometrice presupune satisfacerea simultană a unor condiţii de compatibilitate

- geometrică (între forma pereţilor solizi şi forma liniilor de curent) ;

- dinamică (satisfacerea ecuaţiilor de mişcare) ;

- a datelor pe porţiunile din frontiera domeniului, care nu se reprezintă ca pereţi solizi.

## 4.6.1 Mişcarea ( elicoidală ) între doi cilindrii coaxiali

Mişcarea între doi cilindrii coaxiali a fost analizată pe o clasă specială de fluide de tip diferenţial de Rivlin [1956] şi Fredrickson [1960]. In cadrul general al mişcărilor vâscometrice este prezentată de Coleman, Noll [1959].

**Problema.** Se consideră mişcarea unui fluid într-un domeniu mărginit de doi cilindrii coaxiali, de lungime infinită în care suprafeţele rigide, laterale au o mişcare de roto - translaţie. Ne punem, în fapt întrebarea firească dacă este posibilă descrierea acestei mişcări prin intermediul *mişcării elicoidale* ?

**Observaţia 9.** Presupunerea că mişcarea poate fi descrisă printr-o mişcare vâscometrică este în principiu posibilă, deoarece există o *compatibilitate geometrică.* Din studiul *liniilor de curent* în mişcarea elicoidală, Propoziţia 9. din paragraful 4.3, a rezultat că acestea sunt compatibile cu un domeniu cu simetrie cilindrică.

**Teorema 5.** *Există* o mişcare elicoidală care se realizează în domeniul $\Omega$

$$\Omega = \{(r,\theta,z) \mid \quad \theta \in [0,2\pi), \quad r \in [R_1,R_2], \quad z \in R\},$$

astfel încât condiţiile de aderenţă pe suprafaţa laterală, scrise sub forma

$$u(r)\mid_{r=R_j} = U_j, \quad \omega(r)\mid_{r=R_j} = \Omega_j, \quad \text{cu} \quad j \in \{1,2\},$$

să fie satisfăcute, în ipoteza că pereţii solizi au o mişcare de translaţie cu vitezele $U_j$ şi o mişcare de rotaţie în jurul axei de simetrie, cu vitezele unghiulare $\Omega_j$. Momentul de torsiune *necesar menţinerii în rotaţie relativă a celor doi cilindrii* este dat.

Câmpul de viteze în mişcarea elicoidală este descris prin formulele (64)

$$\begin{aligned} \omega(r) &= \frac{M}{2\pi}\int_{R_1}^{r} \frac{\tau^{-1}(\gamma(s))}{s^3\,\gamma(s)}ds + \Omega_1, \\ u(r) &= \int_{R_1}^{r} \frac{\tau^{-1}(\gamma(s))}{\gamma(s)}\left(\frac{b}{s} - \frac{as}{2}\right)ds + U_1, \end{aligned} \tag{4.95}$$

în care $\gamma(r) = \sqrt{(\frac{M}{2\pi r^2})^2 + (\frac{b}{r} - \frac{ar}{2})^2}$. Constantele $a$, $b$ se determină astfel încât

$$\begin{aligned} U_2 - U_1 &= \int_{R_1}^{R_2} \frac{\tau^{-1}(\gamma(r))}{\gamma(s)}\left(\frac{b}{s} - \frac{as}{2}\right)ds, \\ \Omega_2 - \Omega_1 &= \frac{M}{2\pi}\int_{R_1}^{R_2} \frac{\tau^{-1}(\gamma(s))}{s^3\gamma(s)}ds. \end{aligned} \tag{4.96}$$

Starea de tensiune este definită prin

$$T_{rr} = \rho_0\psi - \int_{R_1}^{r} \frac{\hat{\sigma}_1(\gamma(s)) - \alpha^2\hat{\sigma}_2(\gamma(s))}{s} ds - \int_{R_1}^{r} \rho_0 s\omega^2(s)ds + az + g,$$

$$T_{\theta\theta} = T_{rr} - \hat{\sigma}_1(\gamma(r)) + \alpha^2\hat{\sigma}_2(\gamma(r)), \quad T_{zz} = T_{rr} - \hat{\sigma}_1(\gamma(r)) + \beta^2\hat{\sigma}_2(\gamma(r)), \tag{4.97}$$

$$T_{rz} = \frac{b}{r} - \frac{ar}{2}, \quad T_{r\theta} = \frac{M}{2\pi r^2}, \quad T_{\theta z} = 0,$$

cu

$$\alpha = \frac{r\,\omega'(r)}{\tau^{-1}(\gamma(r))}, \quad \beta = \frac{u'(r)}{\tau^{-1}(\gamma(r))}.$$

In formulele (97) $\hat{\sigma}_j$ sunt funcţiile vâscometrice normale modificate, definite în (51), iar $\tau$ este funcţia vâscometrică de forfecare.

Urmează să **demonstrăm** că o astfel de mişcarea poate fi determinată prin utilizarea rezultatelor obţinute în Teorema 3. din paragraful 5.2, referitoare la dinamica mişcării elicoidale. Din prima relaţie (78) rezultă că $T_{rr}$ este funcţie de $(r, \theta, z)$, multiformă în raport cu $\theta$ ( în sensul că aceluiaşi punct din spaţiul fizic i se pot asocia o infinitate de valori pentru componenta $T_{rr}$, care diferă între ele prin 2 k $\pi$ $d$ ), dacă $d \neq 0$. Prin urmare este necesar să considerăm $d = 0$.

Câmpul de viteze în mişcarea elicoidală este definit (ţinând seama de dinamica mişcării elicoidale, prin formulele (79) cu $d = 0$ ) numai de trei constante reale $a$, $b$, $c$.

Utilizăm condiţiile de aderenţă pe suprafeţele laterale şi găsim 2 relaţii între cele trei constante

$$U_2 - U_1 = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\tau^{-1}(\gamma(r))}{\gamma(r)}\left(\frac{b}{r} - \frac{ar}{2}\right)dr,$$

$$\Omega_2 - \Omega_1 = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\tau^{-1}(\gamma(r))}{r\gamma(r)}\frac{c}{r^2}dr,$$

$$\gamma(r) = \sqrt{\left(\frac{c}{r^2}\right)^2 + \left(\frac{b}{r} - \frac{ar}{2}\right)^2}.$$

Fie mişcarea elicoidală şi starea de tensiune dinamic compatibilă asociată. Vom arăta că

i) In mod necesar componenta după axa de simetrie a momentului rezultant al vectorilor de tensiune, raportat la unitatea de lungime şi notat prin $M$, care acţionează într-un punct de pe suprafaţa $r = r^*$, este o constantă, independentă de $r^*$, dacă $d = 0$.

ii) Legătura dintre $c$ şi $M$ este dată de formula

$$c = \frac{M}{2\pi}.$$

Pentru **demonstraţie** considerăm un element pe suprafaţa $r = r^*$. Normala exterioară este $\mathbf{e}_{<1>}(t)$. Considerăm un punct de pe suprafaţă caracterizat prin coordonatele curbilinii $(r^*, \theta, z)$. Vectorul de tensiune în punctul fixat este dat de

$$\mathbf{T}\mathbf{e}_{<1>}(t) = T_{rr}\mathbf{e}_{<1>}(t) + T_{r\theta}\mathbf{e}_{<2>}(t) + T_{rz}\mathbf{e}_{<3>}(t),$$

iar momentul rezultant în raport cu polul aflat pe axa de simetrie, în secţiunea considerată prin punctul considerat, se calculează prin

$$\int_\Sigma \begin{pmatrix} \mathbf{e}_{<1>} & \mathbf{e}_{<2>} & \mathbf{e}_{<3>} \\ r & 0 & 0 \\ T_{rr} & T_{r\theta} & T_{rz} \end{pmatrix} \mathrm{d}\, a = \int_\Sigma (-rT_{rz}\mathbf{e}_{<2>} + rT_{r\theta}\mathbf{e}_{<3>})da. \qquad (4.98)$$

Proiectăm relaţia (98) pe axa $\mathbf{e}_{<3>}(t)$, axa de simetrie. Ţinem seama de expresia componentei de torsiune a tensiunii, $T_{r\theta}$, şi de măsura pe suprafaţă $da = rd\theta dz$. Rezultă imediat afirmaţiile i) şi expresia constantei $c = \dfrac{M}{2\pi}$. Prin urmare, dacă, condiţia anterioară este adăugată condiţiei de aderenţă a fluidului pe pereţii rigizi, din relaţiile (96) obţinem un sistem neliniar pentru determinarea constantelor $a, b$, deoarece $c$ este cunoscut.

Astfel a fost determinată mişcarea vâscometrică, elicoidală care ia naştere în mişcarea fluidului în interiorul celor doi cilindrii coaxiali.

**Observaţia 10.** Momentul $M$ introdus în propoziţia anterioară este numit *moment de torsiune, necesar menţinerii în rotaţie relativă, a celor doi cilindrii.* Se consideră condiţia globală formulată în (98) cu $M\mathbf{e}_{<3>}$ dat.

### 4.6.2 Mişcarea Couette într-un domeniu cilindru circular drept cu secţiunea coroană circulară

Problema mişcării Couette între doi cilindrii a fost analizată pentru clasa fluidelor Reiner - Rivlin de Rivlin în 1948 şi generalizată la fluidele de tip diferenţial [1956] şi a fost considerată pentru alte modele de Oldroyd [1950].In cadrul general al mişcărilor vâscometrice problema a fost rezolvată în Coleman, Noll [1959]. O clasă apropiată de mişcări de acest tip ( mişcări între două plăci infinite care se rotesc relativ) a fost studiată de Tigoiu [1995,b] şi va fi prezentată în partea a doua a lucrării.

**Definiţia 6.** Spunem că mişcarea $\chi$ este *de tip Couette* (în particula $X$) dacă, *componentele contravariante* ale vitezei în baza locală, corespunzătoare sistemului cilindric de coordonate se reprezintă la orice moment de timp $\tau$ prin

$$\dot{\xi}^1 = 0\,, \quad \dot{\xi}^2 = \omega(\xi^1)\,, \quad \dot{\xi}^3 = 0. \qquad (4.99)$$

In mod evident, din formulele (61) rezultă că mişcarea Couette poate fi considerată ca un caz particular al mişcării elicoidale, traiectoria particulei fiind un cerc, într-un plan perpendicular pe axa de simetrie a cilindrului. Prin urmare, prin particularizări din formulele deduse în studiul mişcării elicoidale vom obţine echivalentele acestora pentru mişcarea Couette.

**Propoziţia 18.** Mişcarea Couette este o mişcare *vâscometrică* care se obţine, din mişcarea elicoidală, prin considerarea valorilor

$$\alpha = 1, \quad \beta = 0 \quad \kappa = r\omega'(r), \tag{4.100}$$

în ipoteza $\omega'(r) \neq 0$.

**Demonstraţie.** Din formulele (73) rezultă că $\beta = 0$, iar din (66) $\kappa =\mid r\omega'(r) \mid$, deoarece $\omega'(r) \neq 0$ avem, de exemplu valoarea din (100) pentru $\omega'(r) > 0$.

**Teorema 6.** i) Mişcarea unui fluid între doi cilindrii coaxiali infiniţi, de raze $R_j$, care se rotesc în jurul axei de simetrie cu vitezele unghiulare $\Omega_1$, $\Omega_2$ poate fi descrisă printr-o mişcare Couette, pentru care starea de tensiune este descrisă prin

$$\begin{aligned} T_{rr} &= \rho_0\psi - \int \frac{\hat{\sigma}_1(\frac{M}{2\pi r^2}) - \hat{\sigma}_2(\frac{M}{2\pi r^2})}{r}dr - \int \rho_0 r\, \omega^2(r)dr + g, \\ T_{\theta\theta} &= T_{rr} - \hat{\sigma}_1(\frac{M}{2\pi r^2}) + \hat{\sigma}_2(\frac{M}{2\pi r^2}), \\ T_{zz} &= T_{rr} - \hat{\sigma}_1(\frac{M}{2\pi r^2}), \quad T_{rz} = T_{\theta z} = 0, \quad T_{r\theta} = \frac{M}{2\pi r^2}. \end{aligned} \tag{4.101}$$

ii) Mişcarea este caracterizată prin (65) în care $u'(r) = 0$ şi

$$\omega(r) = \int_{R_1}^{r} \frac{\tau^{-1}(\frac{M}{2\pi s^2})}{s}ds + \Omega_1. \tag{4.102}$$

Constanta $M$ se determină din condiţia

$$\Omega_2 - \Omega_1 = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\tau^{-1}(\frac{M}{2\pi s^2})}{s}ds.$$

**Demonstraţia** decurge din Teorema 5. în care se fac particularizările $\alpha = 1$, $\beta = 0$.

Din (87) pentru $\beta = 0$ obţinem că

$$T_{rz} = \frac{b}{r} - \frac{ar}{2} = 0 \quad \forall r \in [R_1, R_2],$$

ceea ce este echivalent cu $a = b = 0$. d $= 0$ rezultă din consideraţiile privind existenţa unei stări de tensiune exprimabile prin funcţii uniforme în raport cu $\theta$.

Constantele care caracterizează cinematica în mişcarea Couette sunt

$$a = b = d = 0, \quad c = \frac{M}{2\pi}. \tag{4.103}$$

Formulele (101), (102) sunt deduse din (97) şi (95) cu particularizările menţionate.

### 4.6.3 Mişcarea Poiseuille printr-o conductă cilindrică

Vom menţiona definiţia mişcării Poiseuille, independent de mişcarea elicoidală.

**Definiţia 7.** Spunem că mişcarea $\chi$ este de tip Poiseuille (în particula $\mathbf{X}$) dacă, componentele *contravariante* ale vitezei în baza locală, corespunzătoare sistemului cilindric de coordonate, se reprezintă la orice moment de timp $\tau$ prin

$$\dot{\xi}^1 = 0, \quad \dot{\xi}^2 = 0, \quad \dot{\xi}^3 = u(\xi^1). \tag{4.104}$$

In mod evident, din formulele (64) rezultă că mişcarea Poiseuille poate fi considerată un caz particular al mişcării elicoidale, traiectoria particulei fiind o dreaptă paralelă cu axa de simetrie a cilindrului. Prin urmare, prin particularizări din formulele obţinute în studiul mişcării elicoidale vom obţine echivalentele acestora pentru mişcarea Poseuille. Din formulele (73) rezultă

**Propoziţia 19.** Mişcarea Poiseuille este o mişcare vâscometrică care se obţine din mişcarea elicoidală, prin considerarea valorilor

$$\alpha = 0, \quad \beta = 1 \quad \kappa = u'(r), \tag{4.105}$$

în ipoteza $u'(r) \neq 0$.

**Teorema 7.** Mişcarea Poiseuille se realizează într-o conductă cilindrică circulară de rază $R$, cu lungimea infinită, în care fluidul aderă la peretele rigid. Presupunem că peretele rigid are o mişcare de translaţie cu viteza $U$ în lungul axei de simetrie.

i) Starea de tensiune este dată prin

$$\begin{gathered} T_{rr} = \int_0^r \frac{\hat{\sigma}_1(\frac{as}{2})}{s} ds + az + g\,, \quad T_{\theta\theta} = T_{rr} - \hat{\sigma}_1(\frac{ar}{2}), \\ T_{zz} = T_{rr} - \hat{\sigma}_1(\frac{ar}{2}) + \hat{\sigma}_2(\frac{ar}{2})\,, \quad T_{\theta z} = 0\,, \quad T_{r\theta} = 0\,, \quad T_{rz} = \frac{-ar}{2}, \end{gathered} \tag{4.106}$$

dacă se neglijează forţele masice.

ii) Funcţia care caracterizează mişcarea este

$$u(r) = \int_r^R \tau^{-1}(\frac{as}{2}) ds + U. \tag{4.107}$$

iii) Dacă se cunoaşte debitul volumic $Q$ constant, care trece printr-o secţiune perpendiculară pe axa conductei, constanta $a$ se determină prin condiţia

$$Q = \pi \int_0^R s^2\, \tau^{-1}(\frac{as}{2}) ds + \pi\, R^2 U. \tag{4.108}$$

Pentru **demonstraţie** folosim rezultatele din Teorema 3. pentru mişcarea elicoidală. Să remarcăm că $b = 0$ este o condiţie necesară pentru realizarea unei mişcări Poiseuille printr-un tub cilindric ( pentru a avea asigurată condiţia ca tensiunea dată în (78), deci şi componenta $T_{rz}$, să fie definită în toate punctele domeniului). In $r = 0$ avem o singularitate pentru tensiune, dacă $b \neq 0$. Deoarece în (87) considerăm $\alpha = 0$ rezultă că $c = d = 0$. Din (88) $\gamma(r) = | a | \frac{r}{2}$. Presupunem că $a > 0$ şi din (78) cu (77) deducem formulele (106). Prin integrarea în raport cu $r$ a relaţiei (79), rescrisă în mişcarea Poiseuille sub forma

$$u'(r) = -\tau^{-1}(\frac{ar}{2}),$$

obţinem formula (107), utilizând şi condiţia

$$u(r) \mid_{r=R} = U,$$

care defineşte aderenţa fluidului la peretele rigid.

Debitul volumic printr-o secţiune perpendiculară pe axa tubului se calculează prin

$$Q \equiv \int_{z=const} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} da, \tag{4.109}$$

care în ipoteza câmpului de viteze $\mathbf{v} = u(r)\, \mathbf{i}_3$ devine

$$Q = 2\,\pi \int_0^R u(r)\, r dr.$$

Dacă introducem expresia câmpului de viteze (107) şi integrăm prin părţi, rezultă expresia (108).

**Observaţia 11.** Semnificaţia mecanică a constantei $a$ este obţinută din relaţia

$$-a = \frac{2}{R} T_{rz} \mid_{r=R} .$$

### 4.6.4 Mişcarea unui fluid între două discuri

In cadrul constitutiv al fluidelor Reiner - Rivlin problema a fost rezolvată de Rivlin [1948], de Truesdell [1952] (în condiţii ceva mai generale), Rivlin [1956] a generalizat-o pentru fluide de tip diferenţial, iar o rezolvare prin intermediul funcţiilor vâscometrice a fost propusă de Markovitz [1957], Coleman, Noll [1959].

Se consideră următoarea **Problemă**. Fie mişcarea unui fluid între două discuri paralele, de raze $R$, aflate la o distanţă $h$, care se rotesc cu viteze unghiulare $\Omega_o, \Omega_1$ în jurul axei $\mathbf{i}_3$, fluidul fiind în contact cu aerul pe suprafaţa liberă laterală. Ne punem aceeaşi întrebare : poate fi această mişcare descrisă printr-o mişcare staţionară de torsiune ?

**Observaţia 12.** Condiţiile pe frontiera domeniului, care exprimă ipoteza de aderenţă a fluidului pe discuri, se scriu

$$w(0) = \Omega_0 \,, \quad w(h) = \Omega_1, \tag{4.110}$$

iar condiţia pe suprafaţa liberă $\Sigma_l$ de contact cu aerul, aflat la o presiune hidrostatică $p_0$, se scrie

$$\mathbf{Tn} \,|_{\Sigma_l} = -p_0\mathbf{n}.$$

•

**Ipoteză:** Presupunem că are loc o *mişcare staţionară de torsiune* între cele două discuri. Folosim rezultatele de cinematică şi dinamică din paragrafele 4.4 şi 5.3 pentru determinarea stării de tensiune şi a mişcării de torsiune.

**Propoziţia 20.** *Mişcarea de torsiune între două discuri* este descrisă prin câmpul de viteze

$$w(z) = \frac{\Delta\Omega}{h} z + \Omega_0 \,, \quad \text{cu} \quad \Delta\Omega = \Omega_1 - \Omega_0, \tag{4.111}$$

iar starea de tensiune este dată prin următoarele formule

$$T_{rr} = -p_0 + \rho_0 \frac{(R^2 - r^2)}{2} w^2(z) - \int_r^R \frac{\sigma_2(s\frac{\Delta\Omega}{h})}{s} ds,$$

$$T_{zz} = T_{rr} + \sigma_1(r\frac{\Delta\Omega}{h}) \,, \quad T_{\theta z} = \tau(r\frac{\Delta\Omega}{h}) \,, \quad T_{\theta r} = 0 \,, \quad T_{rz} = 0.$$

unde am considerat că *suprafaţa liberă este de formă cilindrică*, deci $r = R$, cu condiţii de forma

$$T_{rr} \,|_{r=R} = -p_0$$

şi am neglijat forţele masice.

**Demonstraţie**. Deoarece câmpul de tensiune trebuie să fie o funcţie definită pentru $\forall r \in [0, R]$, rezultă că $T_{\theta z}$ (reprezentat în Teorema 4. din paragraful 5.3 ) nu poate avea o singularitate în $r = 0$. Astfel în formulele din teorema menţionată trebuie să considerăm $d = 0$. Condiţia de *compatibilitate dinamică* (93)

$$\kappa \equiv r w'(z) = \tau^{-1}(l(r)) \quad \Longrightarrow w(z) = cz + b \quad \text{şi} \quad \kappa = cr \tag{4.112}$$

Folosim condiţiile de aderenţă şi deducem forma câmpului de viteze, $w(z)$, liniar în $z$, scrisă în (111).

Introducem în formulele din Teorema 4. $d = 0$, funcţia vâscometrică prin intermediul Propoziţiei 16. şi găsim că

$$T_{rr} = \rho_0 \psi + \int_0^r \frac{\sigma_2(c\, s)}{s} ds - \rho_0 \frac{r^2}{2} w^2(z) + m(z). \tag{4.113}$$

Din condiţia pe frontieră se determină funcţia $m(z)$, sub forma

$$m(z) = -p_0 + \rho_0 \frac{R^2}{2} w^2(z) - \int_0^R \frac{\sigma_2(c\,s)}{s} ds, \tag{4.114}$$

unde au fost neglijate forţele masice. Rezultatul se obţine imediat.

Relativ la mişcarea staţionară de forfecare amintim că aceasta este descrisă, de exemplu, în Coleman, Noll [1959] b., Eringen [1960].

## 4.7. Tensiuni normale şi efectele lor. Fenomene ne- newtoniene

Vom prezenta două tipuri de fenomene, care sunt puse în evidenţă experimental, pentru anumite materiale şi care nu au loc dacă experienţele se efectuează cu fluide liniar vâscoase.

Soluţiile puse în evidenţă în mişcarea fluidului între doi cilindrii (mişcarea Couette) şi respectiv în tub (mişcarea Poiseuille) au fost obţinute în ipoteza că suprafeţele cilindrice au lungime infinită. Vom considera acum domeniile mărginite, dar vom utiliza soluţiile anterioare, care devin soluţii aproximative, care diferă de soluţia reală în vecinătatea planelor ce delimiteaza suprafeţele cilindrice.

In această secţiune vom considera două tipuri de efecte ne-newtoniene : *efectul Weissenberg* şi *efectul Meringhton*, care sunt datorate prezenţei tensiunilor normale, sau prezenţei funcţiilor vâscometrice normale.

In cele ce urmează vom urmări prezentarea acestor fenomene aşa cum apare în Truesdell, Noll [1965], Colleman, Markovitz, Noll [1966]. Rezultatele sunt calitative.

### 4.7.1 Efectul Weissenberg

In cadrul constitutiv al fluidelor Reiner - Rivlin o analiză detailată a efectului Weissenberg (efect de *căţărare*) a fost efectuată de Serrin [1959]. Prezentarea dată de Noll o generalizează pe cea datorată lui Ericksen [1959] . Acest efect este pus în evidenţă în aparate, în care se realizează mişcări Couette, staţionare. In Truesdell, Noll [1965] se menţionează că Garner şi Nissan, în 1942, au observat fenomenul de căţărare a fluidului pe pereţii solizi, iar Weissenberg [1947] a efectuat o serie de experienţe sistematice. In Fig. 4.5 b), c) sunt reprezentate efectele ne-newtoniene de tip Weissenberg, puse în evidenţă pentru viteze relativ mici şi respectiv mari de rotaţie ale cilindrului exterior. In imaginile din partea stângă, a), fluidele sunt în repaus, în timp ce, în imaginile din dreapta, d), sunt prezentate comportamentele fluidelor newtoniene.

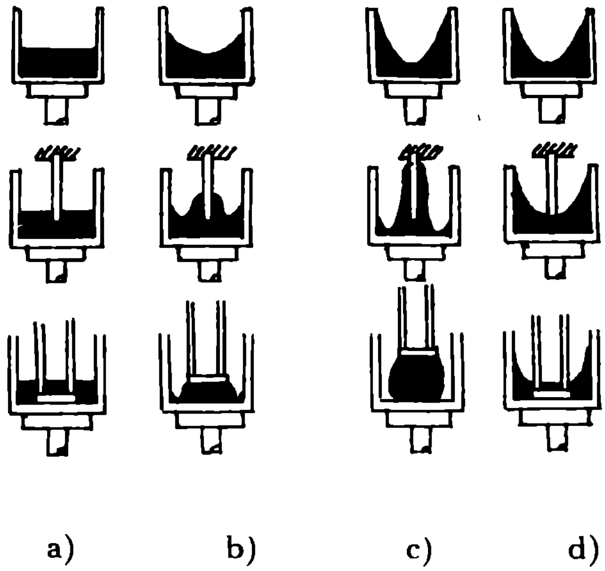



**Fig. 4.5**

Vom considera mişcarea Couette a unui fluid între doi cilindrii coaxiali din paragraful 6.2. Fluidul este în contact cu aerul aflat la o presiune $p_0$. Tensiunea normală, pe o suprafaţă a cărei normală este axa de simetrie, este dată de $T_{zz}$. Conform formulelor (97), menţionate în Teorema 5., dacă neglijăm prezenţa forţelor masice, rezultă

$$T_{zz} = -\int_{R_1}^{r} \frac{\hat{\sigma}_1(\frac{M}{2\pi s^2}) - \hat{\sigma}_2(\frac{M}{2\pi s^2})}{s} ds - \int_{R_1}^{r} \rho_0 s\omega^2(s) ds - \hat{\sigma}_1(\frac{M}{2\pi r^2}) + g.$$

Constanta $g$ poate fi determinată din *condiţia globală de echilibru* a forţelor care acţionează pe suprafaţa plană $z = z_l$, de contact a fluidului cu aerul

$$\int_{z=z_l} \mathbf{T}\mathbf{e}_{<3>} da = -\int_{z=z_l} p_0 \mathbf{e}_{<3>} da \iff .$$

$$2\pi \int_{R_1}^{R_2} T_{zz} r dr = -p_0 \pi (R_2^2 - R_1^2). \tag{4.115}$$

**Definim** *excesul presiunii atmosferice peste presiunea normală* $-T_{zz}$ exercitată de fluid pe suprafaţa liberă

$$N = p_0 - (-T_{zz}) \equiv p_0 + T_{zz}.$$

Prin relaţia anterioară a fost definită o funcţie de $r$, pentru $\forall \quad r \in (R_1, R_2)$. Vom demonstra următoarea proprietate

**Propoziţia 21.** i) Fluidul liniar vâscos are proprietatea că $N$ este o funcţie *descrescătoare* de $r$.

ii) Există fluide de tip Reiner - Rivlin, şi respectiv Rivlin - Ericksen pentru care $N$ este o funcţie *crescătoare* de $r$.

**Demonstraţie.** In ipoteza că funcţiile vâscometrice sunt regulate obţinem, prin derivare în raport cu $r$, că

$$\frac{dN}{dr} = -\rho_0 r\,\omega^2(r) + \frac{M}{\pi r^3}\hat{\sigma}_1'(\frac{M}{2\pi r^2}) + \frac{1}{r}[\hat{\sigma}_1(\frac{M}{2\pi r^2}) - \hat{\sigma}_2(\frac{M}{2\pi r^2})].$$

i) In cazul fluidului liniar vâscos ( vezi Ex. 16 ), funcţiile vâscometrice normale sunt zero, deci $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ şi rezultă că

$$\frac{dN}{dr} = -\rho_o r(\omega(r))^2 < 0.$$

ii) In cazul fluidelor în care funcţiile vâscometrice normale nu sunt zero, se pot construi modele astfel încât $r \longrightarrow N(r)$ să *nu fie desrescătoare*. De exemplu în cazul fluidelor Reiner - Rivlin funcţiile vâscometrice normale sunt egale între ele, dar nenule ( vezi Ex. 16 ). Pentru ca funcţia să fie *nedescrescătoare* este necesar ca $\hat{\sigma}_1$ să fie crescătoare şi astfel încât $\frac{M}{\pi r^3}\hat{\sigma}_1'(\frac{M}{2\pi r^2}) > \rho_0 r\omega^2(r)$, pentru $r \in (R_1, R_2)$.

**Concluzie.** In cazul fluidelor linear vâscoase, numite şi newtoniene, pe peretele interior, spre deosebire de cel exterior, apăsarea exercitată de presiunea atmosferică este mai mare decât acţiunea fluidului asupra suprafeţei plane. Prin urmare fluidul *coboară* pe peretele interior şi *se ridică* pe peretele exterior.

In cazul fluidelor în care există funcţii vâscometrice normale, nenule este posibil să se producă *căţărarea* fluidului pe peretele interior. Deci se poate explica (calitativ) apariţia efectului Weissenberg în anumite clase de fluide, pe baza unei soluţii, exacte pentru domenii infinite, care corespunde unei mişcări vâscometrice.

### 4.7.2 Efectul Merrington

Efectul Merrington a fost observat experimental de Merrington [1943], Garner, Nissan, Wood între anii 1942- 1946. Existenţa efectului de *dilatare* sau de *expansiune* a jetului la ieşirea dintr-o conductă, în cadrul constitutiv al fluidelor Reiner - Rivlin a fost semnalată pentru prima oară de Braun şi Reiner [1952]. O analiză detaliată a fenomenului de expansiune a fluidului la ieşirea dintr-o conductă, numit *efect Merrington* a fost făcută de Serrin [1959] b., pentru un fluid Reiner - Rivlin.

Vom considera mişcarea Poiseuille printr-o conductă cilindrică de rază $R$, descrisă în paragraful 6.3. Vom presupune ca soluţia descrisă prin intermediul mişcărilor vâscometrice, care se realizează în conducte de lungime infinită, este o bună aproximaţie pentru tensiunea reală chiar şi la ieşirea dintr-un tub de lungime *finită*. Atunci , dacă $z = 0$ este secţiunea la ieşirea din conductă determinăm constanta $g$, din formulele (101) dintr-o condiţie globală de echilibru pentru *forţa* *axială*

$$\int_{z=z_l} T_{zz}\mid_{z=0} da = -p_0 \pi R^2, \tag{4.116}$$

unde $p_0$ este presiunea atmosferică.

**Definim** *excesul presiunii atmosferice peste presiunea radială* $-T_{rr}\mid_{r=R}$, exercitată de fluid pe suprafaţa laterală, liberă, la ieşire

$$P = p_0 - (-T_{rr}\mid_{r=R}) \equiv p_o + T_{rr}\mid_{r=R} .$$

**Propoziţia 22.** i) Din condiţia globală de echilibru (116) rezultă valoarea constantei $g$

$$g = -p_0 + \frac{1}{R^2}\int_0^R [\frac{R^2+r^2}{r}\hat{\sigma}_1(\frac{ar}{2}) - 2\, r\hat{\sigma}_2(\frac{ar}{2})]dr, \tag{4.117}$$

iar valoarea lui $P$ se calculează prin

$$P = az + \frac{1}{R^2}\int_0^R r[\hat{\sigma}_1(\frac{ar}{2}) - 2\,\hat{\sigma}_2(\frac{ar}{2})]dr. \tag{4.118}$$

ii) Există fluide ne-newtoniene pentru care $P < 0$ sau $P > 0$ pentru $z = 0$, corespunzător cărora are loc *expansiunea* sau respectiv *sucţiunea* fluidului la ieşirea din tub.

**Demonstraţie**. i) Dintr-un calcul direct, dacă se utilizează reprezentările din Teorema 7. în formula (116) şi se integrează prin părţi, se obţine expresia constantei $g$. Cu $g$ determinat din (117) se deduce (118).

ii) Dacă considerăm $z = 0$ în (118) şi dacă presupunem că fluidul nu este newtonian, deci $\sigma_1$ şi $\sigma_2$ sunt nenule, atunci apar ca posibile cazurile menţionate. De exemplu în cazul fluidului Reiner - Rivlin $\sigma_1 = \sigma_2$. Dacă în plus $\sigma_1 > 0$, atunci are loc expansiunea fluidului la ieşire.

## 4.8 Reovâscozimetre

Aparatele în care se realizează m.i.a.r.c. şi /sau mişcări vâscometrice se numesc *reovâscozimetre*, *reometre* sau vâscozimetre. Cu ajutorul acestora se determină experimental funcţiile vâscometrice. La baza determinărilor experimentale stau rezultatele teoretice care au fost puse în evidenţă pentru diferite tipuri de mişcări. Formulele teoretice se rescriu în forme convenabile conţinând *mărimi măsurabile.*

Exemplificăm modalităţi posibile de interpretare a rezultatelor teoretice astfel ca acestea să capete semnificaţii experimentale.

**Reovâscozimetrele de tip Weissenberg** se compun din doi cilindrii coaxiali, suficient de lungi şi având în general raportul $\dfrac{R_2 - R_1}{R_1}$ suficient de mic.

Cilindrii se găsesc în rotaţie relativă unul faţă de celălalt, cu o rotaţie controlată, unul din cilindrii fiind în general fix. Rotaţia cilindrului este impusă printr-o viteză unghiulară, $\Omega$ constantă, sau printr-un moment, raportat la unitatea de lungime, $M$ constant. In reovâscozimetrele de tip Weissenberg se realizează *mişcări Couette.*

Formula care permite determinarea experimentală a *funcţiilor vâscometrice* este consecinţa relaţiei (102)

$$\Delta\Omega = \Omega_2 - \Omega_1 = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\tau^{-1}(\frac{M}{2\pi s^2})}{s} ds. \tag{4.119}$$

Cu schimbarea de variabilă $\frac{M}{2\pi s^2} = y$ (119) devine

$$\Delta\Omega = -\frac{1}{2}\int_{\frac{M}{2\pi R_1{}^2}}^{\frac{M}{2\pi R_2{}^2}} \frac{\tau^{-1}(y)}{y} dy \quad \Longleftrightarrow \quad \Delta\Omega = f(M). \tag{4.120}$$

Prin derivare în raport cu $R$ deducem

$$2M\frac{d(\Delta\Omega)}{dM} = [\tau^{-1}(\frac{M}{2\pi R_1{}^2}) - \tau^{-1}(\frac{M}{2\pi R_2{}^2})]. \tag{4.121}$$

Dacă $F(M) = 2M\frac{d(\Delta\Omega)}{dM}$ şi $\alpha = \frac{R_1^2}{R_2^2} < 1$ obţinem că

$$F(M) = [\tau^{-1}(\frac{M}{2\pi R_1{}^2}) - \tau^{-1}(\alpha\,\frac{M}{2\pi R_1{}^2})]. \tag{4.122}$$

In (122) luăm succesiv pe $M$ ca fiind $\alpha^n M$ şi prin sumare după n de la 0 la N deducem că

$$\sum_{n=0}^{N} F(\alpha^n M) = [\tau^{-1}(\frac{M}{2\pi R_1{}^2}) - \tau^{-1}(\alpha^{N+1}\,\frac{M}{2\pi R_1{}^2})].$$

Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha^n = 0$, cu ipoteza că $\tau$ este continuă şi $\tau^{-1}(0) = 0$ din relaţia de mai sus, prin trecere la limită, rezultă că

$$\tau^{-1}(\frac{M}{2\pi R_1{}^2}) = \sum_{n=0}^{\infty} F(\alpha^n M), \tag{4.123}$$

unde $F(M) = 2M\frac{d(\Delta\Omega)}{dM}$. Astfel este posibilă determinarea funcţiei vâscometrice $\tau$ dacă se cunoaşte $\Delta\Omega = \Delta\Omega(M)$.

Pentru determinarea funcţiilor vâscometrice normale folosim formulele (101) reprezentate sub forma

$$T_{rr} - T_{zz} = \sigma_1(\tau^{-1}(\frac{M}{2\pi r^2}))\,, \quad T_{\theta\theta} - T_{zz} = \sigma_2(\tau^{-1}(\frac{M}{2\pi r^2})). \tag{4.124}$$

O formulă, eficient folosită în determinările experimentale pentru funcţiile vâscometrice normale, rezultă prin considerarea diferenţelor tensiunilor normale exercitate pe cilindrii exterior şi respectiv interior, exprimată prin $(101)_1$, sub forma

$$\Delta T_{rr} \equiv T_{rr}(R_2) - T_{rr}(R_1) =$$
$$= \int_{R_1}^{R_2} \{\frac{1}{r}[\sigma_2(\tau^{-1})(\frac{M}{2\pi r^2})) - \sigma_1(\tau^{-1})((\frac{M}{2\pi r^2}))] - \rho_0 r\,\omega^2(r)\}dr. \tag{4.125}$$

Când $\dfrac{R_2 - R_1}{R_1} \ll 1$ formula (126) poate fi aproximată prin

$$T_{rr}(R_2) - T_{rr}(R_1) \simeq \frac{R_2 - R_1}{R_1}[\sigma_2(\tau^{-1})(\frac{M}{2\pi R_2^2})) - \sigma_1(\tau^{-1})((\frac{M}{2\pi R_2^2}))], \tag{4.126}$$

iar formula (120) prin

$$\Delta\Omega \simeq \frac{R_2 - R_1}{R_1}(\tau^{-1})(\frac{M}{2\pi {R_2}^2})). \tag{4.127}$$

Ambele formule (126) şi (127) au eroarea de ordinul lui $(\dfrac{R_2 - R_1}{R_1})^2$.

Reovâscozimetrele în care se realizează o mişcare vâscometrică de tip Poiseuille se compun din două rezervoare care comunică printr-o conductă cilindrică de rază R, fluidul trecând dintr-un rezervor într-altul.

Experimental poate fi măsurat debitul $Q$, presupus constant, de fluid care trece printr-o secţiune perpendiculară pe axa conductei. Pornind de la definiţia debitului dată în (109) a rezultat formula (107) în care vom considera viteza de translaţie a peretelui $U = 0$. Se poate obţine următoarea formulă

$$Q(a) = \pi \int_0^R r^2 \tau^{-1}(\frac{ar}{2})dr. \tag{4.128}$$

Fie schimbarea de variabilă $ra = x$ în formula (128). Deducem

$$Q(a) = \pi \int_0^{Ra} \frac{x^2}{a^3}\tau^{-1}(\frac{x}{2})dx, \tag{4.129}$$

formulă ce dă legătura între debitul volumic şi *forţa* $a$, dacă funcţia vâscometrică este cunoscută. Prin derivare în raport cu $a$ rezultă formula

$$\frac{d}{da}(a^3 Q(a)) = \pi a^2 R^3 \tau^{-1}(\frac{aR}{2}), \tag{4.130}$$

care permite determinarea experimentală a funcţiei ***vâscometrice de forfecare***, mai precis inversa acesteia, dacă $Q(a)$ este derminat experimental.

Pentru aceasta este necesar să înţelegem semnificaţia fizică a constantei $a$, pusă în evidenţă în Observaţia 11. din 4.6.3, care defineşte mişcarea de tip

Poiseuille printr-o conductă şi care apare în formula de calcul a debitului, (129). Considerăm valoarea componentei de forfecare (într-o direcţie paralelă cu axa conductei) a vectorului de tensiune care acţionează pe suprafaţa laterală. Prin urmare experimental poate fi măsurată constanta $a$, prin măsurarea tensiunii tangenţiale de forfecare în lungul peretelui conductei, raportată la lungimea $\frac{R}{2}$.

Funcţiile vâscometrice normale pot fi de asemenea determinate, dacă avem în vedere formulele (106), în care $\tau$ a fost deja determinată. Se utilizează relaţiile

$$T_{rr} - T_{\theta\theta} = \sigma_1(\tau^{-1}(\frac{ar}{2}))\,, \quad T_{zz} - T_{\theta\theta} = \sigma_2(\tau^{-1}(\frac{ar}{2})). \tag{4.131}$$

Studii legate de mişcările vâscometrice şi modalităţile de determinare a funcţiilor vâscometrice, pentru fluide ne-newtoniene sunt prezentate, spre exemplu în Coleman, Markovitz, Noll [1966].

In lucrările datorate autorilor Astarita, Marrucci [1974], Huilgol [1975], Walters [1975], Huilgol, Phan- Thien [1986] sunt puse în discuţie probleme privind efectele de capăt şi de suprafaţă (în cazul existenţei suprafeţelor libere). Sunt formulate unele probleme de mişcări vâscometrice perturbate şi sunt prezentate chestiuni privind stabilitatea, ca şi unele rezultate de existenţă şi unicitate.

## 4.9 Exerciţii şi probleme

**1**. Arătaţi că funcţia exponenţială are următoarele proprietăţi (folosind, de exemplu, ecuaţiile diferenţiale ale căror soluţii sunt)

$a)$ $\quad (exp(s\mathbf{M}))^T = exp(s\mathbf{M}^T)\,, \quad (exp(s\mathbf{M}))^{-1} = exp(-s\mathbf{M}),$

$b)$ $\quad det(\exp(s\mathbf{M})) = exp(\,s\,\mathrm{tr}\mathbf{M}),$

$c)$ $\quad \mathbf{Q}(\,exp\mathbf{M})\mathbf{Q}^T = exp(\mathbf{Q}\mathbf{M}\mathbf{Q}^T) \quad \forall \quad \mathbf{Q} \in Ort,$

pentru $\forall s \in R, \quad \forall \quad \mathbf{M} \in Lin.$

**2**. Arătaţi că dacă $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in Lin$ sunt permutabile, atunci pentru $\forall s \in R$ are loc

$$\exp(\,s\mathbf{A})\exp(\,s\mathbf{B}) = \exp(\,s(\mathbf{A} + \mathbf{B})).$$

**3**. Ce se poate afirma despre unicitatea reprezentării m.i.a.r.c. dată în Teorema lui Noll de caracterizare a m.i.a.r.c. ?

**4**. Este unică reprezentarea gradientului de deformaţie dată în Teorema lui Noll, dacă se presupune că mişcarea este vâscometrică ?

**5**. Utilizând teorema lui Noll pe m.i.a.r.c. demonstraţi că

a) gradientul in miscarea relativa $\quad \mathbf{F}_t(\tau) = \mathbf{Q}(\tau)\,exp((\tau - t)\kappa\mathbf{N})\mathbf{Q}^T(t),$

b) gradientul vitezei $\quad \mathbf{L} = \kappa\mathbf{Q}(t)\mathbf{N}\mathbf{Q}^T(t) + \dot{\mathbf{Q}}(t)\mathbf{Q}^T(t)$

şi calculaţi $\mathbf{D}$ şi $\mathbf{W}$.

**6**. Să se calculeze tensorii lui Rivlin - Ericksen pe m.i.a.r.c., arătând că

$$\mathbf{A}_1(t) = \mathbf{M}(t) + \mathbf{M}^T(t),$$

$$\mathbf{A}_2(t) = 2\mathbf{M}^T(t)\mathbf{M}(t) + (\mathbf{M}(t))^2 + (\mathbf{M}^T(t))^2,$$

$$\mathbf{A}_n(t) = \mathbf{M}^T(t)\mathbf{A}_{n-1}(t) + \mathbf{A}_{n-1}(t)\mathbf{M}(t), \quad \forall \quad n \geq 2.$$

Aici s-a folosit notaţia introdusă în (16).

**7**. Arătaţi că o m.i.a.r.c. este incompresibilă $\iff$ $(\kappa = 0,$ sau $\mathrm{tr}\mathbf{N} = 0)$, sau $\mathrm{tr}\,\mathbf{M} = 0$, cu notaţia $\mathbf{M} = \kappa\mathbf{N}$.

**8**. Ca o consecinţă a Lemei lui Wang, deduceţi tipurile de neunicitate în teorema lui Noll de caracterizare a m.i.a.r.c.

**9**. Arătaţi că sunt echivalente următoarele condiţii

$a)$ $\mathbf{A}_4(t) = 0$ pentru $\forall t \in \mathbf{R}$,

$b)$ $\mathbf{M} = \kappa\mathbf{N}$ cu $\mathbf{N}^2 = 0$,

$c)$ $\mathbf{C}_t^t(s) = \mathbf{I} - s(\mathbf{M}(t) + \mathbf{M}^T(t)) + s^2\mathbf{M}^T(t)\mathbf{M}(t)$,

unde $\mathbf{M}(t) = \tilde{\mathbf{Q}}(t)(\mathbf{M})\tilde{\mathbf{Q}}^T(t)$.

**10**. Arătaţi că au loc formulele

$$\mathbf{A}_n(t) = \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k(\mathbf{M}(t)^k)^T(\mathbf{M}(t))^{(n-k)} = \mathbf{Q}(t)\mathbf{A}_n(0)\mathbf{Q}^T(t).$$

**11**. Fie spaţiul vectorial $\mathcal{V}$ de dimensiune trei. Care este ordinul maxim de nilpotenţă pentru aplicaţiile $\mathbf{A} \in Lin$, $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$?

**12**. Să se arate că orice mişcare vâscometrică este incompresibilă.

**13**. Să se calculeze tensorii Rivlin - Ericksen pe mişcări vâscometrice şi arătaţi că tensorii Rivlin- Ericksen pentru k $\geq 3$ sunt nuli.

**14**. Să se calculeze tensorii Rivlin - Ericksen pe mişcări vâscometrice, şi arătaţi că au loc formulele

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{M}^T + \mathbf{M} \qquad \mathbf{A}_2 = 2\mathbf{M}^T\mathbf{M},$$

$$\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_2\mathbf{A}_1 = 2\kappa^2(\mathbf{M}^T + \mathbf{M}),$$

$$\mathbf{A}_1^2\mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_2\mathbf{A}_1^2 = 2\kappa^2(\mathbf{M}^T\mathbf{M} + \mathbf{M}\mathbf{M}^T),$$

$$\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2^2 + \mathbf{A}_2^2\mathbf{A}_1 = 4\kappa^4(\mathbf{M}^T + \mathbf{M}),$$

$$\mathbf{A}_1^2\mathbf{A}_2^2 + \mathbf{A}_2^2\mathbf{A}_1^2 = 4\kappa^4(\mathbf{M}^T\mathbf{M} + \mathbf{M}\mathbf{M}^T).$$

**15**. Calculaţi invarianţii tensorilor Rivlin - Ericksen şi a combinaţiilor acestora. Arătaţi că au loc relaţiile

$$j_{\mathbf{A}_1} \equiv (\mathrm{tr}\mathbf{A}_1, \mathrm{tr}\mathbf{A}_1^2, \det\mathbf{A}_1) = (0, 2\,\kappa^2, 0), \quad j_{\mathbf{A}_2} = (2\kappa^2, 4\kappa^4, 0).$$

**16**. Să se calculeze funcţiile vâscometrice pentru următoarele fluide incompresibile

a) *fluidul liniar vâscos* : $\mathbf{T}(\mathbf{x},t) = -p(\mathbf{x},t)\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D}$,

b) *fluidul Reiner - Rivlin* : $\mathbf{T}(\mathbf{x},t) = -p(\mathbf{x},t)\mathbf{I} + \varphi_1(j_{\mathbf{D}})\mathbf{D} + \varphi_2(j_{\mathbf{D}})\mathbf{D}^2$,

c) *fluidul Rivlin - Ericksen* : descris prin reprezentarea (3.36)

şi să se arate că acestea se exprimă prin

$$\text{a)} \quad \tau(\kappa) = \mu\kappa, \quad \sigma_1(\kappa) = \sigma_2(\kappa) = 0,$$

$$\text{b)} \quad \tau(\kappa) = \frac{1}{2}\hat{\kappa}\varphi_1(\kappa), \quad \sigma_1(\kappa) = \sigma_2(\kappa) = \frac{1}{4}(\kappa)^2\hat{\varphi}_2(\kappa),$$

$$\text{unde} \quad j_{\mathbf{D}} \equiv (\mathrm{tr}\mathbf{D}, \mathrm{tr}\mathbf{D}^2, \det\mathbf{D}) = (0, \frac{\kappa^2}{2}, 0)$$

$$\text{c)} \quad \tau(\kappa) = \kappa\hat{\alpha}_1(\kappa) + 2\kappa^3\hat{\alpha}_5(\kappa) + 4\kappa^5\hat{\alpha}_7(\kappa),$$

$$\sigma_1(\kappa) = \kappa^2\hat{\alpha}_3(\kappa) + 2\kappa^2\alpha_2(\kappa) + 4\kappa^4\alpha_4(\kappa) + 2\kappa^4\hat{\alpha}_6(\kappa) + 4\kappa^6\hat{\alpha}_8(\kappa),$$

$$\sigma_2(\kappa) = \kappa^2\hat{\alpha}_3(\kappa) + 2\kappa^4\hat{\alpha}_6(\kappa) + 4\kappa^6\hat{\alpha}_8(\kappa)(\kappa) = 0,$$

unde am notat prin " ˆ " compunerea funcţiilor constitutive cu valorile setului de invarianţi calculate pe mişcarea vâscometrică.

**17**. Arătaţi că pentru descrierea mişcărilor vâscometrice este suficient să se considere ecuaţii constitutive de tip Rivlin - Ericksen de forma minimală

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \alpha_1\mathbf{A}_1 + \alpha_3(\mathbf{A}_1)^2 + \alpha_2\mathbf{A}_2,$$

cu $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ funcţii depinzând numai de $\mathrm{tr}(\mathbf{A}_1^2)$.

