

# DETERMINAREA MASEI PĂMÂNTULUI CU AJUTORUL PENDULULUI

Dimitrie OLENICI\*

**Key Words:** pendulum, Galileo Galilei, gravitation, Earth mass, Foucault.

Pendulul este un dispozitiv fizic extrem de simplu dar, în decursul timpului rolul său în progresul omenirii a fost colosal. Primele studii științifice despre pendul au fost făcute de către italianul Galileo Galilei care a observat în timpul unei liturghii, pe când era student la Pisa, balansul unui policantru și utilizând drept cronometru pulsul de la mână constată că oscilațiile se fac cu aceeași perioadă independent de amplitudinea lor fenomen numit acum isocronismul micilor oscilații.

În 1637, Galilei concepe un ceas care să funcționeze pe baza pendulului, lucru realizat de fiul său Viviani în anul 1649. Utilizarea pendulului în măsurarea timpului crește precizia ceasurilor din acele vremuri de la 15 minute pe zi la 15 secunde. Ceasul cu pendul este perfecționat de olandezul Cristian Huygens care în anul 1656 introduce ancora ce limitează amplitudinea oscilațiilor la cca. 5° și micșorează energia necesară funcționării.

Cam în aceeași perioadă în jurul anului 1666 Robert Hooke studiază pendulul conic care nu execută oscilații ci se rotește pe un cerc sau o elipsă. Hooke îi sugerează lui Isaac Newton că mișcarea pendulului conic ar putea fi un model pentru mișcarea orbitală a planetelor care ar avea două componente: o componentă inerțială tangentă la traiectorie și o componentă în direcția radială. Acest lucru a dus la descoperirea de către Newton a legii atracției universale. Tot Hooke este cel care a considerat că pendulul ar putea fi folosit la măsurarea forței de atracție gravitațională.

Un alt moment în istoria pendulului este anul 1851, când fizicianul francez J.B.L.Foucault arată că planul de oscilație al unui pendul rămâne neschimbat în timp asemenea planului unui giroscop, indiferent de rotația sistemului de suspensie. Foucault consideră că acest lucru ar putea demonstra rotația Pământului în jurul axei sale și efectuează demonstrații cu un pendul cu lungimea de 68m instalat în Panteonul din Paris. Aceasta a fost prima demonstrație a rotației Pământului care nu depinde de observațiile cerești. În prezent, prin muzee, universități, planetarii, observatoare astronomice și alte instituții sunt instalate sute de astfel de pendule numite pendule Foucault cu care se demonstrează marelui public rotația Pământului în jurul axei sale.

În România, primele demonstrații cu pendulul Foucault s-au realizat timp de câteva luni în anul 1855, în București, la Ateneul Român.

Începând de la eclipsa de Soare din 11 august 1999, la planetariul din Suceava se efectuează demonstrații cu pendulul Foucault și studii privind anomaliile care apar în comportamentul unui pendul atunci când se produc eclipse, conjuncții și opoziții.

## **Pendulul gravitațional și masa Pământului**

Un rezultat deosebit de interesant care se poate obține cu ajutorul pendulului este determinarea masei Pământului. Această lucrare de laborator se realizează la Observatorul Astronomic din Suceava începând din anul 2008, ca o aplicație practică a studenților care studiază geografia, și a elevilor de liceu la orele de fizică.

Realizarea lucrării cuprinde două etape. În prima parte are loc o dezbatere cu participanții despre noțiunile și legile fizice care sunt necesare și trebuie înțelese pentru a efectua lucrarea. În partea a doua se fac determinările experimentale și se discută rezultatele obținute.

În continuare, prezentăm noțiunile care se dezbate în faza pregătitoare a lucrării. Această dezbatere este necesară deoarece unii studenți au absolvit licee de profiluri diferite.

---

\* Cercetător științific la Universitatea "Ștefan cel Mare", Suceava, departamentul Observator Astronomic-Planetariu.