**18**. Demonstraţi că pozitivitatea energiei disipate într-un fluid supus la o mişcare vâscometrică este echivalentă cu $\kappa\tau(\kappa) > 0$, ştiind că puterea mecanică (sau energia disipată) într-o particulă fixată $\mathbf{X}$ se calculează prin $\mathbf{T}\cdot\mathbf{D}$.

**19**. In cazul mişcării elicoidale, cu câmpul de viteze descris prin (64), demonstraţi că acceleraţia corespunzătoare este dată prin $\mathbf{a} = -r(\omega)^2(r)\mathbf{e}_{<1>}(t)$, în baza fizică.

**20**. In cazul mişcării staţionare de torsiune, cu câmpul de viteze descris prin (74), demonstraţi că acceleraţia corespunzătoare este dată prin $\mathbf{a} = -rw(z)^2\mathbf{e}_{<1>}(t)$, în baza fizică.

21. Arătaţi că în sitemul cilindric de coordonate are loc formula

$$\nabla\psi = \frac{\partial\psi}{\partial r}\mathbf{e}_{<1>}(t) + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\mathbf{e}_{<2>} + \frac{\partial\psi}{\partial z}\mathbf{e}_{<3>}.$$

**22**. Considerăm mişcarea staţionară de forfecare între două plane infinite, aflate la o distanţă $d$. Planul $x^1 = 0$ este fix, iar planul $x^1 = d$ are o mişcare de translaţie cu o viteză $V$ paralelă cu planul fix. Arătaţi că, câmpul de viteze este descris prin $v(x^1 = \int_0^{x^1} \tau^{-1}(-as)ds$ cu condiţia $V = \int_0^d \tau^{-1}(-as)ds$, folosind proprietatea că funcţia $\tau$ este impară.

**23**. Fie o mişcare descrisă într-o bază carteziană prin câmpul de viteze $\dot{x}^1 = \gamma\, x^2$, $\dot{x}^2 = \gamma\, x^1$, $\dot{x}^3 = 0$. Studiaţi dacă este o m.i.a.r.c.

**24**. In sistemul curbiliniu de coordonate $\{q^i\}$, ortogonal, câmpul de viteze este descris prin componentele contravariante

$$\dot{q}^1 = u(q^2, q^3)\,, \quad \dot{q}^2 = 0\,, \quad \dot{q}^3 = 0.$$

Ce condiţie trebuie să satisfacă tensorul metric $[g_{ij}]$ pentru ca mişcarea descrisă să fie vâscometrică.

**25**. Fie o mişcare Couette definită prin câmpul de viteze (99).

a. Demonstraţi pe o cale directă (nu prin particularizarea formulelor de la mişcarea elicoidală) că este o mişcare vâscometrică. Arătaţi că ea determină o soluţie exactă, în cazul mişcării între doi cilindrii , cu condiţiile menţionate în Teorema 5.

b. Particularizati formulele care descriu miscarea intre doi cilindrii pentru fluidele: liniar vascos, Reiner- Rivlin, Rivlin-Ericksen de ordinul 2.

**26**. Fie o mişcare Poiseuille, definită prin câmpul de viteze (104).

a. Demonstraţi în mod direct, utilizând definiţiile, că aceasta este o mişcare vâscometrică şi că determină o soluţie exactă în cazul mişcării printr-o conductă cilindrică, în condiţiile Teoremei 6.

b. Particularizaţi formulele care descriu mişcarea în conductă pentru fluidele: liniar vâscos, Reiner- Rivlin, Rivlin-Ericksen de ordinul 2.

**27**. Se consideră un reovâscozimetru ortogonal compus din două discuri paralele aflate la o distanţă $d_o$ care au o mişare de rotaţie în jurul axelor lor, care se găsesc la o distanţă $r_o$. Rotaţia discurilor este uniformă şi este caracterizată de viteză unghiulară de rotaţie $\Omega_o$. Fie câmpul de viteze într-o bază cartezian caracterizat prin

$$v_1 = -\Omega_o[\, y - \varphi(z)\,], \quad v_2 = \Omega_o[\, x - \psi(z)\,], \quad v_3 = 0$$

a. Arătaţi că o astfel de mişcare este cu istoria alungirilor relative constantă.

b. Miscarea este incompresibilă ?

c. Calculaţi expresia tensiunii suportată de un fluid Reiner-Rivlin şi respectiv Rivlin- EricKsen de ordinul 2, dacă are loc mişcarea descrisă.

**28.** Presupunem că suprafaţa liberă în mişcarea unui fluid este cu simetrie de rotaţie, reprezentată prin ecuaţia $z = h(r)$ în sistemul cilindric de coordonate.

a. Exprimaţi condiţia pe suprafaţa liberă $\mathbf{Tn} = -p_0\mathbf{n}$ pe componente în baza fizică asociată sistemului cilindric de coordonate.

b. Din ce condiţie poate fi determinată forma suprafeţei libere ?

c. Particularizaţi rezultatul de la punctul b. pentru mişcarea de tip Couette şi de tip Poiseuille. Ce rezultă relativ la forma suprafeţei libere ?

**29.** *Mişcarea con- placă* este descrisă, la fiecare moment de timp $\tau$, prin componentele contravariante ale vitezei scrise în baza locală corespunzătoare *sistemului sferic* de coordonate, sub forma

$$\dot{\xi}^1 = 0, \quad \dot{\xi}^2 = \omega(\xi^2), \quad \dot{\xi}^3 = 0.$$

La momentul $\tau = t$ particula materială ocupă poziţia $\mathbf{x}$ caracterizată prin coordonatele curbilinii (sferice)

$$(q^3 \equiv r, q^2 \equiv \theta, q^1 \equiv \varphi),$$

unde componentele îbaza carteziană ale lui $\mathbf{x}$ sunt date prin

$$x^1 = \sin\varphi\cos\theta, \quad x^2 = \sin\varphi\sin\theta, \quad \sin\varphi, \quad x^3 = \cos\varphi,$$

pentru $r \in R_+, \quad \theta \in [0, 2\pi), \quad \varphi \in [0, 1/2\,\pi]$.

a. Determinaţi traiectoria particulei materiale, dedusă prin integrarea sistemului care caracterizează câmpul de viteze, dacă se consideră condiţiile iniţiale $\xi^1(t) = \varphi, \xi^2(t) = \theta, \xi^3(t) = r$.

b. Demonstraţi că mişcarea con- placă este o mişcare *vâscometrică* cu $\kappa = \sin\varphi\,\omega'(\varphi)$.

**30.** Pentru mişcarea con- placă demonstraţi că :

a. Baza canonică şi baza fizică, asociată sistemului sferic de coordonate, de forma scrisă în Ex. coincid.

b. Arătaţi că componentele tensorului de tensiune în baza fizică şi funcţiile vâscometrice sunt legate prin formulele

$$T_{\varphi\varphi} - T_{rr} = \sigma_1(\kappa), \quad T_{\theta\theta} - T_{rr} = \sigma_2(\kappa),$$

$$T_{\theta,\varphi} = \tau(\kappa)\,, T_{r\theta} = 0\,, \quad T_{r\theta} = 0\,,$$

ca o consecinąa formulelor (4.37) şi a punctului a.

**31**. Scrieţi ecuaţiile de mişcare în absenţa forţelor masice, în sistemul sferic de coordonate şi determinaţi starea de tensiune corespunzătoare mişcării con - placă, care le satisface (folosind deci formulele de legătură din Ex. 30 b). Se va presupune că $\varphi \in [1/2\,\pi - \alpha, 1/2\,\pi]$, pentru $\alpha$ foarte mic.

**32**. Se consideră mişcarea con- placă într-un domeniu delimitat de planul $x^3 = 0$, şi suprafaţa conului cu vârful pe plan, de semiunghi la vârf egal cu $1/2\,\pi - \alpha$.

Presupunem că planul şi conul se rotesc în jurul axei de simetrie cu vitezele unghiulare $\Omega_0, \Omega_1$ diferite şi că fluidul se găseşte în contact cu aerul pe suprafaţa liberă, pe care o considerăm definită prin r = R.

Deci domeniul în care are loc mişcarea este dat de $r \in [0, R]$, $\theta \in [0, 2\pi)$, $\varphi \in [1/2\,\pi - \alpha, 1/2\,\pi]$.

a. Arătaţi că condiţiile de aderenţă devin $\omega(1/2\pi) = \Omega_0$, $\omega(1/2\pi - \alpha) = \Omega_1$ şi condiţia pe suprafaţa liberă este $T_{rr}\,|_{r=R} = -p_0$.

c. Demonstraţi că tensiunea normală $T_{rr}$ în lungul planului şi al conului se exprimăprin

$$T_{rr} = -p_0 + \sigma_1(\frac{\Delta\Omega}{\alpha}) - \log(\frac{R}{r})[\sigma_1(\frac{\Delta\Omega}{\alpha}) + \sigma_2(\frac{\Delta\Omega}{\alpha})].$$

unde $\Delta\Omega = \Omega_1 - \Omega_0$.

# 5. VÂSCOELASTICITATE

## 5.1 Materiale cu memorie întârziată

In prezentarea reprezentărilor constitutive pentru corpuri vâscoelastice vom urmări lucrările Truesdell, Noll [1965], Coleman, Noll [1961], Truesdell [1972], Gurtin, Sternberg [1962], etc. plasându-ne în cazul materialelor simple.

Prezentarea generală a materialelor simple a fost făcută în cap.2, paragraful 2, punându-se în evidenţă proprietăţi *algebrice* pentru operatorii constitutivi, care au fost obţinute din principiile generale şi din definiţiile introduse. Acum vor fi necesare proprietăţi *topologice*, de netezime ale operatorilor constitutivi. Acestea vor fi introduse pe baza *principiului materialelor cu memorie întârziată.*

Fie reprezentarea constitutivă a materialului simplu

$$\mathbf{T}(\mathbf{x},t) = \mathcal{F}(\mathbf{F}^t(\mathbf{X},\cdot)), \tag{5.1}$$

prin care starea de tensiune în particula fixată $X \in \mathcal{B}$, la momentul $t$ este determinată de istoria gradientului de deformaţie până la momentul $t$, considerat în particula fixată.

In Teorema 3. din cap.2 s-a demonstrat că reprezentarea constitutivă (1) satisface principul obiectivităţii dacă şi numai dacă operatorul constitutiv se poate reprezenta sub forma

$$\mathcal{F}(\mathbf{F}^t(\mathbf{X},\cdot)) = \mathbf{R}(\mathbf{X},t)\mathcal{F}_1((\mathbf{C}_t^t(\mathbf{x},\cdot))^{\mathbf{R}}, \mathbf{C}(\mathbf{X},t))\mathbf{R}^T(\mathbf{X},t). \tag{5.2}$$

In continuare nu vom mai menţiona particula în localizările acesteia, după cum nu am mai menţionat nici configuraţia de referinţă $k$, în scopul simplificării scrierii.

Rezultă deci forma redusă II, scrisă în (2), pentru reprezentările constitutive ale materialelor simple, sau într-o reprezentare echivalentă

$$\mathbf{T}^{\mathbf{R}}(\mathbf{x},t) = \mathcal{F}_1((\mathbf{C}_t^t(\cdot))^{\mathbf{R}}, \mathbf{C}(t)). \tag{5.3}$$

Amintim că :

$\mathbf{R}(t) \in Ort$ este rotaţia la momentul $t$, rezultată din teorema de descompunere polară aplicată gradientului de deformaţie $\mathbf{F}(t) = \mathbf{R}(t)\mathbf{U}(t)$, cu $\mathbf{U}(t) \in Psim$;

$\mathbf{C}(t) = \mathbf{F}(t)^T\mathbf{F}(t)-$ tensorul Cauchy-Green la dreapta, care intervine sub formă de parametru;

$\mathbf{C}_t^t(s) = \mathbf{F}_t^T(\tau)\mathbf{F}_t(\tau)$, cu $\tau = t - s$, $s \geq 0$, reprezintă valoarea curentă a istoriei tensorului Cauchy-Green la dreapta în descrierea relativă a mişcării;

$\mathbf{F}_t(\tau) = \mathbf{F}(\tau)\mathbf{F}(t)^{-1}-$ reprezintă gradientul deformaţiei în mişcarea relativă, exprimat prin valorile gradientului de deformaţie, la momentele corespunzătoare de timp, faţă de configuraţia de referinţă $k$;

$\mathbf{A}^{\mathbf{R}} \equiv \mathbf{R}^T\mathbf{A}\mathbf{R}$, definit în (2.17), este tensorul rotit cu rotaţia de la momentul $t$, aici $\mathbf{R} \equiv \mathbf{R}(t)$ şi $\mathbf{A} \in Lin$.

Pentru un moment de timp $t$ fixat introducem istoria

$$\mathbf{G} : R \longrightarrow Sim\,, \quad \mathbf{G}(s) = (\mathbf{C}_t^t(s))^{\mathbf{R}} - \mathbf{I} \quad \forall s \geq 0,$$
$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{0} \quad \forall s \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{C}_t^t(s) = \mathbf{I} \equiv \mathbf{I}^t(s) \quad \forall s \geq 0. \tag{5.4}$$

**Observaţia 1.** Istoria $G(\cdot) = 0$ are semnificaţia care decurge din interpretarea condiţiei $\mathbf{C}_t^t(s) = \mathbf{I}^t(s) \equiv \mathbf{I}$, în conformitate cu (2. 98) : corpul este local menţinut nedeformat faţă de o configuraţie deformată a sa , fiind supus (local) numai la rotaţii.

**Propoziţia 1.** Reprezentarea constitutivă (3) se reprezintă în forma echivalentă

$$\mathbf{T}^{\mathbf{R}}(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{C}(t)) + \mathcal{F}(\mathbf{G}(\cdot), \mathbf{C}(t)),$$
$$\mathcal{F}(\mathbf{0}(\cdot), \mathbf{C}(t)) = 0. \tag{5.5}$$

**Demonstraţie.** Punem în evidenţă istoria identităţii

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_1((\mathbf{C}_t^t(\cdot))^{\mathbf{R}}, \mathbf{C}(t)) &= \mathcal{F}_1((\mathbf{C}_t^t(\cdot))^{\mathbf{R}}, \mathbf{C}(t)) - \mathcal{F}_1(\mathbf{I}^t(\cdot), \mathbf{C}(t)) + f(\mathbf{C}(t)),\\ &= f(\mathbf{C}(t)) + \mathcal{F}(\mathbf{G}(\cdot), \mathbf{C}(t)),\end{aligned} \tag{5.6}$$

unde $f(\mathbf{C}(t)) = \mathcal{F}_1(\mathbf{I}^t(\cdot), \mathbf{C}(t))$. Afirmaţia devine evidentă dacă ţinem cont de definiţia (4).

Deci reprezentării (5), pentru fiecare valoare fixată a tensorului $\mathbf{C}(t)$, i se asociază operatorul constitutiv

$$\mathcal{F}((\cdot), \mathbf{C}(t)) : \mathcal{H} \longrightarrow Sim,$$
$$\mathcal{H} = \{\mathbf{G} : [0, +\infty) \longrightarrow Sim \mid \text{cu anumite proprietăţi}\}. \tag{5.7}$$

Organizăm spaţiul de istorii $\mathcal{H}$ cu o *structură de spaţiu Hilbert* introdusă prin intermediul **funcţiei de influenţă**.

**Definiţia 1.** O functie $h : [0, +\infty) \longrightarrow R_+$ se numeşte *funcţie de influenţă* dacă

$$\begin{aligned} &a) \quad h \quad \text{este continuă}, \quad h(0)=1, \\ &b) \quad \exists\, r > \frac{1}{2} \quad \text{astfel încât} \quad s^r h(s) \longrightarrow 0, \quad \text{pentru} \quad s \longrightarrow \infty \end{aligned} \tag{5.8}$$

**Propoziţia 2.** Funcţia de influenţă are următoarele proprietăţi

1) $\forall \epsilon > 0 \;\; \exists \delta_\epsilon > 0$ astfel încât $h(s) < \dfrac{\epsilon}{s^r}$ pentru $s > \delta_\epsilon$.

2) $h \in L^2([0,+\infty))$ , deci este de pătrat integrabil.

3) $h(s) \longrightarrow 0$ pentru $s \to +\infty$.

Dăm câteva **exemple** de funcţii de influenţă

i) $h(s) = \dfrac{1}{(1+s)^p}$ cu $p > r$.

ii) $h(s) = exp(-\beta\, s)$ cu $\beta > 0$.

**Observaţia 2.** Deoarece $h(0) = 1$ funcţia de influenţă *lasă nealterate valorile istoriei* $\mathbf{C}_t^t$ în vecinătatea momentului actual, în sensul că $h(0)\mathbf{G}(0) = (\mathbf{C}_t^t(0))^{\mathbf{R}}$. Deoarece $h(s) \longrightarrow 0$ pentru $s \to +\infty$ funcţia de influenţă *atenuează* valorile la infinit ale istoriei $\mathbf{G}$, în sensul că $h(s)\mathbf{G}(s) \longrightarrow 0$ pentru $s \to +\infty$.

Precizăm **domeniul de definiţie** al operatorului constitutiv $\mathcal{F}$ din (7), care fiind construit cu ajutorul funcţiei de influenţă este notat prin $\mathcal{H}_{(h)}$ şi este dat de

$$\mathcal{H}_{(h)} = \{\mathbf{G} : [0,+\infty) \to Sim \mid \mathbf{G} \text{ măsurabila } \int_0^\infty h^2(s)\mathbf{G}(s)\cdot\mathbf{G}(s)ds < \infty\}. \tag{5.9}$$

Introducem

$$\| \mathbf{G} \|_{(h)} = (\int_0^\infty h^2(s)\mathbf{G}(s)\cdot\mathbf{G}(s)ds)^{1/2}. \tag{5.10}$$

**Propoziţia 3.** $(\mathcal{H}_{(h)}; <,>_{(h)})$ este un *spaţiu Hilbert* cu produsul scalar definit prin

$$\begin{aligned} &<,>_{(h)}: \mathcal{H}_{(h)} \times \mathcal{H}_{(h)} \longrightarrow R, \\ &< \mathbf{G},\mathbf{H} >_{(h)} = \int_0^\infty h^2(s)\mathbf{G}(s)\cdot\mathbf{H}(s)ds \equiv \int_0^\infty h^2(s)\mathrm{tr}\,(\mathbf{G}(s)\mathbf{H}^T(s))ds, \end{aligned} \tag{5.11}$$

iar $\| \mathbf{G} \|_{(h)}$, definită în (10) este norma corespunzătoare.

Vom introduce acum **principiul materialelor cu memorie întârziată.** [1] Spunem că materialul simplu descris prin reprezentarea constitutivă (5)

[1]In formularea acceptată aici, este un principiu slăbit.

$$\mathbf{T}^{\mathbf{R}}(\mathbf{x},t) = f(\mathbf{C}(t)) + \mathcal{F}(\mathbf{G}(\cdot),\mathbf{C}(t)) \quad \text{unde} \quad ,$$

$$\mathcal{F}((\cdot),\mathbf{C}(t)) : \mathcal{H}_{(h)} \longrightarrow Sim, \tag{5.12}$$

$$\mathcal{F}(\mathbf{0}),\mathbf{C}(t)) = 0,$$

satisface *principiul materialelor cu memorie întârziată* dacă operatorul constitutiv $\mathcal{F}((\cdot),\mathbf{C}(t))$ *este diferenţiabil Fréchet* în $\mathbf{G} = \mathbf{0} \in \mathcal{H}_{(h)}$.

**Teorema 1.** Diferenţiala Fréchet a operatorului constitutiv este dată prin[2]

$$D\mathcal{F}(\mathbf{0},\mathbf{C})[\mathbf{G}] = \int_0^\infty h^2(s)\tilde{\mathbf{K}}(s,\mathbf{C})[\mathbf{G}(s)]ds, \tag{5.13}$$

pentru $\forall \quad \mathbf{G} \in \mathcal{H}_{(h)}$ cu următoarele proprietăţi

$$1)\, \tilde{\mathbf{K}}(s,\mathbf{C}) : Sim \longrightarrow Sim \quad \text{liniară} \quad \Longleftrightarrow \quad ,$$

$$\exists \quad \tilde{K}_{jklm}(s,\mathbf{C}) \in R, \quad \forall \quad j,k,l,m \in \{\overline{1,3}\} \quad \text{astfel încât}, \tag{5.14}$$

$$\tilde{\mathbf{K}}(s,\mathbf{C})[\mathbf{A}] = \tilde{K}_{jklm}(s,\mathbf{C})A_{lm}\mathbf{i}_j \otimes \mathbf{i}_k \quad \forall \mathbf{A} \in Sim,$$

cu simetriile

$$\tilde{K}_{jklm} = \tilde{K}_{kjlm} = \tilde{K}_{jkml} \quad \forall \quad j,k,l,m \in \{\overline{1,3}\}. \tag{5.15}$$

$$2) \int_0^\infty h^2(s) \parallel \tilde{\mathbf{K}}(s,\mathbf{C}) \parallel_{(4)}^2 ds < \infty, \tag{5.16}$$

unde $\parallel \tilde{\mathbf{K}}(s,\mathbf{C}) \parallel_{(4)} = ( \sum_{j,k,l,m=1}^{3} (\tilde{\mathbf{K}}_{jklm}(s,\mathbf{C}))^2)^{1/2}$.

**Demostraţie.** Din definiţia diferenţiabilităţii Fréchet în $\mathbf{0}$ ( vezi anexa A1.) rezultă că

$$\exists D\mathcal{F}(\mathbf{0},\mathbf{C}) : \mathcal{H}_{(h)} \longrightarrow Sim \quad \text{liniară şi continuă} \quad \text{astfel încât},$$

$$\mathcal{F}(\mathbf{G},\mathbf{C}) = \mathcal{F}(\mathbf{0},\mathbf{C}) + D\mathcal{F}(\mathbf{0},\mathbf{C})[\mathbf{G}] + \omega(\mathbf{0},\mathbf{G};\mathbf{C}) \quad \text{cu}, \tag{5.17}$$

$$\lim_{\mathbf{G}\to\mathbf{0}} \frac{\omega(\mathbf{0},\mathbf{G};\mathbf{C})}{\parallel \mathbf{G} \parallel_{(h)}} = 0.$$

---

[2]Notăm $\mathbf{C} \equiv \mathbf{C}(t)$.

Considerăm o bază carteziană fixată $\{\mathbf{i}_k\}_{\{k\in\{\overline{1,3}\}\}}$ şi asociem funcţionalele $\phi_{jk} = \phi_{kj}$ :

$$\mathbf{G} \in \mathcal{H}_{(h)} \longrightarrow \phi_{jk}[\mathbf{G}] = \mathbf{i}_j \cdot D\mathcal{F}(\mathbf{0},\mathbf{C})[\mathbf{G}]\,\mathbf{i}_k \in R, \tag{5.18}$$

care sunt liniare şi continue, cu valori reale, definite pe spaţiul Hilbert $\mathcal{H}_{(h)}$, având în vedere proprietăţile diferenţialei Fréchet pentru operatorul constitutiv care ia valori în $Sim$. Simetria functionalelor $\phi_{jk}$ în indicii $j,k$ este o consecinţă proprietăţii diferenţialei, dată în (17).

Din teorema lui Riesz, de reprezentare a funcţionalelor lineare şi continue pe spaţii Hilbert, rezultă că pentru $\forall(jk)$, $\forall\mathbf{C} \in Sim$

$$\exists\, \tilde{\mathbf{K}}_{jk}(\cdot,\mathbf{C}) \in \mathcal{H}_{(h)} \quad \text{unice} \quad \text{astfel încât} \quad ,$$

$$\phi_{jk}[\mathbf{G}] = <\tilde{\mathbf{K}}_{jk}(\cdot,\mathbf{C}),\mathbf{G}>_{(h)} \equiv \mathbf{i}_j \cdot D\mathcal{F}(\mathbf{0},\mathbf{C})[\mathbf{G}]\,\mathbf{i}_k \quad \forall \quad \mathbf{G} \in \mathcal{H}_{(h)}, \tag{5.19}$$

$$\phi_{jk} = \phi_{kj} \quad \Longleftrightarrow \quad \tilde{\mathbf{K}}_{jk}(\cdot,\mathbf{C}) = \tilde{\mathbf{K}}_{kj}(\cdot,\mathbf{C}).$$

Dacă utilizăm definiţia (11) a produsului scalar $<,>_{(h)}$, din (19) obţinem

$$\begin{gathered}\mathbf{i}_j \cdot D\mathcal{F}(\mathbf{0},\mathbf{C})[\mathbf{G}]\,\mathbf{i}_k = \int_0^\infty h^2(s)\tilde{\mathbf{K}}_{jk}(s,\mathbf{C})\cdot\mathbf{G}(s)ds \quad \Longleftrightarrow \\ D\mathcal{F}(\mathbf{0},\mathbf{C})[\mathbf{G}] = (\int_0^\infty h^2(s)\tilde{\mathbf{K}}_{jk}(s,\mathbf{C})\cdot\mathbf{G}(s)ds)\,\mathbf{i}_j \otimes \mathbf{i}_k,\end{gathered} \tag{5.20}$$

reprezentările având loc $\forall \quad \mathbf{G} \in \mathcal{H}_{(h)}$.

Pe de altă parte din definiţia (9) a spaţiului $\mathcal{H}_{(h)}$ rezultă $\forall\, j,k \in \{\overline{1,3}\}$ proprietăţile

$$\begin{aligned} &i) \quad \tilde{\mathbf{K}}_{jk}(s,\mathbf{C}) \in Sim \quad \forall s \geq 0, \\ &ii) \quad \int_0^\infty h^2(s) \mid \tilde{\mathbf{K}}_{jk}(s,\mathbf{C}) \mid^2 ds < \infty. \end{aligned} \tag{5.21}$$

Construim, pentru $\forall\,\mathbf{C} \in Sim$ fixat, câmpul (tensorial de ordinul patru)

$$\begin{aligned} &\tilde{\mathbf{K}}(\cdot,\mathbf{C}) \quad \text{definită a.p.t. pe} \quad [0,+\infty), \quad \text{măsurabilă}, \\ &\tilde{\mathbf{K}}(s,\mathbf{C}) : Sim \longrightarrow Sim \quad \text{liniară şi astfel încât}, \\ &\tilde{\mathbf{K}}(s,\mathbf{C})[\mathbf{A}] = \tilde{\mathbf{K}}_{jklm}(s,\mathbf{C})A_{lm}\,\mathbf{i}_j \otimes \mathbf{i}_k \quad \text{unde}, \\ &\tilde{\mathbf{K}}_{jklm}(s,\mathbf{C}) = \mathbf{i}_l \cdot \tilde{\mathbf{K}}_{jk}(\cdot,\mathbf{C})\,\mathbf{i}_m. \end{aligned} \tag{5.22}$$

Simetria scrisă în (15), în raport cu ultimii doi indici (pentru primii doi fixaţi), rezultă ca o consecinţă a proprietăţii i) din (21), $\tilde{\mathbf{K}}_{jk}(\cdot,\mathbf{C}) \in Sim$ şi a definiţiei

$(22)_3$ pentru $\tilde{\mathbf{K}}_{jklm}(s,\mathbf{C})$, ca fiind componentele $lm$ ale tensorilor simetrici (pentru fiecare pereche $jk$ fixată). Din $(19)_3$ rezultă şi simetria în prima pereche de indici (pentru a doua pereche fixată), scrisă în (15).

Din definiţiile produsului scalar a doi tensori (vezi anexa A1.) şi a câmpului tensorial de ordinul patru introdus în (22) deducem că

$$\tilde{\mathbf{K}}_{jk}(s,\mathbf{C})\cdot\mathbf{G}(s)\,\mathbf{i}_j\otimes\mathbf{i}_k=\tilde{\mathbf{K}}_{jklm}(s,\mathbf{C})G_{lm}(s)\,\mathbf{i}_j\otimes\mathbf{i}_k=\tilde{\mathbf{K}}(s,\mathbf{C})[\mathbf{G}(s)]. \quad (5.23)$$

Revenind în $(20)_2$ cu reprezentarea (23) se deduc atât forma (13) a diferenţialei operatorului constitutiv cât şi proprietăţile 1).

A mai rămas de arătat că are loc proprietatea 2). In ii) (21) explicităm modulul din integrant, cu utilizarea relaţiilor din (22). Astfel

$$\int_0^\infty h^2(s)\sum_{l,m=1}^{3}(\tilde{\mathbf{K}}_{jklm}(s,\mathbf{C}))^2ds<\infty.$$

Dacă se sumează acum după indicii $i,j$ rezultă convergenţa integralei scrisă în (16).

**Observaţia 3.** Din Teorema 1. şi definiţia diferenţiabilităţii Fréchet scrisă în (17) se obţine o *estimare* a tensiunii sub forma

$$\begin{aligned}&\mathbf{T}^{\mathbf{R}}(\mathbf{x},t)=f(\mathbf{C}(t))+\int_0^\infty h^2(s)\tilde{\mathbf{K}}(s,\mathbf{C})[\mathbf{G}(s)]ds+\omega(\mathbf{0},\mathbf{G};\mathbf{C})\quad \text{cu},\\ &\lim_{\mathbf{G}\to\mathbf{0}}\frac{\omega(\mathbf{0},\mathbf{G};\mathbf{C})}{\|\,\mathbf{G}\,\|_{(h)}}=0,\end{aligned} \quad (5.24)$$

dacă am utilizat reprezentarea constitutivă fundamentală (5) cu proprietatea $(5)_2$.

**Observaţia 4.** In clasa materialelor cu memorie întârziată este descrisă proprietatea fizică : starea de tensiune a corpului la momentul de timp $t$ este influenţată cu *o pondere mai mare* de istoria *recentă* a procesului de deformare, faţă de istoria avută în *trecutul îndepărtat.* Acest fapt este modelat prin introducerea funcţiei de influenţă, care *amortizează* efectul istoriei îndepărtate a procesului de deformare.

Pe baza principiului materialelor cu memorie întârziată, operatorul $\mathcal{F}$ poate fi *aproximat* printr-un operator *liniar pe istorii.* Eroarea tinde la zero mai repede decât $\|\,\mathbf{G}\,\|_{(h)}$ tinde la zero. In condiţii de regularitate suplimentară , dacă operatorul este diferenţiabil de ordinul al doilea într-o vecinătate a istoriei $\mathbf{G}=\mathbf{0}$, se poate aplica o formulă de evaluare a restului, dată de exemplu în Vainberg [1972].

Pe de altă parte putem asocia unei istorii date $\mathbf{G}$ o istorie *încetinită*, similar mişcărilor încetinite introduse în paragraful 3.4. Pentru fiecare $\alpha\in(0,1)$ definim $\mathbf{G}_\alpha(s)=\mathbf{G}(\alpha\, s)$ ,$\forall\, s\geq 0$. Dacă funcţia de influenţă $h$ are proprietatea suplimentară 3) $s^r h(r)\to 0$, *monoton* pentru $s$ mari, atunci $\lim\limits_{\alpha\to 0}\|\,\mathbf{G}_\alpha(\cdot)\,\|_{(h)}=0$ .

Curbele descrise de $\mathbf{G}$, $\mathbf{G}_\alpha$ in $Sim$ coincid pentru $s \in R_+$, dar pe istoriile încetinite *viteza* de parcurgere este mai mică. Rezultă că pe *mişcări lente* sau *încetinite* răspunsul materialului simplu *poate fi aproximat* prin termenul liniar pe istorii (vezi pentru demonstraţii Coleman, Noll [1960]).

## 5.2. Vâscoelasticitate liniară (pe istorii) cu deformaţii finite

Vom defini corpurile constituite dintr-un material *vâscoelastic liniar pe istorii*, pornind de la estimarea stării de tensiune, dată în formula (24) pentru un material care *satisface principiul materialelor cu memorie întârziată*, reţinând numai *termenii liniari pe istorii*. Dependenţa de istorie a operatorului constitutiv şi proprietăţile acestuia sunt cele ce au fost puse în evidenţă în paragraful anterior.

**Definiţia 2.** Spunem că un corp este constituit, într-o particulă a sa $X$, dintr-un material *vâscoelastic liniar* pe istorii, cu *deformaţii finite*, dacă admite o reprezentare constitutivă de forma

$$\mathbf{T}^{\mathbf{R}}(\mathbf{x},t) = f(\mathbf{C}(t)) + \int_0^\infty h^2(s)\tilde{\mathbf{K}}(s,\mathbf{C}(\mathbf{t}))[\mathbf{G}(s)]ds \tag{5.25}$$

pentru orice istorie $\mathbf{G} \in \mathcal{H}_{(h)}$, $: \forall s \geq 0$, cu $\mathbf{G}(s) \equiv (\mathbf{C}_t^t(s))^{\mathbf{R}} - \mathbf{I}$, iar $\tilde{\mathbf{K}}$, numit *nucleu de relaxare*, are proprietăţile

$$\begin{aligned}
&1)\ \tilde{\mathbf{K}}(s,\mathbf{C}) : Sim \longrightarrow Sim \quad \text{liniara} \iff \\
&\exists \quad \tilde{K}_{jklm}(s,\mathbf{C}) \in R, \quad \forall \quad j,k,l,m \in \{\overline{1,3}\} \quad \text{astfel încât} \\
&\tilde{\mathbf{K}}(s,\mathbf{C})[\mathbf{A}] = \tilde{K}_{jklm}(s,\mathbf{C})A_{lm}\, \mathbf{i}_j \otimes \mathbf{i}_k \quad \forall \mathbf{A} \in Sim,
\end{aligned} \tag{5.26}$$

cu simetriile

$$\tilde{K}_{jklm} = \tilde{K}_{kjlm} = \tilde{K}_{jkml} \quad \forall \quad j,k,l,m \in \{\overline{1,3}\} \tag{5.27}$$

$$\begin{aligned}
&2)\ \int_0^\infty h^2(s) \parallel \tilde{\mathbf{K}}(s,\mathbf{C}) \parallel_{(4)}^2 ds < \infty, \\
&\text{unde} \parallel \tilde{\mathbf{K}}(s,\mathbf{C}) \parallel_{(4)} = (\sum_{j,k,l,m=1}^{3} (\tilde{\mathbf{K}}_{jklm}(s,\mathbf{C}))^2)^{1/2}.
\end{aligned} \tag{5.28}$$

**Observaţia 5.** Reamintim că proprietăţile menţionate ale nucleului au fost deduse în (14) - (16), pentru termenul liniar pe istorii, în ipotezele formulate pentru materialele cu memorie întârziată, iar spaţiul funcţional $\mathcal{H}_{(h)}$ a fost definit prin Propoziţia 3. In obţinerea reprezentărilor constitutive pentru vâscoelasticitatea liniară pe istorii, nu au fost făcute ipoteze asupra *mărimii* tensorului $\mathbf{C}$, care intervine sub formă de parametru. Deci astfel de reprezentări sunt aplicabile pentru corpuri în care deformaţiile de la configuraţia de referinţă la cea actuală sunt *finite*.

Vom pune în evidenţă *semnificaţia mecanică a funcţiilor constitutive* din reprezentarea (25). Referitor la funcţia $f$, observăm că primul termen din (25)

$$\mathbf{T}^{\mathbf{R}}(\mathbf{x},t) = f(\mathbf{C}(t)), \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{T}(\mathbf{x},t) = \mathbf{R}(t)f(\mathbf{C}(t))\mathbf{R}^T(t)$$

corespunde unui reprezentări constitutive, sub formă redusă (dată în Propoziţia 16., formula (2.182)), pentru un corp constituit dintr-un material *elastic,* definit prin (2.180).

Vom considera istorii ale gradientului de deformaţie care corespund unor procese de *tip Heaviside*, prin care deformaţia în particula considerată suferă un *salt*, la un anumit moment de timp, de exemplu la $t = 0$, fiind apoi menţinută constantă.

**Propoziţia 4.** Fie un proces de deformare de *tip Heaviside*, definit prin

$$\mathbf{F}(\tau) = \begin{cases} \mathbf{F}_0 & \text{pentru} \quad \tau \geq 0, \\ \mathbf{I} & \text{pentru} \quad \tau < 0. \end{cases}$$

Au loc următoarele formule

$$1) \qquad \mathbf{G}(s) \equiv \mathbf{G}_{(t)}(s) = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{pentru} \quad s \in [0,t] \\ \mathbf{C}_0^{-1} - \mathbf{I} & \text{pentru} \quad s > t, \end{cases} \tag{5.29}$$

$$2) \quad \mathbf{G}_{(t)} \in \mathcal{H}_{(h)}, \quad (\| \mathbf{G} \|_{(h)})^2 = [\int_t^{\infty} h^2(s)ds]\,(\mathbf{C}_0^{-1} - \mathbf{I})^2, \tag{5.30}$$

$$3) \quad \lim_{t \longrightarrow \infty} \| \mathbf{G}_{(t)} \|_{(h)} = 0. \tag{5.31}$$

Istoria $\mathbf{G}(s)$ depinde de $t-$ valoarea curentă a timpului. Dacă este calculată valoarea acesteia pentru procesul de deformare de tip Heaviside se obţine reprezentarea din (29), în care apare explicit $t$ în membrul drept. Am menţionat explicit dependenţa de $t$ în notaţia din (29), deoarece ne interesează comportamentul istoriilor în raport cu parametrul $t$.

**Teorema de relaxare a tensiunii**. Dacă se consideră familia istoriilor de deformare de forma prescrisă în Propoziţia 4., atunci

$$\begin{aligned} &i) \quad \mathbf{T}^{\mathbf{R}}(\mathbf{x},t) = f(\mathbf{C}_0) + (\int_t^{\infty} h^2(s)\tilde{\mathbf{K}}(s,\mathbf{C}_0)ds)[\mathbf{C}_0 - \mathbf{I}], \\ &ii) \quad f(\mathbf{C}_0) = \lim_{t \longrightarrow \infty} \mathbf{T}^{\mathbf{R}}(\mathbf{x},t) = \mathbf{R}_0(\lim_{t \longrightarrow \infty} \mathbf{T}(\mathbf{x},t))\mathbf{R}_0^T, \end{aligned} \tag{5.32}$$

cu $\mathbf{F}_0 = \mathbf{R}_0\mathbf{U}_0$ şi $\mathrm{C}_0 = \mathbf{U}_0^2$.

**Demonstraţie.** Să observăm că prin construcţie aplicaţia

$$\mathbf{G} \in \mathcal{H}_{(h)} \quad \longrightarrow \quad \int_0^\infty h^2(s)\tilde{\mathbf{K}}(s, \mathbf{C}(\mathbf{t}))[\mathbf{G}(s)]ds \tag{5.33}$$

este continuă în $\mathbf{G} = \mathbf{0}$. Deoarece istoriile din Propoziţia 4. sunt elemente din $\mathcal{H}_{(h)}$ cu proprietatea $\lim\limits_{t\longrightarrow\infty} \| \mathbf{G}_{(t)} \|_{(h)} = 0$, rezultă că

$$\lim_{t\longrightarrow\infty} \int_0^\infty h^2(s)\tilde{\mathbf{K}}(s, \mathbf{C}(\mathbf{t}))[\mathbf{G}_{(t)}(s)]ds = 0. \tag{5.34}$$

In trecerea la limită considerată în (34) am folosit faptul că $\mathbf{F}(\tau) = \mathbf{F}_0$ pentru $\tau \geq 0$, deci şi pentru $\tau = t \geq 0$. Prin urmare $\mathbf{C}(t) = \mathbf{C}_0$ independent de timp şi $\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_0$.

Dacă în reprezentarea constitutivă (25) se consideră câmpurile introduse în Propoziţia 4., se deduce formula (32). Ca o consecinţă a relaţiei i) din (32) şi, prin trecere la limită , ca o consecinţă a formulei (34) se deduce ii).

**Observaţia 6.** Interpretarea mecanică a funcţiei $f$ se desprinde din Teorema de relaxare a tensiunii. $f(\mathrm{C}_0)$ reprezintă valoarea limită a tensiunii , rotite cu rotaţia $\mathbf{R}_0$, într-o experienţă în care deformaţia suportă un salt la momentul $t = 0$, de la valoarea $\mathbf{I}$ la valoarea $\mathbf{F}_0 = \mathbf{R}_0(\mathbf{C}_0)^{1/2}$, care este menţinută constantă un timp îndelungat.

Nucleul $\tilde{\mathbf{K}}$ descrie în general influenţa istoriei de deformaţie asupra stării curente a tensiunii, în particula considerată, iar pentru procese de tip Heaviside descrie *variaţia în timp* a tensiunii, aşa numita *relaxare* a tensiunii, prin formula i) (24). Menţionăm că aceasta este o proprietate specifică materialelor vâscoelastice. Corpurile elastice, fluidele Reiner - Rivlin, fluidele liniar vâscoase *nu prezintă proprietăţi* de relaxare a tensiunii.

**Definiţia 3.** Spunem că un corp $\mathcal{B}$ are *proprietăţi de relaxare* dacă are loc o *variaţie în timp* a tensiunii într-o experienţă în care deformaţia suferă un salt (la t=0 de exemplu) şi apoi este menţinută constantă pentru orice moment de timp $\tau > 0$.

Vom introduce un alt *nucleu de relaxare* , notat $\mathbf{K}$, care este o *funcţie de material.*

**Propoziţia 5.** Câmpul tensorial definit prin

$$\mathbf{K}(s, \mathbf{C}) = h^2(s)\tilde{\mathbf{K}}(s, \mathbf{C}) : Sim \longrightarrow Sim, \quad \text{liniară} \quad \forall s \geq 0, \quad \text{a.p.t.}, \tag{5.35}$$

are următoarele proprietăţi

1) $\mathbf{K}(s,\mathbf{C})[\mathbf{A}] = K_{jklm}(s,\mathbf{C})A_{lm}\,\mathbf{i}_j \otimes \mathbf{i}_k \quad \forall \mathbf{A} \in Sim$ cu simetriile,

$K_{jklm} = K_{kjlm} = K_{jkml} \quad \forall \quad j,k,l,m \in \{\overline{1,3}\},$

$$2) \quad \int_0^\infty h^{-2}(s)(\| \mathbf{K}(s,\mathbf{C}) \|_{(4)})^2 ds < \infty, \tag{5.36}$$

$$3) \quad \int_0^\infty \| \mathbf{K}(s,\mathbf{C}) \|_{(4)} ds < \infty,$$

4) $\exists \quad \int_0^\infty \mathbf{K}(s,\mathbf{C})ds : Sim \longrightarrow Sim$ liniară şi continuă,

5) $\forall \tau \in [0,+\infty) \quad \exists \quad f(\tau) = \int_\tau^\infty \mathbf{K}(s,\mathbf{C})ds \quad \in Lin(Sim,Sim) \equiv \mathcal{X},$

şi există $\dot{f}(\tau) \equiv -\mathbf{K}(\tau,\mathbf{C})$ a.p.t. cu, $\dot{f} \in L^1([0,+\infty),\mathcal{X})$

6) $f(t) = f(0) + \int_0^t \dot{f}(s)ds.$

Evident că funcţia $f$ definită prin 5) depinde de $\mathbf{C} \in Sim$, dar nu l-am mai menţionat.

**Demonstraţie**. 1) se obţine ca o consecinţă a proprietăţilor câmpului tensorial $\tilde{\mathbf{K}}(\cdot,\mathbf{C})$, listate în 1) din (14) şi (15).

2) Din proprietatea ii) din (21), rescrisă pentru noul câmp deducem că

$$\int_0^\infty h^2(s) \mid \tilde{\mathbf{K}}_{jk}(s,\mathbf{C}) \cdot \tilde{\mathbf{K}}_{jk}(s,\mathbf{C}) \mid ds =$$

$$= \int_0^\infty h^{-2}(s) \mid \mathbf{K}_{jk}(s,\mathbf{C}) \cdot \mathbf{K}_{jk}(s,\mathbf{C}) \mid ds = \int_0^\infty h^{-2}(s)(\| \mathbf{K}(s,\mathbf{C}) \|_{(4)})^2 ds < \infty.$$

3) Cum $h \in L^2([0,+\infty))$, aplicând inegalitatea lui Hölder rezultă

$$\int_0^\infty \| \mathbf{K}(s,\mathbf{C}) \|_{(4)} ds \leq$$
$$\left(\int_0^\infty h^2(s)ds\right)^{1/2}\left(\int_0^\infty (h^{-1}(s) \| \mathbf{K}(s,\mathbf{C}) \|_{(4)})^2 ds\right)^{1/2} < \infty,$$

unde am ţinut seama de 2) deja demonstrat.

4) Pentru $\mathbf{A} \in Sim$ fixat , functia $s \longrightarrow \mathbf{K}(s,\mathbf{C})[\mathbf{A}]$ pentru $s \in [0,+\infty)$ este măsurabilă, şi

$$\left| \int_0^\infty \mathbf{K}(s,\mathbf{C})[\mathbf{A}]ds \right| \leq \int_0^\infty | \mathbf{K}(s,\mathbf{C})[\mathbf{A}] | \, ds \leq$$

$$\leq \int_0^\infty \| \mathbf{K}(s,\mathbf{C}) \|_{(4)} | \mathbf{A} | \, ds.$$

Pentru demonstrarea estimării (37) am folosit majorarea

$$| \mathbf{K}(s,\mathbf{C})[\mathbf{A}] | \leq \| \mathbf{K}(s,\mathbf{C}) \|_{(4)} | \mathbf{A} |, \quad \forall \mathbf{A} \in Sim,$$

care este o consecinţă directă a definiţiilor normelor în $Lin$ şi $\| \cdot \|$ (16). Astfel rezultă că aplicaţia liniară

$$\forall \mathbf{A} \in Sim \quad \longrightarrow \quad \int_0^\infty \mathbf{K}(s,\mathbf{C})[\mathbf{A}]ds \quad \in Sim$$

există, deoarece are loc (37) pentru $\forall \mathbf{A} \in Sim$.

Pe de altă parte aplicaţia definită în (39) este şi continuă , deoar avem mărginirea aplicaţiei. Deci a fost demonstrată şi formula 4).

Prin demonstrarea punctului 4) am arătat deci că $\mathbf{K}(\cdot,\mathbf{C}) \in L^1($[ Cu tehnica standard rezultă existenţa funcţiei de variabilă $\tau$, intro proprietăţile acesteia.

Adoptăm în cele ce urmează

**Definiţia 4.** Aplicaţia $f : [0,+\infty) \longrightarrow \mathcal{X}$ cu $\mathcal{X}-$ spaţi numeşte *absolut continuă* dacă

$$\exists \quad \dot{f} \in L^1_{\mathrm{loc}}([0,+\infty),\mathcal{X}) \quad \text{astfel încât} \quad f(t) = f(0) + \int_0^t \dot{f}(s)$$

Deci $\dot{f}$ este integrabilă pe orice compact din $[0,+\infty)$.

Vom spune că funcţia $f$ absolut continuă este *tare* dacă este i $[0,+\infty)$. Notăm $f \in L^1([0,+\infty))$.

**Observaţia 7.** Funcţia introdusă în (36) la punctul 5)

$$f(\tau) = \int_\tau^\infty \mathbf{K}(s,\mathbf{C})ds \quad \in Lin(Sim,Sim) \equiv \mathcal{X}, \quad \forall \tau \in [0,+$$

are proprietatea că este absolut continuă, tare (în conformitate cu cu

$$\dot{f}(\tau) \equiv -\mathbf{K}(\tau,\mathbf{C}) \quad \text{a.p.t.}, \quad \dot{f} \in L^1([0,+\infty),\mathcal{X}).$$

**Observaţia 8.** Nucleul $\mathbf{K}$ introdus prin formula (35), are proprietăţile menţionate în Propoziţia 5., *mai slabe* decât proprietăţile nucleului $\tilde{\mathbf{K}}$. El permite o estimarea a tensiunii (vezi Observaţia 3., formula (24) ) sub forma

$$\mathbf{T}^{\mathbf{R}}(\mathbf{x},t) = f(\mathbf{C}(t)) + \int_0^\infty \mathbf{K}(s,\mathbf{C})[\mathbf{G}(s)]ds + \omega(\mathbf{0},\mathbf{G};\mathbf{C}), \tag{5.43}$$

cu $\lim\limits_{\mathbf{G}\to\mathbf{0}} \dfrac{\omega(\mathbf{0},\mathbf{G};\mathbf{C})}{\|\mathbf{G}\|_{(h)}} = 0.$

Observaţia 8. va sta la baza introducerii unei alte reprezentări constitutive pentru materiale vâscoelastice liniare (pe istorii), prin nucleul de relaxare $\mathbf{K}-$ integrabil, deci cu proprietăţi slăbite. Printr-un procedeu de liniarizare, din reprezentarea constitutivă (43) se desprinde o reprezentare constitutivă, *posibilă*, prin care se va defini un nou material.