### 1. Masa unui corp

Prin masa  $m$  se înțelege cantitatea de materie conținută de un corp. În fizică, masa este considerată o mărime fundamentală, scalară (adică nu are direcție și sens), se măsoară cu balanța și are ca unitate de măsură kilogramul, kg.

### 2. Greutatea unui corp

Prin greutate înțelegem forța  $\vec{G}$  cu care un corp este atras de către Pământ. Experimental s-a constatat că greutatea reprezintă produsul dintre masa acelui corp și o mărime  $\vec{g}$  numită accelerație gravitațională (Fig.1).

Greutatea unui corp este o mărime vectorială și se măsoară cu dinamometrul. (În popor dinamometrul este numit cântarul cu arc).

$$1) \vec{G} = m \vec{g}$$

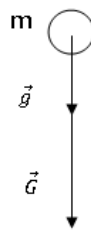


Fig.1

La nivelul mării accelerația gravitațională are valoarea  $g_0 = 9,81 \text{ m/s}^2$

*Observație:* Forța și accelerația sunt mărimi vectoriale caracterizate de direcție, mărime și sens și se reprezintă cu săgeată. Valorile lor numerice sunt mărimi scalare și se reprezintă fără săgeată.

### 3. Legea atracției universale

În anul 1784, fizicianul englez Isaac Newton a descoperit că între oricare două corpuri din Univers apare o forță de atracție  $\vec{F}$  a cărei valoare se calculează cu formula :

$$2) F = k \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \text{ unde:}$$

$k = 6,7 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg} \cdot \text{s}^2$ , este așa numita constanta universală a gravitației sau constanta Cavendish,  $m_1$  este masa primului corp,  $m_2$  este masa celui de al doilea corp iar  $r$  este distanța dintre centrele de masă ale celor două corpuri (Fig.2).

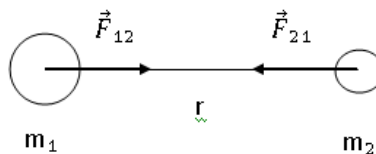


Fig.2

Pentru un corp situat la suprafața Pământului valoarea forței de atracție gravitațională este dată de formula:

$$3) F = k \frac{M \cdot m}{R^2}, \text{ unde:}$$

$k$  este constanta Cavendish,  $M$  este masa Pământului,  $m$  este masa corpului iar  $R = 6378 \text{ km} = 6378 \cdot 10^3 \text{ m}$ , este raza Pământului. (Fig 3).

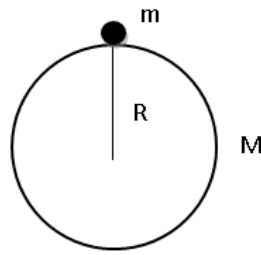


Fig.3

#### 4. Echivalența greutate-atracție gravitațională

Pentru un corp situat la suprafața Pământului forța de greutate  $G$  și forța de atracție gravitațională  $F$  sunt egale  $F=G$ .

Din relația de echivalență 4)  $k \frac{M \cdot m}{R^2} = m \cdot g$ , după simplificare, obținem pentru calculul masei Pământului formula:

$$5) M = \frac{R^2}{k} g$$

Aici singura necunoscută este accelerația gravitațională  $g$ , care în practică se poate determina cu ajutorul unui pendul.