**Definiţia 5.** Spunem că un corp este constituit, într-o particulă a sa $X$, dintr-un material *vâscoelastic liniar cu deformaţii finite*, dacă admite o reprezentare constitutivă de forma

$$\mathbf{T}(\mathbf{x},t) = \mathbf{R}(t)\{f(\mathbf{C}(t)) + \int_0^\infty \mathbf{K}(s,\mathbf{C}(\mathbf{t}))[\mathbf{G}(s)]ds\}\mathbf{R}^T(t), \tag{5.44}$$

unde istoria $\mathbf{G}(s) = (\mathbf{C}_t^t(s))^{\mathbf{R}} - \mathbf{I} \quad \forall s \geq 0,$ a fost definită în (4), şi $\mathbf{K}(\cdot,\mathbf{C}) : [0,+\infty) \longrightarrow Lin(Sim, Sim)$ numită *nucleu de relaxare*, are proprietăţile

$$a)\mathbf{K}(s,\mathbf{C})[\mathbf{A}] = K_{jklm}(s,\mathbf{C})A_{lm}\,\mathbf{i}_j \otimes \mathbf{i}_k, \quad K_{jklm} = K_{kjlm} = K_{jkml}, \tag{5.45}$$

pentru $\forall \quad j,k,l,m \in \{\overline{1,3}\}$ şi $\forall \mathbf{A} \in Sim$ şi

$$b) \quad \exists \quad \int_0^\infty \mathbf{K}(s,\mathbf{C})ds : Sim \longrightarrow Sim \quad \text{liniară şi continuă.}$$

Domeniul de definiţie al operatorului de tip integral introdus prin Definiţia 5. , în care nucleul de relaxare are proprietăţile menţionate, va fi precizat, astfel încât integrala să fie convergentă. Pentru exemplificare vezi exerciţiul 17.

## 5.3 Vâscoelasticitate liniară (pe istorii), izotropă, cu deformaţii finite

Fie $\mathcal{B}$ un corp vâscoelastic liniar (pe istorii), cu deformaţii finite caracterizat în particula $X$, în raport cu o configuraţie de referinta $k$, prin reprezentarea constitutivă (44), rescrisă în forma

$$\begin{aligned}\mathbf{T}(\mathbf{x},t) &= \mathbf{R}(t)\{f(\mathbf{C}(t)) + \int_0^\infty \mathbf{K}(s,\mathbf{C}(\mathbf{t}))[\mathbf{G}(s)]ds\}\mathbf{R}^T(t) \equiv \\ &\equiv \mathbf{R}(t)\mathcal{F}_1((\mathbf{C}_t^t(\cdot))^{\mathbf{R}},\mathbf{C}(t))\mathbf{R}^T(t),\end{aligned} \tag{5.46}$$

în care am menţionat că avem de fapt o reprezentare constitutivă particulară a formei reduse II, conform formulei (2). Afirmaţia este corectă, deoarece din (4) istoria $\mathbf{G}(s) = (\mathbf{C}_t^t(s))^{\mathbf{R}} - \mathbf{I}, \quad \forall s \geq 0,$.

Vom presupune că $\mathcal{B}$ este izotrop, în raport cu configuraţia $k$, deci conform Definiţiei 9., formula (2.66), $g_k(\mathbf{X}) \supset Ort$.

Vom demostra acum o teoremă de caracterizare.

**Teorema 2.** Dacă $\mathcal{B}$ este un corp vâscoelastic liniar (pe istorii), cu deformaţii finite, caracterizat prin (46), atunci el este izotrop în particula $X$ dacă şi numai dacă admite reprezentarea constitutivă

$$\mathbf{T}(\mathbf{x},t) = f(\mathbf{B}(t)) + \int_0^\infty \mathbf{K}(s,\mathbf{B}(\mathrm{t}))[\bar{\mathbf{G}}(s)]ds, \tag{5.47}$$

unde $\bar{\mathbf{G}}(s) = \mathbf{C}_t^t(s) - \mathbf{I} \quad \forall s \geq 0$. Funcţiile constitutive verifică, condiţiile de izotropie

$$\begin{aligned} &f(\mathbf{Q}\mathbf{B}(t)\mathbf{Q}^T) = \mathbf{Q}f(\mathbf{B}(t))\mathbf{Q}^T, \\ &\mathbf{K}(s,\mathbf{Q}\mathbf{B}\mathbf{Q}^T)[\mathbf{Q}\bar{\mathbf{G}}(s)\mathbf{Q}^T] = \mathbf{Q}\mathbf{K}(s,\mathbf{B})[\bar{\mathbf{G}}(s)]\mathbf{Q}^T, \end{aligned} \tag{5.48}$$

pentru $\forall \mathbf{Q} \in Ort, \quad \forall s \geq 0$, a.p.t. şi pentru orice istorie $\mathbf{F}^t$.

**Demonstraţia** utilizează condiţia necesară şi suficientă pentru ca o reprezentare constitutivă sub forma redusă II să descrie un corp izotrop (vezi Teorema 13., formulele (2.74) şi (2.75)). Prin aplicarea teoremei menţionate din (46) avem reprezentarea constitutivă

$$\mathbf{T}(\mathbf{x},t) = \mathcal{F}_1(\mathbf{C}_t^t(\cdot),\mathbf{B}(t)) \equiv f(\mathbf{B}(t)) + \int_0^\infty \mathbf{K}(s,\mathbf{B}(\mathrm{t}))[\bar{\mathbf{G}}(s)]ds, \tag{5.49}$$

cu condiţia de izotropie în ambele argumente (dedusă din (2.75))

$$f(\mathbf{Q}\mathbf{B}(t)\mathbf{Q}^T) + \int_0^\infty \mathbf{K}(s,\mathbf{Q}\mathbf{B}(\mathrm{t})\mathbf{Q})[\mathbf{Q}\bar{\mathbf{G}}(s)\mathbf{Q}^T]ds =$$

$$= \mathbf{Q}\{f(\mathbf{B}(t)) + \int_0^\infty \mathbf{K}(s,\mathbf{B}(\mathrm{t}))[\bar{\mathbf{G}}(s)]\, ds\}\mathbf{Q}^T,$$

pentru orice $\mathbf{Q} \in Ort$ unde $\bar{\mathbf{G}}(s) = \mathbf{C}_t^t(s) - \mathbf{I}, \quad \forall s \geq 0$.

Particularizăm istoria de deformaţie $\mathbf{F}^t$ la un proces care corespunde menţinerii locale a corpului nedeformat , faţă de configuraţia actuală (vezi (2. 98) din Propoziţia 5.), deci astfel încât $\mathbf{C}_t^t(s) = \mathbf{I} \quad \forall s \geq 0$, sau $\bar{\mathbf{G}}(s) = 0$, sau încă $\mathbf{U}(\tau) = \mathbf{U}(t), \quad \forall \tau \leq t$. Din $(49)_2$ rezultă izotropia funcţiei $f$. Revenind în (49) deducem că are loc egalitatea

$$\int_0^\infty \{\mathbf{K}(s,\mathbf{QBQ}^T)[\mathbf{Q}\bar{\mathbf{G}}(s)\mathbf{Q}^T] - \mathbf{QK}(s,\mathbf{B})[\bar{\mathbf{G}}(s)]\mathbf{Q}^T\}ds = 0, \tag{5.50}$$

pentru $\forall\, \mathbf{Q} \in Ort, \quad \forall\, \mathbf{F}^t$.

Datorită arbitrarului în alegerea $\mathbf{F}^t$, din (50) obţinem că are loc izotropia nucleului de relaxare în raport cu ambele argumente a.p. t. în $s$.

**Teorema 3.** Un *corp solid* constituit dintr-un material vâscoelastic, liniar pe istorii este *izotrop*, dacă şi numai dacă admite o reprezentare constitutivă de forma

$$\mathbf{T}(\mathbf{x},t) = f(\mathbf{B}(t)) + \int_0^\infty \mathbf{K}(s,\mathbf{B}(\mathbf{t}))[\bar{\mathbf{G}}(s)]\,ds\,, \quad \text{unde}$$

$$\begin{aligned} &a)\quad f(\mathbf{B}) = \varphi_0(j_\mathbf{B})\mathbf{I} + \varphi_1(j_\mathbf{B})\mathbf{B} + \varphi_2(j_\mathbf{B})\mathbf{B}^2\,, \\ &b)\quad \mathbf{K}(s,\mathbf{B})[\bar{\mathbf{G}}(s)] = \bar{\mathbf{G}}(s)\, f_1(s\,,\mathbf{B}) + f_1(s\,,\mathbf{B})\,\bar{\mathbf{G}}(s) + \\ &\qquad + \mathrm{tr}[\bar{\mathbf{G}}(s)\, f_2(s\,,\mathbf{B})]\,\mathbf{I} + \mathrm{tr}[\bar{\mathbf{G}}(s)\, f_3(s\,,\mathbf{B})]\,\mathbf{B} + \mathrm{tr}[\bar{\mathbf{G}}(s)\, f_2(s\,,\mathbf{B})]\,\mathbf{B}^2, \end{aligned} \tag{5.51}$$

în care $\{f_j\}$ $1 \le j \le 3$, sunt funcţii de $(s\,,\mathbf{B})$, izotrope în raport cu $\mathbf{B}$, cu valori tensori simetrici, deci reprezentabile sub forma a), cu funcţiile coeficienţi depinzând de $(s\,,j_\mathbf{B})$.

**Demonstraţia** decurge imediat prin aplicarea teoremelor lui Cauchy şi respectiv ale lui Wang [1970] de reprezentare a funcţiilor izotrope, cu valori tensori simetrici. Ţinem seama că $f$ prin (48) este funcţie izotropă de argument tensor simetric, deci are loc reprezentarea din teorema lui Cauchy, vezi anexa A2. Referitor la nucleul de relaxare utilizăm teorema lui Wang (scrisă în Teorema 4. formula (3.38) pentru materiale diferenţiale de ordinul doi), cu specificitatea cazului discutat, de a avea liniaritate în raport cu valorile curente ale istoriei $\mathbf{G}$ şi dependenţa de $s \in R_+$.

Reciproca este imediată.

**Teorema 4.** Fie un corp $\mathcal{B}$ constituit dintr-un material vâscoelastic, liniar pe istorii, cu deformaţii finite. Corpul este *fluid* în particula $X$ dacă şi numai dacă admite o reprezentare constitutivă de forma

$$\mathbf{T}(\mathbf{x},t) = -p(\rho)\mathbf{I} + \int_0^\infty [\gamma_0(s,\,\rho)\bar{\mathbf{G}}(s) + \mu_0(s,\,\rho)tr\,(\bar{\mathbf{G}}(s))\mathbf{I}]ds. \tag{5.52}$$

**Demonstraţie.** Conform Definiţiei 8., formula (2.65), pentru fluide grupul de simetrie $g_k$ al materialului în particula $X$, în raport cu configuraţia de referinţă $k$, este $Unim$. Prin urmare este izotrop şi admite reprezentarea din Teorema 3. In teorema fundamentală asupra fluidelor am arătat că dependenţa de $\mathbf{B}$ se transformă în dependenţă de $\rho$. Procedăm în mod similar (vezi formula (2.90)); pentru o istorie a gradientului de deformaţie dată construim

$$\mathbf{H} = \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{1/3}\mathbf{F}^{-1}(t) \in Unim. \tag{5.53}$$

Ştiind că răspunsul materialului simplu rămâne neschimbat, deci suportă aceeaşi tensiune pentru istoria $\mathbf{F}^t$ şi $\tilde{\mathbf{F}}^t \equiv \mathbf{F}^t\mathbf{H} \quad \forall \mathbf{H} \in Unim$, fixat , deducem, corespunzător formulelor (2.91), că

$$\tilde{\mathbf{C}}_t(\tau) = \mathbf{C}_t(\tau)\,, \quad \tilde{\mathbf{B}}(t) = \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{2/3}\mathbf{I} = (\det \mathbf{B}(t))^{1/3}\mathbf{I}. \tag{5.54}$$

Calculăm răspunsul materialui corespunzător istoriei $\tilde{\mathbf{F}}^t$. Valoarea funcţiei $f$, calculată din (51) cu (54), rezultă un tensor sferic, dependent de densitatea curentă, notat $-p(\rho)\mathbf{I}$, iar pentru nucleul de relaxare, calculat pentru $\tilde{\mathbf{B}}(t)$ dat în (54) se obţine formula (52).

**Observaţia 9.** Reprezentarea constitutivă din Teorema 4. reprezintă o particularizare a formulelor (2.86) din teorema fundamentală pentru fluide.

## 5.4 Vâscoelasticitate liniară, cazul deformaţiilor finite.

Vom liniariza reprezentarea constitutivă a materialelor vâscoelastice liniare (pe istorii) (introduse în Definiţia 2., formula (25)), în raport cu măsura de deformaţie $\mathbf{C}(t) \equiv \mathbf{C}$, în vecinătatea valorii $\mathbf{C} = \mathbf{I}$ (deci în vecinătatea configuraţiei iniţiale de referinţă).

Facem următoarele *ipoteze* :

i) Funcţia $\mathbf{C} \in Sim \longrightarrow f(\mathbf{C})$ este diferenţiabilă Fréchet in $\mathbf{I}$, deci

$$\begin{gathered}\exists\, D\,f(\mathbf{I}) : Sim \longrightarrow Sim \quad \text{liniară şi continuă} \quad \text{astfel încât,}\\ f(\mathbf{C}) = f(\mathbf{I}) + D\,f(\mathbf{I})[\mathbf{C}-\mathbf{I}] + \omega_1(\mathbf{I},\mathbf{C})\,, \quad \lim_{\mathbf{C}\to\mathbf{I}} \frac{\omega(\mathbf{I},\mathbf{C})}{|\,\mathbf{C}-\mathbf{I}\,|} = 0;\end{gathered} \tag{5.55}$$

ii) Funcţia $\mathbf{C} \in Sim \longrightarrow \tilde{\mathbf{K}}(s,\mathbf{C})$ este continuă în $\mathbf{C} = \mathbf{I}$, uniform în raport cu $s$.

Deci $\forall \;\; \epsilon > 0, \;\; \exists \;\; \delta_\epsilon > 0$ astfel încât $\|\, \tilde{\mathbf{K}}(s,\mathbf{C}) - \tilde{\mathbf{K}}(s,\mathbf{I}) \,\|_4 < \epsilon$ pentru $\forall \;\; \mathbf{C} : |\,\mathbf{C}-\mathbf{I}\,| < \delta_\epsilon, \;\; \forall \;\; s \in [0,+\infty)$.

Astfel din (25) se obţine următoarea *estimare a tensiunii*

$$\begin{aligned}\mathbf{T^R}(\mathbf{x},t) &= f(\mathbf{I}) + Df(\mathbf{I})[\mathbf{C}-\mathbf{I}] + \int_0^\infty h^2(s)\tilde{\mathbf{K}}(s,\mathbf{I})][\mathbf{G}(s)]ds + \\ &+ \int_0^\infty h^2(s)[\tilde{\mathbf{K}}(s,\mathbf{C}(\mathbf{t})) - \tilde{\mathbf{K}}(s,\mathbf{I})][\mathbf{G}(s)]ds + \omega_1(\mathbf{I},\mathbf{C}),\end{aligned} \tag{5.56}$$

în care s-au pus în evidență termenii liniari pe istorii, dar și terme raport cu $\mathbf{C} - \mathbf{I}$.

**Observația 10.** Vom da o estimare pentru valoarea penultimul (56), care decurge din calculele următoare

$$\left| \int_0^\infty h^2(s)[\tilde{\mathbf{K}}(s,\mathbf{C}(\mathbf{t})) - \tilde{\mathbf{K}}(s,\mathbf{I})][\mathbf{G}(s)]ds \right| \leq$$

$$\leq \int_0^\infty h^2(s) \parallel [\tilde{\mathbf{K}}(s,\mathbf{C}(\mathbf{t})) - \tilde{\mathbf{K}}(s,\mathbf{I})] \parallel_4 | [\mathbf{G}(s)] | ds$$

$$\leq \left( \int_0^\infty h^2(s)(\parallel [\tilde{\mathbf{K}}(s,\mathbf{C}(\mathbf{t})) - \tilde{\mathbf{K}}(s,\mathbf{I})] \parallel_4)^2 ds \right)^{1/2} \times$$

$$\times \left( \int_0^\infty h^2(s) \, | [\mathbf{G}(s)] |^2 \, ds \right)^{1/2} \leq \epsilon \parallel \mathbf{G} \parallel_{(h)} \left( \int_0^\infty h^2(s)\right.$$

pentru orice $\mathbf{C}$ cu $| \mathbf{C} - \mathbf{I} | < \delta_\epsilon$.

Introducem următoarele notații

$$\mathbf{T}_0 \equiv f(\mathbf{I}) \in Sim, \quad L_0 \equiv Df(\mathbf{I}) : Sim \longrightarrow Sim, \quad \text{liniară și conti}$$

$$\mathbf{K}_0 : [0,+\infty) \longrightarrow Lin(Sim, Sim) \quad \text{definită prin} \quad \mathbf{K}_0(s) = h^2(s)\tilde{\mathbf{K}}$$

pentru orice $s \in [0,+\infty)$.

Forma *liniarizată* obținută în estimarea tensiunii, găsită în (. definiția care urmează.

**Definiția 6.** Spunem că un corp este constituit, într-o particulă a un material *liniar vâscoelastic, cu deformații finite*, dacă admite o constitutivă de forma

$$\mathbf{T}(\mathbf{x},t) = \mathbf{R}(t)\{\mathbf{T}_0 + 2\mathrm{L}_0[\mathbf{E}(\mathbf{t})] + \int_0^\infty \mathbf{K}_0(s)[\mathbf{G}(s)]ds\}\mathbf{R}^T(t)$$

cu $\mathbf{T}_0$, $\mathrm{L}_0$, $\mathbf{K}_0$, definiți prin formulele (58), tensorul de deformație $2\mathbf{E}(\mathbf{t}) = \mathbf{C}(\mathbf{t}) - \mathbf{I}$, iar istoria $\mathbf{G}(s) = (\mathbf{C}_t^t(s))^{\mathbf{R}} - \mathbf{I}$.

Tensorul simetric $\mathbf{T}_0$ are semnificație de tensiune inițială, deoar pul este menținut nedeformat ($\mathbf{C}(\mathbf{t}) = \mathbf{I}, \mathbf{C}_t^t(s) = \mathbf{I}$) în configurația s atunci $\mathbf{T}^{\mathbf{R}}(\mathbf{x},t) = \mathbf{T}_0$. Prezența celui de-al doilea termen are semnif portament liniar elastic , în timp ce $\mathbf{K}_0$ este un nucleu de relaxare de deformația curentă.

Vom prezenta în continuare o justificare posibilă pentru forma constitutive a corpurilor constitutite din materiale *liniar vâscoelasi deformații infinitizimale sau mici.*

## 5.5 Vâscoelasticitate liniară, cazul deformaţiilor infinitezimale

### 5.5.1 Reprezentări constitutive în vâscoelasticitatea liniară

Pornim de la reprezentarea constitutivă pentru corpuri constituite din materiale liniare vâscoelastice cu deformaţii finite (59) şi introducem *ipoteza* că, corpul suportă numai *deformaţii infinitezimale, sau mici.*

Folosim formulele de aproximare, introduse în paragraful 1.6, pentru cazul deformaţiilor infinitezimale, pentru tensorii de deformaţie ( $(82)_1, (82)_5$, $(83)_4$)

$$\begin{aligned} &\mathbf{R}(t) \simeq \mathbf{I} + \omega(t) = \mathbf{I} + O(\delta)\,, \quad \mathbf{E}(\mathbf{t}) \simeq \epsilon(t), \\ &\mathbf{G}(s) = (\mathbf{C}_t(\tau))^{\mathbf{R}} \equiv \mathbf{R}^T(t)\mathbf{C}_t(\tau)\mathbf{R}(t) \simeq 2[(\epsilon(\tau) - \epsilon(t))]\,, \quad \tau = t - s. \end{aligned} \tag{5.60}$$

Dacă le introducem în (59) şi ţinem seama de ordinul lor de mărime în raport cu $\delta$ deducem că

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) \; &= \mathbf{T}_0 + \omega(t)\mathbf{T}_0 - \mathbf{T}_0\omega(t) + 2\,\mathrm{L}_0[\epsilon(t)] + \\ &+2\int_0^\infty \mathbf{K}_0(s)[\epsilon(t-s) - \epsilon(t)]ds + O(\delta^2). \end{aligned} \tag{5.61}$$

Vom utiliza proprietăţile nucleului de relaxare $\mathbf{K}_0$, menţionate anterior. Din $(36)_5$ scrisă pentru $\mathbf{C} = \mathbf{I}$, rezultă că (61) admite reprezentarea

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) \; &= \mathbf{T}_0 + \omega(t)\mathbf{T}_0 - \mathbf{T}_0\omega(t) + 2\left(\mathrm{L}_0 - \int_0^\infty \mathbf{K}_0(s)ds\right)[\epsilon(t)] + \\ &+2\int_0^\infty \mathbf{K}_0(s)[\epsilon(t-s)] + O(\delta^2). \end{aligned} \tag{5.62}$$

In conformitate cu Observaţia 7. rezultă că *există* aplicaţia absolut continuă, definită prin

$$\mathbf{M}_0(\tau) = -2\int_\tau^\infty \mathbf{K}_0(s)ds \quad \in Lin(Sim, Sim) \equiv \mathcal{X} \quad \forall \tau \in [0, +\infty), \tag{5.63}$$

cu $\quad \mathbf{M}_0(0) = -2\displaystyle\int_0^\infty \mathbf{K}_0(s)ds$. Deci

$$\begin{aligned} &\dot{\mathbf{M}}_0(\tau) \equiv 2\mathbf{K}_0(\tau) \quad \text{a.p.t.} \quad \dot{\mathbf{M}}_0 \in L^1([0, +\infty), \mathcal{X}) \quad \text{şi} \\ &\mathbf{M}_0(\tau) = \mathbf{M}_0(0) + \int_0^\tau \dot{\mathbf{M}}_0(s)ds \quad \in Lin(Sim, Sim). \end{aligned} \tag{5.64}$$

Cu noul nucleu $\mathbf{M}_0$, definit în (63), rescriem pe (62)

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) \; &= \mathbf{T}_0 + \omega(t)\mathbf{T}_0 - \mathbf{T}_0\omega(t) + \left(2\mathrm{L}_0 + \mathbf{M}_0(0)\right)[\epsilon(t)] + \\ &+\int_0^\infty \dot{\mathbf{M}}_0(s)[\epsilon(t-s)] + O(\delta^2). \end{aligned} \tag{5.65}$$

**Observaţia 11.** Să observăm că aplicaţia $\mathbf{M}(\tau) = \mathbf{M}_0(\tau) + 2\,L_0$ are proprietăţile nucleului $\mathbf{M}_0$, cu deosebirea că la momentul $t = 0$ are o altă valoare.

In final am obţinut o nouă reprezentare pentru (65) prin intermediul nucleului absolut continuu $\mathbf{M}$ :

$$\mathbf{T}(t) = \mathbf{T}_0 + \omega(t)\mathbf{T}_0 - \mathbf{T}_0\omega(t) + \mathbf{M}(0)[\epsilon(t)] + \int_0^\infty \dot{\mathbf{M}}(s)[\epsilon(t-s)] + O(\delta^2). \quad (5.66)$$

Suntem în măsură să dăm următoarea definiţie

**Definiţia 7.** Spunem că un corp este constituit, într-o particulă a sa $X$, dintr-un material *liniar vâscoelastic, cu deformaţii infinitezimale* , *cu tensiuni iniţiale* (în configuraţia sa de referinţă), dacă admite o reprezentare constitutivă de forma

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{T}_0 + \omega(t)\mathbf{T}_0 - \mathbf{T}_0\omega(t)\mathbf{M}(0)[\epsilon(t)] + \int_0^\infty \dot{\mathbf{M}}(s)[\epsilon(t-s)]ds, \quad (5.67)$$

cu $\mathbf{T}_0 \in Sim$, iar nucleul $\mathbf{M}$ absolut continuu, are proprietăţile

$$\begin{aligned} &\mathbf{M} : [0, +\infty) \longrightarrow Lin(Sim, Sim), \\ &\mathbf{M}(s)[\mathbf{A}] = M_{jklm}(s)A_{lm}\,\mathbf{i}_j \otimes \mathbf{i}_k, \text{ cu } M_{jklm} = M_{kjlm} = M_{jkml}. \end{aligned} \quad (5.68)$$

Dacă nucleul este definit pe $[0, +\infty)$ şi este o funcţie absolut continuă, spunem că este un nucleu *tare.*

Tensorul micilor deformaţii şi tensorul spin sunt definiţi în (1.78)- (1.80) prin partea simetrică şi respectiv partea antisimetrică a gradientului deplasării

$$\epsilon(t) \equiv \epsilon(\mathbf{u})(t) = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u}(t) + \nabla^T\mathbf{u}(t))\,, \quad \omega(t) = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u}(t) + \nabla^T\mathbf{u}(t)). \quad (5.69)$$

**Observaţia 12.** Să remarcăm că în cazul existenţei tensiunilor iniţiale reprezentarea constitutivă depinde de *istoria tensorului micilor deformaţii*, dar şi de *valoarea curentă a gradientului de deplasare, prin spinul elastic.* Tensorul simetric $\mathbf{T}_0$ reprezintă valoarea tensiunii în corp care corespunde menţinerii lui nedeformat, deci cu $\epsilon(\tau) = 0, \quad \forall\, \tau \in R_+$.

**Definiţia 8.** Modelul constitutiv pentru materialul *liniar vâscoelastic, cu deformaţii infinitezimale* , *fără tensiuni iniţiale*, este descris prin

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{M}(0)[\epsilon(t)] + \int_0^\infty \dot{\mathbf{M}}(s)[\epsilon(t-s)]ds. \quad (5.70)$$

Remarcăm că în acest caz starea de tensiune este determinată numai prin istoria până la momentul $t$ a părţii simetrice a gradientului de deplasare.

Vom pune în evidenţă *semnificaţia mecanică* a nucleului $\mathbf{M}$.

**Propoziţia 6.** Fie un corp vâscoelastic liniar cu deformaţii infinitezimale , supus la un proces de deformaţie de tip Heaviside

$$\epsilon(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{pentru} \quad \tau < 0, \\ \tilde{\epsilon}(\tau) & \text{pentru} \quad \tau \geq 0. \end{cases} \tag{5.71}$$

Starea de tensiune corespunzătoare, pentru $t \geq 0$, se exprimă prin

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{M}(0)[\tilde{\epsilon}(t)] + \int_0^t \dot{\mathbf{M}}(s)[\tilde{\epsilon}(t-s)]ds. \tag{5.72}$$

**Demonstraţia** este imediată dacă observăm că $\tau = t - s < 0$ este echivalent cu $s > t$ deci $\epsilon(t-s) = 0$, pentru $s > t$.

**Propoziţia 7.** Fie o experienţă de *relaxare*, definită printr-un proces de deformaţie de tip Heaviside , dat în (71) cu $\tilde{\epsilon}(\tau) = \epsilon_0$. Nucleul $\mathbf{M}$ caracterizează *variaţia în timp a tensiunii* în experienţa de relaxare, deoarece

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{M}(t)[\epsilon_0]. \tag{5.73}$$

**Demonstraţia** este o consecinţă a relaţiei (64) şi a faptului că, din (72), pentru $t > 0$ rezultă

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{M}(0)[\epsilon_0] + \Big( \int_0^t \dot{\mathbf{M}}(s)ds\Big)[\epsilon_0] \equiv \mathbf{M}(t)[\epsilon_0].$$

### 5.5.2 Vâscoelasticitate liniară şi izotropă

In cazul deformaţiilor finite, pornind de la definiţia corpului constituit dintr-un material izotrop am *dedus* condiţii necesare şi sufiente pe care trebuie să le satisfacă operatorul constitutiv, pentru ca grupul de simetrie al materialului $g_k(\mathbf{X})$ în raport cu configuraţia $k$ de referinţă să includă mulţimea transformărilor ortogonale.

In cazul deformaţiilor infinitezimale conceptul de câmp obiectiv îşi pierde sensul. De exemplu în aproximările făcute ( vezi formulele (1.82) din Propoziţia 15), tensorii de deformaţie $\mathbf{B}(t)$ (care este *obiectiv*) ş i $\mathbf{C}(t)$ (care este invariant), coincid cu $\simeq \mathbf{I} + 2\epsilon(t)$.

Prin urmare vom *postula condiţia de izotropie* a operatorului constitutiv, *obţinută din definiţie* în cazul deformaţiilor finite.

**Definiţia 9.** Modelul constitutiv pentru materialul *liniar vâscoelastic, cu deformaţii infinitezimale , fără tensiuni iniţiale*, reprezentat prin (70) este *izotrop* dacă şi numai dacă

$$
\begin{aligned}
\mathbf{Q}\{\mathbf{M}(0)[\epsilon(t)] & + \int_0^\infty \dot{\mathbf{M}}(s)[\epsilon(t-s)]ds\}\mathbf{Q}^T = \\
& = \mathbf{M}(0)[\mathbf{Q}\epsilon(t)\mathbf{Q}^T] + \int_0^\infty \dot{\mathbf{M}}(s)[\mathbf{Q}\epsilon(t-s)\mathbf{Q}^T]ds,
\end{aligned}
\tag{5.74}
$$

pentru $\mathbf{Q} \in Ort$, şi pentru orice valoare a tesorului de deformaţie $\epsilon(\tau)$.

**Teorema de reprezentare pentru corpul vâscoelastic liniar, cu deformaţii infinitezimale şi izotrop.** Un corp vâscoelastic liniar este izotrop dacă şi numai dacă există două funcţii scalare, absolut continue $\lambda$ şi $\mu$ astfel încât nucleul $\mathbf{M}$ se reprezintă sub forma

$$\mathbf{M}(s)[\mathbf{A}] = \lambda(s)\,\mathrm{tr}\,\mathbf{A}\,\mathbf{I} + 2\,\mu(s)\,\mathbf{A} \quad \forall\, s \in [0,+\infty), \quad \forall\, \mathbf{A} \in Sim, \tag{5.75}$$

sau pe componente, într-o bază carteziană fixată

$$M_{jklm}(s) = \lambda(s)\,\delta_{jk}\delta_{lm} + \mu(s)\,(\delta_{jl}\delta_{km} + \delta_{jm}\delta_{kl}), \tag{5.76}$$

pentru $\forall\, j,k,l,m \in \{\overline{1,3}\}$.

Deci reprezentarea constitutivă (70) se scrie sub forma

$$\mathbf{T}(t) = \lambda(0)\mathrm{tr}\,\epsilon(t)\mathbf{I} + 2\mu(0)\epsilon(t) + \int_0^\infty \big(\dot{\lambda}(s)\mathrm{tr}\,\epsilon(t-s)\,\mathbf{I} + 2\dot{\mu}(s)\epsilon(t-s)\big)ds, \tag{5.77}$$

numită *reprezentarea lui Boltzmann.*

**Demonstraţie.** Considerăm experienţa de relaxare definită printr-un proces de deformaţie de tip Heaviside , dat în (71) cu $\tilde{\epsilon}(\tau) = \epsilon_0$ fixat , dar arbitrar. In Propoziţia 7. am arătat că răspunsul materialului se exprimă sub forma (73). In relaţia de definiţie a corpului izotrop (74) introducem deformaţia menţionată, de unde va rezulta că

$$\mathbf{M}(t)[\mathbf{Q}\epsilon_0\mathbf{Q}^T] = \mathbf{Q}\mathbf{M}(t)[\epsilon_0]\mathbf{Q}^T \quad \forall \epsilon_0 \in Sim\,, \quad \forall t \in R\,. \tag{5.78}$$

Deci pentru $\forall s \in [0,+\infty)$ $\mathbf{M}(s) : Sim \longrightarrow Sim$ este liniară şi izotropă, prin urmare din teorema de reprezentare pentru funcţii izotrope (vezi anexa A2), rezultă reprezentarea menţionată. Funcţiile scalare au aceleaşi proprietăţi de regularitate ca şi funcţia $\mathbf{M}(s)$.

Funcţiile $\lambda$ şi $\mu$ carcterizează *proprietăţile de relaxare* ale corpului, $\mu-$ în experienţe de *forfecare* , iar $3\lambda + 2\mu-$ într-o experienţă de *compresiune/ dilatare volumică.*

**Propoziţia 8.** Reprezentarea constitutivă a lui Boltzmann, (77), este echivalentă cu o reprezentare *decuplată* în partea *deviatorică* şi *sferică*

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{T}'(\mathbf{x},t) = 2\mu(0)\epsilon'(t) + 2\int_0^\infty \dot{\mu}(s)\epsilon'(t-s)ds, \\
&\mathrm{tr}\,\mathbf{T}(\mathbf{x},t) = (3\lambda(0) + 2\mu(0))\mathrm{tr}\,\epsilon(t) + \int_0^\infty (3\dot{\lambda}(s) + 2\dot{\mu}(s))\mathrm{tr}\,(\epsilon(t-s))ds,
\end{aligned}
\tag{5.79}
$$

cu definiţia clasică pentru deviatorul unui tensor : $\epsilon' = \epsilon - (1/3)\mathrm{tr}\,(\epsilon)\mathbf{I}$.

### 5.5.3 Legi ereditare. Legi de relaxare şi fluaj

In Definiţia 8. a fost introdusă reprezentarea constitutivă pentru materialul *liniar văscoelastic, cu deformaţii infinitezimale , fără tensiuni iniţiale.*

**Renotăm** nucleul de relaxare $\mathbf{M} \equiv \mathbf{G}$, iar tensorul micilor deformaţii, $\epsilon$ prin $\mathbf{E}$.

Dacă nucleul $\mathbf{G} : [0, +\infty) \longrightarrow Lin(Sim, Sim)$ este presupus funcţie absolut continuă, cu $\dot{\mathbf{G}}$ integrabilă pe $[0, +\infty)$, conform Definiţiei 4., spunem că este un nucleu de relaxare *tare.*

Presupunem că $\mathcal{B}$ este constituit dintr-un material vâscoelastic liniar, caracterizat pritr-o reprezentare constitutivă ( cu un *nucleu de relaxare, tare*), dată în (70) sub forma

$$\mathbf{T}(t) = \mathbf{G}(0)[\mathbf{E}(t)] + \int_0^\infty \dot{\mathbf{G}}(s)[\mathbf{E}(t-s)]ds \equiv \mathcal{L}_G(\mathbf{E})(t), \tag{5.80}$$

pentru $\forall t > 0$.

Reprezentarea constitutivă este numită şi *lege ereditară de relaxare*, *lege vâscoelastică de relaxare*, sau *reprezentare integrală de tip relaxare.*

**Definiţia 10.** Spunem că un corp $\mathcal{B}$ este *văscoelastic de tip relaxare* dacă admite o reprezentare constitutivă de forma (80) şi un corp $\mathcal{B}$ este *vâscoelastic de tip fluaj* dacă admite o reprezentare constitutivă de forma

$$\mathbf{E}(t) = \mathbf{J}(0)[\mathbf{T}(t)] + \int_0^\infty \dot{\mathbf{J}}(s)[\mathbf{T}(t-s)]ds \equiv \mathcal{L}_J^*(\mathbf{T})(t). \tag{5.81}$$

Aici $\mathbf{J} : [0, +\infty) \longrightarrow Lin(Sim, Sim)$ este o funcţie absolut continuă, cu simetriile din (68) şi defineşte un nucleu *de fluaj, tare.*

**Observaţia 13.** Vom considera în domeniile de definiţie, pentru (81), procese de tip Heaviside, deci $\mathbf{T}(\tau) = 0 \quad \forall\, \tau < 0$ . Atunci reprezentarea constitutivă devine

$$\mathbf{E}(t) = \mathbf{J}(0)[\mathbf{T}(t)] + \int_0^t \dot{\mathbf{J}}(s)[\mathbf{T}(t-s)]ds \equiv \mathcal{L}_J^*(\mathbf{T})(t). \tag{5.82}$$

Se pune **problema determinării condiţiilor** în care un corp *vâscoelastic de tip relaxare* poate fi caracterizat, în acelaşi timp, drept un corp *vâscoelastic de tip fluaj.* Prezentăm o teoremă datorată lui Gurtin şi Sternberg [1962].

**Teorema 5.** Fiind dată o lege *vâscoelastică de tip relaxare* $\mathcal{L}_G$ cu un nucleu $\mathbf{G}-$ tare, există o lege *vâscoelastică de tip fluaj* $\mathcal{L}_J^*$ dacă şi numai dacă

$$\begin{aligned} &\mathbf{G}(0)\mathbf{J}(0) = \mathbf{I}_4, \\ &\mathbf{G}(0)\dot{\mathbf{J}}(t) + \dot{\mathbf{G}}(t)\mathbf{J}(0) + (\dot{\mathbf{G}} * \dot{\mathbf{J}})(t) = 0 \quad a.p.t., \end{aligned} \tag{5.83}$$

unde produsul de convoluţie din (83) este definit prin

$$(\dot{\mathbf{G}} * \dot{\mathbf{J}})(t) = \int_0^t \dot{\mathbf{G}}(s)\dot{\mathbf{J}}(t-s)ds, \tag{5.84}$$

iar $\mathbf{I}_4$ reprezintă identitatea în spaţiul tensorilor de ordinul patru.

**Demonstraţie.** Vom demonstra că (83) sunt condiţii necesare. Fie procesul de deformare definit prin legea de tip fluaj (81)

$$\mathbf{E} = \mathcal{L}_J^*(\mathbf{T}) \quad \text{astfel încât} \quad \mathbf{T} = \mathcal{L}_G(\mathbf{E}), \tag{5.85}$$

pentru $\forall\, \mathbf{T}$ de tip Heaviside , din domeniul de definiţie pentru $\mathcal{L}_J^*$.

Rescriem condiţia (85) prin intermediul reprezentărilor (80) şi (81) sub forma

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(t) \; &= \mathbf{G}(0)[\mathbf{J}(0)\mathbf{T}(t)] + \mathbf{G}(0)\int_0^\infty \dot{\mathbf{J}}(s)[\mathbf{T}(t-s)]ds + \\ &+ \int_0^\infty \dot{\mathbf{G}}(s)\mathbf{J}(0)[\mathbf{T}(t-s)]ds + \int_0^\infty \dot{\mathbf{G}}(s)\{\int_0^t \dot{\mathbf{J}}(u)[\mathbf{T}(t-s-u)]du\}ds \end{aligned} \tag{5.86}$$

şi folosim Observaţia 13. Aplicând o teoremă de tip Foubini se rescrie (86) într-o formă echivalentă

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(t) \; &= (\mathbf{G}(0)\mathbf{J}(0))[\mathbf{T}(t)] + \\ &+ \int_0^t \{\mathbf{G}(0)\dot{\mathbf{J}}(s) + \dot{\mathbf{G}}(s)\mathbf{J}(0) + (\dot{\mathbf{G}} * \dot{\mathbf{J}})(s)\}[\mathbf{T}(t-s)]ds. \end{aligned} \tag{5.87}$$

Deoarece relaţia este adevărată pentru orice proces $\mathbf{T}$ deducem (vezi Ex. 18. şi Propoziţia 7.) că, prin alegerea $\mathbf{T} = \mathbf{T}_0 h$, cu $h$ funcţia lui Heaviside , din (87) se obţine

$$\mathbf{T}_0 = (\mathbf{G}(0)\mathbf{J}(0))\mathbf{T}_0 \quad \forall\, \mathbf{T}_{\cdot 0} \in Sim \tag{5.88}$$

Astfel $\mathbf{G}(0)\mathbf{J}(0) = \mathbf{I}_4$ ,deci se obţine prima condiţie din (83).

Dacă introducem pe (88) în (87) avem

$$\int_0^t \{\mathbf{G}(0)\dot{\mathbf{J}}(s) + \dot{\mathbf{G}}(s)\mathbf{J}(0) + (\dot{\mathbf{G}} * \dot{\mathbf{J}})(s)\}[\mathbf{T}(t-s)]ds = 0. \tag{5.89}$$

Deoarece istoria $\mathbf{T}^t(s) = \mathbf{T}(t-s) \quad \forall s \geq 0$ este arbitrară obţinem că integrantul este nul, cu alte cuvinte avem şi a doua relaţie din (83) demonstrată.

**Reciproca** se obţine imediat urmând raţionamente similare bazate pe formula (86).

**Observaţia 14.** Din condiţia $(83)_1$ a rezultat că, în mod necesar pentru ca un corp vâscoelastic descris printr-o lege de tip relaxare să admită şi o reprezentare de tip fluaj trebuie ca valoarea la momentul iniţial a nucleului de relaxare $\mathbf{G}(0)$ să fie inversabilă , ca tensor de ordinul 4. Deci, în mod necesar, există $\mathbf{G}(0)^{-1} \equiv \mathbf{J}(0)$.

**Observaţia 15.** Condiţia $(83)_2$ , ca o consecinţă a primei condiţii, se va rescrie sub forma

$$\begin{aligned} &\mathbf{V}(s) = \mathbf{U}(s) - (\mathbf{V} * \mathbf{U})(s) \quad a.p.t.\, s \in R_+ \quad \text{unde,} \\ &\mathbf{U}(s) = \dot{\mathbf{J}}(s)(\mathbf{J}(0))^{-1}, \quad \mathbf{V}(s) = -(\mathbf{G}(0))^{-1}\dot{\mathbf{G}}(s). \end{aligned} \tag{5.90}$$

Deoarece $\mathbf{G}$ este un nucleu *tare* rezultă că $\mathbf{V} : [0, +\infty) \longrightarrow Lin(Sim, Sim)$ este *integrabilă* pe $R_+$.

Se pot formula condiţiile în care ecuaţia integrală (90) admite soluţie unică.

**Teorema 6.** Fiind dată o reprezentare de tip relaxare *există* o unică lege de tip *fluaj* asociată, dacă

$$\| \mathbf{V} \|_1 = \int_0^\infty | \mathbf{V}(s) | \, ds < 1 , \quad \text{cu} \quad \mathbf{V}(s) = -(\mathbf{G}(0))^{-1}\dot{\mathbf{G}}(s).$$

**Demonstraţie.** Ca o consecinţă a Teoremei 5. este suficient să demonstrăm că ecuaţia integrală din $(90)_1$, rescrisă sub forma

$$\mathbf{U}(t) = \mathbf{V}(t) + \int_0^t \mathbf{V}(t-s)\mathbf{U}(s)\, ds, \tag{5.91}$$

admite o soluţie unică. Soluţia ecuaţiei (91) se determină prin metoda aproximaţiilor succesive

$$\begin{aligned} &\mathbf{U}_0(t) = \mathbf{V}(t), \\ &\mathbf{U}_{k+1}(t) = \mathbf{V}(t) + \int_0^t \mathbf{V}(t-s)\mathbf{U}_k(s)\, ds \equiv \sum_{p=1}^{k+2} \underbrace{\mathbf{V} * \ldots * \mathbf{V}}_{p}(t), \quad \forall k \geq 0. \end{aligned} \tag{5.92}$$

Seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(V * \ldots * V)}_{n}, \tag{5.93}$$

este convergentă în $L^1(R_+)$, deoarece

$$\| \sum_{n=1}^{k} \underbrace{(V * \ldots * V)}_{p} \|_1 < \sum_{n=1}^{k} \| (V * \ldots * V) \|_1^p \leq \frac{\| \mathbf{V} \|_1}{1 - \| \mathbf{V} \|_1}$$

şi prin ipoteză $\| \mathbf{V} \|_1 < 1$.

Din (92) cu demonstrarea convergenţei seriei (93) rezultă că $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(V * \ldots * V)}$ este soluţie a ecuaţiei integrale (91).

Unicitatea se deduce imediat. Dacă presupunem că $\exists$ $\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2$ soluţii distincte pentru (91). Deci

$$\mathbf{U}_j(t) = \mathbf{V}(t) + \int_0^t \mathbf{V}(t-s)\mathbf{U}_j(s)\, ds$$

cu j =1,2. Atunci

$$\bar{\mathbf{U}}(t) - (\mathbf{V} * \bar{\mathbf{U}})(t) = 0 \tag{5.94}$$

pentru $\bar{\mathbf{U}} = \mathbf{U}_1 - \mathbf{U}_2 \neq 0$. Evaluând normele în $L^1(R_+)$ din (94) obţinem că

$$\| \bar{\mathbf{U}} \|_1 \leq \| \mathbf{V} \|_1 \| \bar{\mathbf{U}} \|_1 \quad \text{cu} \quad \| \bar{\mathbf{U}} \|_1 \neq 0$$

Rezult că $\| \mathbf{V} \|_1 \geq 1$, ceea ce contrazice ipoteza că $\| \mathbf{V} \|_1 < 1$.

Incheiem cu observaţia că nu orice reprezentare vâscoplastică de tip relaxare poate fi privită ca o reprezentare de tip fluaj. Această problemă va fi discutată prin câteva exemple în cazul reprezentărilor unidimensionale.

Există o bogată literatură dedicată problematicii materialelor vâscoelastice liniare, cu deformaţii infinitezimale, formulari de probleme mecanice şi modalităţi de abordare. Trimitem pentru un studiu aprofundat şi pentru informaţii bibliografice la Gurtin, Sternberg [1962], Leitman, Fisher [1974], Kecs, Teodorescu [1975].

### 5.5.4 Problema cu date iniţiale şi la limită pentru materiale vâscoelastice liniare

Fie $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ domeniu mărginit , cu $n = 2$ sau $n = 3$ şi $\partial\Omega$ frontiera sa. Să se determine câmpurile de *deplasare* şi de *tensiuni*

$$\mathbf{u} : \Omega \times R \longrightarrow \mathbf{R}^3,$$

$$\mathbf{T} : \Omega \times R \longrightarrow Sim \equiv \mathbf{R}^6,$$

cu $\mathbf{u}(\cdot, \tau) = 0$ , $\mathbf{T}(\cdot, \tau) = 0$ pentru $\forall\, \tau < 0$ , care verifică în $\Omega$, pentru $\forall \quad t \in [0, t_1)$ ecuaţiile de mişcare

$$\operatorname{div} \mathbf{T}(\mathbf{X}, t) + \rho_0 \mathbf{b}(\mathbf{X}, t) = \rho_0 \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t), \tag{5.95}$$

reprezentarea constitutivă pentru materiale vâscoelastice

$$\mathbf{T}(\mathbf{X},t) = \mathbf{M}(0)[\epsilon(t)] + \int_0^t \dot{\mathbf{M}}(s)[\epsilon(t-s)]ds,$$

relaţiile geometrice

$$\epsilon(\mathbf{X},t) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u}(\mathbf{X},t) + \nabla^T \mathbf{u}(\mathbf{X},t)),$$

condiţiile pe frontiera domeniului

$$\mathbf{u}(\mathbf{X},t) \mid_{\Gamma_1} = \mathbf{g}(\mathbf{X},t),$$

$$\mathbf{T}(\mathbf{X},t)\mathbf{n}(\mathbf{x}) \mid_{\Gamma_2} = \mathbf{f}(\mathbf{X},t),$$

(unde $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ ) şi condiţiile iniţiale

$$\mathbf{u}(\mathbf{X},0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{X}), \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\mathbf{X},0) = \dot{\mathbf{u}}_0(\mathbf{X}) \quad \forall\, \mathbf{X} \in \Omega.$$

In Duvaut, Lions [1972] sunt demonstrate, cu tehnici de inegalităţi variaţionale, teoreme de existenţă şi uicitate pentru problemele dinamice şi staţionare. Sunt prezentate problemele în cadrul constitutiv al vâscoelasticităţii liniare, pentru *materiale cu memorie de lungă durată* sub forma (70). Se consideră şi cazul materialelor cu *memorie de scurtă durată*, descrise constitutiv prin

$$\mathbf{T}(\mathbf{X},t) = \mathbf{A}_0\, \epsilon(\mathbf{X},t) + \mathbf{A}_1\, \dot{\epsilon}(\mathbf{X},t), \tag{5.96}$$

în care $\mathbf{A}_0$ , $\mathbf{A}_1$ sunt tensorii de ordinul 4, care generalizează, la cazul tridimensional, reprezentarea de tip diferenţial asociată modelului unidimensional Kelvin-Voigt ((132) din paragraful 5.6.2).

In formulările *statice* membrul drept din (95) este zero şi nu se mai asociază condiţii iniţiale.

## 5.6 Modele vâscoelastice unidimensionale

### 5.6.1 Echivalenţa reprezentărilor de tip diferenţial şi integral

In acest paragraf vom demonstra, într-o variantă proprie, câteva dintre rezultatele principale prezentate de Gurtin şi Sternberg [1962], care pun în evidenţă condiţiile în care avem echivalenţa între reprezentări constitutive de tip integral, de tip Boltzmann, şi reprezentări de tip diferenţial. Ne plasăm în cadrul teoriei corpurilor vâscoelastice liniare, cazul deformaţiilor infinitezimale şi vom considera procese unidimensionale.

Exemple de reprezentări constitutive de tip diferenţial şi modalităţile de determinare ale acestora, în cazul stărilor de tensiune şi de deformaţie unidimensionale, vor fi prezentate şi discutate în paragraful următor 5.6.2. Se vor pune în evidenţă rezultatele discutate în acest paragraf.

Forma reprezentărilor de tip integral este dedusă din reprezentările constitutive de tip Boltzmann, tridimesionale, (77) în ipoteza că starea de deformaţie este descrisă printr-o istorie a procesului de deformare în care variază o singură componentă, celelalte fiind nule. Ca răspuns materialul va suporta o tensiune cu o singură componentă nenulă, dacă se consideră că până la un anumit moment, $t = 0$, tensiunea şi deformaţia sunt nule.

Rezultatele discutate în acest paragraf se pot extinde pentru materiale vâscoelastice liniare şi izotrope, având în vedere că se produce o decuplare (vezi formula (79) din Propoziţia 8.) în descrierea comportamentului de forfecare de cel de tip dilatare/compresiune.

**Reprezentări constitutive de tip diferenţial**

Fie operatorii de tip diferenţial (sau polinoame de tip diferenţial) :

$$P(D) = \sum_{k=0}^{N} p_k \frac{d^k}{dt^k} \text{ şi } Q(D) = \sum_{k=0}^{N} q_k \frac{d^k}{dt^k}, \text{ cu } p_k,\, q_k \in R.$$

**Definiţia 11.** Spunem că perechea de operatori diferenţiali este de *ordinul* $N$, dacă $p_N \neq 0$ sau $q_N \neq 0$. Notăm o perechea de operatori diferenţiali de ordinul N prin $[P(D), Q(D)]_N$

Dacă $p_N \neq 0$, atunci perechea este de tip *relaxare*, iar dacă $q_N \neq 0$, atunci perechea este de tip *fluaj*.

Amintim că în clasa proceselor de tip Heaviside a fost introdusă clasa

$$H^N = \{\phi : R \longrightarrow R \mid \phi(\tau) = 0 \quad \forall \tau < 0\,, \quad \phi\,|_{[0,+\infty)} \in C^N([0,+\infty))\} \tag{5.97}$$

**Definiţia 12.** Fie perechea de operatori diferenţiali de ordinul N $[P(D), Q(D)]_N$.

Spunem ca perechea $(\sigma,\, \epsilon) \in H^N \times H^N$ satisface reprezentarea constitutivă de tip diferenţial dacă

$$\begin{gathered} P(D)\,\sigma = Q(D)\epsilon \quad \Longleftrightarrow \\ \sum_{k=0}^{N} p_k\, \sigma^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^{N} q_k\, \epsilon^{(k)}(t) \quad \forall\, t > 0 \end{gathered} \tag{5.98}$$

Unde am folosit notaţia

$$\sigma^{(k)}(t) \equiv \frac{d^k\,\sigma}{dt^k}(t) \tag{5.99}$$

**Definiţia 13.** Fie $\sigma, \epsilon \in H^N$. Prin definiţie perechea $(\sigma,\, \epsilon)$ satisface *condiţiile de racordare a datelor iniţiale*, dacă datele iniţiale sunt legate prin relaţiile

$$\sum_{r=k}^{N} p_r\, \sigma^{(r-k)}(0) = \sum_{r=k}^{N} q_r\, \epsilon^{(r-k)}(0) \quad \forall\, k \in \{\overline{1, N}\} \tag{5.100}$$

**Definiţia 14.** Pentru procese unidimensionale o reprezentare constitutivă *de tip integral* este dată prin

$$\sigma(t) = G(0)\, \epsilon(t) + \int_0^t \dot{G}(\tau)\, \epsilon(t-\tau) d\tau \equiv \mathcal{L}_G(\epsilon)(t) \tag{5.101}$$

$\forall\, t > 0$, unde $G$ este nucleul *de relaxare*,

sau este dată sub forma

$$\epsilon(t) = J(0)\, \sigma(t) + \int_0^t \dot{J}(\tau)\, \sigma(t-\tau) d\tau \equiv \mathcal{L}_J(\sigma)(t) \tag{5.102}$$

$\forall\, t > 0$, unde $J$ este nucleul de *fluaj*.

**Observaţia 16.** In ipoteza că $G \in H^1$ şi respectiv $J \in H^1$ atunci reprezentările constitutive sunt bine definite pentru procesele $\epsilon$ si respectiv $\sigma \in H^0$. Reprezentarea (101) se va numi de tip *relaxare*, iar (102) se va numi de tip *fluaj*.

Notam prin $h-$ funcţia lui Heaviside

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă} \quad x < 0 \\ 1 & \text{dacă} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

**Propoziţia 9.** Dacă $(\sigma, \epsilon)$, cu $\epsilon = h$ satisface reprezentarea de tip integral (101) , atunci $\sigma = G$.

**Demonstraţia** este imediată.

**Observaţia 17.** Rezultă că nucleul de relaxare $G$ reprezinta *variaţia în timp a tensiunii*, într-o experienţa în care *deformaţia este menţinută constantă* la o valoare egală cu unitatea , de la momentul $t = 0$. Deci facem o experienţă de *relaxare*.

**Teorema 7.** Fie o reprezentare constitutivă de tip integral $\sigma = \mathcal{L}_G(\epsilon)$, în care

$$\begin{aligned} &a) \quad G \in H^N, \\ &b) \quad \exists\, q_0,\, p_r \in R,\ 0 \leq r \leq N, \quad p_N \neq 0, \quad \text{astfel încât} \\ &c) \quad P(D)\, G = q_0 \end{aligned} \tag{5.103}$$

Dacă perechea $(\sigma, \epsilon) \in H^N \times H^N$ satisface reprezentarea integrala $\sigma = \mathcal{L}_G(\epsilon)$ atunci

1) $(\sigma, \epsilon)$ va satisface reprezentarea diferenţială

$$\begin{aligned} &P(D)\, \sigma = Q(D)\epsilon \quad \text{cu,} \\ &q_k = \sum_{r=k}^{N} p_r\, G^{(r-k)}(0) \quad k \in \{\overline{1, N}\}; \end{aligned} \tag{5.104}$$

2) $(\sigma, \epsilon)$ satisfac *condiţiile de racordare a datelor iniţiale* (100).

**Demonstraţie.** 1) Pornim de la reprezentarea integrală (101) scrisă sub forma echivalentă

$$\sigma(t) = G(t)\,\epsilon(0) + \int_0^t G(t-\tau)\,\epsilon^{(1)}(\tau)d\tau \quad \forall t > 0. \tag{5.105}$$

Calculăm derivatele de ordinul $n \geq 1$ ale funcţiei $\sigma$ exprimată cu ajutorul funcţiei $\epsilon \in H^N$ prin intermediul relaţiei (105). Prin inducţie se demonstrează formula de calcul

$$\sigma^{(n)}(t) = G^{(n)}(t)\,\epsilon(0) + \sum_{l=1}^{n} G^{(n-l)}(0)\,\epsilon^{(l)}(t) + \int_0^t G^{(n)}(t-\tau)\,\epsilon^{(1)}(\tau)d\tau, \tag{5.106}$$

pentru orice $n$ care verifică condiţiile $1 \leq n \leq N$.

Folosind formulele din (106) calculăm $P(D)\,\sigma$ la momentul $t > 0$ fixat

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} p_n\,\sigma^{(n)}(t) &= \Big(\sum_{n=0}^{N} p_n G^{(n)}(t)\Big)\,\epsilon(0) + \sum_{n=1}^{N}\sum_{l=1}^{n} p_n G^{(n-l)}(0)\,\epsilon^{(l)}(t) + \\ &+ \int_0^t \sum_{n=0}^{N} p_n\,G^{(n)}(t-\tau)\,\epsilon^{(1)}(\tau)d\tau = \\ &= q_0\,\epsilon(0) + \sum_{n=1}^{N}\sum_{l=1}^{n} p_n G^{(n-l)}(0)\,\epsilon^{(l)}(t) + q_0\,(\epsilon(t) - \epsilon(0))\end{aligned} \tag{5.107}$$

Ultima egalitate este o consecinţa a faptului că nucleul din reprezentarea integrală este de o formă particulară, mai precis este o soluţie pentru ecuaţia diferenţiala scrisă în ipoteza c).

In (107) apare o sumă dublă, după un număr finit de indici. Efectuăm schimbarea ordinii de sumare şi deducem egalităţile

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}\sum_{l=1}^{n} p_n G^{(n-l)}(0)\,\epsilon^{(l)}(t) &= \sum_{l=1}^{N}\Big(\sum_{n=l}^{N} p_n G^{(n-l)}(0)\Big)\epsilon^{(l)}(t) = \\ &= \sum_{l=1}^{N} q_l\,\epsilon^{(l)}(t) \equiv Q(D)\,\epsilon(t).\end{aligned} \tag{5.108}$$

De data aceasta am introdus, prin intermediul relaţiilor (104), constantele $q_k$, $1 \leq k \leq N$, care se definesc prin constantele $p_n$ introduse în ipoteza b) şi prin *condiţiile iniţiale* asociate lui $G$, funcţie dată prin ipoteză, cu proprietăţile menţionate.

2) Vrem să demonstrăm că rezultă condiţia de racordare a condiţiilor iniţiale, (100), pe care o scriem într-o formă echivalentă

$$\sum_{n=0}^{N-k} p_{n+k}\, \sigma^{(n)}(0) = \sum_{n=0}^{N-k} q_{n+k}\, \epsilon^{(n)}(0) \quad \forall\, k \in \{\overline{1,N}\} \tag{5.109}$$

care se obţine prin translaţia $r - k = n$, pentru fiecare k fixat.

In membrul stâng al formei (109) apar derivatele $\sigma^{(n)}(0)$, care pot fi obţinute ca o consecinţă a reprezentării de tip integral, acceptată în ipoteză. Din formula (106), prin trecere la limită, $t \searrow 0$, deducem următoarele relaţii între condiţiile iniţiale pentru perechea $(\sigma, \epsilon)$ considerată

$$\begin{aligned} &\sigma^{(n)}(0) = G^{(n)}(0)\, \epsilon(0) + \sum_{l=1}^{n} G^{(n-l)}(0)\, \epsilon^{(l)}(0) \quad \forall\, n : 1 \le n \le N, \\ &\sigma(0) = G(0)\, \epsilon(0). \end{aligned} \tag{5.110}$$

Pe de altă parte să remarcăm că în membrul drept al formulei (109) apar constantele $q_k$, $k \in \{\overline{1,N}\}$, introduse prin $(104)_2$ pe care le rescriem, efectuînd translaţia indicelui de sumare $r - k = n$, pentru fiecare $k$ fixat. Relaţiile $(104)_2$ devin

$$q_k = \sum_{n=0}^{N-k} p_{n+k}\, G^{n}(0) \quad k \in \{\overline{1,N}\}. \tag{5.111}$$

Calculăm suma din membrul stâng al relaţiei (109), prin intermediul relaţiilor (110), punând în evidenţă termenii care conţin derivatele de ordin zero, adică valorile funcţiilor calculate în $t = 0$. Astfel

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-k} p_{n+k}\, \sigma^{(n)}(0) &= p_k G(0)\epsilon(0) + \sum_{n=1}^{N-k} p_{n+k}\, G^{(n)}(0)\, \epsilon(0) + \\ &+ \sum_{n=1}^{N-k} p_{n+k} \sum_{l=1}^{n} G^{(n-l)}(0)\, \epsilon^{(l)}(0). \end{aligned} \tag{5.112}$$

Coeficientul lui $\epsilon(0)$ este tocmai $q_k$, conform relaţiei (111). In celălalt grup de termeni vom schimba din nou ordinea de sumare

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-k} p_{n+k}\, \sigma^{(n)}(0) &= q_k\epsilon(0) + \sum_{l=1}^{N-k} \Big( \sum_{n=l}^{N-k} p_{n+k} G^{(n-l)}(0) \Big)\, \epsilon^{(l)}(0) = \\ &= q_k\epsilon(0) + \sum_{l=1}^{N-k} \Big( \sum_{m=0}^{N-(l+k)} p_{m+(l+k)} G^{(m)}(0) \Big)\, \epsilon^{(l)}(0). \end{aligned}$$

In ultima egalitate am schimbat indicele de sumare $n$ prin $m$ legaţi prin relaţia $n-l=m$, pentru fiecare $l$ fixat. Folosim încă o dată relaţiile (111) de definiţie a constantelor $q_r$ pentru $r \in \{\overline{1,N}\}$ şi rescriem relaţia anterioară astfel

$$\sum_{n=0}^{N-k} p_{n+k}\,\sigma^{(n)}(0) = q_{(k)}\epsilon(0) + \sum_{l=1}^{N-k} q_{k+l}\,\epsilon^{(l)}(0).$$

Aceasta reprezintă relaţia (109) care este echivalentă cu condiţia de racordare a datelor iniţiale.

Vom demonstra acum Teorema 8. care este o reciprocă a anterioarei.

**Teorema 8.** Fie reprezentarea diferenţială (98)

$$P(D)\,\sigma = Q(D)\,\epsilon \quad \text{cu} \quad N > 1,$$

cu condiţiile iniţiale racordate prin relaţiile (100).

Fie $G \in H^N$ soluţia ecuaţiei diferenţiale de ordinul $N$

$$P(D)\,G = q_0\,, \tag{5.113}$$

care satisface condiţiile iniţiale

$$G(0) = \frac{q_1}{p_1}, \tag{5.114}$$

dacă $N=1$, sau

$$\begin{aligned} G(0) &= \frac{q_N}{p_N}, \\ G^{(r)}(0) &= \frac{1}{p_N}[q_{N-r} - \sum_{n=0}^{r-1} p_{N-r+n}\,G^{(n)}(0)] \quad \forall\, r \in \{\overline{1,N-1}\} \end{aligned} \tag{5.115}$$

dacă $N > 1$.

Dacă $(\sigma,\,\epsilon) \in H^N \times H^N$ verifică reprezentarea de tip diferenţial (98) şi condiţiile iniţiale racordate (100), atunci $(\sigma,\,\epsilon)$ verifică reprezentarea integrală (101), deci pentru $\forall\, t > 0$

$$\sigma(t) = G(0)\,\epsilon(t) + \int_0^t \dot{G}(\tau)\,\epsilon(t-\tau)d\tau\,.$$

**Demonstraţie**. Fie o pereche $(\sigma,\,\epsilon) \in H^N \times H^N$ care verifică reprezentarea (98), cu condiţiile iniţiale racordate (100).

Cu funcţia de deformaţie $\epsilon \in H^N$ din perechea anterioară construim funcţia

$$\theta(t) = G(0)\,\epsilon(t) + \int_0^t \dot{G}(\tau)\,\epsilon(t-\tau)d\tau, \tag{5.116}$$

definită pentru $\forall t > 0$ , în care nucleul $G$ este soluţia problemei Cauchy (113) cu (114), sau respectiv (115).

Am obţinut o pereche $(\theta, \epsilon) \in H^N \times H^N$ care verifică reprezentarea integrală (101) , conform relaţiei (116).

Dacă arătăm că $\theta = \sigma$ obţinem afirmaţia din enunţul teoremei.

Vom utiliza în mod esenţial Teorema 7. Pentru aceasta vom arăta că din condiţiile iniţiale pentru funcţia $G$, (114), sau respectiv (115), se deduc relaţiile între $q_k$, $p_n$ şi derivatele funcţiei $G$, până la ordinul $N-1$, inclusiv, calculate în $t = 0$.

Pentru $N > 1$ relaţiile (115) sunt echivalente cu

$$q_N = G(0)p_N \quad \text{şi}$$

$$q_{N-r} = p_N\, G^{(r)}(0) + \sum_{n=0}^{r-1} p_{N-r+n}\, G^{(n)}(0) \quad \forall\, r \in \{\overline{1, N-1}\}, \tag{5.117}$$

sau dacă schimbăm indicele $r$ în $k$ prin relaţia $k = N - r$ ,

$$q_N \;= G(0)p_N \quad \text{şi}$$

$$q_k \;= p_N\, G^{(N-k)}(0) + \sum_{n=0}^{N-(k+1)} p_{k+n}\, G^{(n)}(0) \quad \forall\, k \in \{\overline{1, N-1}\}. \tag{5.118}$$

Comparăm (118) cu (104) şi constatăm că acestea sunt identice, dacă schimbăm indicele $n$ de sumare cu $r$ prin relaţia $r = n + k$, pentru fiecare valoare a lui $k$, fixată. Astfel (118) devine

$$q_N = G(0)p_N \quad \text{şi}$$

$$q_k = p_N\, G^{(N-k)}(0) + \sum_{r=k}^{N-1} p_r\, G^{(r-k)}(0) \equiv \sum_{r=k}^{N} p_r\, G^{(r-k)}(0) \quad \forall\, k \in \{\overline{1, N-1}\},$$

ceea ce este echivalent cu (104).

Astfel putem aplica Teorema 7. perechii $(\theta, \epsilon) \in H^N \times H^N$ care verifică reprezentarea integrală (101) (în care nucleul $G$ este soluţia Problemei Cauchy (113), (115)), deoarece conform celor demonstrate anterior condiţia (104) este satisfăcută.

Rezultă că $(\theta, \epsilon)$ verifică reprezentarea de tip diferenţial (104) şi condiţia de racordare a datelor iniţiale (100). Deci

$$P(D)\, \theta = Q(D)\, \epsilon,$$

$$\sum_{r=k}^{N} p_r\, \theta^{(r-k)}(0) = \sum_{r=k}^{N} q_r\, \epsilon^{(r-k)}(0) \quad \forall\, k \in \{\overline{1, N}\}.$$

Reamintim că perechea $(\theta, \epsilon)$ a fost construită cu procesul de deformaţie $\epsilon$, dintr-o pereche $(\sigma, \epsilon)$ care satisfăcea enunţul teoremei (adică (98) şi (100)).

Introducem funcţia $x = \theta - \sigma$ care satisface

$$\begin{gathered} P(D)x(t) \equiv \sum_{k=0}^{N} p_k x^{(k)}(t) = 0, \\ \sum_{r=k}^{N} p_r\, x^{(r-k)}(0) = 0 \quad \forall\, k \in \{\overline{1,N}\}. \end{gathered} \tag{5.119}$$

Vom arăta că din $(119)_2$ obţinem condiţiile iniţiale nule pentru funcţia $x$. Pentru demonstraţie particularizăm succesiv valorile lui $k$ în $(119)_2$.

Fie $k = N$ atunci $p_N\, x(0) = 0$, deci $x(0) = 0$ deoarece $p_N \neq 0$.

Fie acum $k = N-1$ atunci $p_N x^{(1)}(0) + p_{N-1} x(0) = 0$ cu $x(0) = 0$. Vom obţine deci şi $x^{(1)}(0) = 0$. Prin recurenţă deducem că $x^{(r)}(0) = 0$, cu $r = 0, \dots, N-2$. Din $(119)_2$, scrisă pentru $k = 1$, rezultă că $p_N\, x^{(N-1)}(0) = 0$. Deoarece $p_N \neq 0$ avem şi ultima condiţie iniţială $x^{(N-1)}(0) = 0$.

Am arătat că funcţia $x = \theta - \sigma$ este soluţia ecuaţiei diferenţiale liniare, omogene $(119)_1$, cu coeficienţi constanţi, de ordinul $N$ şi, în plus, satisface condinţii iniţiale nule , $x^{(j)}(0) = 0$, pentru $j \in \{\overline{0, N-1}\}$. Din unicitatea soluţiei Problemei Cauchy formulate obţinem $x = \theta - \sigma \equiv 0$. Rezultă deci coincidenţa celor două funcţii $\theta = \sigma$ definite pentru $\forall t > 0$. Astfel am arătat că perechea $(\sigma, \epsilon)$ este legată prin reprezentarea integrală (101).

**Teorema 9.** Presupunem că reprezentările de tip integral şi diferenţial sunt echivalente, în sensul că $\forall(\sigma, \epsilon)$ care verifică reprezentarea de tip integral (101), verifică şi reprezentarea de tip diferenţial (98) pentru $t > 0$ şi reciproc.

Atunci *nucleul de relaxare* $G$ este soluţie pentru ecuaţia diferenţială cu coeficienţi constanţi

$$P(D)\, G = q_0. \tag{5.120}$$

**Demonstraţie.** Presupunem că avem o pereche care satisface reprezentarea de tip integral. Fie aceasta $(G, h)$, conform Propoziţiei 9. Atunci satisface şi reprezentarea de tip diferenţial pentru $t > 0$. Deoarece $h \in H^N$ cu $h(t) = 1, \dots,$ $h^{(k)}(t) = 0$, pentru $\forall\, t > 0$, şi $\forall\, k \geq 1$, număr natural, obţinem că $P(D)\, G = Q(D)\, h \equiv q_0$, pentru $\forall\, t > 0$.

**Observaţia 18.** Reprezentările de tip integral (de tip relaxare) şi cele de tip diferenţial pot fi echivalente, conform Teoremei 9. numai dacă *nucleele de relaxare*, care caracterizează reprezentările de tip integral sunt date de *soluţiile unor ecuaţii diferenţiale cu coeficienţi constanţi*, generate de polinoamele diferenţiale.

In general reprezentările de tip diferenţial şi integral *nu sunt echivalente.*

In cele ce urmează vom aduce argumente pentru înţelegerea *condiţiei de racordare a datelor iniţiale*, care a fost asociată reprezentării de tip diferenţial.

Pentru aceasta vom avea nevoie de introducerea *transformării Laplace.*

**Definiţia 15.** Spunem că o funcţie $f : [0, +\infty) \longrightarrow \mathcal{X}$ cu $\mathcal{X} = R$ sau $\mathbf{C}$ este un element în $O(exp(s_0\, t))$, $s_0 \in R$, pentru $t \to +\infty$ dacă $\mid f(t) \mid \leq M exp(s_0\, t)$ pentru $t \to +\infty$.

**Definiţia 16.** Transformata Laplace pentru funcţia $f : [0, +\infty) \longrightarrow \mathcal{X}$ este

$$\mathcal{L}(f)(s) \equiv \bar{f}(s) = \int_0^\infty exp(s\, t)\, f(t) dt \quad \forall\, s \in \mathbf{C} \quad \text{cu} \quad Re(s) > s_0. \qquad (5.121)$$

Pentru utilizarea celor două definiţii, în cadrul prezentat aici, este suficient să considerăm funcţiile $f \in H^N \cap O(exp(s_0\, t))$ pentru $t \to +\infty$

**Observaţia 19.** Transformata Laplace pentru funcţiile cu proprietăţile anterioare există în semiplanul complex definit prin $\{s \in \mathbf{C} \mid Re(s) > s_0\}$.

Amintim două rezultate privind calculul transformatelor Laplace

1) pentru derivata unei funcţii

$$\mathcal{L}(f^{(1)})(s) = -f(0) + s\, \mathcal{L}(f^{(1)})(s)$$

şi 2) pentru produsul de convoluţie a două funcţii ( $h(t) \equiv \int_0^t G(t-\tau) g(\tau) dt$),

$$\mathcal{L}(h)(s) = \mathcal{L}(G)(s)\, \mathcal{L}(g)(s) \quad \forall\, s \in \mathbf{C} \quad \text{cu} \quad Re(s) > s_0\, .$$

Aici $s_0 = \max(s_1, s_2)$ dacă $G \in O(exp(s_1 t))$ şi $g \in O(exp(s_2 t))$ pentru $t \to +\infty$.

**Teorema 10.** Presupunem că reprezentarea de tip integral (101)

$$\sigma(t) = G(0)\, \epsilon(t) + \int_0^t \dot{G}(\tau)\, \epsilon(t-\tau) d\tau \equiv \mathcal{L}_G(\epsilon)(t), \qquad (5.122)$$

$\forall\, t > 0$ este echivalentă cu o reprezentare de tip diferenţial (98)

$$\sum_{k=0}^N p_k\, \sigma^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^N q_k\, \epsilon^{(k)}(t) \quad \forall\, t > 0. \qquad (5.123)$$

Atunci $(\bar{\sigma}, \bar{\epsilon})$, transformatele Laplace ale perechii $(\sigma, \epsilon)$, care satisface reprezentările (122) şi respectiv (123), sunt astfel încât au loc simultan (124) şi (125), scrise mai jos

$$\bar{\sigma}(s) = s\, \bar{G}(s)\, \bar{\epsilon}(s) \quad \forall\, s \in \mathbf{C}, \quad \text{cu} \quad Res > s_0 \qquad (5.124)$$

şi

$$P(s)\, \bar{\sigma}(s) - \frac{1}{s} \sum_{n=1}^N s^n \{\sum_{k=n}^N p_k\, \sigma^{(k-n)}(0) - \sum_{k=n}^N q_k\, \epsilon^{(k-n)}(0)\} = Q(s)\, \bar{\epsilon}(s), \ (5.125)$$

unde $P(s)=\sum_{k=0}^{N} p_k\, s^k$ şi respectiv $Q(s)=\sum_{k=0}^{N} q_k\, s^k$ sunt polinoamele în variabilă complexă $s\in\mathbf{C}$, generate de polinoamele diferenţiale care definesc reprezentarea (123).

**Demonstraţie.** Presupunem că $\sigma, \epsilon,\, G\in H^N\cap O(exp(s_0 t))$, pentru $t\to+\infty$ .

Fie reprezentarea de tip integral (122) scrisă într-o formă echivalentă, (105). Ii vom aplica transformarea Laplace, ţinând seama de liniaritatea ei şi de proprietăţile menţionate în Observaţia 19. Deducem că

$$\mathcal{L}(\sigma)(s)=\mathcal{L}(G)(s)\,\epsilon(0)+\mathcal{L}(G)(s)\,\mathcal{L}(\epsilon^{(1)})(s)\equiv s\,\mathcal{L}(G)(s)\mathcal{L}(\epsilon)(s).$$

Deci am dedus formula (124).

Pe de altă parte, aplicăm transformata Laplace reprezentării de tip diferenţial. Din liniaritatea transformării şi formula de calcul 1), aplicată recurent, deducem că transformata Laplace a membrului stâng este

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(P(D)\,\sigma)(s)&=\sum_{k=0}^{N} p_k\,\mathcal{L}(\sigma^{(k)})(s)=\\ &=\sum_{k=0}^{N} p_k\, s^k\mathcal{L}(\sigma)(s)-\sum_{k=1}^{N} p_k\sum_{r=0}^{k-1} s^r\,\sigma^{(k-1-r)}(0).\end{aligned}\tag{5.126}$$

In a doua sumă schimbăm indicele de sumare $r$ în $n$ definit prin relaţia $n=r+1$ şi obţinem că

$$\frac{1}{s}\sum_{k=1}^{N} p_k\sum_{n=1}^{k} s^n\,\sigma^{(k-n)}(0)=\frac{1}{s}\sum_{n=1}^{N} s^n\Big(\sum_{k=n}^{N} p_k\,\sigma^{(k-n)}(0)\Big),\tag{5.127}$$

după ce am schimbat ordinea de sumare. Din (126) cu (127) găsim expresia transformatei Laplace pentru $P(D)\sigma$. Similar formulelor (126) şi (127) calculăm transformata Laplace pentru membrul drept. Rezultă formula (125).

**Observaţia 20.** Presupunem echivalenţa reprezentărilor de tip integral şi diferenţial. Din (124) şi (125) prin eliminarea lui $\bar{\sigma}$ deducem o relaţie în care putem considera $\bar{\epsilon}$, transformata Laplace pentru $\epsilon\in H^N$, arbitrar

$$[s\,P(s)\,\bar{G}(s)-Q(s)]\,\bar{\epsilon}(s)=\frac{1}{s}\sum_{n=1}^{N} s^n\,\underbrace{\{\qquad\qquad\qquad\}}_{\text{condiţii iniţiale racordate}}\tag{5.128}$$

Dacă, condiţiile iniţiale sunt racordate prin formulele (100) atunci deducem că transformata Laplace a funcţiei de relaxare este definită prin polinoamele de variabilă complexă, asociate operatorilor diferenţiali, aşa cum rezultă din egalitatea funcţiilor meromorfe

$$\bar{G}(s)=\frac{Q(s)}{s\,P(s)}.\tag{5.129}$$

Presupunem că *nu avem condiţiile iniţiale racordate*. Fie un proces $\epsilon \in H^N$, arbitrar fixat. Atunci în (128) alegem setul de valori iniţiale pentru $\sigma$ astfel încât condiţiile iniţiale aflate în membrul drept să se anuleze. Deducem din nou legătura (129). Revenind în (128) se anulează membrul stâng şi deducem că, în mod necesar condiţiile iniţiale trebuie să se anuleze.

**Observaţia 21.** Dacă se consideră o reprezentare constitutivă de *tip fluaj* se obţin rezultate asemănătoare schimbându-se formal tensiunea cu deformaţia, în cazul problemei de echivalenţă dintre modelele de tip integral şi diferenţial.

### 5.6.2 Modele reologice

In acest paragraf vom aduce o *motivaţie* pentru *reprezentări constitutive* de tip *diferenţial* în vâscoelasticitatea liniară, pe cazul deformaţiilor infiniteziamle şi unidimensionale.

S-a dezvoltat o întreagă literatură privind descrierea constitutivă a unor clase de materiale pornind de la ideea suprapunerii efectelor *vâscoase* şi *elastice*, în reprezentări unidimensionale.

*Modelele reologice* au la bază modelele elementare :

- *elastic*, căruia i se asociază reprezentarea constitutivă $\sigma = E\,\epsilon$,

- *vâscos*, caracterizat prin reprezentarea $\sigma = \eta\,\dot{\epsilon}$.

$E-$ reprezintă modulul lui Young şi $\eta-$ constanta de vâscozitate, acestea sunt constante de material, iar $\epsilon-$ reprezintă deformaţia şi $\sigma-$ tensiunea.

In cazul micilor deformaţii reprezentarea constitutivă menţionată pentru corpul liniar vâscos este justificată în cazul unidimensional, deoarece în cazul micilor deformaţii $\mathbf{D} = 1/2(\nabla\mathbf{v} + \nabla^T\mathbf{v}) \simeq \dot{\epsilon} = 1/2(\nabla\dot{\mathbf{u}} + \nabla^T\dot{\mathbf{u}})$, în conformitate cu formulele (1.84), din paragraful 1.6.

Modelului elastic i se asociază o schemă grafică, simbolizând un *resort*, iar modelului vâscos i se asociază o schemă grafică, simbolizând un *piston*. Reprezentările grafice vor fi menţionate în figura 5.1 a).

Modelele reologice se definesc ca o combinaţie de elemente elastice şi vâscoase legate în *serie* şi / sau *în paralel*.

Prin formalismul, pe care-l explicăm în continuare, punem în corespondenţă unui model reologic o *reprezentare constitutivă de tip diferenţial.*

Se consideră două elemente, caracterizate prin perechile $(\sigma_1, \epsilon_1)$ şi respectiv $(\sigma_2, \epsilon_2)$.

**Definiţia 17.** Dacă cele două elemente sunt *legate în serie* atunci *modelul rezultat* este caracterizat prin starea de tensiune şi de deformaţie $(\sigma, \epsilon)$ în care *tensiunea* $\sigma = \sigma_1 = \sigma_2$, iar *deformaţia* $\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2$.

Dacă cele două elemente sunt *legate în paralel* atunci *modelul rezultat* este caracterizat prin starea de tensiune şi de deformaţie $(\sigma, \epsilon)$ în care *tensiunea*

$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$, iar *deformația* $\epsilon = \epsilon_1 = \epsilon_2$.

**Modelul Maxwell** este modelul reologic rezultat prin considerarea a două elemente unul elastic $(E, \sigma_1, \epsilon_1)$ şi unul vâscos $(\eta, \sigma_2, \epsilon_2)$, legate *în serie*, reprezentat în Fig. 5.1 b).

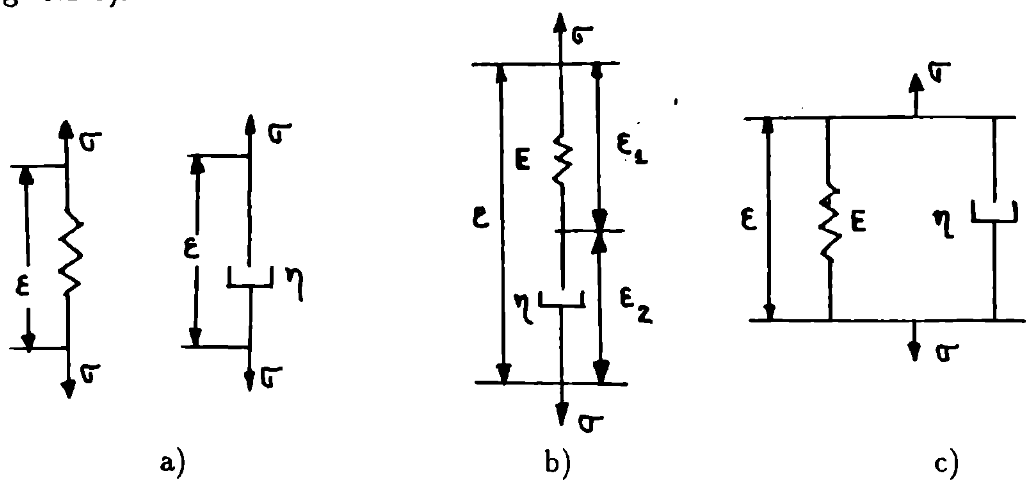



Fig. 5.1

**Propoziția 10.** Reprezentarea constitutivă asociată *modelului Maxwell* este

$$\frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta} = \dot{\epsilon}. \tag{5.130}$$

**Demonstrație.** Conform ipotezelor enunțate

$$\begin{aligned} &\sigma_1 = E\,\epsilon_1 \quad \text{elastic}, \quad \sigma_2 = \eta\,\dot{\epsilon}_2 \quad \text{vâscos}, \\ &\sigma = \sigma_1 = \sigma_2, \quad \epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2. \end{aligned} \tag{5.131}$$

Avem 5 relații pentru 6 cantități, deci eliminând pe $\sigma_j$, $\epsilon_j$ cu $j = 1,2$ va rezulta reprezentarea de tip diferențial asociată modelului.

**Modelul Kelvin - Voigt** este modelul reologic rezultat prin considerarea a două elemente unul elastic $(E, \sigma_1, \epsilon_1)$ şi unul vâscos $(\eta, \sigma_2, \epsilon_2)$, legate *în paralel*, reprezentat în Fig.5.1 c).

**Propoziția 11.** Reprezentarea constitutivă asociată *modelului Kelvin - Voigt* este o reprezentare de tip diferențial, de ordinul 1

$$\sigma = E\,\epsilon + \eta\,\dot{\epsilon}. \tag{5.132}$$

**Demonstrație.** Din ipoteze avem relațiile

$$\begin{aligned} &\sigma_1 = E\,\epsilon_1 \quad \text{elastic}, \quad \sigma_2 = \eta\,\dot{\epsilon}_2 \quad \text{vâscos}, \\ &\sigma = \sigma_1 + \sigma_2, \quad \epsilon = \epsilon_1 = \epsilon_2, \end{aligned} \tag{5.133}$$

pentru 6 cantități legate prin 5 relații scalare. Din eliminarea mărimilor $\sigma_j$, $\epsilon_j$ cu $j = 1,2$ se deduce reprezentarea de tip diferențial asociată modelului.

**Observaţia 22.** Modelul Maxwell este caracterizat prin

$q_1 = 1 \neq 0,\ q_0 = 0,\ p_1 = \frac{1}{E} \neq 0,\ p_0 = \frac{1}{\eta}$. Astfel $N = 1$. Modelul este de tip *relaxare*, dar şi de tip *fluaj*.

Condiţia de racordare a datelor iniţiale (100) este

$$\sigma(0) = E\,\epsilon(0). \tag{5.134}$$

Semnificaţia acestei relaţii este evidentă. Dacă la momentul iniţial corpul suferă o *deformaţie bruscă, instantanee*, de la 0 la $\epsilon(0) \neq 0$, atunci în corp se produc tensiunile care corespund unui *corp elastic.* Deci datele iniţiale sunt legate printr-un *răspuns elastic.*

**Observaţia 23.** Modelul Kelvin - Voigt este caracterizat prin

$q_1 = \eta \neq 0,\ q_0 = E,\ p_1 = 0,\ p_0 = 1$. Acest model este de *fluaj*, dar nu descrie proprietăti de *relaxare,* si $N = 1$.

Condiţia de racordare a datelor iniţiale (100) este

$$p_1\,\sigma(0) = q_1\,\epsilon(0) \quad \Longleftrightarrow \quad \epsilon(0) = 0. \tag{5.135}$$

**Propoziţia 12.** Fie un proces de deformare de tip Heaviside, în $H^1$, caracterizat prin $t \longrightarrow \epsilon(t)$, pentru $\forall t \geq 0$.

Dacă se consideră condiţia iniţială $\sigma(t)\,|_{t=0} = \sigma(0)$, atunci răspunsul materialului descris printr-un model Maxwell este caracterizat prin

$$\begin{aligned} \sigma(t) \ &= (\sigma(0) - E\,\epsilon(0))exp\{-\frac{E}{\eta}(t)\} + E\,\epsilon(t) - \\ &-\frac{E^2}{\eta}\int_0^t \epsilon(s)exp\{-\frac{E}{\eta}(t-s)\}ds. \end{aligned} \tag{5.136}$$

**Demonstraţie**. Reprezentarea se deduce din integrarea ecuaţiei diferenţiale, (130) neomogenă cu coeficienţi constanţi, în necunoscuta $\sigma$, pentru deformaţia $\epsilon(t)$ dată.

**Observaţia 24.** In relaţia (136) avem o *dependenţă de tip integral*, dar care conţine datele iniţiale ale tensiunii şi ale deformaţiei, dacă acestea nu sunt legate printr-un răspuns elastic, de forma (134).

Dacă în (136) considerăm condiţiile iniţiale legate prin (134) şi facem schimbarea de variabilă $u = t - s$ rezultă că

$$\begin{aligned} &\exists\, G(u) = E\,exp\,(-\frac{E}{\eta}u) \quad \forall\, u \geq 0 \quad \text{şi} \\ &\sigma(t) = G(0)\,\epsilon(t) + \int_0^t \epsilon(t-u)\,\dot{G}(u)du. \end{aligned} \tag{5.137}$$

Deci a rezultat o reprezentare constitutivă de tip integral cu nucleul de relaxare $G$. Această reprezentare este un caz particular al uneia dintre primele reprezentări integrale, cunoscută în literatură ca reprezentarea constitutivă a lui Lodge ( vezi Larson [1989] ).

**Propoziţia 13.** 1) Fie un proces de deformare de tip Heaviside, caracterizat prin $\epsilon(t) = \epsilon(0) \quad \forall t \geq 0$ şi condiţiile iniţiale racordate $\sigma(0) = E\,\epsilon(0)$, atunci răspunsul materialului descris printr-un model Maxwell este caracterizat prin

$$\sigma(t) \equiv \epsilon(0)\, G(t) = E\,\epsilon(0) exp(-\frac{E}{\eta}\, t); \tag{5.138}$$

2) Funcţia $G$ este soluţia problemei Cauchy

$$p_1 G^{(1)}(t) + p_0 G(t) = q_0 \quad \text{şi} \quad G(0) = \frac{q_1}{p_1} \equiv E. \tag{5.139}$$

**Demonstraţie.** 1) Din (136) prin particularizarea procesului de deformare $\epsilon = \epsilon(0)h$, cu $h-$ funcţia lui Heaviside şi considerarea condiţiilor iniţiale racordate, conform ipotezei, se deduce (138).

2) In paragraful 5.6.1. am arătat că dacă există reprezentarea constitutivă de tip integral, atunci perechea $(\sigma \equiv G, \epsilon \equiv h)$ satisface reprezentarea. Ecuaţia diferenţială (139) se deduce din (130) scrisă pe perechea $(\sigma \equiv G, \epsilon \equiv h)$, cu constantele precizate în Observaţia 22.

**Observaţia 25.** Tensiune descrisă prin (138) este descrescătoare şi descrie un fenomen de relaxare a tensiunii, în care pentru $t \to \infty$ tensiunea tinde către 0, dacă $\epsilon(0) > 0$.

**Propoziţia 14.** Fie modelul de tip diferenţial al lui Maxwell, cu condiţiile iniţiale racordate prin răspunsul elastic, atunci el este echivalent cu o reprezentare de tip integral ( de fluaj ):

$$\begin{gathered} \epsilon(t) = J(0)\,\sigma(t) + \int_0^t \dot{J}(s)\,\sigma(t-s)\}ds \quad \text{cu,} \\ \dot{J}(t) = \frac{1}{\eta} \quad J(0) = \frac{1}{E} \equiv \frac{p_1}{q_1} \quad \Longleftrightarrow \quad J(t) = \frac{1}{E}(\frac{E}{\eta}\, t + 1) \end{gathered} \tag{5.140}$$

**Demonstraţie.** Considerăm o istorie de tensiune descrisă prin funcţia Heaviside $\sigma = h$. Starea de deformaţie, care caracterizează răspunsul materialului $\epsilon \equiv J(t)$, se determină din ecuaţia diferenţială (130), rezultată din (132). Condiţia iniţială pentru $J$ este dedusă din condiţia de racordare a datelor iniţiale $\sigma_0 = E\epsilon_0$, pe perechea considerată, deci $1 = E\,J(0)$.

**Observaţia 26.** Modelul Maxwell prezintă un *fluaj liniar*, caracterizat prin funcţia $J$ din (140), cu $\lim_{t \longrightarrow \infty}$ J(t)= $\infty$. Deci deformaţia creşte infinit cu trecerea timpului.

Prin combinaţii de modele reologice se pot obţine reprezentări constitutive , care să descrie atât fluajul cât şi relaxarea (ca de exemplu modelul lui Maxwell), dar cu o descriere mai realistă a acestora. Astfel există modele care descriu un fluaj neliniar, care se *stabilizează*, în sensul că există o asimptotă orizontală pentru $t \longrightarrow \infty$ la graficul deformației, ca funcție de timp. De asemenea există modele care descriu comportamentul de relaxare, în care tensiunea descrește spre o asimptotă orizontală, nenulă, pentru $t \longrightarrow \infty$.

## 5.7 Exerciții și probleme

**1.** Demonstrați proprietățile funcției de influență enunțate în Propoziția 2.

**2.** Arătați că mulțimea $\mathcal{H}_{(h)}$ definită în (9) cu structura introdusă prin aplicația biliniară construită în (11) $<,>_{(h)}$ este un spațiu Hilbert real.

**3.** Demonstrați Propoziția 4.

**4.** Explicitați demonstrația afirmațiilor de la punctele 5) și 6) din Propoziția 5.

**5.** Fie reprezentarea constitutivă

$$\mathbf{T}(\mathbf{x},t) = \mathbf{R}(t)\{f(\mathbf{C}(t)) + \int_0^\infty \mathbf{K}(s,\mathbf{C})[\mathbf{G}(s)]ds\}\mathbf{R}^T(t),$$

$$\text{cu} \quad \mathbf{G}(s) = (\mathbf{C}_t^t(s))^{\mathbf{R}} - \mathbf{I} \quad \forall s \geq 0.$$

Arătați că aceasta satisface principiul obiectivității, utilizând direct definiția.

**6.** Demonstrați, folosind definițiile, că reprezentarea constitutivă definită prin relațiile (51) satisface principiul obiectivității și descrie un corp izotrop.

**7.** Demonstrați că reprezentarea constitutivă a lui Boltzmann, (77), este echivalentă cu o reprezentare *decuplată* în parte *deviatorică* și *sferică*, precizată în (79).

**8.** Fie o experiență de forfecare $\epsilon(\tau) = \epsilon_{12}(\tau)(\mathbf{i}_1 \otimes \mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_2 \otimes \mathbf{i}_1)$.

a. Determinați răspunsul materialului descris printr-o ecuație constitutivă de tip Boltzmann.

b. Arătați că $2\mu(s) = \dfrac{T_{12}(s)}{\epsilon_0}$ în experiența de relaxare corespunzătoare.

**9.** Fie o experiență de dilatare/ compresiune $\epsilon(\tau) = x(\tau)\mathbf{I}$.

a. Determinați răspunsul materialului descris printr-o ecuație constitutivă de tip Boltzmann.

b. Arătați că $3\lambda(s) + 2\mu(s) = \dfrac{\mathrm{tr}\,\mathbf{T}(s)}{3x(0)}$ în experiența de relaxare corespunzătoare.

**10.** Fie un model Kelvin - Voigt cu constantele $E, \eta$.

a. Demonstrați teoremele de echivalență pentru reprezentarea de tip diferențial și integral.

b. Comparaţi fluajul descris de acest model cu fluajul descris prin modelul Maxwell.

**11.** Fie un model vâscos cu constanta de vâscozitate $\eta_2$ şi un model Kelvin - Voigt ( cu constantele $E, \eta_1$ ) care sunt legate în serie, reprezentate în Fig. 5.2 a).

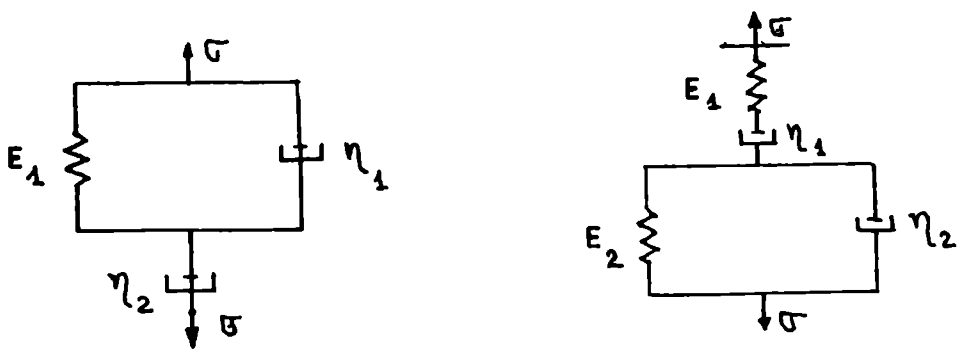
a. Arătaţi că reprezentarea de tip diferenţial asociată este dată prin

$$p_1 \, \dot{\sigma} + p_0 \sigma = q_2 \, \ddot{\epsilon} + q_1 \, \dot{\epsilon} + q_0 \, \epsilon \quad \text{cu,}$$

$$p_1 = 1 + \frac{\eta_1}{\eta_2}, \quad p_0 = \frac{E}{\eta_2}, q_2 = \eta_1, \quad q_1 = E, \quad q_0 = 0.$$

b. Scrieţi condiţia de racordare a datelor iniţiale (100), din paragraful 5.6.1.

c. Determinaţi reprezentarea integrală de tip fluaj .




a) b)

Fig. 5.2

**12.** Fie un model reologic descris printr-un model Maxwell, cu constantele $E_1, \eta_1$ şi un model Kelvin - Voigt cu constantele $E_2, \eta_2$ care sunt legate în serie, reprezentate în Fig. 5.2 b).

a. Arătaţi că reprezentarea de tip diferenţial asociată este dată prin

$$p_2 \, \ddot{\sigma} + p_1 \, \dot{\sigma} + p_0 \sigma = q_2 \, \ddot{\epsilon} + q_1 \, \dot{\epsilon} + q_0 \, \epsilon \quad \text{cu,}$$

$$p_2 = \frac{\eta_2}{E_1}, \quad p_1 = 1 + \frac{E_2}{E_1} + \frac{\eta_2}{\eta_1}, \quad p_0 = \frac{E_2}{\eta_1},$$

$$q_2 = \eta_2, \quad q_1 = E_2, \quad q_0 = 0.$$

b. Scrieţi condiţia de racordare a datelor iniţiale (100), din 5.6.1.

c. Determinaţi reprezentarea integrală de tip relaxare .

d. Determinati reprezentarea integrală de tip fluaj .

e. Refaceţi demonstraţia teoremelor de echivalenţă pentru acest model.

**13.** Comparaţi proprietăţile de relaxare sau de fluaj, după cum este cazul, pentru modelele reologice descrise în Ex. 11 - 12.

**14.** Demonstraţi că, corpurile constituite din materiale elastice şi fluidele Reiner - Rivlin nu prezintă proprietăţi de relaxare. Ce se poate afirma despre existenţa fluajului ?

**15.** Arătaţi că domeniul de definiţie pentru operatorul integral din reprezentarea constitutivă (44) poate fi mulţimea

$$\{\mathbf{G} : [0,+\infty) \longrightarrow Sim \mid \text{continuă cu suportul compact}\}.$$

**16.** Arătaţi că domeniul de definiţie pentru operatorul integral din reprezentarea constitutivă (67) poate fi una dintre mulţimile

$a.\quad \{\epsilon : [0,+\infty) \longrightarrow Sim \mid \quad \text{continuă cu suportul compact}\},$

$b.\quad \{\epsilon : [0,+\infty) \longrightarrow Sim \mid \text{integrabilă pe orice compact}\},$

$c.\quad \{\epsilon : [0,+\infty) \longrightarrow Sim \mid \epsilon(\tau) = 0\ \forall\tau < 0, \quad \epsilon\mid_{[0,+\infty)} \quad \text{continuă}\} \equiv \; H^0,$

dacă nucleul $\mathbf{M}$ este absolut continuu.

**17.** Arătaţi că domeniul de definiţie pentru operatorul integral din reprezentarea constitutivă (67) poate fi una dintre mulţimile

$a.\quad \{\epsilon : [0,+\infty) \longrightarrow Sim \mid \lim_{|t|\to\infty} \epsilon(t) = 0, \epsilon\ \text{continuă}\},$

$b.\quad \{\epsilon : [0,+\infty) \longrightarrow Sim \mid \mid \epsilon(t) \mid \leq M \quad \forall t \in R\},$

$c.\quad \{\epsilon : [0,+\infty) \longrightarrow Sim \mid \epsilon \in L^1(R)\}$

dacă nucleul $\mathbf{M}$ este absolut continuu, *tare.*

**18.** Fie $\psi,\phi \in H^{ac}$, de tip Heaviside ( $\psi,\phi = 0 \quad \forall\tau < 0$ şi absolut continue pentru $\forall\tau \geq 0$, cu valori tensori de ordinul 4). Arătaţi că operatorul lui Boltzmann

$$(\psi \otimes \phi)(t) = \begin{cases} 0 & \text{pentru} \quad \tau < 0 \\ \psi(0)\phi(t) + \displaystyle\int_0^\infty \dot{\psi}(s)\phi(t-s)ds \equiv \mathcal{L}_\psi(\phi)(t) & t > 0 \end{cases}$$

are proprietăţile

$$a.\quad (\psi \otimes \phi) \in H^{ac},$$

$$b.\quad (\psi \otimes \phi)(0) = \psi(0)\phi(0),$$

$$c.\quad \dot{\overbrace{(\psi \otimes \phi)}}(t) = \psi(0)\dot{\phi}(t) + \dot{\psi}(t)\phi(0) + (\dot{\psi} * \dot{\phi})(t)$$

pentru $t > 0$.