#### 5. Pendulul gravitațional

Prin pendul se înțelege un corp de masă  $m$  suspendat de un fir inextensibil de lungime  $L$ , care, scos din poziția de echilibru, pentru oscilații de amplitudine mică (sub  $5^\circ$ ) oscilează după formula:

$$6) T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

unde:

$T$  este perioada de oscilație

$L$  este lungimea firului

$g$  este accelerația gravitațională

Considerand că firul  $L$  face un unghi  $\alpha$  cu verticala  $V$ , atunci greutatea  $G$  se descompune în două componente (Fig.4):

- o componentă  $G_t = G \sin \alpha$  care pune pendulul în mișcare și este tangentă la traiectoria pendulului și
- o componentă  $G_n = G \cos \alpha$  normală la traiectoria pendulului și care este anulată de rezistența firului

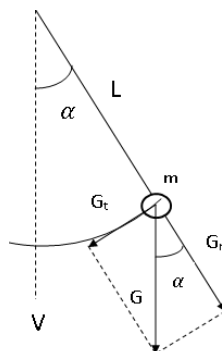


Fig 4

Perioada de oscilație a pendulului se măsoară în secunde și nu depinde de masa pendulului. Din formula perioadei de oscilație a pendulului, după ridicare la pătrat obținem pentru accelerația gravitațională formula:

$$7) g = L \frac{4\pi^2}{T^2}$$

## 6. Calcul masei Pământului

Înlocuind valoarea lui  $g$  în formula care ne dă masa Pământului, obținem pentru calculul masei Pământului relația:

$$8) M = \frac{R^2}{k} \cdot L \frac{4\pi^2}{T}$$

Aici singura necunoscută este perioada  $T$ . Prin urmare, putem calcula masa Pământului cu relația 8, dacă reușim să determinăm perioada de oscilație a unui pendul.

## II. Procedeu experimental

### 1. Materiale necesare

Drept pendul se poate utiliza un bob special construit, o bilă de metal, un lacăt, un rulment o sticlă cu apă sau orice alt corp, care poate fi atârnat cu o sfoară de cca 1,5-3m de o scoabă bătută în tavan.

Pentru măsurarea timpului se utilizează un cronometru. Poate fi folosit cronometrul de la telefonul mobil.

### 2. Efectuarea măsurărilor

Cu o ruletă sau o tijă gradată mai lungă se măsoară lungimea  $L$  a pendulului. Aceasta se consideră între punctul de suspensie și mijlocul corpului utilizat drept bobul pendului, unde credem că ar fi centrul de masă.

Un experimentator scoate pendulul din poziția de echilibru și-l ține cu ambele mâni la distanța de cca 40-70cm apoi desface mâinile brusc. În acest mod lansarea penului se face fără trepidații. Un al doilea experimentator privește perpendicular pe planul de oscilație și ia în considerare un anumit număr de oscilații. O oscilație completă se consideră intervalul de timp între două treceri successive ale pendulului în același sens prin verticala  $V$ .

Pentru ca rezultatul să fie cât mai apropiat de realitate se fac mai multe serii de determinări, măsurând de fiecare dată lungimea pendulului și luând în considerare alt număr de oscilații (ex 10, 20, 30, ...) și în final se face media.

Rezultatele obținute se trec într-un tabel de date care cuprinde: Lungimea  $L$  a pendulului (în metri), numărul de oscilații  $n$  luat în considerare la fiecare determinare, timpul  $t$  (în secunde) în care se fac cele  $n$  oscilații, perioada de oscilație  $T$  (în secunde) care se află împărțind timpul măsurat la numărul de oscilații, adică  $T = t/n$ , accelerația gravitațională  $g$  calculată cu formula 7) masa Pământului  $M$  calculată cu formula 8) și eroarea absolută  $\mathcal{E}$ .

Det.	L(m)	n	T(s)	T(s)	g (m/s <sup>2</sup> )	M(kg)	$\mathcal{E}$
1	2,13	10	29,3	2,93	9,75	$5,8353 \cdot 10^{24}$	0,1389
2	2,12	20	58	2,90	9,89	$6,0317 \cdot 10^{24}$	0,0575
3	2,12	30	87,63	2,92	9,8	$5,9768 \cdot 10^{24}$	0,0026

$$M_0 = 5,9742 \cdot 10^{24} \text{kg}, \quad \bar{M} = 5,9419 \cdot 10^{24} \text{kg}, \quad E = 0,54\%$$

Tabelul nr. 1 Sunt prezentate rezultatele obținute în cadrul a trei determinări.