**19.** Folosind definiţiile, demonstraţi că reprezentarea constitutivă (52) satisface principiul obiectivităţii şi descrie un fluid.

**20.** Determinaţi funcţiile vâscometrice în cazul fluidului vâscoelastic, liniar pe istorii, cu deformaţii finite, reprezentat în (52).

**21.** Demostraţi că sunt suficiente condiţiile din (83) pentru ca $\mathbf{E} = \mathcal{L}_J^*(\mathbf{T})$ să satisfacă $\mathbf{T} = \mathcal{L}_G(\mathbf{E})$ pentru $\forall\, \mathbf{T}$ de tip Heaviside (vezi Teorema 5).

# 6. MATERIALE DE TIP RATE

## 6.1 Relaţii constitutive pentru materiale de tip rate

In acest paragraf vom prezenta comportamentul unor materiale, care sunt descrise prin reprezentări constitutive care generalizează de fapt modelele de tip diferenţial, unidimesionale din vâscoelasticitate la cazul tridimensional, cu deformaţii infinitezimale. In Freudental, Geiringer [1958], Eringen [1967] şi Larson [1989] sunt prezentate astfel de modele generalizate, ca de exemplu modelul Maxwell, Kelvin -Voigt , etc.

Vom defini reprezentări constitutive pentru *materiale de tip rate* care includ materiale de tip vâscoelastice cu *memorie de scurtă durată*, de tip diferenţial, liniare cât şi materiale elasto-vâscoplastice. Denumirea de materiale *de tip rate* ni se pare mai naturală, avînd în vedere că aceste materiale nu pot fi identificate cu materiale vâscoelastice şi pe de altă parte, această clasă poate include materiale vâscoplastice, în accepţiunea pe care o vom menţiona ulterior.

In cap.5 am arătat că materialele vâscoelastice cu *memorie de lungă durată*, de tip integral (cazul unidimensional, sau izotrop) admit reprezentări de tip *diferenţial* numai în anumite condiţii, cele două clase de materiale nefiind în general echivalente.

Un studiu sistematic pentru *materialele* denumite *de tip rate*, reprezentate prin modele cvasi-statice, este făcut în Cristescu , Suliciu [1976], [1982] fiind prezente atât modele de tip vâscoelastic cât şi modele vâscoplastice. Acestea din urmă au constituit baza reprezentărilor constitutive utilizate de Cristescu [1989], [1990] în descrierea comportamentului complex al materialelor de tip *rocă*, deoarece modelele vâscoplastice pot modela *fluajul, dilatanţa*, etc.

Ne plasăm în ipoteza micilor deformaţii şi urmărim, în primul paragraf, rezultatele din Cristescu, Suliciu [1976], [1982], Gurtin, Williams, Suliciu [1980].

**Definiţia 1.** Vom spune că un corp este constituit, într-o particulă fixată $X \in \mathcal{B}$, dintr-un *material de tip rate*, cvasi-liniar, dacă este descris printr-o reprezentări constitutivă de forma

$$\dot{\mathbf{T}} = \mathcal{E}(\mathbf{T},\mathbf{E})[\dot{\mathbf{E}}] + \mathcal{G}(\mathbf{T},\mathbf{E}) \tag{6.1}$$

în care $\mathcal{E} : \mathcal{D} \subset Sim \times Sim \longrightarrow Lin(Sim, Sim)$, iar $\mathcal{G} : \mathcal{D} \longrightarrow Sim$. Aici $\mathcal{D} \subset Sim \times Sim$ este o mulţime deschisă şi conexă , cu $(0,0) \in \mathcal{D}$.

**Definiţia 2.** Spunem că reprezentarea constitutivă (1) descrie un *comportament vâscoplastic* într-o particulă a corpului $\mathcal{B}$ dacă *există* $g : \mathcal{D} \longrightarrow R$ continuă, cu $g(\mathbf{0},\mathbf{0}) < 0$, numită *funcţie vâscoplastică* astfel încât

$$\mathcal{G}(\mathbf{T},\mathbf{E}) = h(g(\mathbf{T},\mathbf{E}))\bar{\mathcal{G}}(\mathbf{T},\mathbf{E}), \tag{6.2}$$

unde $h$ este funcţia Heaviside.

**Observaţia 1.** Astfel dacă $(\mathbf{T},\mathbf{E})$ este astfel încât $g(\mathbf{T},\mathbf{E}) < 0$, atunci răspunsul materialului vâscoplastic este este "de tip elastic" :

$$\dot{\mathbf{T}} = \mathcal{E}(\mathbf{T},\mathbf{E})\,\dot{\mathbf{E}}\,,$$

Dacă $(\mathbf{T},\mathbf{E})$ este astfel încât $g(\mathbf{T},\mathbf{E}) \geq 0$, atunci răspunsul materialului este descris prin

$$\dot{\mathbf{T}} = \mathcal{E}(\mathbf{T},\mathbf{E})\dot{\mathbf{E}} + \bar{\mathcal{G}}(\mathbf{T},\mathbf{E})\,.$$

Semnificaţia expresiei "de tip elastic" va fi dată în Definiţia 4. Din condiţia $g(\mathbf{0},\mathbf{0}) < 0$, cu $g$ continuă, rezultă că există o vecinătate a lui $(\mathbf{0},\mathbf{0})$ în care corpul are un comportament elastic. In aplicaţii se consideră că funcţia $g$ depinde numai de $\mathbf{T}$.

**Definiţia 3.** Spunem că un material de tip rate posedă o *configuraţie naturală*, dacă pentru $\mathbf{E}(\tau) = 0$ pentru orice $\tau \in [\alpha,\beta]$, rezultă că $\mathbf{T}(\tau) = 0$ pentru orice $\tau \in [\alpha,\beta]$.

**Propoziţia 1.** Presupunem că materialul de tip rate (1) admite o configuraţie naturală atunci $\mathcal{G}(0,0) = 0$.

**Demonstraţie.** Fie $\mathbf{E}(\tau) = 0$ pentru $\forall\,\tau \in [\alpha,\beta]$ şi $\mathbf{T}(\tau) = 0$, cu ipoteza existenţei configuraţiei naturale, din (1) rezultă că

$$\dot{\mathbf{T}}(t) = \mathcal{G}(\mathbf{T}(t),0) \quad \text{cu} \quad \mathbf{T}(\alpha) = 0. \tag{6.3}$$

Problema Cauchy (3) admite soluţia nulă dacă şi numai dacă

$$\mathcal{G}(0,0) = 0. \tag{6.4}$$

**Observaţia 2.** Dacă $\mathbf{T} \longrightarrow \mathcal{G}(\mathbf{T},\mathbf{E})$ este local Lipschitz şi este *continuă în ansamblul argumentelor*, atunci sistemul diferenţial (3) admite o soluţie unică. Daca în plus condiţia (4) este îndeplinită obţinem că materialul este cu configuraţie naturală.

**Definiţia 4.** Presupunem că $\mathcal{E} : \mathcal{D} \subset Sim \times Sim \longrightarrow Lin(Sim, Sim)$ este de clasă $C^1$. Spunem că forma diferenţială

$$\dot{\mathbf{T}}(t) = \mathcal{E}(\mathbf{T}(t),\mathbf{E}(t))[\dot{\mathbf{E}}(t)], \tag{6.5}$$

caracterizează un *răspuns instantaneu elastic* dacă şi numai dacă ecuaţia asociată

$$\frac{d\mathbf{T}}{d\mathbf{E}} = \mathcal{E}(\mathbf{T},\mathbf{E}), \tag{6.6}$$

admite soluţie în sensul Definiţiei 5.

**Definiţia 5.** Se numeşte soluţie pentru ecuaţia (6) o funcţie diferentiabilă $\varphi : \mathcal{U} \subset Sim \longrightarrow Sim$, cu $\mathcal{U}$ mulţime deschisă, de clasă $C^1$, astfel încât

$$\begin{aligned} &1) \quad (\varphi(\mathbf{E}), \mathbf{E}) \in \mathcal{D} \quad \text{pentru} \quad \forall \quad \mathbf{E} \in \mathcal{U} \\ &2) \quad D\,\varphi(\mathbf{E}) = \mathcal{E}(\varphi(\mathbf{E}), \mathbf{E}) \quad \forall \mathbf{E} \in \mathcal{U}, \end{aligned} \tag{6.7}$$

unde $D\,\varphi : \mathcal{U} \longrightarrow Lin(Sim, Sim)$.

Egalitatea din $(7)_2$ are loc în sensul egalităţii aplicaţiilor liniare.

Se pune problema precizării condiţiilor în care ecuaţia (6) admite soluţii.

**Teorema 1.** Materialul de tip rate admite un *răspuns instantaneu elastic* dacă şi numai dacă $\forall\,(\mathbf{T}, \mathbf{E}) \in \mathcal{D}$

$$\begin{aligned} &\partial_{\mathbf{E}}(\,\mathcal{E}\,(\mathbf{T}, \mathbf{E})[\mathbf{A}])\mathbf{B} + \partial_{\mathbf{T}}\,(\mathcal{E}\,(\mathbf{T}, \mathbf{E})[\mathbf{A}])[\mathcal{E}\,(\mathbf{T}, \mathbf{E})\mathbf{B}] = \\ &\partial_{\mathbf{E}}(\,\mathcal{E}\,(\mathbf{T}, \mathbf{E})[\mathbf{B}])\mathbf{A} + \partial_{\mathbf{T}}\,(\mathcal{E}\,(\mathbf{T}, \mathbf{E})[\mathbf{B}])[\mathcal{E}\,(\mathbf{T}, \mathbf{E})\mathbf{A}], \end{aligned} \tag{6.8}$$

pentru orice $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in Sim$. Egalitatea din (8) are loc în $Sim$.

Aici s-a utilizat notaţia $\partial_{\mathbf{E}}\,\mathcal{E}$ pentru diferenţiala aplicaţiei

$\mathbf{E} \in Sim \longrightarrow \mathcal{E}(\mathbf{T}, \mathbf{E})$, în care $\mathbf{T}$ este fixat. Să mai remarcăm că $\partial_{\mathbf{E}}\mathcal{E}(\mathbf{T}, \mathbf{E}) \in Lin(Sim, Lin(Sim, Sim))$.

**Demonstraţia** se obţine prin aplicarea teoremei lui Frobenius la cazul considerat.

Arătăm aici că relaţia din (8) este o condiţie necesară. Dacă există o soluţie , atunci conform Definiţie 5. pentru $\forall\,\mathbf{A} \in Sim$ are loc egalitatea

$$D\,\varphi(\mathbf{E})[\mathbf{A}] = \mathcal{E}(\varphi(\mathbf{E}), \mathbf{E})[\mathbf{A}] \in Sim \tag{6.9}$$

Acum considerăm aplicaţia $\mathbf{E} \in Sim \longrightarrow D\,\varphi(\mathbf{E})[\mathbf{A}] \in Sim$, care rezultă diferenţiabilă în ipoteza că $\mathcal{E}$ este de clasă $C^1$. Scriem expresia diferenţialei funcţiei din (9), pentru $\mathbf{A} \in Sim$ fixat. Avem, pentru $\forall\,\mathbf{B} \in Sim$,

$$\begin{aligned} &D(D\,\varphi(\mathbf{E})[\mathbf{A}])[\mathbf{B}] = \partial_{\mathbf{E}}\,\big(\mathcal{E}(\varphi(\mathbf{E}), \mathbf{E})[\mathbf{A}]\big)[\mathbf{B}] + \\ &\partial_{\mathbf{T}}\,\big(\mathcal{E}(\varphi(\mathbf{E}), \mathbf{E})[\mathbf{A}]\big)[D\,\varphi(\mathbf{E})[\mathbf{B}]] \in Sim. \end{aligned} \tag{6.10}$$

In (10) folosim încă o dată egalitatea (9) şi obţinem expresia scrisă în membrul stîng al relaţiei (8).

Exprimăm condiţia de simetrie pentru diferenţiala de ordinul doi a soluţiei, scrisă în (10). Din simetria în raport cu $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ deducem că, condiţia (8) este necesară. Se demonstrează (vezi Cartan [1967], Mirică [1989]) că această condiţie este şi *suficientă*, dacă domeniul de definiţie este *simplu conex*.

**Observaţia 3.** Pe componente într-o bază carteziană condiţia (8), din Teorema 1. se scrie

$$\frac{\partial \mathcal{E}_{ijkl}}{\partial E_{mn}} A_{kl} B_{mn} + \frac{\partial \mathcal{E}_{ijkl}}{\partial T_{pq}} A_{kl} \mathcal{E}_{pqmn} B_{mn} =$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}_{ijkl}}{\partial E_{mn}} B_{kl} A_{mn} + \frac{\partial \mathcal{E}_{ijkl}}{\partial T_{pq}} B_{kl} \mathcal{E}_{pqmn} A_{mn} ,$$

pentru $\forall\, i, j \in \{\overline{1,3}\}$. Datorită faptului că $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in Sim$ sunt arbitrari, relaţia anterioară este echivalentă cu egalităţile

$$\frac{\partial \mathcal{E}_{ijkl}}{\partial E_{mn}} + \frac{\partial \mathcal{E}_{ijkl}}{\partial T_{pq}} \mathcal{E}_{pqmn} = \frac{\partial \mathcal{E}_{ijmn}}{\partial E_{kl}} + \frac{\partial \mathcal{E}_{ijmn}}{\partial T_{pq}} \mathcal{E}_{pqkl}$$

pentru orice $i, j, k, l, m, n \in \{\overline{1,3}\}$.

**Observatia 4.** Dacă $\mathcal{E}$ este un tensor de ordinul 4 constant, atunci în mod evident materialul de tip rate are răspuns instantaneu elastic.

**Propoziţia 2.** Dacă un material de tip rate are o *configuraţie naturală* şi este cu *răspuns instantaneu elastic*, atunci există $\varphi$ astfel încât

$$\begin{aligned} &\mathbf{T} = \varphi(\mathbf{E}) \quad \text{pentru} \quad \forall \quad \mathbf{E} \in \mathcal{U} \quad \text{cu} \quad \varphi(0) = 0 \\ &D\,\varphi(\mathbf{E}) = \mathcal{E}(\varphi(\mathbf{E}), \mathbf{E}) \quad \forall \mathbf{E} \in \mathcal{U}. \end{aligned} \tag{6.11}$$

**Demonstraţia** este o consecintă a Definiţilor 5. şi 3.

In concluzie, prin Propoziţia 2. avem o reprezentare constitutivă de *corp elastic*, neliniar, cu mici deformaţii. Datorită definiţiilor introduse şi a semnificaţiilor mecanice vom spune că $\mathcal{E}$ caracterizează proprietăţile *elastice* ale materialului.

**Definiţia 6.** Spunem că materialul de tip rate are *proprietăţi de relaxare* dacă pentru o experientă în care deformaţia este menţinută constantă, deci pentru un proces de deformare $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 h$, cu $h$ funcţia Heaviside, are loc o *variaţie în timp a tensiunii.*

Ca o consecinţă imediată a definiţiei obtinem că

**Propoziţia 3.** Relaxarea tensiunii este descrisă pentru $t > 0$ prin sistemul diferenţial

$$\dot{\mathbf{T}} = \mathcal{G}\,(\mathbf{T}, \mathbf{E}_0). \tag{6.12}$$

**Observaţia 5.** Dacă materialul de tip rate este cu *răspuns instantaneu elastic*, atunci corespunzător deformaţiei $\mathbf{E}_0$ starea de tensiune este $\mathbf{T}_0 = \varphi(\mathbf{E}_0)$, fiind dată prin răspunsul elastic (11).

Pentru materiale de tip rate cu configuraţie naturală şi răspuns instantaneu elastic *relaxarea tensiunii* este determinată din următoarea problemă Cauchy:

$$\dot{\mathbf{T}} = \mathcal{G}\,(\mathbf{T}, \mathbf{E}_0)\,, \quad \mathbf{T}(0) \equiv \mathbf{T}_0 = \varphi(\mathbf{E}_0) \tag{6.13}$$

corespunzător procesului de deformare $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 h$.

Notăm soluţia $\mathbf{T}(\tau) = T(\tau, \mathbf{E}_0)$, reprezentând relaxarea tensiunii.

**Definiţia 7.** Curba $\mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{T}_R(\mathbf{E})$ cu $(\mathbf{T}_R(\mathbf{E}), \mathbf{E}) \in \mathcal{D} \subset Sim \times Sim$ se numeşte *curbă de relaxare* dacă

$$\mathcal{G}(\mathbf{T}_R(\mathbf{E}), \mathbf{E}) = 0. \tag{6.14}$$

**Observaţia 6.** Dacă există $(\mathbf{T}^*, \mathbf{E}^*) \in \mathcal{D}$ astfel încât

$$\mathcal{G}(\mathbf{T}^*, \mathbf{E}^*) = 0 \quad \text{şi} \quad \partial_{\mathbf{T}} \mathcal{G}(\mathbf{T}^*, \mathbf{E}^*) \neq 0, \tag{6.15}$$

din teorema funcţiilor implicite rezultă că există $\mathbf{T} = \mathbf{T}_R(\mathbf{E})$, definită într-o vecinătate a lui $\mathbf{E}^*$, care verifică (15). Deci există o *curbă de relaxare.*

Dacă $\mathcal{G}$ este continuă şi Lipschitz în raport cu primul argument, atunci $\mathbf{T} = \mathbf{T}_R(\mathbf{E}_0)\, h$ este o soluţie pentru ecuaţia diferenţială

$$\dot{\mathbf{T}} = \mathcal{G}\,(\mathbf{T}, \mathbf{E}_0) \tag{6.16}$$

conform relaţiei (14). Suntem în condiţiile de existentă şi unicitate, deci există o unică soluţie care trece prin $(\mathbf{T}_R(\mathbf{E}_0), \mathbf{E}_0)$, presupus în $\mathcal{D}$.

**Propoziţia 4.** 1) Dacă presupunem că modelul admite *timpi de relaxare finiţi*, deci dacă $\exists t^* \in R$ astfel încât $\mathbf{T}(\tau) = \mathbf{T}(\tau, \mathbf{E}_0)$ pentru $\tau > 0$ (reprezentând relaxarea tensiunii ), cu proprietatea că

$$\lim_{\tau \to t^*} \mathbf{T}(\tau) = \mathbf{T}_R(\mathbf{E}_0)\,,$$

atunci în mod necesar problema Cauchy (12) nu admite soluţii unice.

2) Dacă problema Cauchy (12) admite soluţie unică, atunci modelul de tip rate are timpi de relaxare infiniţi.

**Demonstraţie.** Pentru problema Cauchy din (12) va rezulta soluţia $\mathbf{T}(\tau) = \mathbf{T}(\tau, \mathbf{E}_0)$ de clasă $C^1$, reprezentând relaxarea tensiunii. Prin punctul $(\mathbf{E}_0, \mathbf{T}_R(\mathbf{E}_0))$ de pe curba de relaxare, trec două soluţii : $\mathbf{T}(\tau, \mathbf{E}_0)$ şi $\mathbf{T}_R(\mathbf{E}_0))\, h$. Deci în mod necesar nu are loc unicitatea.

Funcţia $\mathcal{G}$ caracterizează *proprietăţile de relaxare* ale materialului.

**Observaţia 7.** Dacă presupunem că materialul de tip rate are proprietatea $\mathcal{E} : \mathcal{D} \subset Sim \times Sim \longrightarrow Lin(Sim, Sim)$ este un tensor de ordinul 4, inversabil în punctele domeniului $\mathcal{D}$, atunci există şi reprezentarea constitutivă de forma

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}} &= \mathcal{E}^{-1}(\mathbf{T}, \mathbf{E})[\dot{\mathbf{T}}] - \mathcal{E}^{-1}(\mathbf{T}, \mathbf{E}) \mathcal{G}(\mathbf{T}, \mathbf{E}) \quad \Longleftrightarrow \\ \dot{\mathbf{E}} &= \mathcal{E}^{-1}(\mathbf{T}, \mathbf{E})[\dot{\mathbf{T}}] - \mathcal{F}(\mathbf{T}, \mathbf{E})\,, \end{aligned} \tag{6.17}$$

deci materialul are şi proprietăţi *de fluaj.*

**Definiţia 8.** Materialul de tip rate descris prin (17) are proprietăţi de *fluaj*, dacă prin menţinerea tensiunii constante, dată prin $\mathbf{T} = \mathbf{T}_0\, h$ are loc o *variaţie în timp a deformaţiei.*

In mecanica rocilor este esenţială utilizarea unor modele constitutive care să permită punerea în evidenţă a *fluajului rocilor.*

Materialele de tip rate care au fost prezentate în acest paragraf descriu în general proprietăţi de relaxare şi fluaj, proprietăţi care au fost puse în discuţie şi în clasa materialelor vâscoelastice.

Reprezentări constitutive pentru materiale de tip rate, în cazul deformaţiilor finite, vor fi prezentate în paragraful 6.3, sub formă de exerciţii. Sunt puse în evidenţă diferite legi de materiale, care pot fi considerate ca extensii posibile, la cazul deformaţiilor finite, a reprezentărilor de tip rate, prezentate în acest paragraf. In Cleja- Ţigoiu [1991] a fost propusă o reprezentare constitutivă pentru materiale de tip rocă, care generalizează reprezentările constitutive din mecanica rocilor, la cazul deformaţiilor finite.

## 6.2 Problema cvasi-statică cu date iniţiale şi la limită

In cele ce urmează vom arăta cum poate fi formulată o problemă cu date iniţiale şi la limită pentru clasa materialelor de tip rate, având în vedere reprezentări constitutive utilizabile în mecanica rocilor. Vom accepta prin urmare un model în care *tensorul elastic* este inversabil, eventual putând depinde de punctul material ( în scopul caracterizării *neomogenităţilor* existente într-un masiv de roci deformabile).

Rezultate de existenţă, unicitate şi dependenţă continuă de date ale soluţiei se găsesc expuse în Ionescu, Sofonea [1983], [1993].

Prezentăm aici punctele esenţiale în modalitatea descrierii comportamentului unui material de tip rate în problema cvasi-statică cu date iniţiale şi la limită, bazată pe decuplajul într-o *problemă de tip elastic* şi una numită *vâscoplastică.*

### 6.2.1 Formularea problemei cvasi-statice

Fie $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ domeniu mărginit, conex. Notăm prin $\partial\Omega-$ frontiera domeniului, presupusă suficient de netedă. Se pune problema determinării câmpurilor de *deplasare* şi de *tensiuni*

$$\mathbf{u} : \Omega \times [0, t_1) \longrightarrow \mathcal{V} \equiv \mathbf{R}^3 \quad \mathbf{T} : \Omega \times [0, t_1) \longrightarrow Sim \equiv \mathbf{R}^6 ,$$

pentru care vom folosi următoarele *notaţii*

$$\begin{aligned} &\mathbf{u}(t) \equiv \mathbf{u}(\cdot, t) : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}^3 , \\ &\mathbf{T}(t) \equiv \mathbf{T}(\cdot, t) : \Omega \longrightarrow Sim \equiv \mathbf{R}^6, \end{aligned} \tag{6.18}$$

care verifică în $\Omega$ pentru $\forall\, t \in [0, t_1)$ : ecuaţiile de echilibru

$$\operatorname{div} \mathbf{T}(t) + \mathbf{b}(t) = 0 , \tag{6.19}$$

reprezentarea constitutivă pentru materiale de tip rate

$$\dot{\mathbf{T}}(t) = \mathcal{E}\dot{\mathbf{E}}(t) + \mathcal{G}(\mathbf{T}(t), \mathbf{E}(t)) , \tag{6.20}$$

relaţiile geometrice

$$\mathbf{E}(t) \equiv \epsilon(\cdot,t) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u}(t) + \nabla^T \mathbf{u}(t)). \tag{6.21}$$

Am introdus pentru comoditatea scrierii, $\mathbf{E} \equiv \epsilon$, notaţie pentru tensorul micilor deformaţii. Se mai foloseşte şi notaţia $\mathbf{E}(\mathbf{u})$ pentru a face precizarea că tensorul de deformaţii este asociat câmpului de deplasare $\mathbf{u}$.

Câmpurile de deplasare şi de tensiune trebuie să satisfacă condiţiile ($\partial\Omega$ fiind frontiera domeniului),

$$\mathbf{u}(t)\,|_{\Gamma_1} = \mathbf{g}(t)\,, \quad \mathbf{T}(t)\mathbf{n}\,|_{\Gamma_2} = \mathbf{f}(t), \tag{6.22}$$

pentru $t \in [0,t_1)$, unde $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$

şi condiţiile iniţiale în $\Omega$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \quad \mathbf{T}(0) = \mathbf{T}_0. \tag{6.23}$$

In formularea problemei timpul $t$ apare sub formă de parametru prin intermediul condiţiilor pe frontieră şi se presupune că în configuraţia de referinţă corpul este *deformat*, având tensiuni iniţiale.

Formularea problemei este *cvasi-statică* deoarece se consideră *ecuaţiile de echilibru* şi nu ecuaţiile de mişcare.

**Observaţia 8.** Suntem în cazul micilor deformaţii şi prin urmare, conform formulelor din paragraful 1.6,

$$\dot{\mathbf{E}} \equiv \dot{\epsilon}(\mathbf{X},t) = \frac{1}{2}(\nabla \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\mathbf{X},t) + \nabla^T \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\mathbf{X},t)) \equiv \mathbf{E}(\dot{\mathbf{u}}). \tag{6.24}$$

Se impune condiţia de **concordanţă** a datelor iniţiale

$$\begin{aligned} &\operatorname{div} \mathbf{T}(0) + \mathbf{b}(0) = 0, \\ &\mathbf{u}(0)\,|_{\Gamma_1} = \mathbf{g}(0)\,, \quad \mathbf{T}(0)\mathbf{n}\,|_{\Gamma_2} = \mathbf{f}(0). \end{aligned} \tag{6.25}$$

Câmpurile forţelor volumice, deplasărilor şi vectorului de tensiune, pe porţiunile corespunzătoare ale frontierei, sunt date astfel încât să fie de clasă $C^1([0,t_2))$ cu valori în spaţiile de funcţii corespunzătoare, iar $g$ este restricţia unei funcţii $h$, $g = h\,|_{\Gamma_1}$, care la fiecare moment de timp este definită pe întreaga frontieră a domeniului.

*Soluţia* problemei formulate este perechea

$$\mathbf{u} : \Omega \times [0,t_1) \longrightarrow \mathcal{V} \equiv \mathbf{R}^3\,, \quad \mathbf{T} : \Omega \times [0,t_1) \longrightarrow Sim \equiv \mathbf{R}^6, \tag{6.26}$$

definită în spaţii adecvat definite, care satisface ecuaţiile şi condiţiile menţionate.

Formulăm în primul rând **Problema de tip elastic** (vezi cap.2.7.2 ):

Fie $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ domeniu mărginit, conex şi $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Să se determine câmpurile $(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{T}}) : \Omega \times [0, t_1) \longrightarrow \mathcal{V} \times Sim$ care verifică

$$\begin{aligned} &\operatorname{div} \tilde{\mathbf{T}}(t) + \mathbf{b}(t) = 0\,, \\ &\tilde{\mathbf{T}}(t) = \mathcal{E}\tilde{\mathbf{E}}(t)\,, \quad \tilde{\mathbf{E}}(t) = \frac{1}{2}(\nabla \tilde{\mathbf{u}}(t) + \nabla^T \tilde{\mathbf{u}}(t)), \end{aligned} \tag{6.27}$$

condiţiile pe frontieră

$$\tilde{\mathbf{u}}(t)\,|_{\Gamma_1} = \mathbf{g}(t)\,, \quad \tilde{\mathbf{T}}(t)\mathbf{n}\,|_{\Gamma_2} = \mathbf{f}(t) \tag{6.28}$$

şi condiţiile iniţiale în $\Omega$

$$\tilde{\mathbf{u}}(0) = \tilde{\mathbf{u}}_0, \quad \tilde{\mathbf{T}}(0) = \mathbf{T}_0. \tag{6.29}$$

Condiţiile (29) se introduc în cazul în care există tensiuni iniţiale în configuraţia de referinţă, care este deja deformată în raport cu o alta.

**Observaţia 9.** In problema elastică (27)-(29) se consideră forţele volumice date în ecuaţia de echilibru (19) şi condiţiile pe frontieră identice cu cele din (22), corespunzătoare formulării problemei pentru materiale de tip rate.

Introducem câmpurile

$$\begin{aligned} &\bar{\mathbf{u}} \equiv \mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}} : \Omega \times [0, t_1) \longrightarrow \mathcal{V} \equiv \mathbf{R}^3, \\ &\bar{\mathbf{T}} = \mathbf{T} - \tilde{\mathbf{T}} : \Omega \times [0, t_1) \longrightarrow Sim, \end{aligned} \tag{6.30}$$

unde $(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{T}})$ defineşte soluţia problemei elastice (27)- (29).

Formulăm acum **Problema vâscoplastică** :

O pereche de câmpuri $(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{T}}) : \Omega \times [0, t_1) \longrightarrow \mathcal{V} \times Sim$ defineşte o soluţie a problemei *vâscoplastice* asociate, dacă satisface

$$\operatorname{div} \bar{\mathbf{T}}(t) = 0\,, \tag{6.31}$$

$$\dot{\bar{\mathbf{T}}}(t) = \mathcal{E}[\mathbf{E}(\dot{\bar{\mathbf{u}}})(t)] + \mathcal{G}(\bar{\mathbf{T}}(t) + \tilde{\mathbf{T}}(t), \mathbf{E}(\bar{\mathbf{u}})(t) + \mathbf{E}(\tilde{\mathbf{u}})(t))\,, \tag{6.32}$$

condiţiile pe frontieră

$$\bar{\mathbf{u}}(t)\,|_{\Gamma_1} = 0 \quad \bar{\mathbf{T}}(t)\mathbf{n}\,|_{\Gamma_2} = 0, \tag{6.33}$$

şi condiţiile iniţiale în $\Omega$

$$\bar{\mathbf{u}}(0) = \mathbf{u}_0 - \tilde{\mathbf{u}}_0, \quad \bar{\mathbf{T}}(0) = \mathbf{T}(0) - \tilde{\mathbf{T}}_0. \tag{6.34}$$

**Observaţia 10.** Formularea problemei *vâscoplastice* se obţine, dacă în problema (19)-(23) se introduc câmpurile $(\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{u}}, \mathbf{T} = \tilde{\mathbf{T}} + \bar{\mathbf{T}})$ care descriu o *suprapunere de efecte elastice şi de tip vâscoplastic.*

**Observaţia 11.** Problema vâscoplastică introdusă aici comportă absenţa forţelor masice, date pe frontieră omogene şi condiţii iniţiale nenule.

Vom formula următoarele **ipoteze** asupra funcţiilor constitutive.

**Ipoteze** asupra $\mathcal{E}$ :

$$
\begin{aligned}
&a) \quad |\,\mathcal{E}(\mathbf{x})\,|_{(4)} \leq \quad \text{const.} \quad \forall\, \mathbf{x} \in \Omega\,, \\
&b) \quad \mathcal{E}(\mathbf{x}) : Sim \longrightarrow Sim \quad \text{liniar , simetric , strict pozitiv definit} \\
&\quad 1) \quad \mathcal{E}(\mathbf{x})\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{A}\cdot\mathcal{E}(\mathbf{x})\mathbf{B} \quad \forall\, \mathbf{A}, \mathbf{B} \in Sim
\end{aligned}
\tag{6.35}
$$

2) există o constantă pozitivă $d > 0$ astfel încât pentru orice $\mathbf{x} \in \Omega$

şi pentru orice $\mathbf{A} \in Sim$, să avem $\mathcal{E}(\mathbf{x})\mathbf{A}\cdot\mathbf{A} \geq d\,\mathbf{A}\cdot\mathbf{A} \;\equiv d\,\mid \mathbf{A}\mid^2$ .

Ultima este o condiţie de *coercivitate*, asigurând şi existenţa câmpului tensorial $\mathcal{E}(\mathbf{x})^{-1}$.

**Ipoteze** asupra $\mathcal{G}$ :

a) $\mathcal{G}$ este lipschitziană în ansamblul argumentelor , deci există o constantă $L > 0$ astfel încât

$$
|\,\mathcal{G}(\mathbf{x},\mathbf{T}_1,\mathbf{E}_1) - \mathcal{G}(\mathbf{x},\mathbf{T}_2,\mathbf{E}_2)\,| \leq L(|\,\mathbf{T}_1 - \mathbf{T}_2\,| + |\,\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2\,|) \tag{6.36}
$$

pentru $\forall\, \mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2 \in Sim$,

b) $\mathrm{G}(\mathbf{x}, 0\,, 0\,) = 0$.

Condiţia b) a fost motivată în paragraful anterior, prin Propoziţia 1.

Vom preciza câteva preliminarii legate de spaţiile funcţionale în care se definesc şi se formulează, *în sens generalizat*, problemele de existenţă şi de unicitate. Introducem spaţiile funcţionale

$$
\begin{aligned}
&L = \{\mathbf{T} \mid T^{ij} = T^{ji} \in L^2(\Omega) \quad i,j \in \{\overline{1,3}\}\}, \\
&L_u = \{\mathbf{v} \mid v^i \in L^2(\Omega) \quad i \in \{\overline{1,3}\}\}, \\
&L_d = \{\mathbf{T} \mid \mathbf{T} \in L, \quad \operatorname{div}\mathbf{T} \in L_u\}, \\
&H^1(\Omega) = \{u : \Omega \longrightarrow R \mid u,\, \frac{\partial u}{\partial x^i} \in L^2(\Omega) \quad i \in \{\overline{1,3}\}\}, \\
&H = \{\mathbf{u} \mid u^i \in H^1(\Omega), i \in \{\overline{1,3}\}\}.
\end{aligned}
\tag{6.37}
$$

Spaţiile formulate în (37) sunt spaţii Hilbert cu produsele scalare definite prin

$$
\begin{aligned}
&(\mathbf{S},\mathbf{E}) = \int_\Omega \mathbf{S}\cdot\mathbf{E}\,dx \qquad \text{în} \quad L,\\
&((\mathbf{u},\mathbf{v})) = \int_\Omega \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}\,dx \qquad \text{în} \quad L_u,\\
&<\mathbf{u},\mathbf{v}>_H = \int_\Omega \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}\,dx + \int_\Omega \nabla\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{v}\,dx, \qquad \text{în}\ H,\\
&<\mathbf{S},\mathbf{E}>_d = \int_\Omega \mathbf{S}\cdot\mathbf{E}\,dx + \int_\Omega \operatorname{div}\mathbf{S}\cdot\operatorname{div}\mathbf{E}\,dx, \qquad \text{în}\ L_d,
\end{aligned}
\tag{6.38}
$$

iar normele sunt notate prin $\|\cdot\|_H, \|\cdot\|_d$, pentru ultimele două spaţii.

Pentru primele spaţii introducem normele

$$
\begin{aligned}
&\| \mathbf{S} \| = \Big(\int_\Omega |\mathbf{S}|\,dx\Big)^{1/2} \equiv (\mathbf{S},\mathbf{S})^{1/2} \quad \forall\,\mathbf{S}\in L,\\
&\| \mathbf{u} \| = \Big(\int_\Omega |\mathbf{u}|\,dx\Big)^{1/2} \equiv ((\mathbf{u},\mathbf{u}))^{1/2} \quad \forall\,\mathbf{u}\in L_u.
\end{aligned}
\tag{6.39}
$$

De asemenea mai introducem spaţiile

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{V}_1 = \{\mathbf{u} : \Omega \longrightarrow R^3 \mid \mathbf{u}\in H\ , \quad \mathbf{u}=0 \quad \text{pe}\,\Gamma_1\} \subset H,\\
&\mathcal{V}_2 = \{\mathbf{T} \mid \operatorname{div}\mathbf{T} = 0\ , \quad \mathbf{Tn} = 0 \quad \text{pe}\,\Gamma_2\} \subset L_d.
\end{aligned}
\tag{6.40}
$$

Menţionăm, fără a intra în detalii (vezi de exemplu Necăs [1967], Iftimie [1978]), că se consideră condiţiile pe frontiera domeniului în sensul *operatorilor de urmă.*

**Observaţia 12.** Spaţiul Sobolev, de ordinul 1, pentru funcţii cu valori vectoriale (notat aici cu H) poate fi obţinut prin închiderea în raport cu norma $\|\cdot\|_H$ a spaţiului $\mathcal{E}(\bar\Omega)-$ care reprezintă mulţimea funcţiilor, infinit derivabile în $\Omega$ şi care sunt prelungibile prin continuitate în $\bar\Omega \equiv \Omega\cup\partial\Omega$.

Se demonstrează că

1) există *operatorul de urmă* $\gamma_0 : H \longrightarrow L^2(\partial\Omega, R^3)$, astfel încât dacă $\mathbf{u}\in C^1(\bar\Omega, R^3)$ atunci $\gamma_0(\mathbf{u}) = \mathbf{u}\,|_{\partial\Omega}$ .

2) $\gamma_0$ este un operator *liniar şi continuu*, deci astfel încât

$$
\|\gamma_0(\mathbf{u})\|_\Gamma \leq c(\Omega)\ \|\mathbf{u}\|_H \quad \forall\,\mathbf{u}\in H, \tag{6.41}
$$

unde s-a introdus notaţia

$$
\|\mathbf{u}\|_\Gamma = \Big(\int_{\partial\Omega} |\mathbf{u}|^2\ da\Big)^{1/2} \ \text{pentru}\ \forall\,\mathbf{u}\in L^2(\partial\Omega, R^3).
$$

Constanta $c(\Omega) > 0$ este dependentă de domeniu.

3) Operatorul $\gamma_0$ nu este surjectiv. Se introduce spaţiul $H_\Gamma \equiv \gamma_0(H)$ care conduce la prezentarea operatorului de urmă ca un operator *surjectiv.*

**Observaţia 13.** Vom nota prin $H_1$ subspaţiul lui $H_\Gamma$ definit prin

$$H_1 = \{\xi \in H_\Gamma \mid \xi = 0 \quad \text{pe} \quad \Gamma_1\}. \tag{6.42}$$

**Operatorul** $\mathbf{E} : H \longrightarrow L$, prin care oricărui $\mathbf{u} \in H$ i se asociază câmpul tensorial al micilor deformaţii $\mathbf{E}(\mathbf{u})$ definit prin formula (21), ca element în $L$, este liniar şi continuu. Dacă măs $\Gamma_1 > 0$, atunci are loc inegalitatea lui Korn (vezi de exemplu Nečas, Hlaváček [1981], Roşca [1997])

$$\| \mathbf{E}(\mathbf{u}) \| \geq c_1(\Omega) \| \mathbf{u} \|_H, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{V}_1, \tag{6.43}$$

cu constanta $c_1(\Omega) > 0$ dependentă de domeniu şi de $\Gamma_1$ .

Se demonstrează că (vezi de exemplu Léné [1974])

1) Dacă $\mathbf{T} \in L_d$ atunci există $\gamma_n(\mathbf{T}) \in H'_\Gamma$ (unde $H'_\Gamma$ este dualul lui $H_\Gamma$ ) astfel încât

$$< \gamma_n(\mathbf{T}), \gamma_0(\mathbf{u}) >_\Gamma = (\mathbf{T}, \mathbf{E}(\mathbf{u})) + ((\operatorname{div} \mathbf{T}, \mathbf{u})) \quad \forall \mathbf{u} \in H, \tag{6.44}$$

unde $<,>_\Gamma$ este aplicaţia de dualitate.

2) *Operatorul de urmă* $\gamma_n : L_d \longrightarrow H'_\Gamma$ este liniar şi continuu, cu proprietatea

$$\| \gamma_n(\mathbf{T}) \|_{\Gamma'} \leq c(\Omega) \ \| \mathbf{T} \|_d \quad \forall \mathbf{T} \in L_d. \tag{6.45}$$

**Observaţia 14.** Prin $\mathbf{Tn} \mid_{\Gamma_2}$ vom înţelege un element al dualului spaţiului $H_1$ , care este restricţia lui $\gamma_n(\mathbf{T})$ pe $H_1$, definit prin Observaţia 13., formula (42).

**Propoziţia 5.** 1) Dacă $\mathbf{S} \in L_d$ şi $\mathbf{v} \in H$ sunt funcţii regulate, atunci are loc relaţia din (44), scrisă sub forma

$$\int_\Omega \mathbf{S} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{v}) \mathbf{dx} + \int_\Omega \operatorname{div} \mathbf{S} \cdot \mathbf{v} \mathbf{dx} = \int_{\partial\Omega} \mathbf{S}\,\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \mathbf{da}\,, \tag{6.46}$$

cunoscută în mecanică sub numele de *teorema asupra puterii totale* sau *principiul lucrului mecanic virtual.*

2) Dacă $\mathbf{S} \in \mathcal{V}_2$ şi $\mathbf{v} \in \mathcal{V}_1$ , atunci are loc condiţia *de ortogonalitate*

$$\int_\Omega \mathbf{S} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{v}) \mathbf{dx} = \mathbf{0}. \tag{6.47}$$

**Demonstraţia** punctului 1) se obţine prin aplicarea teoremei Green - Gauss, observând că în reprezentări într-o bază carteziană are loc identitatea

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{v}) + \operatorname{div} \mathbf{S} \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x^j}} (\mathbf{S^{ij} v_i}),$$

Prin aplicarea teoremei Green - Gauss deducem că

$$\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x^j}(S^{ij}v_i)dx = \int_{\partial\Omega} S^{ij}v_in_jda.$$

2) Pentru funcţiile regulate din $\mathcal{V}_1$ , $\mathcal{V}_2$ , din relaţia (46) deducem condiţia (47), deoarece din (40) avem condiţii nule pe porţiunile frontierei, iar $\mathbf{S}$ este cu divergenţă nulă. Prin închidere în raport cu normele construite pe spaţiile corespunzătoare, rezultă egalitatea din (47) pentru elementele din $\mathcal{V}_1$ şi $\mathcal{V}_2$.

Se demonstrează (pot fi utilizate reprezentările şi tehnicile din Ladijesnkaia [1970], sau vezi menţiunile din Ionescu, Sofonea [1993]) că are loc reciproca din Propoziţia 5. punctul 2) .

**Propoziţia 6.** $\mathbf{E}(\mathcal{V}_1)$ este complementul ortogonal al lui $\mathcal{V}_2$ în $L$.

Deci din condiţia *de ortogonalitate*

$$(\mathbf{S},\mathbf{E}(\mathbf{v})) \equiv \int_{\boldsymbol{\Omega}} \mathbf{S}\cdot\mathbf{E}(\mathbf{v})\mathbf{dx} = \mathbf{0} \quad \forall\, \mathbf{v}\in\mathcal{V}_1, \tag{6.48}$$

rezultă că $\mathbf{S}\in\mathcal{V}_2$.

**Demonstraţia** decurge prin considerarea identităţii (44) sau (46) pentru funcţii regulate, cu utilizarea ipotezei. Deducem că

$$\int_\Omega \operatorname{div}\mathbf{S}\cdot\mathbf{v}\,dx = \int_{\partial\Omega}\mathbf{S}\,\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}\,da, \tag{6.49}$$

pentru orice $\mathbf{v}\in\mathcal{V}_1$. Deoarece $\mathbf{v}\,|_{\Gamma_1} = \mathbf{0}$, în sensul urmei, în (49) integrala pe $\partial\Omega = \Gamma_1\cup\Gamma_2$ se reduce la integrala pe $\Gamma_2$ :

$$\int_\Omega \operatorname{div}\mathbf{S}\cdot\mathbf{v}\,dx = \int_{\Gamma_2}\mathbf{S}\,\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}\,da. \tag{6.50}$$

Fară a intra în detaliile demonstraţiei să observăm că în (50) putem considera $\mathbf{v}=\mathbf{0}$ pe $\partial\Omega$. Atunci $\int_\Omega \operatorname{div}\mathbf{S}\cdot\mathbf{v}dx \equiv ((\operatorname{div}\mathbf{S},\mathbf{v})) = 0$, care este o condiţia de ortogonalitate în $L_u$, pentru $\forall\,\mathbf{v}\in L_u$. Rezultă că $\operatorname{div}\mathbf{S}=\mathbf{0}$. Revenim în (50), din care rămâne $\int_{\Gamma_2}\mathbf{S}\,\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}\,da = 0$ cu $\mathbf{v}\in L_u$ , arbitrar încă pe $\Gamma_2$. Rezultă în final $\mathbf{S}\,\mathbf{n}=\mathbf{0}$ în sensul urmei. Deci $\mathbf{S}\in\mathcal{V}_2$,: conform definiţiilor din (40).

**Propoziţia 7.** Dacă $\mathcal{X}$ este unul din spaţiile Hilbert anterioare atunci

$$C^0([a,b],\mathcal{X}) = \{\mathbf{z}:[a,b]\longrightarrow\mathcal{X},\quad \text{continue}\},$$

$$C^1([a,b],\mathcal{X}) = \{\mathbf{z}:[a,b]\longrightarrow\mathcal{X},\quad \exists\,\dot{\mathbf{z}}\in C^0([a,b],\mathcal{X})\},$$

sunt spaţii normate cu normele definite prin

$$\max_{t\in[a,b]}\|\,\mathbf{z}(t)\,\| \quad \text{şi respectiv} \quad \max_{t\in[a,b]}\|\,\mathbf{z}(t)\,\| + \max_{t\in[a,b]}\|\,\dot{\mathbf{z}}(t)\,\|\,.$$

In mecanică se folosesc conceptele de *câmp static* şi câmp *cinematic admisibile*, care au generat definiţiile din (40) pentru spaţiile în care se găsesc soluţiile (*generalizate* ) ale problemelor la limită formulate.

**Definiţia 9.** Un câmp $\mathbf{S} : \Omega \longrightarrow Sim$ se *numeşte static admisibil* dacă

$$\operatorname{div} \mathbf{S} + \mathbf{b}(t) = 0\,, \quad \mathbf{Sn}\,|_{\Gamma_2} = \mathbf{f}(t), \tag{6.51}$$

cu clasa ce regularitate a soluţiei clasice, $\mathbf{S} \in C^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$. Notăm prin $\mathcal{T}_{ad}$ mulţimea câmpurilor static admisibile.

**Definiţia 10.** Un câmp $\mathbf{v} : \Omega \longrightarrow \mathcal{V}$ se *numeşte cinematic admisibil* dacă

$$\mathbf{u}\,|_{\Gamma_1} = \mathbf{g}(t), \tag{6.52}$$

cu clasa de regularitate a soluţiei clasice, $\mathbf{u} \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$. Notăm prin $\mathcal{U}_{ad}$ mulţimea câmpurilor cinematic admisibile.

Atunci *principiul lucrului mecanic virtual*, din (46) se reformulează astfel

**Propoziţia 8.** $\forall\, \mathbf{S} \in \mathcal{T}_{ad}$ şi $\forall\, \mathbf{v} \in \mathcal{U}_{ad}$ are loc condiţia

$$\int_\Omega \mathbf{S} \cdot \mathbf{Ev} dx = \int_\Omega \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dx + \int_{\Gamma_2} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} da + \int_{\Gamma_1} \mathbf{S}\,\mathbf{n} \cdot \mathbf{g} da. \tag{6.53}$$

### 6.2.2 Problema elastică

In problema elastică de echilibru formulată prin (27)-(29) intervine timpul sub formă de parametru, ceea ce înseamnă considerarea unei familii de soluţii elastice, determinate la fiecare moment de timp. Vom prezenta succint modalitatea de demonstrare a existenţei şi unicităţii soluţiei *generalizate* pentru problema elastică.

**Problema de tip elastic** revine la aflarea câmpurilor $(\mathbf{u}, \mathbf{T}) : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}^3 \times Sim$ care verifică (27) - (29). Se formulează *problema generalizată* prin intermediul **Teoremei asupra puterii totale** (53) , care capătă forma

$$\int_\Omega \mathcal{E}\mathbf{E}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{v}) \mathbf{dx} + = \int_\Omega \mathbf{b} \cdot \mathbf{vdx} + \int_{\Gamma_2} \mathbf{f} \cdot \mathbf{vda} + \int_{\Gamma_1} \mathbf{T\,n} \cdot \mathbf{gda} \tag{6.54}$$

dacă $\mathbf{S}$, arbitrar în spaţiul tensiunilor admisibile este înlocuit prin $\mathbf{T}$, tensiunea corespunzătoare soluţiei elastice şi se utilizează condiţiile pe frontieră (28), în sensul urmei, pentru fiecare moment de timp fixat. (54) are loc pentru orice câmp cinematic admisibil, deci $\forall\, \mathbf{v} \in H$ cu $\mathbf{v}\,|_{\Gamma_1} = \mathbf{g}$.

**Propoziţia 9.** Din ipotezele asupra tensorului elastic $\mathcal{E}$ există

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) : H \times H \longrightarrow R,$$

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_\Omega \mathcal{E}\mathbf{E}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{v}) dx, \tag{6.55}$$

$$|\, a(\mathbf{v}, \mathbf{v})\, | \geq d\,(\mathbf{E}(\mathbf{v}), \mathbf{E}(\mathbf{v}))^{1/2} \geq c(\Omega)\, \|\, \mathbf{v}\, \|_H \quad \forall \quad \mathbf{v} \in \mathcal{V}_1,$$

*simetrică, biliniară, continuă şi coercivă .*

**Demonstraţie**. Din (55) obţinem că $a(\mathbf{u},\mathbf{v}) = a(\mathbf{v},\mathbf{u})$, adică simetria şi $| a(\mathbf{u},\mathbf{v}) | \leq c_2 | \mathbf{u} | | \mathbf{v} |$, deci continuitatea. Coercivitatea este dată de ultima inegalitate din (55), care este o consecinţă a inegalităţii lui Korn (43), adevărată pentru $\mathbf{v} \in \mathcal{V}_1$.

Presupunem că $\exists \mathbf{u}_1 \in H$ astfel încât $\mathbf{u}_1 |_{\Gamma_1} = \mathbf{g}$. Atunci considerăm translaţia $\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_1$ în $(55)_2$, prin care rezultă problema

$$a(\bar{\mathbf{u}},\mathbf{v}) = \int_\Omega \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dx + \int_{\Gamma_2} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} da - a(\mathbf{u}_1,\mathbf{v}), \tag{6.56}$$

scrisă pentru orice $\mathbf{v} \in \mathcal{V}_1$.

In final mai menţionăm că pentru $\mathbf{v} \in H$

$$(E(\mathbf{v}), E(\mathbf{v})) = 0 \quad \text{dacă şi numai dacă} \quad \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{a} + \mathbf{w}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0). \tag{6.57}$$

Termenul din dreapta caracterizează o mişcare de corp rigid. Dacă $\mathbf{v} \in \mathcal{V}_1$ atunci el se anulează, în sensul urmei, pe porţiunea $\Gamma_1$ de frontieră şi atunci rezultă că mişcarea de corp rigid este nulă. Prin (55) cu (57) a fost introdusă pe $\mathcal{V}_1$ o normă echivalentă cu norma pe $H$ .

**Teorema 2.** Problema elastică generalizată - să se determine $\mathbf{u} \in \mathcal{V}_1$ astfel încât $\forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}_1$ să aibă loc egalitatea

$$a(\bar{\mathbf{u}},\mathbf{v}) = \int_\Omega \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dx + \int_{\Gamma_2} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} da - a(\mathbf{u}_1,\mathbf{v}), \tag{6.58}$$

pentru $\mathbf{b} \in L_u$, $\mathbf{f} \in H_1'$ şi forma $a$, definită în Propoziţia 9. - admite o unică soluţie în $\mathcal{V}_1$.

**Demonstraţia** rezultă din aplicarea Lemei lui Lax- Milgram (vezi de exemplu Roşca [1997], paragraful 11.1), termenul din membrul drept definind o funcţională liniară şi continuă pe $\mathcal{V}_1$, ca o consecinţă a definiţiilor introduse.

**Observaţia 15.** Dacă se consideră date dependente de timp, cu $\mathbf{b} \in C^1(R_+, L_u)$, $\mathbf{f} \in C^1(R_+, H_1')$ şi $\mathbf{h} \in C^1(R_+, H_\Gamma)$, care are proprietatea că $\mathbf{h} = \mathbf{g}$ pe $\Gamma_1$ atunci rezultă şi formulele de *dependenţă continuă* de date pentru soluţia problemei elastice generalizate, formulată la început. Dacă $(\mathbf{u}_j, \mathbf{T}_j)$ cu $j = 1, 2$ corespunzătoare datelor notate cu indicele $j$, atunci pentru orice moment de timp $t \in R_+$ au loc inegalităţile

$$\begin{aligned} &\| \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 \|_H + \| \mathbf{T}_1 - \mathbf{T}_2 \|_d \leq \\ &\leq C\{\| \mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2 \| + \| \mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2 \|_{\Gamma'} + \| \mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2 \|_\Gamma\} \end{aligned} \tag{6.59}$$

şi inegalităţi similare conţinând derivatele temporale ale câmpurilor introduse.

### 6.2.3 Problema vâscoplastică

Problema vâscoplastică a fost formulată în (31)-(34) şi conţine soluţia problemei elastice (27)-(29).

Demonstrarea unui rezultat de *existentă şi unicitate a soluţiei generalizate* se face în spaţiul funcţional produs $\mathcal{V} \equiv \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2$ pe care definim produsul scalar $< \cdot, \cdot >_{\mathcal{V}}$ prin

$$< \mathbf{y}, \mathbf{z} >_{\mathcal{V}} = \int_\Omega \mathcal{E}\mathbf{E}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{v}) dx + \int_\Omega \mathcal{E}^{-1}\, \mathbf{T} \cdot \mathbf{P} dx, \qquad \forall\, \mathbf{y} = (\mathbf{u}, \mathbf{T}), \quad \mathbf{z} = (\mathbf{v}, \mathbf{S}) \in \mathcal{V} \tag{6.60}$$

Produsul scalar induce o *normă energetică.*

**Observaţia 16.** In problema vâscoplastică considerată aici câmpurile tensoriale static admisibile au $\operatorname{div} \mathbf{S} = 0$ şi deci corespund unor forţe volumice nule. Ca urmare în expresia produsului scalar pe $\mathcal{V}_2$, deci şi a normei, nu mai apar termenii care conţin divergenţa câmpurilor tensoriale static admisibile.

**Teorema 3.** Perechea $\mathbf{y} = (\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{T}})$ este soluţia problemei vâscoplastice (31)-(34) dacă şi numai dacă $\mathbf{y}$ este soluţie în spaţiul Hilbert $\mathcal{V}$ a problemei Cauchy

$$\dot{\mathbf{y}} = A(t, \mathbf{y}) \quad \text{cu} \quad \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0. \tag{6.61}$$

Operatorul $A(t, \mathbf{y})$ este definit prin

$$\begin{aligned} < A(t,\mathbf{y}), \mathbf{z} > \; &= -\int_\Omega \mathcal{G}(\bar{\mathbf{T}}(t) + \tilde{\mathbf{T}}(t), \mathbf{E}(\bar{\mathbf{u}})(t) + \mathbf{E}(\tilde{\mathbf{u}})(t)) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{v}) dx + \\ &+ \int_\Omega \mathcal{E}^{-1} \mathcal{G}(\bar{\mathbf{T}}(t) + \tilde{\mathbf{T}}(t), \mathbf{E}(\bar{\mathbf{u}})(t) + \mathbf{E}(\tilde{\mathbf{u}})(t)) \cdot \mathbf{P} dx, \end{aligned} \tag{6.62}$$

pentru orice $\mathbf{z} = (\mathbf{v}, \mathbf{P}) \in \mathcal{V}$.

**Demonstraţie.** Fie $(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{T}}) \in C^1(R_+, \mathcal{V})$ soluţia problemei vâscoplastice (31)-(34) a cărei existenţă o acceptăm, atunci conform *principiului lucrului mecanic virtual* (44) are loc identitatea

$$\int_\Omega \mathbf{T}(t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{v}) \mathbf{dx} = \mathbf{0} \quad \forall\, \mathbf{t} > \mathbf{0}, \tag{6.63}$$

pentru orice $\mathbf{v} \in \mathcal{V}_1$. In particular are loc şi pentru $\mathbf{v} = \bar{\mathbf{u}}$. Din (63) rezultă şi

$$\int_\Omega \dot{\bar{\mathbf{T}}}(t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{v}) \mathbf{dx} = \mathbf{0} \quad \forall\, \mathbf{t} > \mathbf{0}. \tag{6.64}$$

Folosim reprezentarea constitutivă (32), pe care o înmulţim scalar cu $\mathbf{E}(\mathbf{v})$ şi o integrăm pe $\Omega$, pentru $t$ fixat. Folosim (64) şi obţinem

$$\begin{aligned} 0 \; &= \int_\Omega \dot{\bar{\mathbf{T}}}(t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{v}) dx = \int_\Omega \mathcal{E}[\mathbf{E}(\dot{\bar{\mathbf{u}}})(t)] \cdot \mathbf{E}(\mathbf{v}) dx + \\ &+ \int_\Omega \mathcal{G}(\bar{\mathbf{T}}(t) + \tilde{\mathbf{T}}(t), \mathbf{E}(\bar{\mathbf{u}})(t) + \mathbf{E}(\tilde{\mathbf{u}})(t)) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{v}) dx \quad \forall\, \mathbf{v} \in \mathcal{V}_1. \end{aligned} \tag{6.65}$$

Aplicăm transformarea $\mathcal{E}^{-1}$ reprezentării constitutive (32) şi deducem că

$$\mathcal{E}^{-1}\dot{\bar{\mathbf{T}}}(t) = \mathbf{E}(\dot{\bar{\mathbf{u}}})(t) + \mathcal{E}^{-1}\mathcal{G}(\bar{\mathbf{T}}(t) + \tilde{\mathbf{T}}(t), \mathbf{E}(\bar{\mathbf{u}})(t) + \mathbf{E}(\tilde{\mathbf{u}})(t)). \tag{6.66}$$

In (66) înmulţim scalar cu $\mathbf{P} \in \mathcal{V}_2$ şi prin integrare pe $\Omega$ rezultă

$$\begin{aligned}\int_\Omega \mathcal{E}^{-1}\dot{\bar{\mathbf{T}}}(t)\cdot\mathbf{P}dx &= \int_\Omega \mathbf{E}(\dot{\bar{\mathbf{u}}})(t)\cdot\mathbf{P}dx+\\ &+\int_\Omega \mathcal{E}^{-1}\mathcal{G}(\bar{\mathbf{T}}(t) + \tilde{\mathbf{T}}(t), \mathbf{E}(\bar{\mathbf{u}})(t) + \mathbf{E}(\tilde{\mathbf{u}})(t))\cdot\mathbf{P}dx \quad \forall\,\mathbf{P}\in\mathcal{V}_2.\end{aligned} \tag{6.67}$$

Din (65) şi (67) în care aplicăm condiţia de ortogonalitate (47) deducem identităţile

$$\begin{aligned}\int_\Omega \mathcal{E}[\mathbf{E}(\dot{\bar{\mathbf{u}}})(t)]\cdot\mathbf{E}(\mathbf{v})dx &= -\int_\Omega \mathcal{G}(\bar{\mathbf{T}}(t) + \tilde{\mathbf{T}}(t), \mathbf{E}(\bar{\mathbf{u}})(t) + \mathbf{E}(\tilde{\mathbf{u}})(t))\cdot\mathbf{E}(\mathbf{v})dx,\\ \int_\Omega \mathcal{E}^{-1}\dot{\bar{\mathbf{T}}}(t)\cdot\mathbf{P}dx &= \int_\Omega \mathcal{E}^{-1}\mathcal{G}(\bar{\mathbf{T}}(t) + \tilde{\mathbf{T}}(t), \mathbf{E}(\bar{\mathbf{u}})(t) + \mathbf{E}(\tilde{\mathbf{u}})(t))\cdot\mathbf{P}dx.\end{aligned} \tag{6.68}$$

adevărate pentru $\forall\,\mathbf{v}\in\mathcal{V}_1$ şi $\forall\,\mathbf{P}\in\mathcal{V}_2$.

Folosim definiţia produsului scalar $<\cdot,\cdot>_V$ introdus în (60), pentru perechea $(\dot{\mathbf{y}}, \mathbf{z})$, la un anumit moment de timp dat, fixat şi găsim

$$\begin{aligned}<\dot{\mathbf{y}},\mathbf{z}>_V &= \int_\Omega \mathcal{E}\mathbf{E}(\dot{\mathbf{u}})\cdot\mathbf{E}(\mathbf{v})dx + \int_\Omega \mathcal{E}^{-1}\,\dot{\mathbf{T}}\cdot\mathbf{P}dx =\\ &-\int_\Omega \mathcal{G}(\bar{\mathbf{T}}(t) + \tilde{\mathbf{T}}(t), \mathbf{E}(\bar{\mathbf{u}})(t) + \mathbf{E}(\tilde{\mathbf{u}})(t))\cdot\mathbf{E}(\mathbf{v})dx+\\ &+\int_\Omega \mathcal{E}^{-1}\mathcal{G}(\bar{\mathbf{T}}(t) + \tilde{\mathbf{T}}(t), \mathbf{E}(\bar{\mathbf{u}})(t) + \mathbf{E}(\tilde{\mathbf{u}})(t))\cdot\mathbf{P}dx,\end{aligned} \tag{6.69}$$

dacă au fost utilizate relaţiile (68). (69) are loc pentru orice $\mathbf{v}\in\mathcal{V}_1$ şi $\forall\mathbf{P}\in\mathcal{V}_2$.

Pentru perechea $\mathbf{y} = (\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{T}})$ la orice moment de timp $t$ fixat, să observăm că aplicaţia prin care i se asociază fiecărui element $\mathbf{z}\in\mathcal{V}$, numărul real din membrul drept al relaţiei (69), este liniară şi mărginită, în baza ipotezelor (35), (36). Aplicaţia fiind deci liniară şi continuă. Prin aplicarea teoremei lui Riesz de reprezentare a funcţionalelor liniare şi continue pe spaţii Hilbert, rezultă că există elementul, notat $A(t,\mathbf{y})\in\mathcal{V}$, astfel încât valoarea funcţionalei, definită prin (69), să fie dată de $<A(t,\mathbf{y}),\mathbf{z}>_V$ .

$$\forall\,\mathbf{z}\equiv(\mathbf{v},\mathbf{P})\in\mathcal{V}\longrightarrow$$

$$\begin{aligned}&-\int_\Omega \mathcal{G}(\bar{\mathbf{T}}(t) + \tilde{\mathbf{T}}(t), \mathbf{E}(\bar{\mathbf{u}})(t) + \mathbf{E}(\tilde{\mathbf{u}})(t))\cdot\mathbf{E}(\mathbf{v})dx+\\ &+\int_\Omega \mathcal{E}^{-1}\mathcal{G}(\bar{\mathbf{T}}(t) + \tilde{\mathbf{T}}(t), \mathbf{E}(\bar{\mathbf{u}})(t) + \mathbf{E}(\tilde{\mathbf{u}})(t))\cdot\mathbf{P}dx \equiv <A(t,\mathbf{y}),\mathbf{z}>_V\end{aligned} \tag{6.70}$$

Am obţinut astfel expresia operatorului introdus în (62).

Din (70) şi (69) deducem că

$$< \dot{\mathbf{y}}, \mathbf{z} >_V = < A(t, \mathbf{y}), \mathbf{z} >_V \quad \forall \, \mathbf{z} \in \mathcal{V} \quad \Longleftrightarrow \quad \dot{\mathbf{y}} = A(t, \mathbf{y}). \tag{6.71}$$

In ipoteza că soluţia problemei vâscoase există şi este de clasă $C^1$ în raport cu timpul, din ipotezele formulate pentru funcţiile constitutive deducem că aceasta este soluţie pentru ecuaţia diferenţială în spaţii Hilbert scrisă în (71). Condiţia iniţială $\mathbf{y}(0) = (\bar{\mathbf{u}}(0), \bar{\mathbf{T}}(0))$ este dată prin condiţiile iniţiale (34) ale problemei.

Dacă $\mathcal{G}$ este Lipschitz atunci şi $A(t, \cdot)$ este Lipschitz în al doilea argument şi continuă în raport cu primul.

**Reciproc.** Fie $(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{T}}) \equiv \mathbf{y} \in \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2$ soluţia de clasă $C^1([0, t_1), \mathcal{V})$, a problemei Cauchy pentru ecuaţia diferenţială în spaţiul Hilbert , scrisă sub forma

$$\begin{aligned} &< \dot{\mathbf{y}}, \mathbf{z} >_V = < A(t, \mathbf{y}), \mathbf{z} >_V \equiv \\ &\qquad - \int_\Omega \mathcal{G}(\bar{\mathbf{T}}(t) + \tilde{\mathbf{T}}(t), \mathbf{E}(\bar{\mathbf{u}})(t) + \mathbf{E}(\tilde{\mathbf{u}})(t)) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{v}) dx + \\ &\qquad + \int_\Omega \mathcal{E}^{-1} \mathcal{G}(\bar{\mathbf{T}}(t) + \tilde{\mathbf{T}}(t), \mathbf{E}(\bar{\mathbf{u}})(t) + \mathbf{E}(\tilde{\mathbf{u}})(t)) \cdot \mathbf{P} dx \end{aligned} \tag{6.72}$$

pentru $\forall \, \mathbf{z} = (\mathbf{v}, \mathbf{P}) \in \mathcal{V}$. Vrem să demonstrăm că

1) $\bar{\mathbf{T}}$ este static admisibil,

2) $\bar{\mathbf{u}}$ este cinematic admisibil,

3) elementele $\mathbf{E}(\bar{\mathbf{u}})$, $\bar{\mathbf{T}}$ sunt legate prin reprezentarea constitutivă (32).

In acest fel demonstrăm că are loc reciproca teoremei.

Particularizăm elementul arbitrar din (72) pentru a produce decuplajul elementelor din perechea $\mathbf{y}$.

Fie $\mathbf{z} = (\mathbf{v}, 0) \in \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2$ introdusă în (72), atunci

$$< \dot{\mathbf{y}}, \mathbf{z} >_V = - \int_\Omega \mathcal{G}(\bar{\mathbf{T}}(t) + \tilde{\mathbf{T}}(t), \mathbf{E}(\bar{\mathbf{u}})(t) + \mathbf{E}(\tilde{\mathbf{u}})(t)) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{v}) dx \tag{6.73}$$

In (73) înlocuim expresia (60) a produsului scalar din membrul stâng şi astfel (73) devine echivalentă cu

$$\int_\Omega \mathcal{E}\mathbf{E}(\dot{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{v}) dx + \int_\Omega \mathcal{G}(\bar{\mathbf{T}}(t) + \tilde{\mathbf{T}}(t), \mathbf{E}(\bar{\mathbf{u}})(t) + \mathbf{E}(\tilde{\mathbf{u}})(t)) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{v}) dx = 0, \tag{6.74}$$

scrisă pentru $\forall \, \mathbf{v} \in \mathcal{V}_1$.

Pentru orice $t > 0$, fixat, din domeniul de existenţă a soluţiei definim câmpul tensorial pus în evidenţă în (74)

$$\begin{aligned} &\mathbf{S} \equiv \mathcal{E}\mathbf{E}(\dot{\mathbf{u}}) + \mathcal{G}(\bar{\mathbf{T}}(t) + \tilde{\mathbf{T}}(t), \mathbf{E}(\bar{\mathbf{u}})(t) + \mathbf{E}(\tilde{\mathbf{u}})(t)) \quad \text{cu} \\ &\int_\Omega \mathbf{S} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{v}) dx = 0, \end{aligned} \tag{6.75}$$

pentru $\forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}_1$. Din relaţia $(75)_2$ (ca o consecinţă a Propoziţiei 6.) deducem că $\mathbf{S} \in \mathcal{V}_2$, deci $\operatorname{div} \mathbf{S} = 0$ şi $\mathbf{Sn}\,|_{\Gamma_2} = 0$.

Fie acum $\mathbf{z} = (0, \mathbf{P}) \in \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2$ introdus în (72), atunci

$$< \dot{\mathbf{y}}, \mathbf{z} >_V = \int_\Omega \mathcal{E}^{-1} \mathcal{G}(\bar{\mathbf{T}}(t) + \tilde{\mathbf{T}}(t), \mathbf{E}(\bar{\mathbf{u}})(t) + \mathbf{E}(\tilde{\mathbf{u}})(t)) \cdot \mathbf{P} dx. \tag{6.76}$$

In (76) înlocuim expresia (60) a produsului scalar şi obţinem egalitatea

$$\int_\Omega \mathcal{E}^{-1}[\dot{\mathbf{T}}(t) - \mathcal{G}(\bar{\mathbf{T}}(t) + \tilde{\mathbf{T}}(t), \mathbf{E}(\bar{\mathbf{u}})(t) + \mathbf{E}(\tilde{\mathbf{u}})(t))] \cdot \mathbf{P} dx = 0, \tag{6.77}$$

adevărată pentru $\forall \mathbf{P} \in \mathcal{V}_2$.

Astfel din (77) deducem că există elementul $\mathbf{E}^*$ cu proprietăţile

$$\begin{gathered} \mathbf{E}^* = \mathcal{E}^{-1}[\dot{\tilde{\mathbf{T}}}(t) - \mathcal{G}(\bar{\mathbf{T}}(t) + \tilde{\mathbf{T}}(t), \mathbf{E}(\bar{\mathbf{u}})(t) + \mathbf{E}(\tilde{\mathbf{u}})(t))] \quad \Longleftrightarrow \\ \dot{\tilde{\mathbf{T}}}(t) = \mathcal{E}\, \mathbf{E}^* + \mathcal{G}(\bar{\mathbf{T}}(t) + \tilde{\mathbf{T}}(t), \mathbf{E}(\bar{\mathbf{u}})(t) + \mathbf{E}(\tilde{\mathbf{u}})(t)) \end{gathered} \tag{6.78}$$

şi

$$\int_\Omega \mathbf{E}^* \cdot \mathbf{P} dx = 0. \tag{6.79}$$

Introducem câmpul tensorial $\mathbf{B}(t) \in L^2(\Omega)$

$$\mathbf{B}(t) = \dot{\tilde{\mathbf{T}}}(t) - \mathcal{E}[\mathbf{E}(\dot{\tilde{\mathbf{u}}})(t)] - \mathcal{G}(\bar{\mathbf{T}}(t) + \tilde{\mathbf{T}}(t), \mathbf{E}(\bar{\mathbf{u}})(t) + \mathbf{E}(\tilde{\mathbf{u}})(t)), \tag{6.80}$$

atunci din (80) cu $(75)_1$ şi $(78)_2$ rezultă că

$$\mathbf{B}(t) = \dot{\tilde{\mathbf{T}}}(t) - \mathbf{S} \quad \text{şi} \quad \mathbf{B}(t) = \mathcal{E}\, \mathbf{E}^* - \mathcal{E}[\mathbf{E}(\dot{\tilde{\mathbf{u}}})(t)]. \tag{6.81}$$

Din $(81)_2$ cu (79) şi (46) rezultă că

$$\int_\Omega \mathcal{E}^{-1} \mathbf{B}(t) \cdot \mathbf{P} dx = 0, \tag{6.82}$$

pentru $\mathbf{P} \in \mathcal{V}_2$. Avem deci $\mathcal{E}^{-1}\mathbf{B}(t) \in \mathcal{V}_1$. Deoarece $\dot{\mathbf{T}}(t)$, $\mathbf{S} \in \mathcal{V}_2$, rezultă că $\mathbf{B}(t) \in \mathcal{V}_2$. Introducem pe $\mathbf{B}$ (t) în (82) şi deducem că

$$\int_\Omega \mathcal{E}^{-1} \mathbf{B}(t) \cdot \mathbf{B}(t) dx = 0 \tag{6.83}$$

Deoarece $\mathcal{E}^{-1}$ este strict pozitiv definit din (83) avem $\mathbf{B}(t) = \mathbf{0}$. Atunci din (80) deducem că (32) este satisfăcută.

Folosind Teorema 3., problema (31) - (34) a fost înlocuită cu problema Cauchy (61) în spaţiul Hilbert $\mathcal{V}$. Demonstraţia existenţei şi unicităţii soluţiei problemei Cauchy (61) se bazează pe următorul rezultat ( dat în Pavel, Ursescu [1974]) :

**Teorema 4.** Fie $\mathcal{V}$ un spaţiu Hilbert şi $A : R_+ \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$ un operator continuu astfel încât există o constantă $D > 0$ cu proprietatea

$$< A(t, \mathbf{y}_1) - A(t, \mathbf{y}_2), \mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 >_{\mathcal{V}} \leq D \parallel \mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \parallel^2_{\mathcal{V}}, \qquad (6.84)$$

pentru $\forall t > 0$ şi $\forall \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \mathcal{V}$. Atunci pentru orice $\mathbf{y}_0 \in \mathcal{V}$ există o soluţie unică $\mathbf{y} \in C^1(R_+, \mathcal{V})$ pentru problema (61).

**Lema 1.** Operatorul $A$ definit prin (62) este continuu şi satisface (84).

**Demonstraţie.** Fie $t_j > 0$, cu $j = 1, 2$, şi $\mathbf{y}_1 = (\mathbf{u}_1, \mathbf{T}_1), \mathbf{y}_2 = (\mathbf{u}_2, \mathbf{T}_2)$. Notăm $\mathbf{E}(u_j) \equiv \mathbf{E}_j$ şi $\mathbf{E}(\tilde{\mathbf{u}})(t_1) \equiv \tilde{\mathbf{E}}(t_1)$. Pentru orice $(\mathbf{v}, \mathbf{P})$ avem

$$\begin{aligned} |< A(t_1, \mathbf{y}_1) - A(t_2, \mathbf{y}_2), \mathbf{z} >_{\mathcal{V}}| \leq & \\ & \leq |< \mathcal{G}(\mathbf{T}_1 + \tilde{\mathbf{T}}(t_1), \mathbf{E}_1 + \tilde{\mathbf{E}}(t_1)), \mathbf{E}(\mathbf{v}) > - \\ & - < \mathcal{G}(\mathbf{T}_2 + \tilde{\mathbf{T}}(t_2), \mathbf{E}_2 + \tilde{\mathbf{E}}(t_2)), \mathbf{E}(\mathbf{v}) >| + \qquad (6.85) \\ & + |< \mathcal{E}^{-1}\mathcal{G}(\mathbf{T}_1 + \tilde{\mathbf{T}}(t_1), \mathbf{E}_1 + \tilde{\mathbf{E}}(t_1)) - \\ & - \mathcal{E}^{-1}\mathcal{G}(\mathbf{T}_2 + \tilde{\mathbf{T}}(t_2), \mathbf{E}_2 + \tilde{\mathbf{E}}(t_2)), \mathbf{P} >| \, . \end{aligned}$$

Folosind ipotezele referitor la funcţia $\mathcal{G}$ deducem, după un număr de estimări că

$$\begin{aligned} |< A(t_1, \mathbf{y}_1) - A(t_2), \mathbf{y}_2), \mathbf{z} >_{\mathcal{V}}| \leq & \qquad (6.86) \\ \leq C(\parallel \mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \parallel_{\mathcal{V}} + \parallel \tilde{\mathbf{u}}(t_1) - \tilde{\mathbf{u}}(t_2) \parallel_H + \parallel \tilde{\mathbf{T}}(t_1) - \tilde{\mathbf{T}}(t_2) \parallel_d) \parallel \mathbf{z} \parallel_{\mathcal{V}} . \end{aligned}$$

Deoarece $\mathbf{z} \in \mathcal{V}$ este arbitrar rezultă că

$$\begin{aligned} \parallel A(t_1, \mathbf{y}_1) - A(t_2, \mathbf{y}_2) \parallel_{\mathcal{V}} \leq & \qquad (6.87) \\ \leq C(\parallel \mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \parallel_{\mathcal{V}} + \parallel \tilde{\mathbf{u}}(t_1) - \tilde{\mathbf{u}}(t_2) \parallel_H + \parallel \tilde{\mathbf{T}}(t_1) - \tilde{\mathbf{T}}(t_2) \parallel_d). \end{aligned}$$

Din ultima relaţie, dacă se folosesc inegalităţile deduse din condiţia de continuitate a soluţiei elastice în raport cu datele (59), rezultă continuitatea operatorului $A$ din $R_+ \times \mathcal{V}$ în $\mathcal{V}$. Dacă în relaţia (87) se consideră $t_1 = t_2 = t$ rezultă condiţia

$$\parallel A(t, \mathbf{y}_1) - A(t, \mathbf{y}_2) \parallel_{\mathcal{V}} \leq C \parallel \mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \parallel_{\mathcal{V}} . \qquad (6.88)$$

Am prezentat problema *cu date iniţiale şi la limită pentru o reprezentare constitutivă* care este deseori utilizată în multe aplicaţii privind deformările în masivele de roci. Implementările numerice se bazează pe decuplajul soluţiei elastice de problema vâscoplastică, sau de problema fluajului.

## 6.3 Exerciţii şi probleme

**1.** Arătaţi că forma biliniară $< \cdot, \cdot >_{\mathcal{V}}$ definită în (60) este un produs scalar pe $\mathcal{V}$ şi generează o *normă echivalentă* cu norma canonică pe spaţiul produs cartezian, $\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2$.

**2.** In ipotezele (35) şi (36) demonstraţi că are loc estimarea din (86) pentru operatorul $A(t, \mathbf{y})$ definit în (62).

**3.** Demonstraţi că soluţiile problemelor elastice şi respectiv vâscoplastice sunt unice.

**4.** Fie o reprezentare constitutivă de tip rate unidimensională (modelul lui Sokolovski) :

$$\dot{\sigma} = \varphi(\sigma, \epsilon)\dot{\epsilon} + \psi(\sigma, \epsilon),$$

cu $\varphi(\sigma, \epsilon) = E-$ modulul de elasticitate al lui Young, iar

$$\psi(\sigma, \epsilon) = \begin{cases} 0, & \text{dacă} \quad |\, \sigma \,| < \sigma_Y \\ (-\operatorname{sign} \sigma) F(|\, \sigma - \sigma_Y \,|), & \text{dacă} \quad |\, \sigma \,| \geq \sigma_Y, \end{cases}$$

în care $F(r) > 0$ , $F'(r) > 0$ pentru $r > 0$ şi $F(0) = 0$. Caz particular $F(r) = k\,E\,r$, în care $E$ , $k$ şi $\sigma_Y$ sunt constante de material pozitive.

a. Determinaţi curbele de relaxare.

b. Studiaţi fluajul şi relaxarea descrise de acest model.

c. Modelul are timpi de relaxare finiţi?

**5.** Fie un model de tip rate în care

$$\mathcal{E}(\mathbf{T}, \mathbf{E}) = \mathcal{E}_0\,, \quad \mathcal{G}(\mathbf{T}, \mathbf{E}) = -k(\mathbf{T} - f(\mathbf{E})),$$

cu $k > 0$ constantă de vâscozitate a materialului.

a. Analizaţi comportamentul materialului descris printr-un astfel de model, conform prezentării din Paragraful 6.1.

b. Fie dat un proces de deformare de forma

$$\mathbf{E}(\tau) = \begin{cases} 0, & \text{dacă} \quad \tau < 0 \\ x(\tau)(\mathbf{i}_1 \otimes \mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_2 \otimes \mathbf{i}_1), & \text{dacă} \quad \tau \geq 0, \end{cases}$$

cu $\{\mathbf{i}_k\}_{k \in \{\overline{1,3}\}}$ o bază carteziană fixată. Aici funcţia $x$ este de clasă $C^1([0, t_1))$ şi $x(0) = 0$.

Caracterizaţi răspunsul materialului şi comportamentul acestuia.

c. Care este diferenţa între cazul prezentat şi cel în care

$$\mathcal{E}_0[\mathbf{A}] = \lambda \mathrm{tr}\, \mathbf{A}\, \mathbf{I} + 2\,\mu \mathbf{A},\ \forall \quad \mathbf{A} \in Sim,$$

cu $\lambda$, $\mu > 0$ constante de material ?

**6.** Fie aceeaşi problemă ca în exerciţiul **5.** dar pentru un model în care

$$\mathcal{E}(\mathbf{T},\mathbf{E}) = \mathcal{E}_0\,, \quad \mathcal{G}(\mathbf{T},\mathbf{E}) = -k\, h(g(\mathbf{T}))(\mathbf{T} - f(\mathbf{E})),$$

în care $g(\mathbf{T}) = \sqrt{1/2\mathbf{T}\cdot\mathbf{T}} - k_1$. Aici se consideră că , $k$ şi $k_1$ sunt constante de material pozitive.

**7.** Fie un model de tip rate definit în (1), în care

$$\mathcal{E}(\mathbf{T},\mathbf{E}) = \mathcal{E}_0\,,\ \mathcal{G}(\mathbf{T},\mathbf{E}) = \frac{1}{2\eta}(\mathbf{T} - P_K\mathbf{T}), \quad \text{unde } K = \{\mathbf{T} \mid \sqrt{1/2\mathbf{T}'\cdot\mathbf{T}'} \leq k\},$$

iar $P_K$ reprezintă proiecţia pe mulţimea $K$ şi $\mathbf{T}' = \mathbf{T} - \frac{1}{3}(\mathrm{tr}\,\mathbf{T})\,\mathbf{I}$. Aici $\eta$, $k$ sunt constante de material pozitive.

a. Arătaţi că mulţimea $K$ este convexă şi închisă.

b. Arătaţi că modelul este de tip vâscoplastic.

c. Studiaţi proprietăţile de relaxare şi fluaj ale materialului.

d. Determinaţi curbele de relaxare.

e. Modelul are timpi de relaxare finiţi ?

f. Consideraţi un proces de deformaţie ca în exerciciţiul 5. b) şi cercetaţi răpunsul materialului.

**8.** Fie un model cu deformaţii finite, în care $\mathbf{T}$ reprezintă tensiunea Cauchy şi $\mathbf{D}$ tensorul viteză de deformare, descris printr-o reprezentare constitutivă de tip Bingham

$$\mathbf{D}' = \frac{1}{2\eta}(\mathbf{T} - P_K\mathbf{T}),\ \mathrm{tr}\,\mathbf{D} = 0,\ \text{iar } K = \{\mathbf{T} \mid \sqrt{1/2\mathbf{T}'\cdot\mathbf{T}'} \leq k\},$$

unde $P_K$ reprezintă proiecţia pe mulţimea $K$, iar $\mathbf{T}' = \mathbf{T} - \frac{1}{3}(\mathrm{tr}\,\mathbf{T})\,\mathbf{I}$ este deviatorul tensorului $\mathbf{T}$. Aici $\eta$, $k$ sunt constante de material pozitive.

a. Arătaţi că reprezentarea constitutivă este echivalentă cu

$$\mathbf{D}' = \frac{1}{2\eta} < 1 - \frac{k}{\sqrt{II_{T'}}} > \mathbf{T}', \quad \mathrm{tr}\,\mathbf{D} = 0,$$

în care $< z >= \frac{1}{2}(z+ \mid z \mid)$.

b. Demonstaţi că reprezentarea constitutivă este obiectivă.

c. Demonstraţi că reprezentarea constitutivă este inversabilă şi determinaţi inversa acesteia.

d. Se consideră o experienţă de forfecare simplă descrisă prin

$$\mathbf{F}(s) = \alpha(s)(\mathbf{i}_1 \otimes \mathbf{i}_2) + \mathbf{I},$$

în care $s \geq 0 \rightarrow \alpha(s)$ este o funcţie crescătoare de timp, cu $\alpha(0) = 0$. Determinaţi răspunsul materialului.

e. Materialul descrie proprietăţi de relaxare ? Dar de fluaj ?

**9.** Se consideră o reprezentare constitutivă descrisă prin

$$\mathbf{D}' = \frac{1}{2G}(\overset{\circ}{\mathbf{T}})' + \frac{1}{2\eta} < 1 - \frac{k}{\sqrt{II_{T'}}} > \mathbf{T}', \quad \operatorname{tr}\mathbf{D} = 0,$$

în care $< z >= \frac{1}{2}(z + \mid z \mid)$. Aici $\mathbf{T}$ şi $\mathbf{D}$ reprezintă tensorii de tensiune Cauchy şi respectiv tensorul viteză de deformare.

a. Arătaţi că $\overset{\circ}{\mathbf{T}} = \dot{\mathbf{T}} - \mathbf{W}\mathbf{T} + \mathbf{T}\mathbf{W}$, unde $\mathbf{W} = \{\mathbf{L}\}^A -$ tensorul spin, reprezintă un câmp obiectiv.

b. Arătaţi că reprezentarea constitutivă satisface principiul obiectivităţii.

c. Fie o experientă de forfecare simplă în tensiuni dată prin

$$\mathbf{T}(s) = y(s)(\mathbf{i}_1 \otimes \mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_2 \otimes \mathbf{i}_1)$$

în care $s \geq 0 \rightarrow y(s)$ este o funcţie crescătoare de timp, cu $y(0) = 0$. Determinaţi răspunsul materialului.

d. Fie experienţa de forfecare descrisă la punctul d. din exerciţiul precedent. Studiaţi răspunsul materialului.

e. Materialul descrie proprietăţi de relaxare ? Dar de fluaj ?

**10.** In cazul deformaţiilor finite se consideră reprezentarea constitutivă de forma

$$2\,\mu\mathbf{D} = \overset{\circ}{\mathbf{T}} + \lambda\, c(\mathbf{T}\mathbf{D} + \mathbf{D}\mathbf{T})$$

a. Arătaţi că reprezentarea constitutivă este obiectivă. Aici câmpul $\overset{\circ}{\mathbf{T}}$ este definit ca în exerciţiul 9. a., iar $\mu, \lambda, c$ sunt constante pozitive de material.

b. In ipoteza că are loc o mişcare vâscometrică care este starea de tensiune rezultată în material ?

c. Fie $c = 0$ şi materialul supus la o deformaţie de forfecare descrisă în exerciţiul 8. d. Determinaţi starea de tensiune rezultată, dacă la momentul $t = 0$ tensiunea este nulă.

d. Dacă starea de deformaţie este de forma $\mathbf{F}(s) = \mathbf{I}$ pentru $s < 0$ şi $\mathbf{F}(s) = \mathbf{F}_0$ pentru $s \geq 0$, cercetaţi dacă materialul prezintă proprietăţi de relaxare.

**11.** In cazul deformaţiilor finite se consideră o reprezentare constitutivă de tip rate de forma

$$\dot{\mathbf{T}} = \mathcal{E}(\mathbf{F}, \mathbf{T})[\dot{\mathbf{F}}],$$

cu $\mathcal{E} : Lin \longrightarrow Lin$ liniară.

a. Arătaţi că reprezentarea constitutivă satisface principiul obiectivităţii dacă şi numai dacă aceasta este de forma

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{T}^{\mathbf{R}}) = \mathcal{E}(\mathbf{U}, \mathbf{T}^{\mathbf{R}})[\dot{\mathbf{U}}],$$

unde $\mathbf{T}^{\mathbf{R}} = \mathbf{R}^T\mathbf{T}\mathbf{R}$ este tensorul rotit cu $\mathbf{R} \in Ort$, iar $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U}$ reprezintă descompunerea polară a gradientului de deformaţie.

b. Arătaţi că

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{T}^{\mathbf{R}}) = \mathbf{R}^T \frac{D}{Dt}(\mathbf{T})\mathbf{R},$$

unde $\dfrac{D}{Dt}(\mathbf{T}) \equiv \dot{\mathbf{T}} + \mathbf{T}\Omega - \Omega\mathbf{T}$ în care $\Omega = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T \in Asim$.

c. Arătaţi că $\dfrac{D}{Dt}(\mathbf{T})$ este un câmp tensorial obiectiv, dacă $\mathbf{T}$ este tensorul de tensiune al lui Cauchy.

**12.** Fie $\Pi = \mid \det \mathbf{F} \mid \mathbf{F}^{-1}\mathbf{T}\mathbf{F}^{-T}$ tensorul de tensiune Piola-Kirchhoff simetric.

a. Arătaţi că o reprezentare constitutivă de forma $\Pi = h(\mathbf{E})$ cu $\mathbf{E} = \dfrac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I})$, $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T\mathbf{F}$ descrie un corp elastic, cu deformaţii finite. Demonstraţi că reprezentarea constitutivă satisface principiul obiectivităţii.

b. Fie o ecuaţia constitutivă de tip rate $\dot{\Pi} = \mathcal{A}(\Pi, \mathbf{E})[\dot{\mathbf{E}}]$. Demonstaţi că principiul obiectivităţii este satisfăcut.

**13.** Se consideră o ecuaţie constitutivă de tip rate pentru cazul deformaţiilor finite, în raport cu configuraţia de referinţă scrisă sub forma

$$\dot{\Pi} = \mathcal{E}(\Pi, \mathbf{E})[\dot{\mathbf{E}}] + \mathcal{G}(\Pi, \mathbf{E}).$$

a. Determinaţi forma acestei reprezentări, în configuraţia actuală punând în evidenţă tensiunea Cauchy. Arătaţi că viteza de variaţie $\dot{\Pi}$ se înlocuieşte cu câmpul

$\check{\mathbf{T}} = (\det \mathbf{F})[\dot{\mathbf{T}} - \mathbf{L}\mathbf{T} - \mathbf{T}\mathbf{L}^T] + \mathbf{T}\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}$, iar $\dot{\mathbf{E}}$ cu $\mathbf{D}$.

b. Arătaţi că reprezentarea de tip rate satisface principiul obiectivităţii.

c. Pentru starea de deformaţie reprezentată la d. ex. **8** determinaţi variaţia tensiunii Piola-Kirchhoff şi a tensiunii Cauchy.

**14.** Fie o reprezentare constitutivă de forma

$$\check{\mathbf{T}} = \bar{\mathcal{E}}(\mathbf{T}, \mathbf{c})[\mathbf{D}] + \bar{\mathcal{G}}(\mathbf{T}, \mathbf{c}),$$

cu $\bar{\mathcal{E}}(\mathbf{T}, \mathbf{c}) : Sim \longrightarrow Sim$ liniară.

a. Determinaţi restricţiile impuse de principiul obiectivităţii asupra funcţiilor constitutive.

b. Dacă se consideră procesul de deformare din ex. **8** d. determinaţi starea de tensiune corespunzătoare.

c. Aceeaşi problemă pentru câmpul de deformaţie corespunzător unei forfecări simple.

**15.** Se consideră o ecuaţie constitutivă de corp elastic $\mathbf{T} = f(\mathbf{F})$ şi ecuaţia de tip rate asociată $\dot{\mathbf{T}} = \partial_{\mathbf{F}} f(\mathbf{F})[\dot{\mathbf{F}}]$.

a. Determinaţi restricţiile impuse de principiul obiectivităţii asupra reprezentării constitutive.

b. In ce condiţii o reprezentare de tip rate $\dot{\mathbf{T}} = \mathcal{A}(\mathbf{F})[\dot{\mathbf{F}}]$, cu $\mathcal{E}(\mathbf{F}) : Sim \longrightarrow Sim$ liniară admite un răspuns instantaneu elastic echivalent cu o ecuaţie constitutivă de tip elastic.

In acest exerciţiu $\mathbf{T}$ reprezintă tensorul de tensiune al lui Cauchy.

# A. ANEXE

## A1. Algebră şi analiză tensorială

Noţiuni şi expuneri complete de algebră şi analiză tensorială sunt prezentate în lucrările următoare Eringen [1967], Malvern [1969], Iacob [1971], Dragoş [1976], Beju, Sóos, Teodorescu [1976], [1977], [1983], Gurtin [1981].

Vom reaminti doar câteva definiţii şi proprietăţi ce sunt utilizate adesea în cuprinsul cărţii. Se utilizeza următoarle *notaţii*

$\mathcal{E}$ – spaţiul euclidian punctual (afin) tridimensional, cu
$\mathcal{V}$ – spaţiul vectorial al translaţiilor lui E (vectori liberi),
**C** – corpul numerelor complexe
$R$ – corpul numerelor reale, $R_+$ – mulţimea numerelor reale pozitive,
**N** – mulţimea numerelor naturale,
$Lin \equiv Lin(\mathcal{V}, \mathcal{V}) \equiv \{\mathbf{T} : \mathcal{V} \to \mathcal{V} \mid \text{liniară}\}$;
$\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}$ – vectori;
$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ – notaţie pentru produsul scalar a doi vectori;
$\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ – notaţie pentru produsul vectorial a doi vectori;
$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ – notaţie pentru produsul mixt a trei vectori;
$x, y \in \mathcal{E}$ – puncte în spaţiul euclidian;
$x - y = \mathbf{v} \in \mathcal{V}$ – vectorul cu originea în y şi extremitatea în x ;
$x - O = \mathbf{x}$ – vectorul de poziţie al punctului$x \in \mathcal{V}, O \in \mathcal{E}$ – fixat
**A**, $\mathbf{A} \in Lin$, se numesc *tensori* (tensori de ordinul doi)

**Definiţia 1.** Fie $\mathbf{T} \in Lin$. Se numeşte transpusul lui **T** elementul din $Lin$, notat cu $\mathbf{T}^T$ definit prin

$$\mathbf{T}^{\mathrm{T}}\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{T}\mathbf{v}, \quad \forall\, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V} \tag{A.1}$$

**Bază carteziană** este $\{\mathbf{i}_j\}_{j\in\{\overline{1,3}\}}$ - bază ortonormată fixată , deci cu $\mathbf{i}_j \cdot \mathbf{i}_k = \delta_{jk}$– simbolurile lui Kronecher.

**Bază reciprocă** bazei $\{\mathbf{e}_i\}_{i\in\{\overline{1,3}\}}$ în $\mathcal{V}$ este o *bază* notată $\{\mathbf{e}^k\}_{i\in\{\overline{1,3}\}}$ cu proprietatea

$$(\mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}_j) = \delta^i_j, \quad \forall\, i, j \in \{\overline{1,3}\}. \tag{A.2}$$

**Propoziţia 1.** Dacă $\{\mathbf{e}_i\}_{i\in\{\overline{1,3}\}}$ în $\mathcal{V}$ este o bază *ortonormată* atunci baza reciprocă coincide cu baza dată.

**Tensorul metric**, corespunzător bazei $\{\mathbf{e}\}_{j\in\{\overline{1,3}\}}$ este caracterizat prin matricea

$$[g_{ij}]_{(i,j)}\,, \quad \text{cu} \quad g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j \quad \forall i,j \in \{\overline{1,3}\}. \tag{A.3}$$

**Propoziţia 2.** i) Există matricea inversă a tensorului metric notată

$$[g^{ij}]_{(i,j)} \text{ pentru } \quad i,j \in \{\overline{1,3}\} \quad \text{cu proprietatea} \quad g^{ij} = \mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}^j. \tag{A.4}$$

ii) Relaţiile de legătură între cele două baze sunt date prin

$$\begin{aligned} &\mathbf{e}^i = g^{ij}\mathbf{e}_j, \quad \mathbf{e}_i = g_{ij}\mathbf{e}^j \text{ pentru } \quad i,j \in \{\overline{1,3}\} \quad , \\ &g \equiv \det\left([g_{ij}]_{(i,j)}\right) = (\mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3))^2 \neq 0. \end{aligned} \tag{A.5}$$

**Bazele fizice** asociate bazelor date sunt definite prin[1]

$$\mathbf{e}_{<i>} = \frac{\mathbf{e}_i}{\sqrt{g_{ii}}}(!), \quad \text{şi} \quad \mathbf{e}^{<i>} = \frac{\mathbf{e}^i}{\sqrt{g^{ii}}}(!), \tag{A.6}$$

pentru $i,j \in \{\overline{1,3}\}$.

**Produsul tensorial** a doi vectori $\mathbf{a},\mathbf{b} \in \mathcal{V}$ se defineşte ca o aplicaţie liniară

$$\begin{aligned} &\mathbf{a}\otimes\mathbf{b} : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V} \quad \text{prin} \\ &(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b})\mathbf{v} = \mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}. \end{aligned} \tag{A.7}$$

**Produsul dublul tensorial** a trei vectori $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c} \in \mathcal{V}$ se defineşte ca un tensor de ordinul trei, deci ca o aplicaţie liniară

$$\begin{aligned} &\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}\otimes\mathbf{c} : \mathcal{V} \longrightarrow Lin \quad \text{prin} \\ &(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}\otimes\mathbf{c})\mathbf{v} = \mathbf{a}\otimes\mathbf{b}(\mathbf{c}\cdot\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}. \end{aligned} \tag{A.8}$$

**Teorema de reprezentare a vectorilor**

$$\begin{aligned} &\forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} \quad \Longrightarrow \quad \exists(!)\{v^i\} \quad \{v_i\}, \quad \text{astel încât} \\ &\mathbf{v} = v^i\mathbf{e}_i, \quad \text{cu} \quad v^i = \mathbf{v}\cdot\mathbf{e}^i \quad \forall i \in \{\overline{1,3}\}, \\ &\mathbf{v} = v_i\mathbf{e}^i, \quad \text{cu} \quad v_i = \mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_i \quad \forall i \in \{\overline{1,3}\}. \end{aligned}$$

[1]Nu se face nici o sumare după indicii care se repetă în relaţiile urmate de (!).