Sub tabel este menționată valoarea standard  $M_0$  a masei Pământului, valoarea medie  $\bar{M}$  obținută de noi și eroarea relativă  $E$ , care ne arată precizia cu care am efectuat determinarea.

### 3. Calculul erorilor

În final, cu ajutorul formulei: 9)  $\bar{M} = \frac{M^1 + M^2 + M^3 + \dots + M^n}{n}$  calculăm valoarea medie  $\bar{M}$  a masei Pământului obținută de noi. Comparăm această valoare cu valoarea standard  $M_0 = 5,9742 \times 10^{24} \text{ kg}$  și constatăm că aceasta poate să fie diferită. Acest lucru se datorează faptului că orice determinare experimentală este afectată de erori care pot apărea din diverse cauze cum ar fi: erori de măsură, de rotunjire a unor numere, erori sistematice cauzate de defecțiuni ale aparatelor, accidentale, grosolane (citire și/sau notare incorectă) etc.

În practică, experimentatorul poate calcula care este eroarea rezultatului obținut de el în raport cu valoarea reală, luând în considerare diverse tipuri de erori.

În cazul de față, vom calcula două tipuri de erori. Eroarea absolută  $\mathcal{E}$  care reprezintă diferența în modul dintre valoarea medie  $\bar{M}$  și un rezultat individual  $\mathcal{E}_{1,2,3,\dots} = \bar{M} - M_{1,2,3,\dots}$ . Eroarea relativă  $E$ , care reprezintă raportul dintre eroarea absolută medie  $\bar{\mathcal{E}}$  și valoarea standard  $M_0$

$$10) E = \frac{\bar{\mathcal{E}}}{M_0} = \frac{\bar{M} - M_0}{M_0}$$

Eroarea relativă se exprimă, de obicei, în procente, și ne dă informații despre gradul de precizie cu care au fost efectuate determinările.

În final, precizăm că lucrarea este deosebit de atractivă pentru elevii de liceu și studenții de la geografie care descoperă cât de simplu pot determina ei înșiși masa Pământului, un lucru atât de important pentru știință, în general, și astronomie în particular.

#### 4. Calculul maselor altor corpuri din sistemul solar

O dată cunoscută masa Pământului, ținând cont de legea a treia a lui Kepler și de raportul dintre masele Pământului și a Lunii, se pot calcula masele altor corpuri din sistemul solar.

#### Bibliografie

1. Gh. Chiș, 1968: *Astronomie, manual pentru clasa a XI-a reală*, Editura didactică și pedagogică, București.
2. H.Foye, 1883: *Cours d'Astronomie, de L'Ecole Polytechnique, deuxieme partie*, Paris, Gauthier-Vilars, imprimeur-librarie.
3. V. I. I Veronova, 1953: *et al. Lucrări practice de fizică*, Editura tehnică.
4. Informații Internet (*Galilei, Huygens, Hooke, Newton, pendul gravitațional*).

### DETERMINATION OF MASS EARTH BY PENDULUM

The pendulum is a simple device, used during centuries to uncover important discoveries for science and engineering. In 1637, Galileo Galilei propose the use of the pendulum to build a mechanical clock based on it, clock put into practice by Cristian Huygens in 1656.

Robert Hooke, in 1666, consider that the movement of the conical pendulum could be a model for planets orbital motion, and that it can be used for deriving gravitational pull (attraction). One of the most renown experiments using pendulum, is the demonstration of the axial motion of the Earth around its axis, demonstration made by J.B.L.Foucault in 1851.

In this paper is shown how, by using the formula which describes the period of oscillation of a pendulum, the gravitational acceleration can be determined. Then, by taking into account the law of universal attraction, the Earth mass can be derived. This laboratory experiment is very attractive for high school and college students, which discover themselves how easy is to determine the Earth mass using such a simple device.