**Teorema de reprezentare a tensorilor de ordinul 2**

$$\forall \mathbf{T} \in Lin \quad \Longrightarrow \quad \exists(!)\{T^{ij}\} \quad \{T_{ij}\}, \quad \{T^i_j\}; \quad \{T_i^j\} \quad \text{astel încât}$$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{T} = T^{ij}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad \text{cu} \quad T^{ij} = \mathbf{e}^i \cdot \mathbf{T}\mathbf{e}^j \quad \forall\, i,j \in \{\overline{1,3}\},\\
&\mathbf{T} = T_{ij}\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j \quad \text{cu} \quad T_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{T}\mathbf{e}_j \quad \forall\, i,j \in \{\overline{1,3}\},\\
&\mathbf{T} = T^i{}_j\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j \quad \text{cu} \quad T^i_j = \mathbf{e}^i \cdot \mathbf{T}\mathbf{e}_j \quad \forall\, i,j \in \{\overline{1,3}\},\\
&\mathbf{T} = T_i{}^j\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}_j \quad \text{cu} \quad T_i{}^j = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{T}\mathbf{e}^j \quad \forall\, i,j \in \{\overline{1,3}\}.
\end{aligned} \tag{A.9}$$

**Definiţia 2.** Componentele tensorului $\mathbf{T}$ se numesc $\{T^{ij}\}$ - componente *contravariante* ; $\{T_{ij}\}$ - componente *covariante* ; $\{T^i{}_j\}$; $\{T_i{}^j\}$ - componente *mixte.*

**Teorema de reprezentare a tensorilor de ordinul 3**

$\forall \mathbf{N} \in Lin(\mathcal{V}, Lin) \quad \Longrightarrow \quad \exists(!) \quad \{N^{ijk}\}, \quad \{N_{ijk}\}, \quad \{N^{ij}{}_k\}, \quad \{N_i{}^{jk}\}$, etc., astel încât

$$\begin{aligned}
&\mathbf{N} = N^{ijk}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \quad \text{cu} \quad \mathbf{N}\mathbf{e}^k = N^{ijk}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad \forall i,j,k \in \{\overline{1,3}\},\\
&\mathbf{N} = N_{ijk}\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j \otimes \mathbf{e}^k \quad \text{cu} \quad \mathbf{N}\mathbf{e}_k = N_{ijk}\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j \quad \forall i,j,k \in \{\overline{1,3}\},\\
&\mathbf{N} = N^{ij}{}_k\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}^k \quad \text{cu} \quad \mathbf{N}\mathbf{e}_k = N^{ij}{}_k\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad \forall i,j,k \in \{\overline{1,3}\},\\
&\mathbf{N} = N_i{}^{jk}\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \quad \text{cu} \quad \mathbf{N}\mathbf{e}^k = N_i{}^{jk}\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}_j \quad \forall i,j,k \in \{\overline{1,3}\}.
\end{aligned} \tag{A.10}$$

şi aşa mai departe.

Vom reprezenta acum vectorii şi tensorii în baze fizice asociate[2] Exemplificăm aceste tipuri de reprezentare în următoarea

**Teorema de reprezentare în baze fizice**

$$\begin{aligned}
&\mathbf{v} = v^i\mathbf{e}_i = v^{<i>}\mathbf{e}_{<i>}, && \text{cu} \quad v^{<i>} = v^i\sqrt{g_{ii}}(!)\\
&\mathbf{v} = v_i\mathbf{e}^i = v_i\mathbf{e}^i, && \text{cu} \quad v_{<i>} = v_i\sqrt{g^{ii}}(!)\\
&\mathbf{T} = T_{ij}\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j = T_{<ij>}\mathbf{e}^{<i>} \otimes \mathbf{e}^{<j>} && \text{cu} \quad T_{<ij>} = T_{ij}\sqrt{g^{ii}}\sqrt{g^{jj}}(!)
\end{aligned} \tag{A.11}$$

pentru orice $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ şi pentru orice $i,j \in \{\overline{1,3}\}$.

**Urma** este aplicaţia liniară $\mathrm{tr} : Lin \to R$ definită prin

$$\mathrm{tr}\,(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}, \quad \forall \quad \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{V} \tag{A.12}$$

[2]Numai prin trecere la bazele fizice se obţine aceeaşi dimensiune fizică pentru componente

Această definiţie, împreună cu formulele de reprezentare ale unui tensor conduc la concluzia că pentru orice $\mathbf{T} \in Lin$ urma sa este dată de

$$tr\mathbf{T} = T^i{}_i = T_i{}^i = g_{ji}T^{ij} = T_{ij}g^{ji}. \tag{A.13}$$

**Produsul scalar** a doi tensori se defineşte ca fiind aplicaţia biliniară $\cdot : Lin \times Lin \longrightarrow R$ dată prin

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{U} = tr(\mathbf{T}\mathbf{U}^T). \tag{A.14}$$

**Propoziţia 3.** Aplicaţia anterioară defineşte *un produs scalar* pe Lin.

**Mulţimea transformărilor ortogonale**

$$\begin{aligned} &Ort \equiv \{\mathbf{Q} \in Lin \mid \mathbf{Qu} \cdot \mathbf{Qv} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}, \quad \text{pentru orice } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}\}, \\ &\Longleftrightarrow \quad \mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^T\mathbf{Q} = I, \quad \forall \quad \mathbf{Q} \in Ort. \end{aligned} \tag{A.15}$$

Introducem următoarele mulţimi :

**Mulţimea transformărilor simetrice**

$$Sim \equiv \{\mathbf{S} \in Lin \mid \mathbf{S} = \mathbf{S}^T\}.$$

**Mulţimea transformărilor antisimetrice**

$$Asim \equiv \{\mathbf{A} \in Lin \mid \mathbf{A} = -\mathbf{A}^T\}.$$

**Mulţimea transformărilor inversabile**

$$Invlin \equiv \{\mathbf{T} \in Lin \mid \quad \det \mathbf{T} \neq 0\}.$$

**Mulţimea transformărilor unimodulare**

$$Unim \equiv \{\mathbf{T} \in Lin \mid \quad \mid \det \mathbf{T} \mid = 1\}.$$

**Mulţimea transformărilor pozitiv definite**

$$Psim \equiv \{\mathbf{S} \in Sim \mid \mathbf{Su} \cdot \mathbf{u} \geq 0, \ \forall \mathbf{u} \in \mathcal{V} \text{ şi } \mathbf{Su} \cdot \mathbf{u} = 0 \ \Leftrightarrow \ \mathbf{u} = 0\}.$$

**Propoziţia 4.**

$i)\forall \mathbf{A} \in Lin$ atunci există şi sunt unici $\mathbf{A}^S \in Sim$, $\mathbf{A}^A \in Asim$

astfel încât $\mathbf{A} = \mathbf{A}^S + \mathbf{A}^A$.

ii) Au loc formulele $\mathbf{A}^S = \dfrac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)$, şi $\mathbf{A}^A = \dfrac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T)$, numite partea simetrică şi respectiv partea antisimetrică a tensorului $\mathbf{A}$.

**Propoziţia 5.**

$i)\qquad \mathbf{A}\cdot\mathbf{BC} = \mathbf{AC}^T\cdot\mathbf{B} = \mathbf{B}^T\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}, \quad \forall\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}\in Lin;$

$ii)\qquad \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{0}, \quad \forall\mathbf{C}\in Sim \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{A}\in Asim;$

$iii)\qquad \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{0}, \quad \forall\mathbf{B}\in Asim \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{A}\in Sim;$

$iv)\qquad \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{0}$ dacă $\mathbf{A}\in Sim$ şi $\mathbf{B}\in Asim$

**Definiţia 3.** Pentru orice $\mathbf{T}\in Lin$, $\lambda\in R$ se numeşte *valoare proprie* dacă există $\mathbf{e}\in\mathcal{V}$ $\mathbf{e}\neq 0$, numit *vector propriu*, aşa încât

$$\mathbf{Te} = \lambda\,\mathbf{e}. \tag{A.16}$$

**Teorema de descompunere spectrală.**

i) Dacă $\mathbf{T}\in Sim$ atunci există $\lambda_j\in R$, *valori proprii* şi $\mathbf{e}_j\in\mathcal{V}$ *vectori proprii ortornormaţi* cu $j\in\{\overline{1,3}\}$ astfel încât

$$\mathbf{T} = \sum_{j=1}^{3}\lambda_j\mathbf{e}_j\otimes\mathbf{e}_j. \tag{A.17}$$

ii) In plus, dacă $\mathbf{T}\in Psim$ , atunci oricare ar fi $j\in\{\overline{1,3}\};$, $\lambda_j > 0(\lambda_j$ valoare proprie a lui $\mathbf{T}$ ).

iii) $\forall\mathbf{T}\in Psim$ există un unic $\mathbf{T}_1\in Psim$ astfel încât $\mathbf{T} = \mathbf{T}_1^2$, deci

$$\mathbf{T}_1 = \sum_{j=1}^{3}\sqrt{\lambda_j}\mathbf{e}_j\otimes\mathbf{e}_j. \tag{A.18}$$

**Propoziţia 6.** i) $\lambda$ este valoare proprie pentru $\mathbf{T}\in Lin$ dacă şi numai dacă

$$\det(\mathbf{T}-\lambda\mathbf{I}) = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad -\lambda^3 + I_1\lambda^2 + I_2\lambda + I_3 = 0, \tag{A.19}$$

numită *ecuaţia caracteristică* (sau *seculară*).

Scalarii $\mathrm{I}_j, j=\overline{1,3}$ se numesc *invarianţii tensorului* $\mathbf{T}$ şi sunt daţi de

$$I_1 = \mathrm{tr}\mathbf{T}, \quad I_2 = 1/2[\mathrm{tr}(\mathbf{T}^2) - (\mathrm{tr}\mathbf{T})^2], \quad I_3 = \det\mathbf{T}. \tag{A.20}$$

ii) Dacă se consideră setul de invarianţi

$$j_{\mathbf{T}} = (\mathrm{tr}\,\mathbf{T}, \mathrm{tr}\,\mathbf{T}^2, \mathrm{tr}\,\mathbf{T}^3), \tag{A.21}$$

au loc relaţiile de echivalenţă

$$\mathrm{tr}\,\mathbf{T} = I_1, \quad \mathrm{tr}\,(\mathbf{T}^2) = 2I_2 + (I_1)^2, \quad \mathrm{tr}\,\mathbf{T}^3 = I_1\mathrm{tr}\,\mathbf{T}^2 + I_2\mathrm{tr}\,\mathbf{T} + 3I_3\mathbf{I}. \tag{A.22}$$

iii) $\mathbf{T}$ satisface ecuaţia caracteristică

$$-\mathbf{T}^3 + \mathbf{I}_1\mathbf{T}^2 + \mathbf{I}_2\mathbf{T} + \mathbf{I}_3\mathbf{I} + \mathbf{0},$$

cunoscută sub numele de teorema Hamilton - Cayley.

In această parte vom reaminti o serie de proprietăţi şi definiţii de analiză vectorială şi tensorială folosite pe parcursul lucrării.

**Definiţia 4.** $\mathbf{M} : Lin \longrightarrow Lin$, este liniară dacă şi numai dacă $\mathbf{M} \in Lin(Lin, Lin)$. O astfel de aplicaţie se numeşte tensor de ordinul patru.

**Propoziţia 7.** Fie $\mathbf{M} \in Lin(Lin, Lin)$. Atunci

i) Există $M_{ijkl} \in R$ astfel încât

$$\mathbf{M}[\mathbf{A}] = M_{ijkl}A_{kl}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j, \tag{A.23}$$

pentru orice $\mathbf{A} \in Lin$ ,

ii) $\forall$ $\mathbf{M} \in Lin(Lin, Lin)$ $\| \tilde{\mathbf{M}} \|_{(4)} = ( \sum_{j,k,l,m=1}^{3} (\tilde{\mathbf{M}}_{jklm})^2)^{1/2}$ defineşte o normă în spaţiul tensorilor de ordinul 4. In plus, are loc inegalitatea

$$| \mathbf{M}[\mathbf{A}] | \leq \| \tilde{\mathbf{M}} \|_{(4)} | \mathbf{M} | \quad \forall \mathbf{A} \in Lin\,;$$

iii) $\mathbf{M} \in Lin(Sim, Sim)$ dacă şi numai dacă

$$M_{jklm} = M_{kjlm} = M_{jkml} \quad \forall \quad j,k,l,m \in \{\overline{1,3}\}.$$

**Definiţia 5.** $\mathbf{M} \in Lin(Lin, Lin)$ se numeşte *simetrică* şi *pozitiv definită* dacă şi numai dacă $\mathbf{M} \in Lin(Sim, Sim)$ şi

*i)* $\mathbf{M}[\mathbf{A}] \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{M}[\mathbf{B}] \quad \forall\, \mathbf{A}\,, \mathbf{B} \in Sim$

*ii)* $\mathbf{M}[\mathbf{A}] \cdot [\mathbf{A}] \geq 0$ şi $\mathbf{M}[\mathbf{A}] \cdot \mathbf{A} = 0 \iff \mathbf{A} = 0$

**Definiţia 6.** Fie $\mathcal{X}, \mathcal{Y}-$ două spaţii Banach şi fie $\mathcal{D} \subset \mathcal{X}$ o mulţime deschisă, nevidă şi conexă.

Aplicaţia $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{Y}$ se numeşte **diferenţiabilă** în $X \in \mathcal{D}$ dacă există aplicaţia $\mathrm{D}\, f(X) \in Lin(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ şi $\omega(X, \cdot) : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{Y}$, continue, aşa încât

$$f(Y) = f(X) + D\, f(X)[\mathbf{v}] + \omega(X,Y), \quad \mathbf{v} = Y - X \in \mathcal{X} \quad \forall\, Y \in \mathcal{D} \quad \text{şi}$$
$$\lim_{Y \longrightarrow X} \frac{\omega(X,Y)}{| \mathbf{v} |} = 0. \tag{A.24}$$

In cele ce urmează vom preciza această definiţie pentru cazurile în care funcţia ia valori reale, vectoriale şi respectiv, tensoriale. Astfel, împreună cu proprietăţile ce rezultă de aici, aceste formule vor fi utilizate în lucrare.

**Definiţia 7.** Fie $\varphi : \mathcal{D} \longrightarrow R$ un câmp scalar diferenţiabil în $X \in \mathcal{D}$, atunci $\exists\, D\,\varphi(X) : \mathcal{V} \longrightarrow R)$, liniară şi continuă astfel încât,

$$\begin{aligned}&\varphi(Y) = \varphi(X) + D\,\varphi(X)[\mathbf{v}] + \omega(X,Y), \quad \mathbf{v} = Y - X \in \mathcal{V} \quad \forall\, Y \in \mathcal{D} \text{ şi} \\ &\lim_{Y \longrightarrow X} \frac{\omega(X,Y)}{|\,\mathbf{v}\,|} = 0.\end{aligned} \tag{A.25}$$

Ca urmare a teoremei lui Riesz, de reprezentare a funcţionalelor liniare şi continue pe spaţii Hilbert $\exists\, \nabla\varphi(X) \in \mathcal{V}$ aşa încât

$$\mathrm{D}\,\varphi(X)[\mathbf{v}] \equiv \nabla\varphi(X) \cdot \mathbf{v} \quad \forall\, \mathbf{v} \in \mathcal{V} \tag{A.26}$$

şi $\nabla\varphi(X) \in Lin$ se numeşte *gradientul* lui $\varphi$.

Fie $(0,\ (\mathbf{i}_j)_{j\in\{\overline{1,3}\}}\,)$ cu $0 \in \mathcal{E}$, un reper cartezian , atunci

$$\nabla\varphi(X) \cdot \mathbf{i}_j = \frac{\partial\varphi}{\partial X_j} \quad \Longleftrightarrow \quad \nabla\varphi(X) = \frac{\partial\varphi}{\partial X_k}\mathbf{i}_k. \tag{A.27}$$

**Propoziţia 8.** i) Dacă $\mathbf{w} : \mathcal{D} \to \mathcal{V}$ este diferenţiabil în $X \in \mathcal{D}$, atunci există $\mathrm{D}\,\mathbf{w}(X) \in\ Lin(\mathcal{V},\mathcal{V})$ , care, cu notaţia $\nabla\mathbf{w}(X) = D\,\mathbf{w}(X)$, este un tensor de ordinul 2. Intr-o bază carteziană acesta se reprezintă prin

$$\begin{aligned}&\nabla\mathbf{w}(X)[\mathbf{i}_j] = \lim_{s\to 0} \frac{\mathbf{w}(X + s\mathbf{i}_j) - \mathbf{w}(X)}{s} = \frac{\partial\mathbf{w}}{\partial X_j} \\ &\Longleftrightarrow \quad \nabla\mathbf{w}(X) = \frac{\partial w_i}{\partial x_j}\mathbf{i}_i \otimes \mathbf{i}_j;\end{aligned} \tag{A.28}$$

ii) Dacă $\mathbf{T} : \mathcal{D} \longrightarrow Lin$ este un câmp tensorial diferenţiabil în $X \in \mathcal{D}$ atunci $D\,\mathbf{T}(X) \equiv \nabla\mathbf{T}(X) \in Lin(\mathcal{V}, Lin(\mathcal{V},\mathcal{V}))$ este un tensor de ordinul trei, care se reprezintă, într-o bază carteziană, prin

$$\nabla\mathbf{T}(\mathbf{X}) = T_{ij,k}\mathbf{i}_i \otimes \mathbf{i}_j \otimes \mathbf{i}_k, \quad \text{cu} \quad T_{ij,k} \equiv \frac{\partial T_{ij}}{\partial X_k}. \tag{A.29}$$

Fie un reper cartezian $(0,(\mathbf{i}_k)_{k\in\{\overline{1,3}\}})$. Notăm $\mathbf{X} = X - 0 \equiv X^k\mathbf{i}_k$ vectorul de poziţie al punctului $X \in \mathcal{E}$ în reperul dat.

**Definiţia 8.** Fie transformarea $\{X^i\}_{i\in\{\overline{1,3}\}} \in D \subset \mathbf{R}^3 \longrightarrow \{q^i\}_{i\in\{\overline{1,3}\}} \in \Delta \subset \mathbf{R}^3$ *bijectivă, nesingulară, de clasă* $C^2$. $\{q^i\}_{i\in\{\overline{1,3}\}}$ se numesc coordonate curbilinii asociate punctului $\mathbf{X}$.

*Definim baza locală* în $\mathbf{X}$ prin tripletul de vectori

$$\mathbf{e}_i = \frac{\partial\mathbf{X}}{\partial q^i} \quad \forall\, i \in \{\overline{1,3}\}. \tag{A.30}$$

**Teorema 1.** Tripletul de vectori definit în (3?) are proprietăţile

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \equiv \mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3) = \sqrt{g} \quad \text{unde} \quad \sqrt{g} = \det\left(\frac{\partial X^j}{\partial q^k}\right)_{jk} \neq 0,$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial q^k} = \Gamma^s_{ik}\mathbf{e}_s \quad \text{cu} \quad \Gamma^s_{ik} = \mathbf{e}^s \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial q^k} = -\mathbf{e}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{e}^s}{\partial q^k} = g^{sp}\Gamma_{ik,p}, \quad (A.31)$$

$$\Gamma_{ik,p} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{pi}}{\partial q^k} + \frac{\partial g_{pk}}{\partial q^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial q^p}\right).$$

**Teorema 2.** Vectorul gradient al unui câmp scalar, tensorul gradient pentru câmpuri vectoriale şi gradientul câmpurilor tensoriale, în baze locale se calculează prin formulele

$$\nabla\varphi(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{e}_i = \frac{\partial \varphi}{\partial q^i}(\mathbf{X}), \quad \nabla\mathbf{w}(\mathbf{X})[\mathbf{e}_i] = \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial q^i}(\mathbf{X}), \quad \nabla\mathbf{T}(\mathbf{X})[\mathbf{e}_i] = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial q^i}(\mathbf{X}). \quad (A.32)$$

Formulele rezultă din definiţii, cu utilizarea formulelor de calcul pentru diferenţialele aplicaţiilor, în baze carteziene, ţinând seama că $\mathbf{e}_i = \frac{\partial \mathbf{X}^k}{\partial q^i}\mathbf{i}_k$, $\forall i \in \{\overline{1,3}\}$.

Ca o consecinţă a formulelor date în Teorema 1. se deduc reprezentările

$$\begin{aligned}
&\nabla\varphi(\mathbf{X}) = \frac{\partial \varphi}{\partial q^i}\mathbf{e}^i, \\
&\nabla\mathbf{w}(\mathbf{X}) = w^p{}_{;i}\mathbf{e}_p \otimes \mathbf{e}^i, \ w^p{}_{;i} = w^p{}_{,i} + w^s\Gamma^p_{si}, \\
&\nabla\mathbf{w}(\mathbf{X}) = w_{p;i}\mathbf{e}^p \otimes \mathbf{e}^i, \ w_{p;i} = w_{p,i} - w_s\Gamma^s_{pi}, \\
&\nabla\mathbf{T}(\mathbf{X}) = T^{ij}{}_{;k}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}^k, \ T^{ij}{}_{;k} = T^{ij}{}_{,k} + \Gamma^j_{sk}T^{is} + \Gamma^i_{rk}T^{jr},
\end{aligned} \quad (A.33)$$

cu notaţia $f_{,k} = \frac{\partial f}{\partial q^k}$ pentru derivata parţială în raport cu $q^k$.

Mărimile $w^p{}_{;i}$, $w_{p;i}$, se numesc *derivate covariante* ale componentelor *contravariante*, respectiv *covariante* ale câmpului vectorial $\mathbf{w}$.

Mărimile $T^{ij}{}_{;k}$ se numesc *derivate covariante* ale componentelor *contravariante* ale cămpului tensorial $\mathbf{T}$.

Vom defini acum *divergenţa* câmpurilor vectoriale şi respectiv a câmpurilor tensoriale.

**Definiţia 9.** *Operatorul divergenţă*, notat prin div, este aplicaţia liniară definită pe mulţimea câmpurilor vectoriale, diferenţiabile, care are valori reale şi asociază fiecărui câmp vectorial $\mathbf{w} : \mathcal{D} \in \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{V}$ diferenţiabil pe $\mathcal{D}$, funcţia cu valori reale definită prin

$$\operatorname{div}\mathbf{w}(X) = \operatorname{tr}(\nabla\,\mathbf{w}(X)) = w^i{}_{;i}(X), \quad \forall X \in \mathcal{D}. \quad (A.34)$$

**Definiţia 10.** Divergenţa unui câmp tensorial $\mathbf{T} : \mathcal{D} \in \mathcal{E} \longrightarrow Lin$, diferenţiabil pe domeniul de definiţie , este câmpul vectorial $\operatorname{div} \mathbf{T} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{V}$ definit pentru $\forall X \in \mathcal{D}$ prin

$$\operatorname{div} \mathbf{T}(X) \cdot \mathbf{a} = \operatorname{tr} \nabla (\mathbf{T}^T(X)\mathbf{a}), \quad \forall \mathbf{a} \in \mathcal{V}. \tag{A.35}$$

**Propoziţia 9.** Formula de calcul pentru divergenţa unui câmp tensorial este

$$\operatorname{div} \mathbf{T}(X) = T^{pl}{}_{;l}\, \mathbf{e}_p. \tag{A.36}$$

**Demonstraţia** este o consecinţă a definiţiei *intrinseci*, adoptate pentru divergenţa unui câmp tensorial, dacă aplicăm formula de calcul (35) pentru divergenţa unui câmp vectorial

$$\operatorname{div} \mathbf{T}(X) \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{T}^T(X)\mathbf{a})^l{}_{;l} = (T^{pl} a_p)_{;l} = (T^{pl}{}_{;l})\, a_p, \tag{A.37}$$

deoarece oricare ar fi $\mathbf{a} \in \mathcal{V}$

$$\frac{\mathbf{a}}{q^k} \equiv a^s{}_{;k}\, \mathbf{e}_k = 0. \tag{A.38}$$

Folosind definiţia produsului scalar deducem din (37) că $(\operatorname{div}\mathbf{T}(X))^p = T^{pl}{}_{;l}$. Deci avem expresia componentei contravariante a câmpului vectorial care defineşte divergenţa câmpului tensorial într-un punct fixat.

**Propoziţia 10.** Intr-un reper cartezian au loc formulele

$$\operatorname{div} \mathbf{w}(X) = \frac{\partial w^i}{\partial X^i} \in R\,, \quad \operatorname{div} \mathbf{T}(X) = \frac{\partial T^{ij}}{\partial X^j} \mathbf{i}_i \in \mathcal{V}. \tag{A.39}$$

Formulele (39) se deduc direct din definiţie sau din formulele generale dacă ţinem seama că vectorii bazei sunt ficşi şi deci $\Gamma^s_{kp} = 0$, pentru orice valori ale indicilor (vezi $(31)_2$ ).

In formulele de calcul este util să folosim

**Propoziţia 11.** Cu utilizarea *componentelor contravariante* pentru câmpurile vectoriale şi tensoriale rezultă următoarele expresii pentru câmpurile divergenţă

$$\operatorname{div} \mathbf{w}(X) = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial(\sqrt{g} w^i)}{\partial q^i} \in R\,, \quad (\operatorname{div} \mathbf{T}(X))^k = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial(\sqrt{g} T^{km})}{\partial q^m} + \Gamma^k_{pm} T^{pm} \tag{A.40}$$

**Demonstraţia** este o consecinţa directă a formulelor (35) , (37) cu (34) în care se utilizează relaţia

$$\sum_{l=1}^{3} \Gamma^l_{sl} = \frac{\partial(\ln\sqrt{g})}{\partial q^s} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial(\sqrt{g})}{\partial q^s}. \tag{A.41}$$

Incheiem prezentarea acestei parţi cu observaţia că, în mecanică se folosesc *componentele fizice ale vectorilor şi tensorilor*, din necesitatea de a avea aceeaşi mărime fizică pentru componentele unui aceluiaşi vector. Astfel se *pierde* caracterul tensorial, care apare în calculul diferenţial.

Pentru a scrie în ecuaţiile de mişcare expresia componentelor acceleraţiei, componentelor tensorului de tensiune precum şi ale măsurilor de deformare sau ale vitezelor de deformaţie ( corespunzător tipului de reprezentare constitutivă utilizată în model) se *înlocuiesc* în formulele de calcul tensorial, anterior prezentate, componentele covariante, contravariante sau mixte cu ***componentele fizice*** , în conformitate cu procedeul pe care l-am amintim deja (vezi formulele(11) ).

## A2. Teoreme de reprezentare pentru funcţii izotrope

Teorema lui Cauchy de reprezentare a funcţiilor izotrope cu valori scalare şi tensori simetrici, definite pe mulţimea tensorilor simetrici este demonstrată în Truesdell [1972], Dragoş [1976]. Prezentăm aici o demonstraţie a lui Gurtin [1981], bazată pe raţionamente pur algebrice, elementare.

**Definiţia 1.** Fie $\mathcal{G} \subset Ort$ şi $\mathcal{A} \subset Lin$. Spunem că $\mathcal{A}$ este *invariant în raport cu* $\mathcal{G}$ dacă

$$\mathbf{QAQ} \in \mathcal{A} \quad \forall \mathbf{Q} \in \mathcal{G}, \quad \mathbf{A} \in \mathcal{A}. \tag{A.42}$$

Următoarea propoziţie se obţine direct din definiţiile corespunzătoare.

**Propoziţia 1.** Următoarele grupuri sunt invariante în raport cu $Ort$ : $Lin$, $Invlin$, $Ort$, $Ort^+$, $Sim$, $Asim$, $Psim$.

**Definiţia 2.** Funcţia scalară $\varphi : \mathcal{A} \subset Lin \longrightarrow R$ este *invariantă în raport cu* $\mathcal{G} \subset Ort$ dacă A este *invariant în raport cu* $\mathcal{G}$ şi

$$\varphi(\mathbf{A}) = \varphi(\mathbf{QAQ}) \quad \forall \mathbf{A} \in \mathcal{A},\ \mathbf{Q} \in \mathcal{G}. \tag{A.43}$$

**Definiţia 3.** Funcţia tensorială $S : \mathcal{A} \subset Lin \longrightarrow Sim$ este *invariantă în raport cu* $\mathcal{G} \subset Ort$, dacă A este *invariantă în raport cu* $\mathcal{G}$ şi

$$\mathbf{Q}S(\mathbf{A})\mathbf{Q}^T = S(\mathbf{QAQ}^T) \quad \forall \mathbf{A} \in \mathcal{A},\ \mathbf{Q} \in \mathcal{G}. \tag{A.44}$$

**Definiţia 4.** O funcţie scalară sau tensorială este *izotropă* dacă este *invariantă în raport cu* $Ort$.

Direct din definiţii se demonstrează

**Teorema 1.** Fie $\mathcal{A} = Sim$. Următoarele funcţii scalare definite pe $\mathcal{A}$

a) det, tr sunt izotrope,

b) $j_{\mathbf{A}}$ este izotropă , unde $j_{\mathbf{A}}$ este o listă de invarianţi pentru $\mathbf{A}$, de exemplu $j_{\mathbf{A}} = \{\operatorname{tr}\mathbf{A}, \operatorname{tr}\mathbf{A}^2, \operatorname{tr}\mathbf{A}\}^3$.

Considerăm $\mathcal{A} \subset Sim$ *invariant în raport cu* $Ort$.

**Teorema de reprezentare pentru funcţii scalare izotrope.** O funcţie $\varphi : \mathcal{A} \subset Sim \longrightarrow R$ este *izotropă* dacă şi numai dacă $\exists\, \tilde{\varphi} : j(\mathcal{A}) \longrightarrow R$ astfel încât $\varphi(\mathbf{A}) = \tilde{\varphi}(j_{\mathbf{A}})$.

Aici s-a introdus notaţia $j(\mathcal{A}) = \{j_{\mathbf{A}} \mid \mathbf{A} \in \mathcal{A}\}$.

**Demonstraţie.** Presupunem că $\varphi$ este izotropă. Vom demonstra că $\varphi(\mathbf{A}) = \varphi(\mathbf{B})$ dacă $j_{\mathbf{A}} = j_{\mathbf{B}}$.

Fie $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in Sim$ cu $j_{\mathbf{A}} = j_{\mathbf{B}}$, atunci din teorema de reprezentare spectrală ( vezi A1. ) există bazele ortonormate $\{\mathbf{e}_i\}, \{\mathbf{f}_i\}$, de vectori proprii astfel încât

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{3} \omega_i \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{B} = \sum_{i=1}^{3} \omega_i \mathbf{f}_i \otimes \mathbf{f}_i. \tag{A.45}$$

Rezultă că există $\mathbf{Q}_0 \in Ort$ astfel încât $\mathbf{Q}_0 \mathbf{e}_i = \mathbf{f}_i, \quad \forall \quad i \in \{\overline{1,3}\}$. Deci $\mathbf{A} = \mathbf{Q}_0 \mathbf{B} \mathbf{Q}_0$. Din ipoteză rezultă că

$$\varphi(\mathbf{A}) = \varphi(\mathbf{Q}_0 \mathbf{B} \mathbf{Q}_0^T) = \varphi(\mathbf{B}). \tag{A.46}$$

Prin urmare am demonstrat că $\varphi$ depinde de valorile proprii şi nu depinde de bază.

**Reciproca** este imediată.

**Lema 1.** Fie $S : \mathcal{A} \subset Sim \longrightarrow Sim$ izotropă. Atunci fiecare vector propriu al lui $\mathbf{A} \in \mathcal{A} \subset Sim$ va fi vector propriu al lui $S(\mathbf{A})$.

**Demonstraţie.** Fie $\mathbf{e}$ vector propriu al lui $\mathbf{A}$. Fie $\mathbf{f} \in \mathcal{V}$ astfel încât $\mathbf{e} \cdot \mathbf{f} = 0$. Atunci $\mathbf{f} \in (Sp\,\mathbf{e})^{\perp}$. Are loc reprezentarea $\mathcal{V} = Sp\,\mathbf{e} \oplus (Sp\,\mathbf{e})^{\perp}$. Construim baza ortonormată $\{\mathbf{e}, \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$.

Considerăm $\mathbf{Q}_1 \in Ort$ astfel încât $\mathbf{Q}_1 \mathbf{e} = -\mathbf{e}$ , $\mathbf{Q}_1 \mathbf{f} = \mathbf{f}$. Se verifică direct pe bază că are loc egalitatea $\mathbf{Q}_1 \mathbf{A} \mathbf{Q}_1^T = \mathbf{A}$.

Din izotropia funcţiei $S$ rezultă că

$$\mathbf{Q}_1 S(\mathbf{A}) \mathbf{Q}_1^T = S(\mathbf{Q}_1 \mathbf{A} \mathbf{Q}_1^T) = S(\mathbf{A}). \tag{A.47}$$

Folosim (47) şi definiţia transformării ortogonale $\mathbf{Q}_1$ pentru a calcula $S(\mathbf{A})\mathbf{e} = \mathbf{Q}_1 S(\mathbf{A}) \mathbf{Q}_1^T \mathbf{e} = -\mathbf{Q}_1 S(\mathbf{A})\mathbf{e}$. Din egalitatea termenilor extremi a rezultat că

$$\mathbf{Q}_1(S(\mathbf{A})\mathbf{e}) = -S(\mathbf{A})\mathbf{e} \quad \Longrightarrow \quad S(\mathbf{A})\mathbf{e} \parallel \mathbf{e}. \tag{A.48}$$

Din coliniaritatea vectorilor dedusă în (48) am obţinut că $\exists\, \mu(\mathbf{A}, \mathbf{e}) \in R$ astfel încât $S(\mathbf{A})\mathbf{e} = \mu(\mathbf{A}, \mathbf{e})\, \mathbf{e}$, ceea ce trebuia demonstrat.

Vom demonstra acum lema lui Wang

**Lema 2.** Fie $\mathbf{A} \in Sim$. Sunt posibile cazurile

$$a) \quad \mathbf{A} = \sum_{i=1}^{3} \omega_i \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i \quad \text{dacă} \quad \omega_1 \neq \omega_2 \neq \omega_3 \neq \omega_1 \quad \text{atunci}$$

$$\{\mathbf{I}, \mathbf{A}, \mathbf{A}^2\} \quad \text{sunt liniari independenţi} \quad \text{şi}$$

$$Sp\{\mathbf{I}, \mathbf{A}, \mathbf{A}^2\} = Sp\{\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3\} \tag{A.49}$$

$$b) \quad \mathbf{A} = \omega_1 \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} + \omega_2 (\mathbf{I} - \mathbf{e} \otimes \mathbf{e}) \quad \text{dacă,} \quad \omega_1 \neq \omega_2 = \omega_3 \quad \text{atunci}$$

$$\{\mathbf{I}, \mathbf{A}\} \quad \text{liniari independenţi} \quad \text{şi } Sp\{\mathbf{I}, \mathbf{A}\} = Sp\{\mathbf{e} \otimes \mathbf{e}, \mathbf{I} - \mathbf{e} \otimes \mathbf{e}\}$$

$$c) \quad \mathbf{A} = \omega \mathbf{I} \quad \text{dacă} \quad \omega_1 = \omega_2 = \omega_3 \quad \text{atunci} \quad Sp\{\mathbf{I}, \mathbf{A}\} = Sp\{\mathbf{I}\}$$

**Demonstraţie.** a) Să aratăm că $\{\mathbf{I}, \mathbf{A}, \mathbf{A}^2\}$ sunt liniari independenţi. Considerăm combinaţia $a\mathbf{I} + b\mathbf{A} + c\mathbf{A}^2 = 0$ care reprezentată în baza vectorilor proprii (ortonormată) ne conduce la sistemul liniar

$$\begin{aligned} a + b\omega_1 + c\omega_1^2 &= 0 \\ a + b\omega_2 + c\omega_2^2 &= 0 \\ a + b\omega_3 + c\omega_3^2 &= 0, \end{aligned} \tag{A.50}$$

în necunoscutele $a, b, c$. In cazul valorilor proprii distincte determinantul este nenul şi găsim $a = b = c = 0$, ca unică soluţie, deci liniar independenţa este demonstrată.

Notăm prin $\mathcal{N} = Sp\{\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3\}$ spaţiu vectorial de dimensiune 3. Din teorema de reprezentare spectrală (A.17) pentru tensorul $\mathbf{A}$ rezultă că $\mathbf{I}, \mathbf{A}, \mathbf{A}^2 \in \mathcal{N}$. Deci $\{\mathbf{I}, \mathbf{A}, \mathbf{A}^2\}$ este o bază pentru $\mathcal{N}$. Ca o consecinţă imediată, rezultă egalitatea spaţiilor.

b) Dacă $\mathbf{A}$ are valorile proprii $\omega_2 = \omega_3$ atunci din (A.17) aratăm că $a\mathbf{I} + b\mathbf{A} = 0$ dacă şi numai dacă $a = b = 0$. In baza vectorilor proprii avem sistemul liniar

$$a + b\omega_1 = 0\,, a + b\omega_2 = 0,$$

cu determinant nenul. Deducem că $a = b = 0$. Deci $\{\mathbf{I}, \mathbf{A}\}$ este un sistem liniar independent şi în mod corespunzător deducem că formează o bază pentru $Sp\{\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1, \mathbf{I}\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1\}$, de unde avem rezultatul.

c) este evidentă.

**Teorema de reprezentare a funcţiilor izotrope cu valori tensori simetrici**

Fie $S : \mathcal{A} \subset Sim \longrightarrow Sim$. $S$ este *izotropă* dacă şi numai dacă

$$\begin{gathered} \exists\, \varphi_0,\ \varphi_1,\ \varphi_2 : j(\mathcal{A}) \longrightarrow R \quad \text{astfel încât} \\ S(\mathbf{A}) = \varphi_0(j_{\mathbf{A}})\mathbf{I} + \varphi_1(j_{\mathbf{A}})\mathbf{A} + \varphi_2(j_{\mathbf{A}})\mathbf{A}^2, \end{gathered} \tag{A.51}$$

în care setul de invarianţi este definit de exemplu prin $j_{\mathbf{A}} = \{\mathrm{tr}\,\mathbf{A}, \mathrm{tr}\,\mathbf{A}^2, \mathrm{tr}\,\mathbf{A}^3\}$.

**Demonstraţie.** Vom considera separat cele trei cazuri posibile.

a) dacă $\omega_1 \neq \omega_2 \neq \omega_3 \neq \omega_1$ atunci $\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{3} \omega_i \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i$ Folosim Lema 1. şi deducem că $S(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{3} \beta_i\, \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i$

Folosim Lema 2. (a lui Wang) şi deoarece $Sp\{\mathbf{I}, \mathbf{A}, \mathbf{A}^2\} = Sp\{\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3\}$ rezultă că .

$$S(\mathbf{A}) = \alpha_0 \mathbf{I} + \alpha_1 \mathbf{A} + \alpha_2 \mathbf{A}^2. \tag{A.52}$$

A mai rămas de demonstrat că funcţiile scalare $\alpha_j$ depind numai de $j_{\mathbf{A}}$. Vom arăta că sunt funcţii scalare izotrope. Rescriem ipoteza, împreună cu reprezentarea (52)

$$\begin{gathered}\mathbf{Q}S(\mathbf{A})\mathbf{Q}^T - S(\mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^T) = 0 \quad \Longleftrightarrow (\alpha_0(\mathbf{A}) - \alpha_0(\mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^T)\,\mathbf{I} + \\ +(\alpha_1(\mathbf{A}) - \alpha_1(\mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^T)\mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^T + (\alpha_2(\mathbf{A}) - \alpha_2(\mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^T)\mathbf{Q}\mathbf{A}^2\mathbf{Q}^T = 0.\end{gathered} \tag{A.53}$$

Compunînd cu $\mathbf{Q}^T$ la stânga şi cu $\mathbf{Q}$ la dreapta obţinem o combinaţie liniară egală cu zero, de unde în baza liniar independenţei ansamblului de tensori $\{\mathbf{I}, \mathbf{A}, \mathbf{A}^2\}$ deducem că, coeficienţii scalari sunt nuli. Deci am demonstrat că rezultă

$$\alpha_j(\mathbf{A}) - \alpha_j(\mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^T) = 0 \quad \text{pentru} \quad j = 0, 1, 2.$$

Folosim şi Teorema 1. din care rezultă reprezentarea (51).

**Reciproca** rezultă dintr-un calcul direct, folosind definiţiile.

**Teorema de reprezentare pentru funcţii tensoriale liniare şi izotrope**

Fie $S : Sim \longrightarrow Sim$ liniară. $S$ este izotropă dacă şi numai dacă $\exists\, \lambda,\ \mu, \in R$ astfel încât

$$S(\mathbf{A}) = \lambda\,(\mathrm{tr}\,\mathbf{A})\mathbf{I} + 2\mu\,\mathbf{A}. \tag{A.54}$$

**Demonstraţie.** Presupunem că $S$ este izotropă.

Fie $\mathbf{e} \in \mathcal{V}$ si $\mathbf{A} = \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} \in Sim$. Deoarece suntem în cazul în care tensorul are două valori egale, utilizăm reprezentarea în cazul b), odată cu Lema 1. Rezultă că

$$S(\mathbf{e} \otimes \mathbf{e}) = \beta\, \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} + \gamma(\mathbf{I} - \mathbf{e} \otimes \mathbf{e}) \equiv \lambda(\mathbf{e})\,\mathbf{I} + 2\mu(\mathbf{e})\,\mathbf{e} \otimes \mathbf{e}. \tag{A.55}$$

Folosim ipoteza de izotropie şi reprezentarea (55) de unde

$$\mathbf{Q}S(\mathbf{e} \otimes \mathbf{e})\mathbf{Q}^T - S(\mathbf{Q}\mathbf{e} \otimes \mathbf{e}\mathbf{Q}^T) = 0 \quad \Longrightarrow$$

$$(\lambda(\mathbf{e}) - \lambda(\mathbf{Q}\mathbf{e}))\,\mathbf{I} + 2(\mu(\mathbf{e}) - \mu(\mathbf{Q}\mathbf{e}))\,\mathbf{Q}(\mathbf{e} \otimes \mathbf{e})\mathbf{Q}^T = 0, \tag{A.56}$$

$$(\lambda(\mathbf{e}) - \lambda(\mathbf{Q}\mathbf{e}))\mathbf{I} + 2(\mu(\mathbf{e}) - \mu(\mathbf{Q}\mathbf{e}))\mathbf{e} \otimes \mathbf{e} = 0.$$

Am compus la dreapta cu $\mathbf{Q}$ şi la stânga cu $\mathbf{Q}^T$, în $(56)_2$ şi a rezultat $(56)_3$.

Din Lema 2. $\{\mathbf{I}, \mathbf{e}\otimes\mathbf{e}\}$ sunt liniari independenţi, din (56) deducem că cele două funcţii scalare sunt izotrope în raport cu variabila vectorială, deoarece

$$\lambda(\mathbf{e}) = \lambda(\mathbf{Qe}), \quad \mu(\mathbf{e}) = \mu(\mathbf{Qe}) \quad \forall\, \mathbf{Q} \in Ort. \tag{A.57}$$

Arătăm că funcţiile nu depind de orientarea vectorilor, ci numai de mărimea lor. Pentru aceasta considerăm $\mathbf{f} \in \mathcal{V}$, cu $|\,\mathbf{f}\,| = |\,\mathbf{e}\,|$ şi construim $\mathbf{Q} \in Ort$ astfel încât $\mathbf{Qe} = \mathbf{f}$. Din (57) deducem că

$$\lambda(\mathbf{e}) = \lambda(\mathbf{f}), \quad \mu(\mathbf{e}) = \mu(\mathbf{f}), \quad \text{pentru} \quad \forall\, \mathbf{f}, \mathbf{e} \in \mathcal{V} \quad \text{cu} \quad |\,\mathbf{f}\,| = |\,\mathbf{e}\,|. \tag{A.58}$$

Fie acum $\mathbf{A} \in Sim$. Folosim reprezentarea spectrală a tensorului şi liniaritatea aplicaţiei $\mathbf{S}$

$$\begin{aligned} &\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{3} \omega_i \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i \quad \text{atunci} \\ &S(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{3} \omega_i S(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i) = \sum_{i=1}^{3} \omega_i \{\lambda(\mathbf{e}_i)\mathbf{I} + 2\mu(\mathbf{e}_i)\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i\}. \end{aligned} \tag{A.59}$$

Din (58) obţinem că $\lambda(\mathbf{e}_1) = \lambda(\mathbf{e}_2) = \lambda(\mathbf{e}_3) = \lambda$, $\mu(\mathbf{e}_1) = \mu(\mathbf{e}_2) = \mu(\mathbf{e}_3) = \mu$. Revenind în relaţia (59) deducem că

$$S(\mathbf{A}) = \lambda \sum_{i=1}^{3} \omega_i \mathbf{I} + 2\mu \sum_{i=1}^{3} \omega_i \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i = 2\,\mu \mathbf{A} + \lambda \operatorname{tr} \mathbf{A}\, \mathbf{I}. \tag{A.60}$$

## A3. Ortogonalul este subgrup maximal în unimodular

In aceasta anexă vom demonstra ( Noll [1965]) maximalitatea grupului transformărilor ortogonale în grupul transformărilor unimodulare.

Fie $\mathcal{V}$ un spaţiu vectorial $n-$ dimensional.

$Unim = \{\mathbf{H} \in Lin \,||\, \det \mathbf{H} \,|= 1\} \quad Ort = \{\mathbf{Q} \in Lin \mid \mathbf{Q}^T\mathbf{Q} = \mathbf{I}\}$.

**Teorema 1.** $Ort$ este subgrup maximal în $Unim$.

Afirmaţia este echivalentă cu

$$\begin{aligned} &\forall g \quad \text{subgrup} \quad \subset Unim \text{si} \quad Ort \subset g \subset Unim \\ &\Longrightarrow \qquad g = Ort, \quad \text{sau} \quad g = Unim. \end{aligned} \tag{A.61}$$

**Lema 1.** Fie $\mathbf{S} \in Unim \cap Psim$ şi $\mathbf{S}$ are cel puţin două valori proprii distincte $s$ şi $t$ cu $s > t > 0$. Atunci $\forall \xi$ astfel încât $(\frac{t}{s})^2 \le \xi \le (\frac{s}{t})^2$ $\exists\, \mathbf{R} \in Ort$ astfel încât tensorul

$\mathbf{T} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{R}\mathbf{S}^2\mathbf{R}^T\mathbf{S}^{-1}$ să aibe valorile proprii $\xi, \xi^{-1}, 1, \ldots, 1$.

**Demonstraţie**. Fie $\mathbf{g}, \mathbf{f}$ vectorii proprii unitari ai lui $\mathbf{S}$ care corespund valorilor proprii alese $s$ şi respectiv $t$. Considerăm $\mathcal{W} = (Sp\{\mathbf{g}, \mathbf{f}\})^{\perp}$– subspaţiul vectorial , de dimensiune $n-2$, ortogonal pe spaţiul generat de $\mathbf{g}, \mathbf{f}$. Deci

$$
\begin{gathered}
\mathcal{V} = \mathcal{W} \oplus Sp\{\mathbf{g}, \mathbf{f}\} \quad \Longleftrightarrow \\
\forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} \quad \exists \quad \mathbf{w} \in \mathcal{W},\ \alpha_1, \quad \alpha_2 \in R, \quad \text{unice, astfel încât} \\
\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{g} + \alpha_2 \mathbf{f} + \mathbf{w}.
\end{gathered}
\tag{A.62}
$$

Să observăm că $\mathbf{S}\mathcal{W} = \mathcal{W}$. Definim $\mathbf{R}_\theta \in Ort$, astfel încât

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{R}_\theta \mathbf{w} = \mathbf{w}, \\
&\mathbf{R}_\theta \mathbf{g} = \cos\theta\, \mathbf{g} + \sin\theta\, \mathbf{f}, \\
&\mathbf{R}_\theta \mathbf{f} = -\sin\theta \mathbf{g} + \cos\theta\, \mathbf{f},
\end{aligned}
\tag{A.63}
$$

reprezentînd o rotaţie de unghi $\theta$ în planul determinat de $\mathbf{g}, \mathbf{f}$.

Definim şi transformarea

$$\mathbf{T}_\theta = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{R}_\theta \mathbf{S}^2 \mathbf{R}_\theta^T \mathbf{S}^{-1} \in Psim \cap Unim, \quad \forall\, \theta \in [0, 2\,\pi), \tag{A.64}$$

care are proprietăţile

$$
\begin{aligned}
&1) \qquad \mathbf{T}_\theta(\mathbf{w}) = \mathbf{w} \quad \forall\, \mathbf{w} \in \mathcal{W}, \\
&2) \qquad \mathbf{T}_\theta(\mathbf{g}) = (\cos^2\theta + \frac{t^2}{s^2}\sin^2\theta)\, \mathbf{g} + \frac{1}{2}(\frac{s}{t} - \frac{t}{s})\sin 2\theta\, \mathbf{f}, \\
&\qquad\quad \mathbf{T}_\theta(\mathbf{f}) = \frac{1}{2}(\frac{s}{t} - \frac{t}{s})\sin 2\theta\, \mathbf{g} + (\cos^2\theta + \frac{s^2}{t^2}\sin^2\theta)\, \mathbf{f},
\end{aligned}
\tag{A.65}
$$

obţinute dintr-un calcul direct.

Din (65) deducem că valorile proprii ale transformării simetrice $\mathbf{T}_\theta$ sunt $\lambda_1 = \Lambda_1(\theta, s, t)$, $\lambda_2 = \Lambda_2(\theta, s, t)$ şi $\lambda_3 = 1$, care are ordinul n -2 de multiplicitate. Deorece $\mathbf{T}_\theta$ este în $Unim$ rezultă că $\lambda_1 \lambda_2 = 1$.

$\lambda_1, \lambda_2$ sunt valorile proprii care se determină din ecuaţia

$$\det\left([\mathbf{T}_\theta]_{\mathbf{g},\mathbf{f}} - \lambda\right) = 0, \tag{A.66}$$

unde matricea de reprezentare a transformării $\mathbf{T}_\theta$, proiectată pe $Sp\{\mathbf{g}, \mathbf{f}\}$ se reprezintă pe baza $\{\mathbf{g}, \mathbf{f}\}$ prin

$$
[\mathbf{T}_\theta]_{\mathbf{g},\mathbf{f}} = \begin{pmatrix} \cos^2\theta + \frac{t^2}{s^2}\sin^2\theta & \frac{1}{2}(\frac{s}{t} - \frac{t}{s})\sin 2\theta \\ \frac{1}{2}(\frac{s}{t} - \frac{t}{s})\sin 2\theta & \cos^2\theta + \frac{s^2}{t^2}\sin^2\theta \end{pmatrix},
$$

pentru $\forall\, \theta \in [0, 2\,\pi)$.

Pentru valorile $s, t$ fixate rezultă că aplicaţiile

$$\theta \in [0, 2\pi) \longrightarrow \Lambda_1(s,t,\theta) \in R \quad \text{si} \quad \theta \in [0,2\pi) \longrightarrow \Lambda_2(s,t,\theta) \in R, \tag{A.67}$$

sunt continue.

De pe altă parte din $(65)_2$ deducem că pentru

$$\begin{aligned} \theta = \frac{\pi}{2} \quad &\Longrightarrow \quad \mathbf{T}_{\pi/2}(\mathbf{g}) = \frac{t^2}{s^2}\mathbf{g} \quad , \quad \mathbf{T}_{\pi/2}(\mathbf{f}) = \frac{s^2}{t^2}\mathbf{f}, \\ \theta = 0 \quad &\Longrightarrow \quad \mathbf{T}_0(\mathbf{g}) = \mathbf{g} \quad , \quad \mathbf{T}_0(\mathbf{f}) = \mathbf{f}. \end{aligned} \tag{A.68}$$

Aplicăm proprietatea lui Darboux pentru funcţiile continue

$$\theta \in [0, 2\pi) \longrightarrow \Lambda_1(s,t,\theta) \in R \quad \text{şi} \quad \theta \in [0,2\pi) \longrightarrow \Lambda_2(s,t,\theta) \in R.$$

$$\begin{aligned} &\text{Deoarece} \quad \Lambda_1(s,t,0) = 1, \quad \Lambda_1(s,t,\frac{\pi}{2}) = \frac{t^2}{s^2} < 1, \quad \text{rezultă că} \\ &\forall\, \xi \in [\frac{t^2}{s^2}, 1] \quad \exists\, \theta_\xi \in [0, \frac{\pi}{2}] \quad \text{astfel încât} \quad \Lambda_1(s,t,\theta_\xi) = \xi \\ &\text{şi} \quad \Lambda_2(s,t,\theta_\xi) = \frac{1}{\xi}. \end{aligned} \tag{A.69}$$

In mod analog, cum $\Lambda_2(s,t,0) = 1$, $\Lambda_2(s,t,\frac{\pi}{2}) = \frac{s^2}{t^2} > 1$, rezultă că

$$\begin{aligned} &\forall\, \xi \in [1, \frac{s^2}{t^2}] \quad \exists\, \theta_\xi \in [0, \frac{\pi}{2}] \quad \text{astfel încât} \quad \Lambda_2(s,t,\theta_\xi) = \xi \\ &\text{şi} \quad \Lambda_1(s,t,\theta_\xi) = \frac{1}{\xi}. \end{aligned} \tag{A.70}$$

In concluzie, pe baza proprietăţilor afirmate în (69) şi (70) deducem că

$$\begin{aligned} &\forall\, \xi \in [\frac{t^2}{s^2}, \frac{s^2}{t^2}] \quad \exists \quad \theta_\xi \in [0, \frac{\pi}{2}] \quad \text{astfel încât} \\ &\mathbf{T}_{\theta_\xi} \quad \text{are valorile proprii} \quad \{\xi, \ \frac{1}{\xi}, \ 1, \ldots, \ 1\} \end{aligned} \tag{A.71}$$

Astfel am demonstrat Lema 1., iar pe baza ei vom demonstra următoarea teoremă

**Teorema 2.** Fie $\mathbf{S} \in Unim \cap Psim$ şi $\mathbf{S}$ are cel puţin două valori proprii distincte $s$ şi $t$, cu $s > t > 0$. Atunci

$$\forall\, \mathbf{H} \in Unim \cap Psim \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{H} \in \mathcal{G}(\mathbf{S}, Ort), \tag{A.72}$$

unde prin $\mathcal{G}(\mathbf{S}, Ort)$ s-a notat grupul generat de elementul $\mathbf{S}$ şi $Ort$.

**Demonstraţie.** Fie $\mathbf{H} \in Unim \cap Psim$ şi fie $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$, o bază ortonormată de vectori proprii ai lui $\mathbf{H}$, corespunzători valorilor proprii $\{h_1, \dots, h_n\}$.

Deoarece $\mathbf{H} \in Psim$ atunci $h_i > 0$. Din $\mathbf{H} \in Unim$ deducem că $h_1 \cdot \ldots \cdot h_n = 1$.

Considerăm $\mathbf{H}_k \in Unim \cap Psim$ cu aceiaşi vectori proprii, dar corespunzător valorilor proprii $\{1, \dots, \eta_k, \eta_k^{-1}, 1, \dots, 1\}$, cu precizarea că $\eta_k$ este valoare proprie asociată vectorului propriu $\mathbf{e}_k$, iar $\eta_k^{-1}$ este asociată vectorului propriu $\mathbf{e}_{k+1}$, pentru valorile proprii

$$\eta_1 = h_1, \quad , \dots, \quad \eta_k = \eta_{k-1} h_k, \quad k = 2, \dots, n-1. \tag{A.73}$$

**Demonstrăm** că

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 \mathbf{H}_2 \dots \mathbf{H}_{n-1}, \tag{A.74}$$

arătând că are loc egalitatea pe vectorii bazei.

Pentru aceasta vom porni remarcând că dacă $1 \leq k \leq n-1$, fixat, atunci

$$\mathbf{H}_k \mathbf{e}_i = \begin{cases} \mathbf{e}_i & \text{dacă} \quad 1 \leq i < k, \\ \eta_i \mathbf{e}_i & \text{dacă} \quad i = k, \\ (\eta_{i-1})^{-1} \mathbf{e}_i & \text{dacă} \quad i = k+1, \\ \mathbf{e}_i & \text{dacă} \quad k+1 < i \leq n. \end{cases} \tag{A.75}$$

De exemplu

$$\begin{aligned} &\mathbf{H}_1 \mathbf{H}_2 \dots \mathbf{H}_{n-1} \mathbf{e}_1 = \mathbf{H}_1 \mathbf{e}_1 = h_1 \mathbf{e}_1, \\ &\mathbf{H}_1 \mathbf{H}_2 \dots \mathbf{H}_{n-1} \mathbf{e}_2 = \mathbf{H}_1 \mathbf{H}_2 \mathbf{e}_2 = \mathbf{H}_1 (\eta_2 \mathbf{e}_2) = \eta_2 \eta_1^{-1} \mathbf{e}_2 = h_2 \mathbf{e}_2, \end{aligned} \tag{A.76}$$

dacă am folosit (75) şi (73). In continuare se urmăreste aceeaşi cale.

Vom folosi observaţia că şirul $a^{1/m} \longrightarrow 1$, când $m \to \infty$. Deci pentru

$$\begin{aligned} &\forall \epsilon > 0 \quad \exists \quad m_\epsilon \in \mathbf{N} \quad \text{astfel încât} \quad \forall m > m_\epsilon, \\ &|\, (\eta_k)^{1/m} - 1 \,| < \epsilon \quad \Longleftrightarrow \quad 1 - \epsilon < (\eta_k)^{1/m} < \epsilon + 1. \end{aligned} \tag{A.77}$$

Este posibil ca $\eta_k \in [\frac{t^2}{s^2}, \frac{s^2}{t^2}]$ şi atunci suntem în condiţiile lemei.

Dacă $\eta_k > 0$ nu este în intervalul $[\frac{t^2}{s^2}, \frac{s^2}{t^2}]$ atunci pentru

$$\begin{aligned} &\epsilon < \min\{\frac{s^2}{t^2} - 1, 1 - \frac{t^2}{s^2}\} \quad \exists \quad m_{\epsilon,k} \in \mathbf{N} \quad \text{astfel încât} \\ &\forall m > m_{\epsilon,k} \quad (\eta_k)^{1/m} \in [\frac{t^2}{s^2}, \frac{s^2}{t^2}]. \end{aligned} \tag{A.78}$$

Deci vom nota prin $m_k \in \mathbf{N}$ o valoare corespunzător căreia $(\eta_k)^{1/m} \in [\frac{t^2}{s^2}, \frac{s^2}{t^2}]$. Aplicăm Lema 1. şi prin urmare $\exists\, \mathbf{R}_k \in Ort$ astfel încât

$$\mathbf{T}_k = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{R}_k\mathbf{S}^2\mathbf{R}_k^T\mathbf{S}^{-1}, \tag{A.79}$$

să aibă valorile proprii $\{\xi,\ \xi^{-1},\ 1, \ldots, 1\}$, pentru $\xi = (\eta_k)^{1/m}$.

Atunci $(\mathbf{T}_k)^{m_k}$ are valorile proprii $\{\eta_k,\ \eta_k^{-1},\ 1, \ldots, 1\}$, aceleaşi cu valorile proprii ale lui $\mathbf{H}_k$.

Rezultă că există o transformare ortogonală, $\bar{\mathbf{R}}$, care pune în corespondenţă bazele de vectori proprii corespunzătoare celor două transformări simetrice.

Astfel obţinem că $\mathbf{H}_k \in \mathcal{G}(\mathbf{S}, Ort)$, $\forall\, k \in \{\overline{1, n-1}\}$.

Deoarece $\mathbf{H} \in Psim \cap Unim$ are proprietatea de-a fi exprimat prin compunerea $\mathbf{H} \equiv \mathbf{H}_1\mathbf{H}_2 \ldots \mathbf{H}_{n-1}$, rezultă că şi $\mathbf{H} \in \mathcal{G}(\mathbf{S}, Ort)$.

Am demonstrat astfel teorema.

Vom trece acum la **demonstrarea** Teoremei 1. Presupunem că $g$ este un subgrup în $Unim$, care include strict $Ort$. Deci $\exists\, \mathbf{F} \in g$, care nu este o transformare ortogonală.

Deoarece $\mathbf{F} \in Unim$ rezultă că $\mathbf{F} \in Invlin$, şi prin urmare (aplicând teorema de descompunere polară $\mathbf{F} = \mathbf{RS}$ cu $\mathbf{R} \in Ort$ şi $\mathbf{S} \in Psim \cap Unim$, $\mathbf{S} \neq \mathbf{I}$), rezultă că $\mathbf{S}$ are cel puţin două valori distincte, deoarece dacă toate valorile proprii ar fi egale, atunci din condiţia $\det \mathbf{S} = 1$ ar rezulta că toate valorile proprii sunt egale cu 1, ele fiind pozitive. Aceasta conduce la $\mathbf{S} = \mathbf{I}$, ceea ce este imposibil.

Să mai arătăm că $\mathcal{G}(\mathbf{S}, Ort) \subset g$.

Deoarece prin ipoteză $Ort \subset g$ rezultă că $\mathbf{R} \in Ort \cap g$. Atunci $\mathbf{R}^T \in g$. Din $\mathbf{R}^T$, $\mathbf{F} \in g$ rezultă că $\mathbf{R}^T\mathbf{F} = \mathbf{S} \in g$, fiind subgrup.

Pentru acest element $\mathbf{S} \in g$ vom aplica Teorema 1., relativ la elementele din $Unim$.

Pentru orice $\mathbf{U} \in Unim$, care nu este transformare ortogonală, îi aplicăm des- compunerea polară şi rezultă că $\mathbf{U} = \mathbf{RH}$, cu $\mathbf{H} \in Psim \cap Unim$.

Din Teorema 1. avem $\mathbf{H} \in \mathcal{G}(\mathbf{S}, Ort)$. In mod evident rezultă că $\forall\, \mathbf{U} \in \mathcal{G}(\mathbf{S}, Ort)$. Avem deci incluziunile $Unim \subset \mathcal{G}(\mathbf{S}, Ort) \subset g$. Astfel am arătat că dacă $g$ este un sbgrup în $Unim$, care include strict $Ort$ include şi $Unim$. Deci $g = Unim$. Ceea ce trebuia demonstrat.

## A4. Teoreme de reprezentare pentru funcţii anizotrope

Vom prezenta câteva rezultate datorate lui Liu [1981] privind reprezentări pentru invarianţi anizotropi.

Aceste teoreme se demonstrează în ipoteza că grupul de anizotropie, $g$ este caracterizat printr-un set de vectori şi tensori, care rămân invarianţi în raport cu elementele unui alt subgrup $\mathcal{G} \in Ort$. Să considerăm

$\mathcal{V}-$ spaţiu vectorial real, de dimensiune $p$,

$Lin = \{\mathbf{A} \mid \mathbf{A} : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V} \quad \text{liniare}\}$,

$\mathcal{V}^m-$ spaţiu produs cartezian de ordin $m \in \mathbf{N}^*$, corespunzător spaţiului vectorial real $\mathcal{V}$,

$Lin^n-$ spaţiu produs cartezian de ordin $n \in \mathbf{N}^*$, corespunzător spaţiului vectorial real $Lin$.

Fie $\mathcal{D} \subset \mathcal{V}^m \times Lin^n-$ multime deschisă şi conexă şi funcţiile

$$\varphi : \mathcal{D} \longrightarrow R,\ h : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{V},\ S : \mathcal{D} \longrightarrow Lin \tag{A.80}$$

Notăm

$$\begin{aligned}
&\mathbf{v} \in \mathcal{V}^m \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{v} = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m), \quad \mathbf{v}_i \in \mathcal{V},\ \forall\, i \in \{\overline{1,m}\};\\
&\mathbf{A} \in Lin^n \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{A} = (\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n), \quad \mathbf{A}_i \in Lin,\ \forall\, i \in \{\overline{1,n}\};\\
&\mathbf{Qv} \in \mathcal{V}^m \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{Qv} = (\mathbf{Qv}_1, \ldots, \mathbf{Qv}_m), \quad \forall\, \mathbf{Q} \in Ort;\\
&\mathbf{QAQ}^T \in Lin^n \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{QAQ}^T = (\mathbf{QA}_1\mathbf{Q}^T, \ldots, \mathbf{QA}_n\mathbf{Q}^T), \quad \forall\, \mathbf{Q} \in Ort.
\end{aligned} \tag{A.81}$$

**Definiţia 1.** Fie $\mathcal{G} \subset Ort$, subgrup. Spunem că $\mathcal{D}$ este *invariant în raport cu* $\mathcal{G}$ dacă

$$\forall\, (\mathbf{v}, \mathbf{A}) \in \mathcal{D} \quad \longrightarrow \quad (\mathbf{Qv}, \mathbf{QAQ}^T) \in \mathcal{D} \quad \forall\, \mathbf{Q} \in \mathcal{G}. \tag{A.82}$$

**Definiţia 2.** Spunem că funcţiile $\varphi$, $h$ şi $S$ sunt *invariante în raport cu* $\mathcal{G}$ dacă $\mathcal{D}$ este *invariant în raport cu* $\mathcal{G}$ şi

$$\begin{aligned}
&\varphi(\mathbf{Qv}, \mathbf{QAQ}^T) = \varphi(\mathbf{v}, \mathbf{A}),\\
&h(\mathbf{Qv}, \mathbf{QAQ}^T) = \mathbf{Q}h(\mathbf{v}, \mathbf{A}),\\
&S(\mathbf{Qv}, \mathbf{QAQ}^T) = \mathbf{Q}S(\mathbf{v}, \mathbf{A})\mathbf{Q}^T,\\
&\forall\, (\mathbf{v}, \mathbf{A}) \in \mathcal{D},\ \mathbf{Q} \in \mathcal{G}.
\end{aligned} \tag{A.83}$$

**Definiţia 3.** Dacă $\mathcal{G} = Ort^+$ atunci funcţiile invariante în raport cu $Ort^+$ se numesc *hemitrope.*

**Definiţia 4.** Dacă $\mathcal{G} = Ort$ atunci funcţiile invariante în raport cu $Ort$ se numesc *izotrope.*

**Observaţia 1.** Se regăsesc definiţiile din A2., pentru $n = 1, m = 0$.

Reprezentările funcţiilor izotrope, de argument ansamblu de vectori, tensori simetrici şi respectiv antisimetrici, cu valori reale, şi respectiv tensoriale (simetrice şi antisimetrice) se găsesc în lucrarea lui Wang [1970]. Sunt date reprezentările pentru un ansamblu de maximum 4 elemente.

Propoziţia care urmează permite identificarea spaţiului vectorial $\mathcal{V}$ cu spaţiul tensorilor antisimetrici $Asim$, spaţiile fiind izomorfe.

**Propoziţia 1.** i) Fie $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$, atunci $\exists\, \mathbf{W} \in Asim$ unic, astfel încât

$$\mathbf{W}\mathbf{u} = \mathbf{v} \times \mathbf{u} \quad \forall\, \mathbf{u} \in \mathcal{V} \quad \text{şi} \quad \mathbf{W}\mathbf{v} = 0. \tag{A.84}$$

ii) Fie $\mathbf{W} \in Asim$, atunci $\exists\, \mathbf{v} \in \mathcal{V}$ unic, astfel încât să aibă loc (84).

iii) Aplicaţia $\phi : Asim \longrightarrow \mathcal{V}$ definită prin (84) şi notată $\phi(\mathbf{W}) \equiv <\mathbf{W}>= \mathbf{v}$, este un izomorfism.

**Definiţia 5.** Spunem că $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ este *vectorul coaxial cu tensorul* $\mathbf{W} \in Asim$, sau că tensorul $\mathbf{W} \in Asim$ este *asociat vectorului* $\mathbf{v}$, dacă $\mathbf{W}\mathbf{u} = \mathbf{v} \times \mathbf{u}, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{V}$. Notăm $\mathbf{v} =< \mathbf{W} >$.

**Propoziţia 2.** Dacă $\mathbf{v} =< \mathbf{W} >$, atunci

$$\mathbf{Q}\mathbf{v} =< \mathbf{Q}\mathbf{W}\mathbf{Q}^T > \quad \forall\, \mathbf{Q} \in Ort^+. \tag{A.85}$$

**Teorema 1.** Fie functiile $\varphi$, $S$ cu valori scalare şi respectiv tensoriale. Definim functiile $\hat{\varphi}$, $\hat{S}$ prin relaţiile

$$\begin{aligned} &\hat{\varphi}(\mathbf{W}, \mathbf{A}) = \varphi(\mathbf{v}, \mathbf{A}) \quad \hat{S}(\mathbf{W}, \mathbf{A}) = S(\mathbf{v}, \mathbf{A}) \quad \text{unde } \mathbf{v} =< \mathbf{W} >, \\ &\varphi,\, S \quad \text{hemitropă} \quad \Longleftrightarrow \quad \hat{\varphi},\, \hat{S} \quad \text{izotropă} \end{aligned} \tag{A.86}$$

**Demonstraţie.** Presupunem că $\hat{\varphi}$, $\hat{S}$ sunt izotrope. Deci

$$\begin{aligned} &\hat{\varphi}(\mathbf{Q}\mathbf{W}\mathbf{Q}^T, \mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^T) = \hat{\varphi}(\mathbf{W}, \mathbf{A}) \quad \forall\, \mathbf{Q} \in Ort \quad \text{şi} \\ &\mathbf{Q}\hat{S}(\mathbf{W}, \mathbf{A})\mathbf{Q}^T = \hat{S}(\mathbf{Q}\mathbf{W}\mathbf{Q}^T, \mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^T) \quad \forall\, \mathbf{Q} \in Ort. \end{aligned} \tag{A.87}$$

In particular pentru $\mathbf{Q} \in Ort^+$ au loc egalităţile (87) şi din definiţiile (86), cu utilizarea Propoziţiei 2,. rezultă că $\varphi$, $S$ sunt hemitrope.

Presupunem că $\varphi$ este hemitropă

$$\varphi(\mathbf{Q}\mathbf{v}, \mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^T) = \varphi(\mathbf{v}, \mathbf{A}) \quad \forall\, \mathbf{Q} \in Ort^+, \tag{A.88}$$

deci şi $\hat{\varphi}$ este hemitropă.

Să observăm că

$$\begin{aligned} &\mathbf{Q} \in Ort^+ \quad \Longleftrightarrow \quad -\mathbf{Q} \in Ort \quad \text{cu} \quad \det \mathbf{Q} = -1, \\ &(-\mathbf{Q})(-\mathbf{Q})^T = \mathbf{Q}\mathbf{Q}^T. \end{aligned} \tag{A.89}$$

Deoarece $\hat{\varphi}$ este o funcţie cu valori scalare şi este hemitropă rezultă că este şi izotropă (dacă folosim (89)).

Analog se demonstrează şi pentru funcţia cu valori tensoriale.

**Teorema 2.** Fie funcţia $h$ cu valori vectoriale şi fie funcţia $H$ cu valori tensori antisimetrici asociată funcţiei $h$, prin relaţia $h =< H >$ . Definim funcţia $\hat{H}$ prin relaţia

$$\begin{gathered} \hat{H}(\mathbf{W},\mathbf{A}) = H(\mathbf{v},\mathbf{A}) \quad \text{unde } \mathbf{v} =< \mathbf{W} >, \\ \text{atunci } h \quad \text{hemitropă} \quad \Longleftrightarrow \quad \hat{H} \quad \text{izotropă} \end{gathered} \tag{A.90}$$

**Demonstraţie.** Presupunem că $\hat{H}$ este izotropă. Deci

$$\begin{gathered} \hat{H}(\mathbf{QWQ}^T,\mathbf{QAQ}^T) = \mathbf{Q}\hat{H}(\mathbf{W},\mathbf{A})\mathbf{Q}^T \quad \forall\, \mathbf{Q} \in Ort \quad \Longrightarrow \\ H(\mathbf{Qv},\mathbf{QAQ}^T) = \mathbf{Q}H(\mathbf{v},\mathbf{A})\mathbf{Q}^T = \quad \forall\, \mathbf{Q} \in Ort^+. \end{gathered} \tag{A.91}$$

Egalitatea din $(91)_2$ se obţine din ipoteza , scrisă în particular pentru $\mathbf{Q} \in Ort^+$, cu utilizarea definiţiei funcţiei $\hat{H}$ şi a Propoziţiei 2.

Dacă considerăm vectorii coaxiali cu tensorii antisimetrici din $(91)_2$ avem egali- tatea

$$\begin{gathered} < H(\mathbf{Qv},\mathbf{QAQ}^T) >=< \mathbf{Q}H(\mathbf{v},\mathbf{A})\mathbf{Q}^T >= \mathbf{Q} < H(\mathbf{v},\mathbf{A}) > \quad \forall\, \mathbf{Q} \in Ort^+, \\ \text{atunci } h(\mathbf{Qv},\mathbf{QAQ}^T) = \mathbf{Q}h(\mathbf{v},\mathbf{A}) \quad \forall\, \mathbf{Q} \in Ort^+. \end{gathered} \tag{A.92}$$

Am utilizat încă o dată Propoziţia 2.

Cealaltă implicaţie se demonstrează în mod analog, dacă ţinem seama de observaţiile din (89).

**Definiţia 8.** Definim un subgrup $g \subset Ort$ caracterizat prin proprietatea că *există* un set de vectori şi tensori, notaţi $(\mathbf{m},\ \mathbf{M})$ astfel încât

$$g = \{\mathbf{Q} \in \mathcal{G} \mid \mathbf{Qm} = \mathbf{m}, \quad \mathbf{QMQ}^T = \mathbf{M}\} \tag{A.93}$$

**Lema 1.** Fie funcţiile $\varphi$, $h$, $S$ cu valori scalare , vectoriale şi respectiv tensoriale invariante relativ la $g$. Fie $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}' \in \mathcal{G}$. Dacă $\mathbf{R}'\mathbf{R}^T \in g$, atunci au loc egalităţile

$$\begin{gathered} \varphi(\mathbf{Rv},\mathbf{RAR}^T) = \varphi(\mathbf{R}'\mathbf{v},\mathbf{R}'\mathbf{AR}'^T), \\ \mathbf{R}^T h(\mathbf{Rv},\mathbf{RAR}^T) = \mathbf{R}'^T h(\mathbf{R}'\mathbf{v},\mathbf{R}'\mathbf{AR}'^T), \\ \mathbf{R}^T S(\mathbf{Rv},\mathbf{RAR})\mathbf{R} = \mathbf{R}'^T S(\mathbf{R}'\mathbf{v},\mathbf{R}'\mathbf{AR}'^T)\mathbf{R}'. \end{gathered} \tag{A.94}$$

**Demonstraţie.** Considerăm cazul funcţiilor cu valori vectoriale, celelalte demonstraţii sunt similare.

Notăm $\mathbf{Q} = \mathbf{R}'\mathbf{R}^T \in g$ din ipoteza. $\mathbf{R} \in \mathcal{G} \subset Ort$ deci $\mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^T\mathbf{R} = \mathbf{I}$.

Flosim ipoteza că $h$ este invariantă relativ la $g$, în particular pentru $\mathbf{Q} \in g$

$$
\begin{aligned}
&h(\mathbf{R}'\mathbf{v}, \mathbf{R}'\mathbf{A}\mathbf{R}'^T) = h(\mathbf{R}'\mathbf{R}^T\mathbf{R}\mathbf{v}, \mathbf{R}'\mathbf{R}^T\mathbf{R}\mathbf{A}\mathbf{R}^T\mathbf{R}\mathbf{R}'^T) = \\
&= h(\mathbf{Q}\mathbf{R}\mathbf{v}, \mathbf{Q}\mathbf{R}\mathbf{A}\mathbf{R}^T\mathbf{Q}^T) = \mathbf{Q}h(\mathbf{R}\mathbf{v}, \mathbf{R}\mathbf{A}\mathbf{R}^T) = \mathbf{R}'\mathbf{R}^T h(\mathbf{R}\mathbf{v}, \mathbf{R}\mathbf{A}\mathbf{R}^T)
\end{aligned}
\tag{A.95}
$$

Din egalitatea termenilor extremi se deduce formula (94), pentru funcţia $h$.

**Definiţia 9.** Se definesc mulţimea

$$
\mathcal{M} = \{(\bar{\mathbf{Q}}\mathbf{m}, \bar{\mathbf{Q}}\mathbf{M}\bar{\mathbf{Q}}^T) \mid \bar{\mathbf{Q}} \in \mathcal{G}\}
\tag{A.96}
$$

şi funcţiile $\bar{\varphi}$, $\bar{h}$, $\bar{S}$ definite pe $\mathcal{D} \times \mathcal{M}$ prin relaţiile

$$
\begin{aligned}
&\bar{\varphi}(\mathbf{v}, \mathbf{A}, \mathbf{p}, \mathbf{P}) = \varphi(\mathbf{R}\mathbf{v}, \mathbf{R}\mathbf{A}\mathbf{R}^T), \\
&\bar{h}(\mathbf{v}, \mathbf{A}, \mathbf{p}, \mathbf{P}) = \mathbf{R}^T h(\mathbf{R}\mathbf{v}, \mathbf{R}\mathbf{A}\mathbf{R}^T), \\
&\bar{S}(\mathbf{v}, \mathbf{A}, \mathbf{p}, \mathbf{P}) = \mathbf{R}^T S(\mathbf{R}\mathbf{v}, \mathbf{R}\mathbf{A}\mathbf{R}^T)\mathbf{R},
\end{aligned}
\tag{A.97}
$$

pentru orice $(\mathbf{v}, \mathbf{A}) \in \mathcal{D}$, $(\mathbf{p}, \mathbf{P}) \in \mathcal{M}$ cu $\mathbf{R} \in \mathcal{G}$, cu proprietăţile $\mathbf{R}\mathbf{p} = \mathbf{m}$, $\mathbf{R}\mathbf{P}\mathbf{R}^T = \mathbf{M}$.

**Propoziţia 3.** Dacă $\varphi$, $h$, $S$ sunt invariente relativ la $g$, atunci funcţiile $\bar{\varphi}$, $\bar{h}$, $\bar{S}$ din (97) sunt corect definite.

**Demonstraţie.** In general $\mathbf{R}$ nu este unic determinat în condiţiile din $(97)_2$. Dacă mai există

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{R}' \in \mathcal{G} \quad \text{astfel ca} \quad \mathbf{R}'\mathbf{p} = \mathbf{m}, \ \mathbf{R}'\mathbf{P}\mathbf{R}'^T = \mathbf{M} \quad \text{atunci} \\
&\mathbf{R}'\mathbf{R}^T\mathbf{m} = \mathbf{R}'\mathbf{p} = \mathbf{m} \text{ şi } \mathbf{R}'\mathbf{R}^T\mathbf{M}\mathbf{R}\mathbf{R}'^T = \mathbf{R}'\mathbf{P}\mathbf{R}'^T = \mathbf{M}
\end{aligned}
\tag{A.98}
$$

Aceasta înseamnă că $\mathbf{R}, \mathbf{R}' \in \mathcal{G}$ şi $\mathbf{R}'\mathbf{R}^T \in g$. Suntem în condiţiile Lemei 1. şi prin urmare valorile funcţiilor din membrul dept nu depind de alegerea elementului $\mathbf{R}$, cu proprietăţile menţionate în (97).

**Teorema 3.** O funcţie $f$ definită pe $\mathcal{D}$ cu valori scalare, vectoriale sau tensoriale este *invariantă* relativ la $g$, dacă şi numai dacă poate fi reprezentată prin $f(\mathbf{v}, \mathbf{A}) = \bar{f}(\mathbf{v}, \mathbf{A}, \mathbf{m}, \mathbf{M})$ cu funcţia $\bar{f}$ definită pe $\mathcal{D} \times \mathcal{M}$, *invariantă* relativ la $\mathcal{G}$.

**Demonstraţie.** Vom face demonstraţia pentru funcţii cu valori vectoriale, în celelalte cazuri demonstraţiile fiind similare. Presupunem că $h$ este invariantă relativ la $g$. Atunci funcţia $\bar{h}$ definită în (97), conform Propoziţiei 3. este corect definită. Pentru $\mathbf{R} = \mathbf{I} \in \mathcal{G}$ obţinem că

$$
\begin{aligned}
&\exists\, \bar{h} : \mathcal{D} \times \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{V}, \\
&h(\mathbf{v}, \mathbf{A}) = \bar{h}(\mathbf{v}, \mathbf{A}, \mathbf{m}, \mathbf{M})
\end{aligned}
\tag{A.99}
$$

Trebuie să arătăm că funcţia $\bar{h}$ este invariantă relativ la $\mathcal{G}$. Fie pentru aceasta $\mathbf{Q} \in \mathcal{G}$. Pentru $\forall (\mathbf{p}, \mathbf{P}) \in \mathcal{M}$ există $\bar{\mathbf{Q}} \in \mathcal{G}$ astfel încât $\mathbf{p} = \bar{\mathbf{Q}}, \mathbf{P} = \bar{\mathbf{Q}}\mathbf{M}\bar{\mathbf{Q}}^T$. Atunci $\mathbf{Qp} = \mathbf{Q}(\bar{\mathbf{Q}}\mathbf{m})$ , $\mathbf{QPQ}^T = \mathbf{Q}\bar{\mathbf{Q}}\mathbf{M}(\mathbf{Q}\bar{\mathbf{Q}})^T$ , ca o consecinţă a definiţiei mulţimii $\mathcal{M}$ dată în (96).

Deci $\exists\, \mathbf{R} \equiv (\mathbf{Q}\bar{\mathbf{Q}})^T \in \mathcal{G}$ astfel încât

$$\mathbf{R}(\mathbf{Qp}) = \mathbf{m}, \quad \mathbf{R}(\mathbf{QPQ}^T)\mathbf{R}^T = \mathbf{M}. \tag{A.100}$$

Din definiţia (97) pentru funcţia $\bar{h}$, cu $\mathbf{R}$ introdus în (100), obţinem

$$\begin{aligned} \bar{h}(\mathbf{Qv}, \mathbf{QAQ}^T, \mathbf{Qp}, \mathbf{QPQ}^T) &= \mathbf{R}^T h(\mathbf{R}(\mathbf{Qv}), \mathbf{R}(\mathbf{QAQ}^T)\mathbf{R}^T) = \\ &= \mathbf{R}^T h(\mathbf{R}'\mathbf{v}, \mathbf{R}'\mathbf{A}\mathbf{R}'^T)\,, \quad \text{cu} \quad \mathbf{R}' = \mathbf{RQ} \end{aligned} \tag{A.101}$$

Dacă introducem $\mathbf{R}' \equiv \mathbf{RQ}$ atunci $\mathbf{R}' \in \mathcal{G}$ pentru că $\mathbf{R}, \mathbf{Q} \in \mathcal{G}$. Dar din (100) avem proprietatea

$$\mathbf{R}'\mathbf{p} = \mathbf{m}, \quad \mathbf{R}'\mathbf{P}\mathbf{R}'^T = \mathbf{M}, \tag{A.102}$$

care ne îndreptăţeşte să folosim definiţia (97), rezultând

$$h(\mathbf{R}'\mathbf{v}, \mathbf{R}'\mathbf{A}\mathbf{R}'^T) = \mathbf{R}'\bar{h}(\mathbf{v}, \mathbf{A}, \mathbf{p}, \mathbf{P}) \tag{A.103}$$

Introducem pe (103) în ultimul membru din (101), care ne conduce la

$$\begin{aligned} \bar{h}(\mathbf{Qv}, \mathbf{QAQ}^T, \mathbf{Qp}, \mathbf{QPQ}^T) &= \mathbf{R}^T\mathbf{R}'\bar{h}(\mathbf{v}, \mathbf{A}, \mathbf{p}, \mathbf{P}) \equiv \\ &\equiv \mathbf{Q}\bar{h}(\mathbf{v}, \mathbf{A}, \mathbf{p}, \mathbf{P}), \quad \forall\, \mathbf{Q} \in \mathcal{G} \end{aligned} \tag{A.104}$$

Astfel am demonstrat că $\bar{h}$ este invariantă relativ la $\mathcal{G}$. Menţionăm că în demonstraţie proprietatea de invarianţă a funcţiei $h$ relativ la $g$ a fost folosită prin intermediul Propoziţiei 3., care asigură corecta definire a funcţiei $\bar{h}$.

**Reciproc.** Presupunem că funcţia $h$ se reprezintă prin $\bar{h}$ (conform relaţiei (99)), care este invariantă relativ la $\mathcal{G}$.

Fie $\mathbf{Q} \in g \subset \mathcal{G} \subset Ort$. Din definiţia (99) şi ipoteza de invarianţă pentru $\bar{h}$ avem egalităţile

$$\begin{aligned} h(\mathbf{Qv}, \mathbf{QAQ}^T) &= \bar{h}(\mathbf{Qv}, \mathbf{QAQ}^T, \mathbf{m}, \mathbf{M}) = \\ &= \bar{h}(\mathbf{Qv}, \mathbf{QAQ}^T, \mathbf{QQ}^T\mathbf{m}, \mathbf{QQ}^T\mathbf{MQQ}^T) = \mathbf{Q}\bar{h}(\mathbf{v}, \mathbf{A}, \mathbf{Q}^T\mathbf{m}, \mathbf{Q}^T\mathbf{MQ}) \end{aligned} \tag{A.105}$$

Deoarece $\mathbf{Q} \in g$ conform Definiţiei 8., formula (14), rezultă că

$$\mathbf{Qm} = \mathbf{m}, \quad \mathbf{QMQ}^T = \mathbf{M} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{Q}^T\mathbf{m} = \mathbf{m}, \quad \mathbf{Q}^T\mathbf{MQ} = \mathbf{M}. \tag{A.106}$$

Ţinem seama de egalităţile din (106) în (105) şi deducem

$$h(\mathbf{Qv}, \mathbf{QAQ}^T) = \mathbf{Q}\bar{h}(\mathbf{v}, \mathbf{A}, \mathbf{m}, \mathbf{M}) \equiv \mathbf{Q}h(\mathbf{v}, \mathbf{A}). \tag{A.107}$$

Pentru ultima egalitate din (107) am folosit încă o dată definiţia (99). Astfel am obţinut invarianţa lui $h$ relativ la $g$.

In paragraful 2.7.3 intitulat corpuri solide anizotrope vom defini câteva grupuri de simetrie materială $g$, care sunt caracterizate prin relaţia (93) şi care corespund alegerii $\mathcal{G} \equiv Ort$ sau $\mathcal{G} \equiv Ort^+$.

Teoremele pe care le-am demonstrat aici, permit obţinerea de reprezentări pentru funcţii anizotrope, caracterizate prin grupuri de simetrie $g$, cu proprietatea din (93), pentru $\mathcal{G} \equiv Ort$ sau $\mathcal{G} \equiv Ort^+$, dacă se utilizează teoremele de reprezentare formulate de Wang [1970].

# BIBLIOGRAFIE

**Astarita G., Marrucci G.** - Principles of non-newtonian fluid mechanics. McGraw-Hill, 1974.

**Beju I., Soós E., Teodorescu P.P.** - Tehnici de calcul vectorial cu aplicaţii. Editura Tehnică, Bucureşti, 1976.

**Beju I., Soós E., Teodorescu P.P.** - Tehnici de calcul tensorial cu aplicaţii. Editura Tehnică, Bucureşti, 1977.

**Beju I., Soós E., Teodorescu P.P.** - Euclidian tensor calculus with applications. Editura Tehnică - Abacus Press, 1983.

**Braun I., Reiner M.** - Problems of cross viscosity. Quart. J. Mech. Appl. Math. **5**, 42-53, 1952.

**Cartan H.** - Calcul diférentiel. Formes diférentielles. Hermann Paris. 1967.

**Cleja-Ţigoiu S.,Cristescu N.** - Teoria plasticităţii cu aplicaţii în prelucrarea metalelor. Univ.Bucureşti, 1985.

**Cleja-Ţigoiu S.** - Constitutive equations for rock-type materials (finite deformation). Int. J. Engng.Sci. **29**, 1531-1544, 1991.

**Cleja-Ţigoiu S.** - Models in multiplicative finite elastoplasticity in Collection "Travaux en cours", Hermann, Eds. de sciences et des arts (în curs de apariţie), 1997.

**Coleman B.D.** Kinematical concepts with applications in the mechanics and thermodynamics of incompressible viscoelastic fluids. Arch. Rat. Mech. Anal. **9**, 273- 300, 1961.

**Coleman B.D., Noll W.** - On certain steady flows of general fluids. Arch. Rat. Mech. Anal. **3**, 289- 303, 1959. a.

**Coleman B.D., Noll W.** - Helical flow of general fluids. J. Appl. Phys. 30, 1508-1512, 1959. b.

**Coleman B.D., Noll W.** - An Approximation Theorem for Functionals, with Applications in Continuum Mechanics. Arch.Rat.Mech.Anal., **6**, 5, 355-370, 1960.

**Coleman B.D., Markovitz H., Noll W.** - Viscometric Flows of non-newtonian fluids. Spinger-Verlag, New York , 1966.

**Coleman B.D., Noll W.** - Foundations of Linear Viscoelasticity. Reviews of modern physics, **33**, 239-249, 1961, sau in Noll W., The foundations of mechanics and thermodynamics, Selected papers. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 113-123, 1974.

**Cristescu N., Suliciu I.** - Viscoplasticitate. Ed.Tehnică Bucureşti, 1976.

**Cristescu N., Suliciu I.** - Viscoplasticity. Martinus Nijhoff, Netherlands, 1982.

**Cristescu N.** - Mecanica rocilor, Modele matematice reologice. Ed. Ştiinţifică, Bucureşti, 1990.

**Cristescu N.** Rock Rheology, Kluwer, Dordrecht, 1989.

**Dincă G.** - Operatori monotoni în teoria plasticităţii. Ed. Academiei, 1972.

**Dodson A.G., Townsend P., Walters K.** - Comput. Fluids , **2**, 213, 1974.

**Dragoş L.** - Principiile mecanicii analitice. Ed.Tehnică Bucureşti, 1976.

**Dragoş L.** - Principiile mecanicii mediilor continue. Ed.Tehnică, Bucureşti,1983.

**Dunn J.E., Fosdick R.L.** - Thermodynamics, Stability, and Boundedness of fluids of Complexity 2 and fluids of second grade Arch.Rat.Mech.Anal. **56**, 191- 252, 1974.

**Duvaut G., Lions J.L.** - Les inéquations en mécanque et en physiques. Dunod, Paris, 1972.

**Ericksen J.L.** - The secondary flow phenomena in non-linear fluids. Tappi **42**, 773-775, 1959.

**Eringen A.C.** - The behavior of certain visco-elastic materials in laminar shearing motions. Visco-elasticity: Phenomenological Aspects, New York: Academic Press, 77-91, 1960.

**Eringen A.C.** - Mechanics of Continua. John Wiley and Sons Inc.,New York-London-Sydney, 1967.

**Fetecău C.** - Fluide nenewtoniene - teorie şi aplicaţii, Ed.Gh.Asachi,Iaşi,1995.

**Fredrickson A.G.** Helical flow of an annular mass of visco-elastic fluid, Chem. Engr. Sci. **11**, 252-259, 1960.

**Fosdick R.L., Rajagopal K.R.** - Thermodynamics, Stability, and Boundedness of fluids of third grade. Proc. Roy. Soc. London A, **339**, 351 - 377,1980.

**Freudental A.M., Geiringer H.** - The mathematical theories of the inelastic continuum, Spinger- Verlag, 1958.

**Gurtin M.** - An Introduction to Continuum Mechanics. Acad.Press, 1981.

**Gurtin M., Sternberg E.** - On the linear theory of viscoelasticity Arch.Rat. Mech.Anal., **11**, 291-356, 1962.

**Gurtin M., Williams W., Suliciu I.** - On the rate constitutive equations and energy of viscoelastic and viscoplastic materials. Int. J. Solids Struc. **16**, 607- 617, 1980.

**Halanay A.** - Ecuaţii diferenţiale. Ed. Didactică şi Pedagogică, 1970.

**Huilgol R.R.** - Continuum mechanics of viscoelastic liquids. J.Wiley & Sons,Inc., New York, 1975.

**Huilgol R.R., Phan-Thien N.** - Recent advances in the continuum mechanics of viscoelastic liquids. Int.J.Engng.Sci., **24**, 161-251, 1986.

**Kecs W., Teodorescu P.P.** - Introducere în teoria distribuţiilor cu aplicaţii. Editura tehnică, Bucureşti, 1975.

**Iacob C.** - Introduction mathematique á la Mèquanique des fluides, Bucarest, Ed. de l'Acamémie de la R.P.R., Paris- Gauthier - Villards, 1959.

**Iacob C.** - Mecanica Teoretică. E.D.P., Bucureşti, 1971.

**Ionescu I.R., Sofonea M.** - Quasistatic processes for elastic-viscoplastic materials, Q.Appl. Math., 46, 229-243, 1988.

**Ionescu I.R., Sofonea M.** - Functional and numerical methods in visco-plasticity, Oxford Univ.Press. Oxford, 1993.

**Ladijesnkaia O.A.** - Matematiceskie voproci dinamiki viascoi jidkosti, Nauka, Moskva, 1970. (lb. rusa)

**Langlois W.E., Rivlin R.S.** - Slow steady-state flow of visco-elastic fluid through non-circular tubes, Rend. Mat. **22**, 169, 1963.

**Larson R.G.** - Constitutive Equations for Polymer Melts and Solutions,Butter-worths, 1989.

**Léné P.** -Sur les matériaux élastiques à l'énergie de déformation non quadratique. J. Mécanique, **13**, 3, 499-534, 1974.

**Leitman M.J., Fisher M.C.** - The linear theory of viscoelasticity, Handbuch der Physik, **VI 3/3**, 1-123, 1974.

**Lions J.L.** - Quelques methodes de rśolution des problèmes aux limites non liéaires. Dunod, Paris, 1969.

**Liu I Shih** - On representation of anisotropic invariants, Int.J. Engng. Sci. **20**, 10, 1099-1109, 1982.

**Malvern L.E.** - Introduction to the mechanics of a continous medium. 1969.

**Markovitz H.** - Normal effect in polysiobutylene solutions, II. Classification of rheological theories. Trans. Soc. Rheol. **1**, 37-52, 1957.

**Mazilu P., Sburlan S.** - Metode funcţionale în rezolvarea ecuaţiilor teoriei elasticităţii. Ed. Acad. Bucureşti, 1973.

**Mihlin S.G.** - Variaţionîie metodîv matematicescoi fizike. Moskva, 1957.

**Mirică Şt.** - Ecuaţii diferenţiale şi cu derivate parţiale. Univ. Buc., 1989.

**Necǎs J.** - Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques, Acad., Praha, 1967.

**Necǎs J., Hlaváček I.** - Mathematical theory of elastic and elasto-plastic bodies: an introduction. Elsevier scientific publishing company, Amsterdam-Oxford New York, 1981.

**Noll W.** - A mathematical theory of the mechanical behavior of continous media. Arch. Rat. Mech. Anal. **2**, 197-226, 1958; sau în The foundations of mechanics and thermodynamics, Selected papers. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1-30, 1974.

**Noll W.** - Motions with constant stretch hystory, Arch.Rat.Mech.Anal.,**11**, 97-105, 1962, sau în The foundations ..., 125-133, 1974.

**Noll W.** - A new mathematical theory of simple materials, Arch. Rat.Mech.Anal., **48**, 1-50, 1972; sau în The foundations ..., 243-292, 1974.

**Noll W.** - Proof of the maximality of the orhogonal group in the unimodular group. **4**, 323- 425, 1965; sau în The foundations ..., 200-202, 1974.

**Nowacki W.** - Teoria uprugosti, Mir, Moskva, 1975. (lb. rusă)

**Oldroyd J.G.** - On the formulation of rheological equations of state. Proc. Roy. Soc. London A **200**, 523-541 , 1950.

**Pavel N., Ursescu C.** - Existence and uniqueness for some non-linear functional equations in a Banach space, Anal.Şt.Univ.Iaşi,Mat., **XX**,53-58,1974.

**Pipkin , Rivlin R.S.** - Normal stresses in flow through tubes of non- circular cross- section, ZAMP, **14**, 738- 1963.

**Reiner R. S.** - Phenomenological Macroreology. Rheology, Theory and Applications 1, New York: Academic Press. 1956.

**Rivlin R.S.** - Solutions of some problems in the exact theory of visco-elasticity. J. Rat. Mech. Anal. **5**, 179-188, 1956.

**Rivlin R.S., Ericksen J.L.** - Stress deformation relations for isotropic materials. J. Rat. Mech. Anal. **4**, 325-425, 1965.

**Roşca I.** - Ecuatii cu derivate parţiale. Ed. Universitaţii Bucuresti, 1997.

**Serrin J.** - Mathematical principles of clasical fluid mechanics, The Encyclop., **VIII**, part I, 125-263, 1959.

**Serrin J.** - Poiseuille and Couette flow of non-newtonian fluids. Z. angew. Math. Mech. 39, 295-299, 1959.

**Solomon L.** - Elasticitate liniară. Introducere matematica in statica solidului elastic. Ed. Academoei R.S.R., Bucureşti, 1969.

**Soós E., Teodosiu C.** - Calcul tensorial cu aplicaţii în mecanica solidelor, Ed. Şt.Enc., 1983.

**Temam R.** - Navier - Stokes Equations ( theory and numerical analysis).North-Holland Pub.Comp., 1979.

**Teodorescu P.P.** - Dinamica corpurilor liniar elastice. Ed. Academiei R.S.R., Bucureşti, 1972.

**Teodorescu P.P., Ille V.** - Teoria elasticităţii şi introducere î n mecanica solidelor deformabile, **vol. 1-3** , Ed. Dacia, Cluj-Napoca,1976-1980.

**Townsend P., Walters K., Waterhouse W.M.** - J. Non-Newt. Fluid Mech., **1**, 107, 1976.

**Truesdell C.** - A First Course in Rational Continuum Mechanics. Acad. Press, 1972.

**Truesdell C., Noll W.** - The non-linear field theories of Mechanics, Handb. der Physik, **III /3**, 1965.

**Truesdell C., Toupin R.A.** - The clasical field theories. Encyclop.of Phys., **III /1**, ed. by S. Flügge, Berlin - Gottingen,Springer, 1960.

**Ţigoiu V.** - Propagări de unde şi termodinamică pentru fluide de gradul trei. Studii şi cercetări, **39**, 4, 279-348, 1987.

**Ţigoiu V.** - Existence criterion for secondary flows in eliptic pipes for viscoelastic third grade fluids, Rev.Roum.Sci.Techn.Méc.Appl., **40**, 2-3, 145, 1995,a.

**Ţigoiu V.** - The flow of a viscoelastic third grade fluid between two coaxial rotating discs, with heat transfer, Rev. Roum. Math. Pures Appl., **XL**, 5-6, 541, 1995,b.

**Vainberg M.M.** - Variaţionîi metod i metod monotonîh operatorov v teorii nelineinîh uravnenii. Nauka, Moskva, 1972.

**Walters K.** - Rheometry. John Wiley & Sons, Inc. New York, 1975.

**Wang C.C.** - Stress relaxation and the principle of fading memory, Arch.Rat. Mech.Anal., **18**, 343-366, 1965.

**Wang C.C.** - A representation theorem for constitutive equation of a simple material in motions with constant stretch history, Arch.Rat.Mech.Anal., **20**, 329-340, 1965.

**Wang C.C.** - A New Representation Theorem for Isotropic Functions, Arch.Rat. Mech.Anal., **36**, 166-223, 1970.

**Wang C.C., Truesdell C.** - Introduction to rational elasticity. Groningen, Wolters- Nordhoff, 1972.

Tiparul s-a executat sub cda 404/1997 la
Tipografia Editurii Universității din București

ISBN - 973 - 575 - 202 - 6

Lei 16900